

(7) σ_{r3} 与 σ_{r4} 的最大差值, 由式 (13)、式 (14) 可知 σ_{r3} 与 σ_{r4} 的最大差值为

$$\frac{\sigma_{r3} - \sigma_{r4}}{\sigma_{r4}} = \frac{CD'}{AD'} = 15.47\% \quad (15)$$

这一情况发生在式 (8) $\sigma_2 = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3)$ 所示的条件, 当 $\sigma_2 = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) = 0$ 时, 为纯剪切应力状态, 是式 (8) 的特例, 当然也包括在式 (8) 所示的

应力状态之中。

参 考 文 献

- 1 徐秉业. 塑性理论简明教程. 北京: 清华大学出版社, 1981
- 2 铁摩辛柯 S. 高等材料力学. 北京: 科学出版社, 1964
- 3 刘鸿文. 材料力学. 北京: 高等教育出版社, 1982

(本文于 1994 年 10 月 24 日收到)

关于偏心梁单元刚度矩阵的几点说明

傅永华

(武汉交通科技大学港机系, 武汉 430063)

用有限单元法分析加筋板或加筋箱形结构件时, 采用板梁组合单元计入筋板的作用. 由于视为梁单元的筋板相对于板中性面往往有较大的偏心, 宜采用偏心梁单元刚度矩阵进行分析. 偏心梁单元刚度矩阵由通常的梁单元刚度矩阵向偏心轴转换得来, 这种转换过程是讲授板梁组合问题的基本内容之一, 多见于机械结构分析有限元教材. 分析中往往通过几何作图描述偏心轴与中和轴对应结点的位移转换关系^[1,2], 这种叙述方式相当费解. 其实运用矢量分析这一数学工具可以较圆满地处理好这个问题. 个别教科书也有这样的尝试^[3], 但其中对矢量积的定义有误, 而且在结点力的转换中套用结点位移的转换关系, 并对这种转换矩阵运用正交矩阵的性质, 这都是不妥当的, 由此得到的最后结论不可避免地出现错误.

教学实践说明, 关于板梁组合单元的这部分内容如不加以改造处理, 学生很难接受. 经过反复推敲, 我们对此作如下分析, 并取得了较满意的教学效果.

如图 1 所示, 梁单元中和轴为 i_1, j_1 , 它在板单元中面上的偏心轴为 i, j . 先考察偏心轴结点 i 与中和轴结点 i_1 之间的位移转换关系.

记矢量

$$\mathbf{r} = i i_1 = \{e_x, e_y, e_z\}$$

其中偏心

$$e_x = x_{i_1} - x_i, e_y = y_{i_1} - y_i, e_z = z_{i_1} - z_i$$

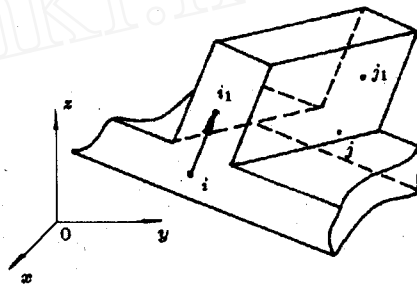


图 1

设弹性体受力变形后矢量 \mathbf{r} 转动了角度 θ , 用双矢量标绘矢量 θ (图 2). 注意到小变形基本假定, 由矢量积的定义可知^[4], i_1 点对 i 点的相对位移矢量为

$$\begin{aligned} \mathbf{S} = \theta \times \mathbf{r} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \theta_x & \theta_y & \theta_z \\ e_x & e_y & e_z \end{vmatrix} = \\ &= (e_z \theta_y - e_y \theta_z) \mathbf{i} + (e_x \theta_z - e_z \theta_x) \mathbf{j} + \\ &+ (e_y \theta_x - e_x \theta_y) \mathbf{k} \end{aligned}$$

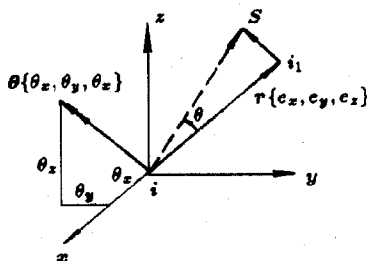


图 2

由梁变形的平面假定有关系式

$$\theta_i = \theta_{i1} = \theta$$

则

$$\begin{aligned} S = \theta_i \times r = & (e_z \theta_{y_i} - e_y \theta_{z_i}) \mathbf{i} + (e_x \theta_{z_i} - e_z \theta_{x_i}) \mathbf{j} + \\ & (e_y \theta_{x_i} - e_x \theta_{y_i}) \mathbf{k} \end{aligned}$$

将此相对位移与 i 点位移叠加就得到 i_1 点位移

$$\begin{Bmatrix} u_{i1} \\ v_{i1} \\ w_{i1} \\ \theta_{xi1} \\ \theta_{yi1} \\ \theta_{zi1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & e_x & -e_y \\ 0 & 1 & 0 & -e_z & 0 & e_x \\ 0 & 0 & 1 & e_y & -e_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \\ \theta_{zi} \end{Bmatrix}$$

记为 $\{\delta_{i1}\} = [\beta]\{\delta_i\}$. 同样 $\{\delta_{j1}\} = [\beta]\{\delta_j\}$.

对整个梁单元有

$$\{\delta_1\}^e = [H]\{\delta\}^e \quad (1)$$

式中

$$[H] = \begin{bmatrix} [\beta] & [0] \\ [0] & [\beta] \end{bmatrix}, \quad \{\delta_1\}^e = \begin{Bmatrix} \{\delta_{i1}\} \\ \{\delta_{j1}\} \end{Bmatrix}$$

$$\{\delta\}^e = \begin{Bmatrix} \{\delta_i\} \\ \{\delta_j\} \end{Bmatrix}$$

下面再通过静力等效载荷移置实现结点 i 、 j 与 i_1 、 j_1 之间结点力向量的转换.

如图 3 所示, 记端点 i 的结点力为

$$\{F_i\} = [U_i \ V_i \ W_i \ (M_{\theta_x})_i \ (M_{\theta_y})_i \ (M_{\theta_z})_i]^T$$

在对应的中和轴结点 i_1 施以平衡力系 (图 3), 此力

系与 i 点结点力合成为 i_1 点结点力

$$\{F_{i1}\} = \begin{Bmatrix} U_{i1} \\ V_{i1} \\ W_{i1} \\ (M_{\theta_x})_{i1} \\ (M_{\theta_y})_{i1} \\ (M_{\theta_z})_{i1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_z & -e_y & 1 & 0 & 0 \\ -e_z & 0 & e_x & 0 & 1 & 0 \\ e_y & -e_x & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ W_i \\ (M_{\theta_x})_i \\ (M_{\theta_y})_i \\ (M_{\theta_z})_i \end{Bmatrix}$$

$$\text{即 } \{F_{i1}\} = ([\beta]^T)^{-1} \{F_i\}.$$

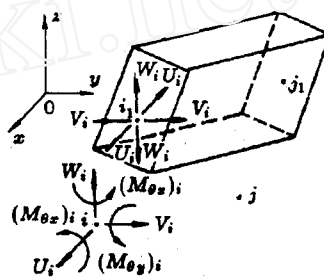


图 3

$$\text{同样 } \{F_{j1}\} = ([\beta]^T)^{-1} \{F_j\}.$$

于是

$$\{F_1\}^e = ([H]^T)^{-1} \{F\}^e \quad (2)$$

$$\text{式中 } \{F_1\}^e = \begin{Bmatrix} \{F_{i1}\} \\ \{F_{j1}\} \end{Bmatrix}, \quad \{F\}^e = \begin{Bmatrix} \{F_i\} \\ \{F_j\} \end{Bmatrix}$$

对于中和轴, 我们已有梁单元刚度方程

$$\{F_1\}^e = [K_1]^e \{\delta_1\}^e$$

将 (1)、(2) 式代入得到

$$([H]^T)^{-1} \{F\}^e = [K_1]^e [H] \{\delta\}^e$$

两边左乘 $[H]^T$ 得到

$$\{F\}^e = [H]^T [K_1]^e [H] \{\delta\}^e$$

写成 $\{F\}^e = [K]^e \{\delta\}^e$, 这里

$$[K]^e = [H]^T [K_1]^e [H] \quad (3)$$

即梁单元刚度矩阵 $[K_1]^e$ 向偏心轴 i, j 转换后所得到的偏心梁单元刚度矩阵.

参 考 文 献

- 1 赵汝嘉编. 机械结构有限元分析. 西安: 西安交通大学出版社, 1991: 139~143
- 2 姜晋庆, 张铎编著. 结构弹塑性有限元分析法. 北京: 宇航出版社, 1990: 143~147
- 3 杨荣柏主编. 机械结构分析的有限元法. 武汉: 华中理工大学出版社, 1989: 112~113
- 4 阿费肯(美)著. 曹富田译. 矢量、张量与矩阵. 北京: 计量出版社, 1986: 21

(本文于 1994 年 10 月 23 日收到)

对“用位移法计算超静定结构”论述的商榷

徐昌文

(上海建筑材料工业学院, 上海 200434)

综观《结构力学》各种教材, 一般都有如下的论述: 力法和位移法是计算超静定结构的两个基本方法. 用位移法解超静定结构是取结点位移作为基本未知量, 以单跨超静定梁的组合体作为它的基本结构. 位移法可用于解超静定结构和静定结构, 但是否妥当却值得商榷.

先从力法说起. 在工程结构中, 从静力角度看, 它们的反力和内力仅用静力平衡条件即可求得, 这类结构称为静定结构, 例如简支梁是单跨静定梁. 但如果它们的反力和内力只凭静力平衡条件不能全部确定, 这类结构便称为超静定结构, 通过放松约束的途径, 转化为静定结构(基本结构不是唯一的), 取多余未知力作为基本未知量, 用位移协调条件求解.

位移法与力法不同. 在工程结构中, 从运动角度看, 它们的结点位移(包括转角和线位移)均已确定, 这类结构称为动定结构, 例如两端固定梁是单跨动定梁. 但如果它们的结点位移不能全部确定, 这类结构便称为超动定结构, 通过施加约束(包括附加刚臂和附加链杆)的途径, 转化为动定结构(基本结构是唯一的), 取结点位移作为基本未知量, 用结点杆端力平衡条件求解.

将上述见解列成表 1, 以作比较. 显见, 在工程实际中, 根据力或运动的考察角度不同, 可把一个复杂结构视为超静定结构或超动定结构, 确定其超静定次数或超动定次数, 相应转化为静定结构或

动定结构, 分别用力法或位移法方程求解.

表 1

	力法	位移法
原结构	超静定结构	超动定结构
转化途径	放松约束	施加约束
基本结构	静定结构	动定结构
基本未知量	多余未知力	结点未知位移
基本方程	位移协调条件	结点杆端力平衡条件

试举 2 例. 如图 1 所示的结构, 可视为 2 次超静定结构用力法求解, 也可视为 2 次超动定结构(C 点转角和 CD 杆水平线位移为未知量)用位移法求解. 如图 2 所示的结构, 可视为 12 次超静定结构用力法求解, 也可视为 8 次超动定结构用位移法求解.

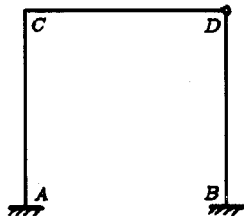


图 1

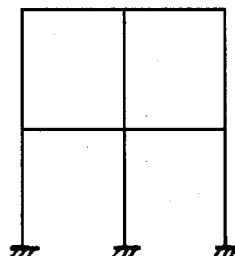


图 2

(1994 年 7 月 30 日收到第 1 稿,
1994 年 11 月 6 日收到修改稿)