Теория игр, дз 1. Дорешивание.

Катя Гольцова

October 2018

1 Теоретические задачи

1.1 Доминируемая стратегия

Полностью решена при прошлой сдаче.

1.2 Порядок удаления доминируемых стратегий

1.2.1 Строго доминируемые стратегии

Докажем, что порядок удаления строго доминируемых стратегий не влияет на множество оставшихся стратегий. Это следует из двух фактов: (1) стратегии, которые становятся доминируемыми, одни и те же, и (2) любая доминируемая стратегия будет удалена.

(2): любая доминируемая стратегия будет удалена. Это верно, поскольку процесс удаления конечен (так как стратегий конечное число), и доминируемая стратегия никогда не перестанет быть доминируемой (пусть доминирующая её стратегия s_2 была удалена. Тогда s_2 была доминирована некоторой стратегией s_3, и, поскольку отношение доминируемости очевидным образом транзитивно, наша исходная стратегия доминируется стратегией s_3 и подлежит удалению).

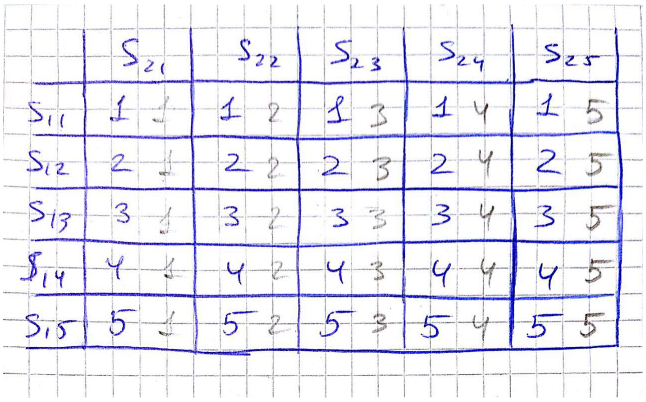
(1): пусть стратегия s_1 стала доминируемой. Это произошло после удаления 0 или больше профилей, содержащих её. Заметим, что эти профили были удалены, так как какие-то другие стратегии были удалены. Из (2) мы знаем, что эти стратегии будут удалены при любом порядке удаления, а значит, s_1 станет доминируемой при любом порядке удаления.

1.2.2 Слабо доминируемные стратегии

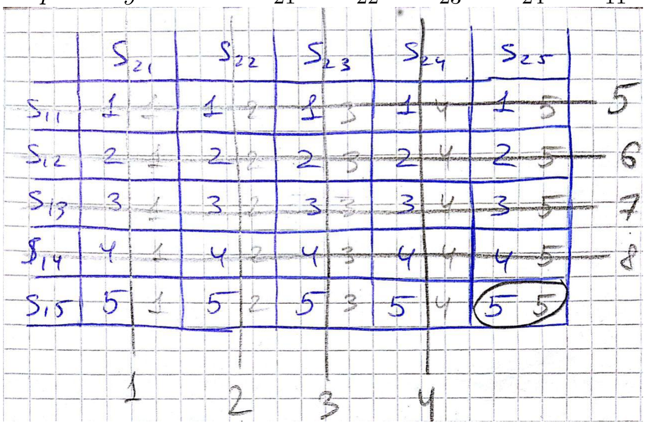
Полностью решена при прошлой сдаче.

1.3 Исключение строго доминируемых стратегий

Пример:



Порядок удаления: $s_{21} \to s_{22} \to s_{23} \to s_{24} \to s_{11} \to s_{12} \to s_{13} \to s_{14}$



1.4 Равновесия Нэша и Парето оптимальные исходы

Полностью решена при прошлой сдаче.

2 Аукцион второй цены

Полностью решена при прошлой сдаче.

3 Странный аукцион

3.1 Чистые равновесия Нэша

Заметим, что (a, b, c) – равновесие, если ни один из игроков не может поменять свою ставку так, чтобы повысить полезность. Также заметим, что если (a, b, c) – профиль стратегий, то полезность хотя бы двух игроков из трёх при этом профиле равна 0. Таким образом, если какой-то игрок может сделать свою полезность ненулевой, то исход не является равновесием Нэша.

Пусть (a, b, c) – ставки. Поскольку мы рассматриваем набор ставок с точностью до перестановки, зафиксируем порядок $a \geq b \geq c$. Есть два принципиально разных типа исходов: 1) один из мужиков получает водку и 2) водка выливается. Рассмотрим, какие исходы могут быть равновесиями Нэша в каждом случае.

1. Один из мужиков получает водку. Я утверждаю, что в таком случае его ставка может быть либо 9, либо 10. Действительно, раз другие мужики водки не получили, их ставки ниже, а полезность 0. Значит, будь ставка "успешного"мужика 8 или ниже, один из проигравших мог бы выбрать 9 и достичь полезности 1 – следовательно, рассмотренный исход не являлся бы равновесием Нэша, т.к. один из игроков захотел бы отклониться от выбранной стратегии. Заметим также, что ставка 9 всё же возможна, т.к. хоть какой-то другой мужик и мог бы "перебить"ставку успешного, тем самым он не повысил бы свою полезность. *Далее, заметим, что мужик, потративший 9 или 10 на водку, был бы не прочь потратить меньше. Значит, какой-то другой мужик должен потратить всего на 1 меньше (иначе наш выигравший мужик мог бы потратить меньше).*

   Итого условия, которые выполняются в этом случае: $a \in \{9, 10\}$, $b = a - 1, c < b$ *(знак строгий, так как водка не выливается). Значит, всего равновесий Нэша таких, что один из мужиков получает водку* $7 + 8 = 15$.

2. Водка выливается. Значит, 2 или 3 мужика сделали одну и ту же ставку. Т.е. возможны три случая (помним, что рассматриваем $a \geq b \geq c$):

   (a) $a = b = c$. Всего таких исходов 10.

   (b) $a = b > c$. Заметим, что одна из ставок a или b могла бы быть повышена. В каких случаях это не улучшит полезность повысившего? – Если повысить на самом деле нельзя ($a = b = 10$) или полезность повысившего остаётся нулевой (можно повысить только до 10, т.е. $a = b = 9$. Значит, всего таких случаев $\sum_{c=1}^{8} 1 + \sum_{c=1}^{9} 1 = 8 + 9 = 17$.

   (c) $a > b = c$. Опять же, повышение одной из равных ставок не должно повышать полезность. Значит, $a \in \{9, 10\}$, и таких случаев тоже 17.

   Итого случаев из этого пункта (равновесия Нэша такие, что водка выливается) $10 + 17 + 17 = 44$.

Ответ: в этой игре *59* различных чистых равновесий Нэша.

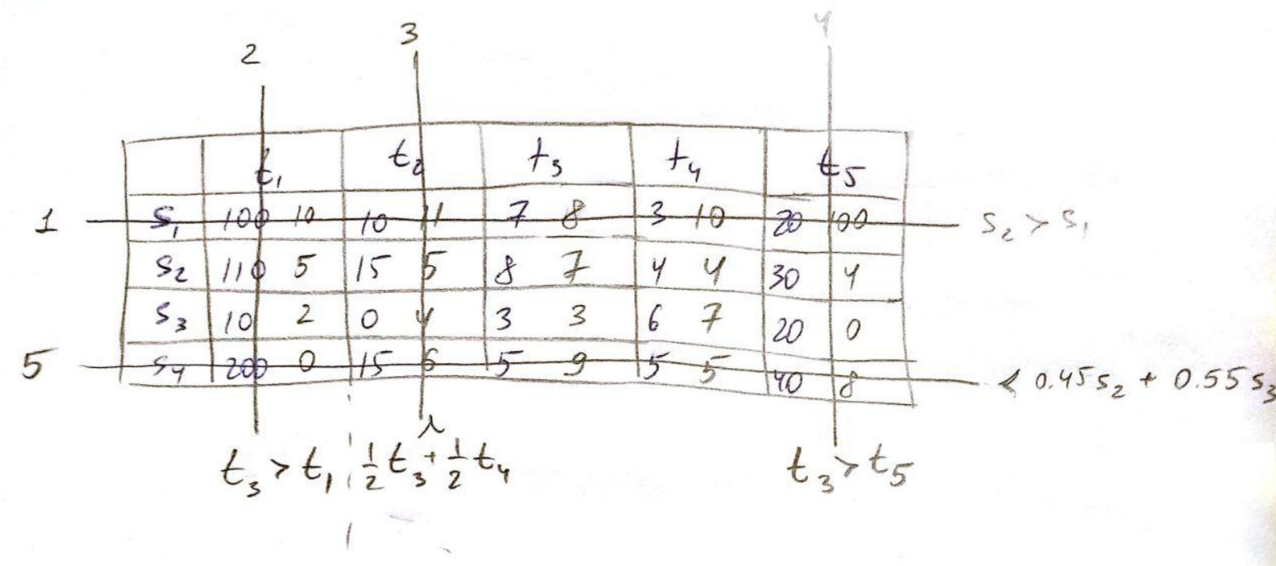
3.2 Равновесия Нэша: товар уничтожается

Ответ: по рассуждениям из пункта 2 предыдущей секции, таких равновесий 44.

3.3 Равновесия Нэша: чей-то выигрыш положителен

Это такие исходы, при которых мужик получает водку, поставив меньше 10. По рассуждениям из пункта 1, таких 7.

4 Чистые и смешанные равновесия



$s_2 \succ s_1$.

После этого, $t_3 \succ t_1$.

После этого, $\frac{1}{2}t_3 + \frac{1}{2}t_4 \succ t_2$, а также $t_3 \succ t_5$.

Затем, $0.45s_2 + 0.55s_3 \succ s_4$.

Таким образом, чистые равновесия Нэша – (8, 7) и (6, 7).

Рассмотрим смешанные равновесия Нэша. По тем же соображениям, что и в чистом случае, нет смысла рассматривать доминируемые стратегии – следовательно, рассмотрим смеси стратегий s_2 и s_3 для первого игрока, t_3 и t_4 для второго игрока. Рассмотрим $\sigma_1 = ps_2 + (1-p)s_3$, $\sigma_2 = qt_3 + (1-q)t_4$. Тогда ожидаемые выигрыши: ,

- *для 1-го игрока*

  $$E_\sigma(u_1(s)) = 8pq + 4p(1-q) + 3(1-p)q + 6(1-p)(1-q) = p(7q-2) + (6-3q)$$

  Из условия "равновесности": если $q < \frac{2}{7}$, то $p = 0$, если $q = \frac{2}{7}$, то p любое, если $q > \frac{2}{7}$, то $p = 1$.

- *для 2-го игрока*

  $$E_\sigma(u_2(s)) = 7pq+4p(1-q)+3(1-p)q+7(1-p)(1-q) = q(7p-4)+(7-3p)$$

  Из условия "равновесности": если $p < \frac{4}{7}$*, то* $q = 0$*, если* $p = \frac{4}{7}$*, то* q *любое, если* $p > \frac{4}{7}$*, то* $q = 1$*.*

Решая эту систему, получаем смешанные равновесия Нэша при $p = 0, q = 0$*,* $p = 1, q = 1$ *и* $p = \frac{4}{7}, q = \frac{2}{7}$*, то есть* $\sigma = (s_2, t_3)$*,* $\sigma = (s_3, t_4)$ *и* $\sigma = (\frac{4}{7}s_2 + \frac{3}{7}s_3, \frac{2}{7}t_3 + \frac{5}{7}t_4)$ *будут смешанными равновесиями Нэша.*