

Redes Neuronales

Práctica 6 - Memorias asociativas

F. M. Cabrera

29 de mayo de 2021

Ejercicio 1 - Modelo de Hopfield sin ruido

Para este ejercicio, se considero una red de Hopfield sin ruido para solucionar el problema de memorizar patrones. Este problema consiste en memorizar un conjunto de patrones $\vec{\xi}^\mu$ de manera que al presentarle un nuevo patrón, la red retornara el patrón almacenado mas cercano a la entrada.

Se comenzó generando p patrones ξ_i^μ con $i = 1, \dots, N$ y $\mu = 1, \dots, p$, en donde cada uno de los valores es ± 1 con igual probabilidad.

Luego se evaluó la matriz de conexiones J de la red según

$$J_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^p \xi_i^\mu \xi_j^\mu & \text{si } i \neq j \\ 0 & \text{si } i = j. \end{cases} \quad (1)$$

Fijados los valores de N y p , se iteró la dinámica determinista dada por

$$S_i = \text{sgn} \left(\sum_{j=1}^N J_{ij} S_j \right) \quad (2)$$

tomando como condición inicial $\vec{S} = \vec{\xi}^\mu$ y recorriendo el vector \vec{S} de manera aleatoria. La dinámica finaliza una vez alcanzado un punto fijo \vec{S}^μ y luego se calculo el *overlap* con el patrón

$$m^\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N S_i^\mu \xi_i^\mu. \quad (3)$$

Este proceso se repitió para cada uno de los p patrones.

En la Fig. 1 se observan distintos histogramas de los *overlaps* obtenidos para distintos valores de N y del parámetro de carga $\alpha = \frac{p}{N}$. Para distintos tamaños y para $\alpha = 0,12$ se observa que la mayor parte de los *overlaps* es cercano a 1, lo cual indica que el sistema puede reconocer los patrones que se almacenaron en la matriz de conexiones J . En el limite $N \rightarrow \infty$, los valores de *overlap* deberían ser tales que $m \approx 1$ para $\alpha < \alpha_c \approx 0,138$ y $m = 0$ para $\alpha > \alpha_c$, lo cual es consistente para los resultados obtenidos para $\alpha = 0,12$.

Por otro lado, al aumentar el parámetro de carga, la red disminuye su *overlap* medio con los valores de entrada de manera continua. Esto es consecuencia de trabajar con sistemas finitos.

Para $\alpha > \alpha_c$, la distribución de los *overlaps* no se concentra en 0, si no que se acumulan alrededor de $m \approx 0,3$ a medida que aumenta α .

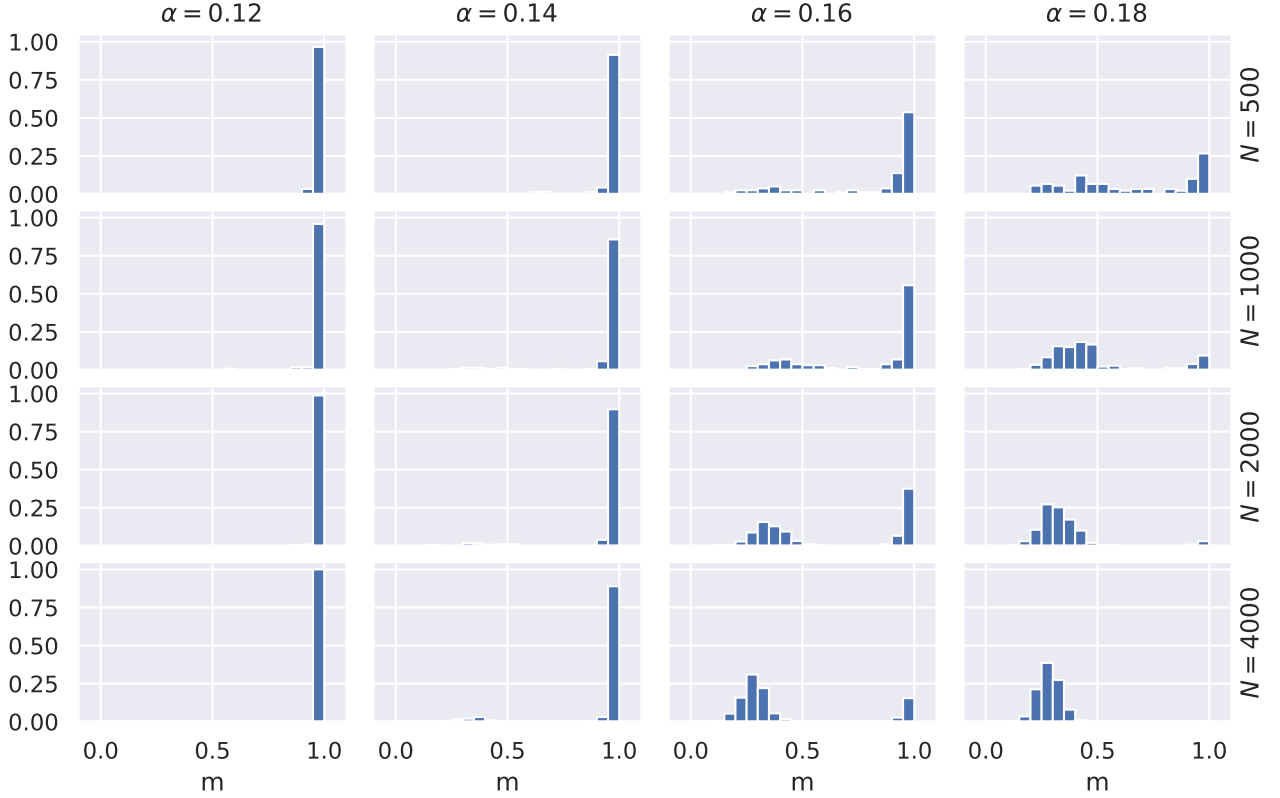


Figura 1: Histogramas del *overlap* para distintos tamaños N de la red de Hopfield y parámetros de carga α .

Ejercicio 2 - Modelo de Hopfield con ruido

Para este segundo ejercicio se estudio la dinámica de una red de Hopfield con ruido con $N = 4000$ neuronas. Para esto se generaron $p = 40$ patrones de entrada $\vec{\xi}^\mu$ con la misma distribución que el ejercicio 1. A su vez, se creo la matriz de conexiones J según las condiciones dadas por la Ec. 1.

Al igual que el ejercicio anterior, para cada índice μ , se tomó como condición inicial al parámetro $\vec{S} = \vec{\xi}^\mu$ y se realizaron 10 iteración utilizando la red estocástica

$$Pr(S_i(t+1) = \pm 1) = \frac{\exp(\pm h_i/T)}{\exp(h_i/T) + \exp(-h_i/T)} \quad (4)$$

donde $h_i = \sum_{j=1}^{p-1} J_{ij} S_j$ y el vector \vec{S} se recorre de manera aleatoria.

En la Fig. 2 se observa el *overlap* promedio \bar{m} como función del parámetro de ruido T . Se observa que para valores pequeños de T , el *overlap* promedio se mantiene cercano a 0, indicando que los patrones $\vec{\xi}^\mu$ siguen siendo equilibrios estables del sistema.

Al aumentar T , la capacidad de la red disminuye progresivamente, así como el valor del *overlap* y aumenta su desviación standard. Para T grande, se observa de la Ec. 4 que

$$Pr(S_i = 1) = Pr(S_i = -1) = \frac{1}{2} \quad (5)$$

sin importar el valor de h_i , lo cual explica que el valor del *overlap* tienda a cero. Por último, el hecho de que esta transición sea suave se debe a que el sistema trabajado es finito.

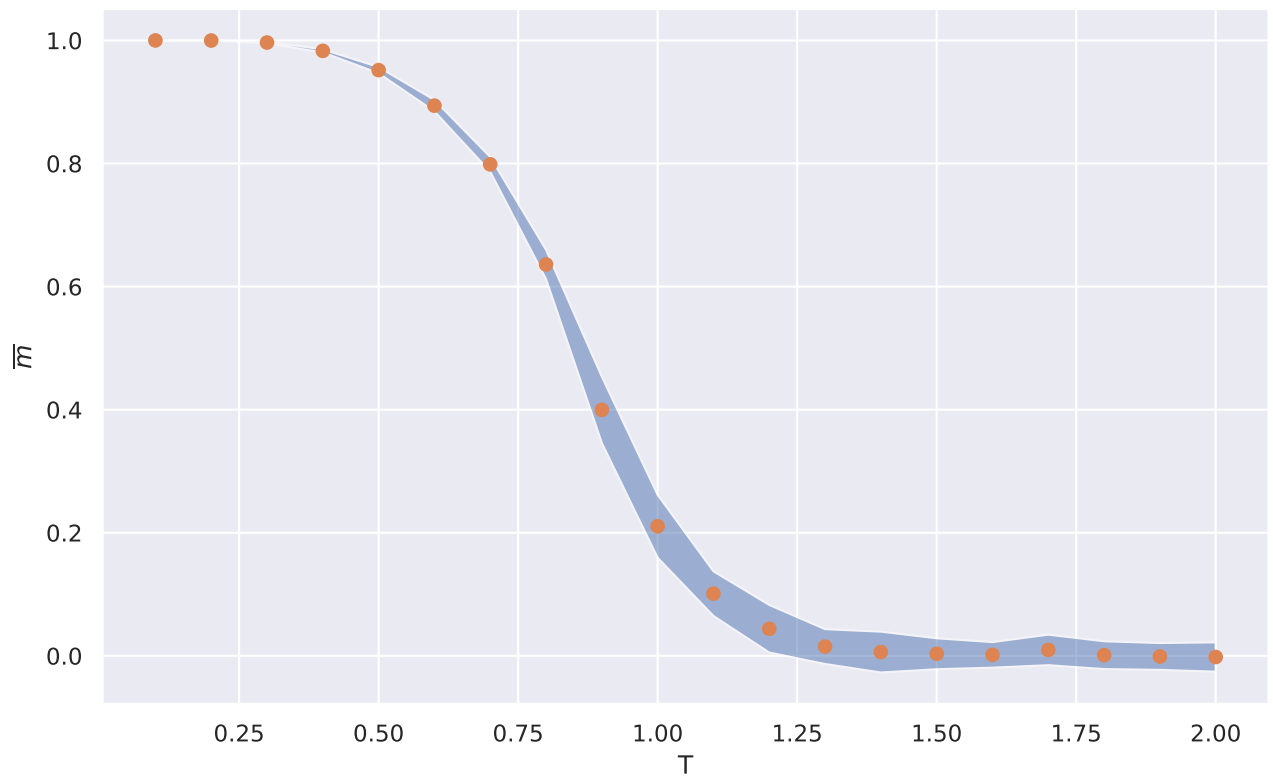


Figura 2: *Overlap* como función del parámetro de ruido T de la red. Los puntos del gráfico corresponden al valor medio \overline{m} y entre franjas la incerteza a partir de la desviación estándar muestreada de m .