SISTEMAS BIOLÓGICOS
Práctica 1 - Modelos de una sola población

1. El mapeo de Beverton - Holt (1957) es de la forma

$$n_{t+1} = \frac{r n_t}{1 + \frac{r-1}{K} n_t}(1)$$

r puede interpretarse como la tasa de proliferación por generación y K es la capacidad de acarreo del ambiente. A pesar de ser no lineal, el modelo se puede resolver explícitamente y su solución es de la forma

$$n(t) = \frac{K n_0}{n_0 + (K - n_0) r^{-t}}.$$

Debido a la forma de la solución, este mapeo puede considerarse el análogo discreto de la ecuación logística. Buscar los puntos de equilibrio y estudiar su estabilidad.

Estudiar el comportamiento del mapeo numéricamente.

2. Considerar una ecuación logística con retraso

$$\frac{dN}{dt} = rN(t)\left[1 - \frac{N(t-T)}{K}\right]. \tag{2}$$

Resolver numéricamente el sistema, utilizando diversos valores de los parámetros y las condiciones iniciales. (Por ejemplo, $T = 1$, $K = 10$, $r = 0.3$, 1.2 y 2.0, y con $N(t) = 2, \quad -T < t \leq 0$.) Observar la existencia de los distintos regímenes: monótono, oscilatorio amortiguado y oscilatorio sostenido. Verificar la validez de los resultados obtenidos analíticamente de manera aproximada:

$$N(t) \approx 1 + c\, e^{\frac{\epsilon t}{1+\pi^2/4}} e^{it\left[1 - \frac{\epsilon\pi}{2(1+\pi^2/4)}\right]}, \tag{3}$$

donde T es un poco mayor que el valor crítico $T_c = \pi/2r$, $T = T_c + \epsilon$. Verificar que tanto la amplitud de las oscilaciones es independiente de la condición inicial, como que su período es independiente de r y aproximadamente $4T$.

3. En el modelo matricial de Leslie se llega a una expresón final que se interpreta como el hecho de que si una hembra deja en promedio menos de 1 descendiente en su vida, la especie se extingue, si deja 1 la especie mantiene la población y si es mayor a 1 la población crece exponencialmente. Matemáticamente corresponde a mostrar que el coeficiente asociado al crecimiento r_1 puede ser menor, igual o mayor a 1. Estas dos condicones se vinculan a través de la expresión vista en clase

$$R = 1 - (f_0 + s_0 f_1 + s_0 s_1 f_2 + \ldots + s_0 s_1 \ldots s_{K1}).$$

Mostrar que la r_1 ser mayor que 1 si y solo si $R < 0$.

4. Dada una especie con ciclo de vida anual, por ejemplo un insecto, en la que cada individuo produce r descendientes y luego muere. La población evoluciona de acuerdo a:

$$N_{t+1} = r\, N_t. \tag{4}$$

Simular el sistema, suponiendo que r obedece a una distribución de Poisson con media 1.7, comenzando con un solo individuo, y observar lo que pasa.

5. Considerar una población de animales costeros, que viven entre las líneas de mareas alta y baja ("intertidal"). Estas poblaciones son particularmente vulnerables al efecto de tormentas severas, que las afectan de distinto modo según su intensidad y el estado de la marea. Supongamos que puede modelar el sistema mediante una evolución determinista entre eventos desastrosos que ocurren al azar:

(a) Crecimiento logístico entre desastres: $\dot{N} = rN(1 - N/K)$.

(b) Si ocurre un desastre a tiempo t, inmediatamente la población se ve reducida en una fracción p: $N(t^+) = pN(t)$.

(c) Los tiempos entre desastres siguen una distribución exponencial con media $1/\lambda$ (es decir la ocurrencia de desastres es un proceso de Poisson, con tasa λ).

Analizar el comportamiento del sistema y encontrar una condición que caracterice la posibilidad del sistema de recuperarse de un desastre.

6. **Efecto Allee**

El efecto Allee da cuenta de un fenómeno, descripto por W.C. Allee, asociado a la existencia de un número crítico mínimo de individuos para garantizar la supervivencia de la especie. Se supone que a partir de cierto umbral, el tamaño poblacional es tan reducido que los individuos no se reproducen al no encontrarse con otros individuos de la misma población. Una manera de modelar este efecto es por medio de la siguiente ecuación.

$$\frac{dN}{dt} = rN\left[1 - \frac{N}{K}\right]\left[\frac{N}{A} - 1\right]. \tag{5}$$

Analizar sus equilibrios y la estabilidad de los mismos. Qué la hace diferente de la logística?