Matemática de los Sistemas Biológicos
Práctica 6

F. M. Cabrera

24 de junio de 2021

Todo el código implementado en esta practica puede encontrarse acá.

Ejercicio 1 - Halcones y palomas extendidos

Halcones, palomas y bravucones

Queremos analizar el juego de halcones, palomas y bravucones mediante la dinámica del replicador, cuya matriz de payoff es

$$A = \begin{pmatrix} \frac{G-C}{2} & G & G \\ 0 & \frac{G}{2} & 0 \\ 0 & G & \frac{G}{2}. \end{pmatrix} \tag{1}$$

Vamos a tomar $\vec{x} = (x, y, z)$ a las proporciones de halcones, palomas y bravucones, respectivamente. Para que la estrategia de halcón no sea dominante, tomaremos $C > G$. Ademas, recordamos la condición $x + y + z = 1$, con lo cual sera suficiente analizar solo dos ecuaciones de la dinámica. En particular, nosotros vamos a reemplazar $z = 1 - x - y$. Para la dinámica del replicador necesitamos los payoff de cada estrategia, ademas del payoff medio. Estos son

$$f_x = (1, 0, 0)\, A\, (x, y, z)^t = \frac{G-C}{2} x + G\,(y+z) = G - \frac{G+C}{2} x \tag{2}$$

$$f_y = (0, 1, 0)\, A\, (x, y, z)^t = \frac{G}{2} y \tag{3}$$

$$f_z = (0, 0, 1)\, A\, (x, y, z)^t = Gy + \frac{G}{2} z = \frac{G}{2}\,(1 - x + y) \tag{4}$$

y para el payoff medio tenemos que

$$\vec{f} = x f_x + y f_y + z f_z = -\frac{C}{2} x^2 + \frac{G}{2}. \tag{5}$$

Con esto, ya podemos plantear las ecuaciones del replicador para x e y

$$\dot{x} = x\left(f_x - \vec{f}\right) = \cdots = \frac{x}{2}\left(Cx^2 - (G+C)\,x + G\right) \tag{6}$$

$$\dot{y} = y\left(f_y - \vec{f}\right) = \cdots = \frac{y}{2}\left(Cx^2 + Gy - G\right). \tag{7}$$

Pasamos ahora a analizar los puntos fijos del sistema. Si $x = 0 \Rightarrow \dot{x} = 0$, luego para que $\dot{y} = 0$ tenemos dos opciones: una es que $y = 0 \rightarrow z = 1$, con lo cual $(0, 0, 1)$ es un punto fijo. si $y \neq 0$, entonces para el segundo termino de la Ec 7 se anule, obtenemos que $y = 1$, siendo entonces $(0, 1, 0)$ otro punto fijo.

Si $x \neq 0$, el segundo termino de 6 debe anularse. Vemos que

$$Cx^2 - (G+C)\,x + G = C\,(x-1)\left(x\frac{G}{C}\right) \tag{8}$$

con lo cual tenemos dos opciones. Si $x = 1$, entonces como $x + y + z = 1$, obtenemos $(1, 0, 0)$ como equilibrio. Si $x = \frac{G}{C}$, entonces para que $\dot{y} = 0$ necesitamos que $y = 0$ con lo cual $\left(\frac{G}{C}, 0, 1 - \frac{G}{C}\right)$ es punto fijo o que $y = 1 - \frac{G}{C}$, siendo entonces $\left(\frac{G}{C}, 1 - \frac{G}{C}, 0\right)$ el ultimo punto fijo del sistema.

Para estudiar la estabilidad, calculamos las derivadas parciales de las ecuaciones 6 y 7 para obtener el Jacobiano, que resulta ser

$$J = \begin{pmatrix} \frac{G}{2} - (G + C)\, x + \frac{3}{2} C x^2 & 0 \\ C x y & \frac{C}{2} x^2 + G y - \frac{G}{2} \end{pmatrix} \tag{9}$$

con lo cual solo nos queda evaluar en los puntos fijos hallados.

$$J|_{(0,0,1)} = \begin{pmatrix} \frac{C-G}{2} & 0 \\ 0 & \frac{C-G}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Eq. inestable} \tag{10}$$

$$J|_{(0,1,0)} = \begin{pmatrix} \frac{G}{2} & 0 \\ 0 & \frac{G}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Eq. inestable} \tag{11}$$

$$J|_{(1,0,0)} = \begin{pmatrix} \frac{G}{2} & 0 \\ 0 & \frac{-G}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Punto Saddle} \tag{12}$$

$$J|_{\left(\frac{G}{C},0,1-\frac{G}{C}\right)} = \begin{pmatrix} \frac{G}{2}\left(\frac{G}{C} - 1\right) & 0 \\ 0 & \frac{G}{2}\left(\frac{G}{C} - 1\right) \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Eq. Estable} \tag{13}$$

$$J|_{\left(\frac{G}{C},1-\frac{G}{C},0\right)} = \begin{pmatrix} \frac{G}{2}\left(\frac{G}{C} - 1\right) & 0 \\ 0 & -\frac{G}{2}\left(\frac{G}{C} - 1\right) \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Punto Saddle} \tag{14}$$

En la Fig. 1, se muestra el simplex obtenido numéricamente, utilizando $C = 3$ y $G = 1$

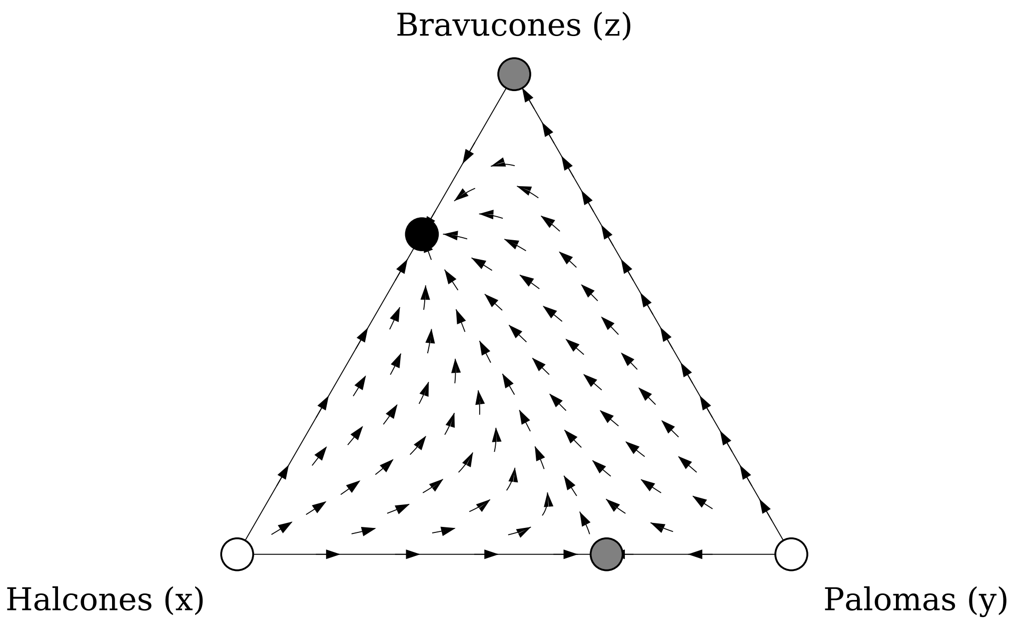

Figura 1: Simplex para el juego de halcones, palomas y bravucones.

Halcones, palomas y vengadores

Ahora pasamos a analizar el juego de halcones, palomas y vengadores mediante la dinámica del replicador, cuya matriz de payoff es

$$A = \begin{pmatrix} \frac{G-C}{2} & G & \frac{G-C}{2} \\ 0 & \frac{G}{2} & \frac{G}{2} \\ \frac{G-C}{2} & \frac{G}{2} & \frac{G}{2} \end{pmatrix} \tag{15}$$

Nuevamente tomamos $\vec{x} = (x, y, z)$, $C > G$ y reemplazamos $z = 1 - x - y$. Los payoff en este caso son

$$f_x = (1,0,0)\, A\, (x,y,z)^t = \frac{G-C}{2}\,(x+z) + Gy = \frac{G-C}{2} + \frac{G+C}{2} y \tag{16}$$

$$f_y = (0,1,0)\, A\, (x,y,z)^t = \frac{G}{2}\,(y+z) = \frac{G}{2}\,(1-x) \tag{17}$$

$$f_z = (0,0,1)\, A\, (x,y,z)^t = \frac{G-C}{2} x + \frac{G}{2}\,(y+z) = \frac{G}{2} - \frac{C}{2} x \tag{18}$$

y para el payoff medio tenemos que

$$\vec{f} = x f_x + y f_y + z f_z = \frac{C}{2} x^2 - Cx + Cxy + \frac{G}{2}. \tag{19}$$

Y las ecuaciones de la dinámica del replicador resultan

$$\dot{x} = x\left(f_x - \vec{f}\right) = \cdots = x\left(-\frac{C}{2}x^2 - Cxy + Cx + \frac{G+C}{2} y - \frac{C}{2}\right) \tag{20}$$

$$\dot{y} = y\left(f_y - \vec{f}\right) = \cdots = yx\left(-\frac{G}{2} + C - \frac{C}{2}x - Cy\right). \tag{21}$$

Buscando los puntos fijos (vamos a saltear algunas cuentas sin mucho interés) obtenemos tres puntos fijos. $(0, y, 1-y)$, $(1, 0, 0)$ y $\left(\frac{G}{C}, 1 - \frac{G}{C}, 0\right)$. En particular, $(0, y, 1-y)$ es punto fijo par cualquier valor de y, con lo cual tenemos infinitos puntos fijos ubicados en uno de los lados del simplex.

Calculamos las derivadas parciales de las ecuaciones 20 y 21 para obtener el Jacobiano, que resulta ser

$$J = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}Cx^2 - 2Cxy + 2Cx + \frac{G+C}{2}y - \frac{C}{2} & -Cx^2 + \frac{G+C}{2}x \\ -\frac{G}{2}y + Cy - Cxy - Cy^2 & -\frac{G}{2}x + Cx - \frac{C}{2}x^2 - 2Cxy \end{pmatrix} \tag{22}$$

y evaluamos en los puntos fijos hallados

$$J|_{(1,0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & -C + \frac{G+C}{2} \\ 0 & \frac{C-G}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Como } C > G, \text{ tenemos una acumulación de inestables.} \tag{23}$$

$$J|_{\left(\frac{G}{C}, 1-\frac{G}{C}, 0\right)} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\frac{G^2}{C} + \frac{G}{2} \\ \frac{1}{2}\frac{G^2}{C} - \frac{G}{2} & \frac{G^2}{C} - G \end{pmatrix} \tag{24}$$

en este caso, los autovalores son ambos iguales a $\frac{G}{C}\frac{G-C}{2}$. Como consideramos $C > G$, tenemos que este punto de equilibrio es estable. Por ultimo,

$$J|_{(0,y,1-y)} = \begin{pmatrix} \frac{G+C}{2}y - \frac{C}{2} & 0 \\ y\left(-\frac{G}{2} + C - Cy\right) & 0 \end{pmatrix} \tag{25}$$

en donde dependiendo de si $\frac{G+C}{2}y - \frac{C}{2}$ es mayor o menor que 0, tendremos una acumulación de inestables o estables respectivamente. Es decir que el lado del simplex donde tenemos infinitos puntos de equilibrio, un segmento sera acumulación de estables y el restante sera de inestables.

En la Fig. 2, se muestra el simplex obtenido numéricamente, utilizando $C = 3$ y $G = 1$

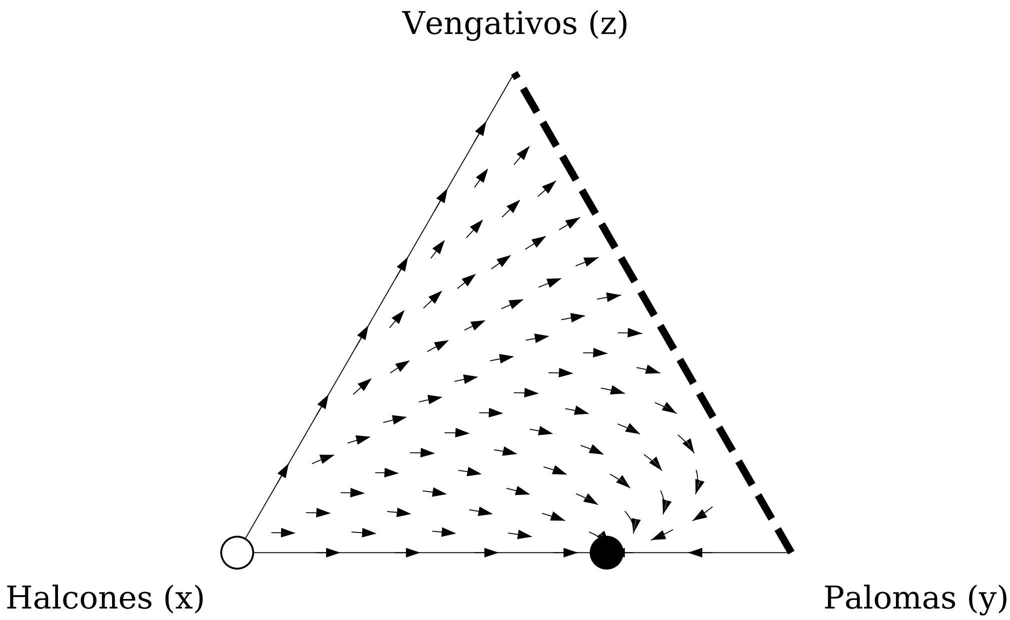

Figura 2: Simplex para el juego de halcones, palomas y vengativos.

Ejercicio 2 - Dilema del prisionero multijugador

Tenemos los payoff C_i y D_i que corresponden a tomar la estrategia de confesar y defraudar (respectivamente) cuando i jugadores cooperan.

Las características del dilema del prisionero en 2 jugadores eran las siguientes:

- Individualmente, la mejor estrategia es defraudar en lugar de cooperar, condición que se traduce en que $D_1 > C_1$ y $D_0 > C_0$.
- Por otro lado, a nivel colectivo, la cooperación mutua es mas conveniente que la defraudación mutua, es decir que $C_1 > D_0$.

Juntando ambas condiciones se tiene que

$$D_1 > C_1 > D_0 > C_0. \tag{26}$$

Para el caso de n jugadores, la generalización de que individualmente a cada jugador le es conveniente defraudar en vez de cooperar, la podemos escribir como

$$D_i > C_i \ \forall i \in \{0, \cdots n-1\} . \tag{27}$$

Por otro lado, para generalizar el hecho de que la cooperación colectiva es mejor que la defraudación colectiva, tenemos que pedir que

$$C_{n-1} > D_0. \tag{28}$$

Podemos recuperar la condición 26 del juego para 2 jugadores usando la condición 28 y la condición 27 para $i = 0$ e $i = n - 1$

$$D_{n-1} > C_{n-1} > D_0 > C_0 \tag{29}$$

que tomando $n = 2$ es la condición 26.