

# Matemática de los Sistemas Biológicos

## Práctica 5

F. M. Cabrera

21 de junio de 2021

Todo el código implementado en esta practica puede encontrarse [acá](#).

### Ejercicio 1 - Sistema SIRS

Tenemos el sistema de susceptibles-infectados-recuperados con pérdida de inmunidad, con una tasa de contagio  $\beta$ , una duración media de infección  $\tau_I$  y de pérdida de inmunidad  $\tau_R$ . Las ecuaciones de la dinámica de campo medio son

$$\frac{ds(t)}{dt} = -\beta s(t) i(t) + \frac{1}{\tau_R} r(t) \quad (1)$$

$$\frac{di(t)}{dt} = \beta s(t) i(t) - \frac{1}{\tau_I} i(t) \quad (2)$$

$$\frac{dr(t)}{dt} = \frac{1}{\tau_I} i(t) - \frac{1}{\tau_R} r(t) \quad (3)$$

en donde además

$$s(t) + i(t) + r(t) = 1 \quad (4)$$

ya que no consideramos demografía.

Primero queremos encontrar los puntos fijos  $(s^*, i^*, r^*)$  del sistema, para lo cual igualamos a cero las ecuaciones 1, 2 y 3. De la Ec. 3 obtenemos que

$$0 = \frac{i^*}{\tau_I} - \frac{r^*}{\tau_R} \Rightarrow \boxed{\frac{i^*}{\tau_I} = \frac{r^*}{\tau_R}}. \quad (5)$$

Por otro lado, igualando las derivadas temporales de las ecuaciones 1 y 2 a cero y restandolas tenemos que

$$0 = 2\beta s^* i^* - \underbrace{\left(\frac{i^*}{\tau_I} + \frac{r^*}{\tau_R}\right)}_{\frac{i^*}{\tau_I}} = 2\beta s^* i^* - 2\frac{i^*}{\tau_I} \Rightarrow \beta s^* i^* = \frac{i^*}{\tau_I}. \quad (6)$$

La solución en donde  $i^* = 0 \Rightarrow r^* = 0 \Rightarrow s^* = 1$  no es una solución que nos interese ya que en el caso en donde no hay infectados y solo hay individuos susceptibles. Entonces, si  $i^* \neq 0$ , obtenemos de la Ec. 6 que

$$\boxed{s^* = \frac{1}{\beta\tau_I}}. \quad (7)$$

En este punto la primera parte del ejercicio esta resuelta, pero vamos a sacar una condición mas que luego vamos a usar. Usando las Ec. 4 y 7 tenemos que

$$\frac{i^*}{\tau_I} = \frac{r^*}{\tau_R} = \frac{1-i^*-s^*}{\tau_R} = \frac{1}{\tau_R} \left(1 - \frac{1}{\beta\tau_I}\right) - \frac{i^*}{\tau_R} = \frac{\beta\tau_I-1}{\tau_R\beta\tau_I} - \frac{i^*}{\tau_R} \quad (8)$$

$$\Rightarrow i^* \left(\frac{1}{\tau_I} + \frac{1}{\tau_R}\right) = i^* \frac{\tau_R+\tau_I}{\tau_R\tau_I} = \frac{\beta\tau_I-1}{\tau_R\beta\tau_I} \quad (9)$$

$$\Rightarrow \boxed{i^* = \frac{\beta\tau_I-1}{\beta(\tau_R+\tau_I)}}. \quad (10)$$

Ahora queremos analizar la estabilidad del punto fijo. Debido a la cond. 4, podemos reescribir las ecuaciones de la dinámica para dejarlas solo en términos de  $s$  e  $i$ , usando que  $r = 1 - s - i$ , para lo cual obtenemos

$$\frac{ds}{dt} = -\beta si + \frac{1-s-i}{\tau_R} \quad (11)$$

$$\frac{di}{dt} = \beta si - \frac{1}{\tau_I} i. \quad (12)$$

Calculando el Jacobiano obtenemos

$$J = \begin{pmatrix} -\beta i - \frac{1}{\tau_R} & -\beta s - \frac{1}{\tau_R} \\ \beta i & \beta s - \frac{1}{\tau_I} \end{pmatrix} \quad (13)$$

y evaluando en el punto fijo utilizando las ecuaciones 7 y 10

$$J|_{(s^*, i^*)} = \begin{pmatrix} -\beta i^* - \frac{1}{\tau_R} & -\beta s^* - \frac{1}{\tau_R} \\ \beta i^* & \beta s^* - \frac{1}{\tau_I} \end{pmatrix} \quad (14)$$

$$J|_{(s^*, i^*)} = \begin{pmatrix} -\frac{\tau_I(\beta\tau_R+1)}{\tau_R(\tau_I+\tau_R)} & -\frac{\tau_R+\tau_I}{\tau_R\tau_I} \\ \frac{\beta\tau_I-1}{\tau_R+\tau_I} & 0 \end{pmatrix} \quad (15)$$

y se puede obtener sin problema tanto la traza como el determinante

$$\text{tr}(J|_{(s^*, i^*)}) = -\frac{\tau_I(\beta\tau_R+1)}{\tau_R(\tau_I+\tau_R)} \quad (16)$$

$$\det(J|_{(s^*, i^*)}) = \frac{\beta\tau_I-1}{\tau_R+\tau_I}. \quad (17)$$

Los autovalores del sistema vendrán dados por

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left( \text{tr}(J) \pm \sqrt{\text{tr}(J)^2 - 4\det(J)} \right). \quad (18)$$

Dado que tanto  $\tau_R$ ,  $\tau_I$  como  $\beta$  son positivos, siempre se cumple que  $\text{tr}(J|_{(s^*, i^*)}) < 0$ . Por otro lado, de la Ec. 7 tenemos que  $s^* = \frac{1}{\beta\tau_I}$ , pero dado que  $s^*$  representa una densidad de población y  $s + i + r = 1$ , tenemos que  $0 \leq s^* < 1$  ( $s^* = 1$  es un equilibrio que ya descartamos) y para que esto se cumpla es necesario que  $\beta\tau_I > 1$ . De la Ec 17 se desprende entonces que  $\det(J) > 0$ .

En este punto, matemáticamente existen 3 posibilidades dependiendo de si  $\text{tr}(J)^2$  es mayor, igual o menor que  $4\det(J)$ . Si  $4\det J < \text{tr}(J)^2$  los autovalores son reales y negativos (ya que  $\text{tr}(J) < 0$ ), con lo cual tenemos un nodo estable. En caso de que  $4\det J = \text{tr}(J)^2$ , los dos autovalores son iguales y el equilibrio es una nodo estable degenerado. Por último, si  $4\det J > \text{tr}(J)^2$  los autovalores son complejos conjugados y su parte real es negativa, de manera que tendremos una espiral estable, con lo cual tanto  $s$  como  $i$  presentan oscilaciones amortiguadas hacia los puntos de equilibrio estables.

## Ejercicio 2 - Epidemia de COVID-19

En la Fig. 1 se observan los datos provistos por la cátedra 2020-tp05-covid19.csv de COVID-19 en Argentina, correspondientes a la cantidad de infectados reportados, muertes reportadas, unidades de terapia intensiva (UTI) y tests realizados a partir del 5 de marzo de 2020 (considerado como día 0). Para algunas fechas en el set de datos, se encontraron valores inválidos, los cuales fueron reemplazados por 0.

Para todos los datos (aunque en menor medida para las UTI), se observan oscilaciones, las cuales pueden deberse a variaciones en la carga de datos en el transcurso de la semana, como por ejemplo una reducción en la cantidad de testeos en los fines de semana.

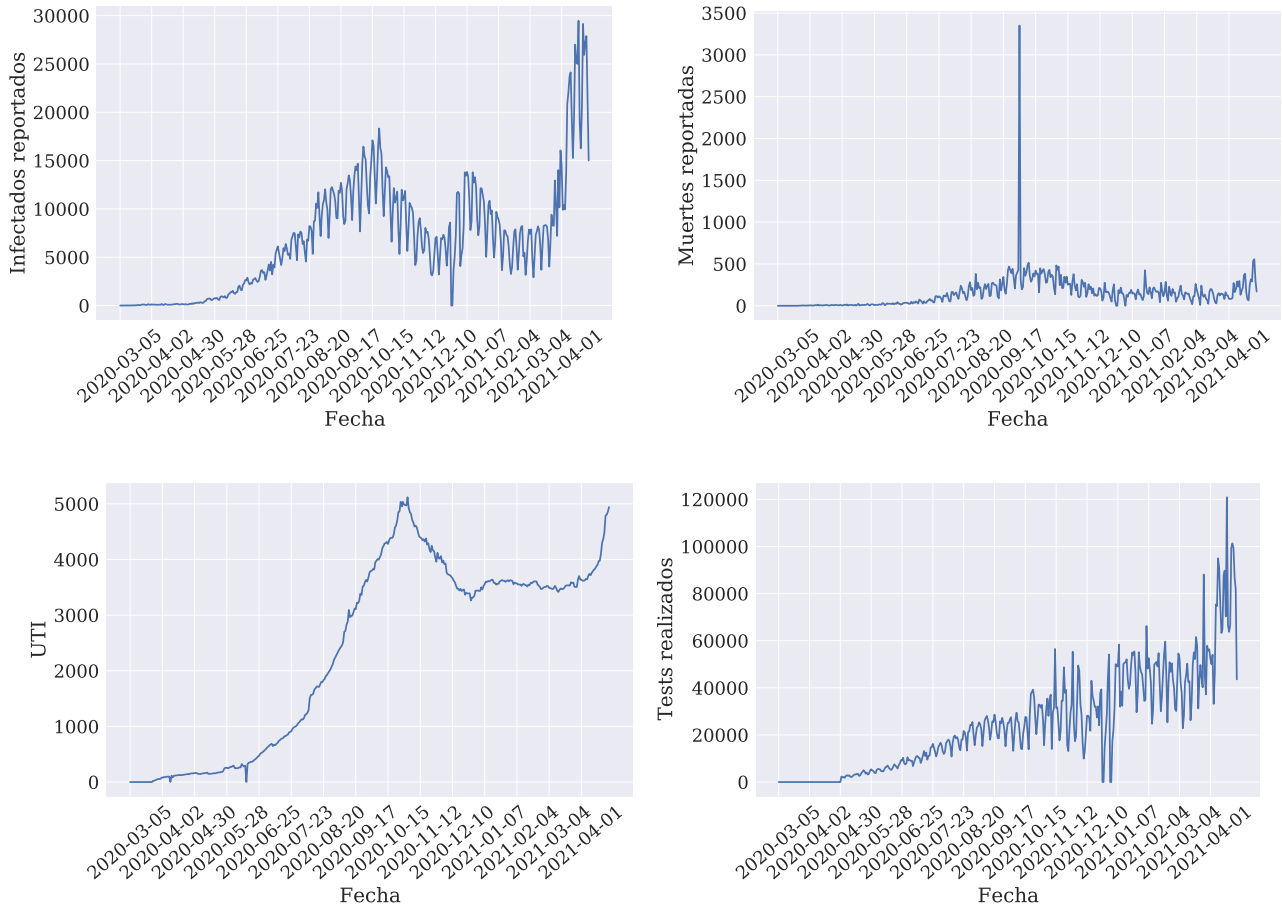


Figura 1: Se observan los datos de infectados, muertes, UTI y test realizados en Argentina durante la pandemia de COVID-19 a partir del 5 de marzo de 2020.

Para la cantidad de infectados reportados, se observa una primera ola de infectados con un pico alrededor del 18 de octubre de 2020. Seguido a esta primera ola se observa un segundo pico de infectados cercano al 7 de enero de 2021, lo cual puede deberse a un aumento en la cantidad de infectados debido a las festividades de navidad y año nuevo.

Para la cantidad de muertes, es llamativo el pico de aproximadamente 3400 muertes en el 1 de octubre de 2020. Esto podría deberse a una carga de datos pendiente realizada en dicha fecha.

En cuanto a las UTI, se observa que la señal es menos ruidosa que el resto de datos, lo cual es razonable ya que las unidades suelen ser utilizadas durante una mayor cantidad de días. Además, se observa un pico en la cantidad de UTI aproximadamente en el 1 de noviembre de 2020, cercano al pico de infectados del 18 de octubre.

Por otra parte, en comparación con los datos de infectados, no se observa el segundo pico adjudicado a las festividades de navidad y año nuevo. Esto podría deberse a que el sector de la sociedad más vulnerable a la enfermedad (y por lo tanto más probable que requieran UTI), no dejó de mantener los recaudos recomendados para evitar el contagio, no así el sector menos vulnerable, aumentando así la cantidad de infectados, pero no las UTI.

En cuanto a la cantidad de tests realizados, no se observa ninguna característica destacable en los datos, más que un aumento sostenido en la cantidad de test a lo largo del tiempo, lo cual puede deberse simplemente a una mejora en los testeos, ya sea en los tipos de testeos (más rápidos o eficaces) como en una mayor capacitación en el personal médico.

Terminado este primer análisis, se procedió a intentar predecir el primer pico de infectados. Para esto, primero se procedió a realizar un suavizado de los datos para disminuir las oscilaciones. Esto se realizó con filtro con una ventana de 7 días y el resultado puede observarse a la izquierda en la Fig. 2.

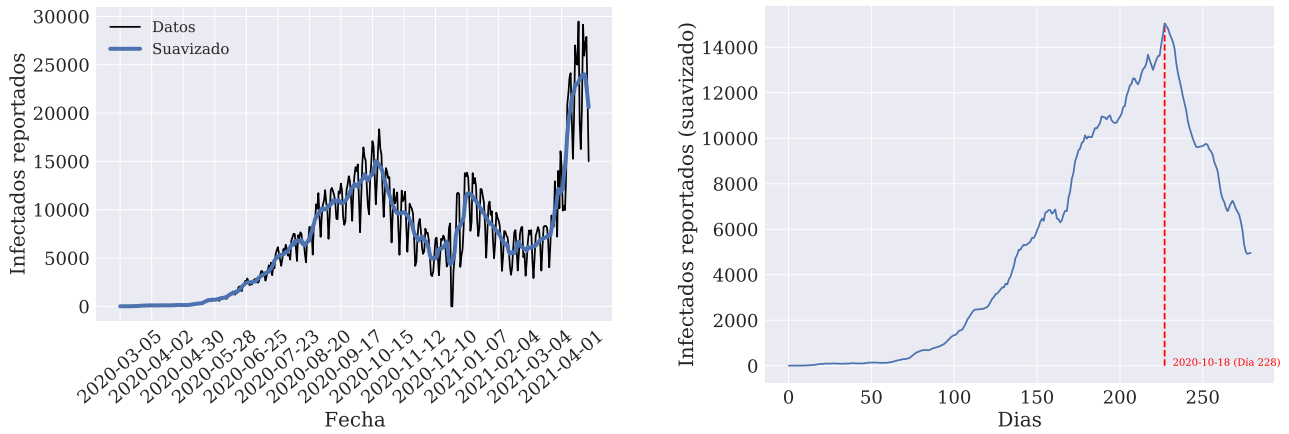


Figura 2: A la izquierda, se observan los datos de la cantidad de infectados reportados y un suavizado de los datos utilizando una ventana de 7 días. A la derecha, se observan los primeros los datos suavizados de la cantidad de infectados, correspondientes a los primeros 280 días y el pico observado en el día 228.

A la derecha en la misma figura, se observa la señal suavizada y el pico de infectados ubicado en el 18 de noviembre de 2020, o el día 228 a partir de la primera fecha con datos disponibles, correspondiente al 5 de marzo de 2020.

Con esta señal suavizada se busco realizar un ajuste con un pico epidémico del tipo  $asech^2(bt + c)$  variando la cantidad de datos utilizados entre 120 y 280 días. En la Fig. 3 se observan una comparación entre los datos de infectados, suavizados, y el ajuste obtenido para utilizando 175, 235 y 270 datos respectivamente.

En la Fig. 4 se observa una comparación entre el pico real ubicado en el día 228 y el pico predicho a partir del ajuste, variando la cantidad de datos utilizados. Si bien se observa que utilizando alrededor de 235 datos, es posible obtener el pico de infectados real, este resultado no es muy esperanzador, ya que se esta "prediciendo un pico de infectados que ya ocurrió. Además de las complicaciones provenientes de la base de datos, la incapacidad de predecir correctamente el pico de infectados puede deberse a hipótesis del modelo SIR que no se cumplen. Por ejemplo, este modelo no contempla la posibilidad de individuos recuperados vuelvan a ser susceptibles luego de un determinado tiempo, lo cual si sucede en el caso del COVID-19, en donde la inmunidad por haber contraído la enfermedad no es permanente.

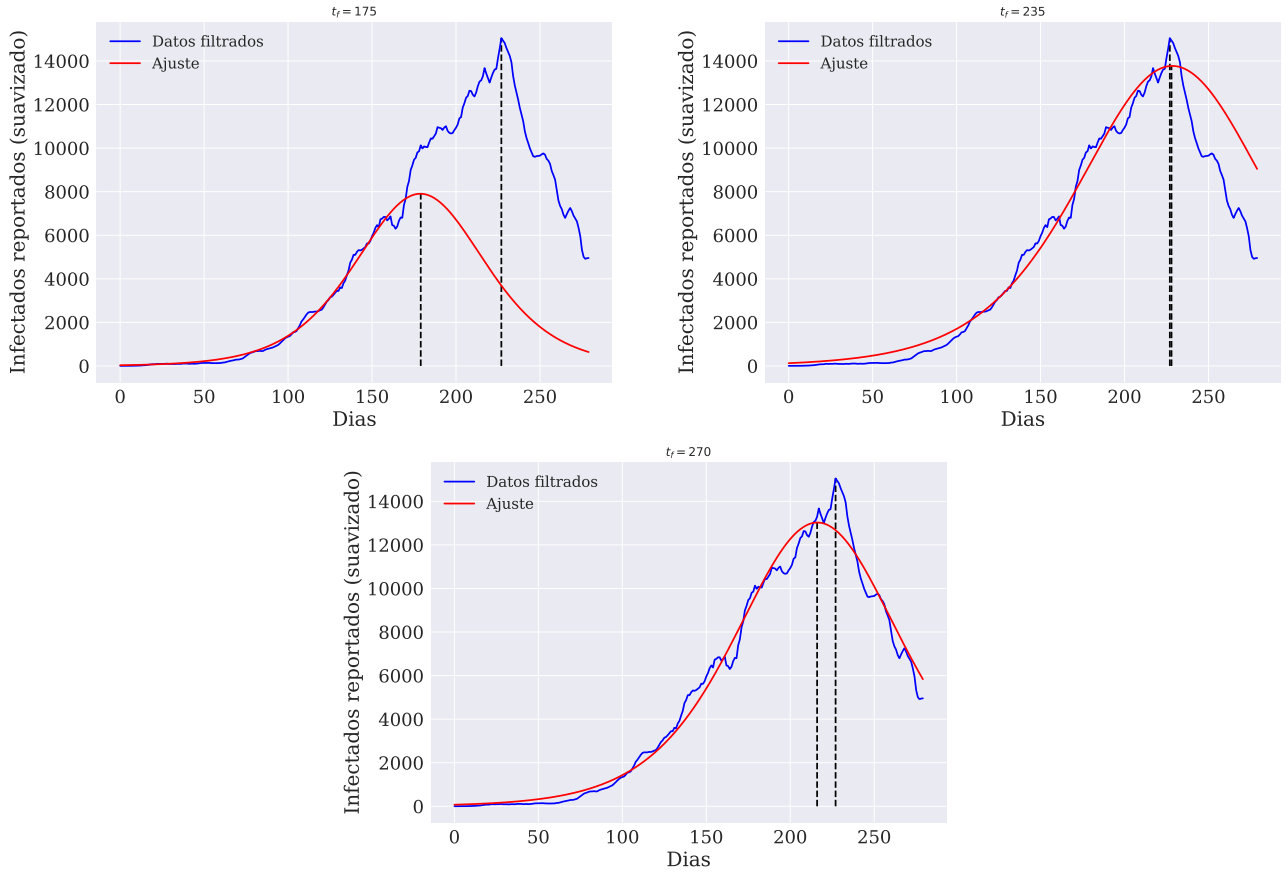


Figura 3: Comparación entre los datos de infectados suavizados y el ajuste con un pico epidémico del tipo  $\text{asech}^2(bt + c)$ , utilizando 175, 235 y 270 datos respectivamente.



Figura 4: Se observan los picos predichos para la primera ola de infectados, variando la cantidad de datos  $t_{fit}$  utilizados para realizar el ajuste.