

# Redes Neuronales

## Práctica 2 - Dinámica de sistemas acoplados

F. M. Cabrera

22 de marzo de 2021

Todo el código implementado en esta practica puede encontrarse [acá](#).

### Ejercicio 1

Comenzamos simulando la dinámica de dos neuronas Hodgkin-Huxley [1] conectadas simétricamente con interacciones sinapticas excitatorias e inhibitorias. Se utilizo una corriente externa  $I_{\text{ext}} = 10 \text{ mA}$  de manera que las neuronas estén oscilando periódicamente. La corriente de interacción sinaptica esta dada por

$$I_{\text{syn}}(t) = -g_{\text{syn}}s(t)(V - V_{\text{syn}}), \quad (1)$$

donde

$$\frac{ds}{dt} = \frac{s_{\infty}(V) - s}{\tau} \quad (2)$$

$$s_{\infty}(V) = 0,5(1 + \tanh(V/5)), \quad (3)$$

siendo  $V$  es el potencial de la neurona y  $\tau$  es el tiempo característico asociado a la inhibición, el cual se tomo como  $\tau = 3 \text{ ms}$  durante todo el trabajo.

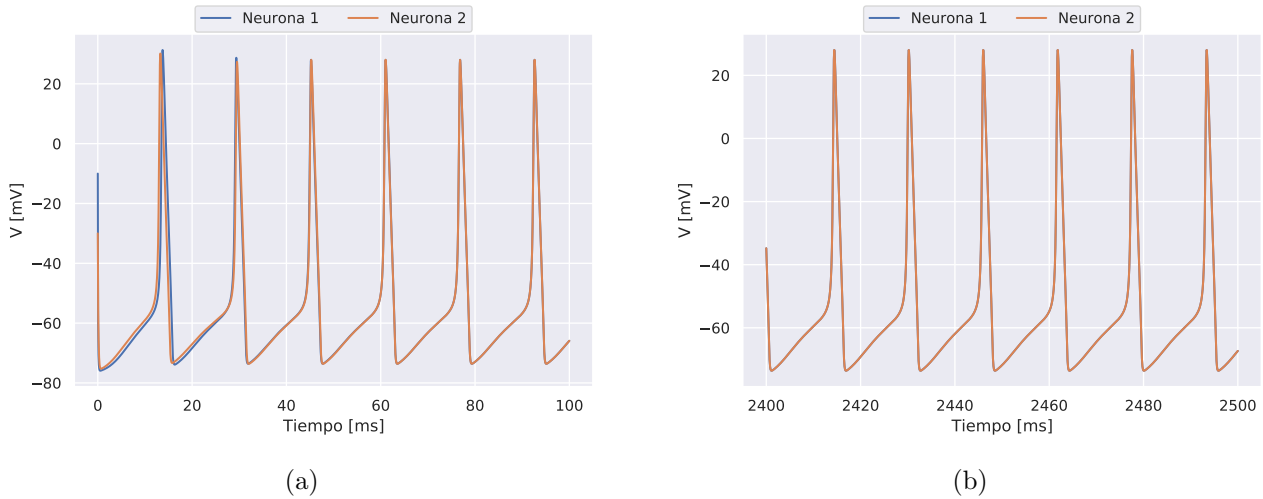


Figura 1: Simulación de la interacción excitatoria entre dos neuronas para  $V_{\text{syn}} = 0 \text{ mV}$  y  $g_{\text{syn}} = 1 \frac{\text{mS}}{\text{cm}^2}$ . En (a) se observan los primeros 100 ms de la simulación, correspondiente al un régimen transitorio. Luego, en (b), se observa los últimos 100 ms de la simulación, en donde el sistema se encuentra en un régimen estacionario y los spikes se encuentran en fase.

En las Figuras 1 se observan las evoluciones temporales del potencial de ambas neuronas, para el caso excitatorio ( $V_{\text{syn}} = 0$ ) e inhibitorio ( $V_{\text{syn}} = -80$ ) respectivamente, tomando en  $g_{\text{syn}} = 1 \frac{\text{mS}}{\text{cm}^2}$ . En ambos casos, la dinámica viene dada por un transitorio y luego del mismo se observa que los

spikes de las neuronas se encuentran en fase para el caso excitatorio. Por otro lado, para la interacción inhibitoria, una vez alcanzado el régimen estacionario, dichos spikes se desfasan. El tiempo necesario para alcanzar el régimen estacionario depende del valor de  $g_{syn}$ .

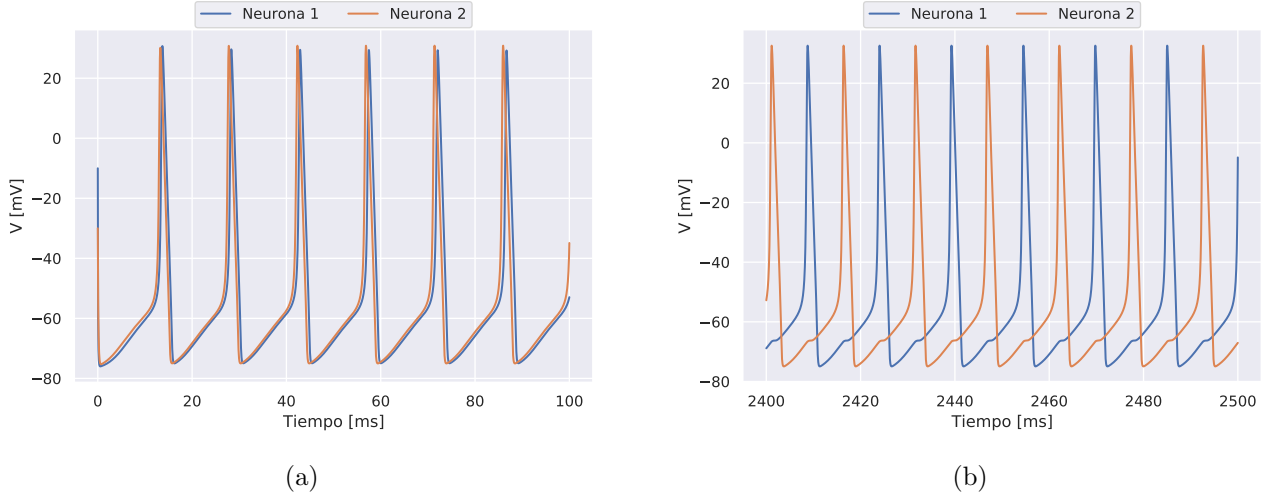


Figura 2: Simulación de la interacción inhibitoria entre dos neuronas para  $V_{syn} = -80$  mV y  $g_{syn} = 1 \frac{mS}{cm^2}$ . En (a) se observan los primeros 100 ms de la simulación, correspondiente al un régimen transitorio. Luego, en (b), se observa los últimos 100 ms de la simulación, en donde el sistema se encuentra en un régimen estacionario y los spikes se encuentran desfasados.

Se busco estudiar en detalle este desfasaje entre las neuronas y la tasa de disparo del sistema como función del parámetro  $g_{syn}$  para valores entre 0 y  $2 \frac{mS}{cm^2}$ . Este estudio realizo tanto para interacciones excitatorias como inhibitorias, tomando  $V_{syn} = 0$  mV y  $V_{syn} = -80$  mV respectivamente.

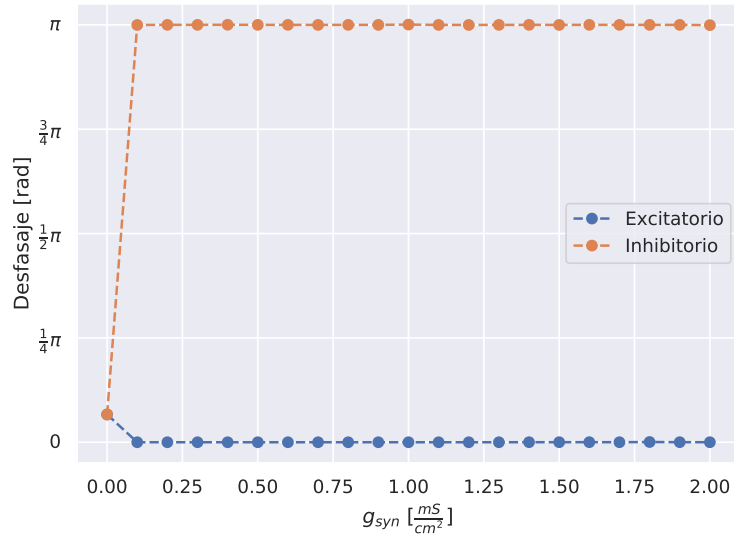


Figura 3: Desfasaje entre los spikes de las neuronas como función del parámetro  $g_{syn}$  para la interacción excitatoria e inhibitoria. El desfasaje es calculado una vez alcanzado el régimen estacionario. Cuando la interacción entre neuronas no es nula (es decir, cuando  $g_{syn} \neq 0$ ) se observa una clara diferencia entre los desfasajes de las neuronas, siendo nulo para la interacción excitatoria, ya que la misma produce el efecto de acercar los spikes. Por otro lado, para la interacción inhibitoria, el desfasaje es de  $\pi$ , consecuencia de que la interacción inhibitoria produce el efecto de alejar los spikes de cada neurona.

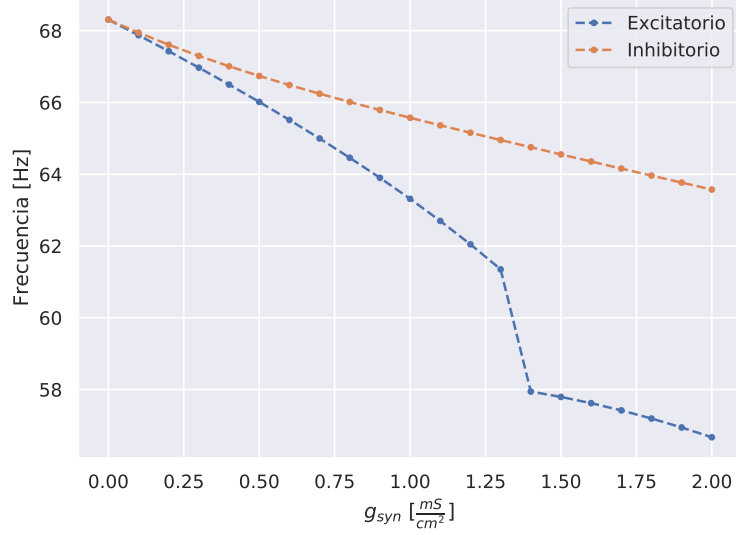


Figura 4: Frecuencia entre los spikes de las neuronas como función del parámetro  $g_{syn}$  para la interacción excitatoria e inhibitoria. La frecuencia es calculada una vez alcanzado el régimen estacionario. En ambos casos se observa que la tasa de disparo disminuye al aumentar  $g_{syn}$

En la Figura 3 se observa el desfase en función de  $g_{syn}$  tanto para la interacción excitatoria como inhibitoria. El desfase es calculado una vez alcanzado el régimen estacionario. Cuando la interacción entre neuronas no es nula (es decir, cuando  $g_{syn} \neq 0$ ) se observa una clara diferencia entre los desfases de las neuronas, siendo nulo para la interacción excitatoria, ya que la misma produce el efecto de acercar los spikes. Por otro lado, para la interacción inhibitoria, el desfase es de  $\pi$ , consecuencia de que la interacción inhibitoria produce el efecto de alejar los spikes de cada neurona.

En la Figura 4 se observa la frecuencia del sistema acoplado como función del parámetro  $g_{syn}$ , el cual influye en la intensidad de la interacción. Se observa la disminución de la frecuencia de las neuronas con el aumento del valor de  $g_{syn}$ . Para la curva correspondiente a la interacción excitatoria, esta disminución se debe a que la corriente  $g_{syn}$  disminuye la corriente total dentro de la neurona. Por otro lado, para la interacción excitatoria, se observa que la disminución de la frecuencia es menos pronunciada, ya que el potencial inhibitorio ralentiza la frecuencia de los spikes de las neuronas, desfasandolos.

## Ejercicio 2

Tenemos el sistema con dos poblaciones descritas por un modelo tasa de disparo con una relación f-I semilineal

$$\tau \frac{df_e}{dt} = -f_e + S(g_{ee}f_e - g_{ei}f_i + I_e) \quad (4)$$

$$\tau \frac{df_i}{dt} = -f_i + S(g_{ie}f_e - g_{ii}f_i + I_i) \quad (5)$$

donde  $S(f) = fH(f)$ , siendo  $H$  la función de Heaviside.

Primero queremos ver en que condiciones ocurre que el sistema tiene soluciones tales que la actividad de las dos poblaciones es distinta de cero. Para esto, primero veamos que sucede si uno de los argumentos de la Heaviside es menor que cero, de manera que el término  $S = 0$ . En este caso, la ecuación se reduce a

$$\tau \frac{df_e}{dt} = -f_e \quad (6)$$

cuyo único punto fijo es  $f_e = 0$  y es estable, de manera que no es la solución que nos interesa. De manera que una primera condición es que el argumento de la Heaviside sea mayor que cero, de manera

que el segundo termino de la ecuación no se anule. Análogamente podemos ver que la Heaviside de la Ec. 5 no debe ser nula, con lo cual las dos primeras condiciones se resumen en

$$I_e > -g_{ee}f_e + g_{ei}f_i \quad (7)$$

y

$$I_i > -g_{ie}f_e + g_{ii}f_i. \quad (8)$$

en cuyo caso podemos escribir las ecuaciones del sistema como

$$\tau \frac{df_e}{dt} = (g_{ee} - 1) f_e - g_{ei}f_i + I_e \quad (9)$$

$$\tau \frac{df_i}{dt} = g_{ie}f_e - (g_{ii} + 1) f_i + I_i \quad (10)$$

Busquemos ahora los puntos fijos del sistema. Para esto es util plantear el sistema de forma matricial

$$\tau \frac{d\vec{f}}{dt} = G\vec{f} + \vec{I} \quad (11)$$

donde

$$G = \begin{pmatrix} g_{ee} - 1 & -g_{ei} \\ g_{ie} & -g_{ii} - 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} f_e \\ f_i \end{pmatrix}, \quad y \quad \vec{I} = \begin{pmatrix} I_e \\ I_i \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Los puntos fijos del sistema cumplen que  $\frac{d\vec{f}}{dt} = 0$ , lo cual solo ocurre cuando  $G\vec{f} + \vec{I} = 0$ . Para que el sistema tenga solución única queremos que el determinante no se anule, en cuyo caso podemos obtener los puntos fijos como

$$\vec{f} = -G^{-1}\vec{I} = (\det G)^{-1} \begin{pmatrix} (g_{ii} + 1) I_e - g_{ei}I_i \\ g_{ie}I_e - (g_{ee} - 1) I_i \end{pmatrix} \quad (13)$$

con lo cual

$$f_e = \frac{(g_{ii} + 1) I_e - g_{ei}I_i}{\det G} \quad f_i = \frac{g_{ie}I_e - (g_{ee} - 1) I_i}{\det G} \quad (14)$$

Para estudiar la estabilidad del punto fijos, necesitamos conocer el signo de la parte real de los autovalores de la matriz  $G$ . Solo en caso de que ambos sean negativos, el punto fijo es estable. Dado que la traza y el determinante de una matriz son invariantes, tenemos que la traza es la suma de los autovalores y el determinante es el producto. Para que ambos autovalores sean negativos, entonces, debe cumplirse que la traza es menor que cero y el determinante mayor que cero. Entonces, tenemos que para que el punto fijo sea estable se debe cumplir que

$$\text{tr}(G) = g_{ee} - g_{ii} - 2 < 0 \Rightarrow g_{ee} - g_{ii} < 2 \quad (15)$$

$$\det(G) = (g_{ee} - 1)(g_{ii} + 1) + g_{ei}g_{ie} > 0 \Rightarrow g_{ei}g_{ie} > (g_{ee} - 1)(g_{ii} + 1) \quad (16)$$

Entonces, en resumen, para que la actividad de las poblaciones sea distinto de 0 se deben cumplir las Ec 7 y 8. Bajo esas condiciones, para que los puntos fijos dados por la Ec. 14 sean estables, se deben cumplir las condiciones dadas por las Ec. 15 y 16. Si ademas, se busca que las poblaciones sean positivas, se puede desprender dos condiciones adicionales a partir de las Ec. 14, ya que el  $\det G > 0$ , con lo cual

$$(g_{ii} + 1) I_e - g_{ei}I_i < 0 \quad (17)$$

$$g_{ie}I_e - (g_{ee} - 1) I_i < 0 \quad (18)$$

debe cumplirse para que las actividades de las poblaciones sea positiva.

## Referencias

- [1] IZHIKEVICH, E. M. *Dynamical systems in neuroscience*. MIT press, 2007.