Universitat de Barcelona
Universitat Oberta de Catalunya

# Algebra matricial

Francesc Carmona

20 de febrero de 2018

## 1. Matrices

1. Las siguientes cuestiones se refieren a propiedades elementales del álgebra matricial que debes conocer. Indicar si son CIERTAS o FALSAS las siguientes propiedades:

   *a)* $(\mathbf{A}+\mathbf{B})' = \mathbf{A}' + \mathbf{B}'$

   *b)* $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$

   *c)* $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|$, donde ambas matrices son cuadradas.

   *d)* $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{BA}|$, donde ambas matrices son cuadradas.

   *e)* $\mathrm{tr}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \mathrm{tr}(\mathbf{A}) + \mathrm{tr}(\mathbf{B})$

   *f)* $\mathrm{tr}(\mathbf{AB}) = \mathrm{tr}(\mathbf{BA})$, ilustrarlo con un ejemplo de dos matrices $2 \times 2$.

   *g)* $\mathbf{A}'\mathbf{A}$ es simétrica.

   *h)* $(\mathbf{AB})' = \mathbf{A}'\mathbf{B}'$

   *i)* $(\mathbf{A}')^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})'$, si $\mathbf{A}$ tiene inversa.

   *j)* Para una matriz $\mathbf{A}$ cuadrada, si existe un $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ tal que $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$, entonces $|\mathbf{A}| = 0$.

2. $(*)$ Comprobar las siguientes propiedades:

   *a)* Cualquiera que sea el vector $\mathbf{x}$, resulta que $\mathbf{x}'\mathbf{x} \geq 0$.

   *b)* Con la propiedad anterior se puede probar que $\mathbf{A}'\mathbf{A}$ es siempre definida o semidefinida positiva. Poner algunos ejemplos.

   *c)* $\mathbf{A}'\mathbf{A}$ siempre es simétrica. Poner algunos ejemplos

   *d)* $(**)$ Si $\mathbf{A}'\mathbf{A}$ es semidefinida positiva y no definida positiva, entonces existe un $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ tal que $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$. Poner algún ejemplo.

3. Dadas las matrices:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   Calcular: $\mathbf{A}+\mathbf{B}$; $\mathbf{A}-\mathbf{B}$; $\mathbf{AB}$; $\mathbf{BA}$; $\mathbf{A}'$.

   Hacerlo manualmente y con un programa como **R**.

4. Demostrar que $\mathbf{A}^2 - \mathbf{A} - 2\mathbf{I} = \mathbf{0}$, siendo:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Calcular la matriz inversa de:
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
Se puede utilizar la función `solve()` de **R**.

6. Resolver, en forma matricial, el sistema:
$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + 2y + 5z = 12 \\ x + 4y + 25z = 36 \end{cases}$$

## 2. Diagonalización y valores singulares

1. (∗) Sean
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$
   *a*) Probar que $\mathbf{u}$ es un vector propio de $\mathbf{A}$. ¿Cual es su valor propio correspondiente?
   *b*) Comprobar que $\lambda\mathbf{u}$, con $\lambda$ un escalar no nulo, también es vector propio de $\mathbf{A}$.
   *c*) Probar que $\mathbf{v}$ es un vector propio de $\mathbf{A}$. ¿Cual es su valor propio correspondiente?
   *d*) ¿$\mathbf{u} + \mathbf{v}$ es un vector propio de $\mathbf{A}$?

2. Para las siguientes matrices determinar:
   *a*) el polinomio característico,
   *b*) los valores propios,
   *c*) vectores propios para cada valor propio,
   *d*) (∗) la multiplicidad de cada valor propio y el número de vectores propios independientes asociados a cada valor propio.
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$
   Se puede utilizar la función `eigen()` de **R**.

3. Si $S = \{(0,1,0), (1,0,1), (-1,0,1)\}$ es el conjunto de vectores propios, para los valores propios $1, 1, -1$, hallar la matriz $\mathbf{A}$ correspondiente.

4. (∗) Comprobar las siguientes propiedades con algún ejemplo:
   *a*) Si $\mathbf{A}$ es simétrica semidefinida positiva, siempre hay una matriz $\mathbf{B}$ tal que $\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{B}'$. ($\mathbf{B}$ no es única).
   *b*) Si $\mathbf{A}$ es cuadrada, simétrica, con valores propios $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, entonces $\mathrm{tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i$ y $|\mathbf{A}| = \prod_{i=1}^{p} \lambda_i$.
   *c*) Los valores propios de una matriz simétrica son siempre reales y positivos.
   *d*) Una matriz simétrica, semidefinida positiva e idempotente tiene valores propios 0 ó 1.

5. Mediante la diagonalización de la matriz
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$
   Calcular $\mathbf{A}^7$.

6. Dada la matriz de covarianzas
$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1/3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1/3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$
   Hallar una matriz $\mathbf{\Sigma}^{-1/2}$ tal que $\mathbf{\Sigma}^{-1/2}\mathbf{\Sigma}^{-1/2} = \mathbf{\Sigma}^{-1}$.

7. Hallar la descomposición en valores singulares de la matriz
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   **R-intro: 5.7.4 Singular value decomposition and determinants in R**

   The function `svd(`$M$`)` takes an arbitrary matrix argument, $M$, and calculates the singular value decomposition of $M$. This consists of a matrix of orthonormal columns $U$ with the same column space as $M$, a second matrix of orthonormal columns $V$ whose column space is the row space of $M$ and a diagonal matrix of positive entries $D$ such that $M = U \,\%{*}\%\, D \,\%{*}\%\, t(V)$. $D$ is actually returned as a vector of the diagonal elements. The result of `svd(`$M$`)` is actually a list of three components named `d`, `u` and `v`, with evident meanings.

   If $M$ is in fact square, then, it is not hard to see that

```
> absdetM <- prod(svd(M)$d)
```

   calculates the absolute value of the determinant of $M$. If this calculation were needed often with a variety of matrices it could be defined as an **R** function

```
> absdet <- function(M) prod(svd(M)$d)
```

   after which we could use `absdet()` as just another **R** function. As a further trivial but potentially useful example, you might like to consider writing a function, say `tr()`, to calculate the trace of a square matrix. [Hint: You will not need to use an explicit loop. Look again at the `diag()` function.]

   **R** has a builtin function `det` to calculate a determinant, including the sign, and another, `determinant`, to give the sign and modulus (optionally on log scale).

8. Calcular el rango de la matriz[1]
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -7 \\ 3 & -2 & 1 & 17 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

   Utilizar la siguiente función de **R**:

```
matrix.rank <- function(A, eps=sqrt(.Machine$double.eps)){
                        sv. <- abs(svd(A)$d)
                        sum((sv./max(sv.))>eps)
                        }
```

   Explicar lo que hace esta función.

   Una versión más sofisticada:

[1] Los métodos computacionales aproximan el concepto de rango y están sujetos a error.

```
rankMat <- function(A, tol = NULL, singValA = svd(A, 0,0)$d)
{
    ## Purpose: rank of a matrix ``as Matlab''
    ## ----------------------------------------------------------------------
    ## Arguments: A: a numerical matrix, maybe non-square
    ##          tol: numerical tolerance (compared to singular values)
    ##     singValA: vector of non-increasing singular values of A
    ##               (pass as argument if already known)
    ## ----------------------------------------------------------------------
    ## Author: Martin Maechler, Date:  7 Apr 2007, 16:16
    d <- dim(A)
    stopifnot(length(d) == 2, length(singValA) == min(d),
              diff(singValA) < 0)       # must be sorted decreasingly
    if(is.null(tol))
        tol <- max(d) * .Machine$double.eps * abs(singValA[1])
    else stopifnot(is.numeric(tol), tol >= 0)
    sum(singValA >= tol)
}
```

Otras opciones en **R** son:

```
qr(A)$rank
```

o incluso

```
qr(A, LAPACK=TRUE)$rank
```

o mejor

```
qr(A, tol = .Machine$double.eps, LAPACK = TRUE)$rank
```

9. (∗) Probar que para la matriz
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$
dos inversas generalizadas son:
$$\mathbf{A}_1^- = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A}_2^- = \begin{pmatrix} -42 & -1 \\ 5 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

10. (∗) Hallar una inversa generalizada de la matriz
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -6 & 2 & -2 & -3 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ -3 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$
mediante la inversa del menor de rango máximo.

11. (∗) Determinar la inversa de Moore-Penrose de la matriz
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$
Utilizar la función `ginv()` del paquete MASS de **R**.

12. ($**$) Sea $\mathbf{B}$ una matriz simétrica y definida positiva y $\mathbf{A}$ una matriz simétrica y semidefinida positiva. La obtención de los valores propios de $\mathbf{A}$ relativos a $\mathbf{B}$, es decir $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{B}\mathbf{v}$, recibe el nombre de diagonalización simétrica generalizada.

   *a*) Probar que se reduce a la diagonalización ordinaria de la matriz $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$. El número de valores propios no nulos es igual al rango de $\mathbf{A}$.

   *b*) Probar que la diagonalización de $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$ se resuelve por diagonalización ordinaria de dos matrices simétricas: $\mathbf{B}$ y $\mathbf{B}^{-1/2}\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1/2}$.

   *c*) En un problema con varias poblaciones, se considera la matriz $\mathbf{A}$ que mide la covariabilidad *entre* poblaciones y la matriz $\mathbf{B}$ de covarianzas estimada *dentro* de cada población y teóricamente común en todas las poblaciones. Hallar la diagonalización simétrica generalizada para las matrices

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 10 & -4 & 12 \\ -4 & 3 & -1 \\ 12 & -1 & 25 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 14 & 0 & 17 \\ 0 & 3 & -2 \\ 17 & -2 & 26 \end{pmatrix}$$