



Fenómenos de Transporte

con aplicaciones numéricas.

Jorge David.
*Escuela de Ciencias,
Universidad EAFIT.*

Universidad EAFIT
Medellín - Colombia

Contenido

1	Fenómenos de transporte	1
1.1	Discretización en diferencias finitas	3
1.2	Sistema de ecuaciones algebraicas	5
1.3	Programación de las ecuaciones algebraicas	8
1.4	Conocimientos básicos en Fortran	8
1.4.1	Estructura y edición	9
1.4.2	Lectura y escritura de datos	10
1.4.3	Constantes y variables	12
1.4.4	Formatos de las constantes y variables	14
1.4.5	Operadores aritméticos	15
1.4.6	Ciclos repetitivos	16
1.4.7	Estructura condicional	17
1.4.8	Estructura condicional con expresiones lógicas	19
I	Transporte de Momentum	23
2	Cinemática de los fluidos	25
2.1	Fluido en movimiento como un cuerpo rígido	25
2.1.1	Fuerzas de presión en un elemento de fluido	26
2.1.2	Fuerzas de cuerpo en un elemento de fluido	27
2.1.3	Fuerza total en un elemento de fluido	28
2.2	Aceleración	34
2.3	Ecuación de continuidad	46
3	Deformación y viscosidad en los fluidos	53
3.1	Deformación lineal	54
3.2	Deformación cúbica	56
3.3	Deformaciones angulares	56
3.3.1	Deformación angular simétrica	56
3.3.2	Tensor gradiente de velocidad	58
3.3.3	Deformación angular asimétrica	62
3.4	Vorticidad	63

3.5	Fluido entre dos placas paralelas	63
3.5.1	Cantidad de movimiento de un fluido	64
3.6	Gradiente de velocidad	65
3.7	Variación de $\frac{d\beta}{dt}$	67
3.8	Forma del perfil de velocidad de un fluido	71
3.9	Generalización del Tensor de viscosidades	80
3.9.1	Tensor de viscosidades en coordenadas rectangulares	82
3.9.2	Tensor de viscosidades en coordenadas cilíndricas	90
3.9.3	Tensor de viscosidades en coordenadas esféricas	96
4	Ecuación de movimiento	97
4.1	Fuerzas en el volumen de control	97
4.2	Variación temporal de la cantidad de movimiento	99
4.3	Acumulación de la cantidad de movimiento	101
4.4	Ecuación de Cauchy	102
4.4.1	Ecuación de movimiento en coordenadas cartesianas	103
4.4.2	Ecuación de movimiento en coordenadas cilíndricas	104
4.5	Ecuación de Navier-Stokes	130
4.6	Rotación debido a las viscosidad	141
4.7	Ecuación de Euler-Bernoulli	142
4.8	Ejercicios resueltos para analizar	143
4.9	Ejercicios	149
5	Ecuación de Navier-Stokes	153
5.1	Aproximaciones a la ecuación de Navier-Stokes	160
5.1.1	Número de Reynolds	164
5.1.2	Fluidos viscosos	165
5.1.3	Fluidos no-viscosos	171
6	Capa límite hidrodinámica	173
6.1	Ecuaciones de la capa límite	175
6.1.1	Análisis en la dirección y	176
6.1.2	Análisis en la dirección de x	179
6.2	Capa límite en una placa plana	182
6.2.1	Espesor, esfuerzo cortante y fuerza de arrastre	187
7	Ecuación de Von-Karman	193
7.1	Fuerza neta en la capa límite	193
7.2	Flujo de masa en la capa límite	194
7.3	Variación del momentum en la capa límite	195
7.4	Coeficiente de fricción	199
7.5	Solución numérica de la capa límite	201
7.5.1	Adimensionalidad	201

7.5.2	Discretización	201
7.6	Ecuación de Von-Karman alternativa	201
7.7	Coeficiente de resistencia: C_D	205
7.8	C_D en zona laminar y turbulenta	205
7.9	Fuerza de arrastre y de sustentación	207

II Transporte de Energía 209

8 Formas de transferencia de calor 211

8.1	Transferencia de calor por conducción	211
8.2	Transferencia de calor por convección	212
8.3	Transferencia de calor por radiación	212
8.4	Ley de Ohm para el flujo de calor	212
8.5	Ecuación general de la energía	218
8.5.1	Variación temporal de la energía	218
8.5.2	Flujo de transferencia de calor	219
8.5.3	Velocidad de los trabajos	220

9 Aproximaciones a la ecuación de la energía 225

9.1	Transferencia de calor por conducción	225
9.2	Temperatura en estado estacionario sin fuente	226
9.2.1	Distribución de temperatura en un alambre	226
9.2.2	Distribución de temperatura en una placa rectangular	230
9.2.3	Distribución de temperatura en un disco	239
9.2.4	Distribución de temperatura en un cilindro	241
9.2.5	Distribución de temperatura en una esfera	247
9.3	Distribución de Temperatura en sistemas no uniformes	251

10 Temperatura en estado estacionario con fuente 259

10.1	Conducción del calor unidimensional	259
10.1.1	Filamentos	259
10.1.2	Láminas, cilindros y esferas	267
10.1.3	Cilindros y esferas huecas	280
10.2	Conducción del calor en 2D y 3D	289
10.2.1	Coordenadas cartesianas	289
10.2.2	Coordenadas cilíndricas	296
10.2.3	Coordenadas esféricas	302

11 Ecuación de difusión para el calor 307

11.1	Ecuación de difusión unidimensional	307
11.2	Ecuación de difusión bidimensional	315
11.3	Ecuación de difusión en cilíndricas	326
11.4	Ecuación de difusión en esféricas	331

12 Aletas de enfriamiento	337
12.1 Aleta rectangular	338
12.1.1 Condiciones de frontera	339
12.1.2 Disipación del calor	342
12.1.3 Eficiencia de la aleta	343
12.1.4 Solución numérica de la aleta rectangular	343
12.2 Aleta cilíndrica	344
12.3 Aleta cónica	350
12.4 Aleta triangular	353
12.5 Aleta piramidal	353
13 Transferencia de calor por radiación	355
13.1 Fundamentos de radiación	355
13.2 Intensidad de la radiación y potencia emisiva	356
13.3 Energía de radiación entre cuerpos negros	358
13.3.1 Ley de Stefan-Boltzmann	360
13.3.2 Emisividad espectral	360
13.3.3 Factor visión F_{ij} en diferentes superficies	362
13.4 Energía de radiación entre cuerpos no-negros	371
13.4.1 Resistencia superficial a la transferencia de radiación	371
13.4.2 Caso especial	373
13.4.3 Superficie cerrada por dos superficies	373
13.4.4 Superficie cerrada por tres superficies	377
13.4.5 Apantamiento en la radiación	378
13.5 Radiación en un medio emisor absorbente	378
III Transporte de Masa	379
14 Difusión másica	381
14.1 Primera ley de Fick	382
14.2 Ley de Ohm para la difusión másica	382
14.3 Segunda ley de Fick	384
14.3.1 Solución unidimensional a la ecuación de difusión	385
14.3.2 Solución tridimensional a la ecuación de difusión	388
14.4 Solución numérica de la Segunda ley de Fick	388
14.4.1 Condiciones de frontera	390
14.5 Problemas	395
14.6 Ecuaciones para la transferencia de masa	396
14.7 Ecuación de continuidad másica	396
14.8 Ecuación de continuidad molar	397
14.9 Condiciones de frontera	398
14.10 Velocidad de reacción r_A de orden 1 y 2.	404

IV	Apéndices	409
	Apéndice A. Vectores y tensores	411
	A.1 Definiciones	411
	A.2 Operaciones con vectores	411
	A.3 Operaciones tensores	412
	Apéndice B. Ecuación de Laplace	417
	B.1 Laplace en coordenadas cilíndricas	417
	B.2 Laplace en coordenadas esféricas	419
	Apéndice C. Ecuación de Poisson	423
	C.1 Cálculo de la función de Green	426
	Bibliografía	428

Tema No. 1

Fenómenos de transporte

Hasta el momento, se ha estudiado la descripción de las propiedades de un sistema en equilibrio. Ahora, se desea describir y estudiar la evolución espacial y temporal de los mismos sistemas estudiados anteriormente sometidos a una perturbación externa. Por lo tanto, si se considera un sistema sometido a una perturbación externa de forma que las propiedades, tales como la *masa*, *energía* y la *cantidad de movimiento* se despanzan desde su punto de equilibrio; el sistema evolucionará para alcanzar una distribución de la propiedad que sea consistente con el equilibrio. La evolución del desplazamiento de la propiedad del sistema en respuesta a una distribución de no equilibrio es estudiada por los *fenómenos de transporte*.

La evolución espacio-tiempo de las propiedades físicas de un sistema, se calculan usando las ecuaciones de cambio. Las ecuaciones de cambio son un conjunto de ecuaciones diferenciales acopladas que describen los transporte de: momento, masa y energía. Con éstas ecuaciones se determinan los perfiles de: velocidad de flujo (en el transporte del momento), concentración de masa (en el transporte de masa) y Temperatura (en el transporte de energía). Además, éstas ecuaciones representan la conservación del momento, masa y energía. Las ecuaciones de cambio, son el resultado de la aplicación de las siguientes tres leyes en un sistema abierto: segunda ley de Newton, conservación de la masa y primera ley de la termodinámica.

Por otro lado, las ecuaciones diferenciales de las ecuaciones de cambio, son referidas como:

- La ecuación de continuidad.
- La ecuación de Navier-Stokes.
- La ecuación de la energía.

Todas éstas leyes de conservación son aplicadas a un sistema fijando un volumen finito, el cual contiene una porción de fluido (gas o líquido), llamado *volumen de*

control, el cuál es una porción del fluido de dimensiones infinitesimales y arbitrarias, como lo muestra la Figura 1.1.

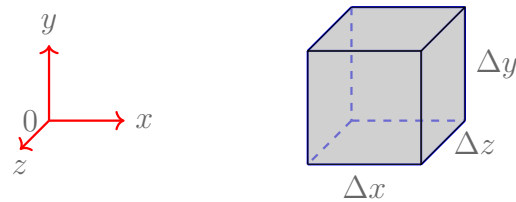
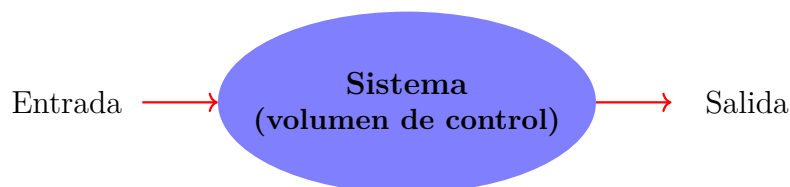


Figura 1.1: Volumen de control: contiene un conjunto de partículas que conforman el fluido.

En el medio continuo los sistemas pueden clasificarse en tres formas conocidos como: *sistemas abierto*, en donde existe intercambio o transferencia de materia y energía con sus alrededores; *sistemas cerrados* en los cuales solo existe transferencia de energía y los *sistemas adiabáticos* los cuales no intercambian calor ni energía con sus alrededores.

En los fenómenos de transporte, se analizan todos los procesos de transferencia de masa, momentum y energía en un sistema. Las transferencias o intercambios de materia y energía, en fenómenos de transporte, se realizan usando modelos de *flujos* y *perfiles* de cantidad de movimiento, materia y de temperatura. Estos procesos se asumirán conservativos, o sea que los flujos de entrada y salida al sistema son balanceados y por lo tanto, las variables internas que se describen en el sistema no cambian con el tiempo. El balance en un sistema puede expresarse como:



y en forma matemática:

$$\text{Entrada} = \text{Salida} \quad (1.1)$$

donde *entrada* y *salida* denotan el cambio del flujo a la entrada y salida del sistema, respectivamente.

Las ecuaciones de cambio, ecuaciones diferenciales que describen los transporte de momento, masa y energía poseen soluciones analíticas muy limitadas y por lo tanto, se requiere el uso de las técnicas computacionales para resolver problemas que se presentan en fenómenos de transporte. Recordemos que para un problema específico,

se deben de conocer las ecuaciones diferenciales que describen el proceso en estudio y sus condiciones de frontera. El proceso de obtención de la solución computacional consta de las etapas que se muestran esquemáticamente en la Figura 1.2.

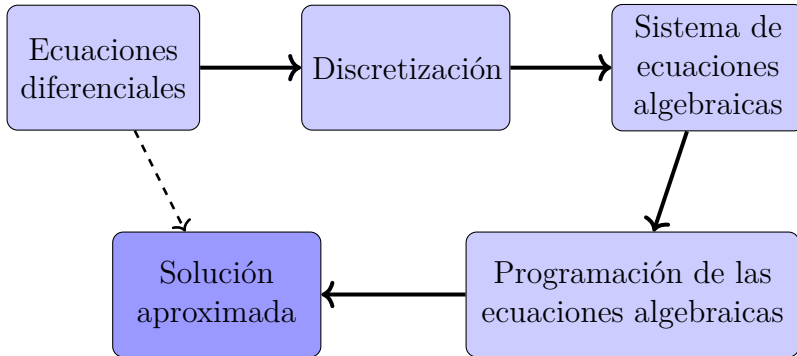


Figura 1.2: Procedimiento de la solución computacional

En la Figura se observa que el sistema de ecuaciones diferenciales debe convertirse en un sistema correspondiente de ecuaciones algebraicas para obtener la solución computacional. La segunda etapa del proceso de solución (Fig. 1.2) requiere un solucionador de ecuaciones para proporcionar la solución del sistema de ecuaciones algebraicas. Para convertir las ecuaciones diferenciales parciales en un sistema de ecuaciones algebraicas hay varias formas disponibles. La forma en que se realiza la discretización también depende de si se están considerando las derivadas de tiempo (en problemas dependientes del tiempo) o las ecuaciones que contienen solo derivadas espaciales. En la práctica, las derivadas del tiempo se discretizan casi exclusivamente mediante el método de la diferencia finita. Típicamente las derivadas espaciales están discretizadas por la diferencia finita, elemento finito, o volumen finito.

1.1 Discretización en diferencias finitas

Es una de las técnicas numéricas para resolver los problemas que no presenten solución analítica o insolubles de resolver. Esto es un problema lo suficientemente complejo y solo se considerará los aspectos más básicos. Como se observará, la discretización en una dimensión relaciona tres puntos consecutivos de una malla de puntos lineales (ver Figura 1.3). Por ejemplo, para discretizar la primera derivada de una función $f(x)$ en el punto x_i se utiliza la expansión de Taylor de la función para $x = x_i \pm h$, siendo h una cantidad muy pequeña.

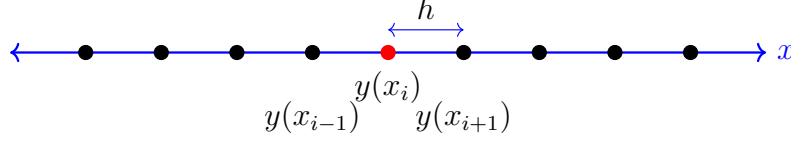


Figura 1.3: Malla de puntos igualmente espaciados unidimensional

Para la función $y(x_i)$ de la Figura 1.3, realizando una expansión de Taylor por la derecha,

$$y(x_{i+1}) \approx y(x_i) + hy'(x_i) \quad (1.2)$$

despejando la derivada,

$$y'(x_i) \approx \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} \quad (1.3)$$

ahora, realizando una expansión por la izquierda,

$$y(x_{i-1}) \approx y(x_i) - hy'(x_i) \quad (1.4)$$

despejando la derivada,

$$y'(x_i) \approx \frac{y(x_{i-1}) - y(x_i)}{-h} \quad (1.5)$$

la primera derivada, usando el método del punto medio, se obtiene realizando la resta de las ecuaciones (1.2) y (1.4),

$$y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}) \approx y(x_i) + hy'(x_i) - y(x_i) + hy'(x_i) \quad (1.6)$$

$$y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}) \approx 2hy'(x_i) \quad (1.7)$$

$$y'(x_i) \approx \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}))}{2h} \quad (1.8)$$

La segunda derivada, puede obtenerse sacando la derivada a la ecuación (1.2),

$$y'(x_{i+1}) \approx y'(x_i) + hy''(x_i) \quad (1.9)$$

despejando $y''(x_i)$,

$$y''(x_i) \approx \frac{y'(x_{i+1}) - y'(x_i)}{h} \quad (1.10)$$

donde $y'(x_i)$ está dada por la ecuación (1.5) y $y'(x_{i+1})$ puede obtenerse usando una expansión de Taylor por la izquierda alrededor del punto x_{i+1} ,

$$y(x_i) \approx y(x_{i+1}) - hy'(x_{i+1}) \quad (1.11)$$

despejando $y'(x_{i+1})$,

$$y'(x_{i+1}) \approx \frac{y(x_i) - y(x_{i+1})}{-h} \quad (1.12)$$

Entonces, con las ecuaciones (1.5) y (1.12), se obtiene la segunda derivada. Reemplazando estas ecuaciones:

$$y''(x_i) \approx \frac{1}{h} \left[\frac{y(x_i) - y(x_{i+1})}{-h} - \frac{y(x_{i-1}) - y(x_i)}{-h} \right] \quad (1.13)$$

$$y''(x_i) \approx \frac{1}{h^2} \left[-y(x_i) + y(x_{i+1}) + y(x_{i-1}) - y(x_i) \right] \quad (1.14)$$

$$y''(x_i) \approx \frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1}))}{h^2} \quad (1.15)$$

La segunda derivada de la función $y(x_i)$, ecuación (1.15), puede usarse para obtener la forma discreta de las ecuaciones diferenciales parciales que resultan en los problemas de fenómenos de transporte.

1.2 Sistema de ecuaciones algebraicas

La aplicación de las leyes: segunda ley de Newton, conservación de la masa y la primera ley de la termodinámica a un sistema, dan surgimiento a sistemas de ecuaciones diferenciales de segundo orden que discretizadas conducen a un sistema de ecuaciones algebraicas, las cuales se solucionan de forma *exacta* usando métodos computacionales. Por ejemplo, una de las ecuaciones diferenciales importantes en fenómenos de transporte es la ecuación diferencial elíptica, la cual genera la ecuación de Laplace y la ecuación de Poisson. En una dimensión, la ecuación diferencial es:

$$\frac{d^2T(x)}{dx^2} = f(x) \quad (1.16)$$

discretizando la ecuación con el uso de la ecuación (1.15),

$$\frac{T(i+1) - 2T(i) + T(i-1))}{\Delta x^2} = f(i) \quad (1.17)$$

organizando la ecuación,

$$T(i+1) - 2T(i) + T(i-1) = \Delta x^2 f(i) \quad (1.18)$$

$$T(i-1) - 2T(i) + T(i+1) = \Delta x^2 f(i); \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (1.19)$$

dando valores a la variable i se obtienen las ecuaciones algebraicas a resolver:

$$\begin{aligned}
\text{Para } i = 1 &\rightarrow T(0) - 2T(1) + T(2) = \Delta x^2 f(1) \\
\text{Para } i = 2 &\rightarrow T(1) - 2T(2) + T(3) = \Delta x^2 f(2) \\
\text{Para } i = 3 &\rightarrow T(2) - 2T(3) + T(4) = \Delta x^2 f(3) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

y en forma matricial,

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T(1) \\ T(2) \\ T(3) \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta x^2 f(1) - T(0) \\ \Delta x^2 f(2) \\ \Delta x^2 f(3) \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (1.20)$$

donde $T(0)$ es una condición de frontera ubicada en el nodo (punto) inicial, Δx es la distancia entre los nodos y $f(i)$ es una fuente externa aplicada en cada uno de los nodos. La ecuación matricial (1.20) se resuelve para encontrar los valores de $T(1)$, $T(2)$, $T(3)$, \dots . A medida que los espaciamientos entre los puntos se haga más pequeño ($\Delta x \rightarrow 0$) se obtendrán mejores resultados, pero la ecuación matricial se vuelve más grande o más compleja y se requerirá el uso de métodos computacionales.

En 2-D, las ecuaciones diferenciales elípticas tienen la forma:

$$\frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial y^2} = f(x, y) \quad (1.21)$$

En este caso, el punto de la función $U(i, j)$ se relaciona con dos puntos más cercanos ubicados en el eje x y con dos puntos ubicados en el eje y , como lo muestra la Figura 1.4.

Usando la aproximación de la diferencia central, para las derivadas parciales, se obtiene:

$$\frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial x^2} = \frac{U(i+1, j) - 2U(i, j) + U(i-1, j))}{(\Delta x)^2} \quad (1.22)$$

y

$$\frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial y^2} = \frac{U(i, j+1) - 2U(i, j) + U(i, j-1))}{(\Delta y)^2} \quad (1.23)$$

haciendo espaciamientos iguales $\Delta x = \Delta y = h$ y sumando las ecuaciones anteriores, se obtiene:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial y^2} = \\
\frac{U(i+1, j) + U(i-1, j) - 4U(i, j) + U(i, j+1) + U(i, j-1))}{h^2}
\end{aligned}$$

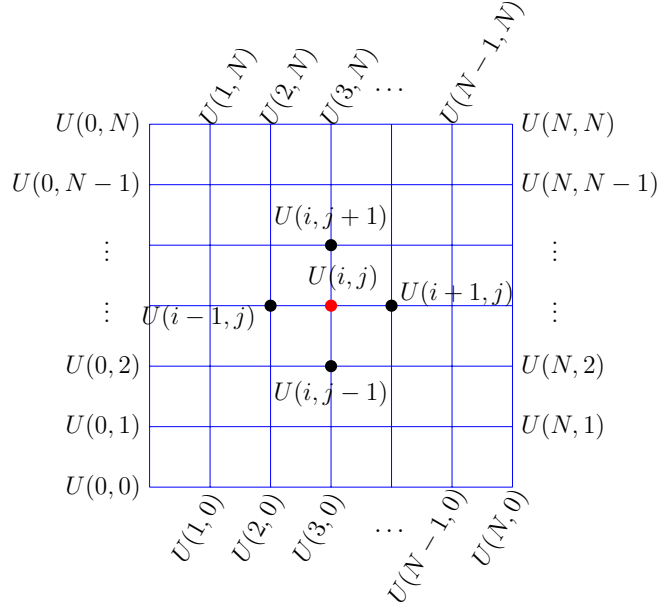


Figura 1.4: Malla bidimensional

Por lo tanto, la ecuación de Poisson, en diferencias finitas se escribe como:

$$\frac{U(i+1, j) + U(i-1, j) - 4U(i, j) + U(i, j+1) + U(i, j-1)}{h^2} = f(i, j) \quad (1.24)$$

o

$$U(i+1, j) + U(i-1, j) - 4U(i, j) + U(i, j+1) + U(i, j-1) = h^2 f(i, j) \quad (1.25)$$

despejando la variable $U(i, j)$,

$$U(i, j) = \frac{1}{4} \left[U(i+1, j) + U(i-1, j) + U(i, j+1) + U(i, j-1) \right] - \frac{h^2}{4} f(i, j) \quad (1.26)$$

Para la solución de la ecuación (1.26), se requiere de una aproximación inicial de todos los nodos o puntos internos de la malla de la Figura 1.4 (por lo general cero). Los puntos externos de malla corresponden a las condiciones de frontera del problema a resolver. Entonces, la solución de (1.26) estaría dada por el ciclo:

para $i = 1, 2, 3, \dots$
 para $j = 1, 2, 3, \dots$
 calcula $U(i, j)$
 próximo j
 próximo i

1.3 Programación de las ecuaciones algebraicas

El lenguaje de programación de comandos dinámicos como el PYTHON, RUBY y PERL, en general, tienen diferentes ventajas en términos de productividad del desarrollador sobre los lenguajes compilados, como el C, C++ y FORTRAN, debido a su facilidad de uso y amplias bibliotecas. Además, los entornos modernos de computación de alto rendimiento (HPC) masivamente paralelos, como las supercomputadoras, las estaciones de trabajo en clústeres en paralelo y la computación de uso general en unidades de procesamiento de gráficos, se han vuelto esenciales para las simulaciones prácticas a gran escala. Es por esta razón que los desarrolladores de programas deben aprender varias arquitecturas de computadora y marcos de programación en paralelo, con el propósito de usar lenguajes de programación para aumentar la productividad.

En el desarrollo de programas básicos como aplicaciones web, se prefieren los lenguajes de secuencias de comandos dinámicos como el PYTHON y el PERL, principalmente debido a sus amplias bibliotecas. Sin embargo, en entornos HPC, suele ocurrir que solo los lenguajes, como el C, C++ y FORTRAN sean oficialmente compatibles con los proveedores y las instalaciones. Aunque los lenguajes dinámicos no son particularmente populares en la informática científica a gran escala, se han realizado algunos avances en la inserción de módulos de Python en programas científicos, sin sacrificar la productividad o el rendimiento.

Aquí, nos centraremos en uno de los lenguajes de computación de alto rendimiento como lo es el lenguaje de programación FORTRAN. Fortran se ha creado principalmente para aplicaciones numéricas y muchos científicos e ingenieros lo han usado debido a su eficacia en la informática de alto rendimiento. El lenguaje es simple y los compiladores pueden optimizar, paralelizar y vectorizar el código de manera muy eficiente. Fortran no es la mejor opción para interactuar con el sistema operativo o para el procesamiento de texto. Pero esta deficiencia se puede superar mediante el uso de herramientas externas y se puede dejar que Fortran haga lo diseñado para él: *El cálculo numérico*.

1.4 Conocimientos básicos en Fortran

En esta sección se hará una breve descripción de los fundamentos básicos que se requieren para realizar un programa en el lenguaje Fortran. Temas como la estructural general del programa; las ordenes de lectura (READ), de escritura (WRITE) y sus formatos por teclado y por archivo; los ciclos repetitivos, también conocidos como BUCLES; las estructuras condicionales (IF-THEN) y combinados con los operadores lógicos .AND. y .OR. serán presentados.

1.4.1 Estructura y edición

Un programa escrito en Fortran está compuesto por las instrucciones comprendidas entre las siguientes instrucciones:

`PROGRAM nombre-programa`
:
:
`END PROGRAM nombre-programa`

Dentro de ésta unidad (Programa Principal), se pueden distinguir tres partes sucesivas:

- Declaración. Se encuentra al principio del programa y contiene un grupo de instrucciones no ejecutables que definen el nombre del programa y el tipo de las variables que este utiliza.
- Ejecución. Contiene una o más instrucciones que describen las acciones que el programa ejecuta .
- Terminación. Instrucción o instrucciones que interrumpen y paran la ejecución del programa e indican al compilador (traductor) que el programa se ha completado.

Problema 1.1 *La estructura de un programa escrito en el lenguaje Fortran es:*

```
1  ! ----- Zona de declaracion -----
2  PROGRAM Tarea1
3  !
4  !  Declaracion de las variables y constantes
5  !
6  ! -----Zona de ejecucion -----
7  !
8  !  Ejecucion del programa
9  !
10 ! -----Zona de terminacion -----
11 !
12 !  Interruccion del programa
13 !
14 END PROGRAM Tarea1
```

Este lenguaje escrito debe de ser traducido a un lenguaje de máquina para poderlo ejecutar. Esta traducción es realizada por el compilador `gfortran`, mediante la siguiente sintaxis:

`> gfortran -o hola hola.f90`

donde `gfortran` es el compilador (traductor), `hola.f90` es el lenguaje escrito en Fortran y `hola` es el programa en lenguaje de máquina, comúnmente conocido como el ejecutable y su nombre esta definido por `-o`. Después de tener el ejecutable, el programa se ejecuta usando la siguiente orden:

`> ./hola`

1.4.2 Lectura y escritura de datos

Fortran lee y/o escribe la información a través de la pantalla o a través de un archivo. La sintaxis de la lectura y escritura son:

`READ(unidad,formato)
WRITE(unidad,formato)`

donde `unidad` indica si la lectura o escritura de datos que realiza fortran es por pantalla o por archivo y `formato` puede ser una expresión, variable o constante, que contiene los descriptores de formato de la lista o la etiqueta de una sentencia FORMAT, es decir, un entero entre 1 y 99999. En este caso, debe de existir además una sentencia de la forma:

`etiqueta FORMAT(lista de descriptores de formato)`

Lectura y escritura por pantalla

La lectura y escritura de datos que se realiza por pantalla y sin formato. La sintaxis tiene la siguiente forma:

`READ(*,*) lista de variables
WRITE(*,*) lista de variables`

El primer asterisco se refiere al dispositivo de lectura o escritura (la pantalla) y el segundo asterisco se refiere al formato libre (opción por defecto en fortran).

Problema 1.2 *El primer programa que uno escribe cuando esta aprendiendo un lenguaje de programación es "HOLA MUNDO !". Escriba el siguiente programa y nombrelo como: hola.f90*

```
1 program hola
2 ! este programa escribe en la pantalla Hola Mundo
3 write(*,*) 'Hola Mundo !'
4 !
5 pause ! ESTA LINEA LA COLOCAN SOLO LOS QUE
6 ! EJECUTAN EL PROGRAMA EN WINDOWS.
7 end program hola
```

Después de que termine de escribir el programa, compílelo con la siguiente orden:

`> gfortran -o hola hola.f90`

donde `-o` define el nombre del archivo ejecutable, que en nuestro caso es `hola`. Si la compilación es satisfactoria, el programa corre usando el siguiente comando:

`> ./hola`

Lectura y escritura por archivo

La lectura y/o escritura de datos usando un archivo, Fortran debe de abrir el archivo, asignándole una unidad. La sintaxis general para abrir un archivo es:

`OPEN(unit=unidad,file=nombre,status=estado del archivo)`

donde:

- `unit=`: La unidad es un número entero comprendido entre 1 y 99 que identifica al archivo.
- `file=`: El nombre es el nombre del archivo que se quiere abrir.
- `status=`: El estado del archivo es uno de los siguientes caracteres: `'OLD'`, `'NEW'`, `'REPLACE'`, `'SCRATCH'` o `'UNKNOWN'` (opción por defecto).
 - La opción `SCRATCH` crea un archivo temporal que se destruye automáticamente cuando se cierra el archivo o cuando acaba la ejecución del programa. Se suele usar para guardar resultados intermedios durante la ejecución de un programa. Estos archivos no pueden tener nombre.
 - La opción `UNKNOWN` implica, si existe el archivo antes de ejecutar el programa, que lo reemplaza, y si no existe, lo crea en tiempo de ejecución y lo abre.
- `access =`: El acceso es uno de los siguientes caracteres: `'SEQUENTIAL'` (opción por defecto) o `'DIRECT'`. Los archivos permiten acceso directo, es decir, saltar de una línea (también llamada registro) a cualquier otra, independientemente de su situación en el archivo. Sin embargo, por razones históricas, la técnica de acceso por defecto en Fortran es secuencial, es decir, que el acceso a los registros se realiza en orden consecutivo, desde el primer registro hasta el último.
- `action =`: La acción es una de las siguientes constantes: `'READ'`, `'WRITE'` o `'READWRITE'` (opción por defecto).
- `IOSTAT =`: error-de-apertura es una variable entera que almacena el estado de la operación de apertura de archivo. Aunque es una cláusula opcional, se aconseja usarla para evitar abortar un programa cuando se produce un error de apertura. Si el valor de la variable es:
 - cero, significa éxito en la apertura del archivo.
 - positivo, significa que se ha producido un error al abrir el archivo.

A continuación se dan dos examples, uno de lectura y otro de escritura.

- Apertura de un archivo para lectura:

```
open(unit=2,file='dato',status='old',action='read')
```

- Apertura de un archivo para escritura:

```
open(unit=3,file='resultado',status='new',action='write')
```

Cuando se abre un archivo en Fortran, se debe de cerrar con la siguiente orden:

```
CLOSE(unit=unidad)
```

Cuando Fortran realiza la lectura o escritura a través de un archivo, también se modifica los comandos **READ** y **WRITE**. La sintaxis tiene la siguiente forma:

```
READ(unit,*) lista de variables
WRITE(unit,*) lista de variables
```

Problema 1.3 *Hacer un programa llamado hola1.f90 que escriba "HOLA MUNDO !" en un archivo que se llame 'resultado.txt'*

```

1  program hola1
2  !
3  open(2,file='resultado.txt',status='new')
4  !
5  write(2,*) 'Hola Mundo !'
6  !
7  close(2)
8  !
9  pause    !  ESTA LINEA LA COLOCAN SOLO LOS QUE
10         !  EJECUTAN EL PROGRAMA EN WINDOWS.
11 end program hola1

```

compilar el programa y ejecutarlo usando las siguientes ordenes:

```
> gfortran -o hola1 hola1.f90
> ./hola1
```

1.4.3 Constantes y variables

Una **variable** en Fortran es un objeto, que puede cambiar de valor durante la ejecución del programa. Una **constante** en Fortran es un dato que se fija inicialmente y su valor no cambia durante la ejecución del programa.

Existen cinco tipos de datos en Fortran :

- **INTEGER**: números enteros.

- **REAL**: números reales
- **COMPLEX**: números complejos
- **LOGICAL**: valores lógicos .TRUE. (verdadero) o .FALSE. (falso)
- **CHARACTER**: caracteres, texto.

Para la declaración de las constantes o variables se la antepone en nombre del tipo seguido de dos puntos y la constante o variable. Por example, en la sentencia:

```
REAL :: x,y
INTEGER :: n, l, m
CHARACTER(len=entero) :: nombre
CHARACTER*entero :: nombre
LOGICAL :: mark
```

La forma general de la declaración de una variable es:

TIPO [,atributos....] :: lista de variables

donde **atributo** es opcional y se usa para definir las propiedades de la variable. Algunos atributos son:

- **PARAMETER**
- **DIMENSION(...)**

Problema 1.4 *Ejemplo de constantes y variables.*

```
1 program constantes
2 real, parameter :: pi = 3.141599
3 integer, parameter :: n=5
4 character(len=35) :: nombre
5 !
6 write(*,*) 'Escriba un nombre '
7 read(*,*) nombre
8 write(*,*) 'Nombre : ', nombre
9 write(*,*) 'Numero real : ', pi
10 write(*,*) 'Numero entero : ', n
11 !
12 pause    !   ESTA LINEA LA COLOCAN SOLO LOS QUE
13          !   EJECUTAN EL PROGRAMA EN WINDOWS.
14 end program constantes
```

1.4.4 Formatos de las constantes y variables

Los formatos más comunes son:

Código	Variable o constante	Escritura
F	números reales	Fw.d
I	números enteros	Iw
A	cadenas de texto	Aw
E	número exponencial	Ew.d
X	espacio horizontal	nX

donde w es un número entero que denota el campo (el ancho) y d es también un número entero que denota cifras significativas. En el espacio horizontal, n indica el número de columnas o espacios horizontales. Algunos ejemplos son:

Problema 1.5 En la siguiente Tabla se puede observar algunos ejemplos para los números reales.

Descriptor	Valor libre	Valor con formato
F9.3	25.338	● ● ●25.338
F5.1	0.35247	●●0.4
F6.2	0.089235	●●0.09

Problema 1.6 En la siguiente Tabla se puede observar algunos ejemplos para las cadenas de texto.

Descriptor	Texto libre	Texto con formato
A	ABCDEF	ABCDEF
A8	ABCDEF	●●ABCDEF
A4	ABCDEF	ABCD

Problema 1.7 En la siguiente Tabla se puede observar algunos ejemplos con notación científica.

Descriptor	Valor libre	Valor con formato
E8.2	83.456	0.83E+02
E10.3	8.3974	●0.840E+01
E10.4	0.83E2	0.8300E+02

Problema 1.8 Ejemplo con formato en la escritura.

```

1 program formato
2   real :: num
3   !
4   write(*,*) 'Escriba un numero '
5   read(*,*)num
6   !
7   write(*,100)num
8   write(*,200)num
9   !
10  100 format(6x,F9.3, 'numero con formato Fw.d')
11  200 format(10x,E9.3, 'numero con formato Ew.d')
12  !
13  pause    !   ESTA LINEA LA COLOCAN SOLO LOS QUE
14          !   EJECUTAN EL PROGRAMA EN WINDOWS.
15 end program formato

```

1.4.5 Operadores aritméticos

En Matemáticas, se dispone de una serie de símbolos que indican determinadas operaciones. Así, + indica una suma, - una resta, etc. De modo semejante, el lenguaje Fortran utiliza también símbolos, tomados del conjunto de caracteres especiales, para indicar operaciones.

Operación	Operador en Fortran	Ejemplo
Potencia	**	$a^b \rightarrow a ** b$
División	/	$\frac{a}{b} \rightarrow a / b$
Multiplicación	*	$a \times b \rightarrow a * b$
Resta	-	$a - b \rightarrow a - b$
Suma	+	$a + b \rightarrow a + b$

Problema 1.9 *Ejemplo de operadores ariméticos. Hacer un programa que calcule el área de un círculo*

```

1 program area_circulo
2 real, parameter :: pi=3.141592 ! declaracion de variable
3 real :: r,perimetro,area ! declaracion de variable
4 !
5 r = 4.0 ! radio
6 perimetro = 2.0*pi*r ! calcula el perimetro
7 area = pi*r**2 ! calcula el area
8 !
9 write(*,*) 'perimetro=',perimetro, 'area=',area ! valores calculados.
10 !
11 pause    !   ESTA LINEA LA COLOCAN SOLO LOS QUE
12          !   EJECUTAN EL PROGRAMA EN WINDOWS.
13 end program area_circulo

```

compilar el programa y ejecutar el programa.

1.4.6 Ciclos repetitivos

Una estructura de repetición, también llamada bucle, hace posible la ejecución repetitiva de secciones específicas de código. Hay dos formas básicas de estructuras de repetición, cuya diferencia principal radica en cómo se controlan.

- La repetición controlada por el bucle **DO**, que se ejecuta un número determinado de veces, siendo el número de repeticiones conocido antes de que empiece la ejecución. La sintaxis del esquema DO es:

```
DO variable=inicio,final,incremento
    sentencia 1
    sentencia 2
    :
END DO
```

donde *inicio*, *final*, e *incremento* son cantidades enteras. El incremento por defecto es igual a 1.

Problema 1.10 *El siguiente programa escribe el valor de las variables de iteración i y la suma de números pares 10 veces.*

```
1 program repeticion
2 integer :: i
3 real :: suma
4 !
5 suma=0.0
6 do i=1,10           ! inicio bucle
7     suma = suma + 2.0 ! sentencia 1: calculo
8     write(*,*)i,suma ! sentencia 2: escribe
9 end do
10 !
11 pause ! ESTA LINEA LA COLOCAN SOLO LOS QUE
12      ! EJECUTAN EL PROGRAMA EN WINDOWS.
13 end program repeticion
```

- La repetición controlada por expresión lógica o bucle **WHILE**. En un bucle WHILE, un bloque de sentencias se ejecuta un número indefinido de veces, hasta que se satisface alguna condición establecida por el usuario. La sintaxis de esta estructura es:

```
DO WHILE (expresión-lógica)
    sentencia 1
    sentencia 2
    :
END DO
```


El proceso anterior se repite hasta que expresión lógica se hace falsa.

Problema 1.11 *El siguiente programa escribe el valor de las variables de iteración i y la suma de números pares 10 veces.*

```
1 program repeticion
2 integer :: i
3 real :: suma
4 !
5 suma = 0.0
6 do while (i <=10)           ! inicio bucle
7     suma = suma + 2.0       ! sentencia 1: calculo
8     write(*,*) i, suma     ! sentencia 2: escribe
9 end do
10 !
11 pause !   ESTA LINEA LA COLOCAN SOLO LOS QUE
12         !   EJECUTAN EL PROGRAMA EN WINDOWS.
13 end program repeticion
```

en donde el símbolo \leq es un operador lógico que significa *menor o igual a* y se explican en la próxima sección.

1.4.7 Estructura condicional

En ocasiones en que un determinado conjunto de sentencias se ejecutan sólo si una determinada condición es cierta o falsa. Un operador lógico, permiten controlar la ejecución de las sentencias de un programa. En la siguiente Tabla se muestra los operadores lógicos más usados:

Operador lógico		Significado
.EQ.	==	igual
.NE.	/=	diferente
.LT.	<	menor que
.LE.	<=	menor o igual que
.GT.	>	mayor que
.GE.	>=	mayor o igual que

Estructura condicional simple

La estructura condicional simple se conoce como **IF-THEN** simplificado y tiene la siguiente sintaxis:

```
IF (condición) THEN
    sentencia 1
    sentencia 2
    :
END IF
```

en donde la condición es construida usando el operador lógico.

Problema 1.12 *El siguiente programa tiene el condicional IF-THEN.*

```
1 program condicional
2 real :: x
3 !
4 write(*,*) 'Entre un valor '
5 read(*,*) x
6 if (x <= 5) then
7     write(*,*) 'valor de x es: ', x
8 end if
9 !
10 pause    !   ESTA LINEA LA COLOCAN SOLO LOS QUE
11           !   EJECUTAN EL PROGRAMA EN WINDOWS.
12 end program condicional
```

En este example se evalúa la expresión lógica ($x \leq 5$) y en caso de que sea cierta, es decir, en el caso de que el valor de la variable x sea menor que 5, se imprime el valor de x .

Estructura condicional con alternativa

En el caso de la condición anterior, sólo se ejecuta un determinado bloque de instrucciones. Sin embargo, hay ocasiones en las que se tiene que decidir entre la ejecución de dos posibles bloques de instrucciones. La sintaxis de esta condición permite incluir una segunda opción en la condición. Este condicional se conoce como **IF-THEN-ELSE** y su sintaxis es:

<pre>IF (condición) THEN sentencia si es verdadera la condición ELSE sentencia si es falsa la condición END IF</pre>
--

Problema 1.13 *El siguiente programa tiene el condicional IF-THEN-ELSE.*

```
1 program condicional
2 real :: x, y
3 !
4 write(*,*) 'escriba un numero '
5 read(*,*) x
6 if (x <= 5) then
7     y = 5.0 * x - 3.0
8     write(*,*) 'valor x=', x, 'valor y=', y
9 else
10    write(*,*) 'x es mayor que 5 '
11 end if
12 !
13 pause    !   ESTA LINEA LA COLOCAN SOLO LOS QUE
14           !   EJECUTAN EL PROGRAMA EN WINDOWS.
15 end program condicional
```

Estructura multicondicional

La estructura multicondicional es aquella que permite elegir entre varias alternativas de ejecución. Esta estructura se conoce como: IF-THEN-ELSEIF. Su sintaxis es:

```
IF (condición 1) THEN
    sentencia 1
ELSEIF (condición 2) THEN
    sentencia 2
:
ELSEIF (condición N) THEN
    sentencia N
ELSE
    sentencia falsa
END IF
```

Problema 1.14 *El siguiente programa tiene el condicional IF-THEN-ELSEIF.*

```
1 program condicional
2 .....
3 !
4 if (x>5) then
5     write (*,*) x, ' es mayor que 5 '
6 elseif (x==5) then
7     write (*,*) x, ' es igual a 5 '
8 else
9     write (*,*) x, ' es menor que 5 '
10 .....
11 !
12 pause    !   ESTA LINEA LA COLOCAN SOLO LOS QUE
13          !   EJECUTAN EL PROGRAMA EN WINDOWS.
14 end program condicional
```

1.4.8 Estructura condicional con expresiones lógicas

Los operadores lógicos más comunes son: **.AND.** y **.OR..**

Problema 1.15 *El siguiente programa comprueba si el número leído por pantalla se encuentra o no se encuentra en el intervalo cerrado $[1,10]$.*

```

1 program condicional
2 real :: num
3 !
4 write(*,*) 'escribir un numero '
5 read(*,*) num
6 if (num >= 0 .AND. num <= 10) then
7     write(*,*) num, ' pertenece al intervalo [1,10] '
8 else
9     write(*,*) num, ' no pertenece al intervalo [1,10] '
10 endif
11 !
12 pause    !    ESTA LINEA LA COLOCAN SOLO LOS QUE
13          !    EJECUTAN EL PROGRAMA EN WINDOWS.
14 end program condicional

```

Problema 1.16 El siguiente programa estima el valor de la derivada de la función $f(x) = x^2$ en el punto $x_0 = 2.0$

```

1 PROGRAM DIF_FINITAS
2 IMPLICIT NONE
3 !
4 !fx0 es el valor de la funcion en el punto x0
5 !fx1 es el valor de la funcion en el punto x0+dx
6 !df es el valor exacto de la derivada
7 !dfc es el valor de la derivada calculada con este programa
8 REAL:: x0, fx0, fx1, dx
9 REAL:: df, dfc
10 PRINT*, 'Escriba el valor de x0 = '
11 READ(*,*) x0
12 PRINT*, 'Escriba el valor de dx = '
13 READ(*,*) dx
14 !valor de f en x0
15 fx0 = x0**2
16 !valor exacto de la derivada de f en x0
17 df = 2*x0
18 !valor de f en x0+dx
19 fx1 = (x0+dx)**2
20 !calculo de la derivada usando diferencias finitas
21 dfc = (fx1-fx0)/dx
22 !imprimie resultados en la pantalla
23 WRITE(*,*) 'Derivada de f = x*2 en x0 = ', x0, ' con dx = ', dx
24 WRITE(*,*) 'Valor calculado = ', dfc
25 WRITE(*,*) 'Valor exacto = ', df
26 !
27 pause    !    ESTA LINEA LA COLOCAN SOLO LOS QUE
28          !    EJECUTAN EL PROGRAMA EN WINDOWS.
29 END PROGRAM DIF_FINITAS

```

Problema 1.17 Escriba un programa en Fortran para calcular $\frac{dy}{dx}$ en $x = 0.5$ y $\Delta x = 0.1$ usando las ecuaciones (1.3) y (1.8), donde $y = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$. Es decir, usando:

- $\frac{dy}{dx} \approx \frac{y(i+1) - y(i)}{\Delta x}$.
- $\frac{dy}{dx} \approx \frac{y(i+1) - y(i-1)}{2\Delta x}$.

y compare la exactitud de los resultados.

Parte I

Transporte de Momentum

Tema No. 2

Cinemática de los fluidos

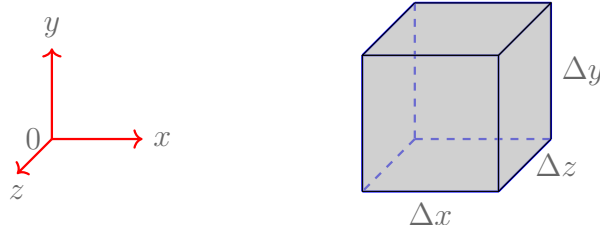
La cinemática de los fluidos explica la descripción de sus movimientos. Por lo tanto, se debe de analizar los vectores de posición, de velocidad y de aceleración en función de la posición y del tiempo. Los **objetivos** de esta sección son:

- Deducción, análisis y aplicación de las fuerzas de superficie y de peso de un fluido.
- Análisis de la velocidad de un flujo a través de un volumen.
- Deducción y aplicación de la ecuación de continuidad.

2.1 Fluido en movimiento como un cuerpo rígido

En ésta sección se obtendrán las relaciones para la variación de la presión en los fluidos que se mueven como un cuerpo rígido, con o sin aceleración, y en ausencia de cualquier esfuerzo cortante, es decir, no existen movimientos entre las placas del fluido.

Considere un elemento rectangular diferencial de fluido con longitudes de los lados Δx , Δy y Δz en las direcciones x , y y z , respectivamente, como lo muestra la siguiente Figura:



Las fuerzas que actúan sobre el diferencial de fluido son:

- **Las fuerzas del cuerpo**, debido a la gravedad que atúa sobre el diferencial de volumen del fluido y es proporcional al volumen del elemento de fluido.
- **Las fuerzas superficiales**, que son todas las fuerzas de presión que actúan sobre las superficies del elemento de volumen y son proporcionales al área superficial del elemento de fluido.
- **Las fuerzas cortantes** que también son superficiales y son debido a la viscosidad del fluido.

2.1.1 Fuerzas de presión en un elemento de fluido

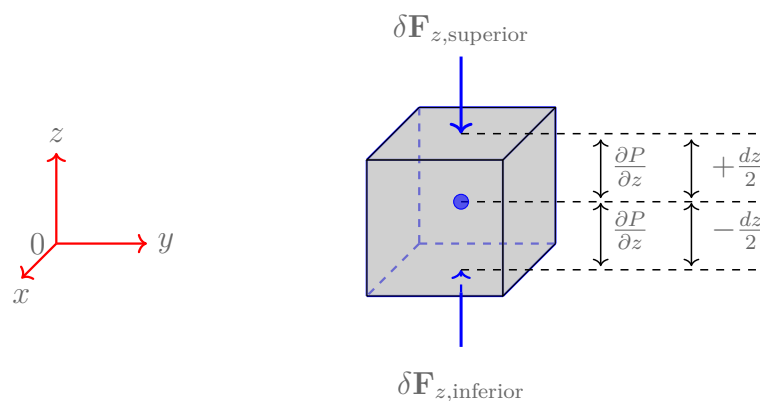
Sí se ubica la presión en el centro del volumen de control, las presiones superficiales superior e inferior del elemento de control, en la dirección del eje z , puede expresarse como $P + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{dz}{2}$ y $P - \frac{\partial P}{\partial z} \frac{dz}{2}$ y las fuerzas superficiales como:

$$\delta \mathbf{F}_z = \left(P + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) dxdy, \quad \text{Fuerza superficial superior} \quad (2.1)$$

y

$$\delta \mathbf{F}_z = \left(P - \frac{\partial P}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) dxdy, \quad \text{Fuerza superficial inferior} \quad (2.2)$$

La siguiente Figura ilustra las direcciones de las fuerzas en el eje z



El diferencial de fuerza superficial neta que actúa sobre el elemento de fluido en la dirección z es la diferencia entre las fuerzas de presión que actúan sobre las caras superior e inferior,

$$\delta \mathbf{F}_z^{\text{superficial}} = \delta \mathbf{F}_{z,\text{inferior}} - \delta \mathbf{F}_{z,\text{superior}} \quad (2.3)$$

$$\delta \mathbf{F}_z^{\text{superficial}} = \left(P - \frac{\partial P}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) dxdy - \left(P + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) dxdy \quad (2.4)$$

realizando la diferencia, se obtiene:

$$\delta \mathbf{F}_z^s = -\frac{\partial P}{\partial z} dx dy dz \quad (2.5)$$

donde el superíndice de $\delta \mathbf{F}_z^s$ significa superficial y el subíndice la dirección del diferencial de fuerza. Usando el mismo procedimiento con las fuerzas superficiales en las direcciones de los ejes x y y , se obtienen las siguientes fuerzas superficiales:

$$\delta \mathbf{F}_x^s = -\frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz \quad (2.6)$$

y

$$\delta \mathbf{F}_y^s = -\frac{\partial P}{\partial y} dx dy dz \quad (2.7)$$

Usando las ecuaciones (2.5), (2.6) y (2.7), se calcula la fuerza neta superficial o simplemente la fuerza de presión que actúa sobre el elemento de volumen. En forma vectorial se tiene:

$$\delta \mathbf{F}^s = \delta \mathbf{F}_x^s + \delta \mathbf{F}_y^s + \delta \mathbf{F}_z^s \quad (2.8)$$

reemplazando las ecuaciones (2.5), (2.6) y (2.7),

$$\delta \mathbf{F}^s = -\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\right) dx dy dz \quad (2.9)$$

es decir,

$$\delta \mathbf{F}^s = -\nabla P dx dy dz \quad (2.10)$$

donde ∇P es el gradiente de presión.

2.1.2 Fuerzas de cuerpo en un elemento de fluido

La fuerza de un cuerpo que actúa sobre un elemento de volumen del fluido, es el peso propio del elemento de fluido que actúa solo en la dirección del eje z y se expresa como:

$$\delta \mathbf{F}_z^c = -\mathbf{g} \delta m \quad (2.11)$$

donde δm es el diferencial de masa y \mathbf{g} es la gravedad. En términos de la densidad del fluido,

$$\delta \mathbf{F}_z^c = -\mathbf{g} \rho dx dy dz \quad (2.12)$$

2.1.3 Fuerza total en un elemento de fluido

La fuerza total, sin tener en cuenta las fuerzas cortantes, que actúa sobre el elemento de volumen está dada por la suma de las fuerzas de presión y la fuerza del cuerpo, es decir,

$$\delta \mathbf{F}^t = \delta \mathbf{F}^s + \delta \mathbf{F}_z^c \quad (2.13)$$

reemplazando,

$$\delta \mathbf{F}^t = -\nabla P dx dy dz - \mathbf{g} \rho dx dy dz \quad (2.14)$$

como,

$$\delta \mathbf{F} = \delta m \cdot \mathbf{a} = \rho dx dy dz \mathbf{a} \quad (2.15)$$

reemplazando,

$$\nabla P + g \rho \mathbf{k} = -\rho \mathbf{a} \quad (2.16)$$

con \mathbf{k} como vector unitario en la dirección del eje z . La ecuación (2.16) es la ecuación general del movimiento de un fluido que se comporta como un cuerpo rígido y en donde no se tienen en cuenta los esfuerzos cortantes. Cuando se resuelven los vectores en sus componentes, ésta relación se expresa como:

$$\frac{\partial P}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial P}{\partial y} \mathbf{j} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} + g \rho \right) \mathbf{k} = -\rho \mathbf{a} \quad (2.17)$$

y en forma escalar, las tres direcciones escalares son:

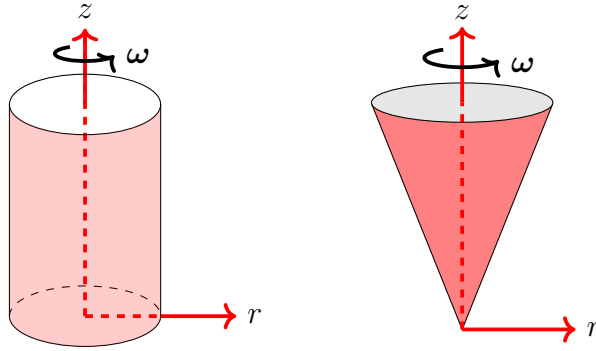
$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\rho a_x \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\rho a_y \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho (g + a_z) \quad (2.20)$$

donde a_x , a_y y a_z son las aceleraciones del fluido en las direcciones x , y y z , respectivamente.

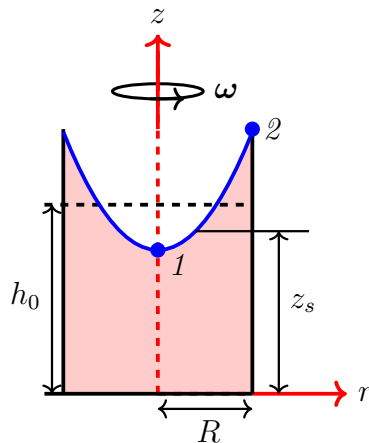
Problema 2.1 *Un recipiente cilíndrico y uno cónico de radios R contienen un fluido de densidad constante ρ , se ponen en rotación sobre el eje z con frecuencia angular ω , como lo muestra la Figura.*



Por experiencia, cuando se tiene un líquido en un recipiente y se hace girar alrededor del eje z , se fuerza el líquido hacia afuera debido a la fuerza centrífuga y se forma una superficie concava llamada superficie libre. Obtener una ecuación para la superficie libre y la diferencia de presiones entre el centro del cilindro y el punto máximo del borde.

Solución

Cuando se alcanza el estado estacionario, se tiene el siguiente perfil:



Los puntos 1 y 2 indican los mínimos y máximos que alcanza la superficie libre. Cada partícula que forma el fluido se mueve con la misma velocidad angular ω y el movimiento se conoce como movimiento de vórtice forzado. El ejemplo se analizará usando las coordenadas cilíndricas (r, θ, z) . Se tienen en cuenta las siguientes suposiciones:

- Fluido incompresible, es decir con densidad ρ constante
- Simetría azimutal
- Flujo en estado estacionario

La ecuación de movimiento para este sistema (ver ecuación (2.16)) es:

$$\nabla P + \rho(\mathbf{a} + \mathbf{g}) = 0 \quad (2.21)$$

desarrollando el gradiente de presión y reorganizando:

$$\frac{\partial P}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \phi}\hat{\phi} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} + g\rho\right)\hat{z} = -\rho(a_r\hat{r} + a_\phi\hat{\phi} + a_z\hat{z}) \quad (2.22)$$

igualando componente a componente y sabiendo que $\mathbf{a} = \omega^2 r\hat{r}$,

$$\frac{\partial P}{\partial r} = -\rho\omega^2 r \quad (2.23)$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \phi} = 0 \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} + g\rho = 0 \quad (2.25)$$

Ahora calculando el diferencial de presión dP y sabiendo que $P = P(r, z)$:

$$dP = \frac{\partial P}{\partial r}dr + \frac{\partial P}{\partial z}dz \quad (2.26)$$

Como el gradiente de presión en la dirección de $-\hat{r}$ disminuye (ver superficie libre de la figura), es decir que se tiene $\frac{\partial P}{\partial r} = \rho\omega^2 r$. Reemplazando,

$$dP = \rho\omega^2 r dr - \rho g dz \quad (2.27)$$

Como se desea encontrar la superficie donde la presión es constante (isobárico), $dP = 0$. Entonces:

$$\rho\omega^2 r dr - \rho g dz_{isob} = 0 \quad (2.28)$$

despejando dz_{isob} ,

$$dz_{isob} = \frac{\omega^2 r}{g} dr \quad (2.29)$$

integrando a ambos lados, se obtiene la ecuación de la superficie libre para ambos recipientes,

$$z_{isob} = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + C \quad (2.30)$$

donde C es una constante a determinar. Esta constante depende de la geometría del recipiente del fluido. En este caso se consideran dos formas de superficies: Una superficie cilíndrica y una superficie cónica.

Superficie Cilíndrica

Para el caso del cilindro, la integral de volumen es:

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^{z_{isob}} r dz dr d\phi \quad (2.31)$$

Resolviendo para z y para ϕ ,

$$V = 2\pi \int_0^R z_{isob} r dr \quad (2.32)$$

reemplazando z_{isob} , ecuación (2.30)

$$V = 2\pi \int_0^R r \left(\frac{\omega^2 r^2}{2g} + C \right) dr \quad (2.33)$$

Resolviendo y evaluando la integral, se obtiene:

$$V = 2\pi \left(\frac{\omega^2 R^4}{8g} + \frac{CR^2}{2} \right) \quad (2.34)$$

Como el volumen inicial es igual al final debido a que el volumen se conserva, se tiene que $V = \pi R^2 h_0$. Entonces igualando se tiene que:

$$2\pi \left(\frac{\omega^2 R^4}{8g} + \frac{CR^2}{2} \right) = \pi R^2 h_0 \quad (2.35)$$

$$\frac{\omega^2 R^2}{4g} + C = h_0 \quad (2.36)$$

despejando C , se obtiene:

$$C = h_0 - \frac{\omega^2 R^2}{4g} \quad (2.37)$$

reemplazando en la ecuación (2.30),

$$z_{isob} = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + h_0 - \frac{\omega^2 R^2}{4g} \quad (2.38)$$

por lo tanto, la ecuación de la superficie libre para el cilindro es:

$$z_{isob} = \frac{\omega^2}{2g} \left(r^2 - \frac{R^2}{2} \right) + h_0 \quad (2.39)$$

Superficie Cónica

Para el caso del cono, la integral de volumen es:

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_{\frac{h_0}{R}r}^{z_{isob}} r dz dr d\phi \quad (2.40)$$

donde h_0 es la altura y $\frac{h_0}{R}$ es la pendiente de la línea recta que forma el cono desde el punto $(0,0)$ hasta el punto (R, h_0) . Resolviendo:

$$V = 2\pi \int_0^R \left(z_{isob} - \frac{h_0 r}{R} \right) r dr \quad (2.41)$$

reemplazando z_{isob} , ecuación (2.30)

$$V = 2\pi \int_0^R r \left(\frac{\omega^2 r^2}{2g} + C - \frac{h_0 r}{R} \right) dr \quad (2.42)$$

Resolviendo y evaluando la integral, se obtiene:

$$V = 2\pi \left(\frac{\omega^2 R^4}{8g} + \frac{CR^2}{2} - \frac{h_0 R^2}{3} \right) \quad (2.43)$$

Como el volumen inicial es igual al final debido a que el volumen se conserva, se tiene que $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h_0$. Entonces igualando se tiene que:

$$2\pi \left(\frac{\omega^2 R^4}{8g} + \frac{CR^2}{2} - \frac{h_0 R^2}{3} \right) = \frac{1}{3}\pi R^2 h_0 \quad (2.44)$$

$$2 \left(\frac{\omega^2 R^2}{8g} + \frac{C}{2} - \frac{h_0}{3} \right) = \frac{1}{3}h_0 \quad (2.45)$$

Despejando C se obtiene:

$$C = h_0 - \frac{\omega^2 R^2}{4g} \quad (2.46)$$

Que resulta ser igual a la constante para el cilindro. Reemplazando en la ecuación (2.30):

$$z_{isob} = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + h_0 - \frac{\omega^2 R^2}{4g} \quad (2.47)$$

$$z_{isob} = \frac{\omega^2}{2g} \left(r^2 - \frac{R^2}{2} \right) + h_0 \quad (2.48)$$

Para calcular la diferencia de presión del cono, se retoma la ecuación (2.27). Integrando la expresión entre los puntos 1 y 2:

$$\int_{P_1}^{P_2} dP = \int_{r_1}^{r_2} \rho \omega^2 r dr - \int_{z_1}^{z_2} \rho g dz \quad (2.49)$$

$$P_2 - P_1 = \frac{\rho \omega^2 (r_2^2 - r_1^2)}{2} - \rho g (z_2 - z_1) \quad (2.50)$$

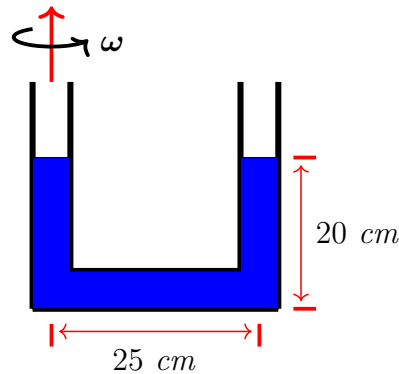
Para el punto 1 se toma como referencia $r_1 = 0$, $z_1 = 0$ y para el punto 2 cualquier punto de la superficie libre. Así, la distribución de presión se expresa como:

$$P(r, z) = P_0 + \frac{\rho \omega^2 r^2}{2} - \rho g z \quad (2.51)$$

tomando la ecuación (2.50), la diferencia de presiones entre en un mismo plano ($z_2 - z_1 = \Delta z = 0$) entre el centro del cilindro ($r = 0$) y el borde del recipiente ($r = R$) se expresa como:

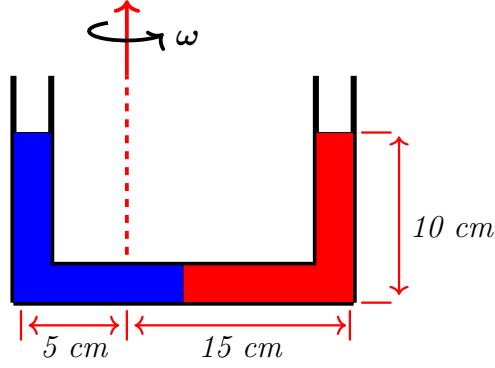
$$\Delta P = \frac{\rho \omega^2 R^2}{2} \quad (2.52)$$

Problema 2.2 Las distancias entre dos centros de dos brazos de un tubo en U abierto a la atmósfera es de 25 cm y el tubo contiene agua hasta una altura de 20 cm en ambos brazos. Ahora, se hace girar el tubo alrededor de su brazo izquierdo a 4.2 rad/s. Determine la diferencia en la elevación entre las superficies del fluido en los dos brazos.



Problema 2.3

Un tubo en U contiene agua en el brazo derecho y otro líquido en el brazo izquierdo. Cuando el tubo gira a 30 rpm alrededor de un eje que está a 15 cm del brazo derecho y 5 cm del brazo izquierdo, los niveles del líquido en los dos brazos se vuelven iguales. Estime el valor de la densidad del fluido del brazo izquierdo.



2.2 Aceleración

La aceleración es dada por la expresión,

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (2.53)$$

pero a vez el vector de velocidad es función del tiempo y de la posición del elemento de fluido,

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \quad (2.54)$$

es decir,

$$d\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} dt + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} dx + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} dy + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} dz \quad (2.55)$$

encontrando la aceleración,

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \frac{dt}{dt} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \frac{dz}{dt} \quad (2.56)$$

definiendo las velocidades en las direcciones x , y y z , como:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}, \quad (2.57)$$

se obtiene,

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + v_x \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \quad (2.58)$$

donde v_x , v_y y v_z son las componentes de la velocidad de la partícula en las direcciones x , y y z , respectivamente. La aceleración, ecuación (2.58), puede escribirse en forma vectorial como:

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \quad (2.59)$$

donde ∇ es el operador gradiente, que en coordenadas cartesianas es:

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.60)$$

y \mathbf{v} es la velocidad de la partícula, que en términos de sus componentes es:

$$\mathbf{v} = \mathbf{i}v_x + \mathbf{j}v_y + \mathbf{k}v_z \quad (2.61)$$

con \mathbf{i} , \mathbf{j} y \mathbf{k} como los vectores unitarios en las direcciones de las coordenadas x , y y z . El segundo término del lado derecho de la ecuación (2.59), corresponde al cambio de la velocidad \mathbf{v} con respecto a las coordenadas. Si se reemplaza la velocidad, ecuación (2.61), en la aceleración, ecuación (2.58), se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} = & \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{i}v_x + \mathbf{j}v_y + \mathbf{k}v_z) + v_x \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{i}v_x + \mathbf{j}v_y + \mathbf{k}v_z) + \\ & v_y \frac{\partial}{\partial y} (\mathbf{i}v_x + \mathbf{j}v_y + \mathbf{k}v_z) + v_z \frac{\partial}{\partial z} (\mathbf{i}v_x + \mathbf{j}v_y + \mathbf{k}v_z) \end{aligned} \quad (2.62)$$

reuniendo términos en cada dirección de los ejes coordenados,

$$\begin{aligned} \mathbf{a} = & \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \\ & \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \mathbf{j} + \\ & \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \mathbf{k} \end{aligned} \quad (2.63)$$

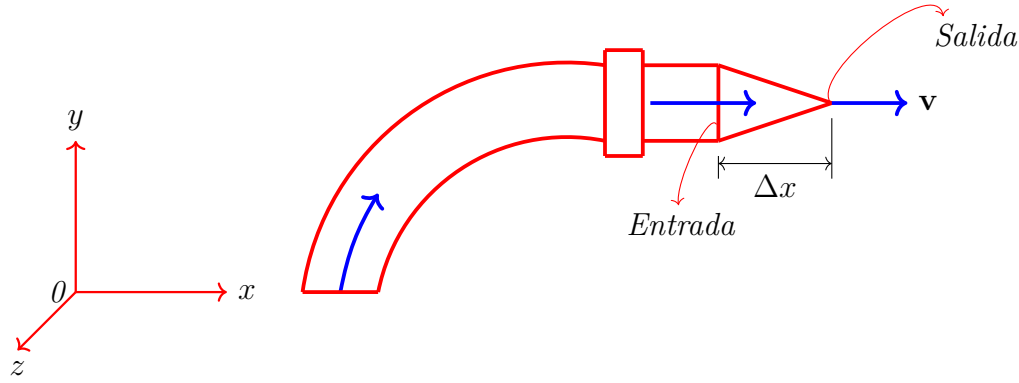
identificando las componentes de la aceleración, se obtiene:

$$a_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \quad (2.64)$$

$$a_y = \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \quad (2.65)$$

$$a_z = \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (2.66)$$

Problema 2.4 Aceleración del fluido en una boquilla. El flujo de agua por una boquilla de una mangera de jardín ilustra las partículas de un fluido que se acelera, inclusive en un flujo estacionario. Suponga que la boquilla tiene 0.325 ft de largo, con un diámetro de entrada de 0.035 ft y un diámetro de salida de 0.00152 ft. (ver Figura)



El gasto volumétrico por la manguera de jardín a través de la boquilla es $\dot{v} = 0.00187 \frac{ft^3}{s}$ y el flujo es estacionario. Estime la aceleración promedio de una partícula de fluido que pasa a lo largo de la línea central de la boquilla.

Solución

Suposiciones:

- El flujo es estacionario e incompresible.
- La dirección x se toma a lo largo de la línea central de la boquilla.
- Por simetría, las componentes de velocidad v_y y v_z son iguales a cero, es decir, se supone solo movimiento a lo largo del eje x .

Como el eje x es la dirección del flujo, entonces las componentes a_x , a_y y a_z de las aceleraciones son:

$$a_x \neq 0, \quad a_y = a_z = 0 \quad (2.67)$$

Entonces, la ecuación (2.64) es igual a:

$$a_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \quad (2.68)$$

Ahora, como se trata de un flujo estacionario y la velocidad solo tiene componente en la dirección x , se tiene:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = 0 \rightarrow \text{flujo estacionario} \quad (2.69)$$

$$v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0 \rightarrow v_y = 0 \quad (2.70)$$

$$v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = 0 \rightarrow v_z = 0 \quad (2.71)$$

solo queda la componente de la aceleración,

$$a_x = v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} \quad (2.72)$$

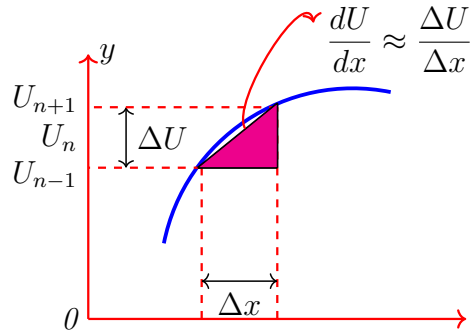
La solución de la ecuación (2.72), se obtiene usando la aproximación de la velocidad promedio a través de la boquilla de las velocidades de entrada y de salida de la boquilla, es decir,

$$a_x \approx U_x^{prom} \frac{\partial U_x}{\partial x} \quad (2.73)$$

donde U_x^{prom} es la velocidad promedio definida como:

$$U_x^{prom} = \frac{U_{salida} + U_{entrada}}{2} \quad (2.74)$$

y para estimar la derivada parcial $\frac{\partial U_x}{\partial x}$, se emplea la aproximación de diferencias finitas en primer orden, ver Figura.



Realizando una expansión de Taylor alrededor de $U_n(x)$,

$$\text{por el lado izquierdo} \rightarrow U_{n-1} \approx U_n - \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_n \frac{\Delta x}{2} \quad (2.75)$$

$$\text{por el lado derecho} \rightarrow U_{n+1} \approx U_n + \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_n \frac{\Delta x}{2} \quad (2.76)$$

restando las anteriores ecuaciones,

$$U_{n+1} - U_{n-1} \approx \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_n \Delta x \quad (2.77)$$

donde,

$$\frac{\partial U}{\partial x} \approx \frac{U_{n+1} - U_{n-1}}{\Delta x} \quad (2.78)$$

donde U_{n+1} es la velocidad en la salida de la boquilla y U_{n-1} es la velocidad del flujo en la entrada de la boquilla. Reemplazando las ecuaciones (2.78) y (2.74) en la ecuación (2.73),

$$a_x \approx \left(\frac{U_{salida} + U_{entrada}}{2} \right) \left(\frac{U_{salida} - U_{entrada}}{\Delta x} \right) \quad (2.79)$$

y en términos de la diferencia de los cuadrados perfectos,

$$a_x \approx \frac{U_{salida}^2 - U_{entrada}^2}{2\Delta x} \quad (2.80)$$

Calculando la velocidad de entrada,

$$U_{entrada} = \frac{\dot{V}}{A_{entrada}} = \frac{\dot{V}}{\pi \left(\frac{D}{2} \right)^2} = \frac{4\dot{V}}{\pi D^2} \quad (2.81)$$

$$= \frac{4(0.00187)}{3.1416(0.035)^2} \quad (2.82)$$

$$= \frac{0.00748}{0.00385} = 1.9436 \frac{ft}{s} \quad (2.83)$$

y la velocidad de salida,

$$U_{salida} = \frac{0.00748}{3.1416(0.0152)^2} = 10.31 \frac{ft}{s} \quad (2.84)$$

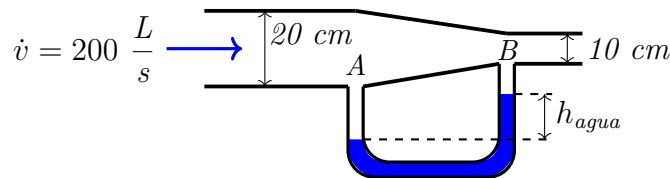
reemplazando,

$$a_x \approx \frac{(10.31)^2 - (1.94)^2}{2(0.325)} \quad (2.85)$$

obteniéndose una aceleración promedio a lo largo de la boquilla igual a:

$$a_x \approx 157.7 \frac{ft}{s^2} \quad (2.86)$$

Problema 2.5 Fluye aire por un tubo a razón de $200 \frac{Litros}{s}$. El tubo está formado por dos secciones con diámetros de 20 cm y 10 cm, con una suave sección reductora que conecta las dos secciones, como lo muestra la Figura:



Se mide las diferencias de presión usando un manómetro de agua. Desprecie los efectos de fricción y determine la altura diferencial de agua entre las dos secciones del tubo. Tome la densidad del aire como $1.20 \frac{Kg}{m^3}$. Use las ecuaciones de cambio y de cinemática de los fluidos.

Solución

Suponiendo el flujo de aire en la dirección x , la ecuación de cambio, ecuación (2.17), en ésta dirección esta dada por la ecuación:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\rho a_x \quad (2.87)$$

y la aceleración, ecuación (2.64) en la dirección x para un flujo estacionario y sabiendo que solamente existe la velocidad v_x ($v_y = v_z = 0$) es:

$$a_x = v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} \quad (2.88)$$

reemplazando (2.88) en (2.87),

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\rho v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} \quad (2.89)$$

estimando la aceleración como en (2.80), para un diferencial, se obtiene

$$\frac{\Delta P}{\Delta x} \approx -\rho \frac{v_{salida}^2 - v_{entrada}^2}{2\Delta x} \quad (2.90)$$

$$\Delta P \approx -\frac{\rho}{2} (v_{salida}^2 - v_{entrada}^2) \quad (2.91)$$

De la Figura se observa que las presiones en los puntos A y B, se relacionan mediante la ecuación,

$$P_A = P_B + g\rho_{agua}h_{agua} \quad (2.92)$$

y las diferencias de presión son:

$$\Delta P = -g\rho_{agua}h_{agua} \quad (2.93)$$

reemplazando en (2.91),

$$g\rho_{agua}h_{agua} \approx \frac{\rho}{2} (v_{salida}^2 - v_{entrada}^2) \quad (2.94)$$

despejando h_{agua} ,

$$h_{agua} \approx \frac{\rho_{aire}}{2g\rho_{agua}} (v_{salida}^2 - v_{entrada}^2) \quad (2.95)$$

calculando las velocidades en los puntos A y B,

$$v_{entrada} = \frac{\dot{v}}{A_{entrada}} = \frac{4\dot{v}}{\pi D_{entrada}^2} \rightarrow v_{entrada}^2 = \frac{16\dot{v}^2}{\pi^2 D_{entrada}^4} \quad (2.96)$$

de la misma forma se obtiene la velocidad del aire en el punto B.

$$v_{salida}^2 = \frac{16\dot{v}^2}{\pi^2 D_{salida}^4} \quad (2.97)$$

reemplazando en $v_{entrada}$, se obtiene:

$$h_{agua} \approx \frac{\rho_{aire}}{2g\rho_{agua}} \left(\frac{16\dot{v}^2}{\pi^2 D_{salida}^4} - \frac{16\dot{v}^2}{\pi^2 D_{entrada}^4} \right) \quad (2.98)$$

$$h_{agua} \approx \frac{8\dot{v}^2}{g\pi^2} \frac{\rho_{aire}}{\rho_{agua}} \left(\frac{1}{D_{salida}^4} - \frac{1}{D_{entrada}^4} \right) \quad (2.99)$$

donde $D_{entrada} = 20 \text{ cm}$, $D_{salida} = 10 \text{ cm}$, $\rho_{aire} = 1.20 \frac{Kg}{m^3}$ y $\dot{v} = 200 \frac{L}{s}$. Reemplazando los datos se obtiene que:

$$h_{agua} \approx 3.7 \text{ cm} \quad (2.100)$$

Problema 2.6 Considere un campo bidimensional estacionario e incompresible de velocidad dado por:

$$\mathbf{v}(v_x, v_y) = (0.5 + 0.8x)\mathbf{i} + (1.5 - 0.8y)\mathbf{j} \quad (2.101)$$

donde las coordenadas x y y se dan en metros y la magnitud de la velocidad en m/s. Determine la aceleración en el punto $(2, 3)$.

Solución

La velocidad en función de las coordenadas x, y , por lo tanto para calcular la aceleración se debe de calcular sus componentes usando las ecuaciones (2.64) y (2.65) en dos dimensiones.

$$a_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \quad (2.102)$$

como $v_x = 0.5 + 0.8x$ y $v_y = 1.5 - 0.8y$, sus correspondientes derivadas son:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0.8, \quad \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0 \quad (2.103)$$

reemplazando,

$$a_x = 0 + (0.5 + 0.8x) \cdot 0.8 + (1.5 - 0.8y) \cdot 0 \quad (2.104)$$

$$a_x = (0.40 + 0.64x) \text{ m/s}^2 \quad (2.105)$$

calculando la componente a_y ,

$$a_y = \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \quad (2.106)$$

y sus derivadas,

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial v_y}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v_y}{\partial y} = -0.8 \quad (2.107)$$

reemplazando,

$$a_y = 0 + 0 + (1.5 - 0.8y)(-0.8) = (-1.2 + 0.64y) \text{ m/s}^2 \quad (2.108)$$

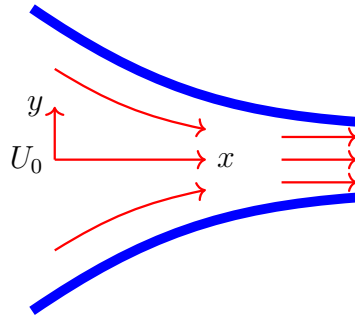
Ahora, en el punto $(x = 2, y = 3)$ se obtiene:

$$a_x = 1.68 \text{ m/s}^2 \quad (2.109)$$

$$a_y = 0.720 \text{ m/s}^2 \quad (2.110)$$

Obsérvese que la aceleración es diferente de cero, aunque el fluido sea estacionario.

Problema 2.7 Considere el flujo bidimensional, incompresible y estacionario por un ducto convergente, como lo muestra la siguiente Figura.



Un sencillo campo aproximado de velocidad para éste flujo esta dado por la ecuación:

$$\mathbf{v}(u, v) = (U_0 + bx)\mathbf{i} - by\mathbf{j} \quad (2.111)$$

donde U_0 es la velocidad horizontal en $x = 0$. Note que en esta ecuación se ignoran los efectos viscosos a lo largo de las paredes, pero es una aproximación razonable para la gran parte del campo de flujo.

- Calcule la aceleración material para las partículas del fluido que pasan por éste ducto. Dé su respuesta de dos maneras: como las componentes a_x y a_y y como el vector aceleración \mathbf{a} .

La aceleración material de un campo vectorial de velocidades, se define como el conjunto de derivadas espaciales en cada componente, al igual que su derivada temporal del campo, como se presenta en la ecuación:

$$\mathbf{a}(u, v, w) = \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{V}(u, v, w) + (\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V}(u, v, w) \quad (2.112)$$

La aceleración en cada componentes se puede expresar como el conjunto de derivadas parciales espaciales y temporal de la componente en análisis, como:

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} \quad (2.113)$$

$$a_y = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} \quad (2.114)$$

$$a_z = \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.115)$$

Analizando el campo vectorial, se encuentran las componentes de aceleración a_x y a_y ,

$$a_x = 0 + (U_0 + bx)\frac{\partial}{\partial x}(U_0 + bx) - by\frac{\partial}{\partial y}(U_0 + bx) + 0 \quad (2.116)$$

$$= U_0b + b^2x \quad (2.117)$$

$$a_y = 0 + (U_0 + bx)\frac{\partial}{\partial x}(-by) - by\frac{\partial}{\partial y}(-by) + 0 \quad (2.118)$$

$$= b^2y \quad (2.119)$$

La aceleración material completa, puede expresarse como la suma de las diferentes componentes de la forma:

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} \quad (2.120)$$

reemplazando a_x y a_y ,

$$\mathbf{a} = (U_0 b + b^2 x) \mathbf{i} + (b^2 y) \mathbf{j} \quad (2.121)$$

- Genere una función analítica $y(x)$ que describa las líneas de corriente del flujo en el ducto.

Tomando el campo de velocidades, ecuación (2.111)

$$\mathbf{v}(u, v) = (U_0 + bx) \mathbf{i} - by \mathbf{j} \quad (2.122)$$

y recordando que la forma estandar de una ecuación diferencial exacta,

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (2.123)$$

y el criterio para definir la exactitud de la ecuación diferencial,

$$\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx} \quad (2.124)$$

y haciendo $M(x, y) = by$ y $N(x, y) = U_0 + bx$, se puede verificar que se cumple la relación (2.124), por lo tanto, con las componentes del campo de velocidades se puede escribir la ecuación diferencial exacta:

$$bydx + (U_0 + bx)dy = 0 \quad (2.125)$$

es decir,

$$\frac{dx}{U_0 + bx} = \frac{dy}{-by} \quad (2.126)$$

Integrando en ambos extremos y utilizando el método de sustitución de variable, se llega a funciones de logaritmo natural, como se muestra a continuación:

$$\int \frac{dx}{U_0 + bx} = \int \frac{dy}{-by} = \frac{1}{b} \ln(U_0 + bx) = -\frac{1}{b} \ln(y) + C_1 \quad (2.127)$$

donde C_1 es una constante de integración. Cancelando el parámetro b y reescribiendo la ecuación como:

$$\ln(U_0 + bx) = -\ln(y) + \ln C = \ln \frac{C}{y} \quad (2.128)$$

igualando los argumentos de los logaritmos,

$$U_0 + bx = \frac{C}{y} \quad (2.129)$$

obteniéndose,

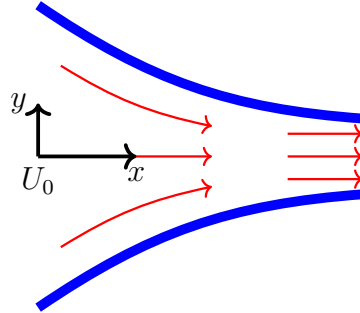
$$y(x) = \frac{C}{U_0 + bx} \quad (2.130)$$

Esta función analítica asintótica describe las posibles trayectorias en el interior del fluido, donde la constante C define las familias de curvas posibles.

Problema 2.8 Se modela el flujo en un ducto convergente con un campo bidimensional y estacionario de velocidad aproximada a:

$$\mathbf{v} = (U_0 + bx)\hat{i} - by\hat{j} \quad (2.131)$$

donde U_0 es la velocidad horizontal en $x = 0$.



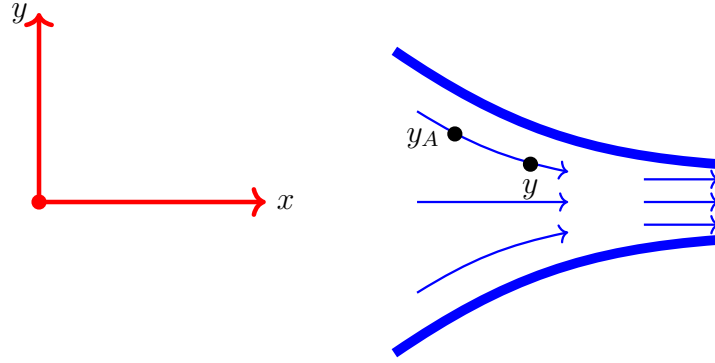
Para el caso en el que $U_0 = 160 \text{ cm/s}$ y $b = 4.6 \text{ s}^{-1}$, trace la gráfica de varias líneas de corriente, desde $x = 0 \text{ cm}$ hasta 160 cm y $y = -96.0 \text{ cm}$ hasta 96 cm . Cerciórece de mostrar la dirección de las líneas de corriente.

Problema 2.9 Se modela el flujo en un ducto convergente con un campo bidimensional y estacionario de velocidad aproximada a:

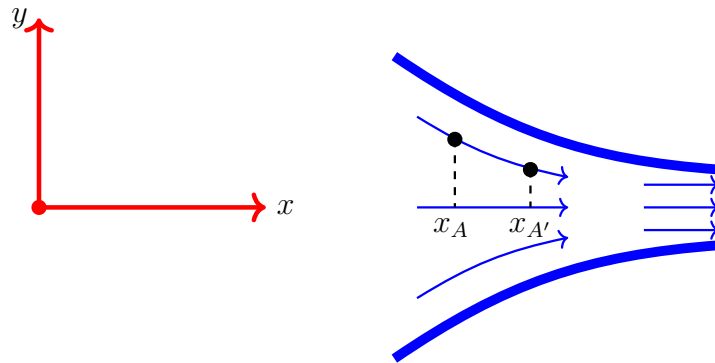
$$\mathbf{v} = (U_0 + bx)\hat{i} - by\hat{j} \quad (2.132)$$

donde U_0 es la velocidad horizontal en $x = 0$ y b es una constante.

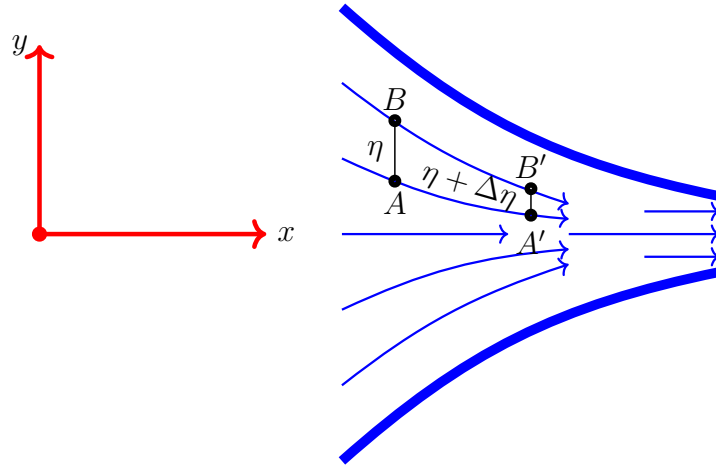
- a. Una partícula de fluido A, está ubicada en $x = x_A$ y $y = y_A$ en el instante $t = 0$ (ver Figura). En un instante posterior t , la partícula de fluido se ha desplazado corriente abajo con el flujo hasta una nueva ubicación $x = x_{A'}$ y $y = y_{A'}$ como lo muestra la Figura. Demuestre que la nueva ubicación de la partícula de fluido para un tiempo t arbitrario, en términos de su ubicación inicial y_A y la constante b es: $y_A e^{-bt}$



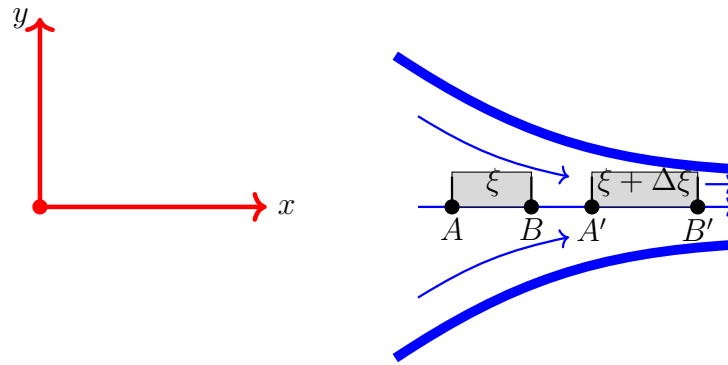
- b. Si la partícula de fluido A, está ubicada sobre el eje x en $x = x_A$ en el instante $t = 0$ (ver Figura). En algún instante posterior t , la partícula de fluido se ha movido hasta una nueva ubicación $x = x_{A'}$. Ahora, como el flujo es simétrico con respecto al eje x , la partícula de fluido permanece sobre este eje x en todo momento. Demuestre que la nueva ubicación x de la partícula de fluido para cualquier tiempo t y en términos de la posición inicial x_A y de las constantes U_0 y b es: $x_{A'} = \frac{U_0 + bx_A}{b} e^{bt} - \frac{U_0}{b}$.



- c. A medida de que la vertical AB, se desplaza corriente abajo, se contrae de la longitud η hasta la longitud $\eta + \Delta\eta$ como lo muestra la Figura. Demuestre que el cambio en la longitud del segmento rectilíneo, $\Delta\eta$ es: $(y_{B'} - y_B) (e^{-bt} - 1)$



- d. A medida que la partícula de fluido se desplaza corriente abajo, se estira la longitud ξ hasta la longitud $\xi + \Delta\xi$ conforme fluye a lo largo de la línea central del canal (ver Figura). Demuestre que el cambio en la longitud del segmento rectilíneo, $\Delta\xi$ es: $(x_{A'} - x_A) (e^{bt} - 1)$



2.3 Ecuación de continuidad

Se desea analizar la velocidad de flujo de masa que pasa por cada una de las caras del volumen de control. En éste caso se tiene una densidad que consiste en la cantidad de masa por unidad de área, y por lo tanto, la cantidad de momento es:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \quad (2.133)$$

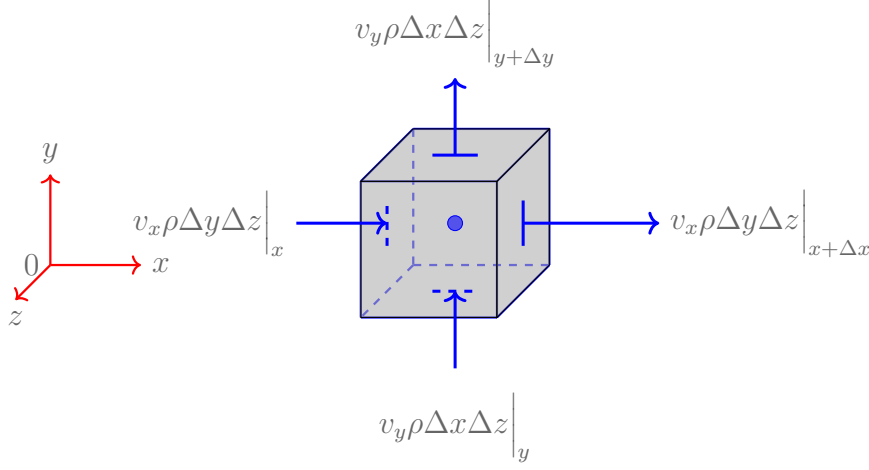
donde m es la masa y \mathbf{v} es la velocidad. En términos de la densidad de masa que atraviesa el área A , la cantidad de masa por unidad de tiempo (kg/s) es,

$$\mathbf{p} = \rho A\mathbf{v} \quad (2.134)$$

donde A es el área perpendicular a la velocidad del flujo de velocidad \mathbf{v} . Para las tres direcciones del sistema coordenado, se tienen las siguientes expresiones:

$$p_x = \rho(yz)v_x, \quad p_y = \rho(xz)v_y, \quad \text{y} \quad p_z = \rho(xy)v_z \quad (2.135)$$

donde yz , xz y xy son las áreas perpendiculares a los ejes x , y y z , respectivamente. La representación en el volumen de control puede observarse en la siguiente Figura.



Se observa, por ejemplo que la velocidad de flujo de masa, es decir, la cantidad de masa por unidad de tiempo (kg/s) que entra por la cara $\Delta y \Delta z$ es $v_x \rho \Delta y \Delta z |_x$. Aplicando la ley de conservación de la masa en el volumen de control, se tiene:

$$\left| \begin{array}{l} \text{velocidad de} \\ \text{acumulaci3n} \\ \text{de la masa en} \\ \text{volumen de control} \\ \text{control} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{l} \text{velocidad de flujo} \\ \text{de masa que} \\ \text{entra al} \\ \text{volumen de control} \\ \text{control} \end{array} \right| - \left| \begin{array}{l} \text{velocidad de flujo} \\ \text{de masa que} \\ \text{sale al} \\ \text{volumen de control} \\ \text{control} \end{array} \right|$$

La velocidad del flujo de masa dentro del volumen de control consiste en la suma de los flujos de masa que entran por las tres caras $\Delta x \Delta y$, $\Delta x \Delta z$ y $\Delta y \Delta z$, y la acumulaci3n de la masa en el volumen de control, corresponde a la variaci3n de la masa con respecto al tiempo,

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho \Delta x \Delta y \Delta z) \quad (2.136)$$

Por lo tanto, la ley de conservaci3n de la masa puede expresarse, matemáticamente como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho \Delta x \Delta y \Delta z) &= v_x \rho \Delta y \Delta z |_x - v_x \rho \Delta y \Delta z |_x+\Delta x + \\ &\quad v_y \rho \Delta x \Delta z |_y - v_y \rho \Delta x \Delta z |_y+\Delta y + \\ &\quad v_z \rho \Delta x \Delta y |_z - v_z \rho \Delta x \Delta y |_z+\Delta z \end{aligned} \quad (2.137)$$

fijando las dimensiones del volumen de control, es decir $\Delta x \Delta y \Delta z$ es constante, se obtiene:

$$-\frac{\partial}{\partial t}\rho = \frac{v_x\rho|_{x+\Delta x} - v_x\rho|_x}{\Delta x} + \frac{v_y\rho|_{y+\Delta y} - v_y\rho|_y}{\Delta y} + \frac{v_z\rho|_{z+\Delta z} - v_z\rho|_z}{\Delta z} \quad (2.138)$$

y en el límite cuando cada una de las dimensiones del volumen de control se hacen pequeñas, $\Delta x \Delta y \Delta z \rightarrow 0$, se obtiene la ecuación de continuidad:

$$-\frac{\partial}{\partial t}\rho = \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) \quad (2.139)$$

en términos del gradiente,

$$-\frac{\partial}{\partial t}\rho = \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \quad (2.140)$$

es decir,

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (2.141)$$

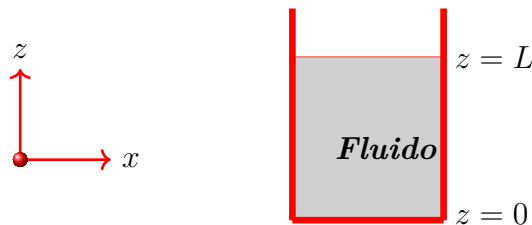
donde ∇ es el operador gradiente. La ecuación de continuidad en las diferentes coordenadas es:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0 \quad (2.142)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho r v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0 \quad (2.143)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial(\rho r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\rho v_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\rho v_\phi)}{\partial \phi} = 0 \quad (2.144)$$

Problema 2.10 Aplicación de la ecuación de continuidad. Considere un fluido en reposo como la muestra la Figura, con volumen rectangular constante y viscosidad despreciable. El fluido tiene densidad constante y su temperatura es la misma que los alrededores. Estime la presión en cualquier punto z dentro del fluido.



Solución.

Aplicando la ecuación de continuidad, en coordenadas cartesianas con densidad constante y en la dirección z :

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z \quad (2.145)$$

como el fluido se encuentra en reposo, las velocidades son cero,

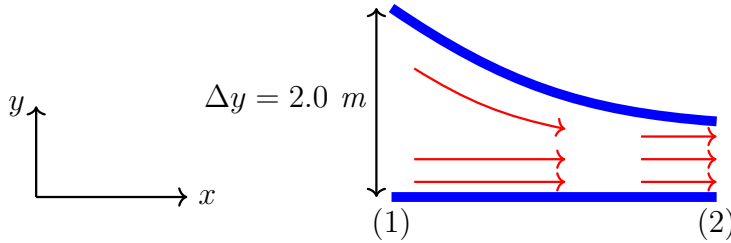
$$\frac{\partial P}{\partial z} = \rho g_z \rightarrow \frac{dP}{dz} = \rho g_z \quad (2.146)$$

separando variables e integrando desde $z = z'$ a $z = L$, se obtiene:

$$P_z = P_L + \rho g (L - z) \quad (2.147)$$

donde P_z es la presión en cualquier punto dentro del fluido, a una altura z y P_L es la presión en la superficie del fluido.

Problema 2.11 Diseño de un ducto convergente para un fluido compresible. Para un túnel de viento de alta velocidad, se diseña un ducto convergente bidimensional. Su pared inferior es plana y horizontal y la pared superior es curva, de manera que la velocidad del viento axial v_x aumenta linealmente de $v_1 = 100$ m/s en la sección (1) a $v_2 = 300$ m/s en la sección (2), ver Figura:



Debido a los cambios de temperatura, la densidad del aire ρ disminuye linealmente de $\rho_1 = 1.20$ kg/m³ en la sección (1) a $\rho_2 = 0.85$ kg/m³ en la sección (2). El ducto convergente mide 2.0 metros de largo y tiene 2.0 metros de alto en la sección (1). Prediga una función para la velocidad $v(x, y)$.

Solución

Usando la ecuación de continuidad,

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} \quad (2.148)$$

en estado estacionario $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ entonces,

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0 \quad (2.149)$$

no existe componente en z , $\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0$,

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} = 0 \quad (2.150)$$

igualando,

$$\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} = -\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} \quad (2.151)$$

si la velocidad v_x y la densidad varían linealmente, se puede proponer expresiones lineales en x como:

$$v_x = v_{1x} + C_v x, \quad \text{donde} \quad C_v = \frac{v_{2x} - v_{1x}}{\Delta x} = \frac{300 - 100}{2} = 100 \text{ s}^{-1} \quad (2.152)$$

y

$$\rho = \rho_1 + C_\rho x, \quad \text{donde} \quad C_\rho = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\Delta x} = \frac{0.85 - 1.20}{2} = -0.175 \text{ kg/m}^4 \quad (2.153)$$

reemplazando (2.152) y (2.153) en (2.151),

$$\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial x} \left[(\rho_1 + C_\rho x)(v_{1x} + C_v x) \right] \quad (2.154)$$

realizando el producto,

$$\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial x} \left[v_{1x}\rho_1 + v_{1x}C_\rho x + C_v\rho_1 x + C_v C_\rho x^2 \right] \quad (2.155)$$

realizando la derivada con respecto a x ,

$$\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} = -\left[v_{1x}C_\rho + C_v\rho_1 + 2C_v C_\rho x \right] \quad (2.156)$$

integrando con respecto a y ,

$$\rho v_y = -(v_{1x}C_\rho + C_v\rho_1)y - 2C_v C_\rho xy + f(x) \quad (2.157)$$

donde $f(x)$ es una función arbitraria. Aplicando las condiciones de frontera: como la pared inferior es plana y horizontal, la componente de velocidad v_y debe de ser cero en $y = 0$, para cualquier valor de x . Esta condición de frontera solo es posible si $f(x) = 0$. Reemplazando ρ y despejando la componente v_y , se obtiene:

$$v_y = -\frac{(v_{1x}C_\rho + C_v\rho_1)y - 2C_cC_\rho xy}{\rho_1 + C_\rho x} \quad (2.158)$$

y la componente v_x es la ecuación (2.152),

$$v_x = v_{1x} + \frac{v_{2x} - v_{1x}}{\Delta x}x \quad (2.159)$$

donde $C_\rho = -0.175 \text{ kg/m}^4$, $C_v = 100 \text{ s}^{-1}$, $v_{1x} = 100 \text{ m/s}$, $v_{2x} = 300 \text{ m/s}$, $\Delta x = 2.0 \text{ m}$ y $\rho_1 = 1.2 \text{ kg/m}^3$.

Tema No. 3

Deformación y viscosidad en los fluidos

Un elemento de volumen de control de un fluido experimenta movimientos de: *traslación*, el cual está relacionado con la ecuación de continuidad; *Rotaciones simétricas y asimétricas*, relacionadas con los remolinos y vórtices; *Compresión o dilatación*, movimientos relacionados con la deformación lineal que puede presentar el volumen de control y *Tensiones entre placas*, los cuales son proporcionales a la magnitud de las viscosidades del fluido.

Cuando dos cuerpos entran en contacto y se mueven uno con respecto al otro, se crea una fuerza de fricción entre las dos superficies de contacto en la dirección opuesta al movimiento. La magnitud de la fuerza necesaria para mover uno de los cuerpos con respecto al otro cuerpo, depende del coeficiente de fricción que hay entre los dos cuerpos de contacto. La anterior situación se presenta cuando entran en contacto sistemas binarios formados por sólidos, líquidos y gases. Por ejemplo, un sólido se mueve con relativa facilidad en el aire, pero no en el agua y moverse en el aceite sería mucho más difícil. En los anteriores casos, existe una propiedad que representa la resistencia o fuerza opuesta e interna al movimiento de un fluidos. Esta propiedad es la *viscosidad*. Esta fuerza interna está directamente relacionada con la cantidad de movimiento que se transfieren los cuerpos en contacto.

En esta sección, se analizará los resultados de las dilataciones lineales, distorsiones angulares y los perfiles de velocidad que se presenta en un elemento de volumen de control de un fluido, debido a la magnitud de sus viscosidades, y los análisis serán condensados en un tensor de viscosidades. Por lo tanto, los **objetivos** de esta sección son:

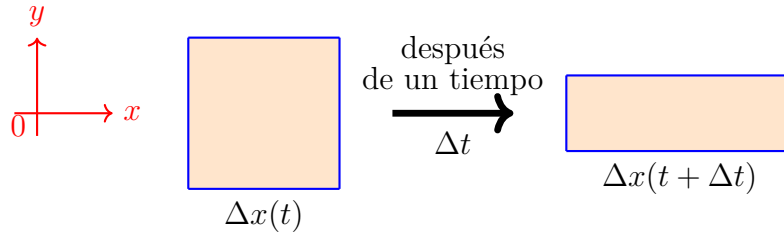
- Deducción y aplicación de las deformaciones lineales (dilataciones y compresiones) que se presentan en un volumen de control.
- Deducción y aplicación de las deformaciones angulares (rotaciones simétricas y

asimétricas) que se presentan en un volumen de control.

- Definición de vorticidad.
- Definición de un fluido Newtoniano y esfuerzos cortantes.
- Análisis y deducción del perfil de velocidad de un fluido entre dos placas paralelas.
- Generalización del tensor de viscosidades.

3.1 Deformación lineal

Se presentan cuando el volumen de control presenta una dilatación o compresión lineal y se refiere al cambio de longitud de uno de los lados del volumen de control, como lo muestra la siguiente Figura:



La Figura muestra un proceso de dilatación en la dirección del eje x y una contracción en el eje y que realiza el volumen de control en el espacio de dos dimensiones, cuando ha transcurrido un lapso de tiempo Δt . La fracción que se dilata o se contrae en la dirección del eje x se denotará como s_{xx} y esta dada por la expresión:

$$s_{xx} = \frac{\Delta x(t + \Delta t) - \Delta x(t)}{\Delta x(t)} \quad (3.1)$$

El cambio de variación por unidad de tiempo, corresponde a la velocidad de propagación de la deformación, es decir,

$$\frac{\Delta s_{xx}}{\Delta t} = \frac{\Delta}{\Delta t} \left[\frac{\Delta x(t + \Delta t) - \Delta x(t)}{\Delta x(t)} \right] \quad (3.2)$$

Realizando el mismo análisis, se deduce que para la deformación lineal del volumen de control en la dirección de los ejes y y z , las velocidades de propagación de la deformación son:

$$\frac{\Delta s_{yy}}{\Delta t} = \frac{\Delta}{\Delta t} \left[\frac{\Delta y(t + \Delta t) - \Delta y(t)}{\Delta y(t)} \right] \quad (3.3)$$

y

$$\frac{\Delta s_{zz}}{\Delta t} = \frac{\Delta}{\Delta t} \left[\frac{\Delta z(t + \Delta t) - \Delta z(t)}{\Delta z(t)} \right] \quad (3.4)$$

Ahora, se desea conocer la velocidad de deformación del cubo del volumen de control, el cual representa el elemento de fluido. La velocidad de propagación infinitesimal se denota como e_{ii} y se determina tomando el límite cuando el tiempo y la coordenada son infinitesimales, es decir:

$$e_{xx} = \lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ \Delta x \rightarrow 0}} \frac{\Delta}{\Delta t} \left[\frac{\Delta x(t + \Delta t) - \Delta x(t)}{\Delta x(t)} \right] \quad (3.5)$$

$$e_{yy} = \lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\Delta}{\Delta t} \left[\frac{\Delta y(t + \Delta t) - \Delta y(t)}{\Delta y(t)} \right] \quad (3.6)$$

y

$$e_{zz} = \lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ \Delta z \rightarrow 0}} \frac{\Delta}{\Delta t} \left[\frac{\Delta z(t + \Delta t) - \Delta z(t)}{\Delta z(t)} \right] \quad (3.7)$$

intercambiando las variables de coordenada y de tiempo,

$$e_{xx} = \lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ \Delta x \rightarrow 0}} \frac{\Delta}{\Delta x(t)} \left[\frac{\Delta x(t + \Delta t) - \Delta x(t)}{\Delta t} \right] \quad (3.8)$$

$$e_{yy} = \lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\Delta}{\Delta y(t)} \left[\frac{\Delta y(t + \Delta t) - \Delta y(t)}{\Delta t} \right] \quad (3.9)$$

y

$$e_{zz} = \lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ \Delta z \rightarrow 0}} \frac{\Delta}{\Delta z(t)} \left[\frac{\Delta z(t + \Delta t) - \Delta z(t)}{\Delta t} \right] \quad (3.10)$$

obteniéndose las variaciones de las velocidades de dilatación o contracción lineal con respecto a cada una de las coordenadas cartesianas,

$$e_{xx} = \frac{\partial v_x}{\partial x} \quad (3.11)$$

$$e_{yy} = \frac{\partial v_y}{\partial y} \quad (3.12)$$

y

$$e_{zz} = \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (3.13)$$

3.2 Deformación cúbica

La deformación cúbica, es dada por la suma de las dilataciones lineales e_{xx} , e_{yy} y e_{zz} correspondientes a las tres direcciones, el resultado dá origen a la divergencia de la velocidad del elemento de control,

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (3.14)$$

Esta ecuación permite determinar la razón de deformación volumétrica del elemento de volumen control.

3.3 Deformaciones angulares

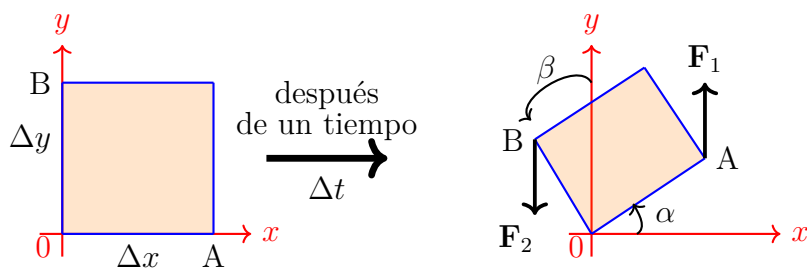
Las deformaciones angulares son debidas a los esfuerzos cortantes. Los esfuerzos cortantes hacen que la velocidad del volumen de control en una dirección coordenada varíe con respecto a las otras coordenadas, dando origen a seis variaciones cruzadas de las componentes de velocidad:

$$\frac{\partial v_x}{\partial y}, \frac{\partial v_x}{\partial z}, \frac{\partial v_y}{\partial x}, \frac{\partial v_y}{\partial z}, \frac{\partial v_z}{\partial x}, \frac{\partial v_z}{\partial y} \quad (3.15)$$

La combinación de éstas variaciones cruzadas dán origen a las deformaciones angulares simétricas y asimétricas.

3.3.1 Deformación angular simétrica

Las deformaciones simétricas, también conocidas como rotaciones simétricas, resulta de la combinación de dos variaciones cruzadas que presentan la misma dirección. El análisis gráfico de la deformación simétrica se presenta en la siguiente Figura.

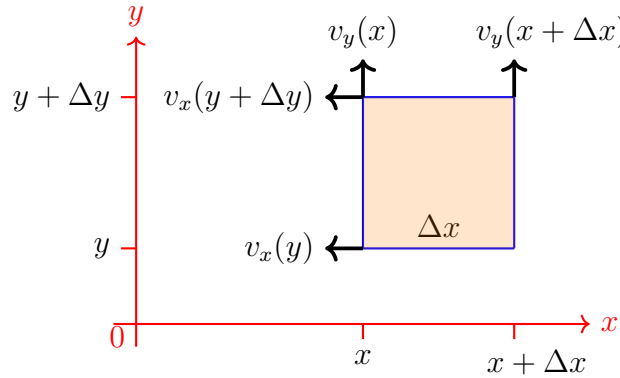


La Figura muestra una rotación del elemento de fluido en la dirección contraria de las manecillas del reloj, en el plano xy y alrededor del eje z . Las fuerzas \mathbf{F}_1 y \mathbf{F}_2 son las responsables de la rotación aunque necesariamente sus magnitudes no son iguales. Como los ángulos α y β rotan en la misma dirección se considera una rotación simétrica. La variación de la rotación en un lapso de tiempo (velocidad angular), alrededor del eje z y sobre el plano xy corresponde al promedio de los

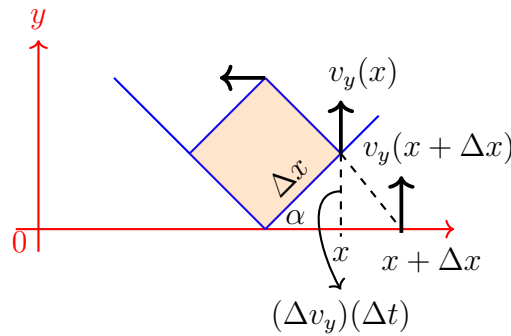
ángulos infinitesimales $\Delta\alpha$ y $\Delta\beta$ formados en ese intervalo de tiempo infinitesimal Δt , es decir:

$$\Delta\omega_z \approx \frac{\Delta}{\Delta t} \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \quad (3.16)$$

En la rotación, los ángulos α y β de la ecuación (3.16) no necesariamente son iguales. La siguiente Figura muestra las velocidades de los vértices durante la rotación del elemento de volumen de control alrededor del eje z , en este caso un volumen de control bidimensional,



Si la anterior Figura es rotada toma la siguiente forma:



De la Figura se obtiene la siguiente relación matemática:

$$\sin \alpha \approx \frac{(\Delta v_y)(\Delta t)}{\Delta x} = \frac{(v_y(x + \Delta x) - v_y(x))(\Delta t)}{\Delta x} \quad (3.17)$$

usando el mismo procedimiento, se obtiene la variación del ángulo β ,

$$\sin \beta \approx \frac{(\Delta v_x)(\Delta t)}{\Delta y} = \frac{(v_x(y + \Delta y) - v_x(y))(\Delta t)}{\Delta y} \quad (3.18)$$

como los ángulos α y β son infinitesimales, se tiene la aproximación,

$$\sin \alpha \approx \alpha \quad (3.19)$$

$$\sin \beta \approx \beta \quad (3.20)$$

y reemplazando los ángulos en la ecuación (3.16), se obtiene:

$$\Delta\omega_z \approx \frac{1}{2\Delta t} \left[\frac{(v_y(x + \Delta x) - v_y(x))(\Delta t)}{\Delta x} + \frac{(v_x(y + \Delta y) - v_x(y))(\Delta t)}{\Delta y} \right] \quad (3.21)$$

cancelando los Δt ,

$$\Delta\omega_z \approx \frac{1}{2} \left[\frac{v_y(x + \Delta x) - v_y(x)}{\Delta x} + \frac{v_x(y + \Delta y) - v_x(y)}{\Delta y} \right] \quad (3.22)$$

en el límite cuando las variaciones de las coordenadas son muy pequeñas,

$$\omega_z = \frac{1}{2} \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \left[\frac{v_y(x + \Delta x) - v_y(x)}{\Delta x} + \frac{v_x(y + \Delta y) - v_x(y)}{\Delta y} \right] \quad (3.23)$$

se obtiene:

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \rightarrow z \text{ constante} \quad (3.24)$$

Análogamente, para las rotaciones alrededor de los ejes x y y , se obtienen las ecuaciones:

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \rightarrow x \text{ constante} \quad (3.25)$$

y

$$\omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \rightarrow y \text{ constante} \quad (3.26)$$

con los resultados (3.24), (3.25) y (3.26) se obtiene el tensor gradiente de velocidad en un determinado punto del volumen de control.

3.3.2 Tensor gradiente de velocidad

El tensor gradiente de velocidad es el tensor que determina las velocidades de deformación y viene dado por la expresión:

$$\bar{\bar{\epsilon}} = \begin{vmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{vmatrix} \quad (3.27)$$

Denotando cada componente del tensor de velocidades de deformación por,

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.28)$$

el tensor de deformaciones de velocidades se reescribe como:

$$\bar{\bar{\epsilon}} = \begin{vmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{21} & \epsilon_{31} \\ \epsilon_{12} & \epsilon_{22} & \epsilon_{32} \\ \epsilon_{13} & \epsilon_{23} & \epsilon_{33} \end{vmatrix} \quad \text{con } i, j = 1, 2, 3 \equiv x, y, z. \quad (3.29)$$

En el tensor de deformación de velocidades, se observa que las componentes de la diagonal de la matriz, ϵ_{ii} corresponden a las deformaciones lineales (dilataciones o contracciones), mientras que las componentes fuera de la diagonal, ϵ_{ij} corresponden a las deformaciones angulares, que este caso son rotaciones simétricas.

Problema 3.1 Considere el campo bidimensional y estacionario de velocidad:

$$\mathbf{v} = (0.5 + 0.8x)\mathbf{i} + (1.5 - 0.8y)\mathbf{j} \quad (3.30)$$

Calcular:

- La razón de deformaciones lineales ϵ_{xx} , ϵ_{yy} y ϵ_{zz} . Como la velocidad de traslación en cada una de las direcciones es:

$$v_x = 0.5 + 0.8x \quad (3.31)$$

$$v_y = 1.5 - 0.8y \quad (3.32)$$

$$v_z = 0 \quad (3.33)$$

la razón de deformaciones lineales son:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0.8 \quad (3.34)$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{\partial v_y}{\partial y} = -0.8 \quad (3.35)$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (3.36)$$

Los resultados indican que las partículas que forman el fluido se estiran en la dirección x (el fluido se dilata), mientras que el fluido se contrae en la dirección del eje coordenado y .

- La razón de deformación debido al esfuerzo cortante en el plano xy y el tensor bidimensional de razones de deformación. Las componentes en el plano xy son:

$$\epsilon_{xy} = \epsilon_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \quad (3.37)$$

$$\epsilon_{xy} = \epsilon_{yx} = 0 \quad (3.38)$$

Este resultado indica que el fluido no se deformará debido a los esfuerzos cortantes, el fluido continuará su forma rectangular, aunque se presente deformaciones lineales de dilatación y contracción. El tensor bidimensional de deformaciones es:

$$\bar{\epsilon}(xy) = \begin{vmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{21} \\ \epsilon_{12} & \epsilon_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.8 & 0 \\ 0 & -0.8 \end{vmatrix} \quad (3.39)$$

- La deformación volumétrica. La deformación volumétrica puede determinarse usando la ecuación (3.14), la cual corresponde a la suma de la diagonal del tensor de deformación de las velocidades, ecuación (3.29).

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (3.40)$$

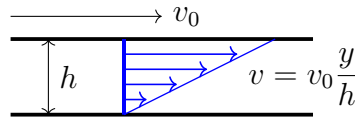
reemplazando los resultados anteriores,

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0.8 - 0.8 + 0 \quad (3.41)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (3.42)$$

Este resultado indica que el volumen de control del fluido no varía y por lo tanto, se puede concluir que se trata de un fluido incompresible, aunque sus dimensiones de alto y ancho varíen, su área es constante.

Problema 3.2 Considere el **flujo de Couette**. Flujo bidimensional y estacionario entre dos placas infinitas separadas por una distancia h , con la placa superior en movimiento y la inferior en reposo. Ver Figura:



- El flujo es rotacional o irrotacional ?.
- Si es rotacional, en que dirección gira las partículas que forma el fluido.
- Calcule las razones de deformación por el esfuerzo cortante ϵ_{xy} . Forme el tensor bidimensional de las razones de deformación ϵ_{ij} .

$$\epsilon_{ij} = \begin{vmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} \end{vmatrix} \quad (3.43)$$

Tensor de deformación simétrica en coordenadas cilíndricas

El tensor gradiente de velocidad (tensor de deformación simétrica) en coordenadas cilíndricas tiene la siguiente forma:

$$\bar{\bar{\epsilon}} = \begin{vmatrix} \epsilon_{rr} & \epsilon_{r\theta} & \epsilon_{rz} \\ \epsilon_{\theta r} & \epsilon_{\theta\theta} & \epsilon_{\theta z} \\ \epsilon_{zr} & \epsilon_{z\theta} & \epsilon_{zz} \end{vmatrix} \quad (3.44)$$

donde,

$$\epsilon_{rr} = \frac{\partial v_r}{\partial r}, \quad \epsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r}, \quad \epsilon_{zz} = \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (3.45)$$

$$\epsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \quad (3.46)$$

$$\epsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \quad (3.47)$$

$$\epsilon_{\theta z} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) \quad (3.48)$$

Problema 3.3 Aplicación del tensor de velocidades en coordenadas cilíndricas.

El **Flujo de Poiseuille**, es un flujo dentro de un tubo redondo de radio R con un gradiente de presión negativo y constante $\frac{dP}{dz}$. El flujo es axialmente simétrico, incompresible y estacionario. Sus componentes de velocidad son:

$$v_z = \frac{1}{4\mu} \frac{dP}{dz} (r^2 - R^2) \quad (3.49)$$

$$v_r = v_\theta = 0. \quad (3.50)$$

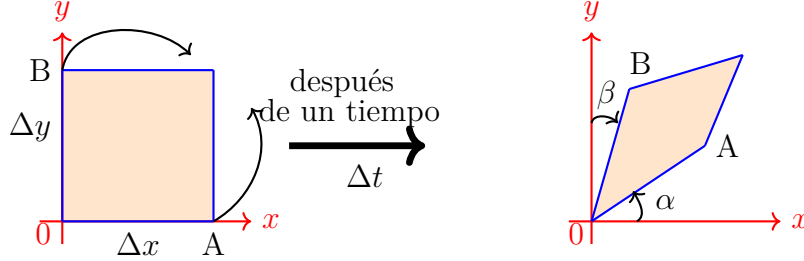
donde μ es la viscosidad del fluido y es constante.

- Calcule las razones de deformación lineal.
- Calcule la razón de deformación ϵ_{zr} .
- Calcule el tensor de razones de deformación axialmente simétrica:

$$\epsilon_{ij} = \begin{vmatrix} \epsilon_{rr} & \epsilon_{rz} \\ \epsilon_{zr} & \epsilon_{zz} \end{vmatrix} \quad (3.51)$$

3.3.3 Deformación angular asimétrica

En las rotaciones angulares se tuvieron en cuenta los ángulos de rotación α y β medidos desde los ejes coordenados x y y , respectivamente. Los dos ángulos rotaban en la misma dirección, en dirección contraria a las manecillas del reloj. En el caso de las rotaciones asimétricas, uno de éstos dos ángulos rota en dirección contraria con respecto al otro ángulo, como lo muestra la siguiente Figura:



La anterior Figura muestra que el ángulo β gira en sentido contrario al ángulo α . Realizando el mismo procedimiento que en las rotaciones simétricas, la rotación infinitesimal de los ángulos α y β son exactamente los mismos que las ecuaciones (3.17) y (3.18)

$$\sin \Delta\alpha \approx \frac{(v_y(x + \Delta x) - v_y(x))(\Delta t)}{\Delta x} \quad (3.52)$$

y

$$\sin \Delta\beta \approx \frac{(v_x(y + \Delta y) - v_x(y))(\Delta t)}{\Delta y} \quad (3.53)$$

como los ángulos α y β son infinitesimales, se tiene la aproximación $\tan \Delta\alpha \approx \Delta\alpha$ y $\tan \Delta\beta \approx \Delta\beta$. La ecuación (3.16) predice la variación de la rotación alrededor del eje z y sobre el plano xy corresponde al promedio de los ángulos infinitesimales $\Delta\alpha$ y $\Delta\beta$ formados en ese intervalo de tiempo infinitesimal Δt , pero en las rotaciones asimétricas, el ángulo β presenta un cambio de signo debido a la rotación contraria, es decir:

$$\Delta\omega_z \approx \frac{\Delta}{\Delta t} \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \quad (3.54)$$

reemplazando $\Delta\alpha$ y $\Delta\beta$, y en los límites cuando las variaciones espaciales y temporales: Δx , Δy y Δt son muy pequeñas, se obtienen las variaciones:

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \rightarrow x \text{ constante} \quad (3.55)$$

$$\omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \rightarrow y \text{ constante} \quad (3.56)$$

y

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \rightarrow z \text{ constante} \quad (3.57)$$

3.4 Vorticidad

Usando las ecuaciones (3.55), (3.56) y (3.57) se obtiene el siguiente tensor antisimétrico:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \quad (3.58)$$

el cual puede escribirse como,

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{v} \quad (3.59)$$

y definiendo el vector de vorticidad como $\boldsymbol{\xi} \equiv \nabla \times \mathbf{v}$, se obtiene:

$$\boldsymbol{\xi} = \nabla \times \mathbf{v} \quad (3.60)$$

Por lo tanto, la vorticidad es una medida de la rotación de una partícula en un fluido.

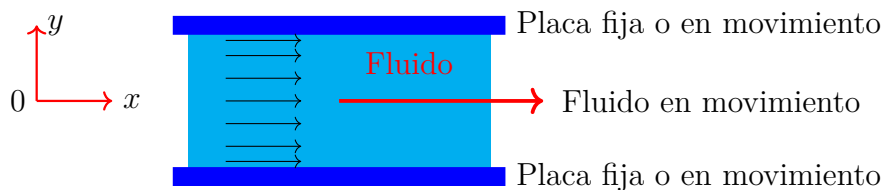
Problema 3.4 Considere el siguiente campo estacionario, incompresible y bidimensional de velocidad,

$$\mathbf{v} = x\mathbf{i} + (-2xy - 1)\mathbf{j} \quad (3.61)$$

es irrotacional?. Trace las líneas de corriente y argumente sobre su resultado.

3.5 Fluido entre dos placas paralelas

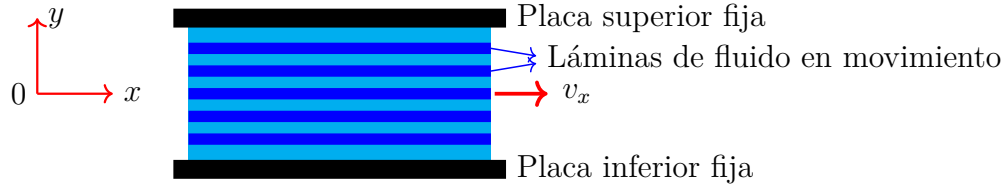
El caso más sencillo es el análisis del movimiento de un fluido entre dos placas paralelas y se presenta en la siguiente Figura.



Si se tiene un flujo de un líquido entre dos láminas o placas paralelas, como se observa en la Figura anterior, el transporte de cantidad de movimiento o cómo se transfiere la cantidad de movimiento en el fluido se obtiene mediante el siguiente análisis.

3.5.1 Cantidad de movimiento de un fluido

Imagínese que el fluido lo particiona como láminas de área A dejando las placas superior e inferior fijas (ver Figura)



En el movimiento del fluido se van a presentar las siguientes situaciones temporales:

Para $t < 0$

Es decir, antes de que se comience el movimiento, el sistema permanece en reposo y todas las placas que componen el fluido permanecen quietas:



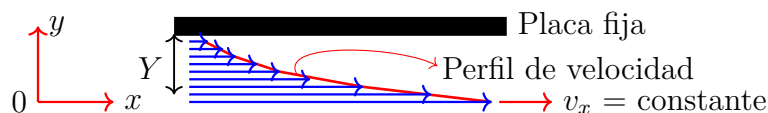
Para $t = 0$

La placa de fluido, placa inferior de la Figura, se pone en movimiento a una velocidad constante v_x ,



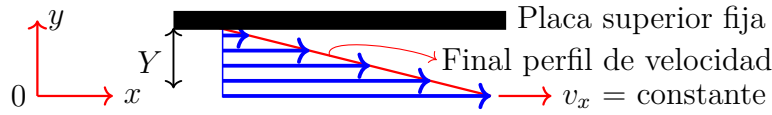
Para $t \gtrsim 0$ (tiempo pequeño)

A medida que transcurre el tiempo, debido al movimiento de la placa del fluido, ésta imprime una cantidad de movimiento a las placas superiores. La Figura muestra los vectores de velocidad de las placas de fluido observándose que se empieza a generar un perfil de velocidad del fluido. Este perfil de velocidad presenta una concavidad.

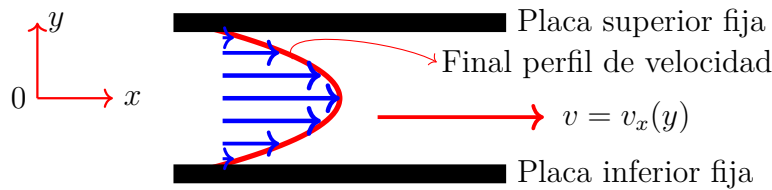


Para $t \gg 0$ (tiempo muy grande)

Cuando el tiempo es muy grande, el movimiento del fluido alcanza un estado estacionario y se forma un perfil de velocidad aproximado a una línea recta.



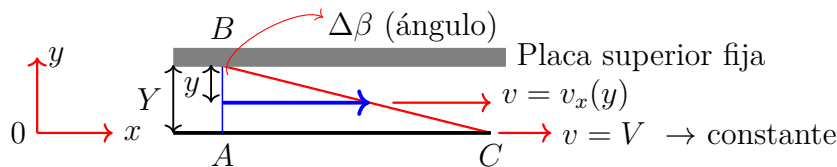
Realizando el mismo análisis en la coordenada $-y$, se puede describir la distribución de velocidad del flujo, en forma general, mediante la siguiente Figura:



Cuando se alcanza éste perfil de velocidad, la placa de fluido se mueve de manera continua bajo la influencia de una fuerza y con velocidad constante.

3.6 Gradiente de velocidad

Retomando la Figura cuando el fluido alcanza su estado estacionario,



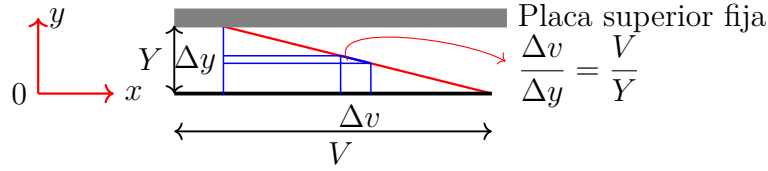
El perfil de velocidad $v = v_x(y)$ puede determinarse mediante la relación de triángulos,

$$\frac{v_x(y)}{y} = \frac{V}{Y} \quad (3.62)$$

y como V y Y son constantes, se tiene la relación constante,

$$\frac{v_x(y)}{y} = \frac{V}{Y} = \text{constante} \quad (3.63)$$

indicando que al ángulo β (ver Figura) no cambia durante el flujo estacionario y es constante. Por lo tanto, el gradiente de velocidad es,



La relación de triángulos,

$$\frac{\Delta v}{V} = \frac{\Delta y}{Y} \rightarrow \frac{\Delta v}{\Delta y} = \frac{V}{Y} \quad (3.64)$$

y cuando $\Delta \rightarrow 0$, se obtiene,

$$\frac{dv_x(y)}{dy} = \frac{V}{Y} \quad (3.65)$$

donde y es una distancia vertical medida desde la placa de fluido con velocidad $v_x(y)$. Durante el intervalo de tiempo diferencial dt , el fluido móvil a lo largo de la vertical AB de la Figura, se desplaza describiendo un ángulo diferencial $d\beta$ generado por la deformación angular, al mismo tiempo que la capa de fluido móvil se mueve a una distancia diferencial $dx = Vdt$. Obsérvese que cuando se alcanza la deformación angular máxima, ésta se vuelve constante y puede expresarse como:

$$d\beta \approx \tan\beta \quad (3.66)$$

$$d\beta = \frac{AC}{Y} = \frac{dx}{Y} \quad (3.67)$$

es decir,

$$d\beta = \frac{V}{Y}dt \quad (3.68)$$

y como,

$$\frac{V}{Y} = \frac{dv_x(y)}{dy} \quad (3.69)$$

entonces, de las ecuaciones (3.68) y (3.69) se obtiene:

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{dv_x(y)}{dy} \quad (3.70)$$

donde $\frac{dv_x(y)}{dy}$ es el gradiente de velocidad del fluido y el término $\frac{d\beta}{dt}$ se interpreta como la variación del ángulo β con respecto al tiempo, justo antes de alcanzar el estado estacionario. en donde β de vuelve constante.

3.7 Variación de $\frac{d\beta}{dt}$

La variación del ángulo con respecto al tiempo (justo antes de que se alcance el estado estacionario), está directamente relacionado con la fuerza mínima que se requiere para mantener el área de la placa de fluido adyacente en movimiento, es decir:

$$\frac{\mathbf{F}}{\mathbf{A}} \propto \frac{d\beta}{dt} \quad (3.71)$$

donde \mathbf{F} es la fuerza de corte o de cizalladura que se debe de aplicar a la placa de fluido de área A que se requiere para mantener la placa de fluido a una velocidad constante. \mathbf{F} es la componente tangente a la superficie del fluido. La relación $\frac{\mathbf{F}}{\mathbf{A}}$ es conocida como el *esfuerzo cortante* y se denota como τ . Reemplazando (3.70), el esfuerzo cortante es proporcional a la relación entre la velocidad $v_x(y)$ y la distancia vertical a la que se encuentra la placa de fluido y .

$$\tau \propto \frac{dv_x(y)}{dy} \quad (3.72)$$

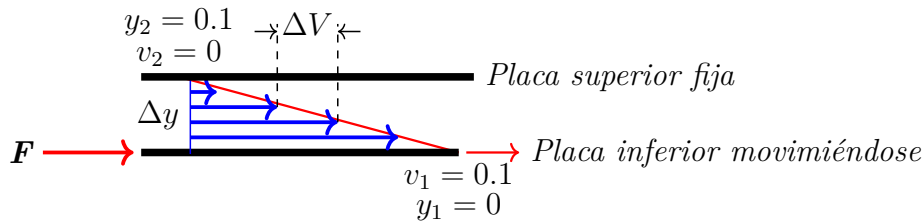
Los fluidos para los cuales la razón de deformación es proporcional al esfuerzo cortante, se llaman *fluidos Newtonianos* en honor a Isaac Newton quién lo expresó por primera vez en 1687 así: "El esfuerzo cortante para un fluido Newtoniano es:"

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\mu \frac{dv_x(y)}{dy} \quad (3.73)$$

donde μ es la viscosidad y es constante.

Problema 3.5 Dos láminas paralelas de área de 1 m^2 , se encuentran separadas 0.1 m . La lámina inferior se mueve a una velocidad de 0.1 m/s mientras que la lámina superior se encuentra en reposo. Si la fuerza requerida para mover la lámina es 0.002 N , encuentre la viscosidad del fluido que se encuentra entre las dos láminas. Asuma un perfil de velocidad lineal como lo muestra la Figura.

Solución.



El esfuerzo cortante es,

$$\tau_{xy} = -\mu \frac{dv_x(y)}{dy} \quad (3.74)$$

además, se tiene la relación entre la fuerza y el área,

$$\tau_{xy} = \frac{\text{Fuerza}}{\text{Area}} = \frac{0.002}{1.0} \quad (3.75)$$

$$\tau_{xy} = 0.002 \frac{N}{m^2} \quad (3.76)$$

como el perfil de velocidad es lineal, $\frac{\Delta v}{\Delta y}$ es la pendiente de la línea recta de la Figura, por lo tanto,

$$\frac{dv}{dy} \approx \frac{\Delta v}{\Delta y} = \frac{v_1 - v_2}{y_1 - y_2} = \frac{0.1 - 0}{0 - 0.1} \quad (3.77)$$

el gradiente de velocidad es:

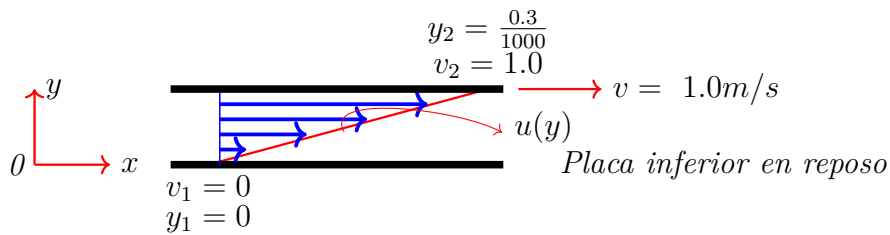
$$\frac{dv}{dy} \approx -1.0 s^{-1} \quad (3.78)$$

sustituyendo los valores del gradiente de velocidad en el esfuerzo cortante y despejando la viscosidad,

$$\mu = \frac{\tau}{-\frac{dv}{dy}} \quad (3.79)$$

$$\mu \approx \frac{0.002}{1.0} = 0.002 \frac{N \cdot s}{m^2} \quad (3.80)$$

Problema 3.6 Dos placas paralelas se encuentran separadas a una distancia de 0.3 mm. La placa superior tiene un área superficial de 1.0 m² y se mueve a una velocidad de 1.0 m/s. Si la viscosidad del fluido que contiene las placas es de $9.6 \times 10^{-2} \frac{N \cdot s}{m^2}$, estime la resistencia superficial de la placa superior. Asuma un perfil de velocidad lineal como se muestra en la Figura.



Solución.

La resistencia superficial es:

$$F = \tau \cdot A \quad (3.81)$$

donde

$$\tau = -\mu \frac{\Delta v}{\Delta y} \quad (3.82)$$

donde $\frac{\Delta v}{\Delta y} = \frac{v_2 - v_1}{y_2 - y_1}$ es la pendiente de la línea recta de la Figura.

$$\tau = -(9.6 \times 10^{-2}) \left(\frac{1.0 - 0}{\frac{0.3}{1000} - 0} \right) \quad (3.83)$$

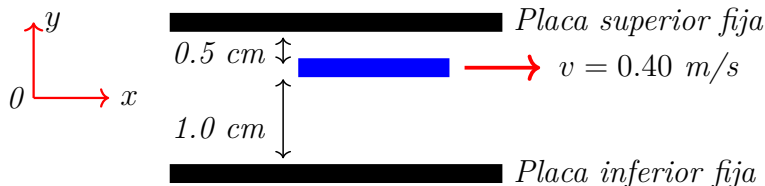
$$= -320 \frac{N}{m^2} \quad (3.84)$$

reemplazando el valor de τ en la resistencia superficial,

$$F = -320 \frac{N}{m^2} \times 1.0 m^2 \quad (3.85)$$

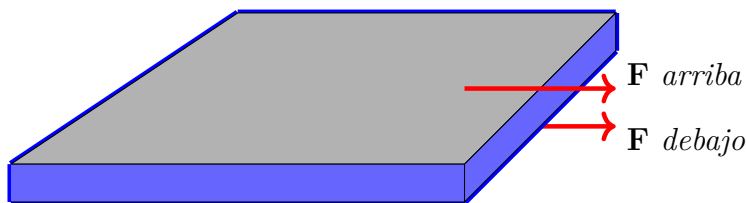
$$= -320 \text{ N} \quad (3.86)$$

Problema 3.7 Determine la fuerza requerida para mover una lámina de $30 \times 60 \text{ cm}^2$ de área y de espesor despreciable, la cual se mueve dentro de un líquido con viscosidad $\mu = 0.05 \frac{\text{Kg}}{\text{m} \cdot \text{s}}$ a una velocidad de $0.40 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.



Solución.

La siguiente Figura muestra el diagrama de fuerzas que presenta la placa.



La fuerza total es:

$$\mathbf{F}_T = \mathbf{F}_A + \mathbf{F}_D \quad (3.87)$$

donde

$$\mathbf{F}_A = \tau_{xy} \cdot A = \mu \frac{v}{y_A} A \quad (3.88)$$

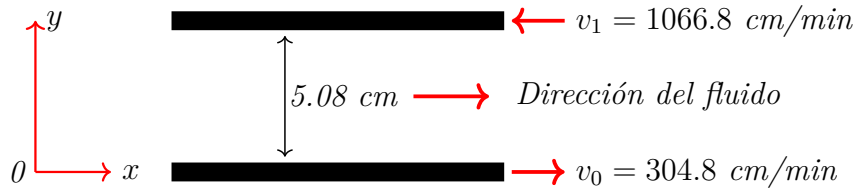
$$\mathbf{F}_A = (0.05) \left(\frac{0.4}{0.005} \right) (0.3 \times 0.6) = 0.72N \quad (3.89)$$

$$\mathbf{F}_D = (0.05) \left(\frac{0.4}{0.01} \right) (0.3 \times 0.6) = 0.36N \quad (3.90)$$

$$\mathbf{F}_T = 0.72N + 0.36N \quad (3.91)$$

$$= 1.08N \quad (3.92)$$

Problema 3.8 Estimar el valor de τ_{xy} en cada placa sabiendo que contiene un fluido con viscosidad $\mu = 150 \text{ cp}$ ($1 \text{ centipoise} = 0.001 \text{ Pa}\cdot\text{s}$).



$$\tau_{xy} = -\mu \frac{dv_x(y)}{dy} \quad (3.93)$$

de la Figura se obtienen los datos de velocidad,

$$\tau_{xy} = -\mu \frac{v_1 - v_0}{y_1 - 0} \quad (3.94)$$

analizando unidades,

$$\mu = 150 \text{ cp} \cdot \frac{1 \text{ mPa}\cdot\text{s}}{1 \text{ cp}} = 150 \text{ mPa}\cdot\text{s} \quad (3.95)$$

$$v_1 = 1066.8 \frac{\text{cm}}{\text{min}} \cdot \frac{1 \text{ m}}{100 \text{ cm}} \cdot \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = 0.18 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (3.96)$$

$$v_0 = 304.8 \frac{\text{cm}}{\text{min}} \cdot \frac{1 \text{ m}}{100 \text{ cm}} \cdot \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = 0.051 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (3.97)$$

$$y_1 = 5.08 \text{ cm} \cdot \frac{1 \text{ m}}{100 \text{ cm}} = 0.0508 \text{ m} \quad (3.98)$$

sustituyendo los valores de μ , v_0 , v_1 , y_1 y μ en τ_{xy} ,

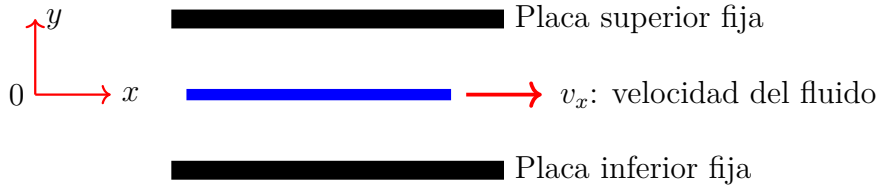
$$\tau_{xy} = -(150 \text{ mPa}\cdot\text{s}) \left(\frac{-0.18 - 0.051}{0.0508} \right) \frac{1}{\text{s}} \quad (3.99)$$

$$\tau_{xy} = 682.087 \text{ mPa} \quad (3.100)$$

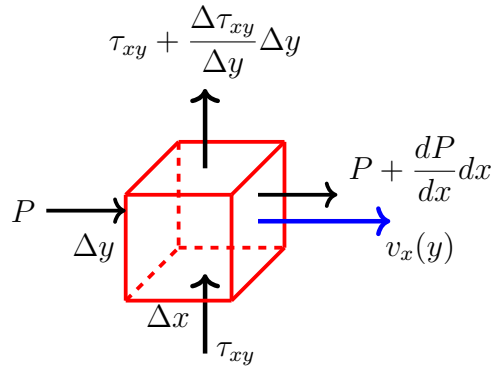
Problema 3.9 Considere un flujo Newtoniano, laminar y en estado estacionario con viscosidad $\mu = 0.02 \text{ Kg}\cdot\text{m}/\text{s}^2$. El fluido fluye através de un canal bidimensional formado por dos placas infinitas paralelas como se muestra en la Figura. La placa inferior se encuentra en reposo, mientras que la placa superior se mueve en la dirección positiva x con una velocidad constante de $10 \text{ mm}/\text{s}$.

3.8 Forma del perfil de velocidad de un fluido

Para determinar la forma del perfil de velocidad de un fluido, las fuerzas mínimas que se deben de considerar en el flujo son: las fuerzas superficiales debido a la presión determinadas por el gradiente de presión y responsables del movimiento del flujo y las fuerzas de esfuerzo cortante, responsable de las fricciones moleculares en el fluido. Por lo tanto, considérese un fluido viscoso, Newtoniano y en estado estacionario, que fluye entre dos placas paralelas como lo muestra la siguiente Figura:



Considerando un elemento diferencial de fluido y teniendo en cuenta solamente la diferencia de presión a lo largo del movimiento del fluido y las fuerzas de fricción debido a la viscosidad del fluido, es decir, el esfuerzo cortante τ_{xy} , como lo muestra la Figura de volumen de control:



Se obtiene que la fuerza debido a la viscosidad del fluido, sobre el elemento de volumen de control es:

$$d\tau_{yx} = \left(\tau_{yx} + \frac{d\tau_{yx}}{dy}dy \right) - \tau_{yx} \quad (3.101)$$

$$d\tau_{yx} = \frac{d\tau_{yx}}{dy}dy \quad (3.102)$$

y la fuerza cortante superficial neta es,

$$dF_s = \left(\frac{d\tau_{yx}}{dy} dy \right) dx \quad (3.103)$$

Similarmente la presión neta está dada por la siguiente expresión:

$$dP = \left(P + \frac{dP}{dx} dx \right) - P \quad (3.104)$$

$$dP = \frac{dP}{dx} dx \quad (3.105)$$

y la fuerza neta superficial debido a la presión es:

$$dF_p = \left(\frac{dP}{dx} dx \right) dy \quad (3.106)$$

Para un flujo estacionario, las fuerzas superficiales, ecuaciones (3.103) y (3.106), son iguales. Igualando estas fuerzas,

$$\frac{d\tau_{yx}}{dy} dy dx = \frac{dP}{dx} dx dy \quad (3.107)$$

cancelando términos,

$$\frac{d\tau_{yx}}{dy} = \frac{dP}{dx} \quad (3.108)$$

como $\tau_{yx} = -\mu \frac{dv_x(y)}{dy}$, reemplazando,

$$\frac{d^2 v_x(y)}{dy^2} = -\frac{1}{\mu} \frac{dP}{dx} \quad (3.109)$$

La solución de la ecuación (3.109) dá la forma que tiene el perfil de la velocidad del fluido a través de dos placas paralelas. Usando diferencias finitas, la solución de la ecuación (3.109) es como sigue:

$$\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta y^2} = -\frac{1}{\mu} \frac{dP}{dx} \quad (3.110)$$

$$u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1} = -\frac{\Delta y^2}{\mu} \frac{dP}{dx} \quad (3.111)$$

realizando la siguiente definición: $S = \frac{\Delta y^2}{\mu} \frac{dP}{dx}$.

$$u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1} = -S \quad (3.112)$$

cambiando de signo,

$$-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1} = S \quad (3.113)$$

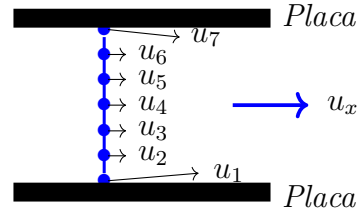
donde $i = 2, 3, 4, 5, \dots$. La gráfica de la solución de la ecuación (3.113) da la forma del perfil de velocidad del fluido que fluye entre dos placas paralelas.

Problema 3.10 Determine el perfil de velocidad de un fluido Newtoniano que fluye entre dos placas paralelas que se encuentran a una distancia $h = 6.0 \text{ mm}$. El fluido tiene una viscosidad de $\mu = 0.02 \text{ Kg/m}\cdot\text{s}$ y se sabe que el gradiente de presión es igual a: $\frac{dP}{dx} = 500 \text{ Pa/m}$.

Solución.

Usando la ecuación (3.113) y dándole valores a i (por ejemplo: $i = 2, 3, 4, 5, 6$), para un $\Delta y = 0.001 \text{ m}$, se genera un mallado como lo muestra la Figura y se obtienen las siguientes ecuaciones:

- para $i = 2$: $-u_1 + 2u_2 - u_3 = S$
- para $i = 3$: $-u_2 + 2u_3 - u_4 = S$
- para $i = 4$: $-u_3 + 2u_4 - u_5 = S$
- para $i = 5$: $-u_4 + 2u_5 - u_6 = S$
- para $i = 6$: $-u_5 + 2u_6 - u_7 = S$



donde se observa que u_1 y u_7 son condiciones de frontera. Reescribiendo las ecuaciones,

$$\begin{aligned} 2u_2 - u_3 + 0u_4 + 0u_5 + 0u_6 &= S + u_1 \\ -u_2 + 2u_3 - u_4 + 0u_5 + 0u_6 &= S \\ 0u_2 - u_3 + 2u_4 - u_5 + 0u_6 &= S \\ 0u_2 + 0u_3 - u_4 + 2u_5 - u_6 &= S \\ 0u_2 + 0u_3 + 0u_4 - u_5 + 2u_6 &= S + u_7 \end{aligned}$$

en forma matricial,

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S + u_1 \\ S \\ S \\ S \\ S + u_7 \end{pmatrix} \quad (3.114)$$

Las condiciones de frontera del problema indican que las magnitudes de las velocidades u_1 y u_7 son iguales a cero. Calculando el valor de S ,

$$S = \frac{\Delta y^2}{\mu} \frac{dP}{dx} = \frac{(0.001)^2}{0.02} (500) = 0.025 \text{ m/s} \quad (3.115)$$

entonces, la matriz toma la forma:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.025 \\ 0.025 \\ 0.025 \\ 0.025 \\ 0.025 \end{pmatrix} \quad (3.116)$$

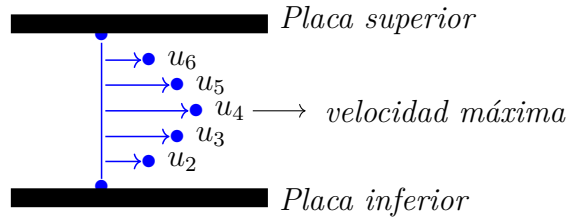
Usando el método de Gauss-Seidel,

```

1  !      N = numero de filas y columnas de la matriz.
2  !      NMI = numero maximo de iteraciones.
3  !      NAPROX = aproximacion del calculo de las variables.
4  !      A(i,j) = matriz, B(i)=termino independiente, X(i)= vector a calcular
5  !
6  program gausssiedel
7  INTEGER, PARAMETER :: M=100
8  INTEGER :: NMI,IJK,ITER,I,J
9  real, dimension(M,M) :: A
10 REAL,DIMENSION(M) :: B,X
11 !
12 WRITE(6,*) 'ECUACIONES DE ENTRADA. '
13 OPEN(2,FILE='datos.dat',STATUS='OLD')
14 READ(2,*)N,NMI,NAPROX ! LEE DATOS DEL ARCHIVO DE ENTRADA
15 APROX=10.0**(-NAPROX)
16 !
17 DO I=1,N
18 READ(2,*)(A(I,J),J=1,N),B(I)
19 WRITE(6,*)(A(I,J),J=1,N),B(I)
20 END DO
21 CLOSE (2)
22 !
23 DO I=1,N
24 X(I) = 0.0 ! PRIMERA APROXIMACION DE LA SOLUCION
25 END DO
26 !
27 WRITE(6,*) 'RESULTADOS'
28 WRITE(*,*) ! IMPRIME RESULTADOS
29 DO ITER=1,NMI
30 WRITE(*,*)ITER,(X(J),J=1,N)
31 IJK = 0
32 DO I=1,N
33 Y=B(I)
34 DO J=1,N
35 IF(I.EQ.J)GO TO 3
36 Y=Y-A(I,J)*X(J)
37 END DO
38 Y=Y/A(I,I)
39 IF (ABS( (X(I)-Y)/Y ).GT.APROX) IJK=I
40 X(I) = Y
41 END DO
42 IF( IJK.EQ.0 )GO TO 6
43 END DO
44 WRITE(*,*) 'NUMERO DE ITERACIONES: ',NMI
45 6 CONTINUE

```

se obtienen los siguientes resultados: $u_1 = 0.0000$, $u_2 = 0.0625$, $u_3 = 0.1000$, $u_4 = 0.1125$, $u_5 = 0.1000$, $u_6 = 0.0625$, $u_7 = 0.0000$, y la magnitud de las líneas de corriente se observan en siguiente gráfica:



Problema 3.11 Realice un código en FORTRAN que determine el perfil de velocidad del fluido Newtoniano planteado en el problema 3.10.

Solución.

El código es como sigue.

```

1      program ejercicio
2      integer , parameter :: m=10000,nmi=5000
3      integer :: i,icont,nd,iter
4      real :: temp,S,long,Dy,mu,delta
5      real , dimension (m) :: u
6      !
7      gpre = 500.0          ! gradiente de presion: dP/dx
8      mu = 0.02             ! viscosidad
9      long = 0.006          ! distancia entre las placas
10     naprox = 9             ! aproximacion
11     nd = 60                ! numero de divisiones
12     !
13     write(*,*) 'Maximo numero de iteraciones: ',nmi
14     open(3,file='resultados.dat',status='unknown')
15     aprox = 10.0*(-naprox)
16     Dy = long/real(nd)
17     S = (Dy**2/mu)*gpre
18     ! condiciones de frontera:
19     u(1) = 0.0
20     u(nd+1) = 0.0
21     ! iniciacion de vectores en cero
22     do i=2,nd
23         u(i) = 0.0
24     end do
25     ! iniciacion de las iteraciones.
26     do iter = 1,nmi-1
27         icont = 0          ! icont: es una bandera para poder terminar
28         do i=2,nd
29             temp = 0.5*( u(i-1) + u(i+1) ) + 0.5*S
30             if( (abs(u(i)-temp)/temp).le.aprox )go to 2
31             icont = icont +1
32         end do
33         u(i) = temp
34     end do
35     if(icont.eq.0)go to 4 ! este condicional indica que se cumplio el if
36     4      delta = 0.
37     do i=1,nd+1

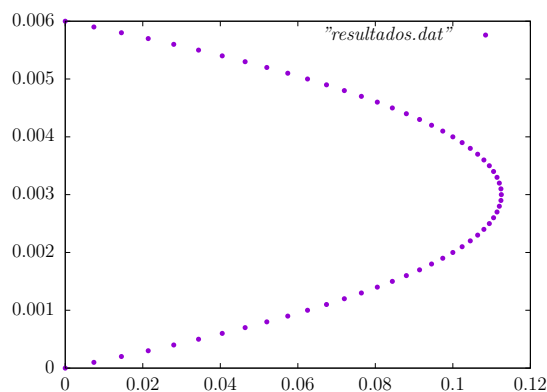
```

```

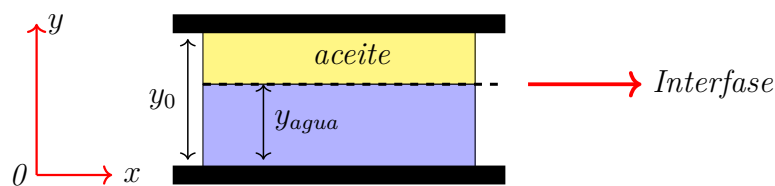
38         write(3,100)u(i),delta
39         delta = delta + Dy
40     end do
41     close(3)
42     write(*,*)'Numero de ',iter,' iteraciones usadas'
43     write(*,*)
44     write(*,*)'si',iter,'es igual a',nmi,'disminuya el grid de &
45             puntos'
46 !
47     100 format(f7.4,2x,f7.4)
48     end program ejercicio

```

Cambiando el número de divisiones (nd), la variable Δy se hace más pequeña. Realizar el ejercicio con $nd=60$ y comparar los resultados. La siguiente Figura muestra el gráfico con 60 divisiones.



Problema 3.12 Considere un sistema binario, el cual contiene una fase de agua y otra de aceite, moviéndose entre un par de placas paralelas. La separación entre las placas es de 5.0 cm. Desprecie cualquier grado de solubilidad entre las fases y asuma condiciones isotermas. Estime el valor de la elevación entre la interfase agua y aceite y grafique los perfiles de velocidad de cada una de las fases.



Solución.

Para cada fase, las ecuaciones de esfuerzos cortantes son:

$$\text{Agua: } \rightarrow \tau_{yx_1} = \mu_1 \frac{dv_{x_1}}{dy} \quad (3.117)$$

$$\text{Aceite: } \rightarrow \tau_{yx_2} = \mu_2 \frac{dv_{x_2}}{dy} \quad (3.118)$$

integrando la ecuación (3.108),

$$\tau_{yx} = \frac{dP}{dx}y + C \quad (3.119)$$

donde $\frac{dP}{dx}$ es el gradiente de presión de los fluidos y no depende de y , C es una constante y y es cualquier distancia. En la interface $y = y_{int}$, sustituyendo, se puede encontrar el valor de la constante C . Sustituyendo,

$$\tau_{yx_{int}} = \frac{dP}{dx}y_{int} + c \quad (3.120)$$

despejando la constante,

$$C = \tau_{yx_{int}} - \frac{dP}{dx}y_{int} \quad (3.121)$$

sustituyendo la constante,

$$\tau_{yx} = \frac{dP}{dx}y + \tau_{yx_{int}} - \frac{dP}{dx}y_{int} \quad (3.122)$$

$$\tau_{yx} = \tau_{yx_{int}} + \frac{dP}{dx}(y - y_{int}) \quad (3.123)$$

Ahora, comparando la ecuación (3.123) con la ecuación $\tau_{yx} = \mu \frac{dv_x(y)}{dy}$, se obtiene,

$$\mu \frac{dv_x(y)}{dy} = \tau_{yx_{int}} + \frac{dP}{dx}(y - y_{int}) \quad (3.124)$$

integrando en ambos lados,

$$\mu v_x + C_1 = \left(\tau_{yx} \right)_{int} y + \frac{dP}{dx} \left(\frac{y^2}{2} - y_{int}y \right) \quad (3.125)$$

donde C_1 es una constante de integración. Para encontrar C_1 , se deben de considerar las condiciones de frontera de cada una de las faces. Por ejemplo, para la región del aceite, se tiene:

$$y = y_0, \quad \text{tope de la superficie} \quad (3.126)$$

$$v_x = 0, \quad (3.127)$$

$$\mu = \mu_2 \quad \text{viscosidad del aceite} \quad (3.128)$$

para la región del agua, se tiene:

$$y = 0, \quad \text{placa inferior del las placas} \quad (3.129)$$

$$v_x = 0, \quad (3.130)$$

$$\mu = \mu_1 \quad \text{viscosidad del agua} \quad (3.131)$$

Además, en la interface se tiene que las velocidades de ambos fluidos son iguales, es decir,

$$v_x = v_{x,1} = v_{x,2} \quad (3.132)$$

donde $v_{x,1}$ y $v_{x,2}$ son las velocidades del aceite y del agua, respectivamente. Aplicando las condiciones (3.126), (3.127) y (3.128), la ecuación (3.125) válida para la región del aceite es:

$$C_1 = \left(\tau_{yx} \right)_{int} y_0 + \frac{dP}{dx} \left(\frac{y_0^2}{2} - y_{int} y_0 \right) \quad (3.133)$$

reemplazando la constante C_1 en (3.125), el perfil de velocidad del aceite es:

$$\mu_2 v_x + \left(\tau_{yx} \right)_{int} y_0 + \frac{dP}{dx} \left(\frac{y_0^2}{2} - y_{int} y_0 \right) = \left(\tau_{yx} \right)_{int} y + \frac{dP}{dx} \left(\frac{y^2}{2} - y_{int} y \right) \quad (3.134)$$

$$v_x = \frac{(y - y_0)}{\mu_2} \left(\tau_{yx} \right)_{int} + \frac{1}{\mu_2} \frac{dP}{dx} \left[\left(\frac{y^2}{2} - y_{int} y \right) - \left(\frac{y_0^2}{2} - y_{int} y_0 \right) \right] \quad (3.135)$$

Aplicando las condiciones (3.129), (3.130) y (3.131), en la ecuación (3.125), se obtiene que para la face del agua $C_1 = 0$, y por ende la velocidad de la fase del agua es:

$$v_x = \frac{y}{\mu_1} \left(\tau_{yx} \right)_{int} + \frac{1}{\mu_1} \frac{dP}{dx} \left(\frac{y^2}{2} - y_{int} y \right) \quad (3.136)$$

Ahora, en acuerdo con la ecuación (3.132), se obtiene la siguiente expresión,

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} \left[y_i \left(\tau_{yx} \right)_{int} - \frac{y_i^2}{2} \frac{dP}{dx} \right] = \left(\tau_{yx} \right)_{int} (y_i - y_0) - \frac{(y_i - y_0)^2}{2} \frac{dP}{dx} \quad (3.137)$$

donde y_i es la elevación de la interface. En la ecuación (3.137) se observa que se tienen tres incognitas: y_i , $\left(\tau_{yx} \right)_{int}$ y el gradiente de presión $\frac{dP}{dx}$. Para obtener otras dos ecuaciones que ayuden a encontrar las tres variables, se analizan las velocidades

de los flujos para el agua y el aceite. Por ejemplo: la velocidad del flujo de agua está dada por la ecuación:

$$\dot{Q}_1 = \int_0^{y_{int}} v_x(y) dy \quad (3.138)$$

reemplazando la velocidad de la face del agua, ecuación (3.136),

$$\dot{Q}_1 = \int_0^{y_{int}} \left[\frac{y}{\mu_1} (\tau_{yx})_{int} + \frac{1}{\mu_1} \frac{dP}{dx} \left(\frac{y^2}{2} - y_{int} y \right) \right] dy \quad (3.139)$$

integrando, se obtiene:

$$\dot{Q}_1 = \frac{y_{int}^2}{2\mu_1} (\tau_{yx})_{int} + \frac{1}{\mu_1} \frac{dP}{dx} \left(\frac{y_{int}^3}{6} - \frac{y_{int} y_{int}^2}{2} \right) \quad (3.140)$$

cancelando términos,

$$\dot{Q}_1 = \frac{y_{int}^2}{2\mu_1} (\tau_{yx})_{int} - \frac{y_{int}^3}{3\mu_1} \frac{dP}{dx} \quad (3.141)$$

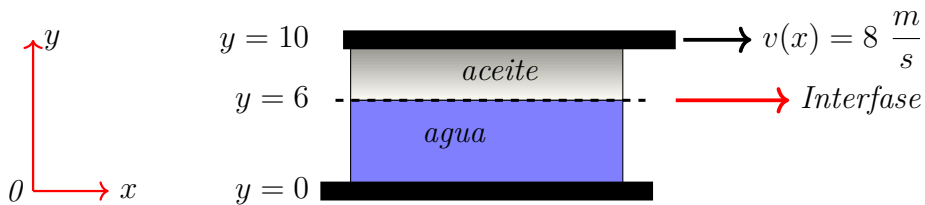
Realizando el mismo procedimiento para la face de aceite, se encuentra que la velocidad de flujo es:

$$\dot{Q}_2 = \int_{y_{int}}^{y_0} v_x(y) dy \quad (3.142)$$

$$\dot{Q}_2 = \frac{(y_{int} - y_0)^2}{2\mu_2} (\tau_{yx})_{int} - \frac{(y_0 - y_{int})^3}{3\mu_2} \frac{dP}{dx} \quad (3.143)$$

Obteniéndose tres ecuaciones: (3.137), (3.141) y (3.143), las cuales se resuelven para encontrar las tres variables: y_i , $(\tau_{yx})_{int}$ y $\frac{dP}{dx}$.

Problema 3.13 Considere un sistema binario, una de fase de agua y otra de aceite, moviéndose entre un par de placas paralelas separadas 10 cm como lo muestra la Figura.



Inicialmente ambas placas y el fluido se encuentran en reposo. En $t = 0$, la placa superior se mueve con una velocidad constante de $8 \frac{cm}{s}$. Las ecuaciones que rigen los movimientos de los fluidos son:

$$\frac{\partial v_{Aceite}}{\partial t} = \mu_{Aceite} \frac{\partial v_{Aceite}}{\partial x^2} \quad (3.144)$$

$$\frac{\partial v_{Agua}}{\partial t} = \mu_{Agua} \frac{\partial v_{Agua}}{\partial x^2} \quad (3.145)$$

donde μ_{Aceite} y μ_{Agua} son las viscosidades del aceite y del agua con valores de 3 y 1 cp, respectivamente. Las condiciones que satisfacen la interfaz aceite-agua son:

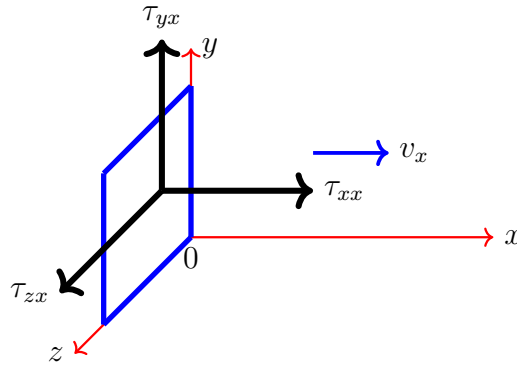
$$v_{Aceite} = v_{Agua} \quad (3.146)$$

$$v_{Aceite} \frac{\partial v_{Aceite}}{\partial x} = v_{Agua} \frac{\partial v_{Agua}}{\partial x} \quad (3.147)$$

Cuál es la velocidad de las dos fases de fluido en los tiempos 0.5, 1.0 y 1.5 segundos y a las distancias de 2, 4, y 6 cm de la capa inferior.

3.9 Generalización del Tensor de viscosidades

La viscosidad genera los movimientos de dilatación y/o contracción lineales, además de los movimientos de rotación o distorsión angular. Cualquier punto del fluido, está sometido a tensiones viscosas que vienen dadas por los esfuerzos normales y tangenciales a la dirección de su desplazamiento. La siguiente Figura muestra los esfuerzos normales y tangenciales en un punto del fluido que se mueve en la dirección x .



Para cada componente τ_{yx} y τ_{zx} puede existir un coeficiente de viscosidad diferente, es decir, los esfuerzos cortantes se reescriben como:

$$\tau_{yx} = -\mu_1 \frac{dv_x}{dy} \quad \text{Tensión de viscosidad tangencial} \quad (3.148)$$

y

$$\tau_{zx} = -\mu_2 \frac{dv_x}{dz} \quad \text{Tensión de viscosidad tangencial} \quad (3.149)$$

La combinación de los dos tensores tangenciales τ_{yx} y τ_{zx} originan los movimientos rotacionales. Ahora, suponiendo que los coeficientes de viscosidad tangenciales son iguales ($\mu_1 = \mu_2 = \mu$) y se suman las contribuciones tensoriales, se obtiene la ecuación:

$$\tau_{yx} + \tau_{zx} = -\mu \frac{\partial v_x}{\partial y} - \mu \frac{\partial v_x}{\partial z} \quad (3.150)$$

Realizando el mismo análisis para la partícula de fluido cuando viaja en la dirección y y z , se obtienen las siguientes contribuciones tensoriales:

$$\tau_{xy} + \tau_{zy} = -\mu \frac{\partial v_y}{\partial x} - \mu \frac{\partial v_y}{\partial z} \quad (3.151)$$

y

$$\tau_{xz} + \tau_{yz} = -\mu \frac{\partial v_z}{\partial x} - \mu \frac{\partial v_z}{\partial y} \quad (3.152)$$

Además, para un fluido isotrópico, es decir, en donde las velocidades no cambian o son simétricas en todas las direcciones, esto significa que se cumplen las igualdades:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial v_x}{\partial z}, \quad \text{para la velocidad en } v_x \quad (3.153)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial z}, \quad \text{para la velocidad en } v_y \quad (3.154)$$

y

$$\frac{\partial v_z}{\partial x} = \frac{\partial v_z}{\partial y} = \frac{\partial v_z}{\partial z}, \quad \text{para la velocidad en } v_z \quad (3.155)$$

las sumas de los esfuerzos tensoriales se reescriben como:

$$\tau_{yx} + \tau_{zx} = -\frac{2}{3}\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} \quad (3.156)$$

$$\tau_{xy} + \tau_{zy} = -\frac{2}{3}\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} \quad (3.157)$$

y

$$\tau_{xz} + \tau_{yz} = -\frac{2}{3}\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (3.158)$$

donde el número tres que aparece en el denominador de las contribuciones tangenciales, es debido a que cada componente de las velocidades aporta $\frac{1}{3}$ a la velocidad por ser isotrópico. Sumando todas las contribuciones, se obtiene:

$$\tau_{\text{total}} = -\frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \quad (3.159)$$

obteniéndose una contribución de esfuerzos tensoriales como:

$$\tau_{\text{total}} = -\frac{2}{3}\mu (\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad (3.160)$$

Obsérvese que en esta deducción, se encuentra una expresión de tensor de viscosidad τ_{ij} que solamente tiene en cuenta los desplazamientos lineales asociados a la dilatación, pero en general existen rotaciones de las partículas que forman el fluido y están dadas por los términos cruzados,

$$\omega_k = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \quad \text{con } i, j, k = x, y, z \quad (3.161)$$

y sus componentes tensoriales son de la forma,

$$\tau_{ij}^{\text{rotación}} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad \text{con } i, j, k = x, y, z \quad (3.162)$$

Por lo tanto, el esfuerzo cortante total en un fluido, estaría dado por las contribuciones de las ecuaciones (3.160) y (3.162),

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3}\mu (\nabla \cdot \mathbf{v}) \delta_{ij} \quad (3.163)$$

donde δ_{ij} es el delta de Kronecker. En forma matricial,

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix} \quad (3.164)$$

3.9.1 Tensor de viscosidades en coordenadas rectangulares

$$\tau_{xx} = \mu \left[2 \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{v} \right] \quad (3.165)$$

$$\tau_{yy} = \mu \left[2 \frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{v} \right] \quad (3.166)$$

$$\tau_{zz} = \mu \left[2 \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{v} \right] \quad (3.167)$$

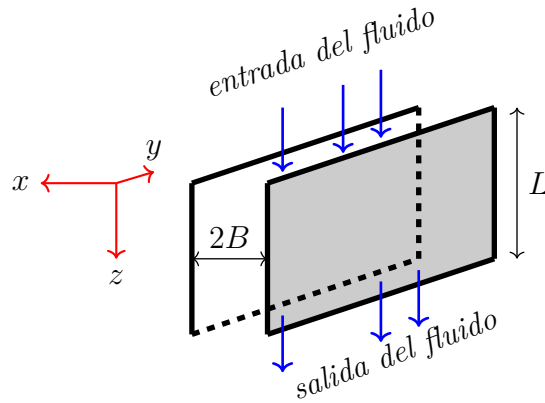
$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left[\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right] \quad (3.168)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu \left[\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right] \quad (3.169)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left[\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right] \quad (3.170)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (3.171)$$

Problema 3.14 Un fluido viscoso Newtoniano pasa entre dos placas paralelas que se encuentran a una distancia $2B$ como lo muestra la Figura.



Use **la segunda ley de Newton** para realizar un **balance de fuerzas** (viscosas, de cuerpo y de presión) y un **balance de variación de momento** para demostrar que los perfiles de esfuerzo viscoso y de velocidad son:

$$\tau_{xz} = \left(\rho g + \frac{P_0 - P_L}{L} \right) x$$

y

$$v_z = \left(\rho g L + \frac{P_0 - P_L}{2\mu L} \right) B^2 \left(1.0 - \frac{x^2}{B^2} \right)$$

Solución

Realizando un balance de fuerzas, semejante al de la deducción de la ecuación (3.109), y adicionándole la fuerza de gravedad actúa sobre el cuerpo en dirección $-z$,

$$\rho g_z = -\rho g \quad (3.172)$$

la ecuación de movimiento toma la siguiente forma:

$$-\rho g - \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} = 0 \quad (3.173)$$

Reorganizando la ecuación:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} = \rho g + \frac{\partial P}{\partial z} \quad (3.174)$$

integrando la ecuación a ambos lados:

$$\int \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} dx = \int \left(\rho g + \frac{\partial P}{\partial z} \right) dx$$

Resolviendo y discretizando el gradiente de presión,

$$\tau_{xz} = \left(\rho g + \frac{P_0 - P_L}{L} \right) x \quad (3.175)$$

Esta ecuación representa el perfil del esfuerzo viscoso del fluido. Ahora, asumiendo que el fluido del problema es newtoniano, tenemos que se cumple la siguiente relación:

$$\tau_{xz} = -\mu \frac{\partial v_z}{\partial x} \quad (3.176)$$

Reemplazando la ecuación (3.176) en la ecuación (3.175), tenemos la siguiente relación:

$$-\mu \frac{\partial v_z}{\partial x} = \left(\rho g + \frac{P_0 - P_L}{L} \right) x$$

Dividiendo por la viscosidad a ambos lados:

$$-\frac{\partial v_z}{\partial x} = \left(\frac{\rho g}{\mu} + \frac{P_0 - P_L}{\mu L} \right) x$$

Integremos la ecuación a ambos lados:

$$\begin{aligned} -\int \frac{\partial v_z}{\partial x} dx &= \left(\frac{\rho g}{\mu} + \frac{P_0 - P_L}{\mu L} \right) \int x dx \\ -v_z &= \left(\frac{\rho g}{2\mu} + \frac{P_0 - P_L}{2\mu L} \right) x^2 + c \end{aligned}$$

Para encontrar la constante, evaluemos la condición de frontera $v(B) = 0$, así:

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{\rho g}{2\mu} + \frac{P_0 - P_L}{2\mu L} \right) B^2 + c \\ c &= - \left(\frac{\rho g}{2\mu} + \frac{P_0 - P_L}{2\mu L} \right) B^2 \end{aligned}$$

Reemplazando el valor de la constante en la solución para la velocidad,

$$-v_z = \left(\frac{\rho g}{2\mu} + \frac{P_0 - P_L}{2\mu L} \right) x^2 - \left(\frac{\rho g}{2\mu} + \frac{P_0 - P_L}{2\mu L} \right) B^2$$

Agrupando términos:

$$v_z = \left(\frac{\rho g}{2\mu} + \frac{P_0 - P_L}{2\mu L} \right) (B^2 - x^2)$$

Finalmente, sacando factor común:

$$v_z = \left(\frac{\rho g}{2\mu} + \frac{P_0 - P_L}{2\mu L} \right) B^2 \left(1.0 - \frac{x^2}{B^2} \right) \quad (3.177)$$

Ahora, tomando la ecuación (3.174):

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} = \rho g + \frac{\partial P}{\partial z}$$

discretizando la ecuación por diferencias finitas:

$$\frac{\tau(i) - \tau(i-1)}{\Delta x} = \rho g + \frac{\partial P}{\partial z}$$

multiplicando por Δx a ambos lados:

$$\tau(i) - \tau(i-1) = \left(\rho g + \frac{\partial P}{\partial z} \right) \Delta x$$

reemplazando los valores propuestos:

$$\rho = 1g/cm^3; g = 980cm/s^2; \frac{\partial P}{\partial z} = 98g/cm^2 \cdot s^2; \mu = 2g/cm \cdot s; B = 0.05cm$$

$$\Delta x = 0.01cm; v(0) = v(10) = 0$$

se obtiene, la ecuación en diferencias finitas:

$$\tau(i) - \tau(i-1) = 10.78$$

Ahora, es necesario destacar que, según la ecuación (3.176), el esfuerzo cortante se hace 0 cuando la derivada de la velocidad se hace 0. Esto sucede, de acuerdo a los perfiles de velocidad para fluidos laminares, justo en la mitad de las placas paralelas. De acuerdo a la discretización de 11 nodos realizada, este punto corresponde al nodo 5, de modo que $\tau(5) = 0$.

Como los perfiles de velocidad para fluidos laminares son simétricos respecto al eje de movimiento, el perfil del esfuerzo cortante también lo es, de modo que basta con analizar una mitad del perfil para deducir la otra. Realizando las iteraciones sobre los primeros 5 nodos:

- $i = 1 \rightarrow \tau(1) - \tau(0) = 10.78$
- $i = 2 \rightarrow \tau(2) - \tau(1) = 10.78$
- $i = 3 \rightarrow \tau(3) - \tau(2) = 10.78$
- $i = 4 \rightarrow \tau(4) - \tau(3) = 10.78$
- $i = 5 \rightarrow \tau(5) - \tau(4) = 10.78$

En forma matricial, el sistema se representa como:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau(0) \\ \tau(1) \\ \tau(2) \\ \tau(3) \\ \tau(4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10.78 \\ 10.78 \\ 10.78 \\ 10.78 \\ 10.78 \end{pmatrix}$$

Al resolver el anterior sistema de ecuaciones en FORTRAN,

```

1      program Esfuerzo
2      INTEGER, PARAMETER :: M = 11
3      INTEGER :: NMI,IJK,ITER,I,J,NAPROX
4      real, dimension(M,M) :: A
5      REAL, DIMENSION(M) :: B,S
6      !
7      WRITE(6,*) 'ECUACIONES DE ENTRADA'
8      OPEN(2, FILE = '2_datos-esfuerzo.txt', STATUS = 'OLD')
9      READ(2,*)N,NMI,NAPROX      ! Lee el archivo de entrada
10     APROX=10.0**(-NAPROX)
11     !
12     ! Lee datos de las matrices de entrada
13     DO I = 1,N
14         READ(2,*)(A(I,J), J = 1,N), B(I)
15         WRITE(6,*)(A(I,J), J = 1,N), B(I)
16     END DO
17     CLOSE(2)
18     !
19     DO I = 1,N
20         S(I) = 0.0      ! Primera aproximacion de la solucion
21     END DO
22     !
23     WRITE(6,*) 'RESULTADOS'
24     WRITE(*,*)
25     ! Solución al sistema de ecuaciones
26     DO ITER = 1,NMI
27         WRITE(*,*)ITER,(S(J), J = 1,N)
28         IJK = 0
29         DO I = 1,N
30             Y = B(I)
31             DO J = 1,N
32                 IF (I.EQ.J) GO TO 3
33                 Y = Y - A(I,J)*S(J)
34             3      END DO
35             Y = Y/A(I,I)
36             IF (ABS( (S(I)-Y)/Y ).GT.APROX) IJK = 1
37             S(I) = Y
38         END DO
39         IF( IJK.EQ.0 ) GO TO 6
40     END DO

```

```

41 6      CONTINUE
42      WRITE(*,*) 'NUMERO DE ITERACIONES: ',ITER
43  !
44  !      Guarda datos para graficacion
45      open(3, file = '2_resultados_esfuerzo.txt', status = 'unknown')
46
47      nd = 10          ! Numero de divisiones
48      BB = 0.05        ! Distancia entre las placas
49      Dy = 2*BB/real(nd)
50  !
51  !      Simetria del perfil de esfuerzo viscoso
52      S(11)=S(1)
53      S(10)=S(2)
54      S(9)=S(3)
55      S(8)=S(4)
56      S(7)=S(5)
57      S(6)=0.0        ! Condicion en la mitad de las placas
58
59      delta = 0.0
60      do i = 1,nd+1
61          write(3,*) delta, S(i)
62          delta = delta + Dy
63      end do
64      close(3)
65  END PROGRAM Esfuerzo

```

se obtuvieron los siguientes resultados:

- | | | |
|----------------------|----------------------|-----------------------|
| • $\tau(0) = -53.90$ | • $\tau(4) = -10.78$ | • $\tau(8) = -32.34$ |
| • $\tau(1) = -43.12$ | • $\tau(5) = 0$ | • $\tau(9) = -43.12$ |
| • $\tau(2) = -32.34$ | • $\tau(6) = -10.78$ | |
| • $\tau(3) = -21.56$ | • $\tau(7) = -21.56$ | • $\tau(10) = -53.90$ |

Ahora, hallemos el perfil de velocidad en el fluido. Para eso, retomemos nuevamente la ecuación (3.174):

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} = \rho g + \frac{\partial P}{\partial z}$$

Reemplazando la ecuación (3.176), tenemos la siguiente relación:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(-\mu \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) &= \rho g + \frac{\partial P}{\partial z} \\ -\mu \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} &= \rho g + \frac{\partial P}{\partial z} \end{aligned}$$

Dividiendo por la viscosidad a ambos lados:

$$-\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} = \frac{\rho g}{\mu} + \frac{\partial P}{\mu \partial z}$$

Discretizando esta ecuación por diferencias finitas:

$$-\frac{v(i+1) - 2v(i) + v(i-1)}{(\Delta x)^2} = \frac{\rho g}{\mu} + \frac{\partial P}{\mu \partial z}$$

Multiplicando por $(\Delta x)^2$ a ambos lados:

$$-v(i+1) + 2v(i) - v(i-1) = \left(\frac{\rho g}{\mu} + \frac{\partial P}{\mu \partial z} \right) (\Delta x)^2$$

Reemplazando los valores propuestos:

$$-v(i+1) + 2v(i) - v(i-1) = 0.0539$$

Esta es la ecuación con la cual hallaremos los valores de la velocidad. Realizando las iteraciones sobre los últimos 10 puntos:

- $i = 1 \rightarrow -v(2) + 2v(1) - v(0) = 0.0539$
- $i = 2 \rightarrow -v(3) + 2v(2) - v(1) = 0.0539$
- $i = 3 \rightarrow -v(4) + 2v(3) - v(2) = 0.0539$
- $i = 4 \rightarrow -v(5) + 2v(4) - v(3) = 0.0539$
- $i = 5 \rightarrow -v(6) + 2v(5) - v(4) = 0.0539$
- $i = 6 \rightarrow -v(7) + 2v(6) - v(5) = 0.0539$
- $i = 7 \rightarrow -v(8) + 2v(7) - v(6) = 0.0539$
- $i = 8 \rightarrow -v(9) + 2v(8) - v(7) = 0.0539$
- $i = 9 \rightarrow -v(10) + 2v(9) - v(8) = 0.0539$

En forma matricial, el sistema se representa como:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v(1) \\ v(2) \\ v(3) \\ v(4) \\ v(5) \\ v(6) \\ v(7) \\ v(8) \\ v(9) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0539 \\ 0.0539 \\ 0.0539 \\ 0.0539 \\ 0.0539 \\ 0.0539 \\ 0.0539 \\ 0.0539 \\ 0.0539 \end{pmatrix}$$

Al resolver el anterior sistema de ecuaciones en FORTRAN,


```

1      program Velocidad
2      INTEGER, PARAMETER :: M = 10
3      INTEGER :: NMI, IJK, ITER, I, J
4      real, dimension(M,M) :: A
5      REAL, DIMENSION(M) :: B
6      REAL, DIMENSION(0:M) :: V
7      !
8      nd = 10      ! Numero de divisiones
9      BB = 0.05     ! Separacion entre las placas
10     Dy = 2*BB/real(nd)
11
12     WRITE(6,*) 'ECUACIONES DE ENTRADA.'
13     OPEN(2, FILE = '2_datos_velocidad.txt')
14     READ(2,*)N,NMI,NAPROX ! Lee datos del archivo de entrada
15     APROX = 10.0**(-NAPROX)
16     !
17     ! Lee datos de las matrices de entrada
18     DO I = 1,N
19     READ(2,*)(A(I,J), J = 1,N), B(I)
20     WRITE(6,*)(A(I,J), J = 1,N), B(I)
21     END DO
22     CLOSE (2)
23     !
24     DO I = 1,N
25     V(I)=0      ! Primera aproximacion de la solucion
26     END DO
27     !
28     WRITE(6,*) 'RESULTADOS'
29     WRITE(*,*) ! Imprime resultados
30     ! Solucion al sistema de ecuaciones
31     DO ITER=1,NMI
32     WRITE(*,*)ITER,(V(J), J = 1,N)
33     IJK = 0
34     DO I = 1,N
35     Y = B(I)
36     DO J = 1,N
37     IF (I.EQ.J) GO TO 3
38     Y = Y - A(I,J)*V(J)
39     3 END DO
40     Y = Y/A(I,I)
41     IF (ABS( (V(I)-Y)/Y ).GT.APROX) IJK = 1
42     V(I) = Y
43     END DO
44     IF( IJK.EQ.0 ) GO TO 6
45     END DO
46     WRITE(*,*) 'NUMERO DE ITERACIONES: ', NMI
47     6 CONTINUE
48     !
49     ! Guarda datos para graficacion
50     open(3,file='2_resultados_velocidad.txt',status='unknown')
51     delta = 0.0
52     !
53     ! Condiciones de frontera
54     V(0)=0.0
55     V(10)=0.0
56     !
57     do i = 0,nd
58     write(3,100) delta, -V(i)
59     delta = delta + Dy
60     end do
61     close(3)
62 100 format(f7.4, 2x, f7.4)
63 end program Velocidad

```

se obtuvieron los siguientes resultados:

- $v(0) = 0.0$
- $v(1) = -0.2423$
- $v(2) = -0.4308$
- $v(3) = -0.5654$
- $v(4) = -0.6462$
- $v(5) = -0.6732$
- $v(6) = -0.6463$
- $v(7) = -0.5655$
- $v(8) = -0.4309$
- $v(9) = -0.2424$
- $v(10) = 0.0$

3.9.2 Tensor de viscosidades en coordenadas cilíndricas

$$\tau_{rr} = \mu \left[2 \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{v} \right] \quad (3.178)$$

$$\tau_{\theta\theta} = \mu \left[2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) - \frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{v} \right] \quad (3.179)$$

$$\tau_{zz} = \mu \left[2 \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{v} \right] \quad (3.180)$$

$$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = \mu \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \quad (3.181)$$

$$\tau_{\theta z} = \tau_{z\theta} = \mu \left[\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right] \quad (3.182)$$

$$\tau_{zr} = \tau_{rz} = \mu \left[\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right] \quad (3.183)$$

donde,

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rv_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (3.184)$$

Problema 3.15 El modelo de la ley de viscosidad de Ostwald de Waele es dado por:

$$\tau_{rz} = \mu \left| \frac{dv_z}{dr} \right|^{n-1} \frac{dv_z}{dr} \quad (3.185)$$

Para un fluido incompresible, laminar y viscoso que fluye a través de un cilindro vertical de radio R y longitud L , demuestre que el perfil de velocidad v_z , usando el modelo de la ley de viscosidad de Ostwald de Waele es:

$$v_z = \left(\frac{P_0 - P_L}{2\mu L} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{n}{n+1} R^{\frac{n+1}{n}} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^{\frac{n+1}{n}} \right] \quad (3.186)$$

compare este resultado con el obtenido en el modelo de la ley de viscosidad de Newton.

Solución.

Partiendo de la definición del valor absoluto:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0, \\ -a & \text{si } a \leq 0. \end{cases} \quad (3.187)$$

y como la variación de la velocidad v_z disminuye desde $r = 0 \rightarrow r = R$, donde R es el radio del cilindro (recuerde que la velocidad máxima está en $r = 0$ y en $r = R$ la velocidad es cero. Estas son condiciones de frontera), entonces se toma el negativo de $\frac{dv_z}{dr}$, así que:

$$\tau_{rz} = \mu \left(-\frac{dv_z}{dr} \right)^{n-1} \left(-\frac{dv_z}{dr} \right) \quad (3.188)$$

$$\tau_{rz} = \mu \left(-\frac{dv_z}{dr} \right)^n \quad (3.189)$$

donde τ_{rz} indica que la velocidad del fluido está en la dirección del eje z , y la propagación de la cantidad de movimiento es radial. Desde la conservación de cantidad de movimiento, en coordenadas cilíndricas:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\tau_{rz}) = \frac{(P_0 - P_L)}{L} \quad (3.190)$$

Para entender mejor esta ecuación, analizar la ecuación (3.174). Separando variables,

$$\frac{d}{dr} (r\tau_{rz}) = \frac{(P_0 - P_L)}{L} r \quad (3.191)$$

integrando,

$$r\tau_{rz} = \frac{(P_0 - P_L)}{2L} r^2 + c_1 \quad (3.192)$$

$$\tau_{rz} = \frac{(P_0 - P_L)}{2L} r + \frac{c_1}{r} \quad (3.193)$$

para cualquier r , $c_1 = 0$,

$$\tau_{rz} = \frac{(P_0 - P_L)}{2L} r \quad (3.194)$$

reemplazando τ_{rz} ,

$$\mu \left(-\frac{dv_z}{dr} \right)^n = \frac{(P_0 - P_L)}{2L} r \quad (3.195)$$

$$\left(-\frac{dv_z}{dr} \right)^n = \frac{(P_0 - P_L)}{2\mu L} r \quad (3.196)$$

sacando raíz n -ésima,

$$-\frac{dv_z}{dr} = \left[\frac{P_0 - P_L}{2\mu L} \right]^{\frac{1}{n}} r^{\frac{1}{n}} \quad (3.197)$$

integrando,

$$-v_z = \left[\frac{P_0 - P_L}{2\mu L} \right]^{\frac{1}{n}} \frac{r^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1} + c_2 \quad (3.198)$$

$$v_z = - \left[\frac{P_0 - P_L}{2\mu L} \right]^{\frac{1}{n}} \frac{nr^{\frac{n+1}{n}}}{n+1} + c_2 \quad (3.199)$$

para $r = R$, $v_z = 0$,

$$- \left[\frac{P_0 - P_L}{2\mu L} \right]^{\frac{1}{n}} \frac{nR^{\frac{n+1}{n}}}{n+1} + c_2 = 0 \quad (3.200)$$

por lo tanto c_2 es igual a:

$$c_2 = \left[\frac{P_0 - P_L}{2\mu L} \right]^{\frac{1}{n}} \frac{nR^{\frac{n+1}{n}}}{n+1} \quad (3.201)$$

reemplazando,

$$v_z = - \left[\frac{P_0 - P_L}{2\mu L} \right]^{\frac{1}{n}} \frac{nr^{\frac{n+1}{n}}}{n+1} + \left[\frac{P_0 - P_L}{2\mu L} \right]^{\frac{1}{n}} \frac{nR^{\frac{n+1}{n}}}{n+1} \quad (3.202)$$

$$v_z = \left[\frac{P_0 - P_L}{2\mu L} \right]^{\frac{1}{n}} \frac{n}{n+1} \left[-r^{\frac{n+1}{n}} + R^{\frac{n+1}{n}} \right] \quad (3.203)$$

$$v_z = \left(\frac{P_0 - P_L}{2\mu L} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{nR^{\frac{n+1}{n}}}{n+1} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^{\frac{n+1}{n}} \right] \quad (3.204)$$

Problema 3.16 Repita el ejercicio del fluido incompresible, laminar y viscoso fluye a través de un cilindro vertical de radio R y longitud L utilizando el modelo de la ley de viscosidad de Ostwald de Waele y el método numérico de diferencias finitas para deducir las siguientes ecuaciones discretas:

$$\tau(i) - \tau(i-1) + \frac{\mu}{i} \left(\frac{v(i-1) - v(i)}{\Delta r} \right)^n - \Delta r \left(\frac{P_0 - P_L}{L} \right) = 0 \quad (3.205)$$

y

$$v(i-1) - v(i) + \Delta r \left(\frac{\tau(i)}{\mu} \right)^{\frac{1}{n}} = 0 \quad (3.206)$$

donde $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ y con condiciones de frontera:

$$\tau(0) = 0 \quad (3.207)$$

$$v(10) = 0 \quad (3.208)$$

donde $i = 0$ en $r = 0$ y $i = 10$ en $r = R$.

Solución.

desde la conservación de cantidad de movimiento, en coordenadas cilíndricas:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\tau_{rz}) = \frac{(P_0 - P_L)}{L} \quad (3.209)$$

$$\frac{1}{r} \left(r \frac{d\tau_{rz}}{dr} + \tau_{rz} \right) = \frac{(P_0 - P_L)}{L} \quad (3.210)$$

$$\frac{d\tau_{rz}}{dr} + \frac{\tau_{rz}}{r} = \frac{(P_0 - P_L)}{L} \quad (3.211)$$

como

$$\tau_{rz} = \mu \left(-\frac{dv_z}{dr} \right)^n \rightarrow -\frac{dv_z}{dr} = \left(\frac{\tau_{rz}}{\mu} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (3.212)$$

es decir,

$$\frac{dv_z}{dr} + \left(\frac{\tau_{rz}}{\mu} \right)^{\frac{1}{n}} = 0 \quad (3.213)$$

discretizando,

$$\frac{v(i) - v(i-1)}{\Delta r} + \left(\frac{\tau(i)}{\mu} \right)^{\frac{1}{n}} = 0 \quad (3.214)$$

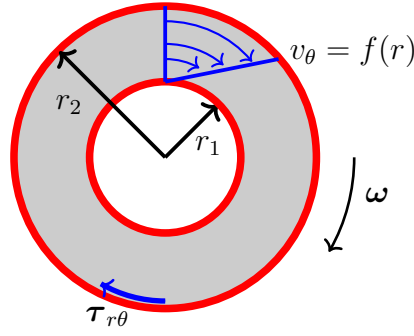
$$v(i) - v(i-1) + \Delta r \left(\frac{\tau(i)}{\mu} \right)^{\frac{1}{n}} = 0 \quad (3.215)$$

con condiciones de frontera:

$$\tau(0) = 0. \quad (3.216)$$

$$v(10) = 0. \quad (3.217)$$

Problema 3.17 Considere un flujo laminar tangencial con densidad y viscosidad constante y con velocidad v_θ dada por: $v_\theta = \omega r_2 \frac{\left(\frac{r_1}{r} - \frac{r}{r_1} \right)}{\left(\frac{r_1}{r_2} - \frac{r_2}{r_1} \right)}$. El flujo está entre dos cilindros concéntricos de radios r_1 y r_2 como lo muestra la Figura.



Sí el cilindro externo está rotando con una velocidad angular ω , demuestre que el torque $\tau_{r\theta}$ requerido para girar el cilindro exterior (por parte del fluido) está dado por la expresión:

$$T = 4\pi\mu L\omega r_2^2 \left[\frac{\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2}{1.0 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2} \right] \quad (3.218)$$

Solución:

El torque es definido por la ecuación:

$$T = Fd \quad (3.219)$$

como, la velocidad va en la dirección angular y el momento se desplaza en dirección radial, ver Figura, se tiene:

$$\tau_{r\theta} = \frac{F}{A} \quad (3.220)$$

donde A es el área del cilindro externo. Despejando F y reemplazandola en la definición de torque,

$$T = A(-\tau_{r\theta}) \Big|_{r=r_2} d \quad (3.221)$$

donde el signo menos es debido a que la fuerza F es una fuerza debido a la viscosidad y por lo tanto es una fuerza de fricción y d corresponde al radio del cilindro exterior. El área del cilindro externo está dada por $A = 2\pi r_2 L$, donde L es el largo del cilindro. Reemplazando,

$$T = (2\pi r_2 L)(-\tau_{r\theta}) \Big|_{r=r_2} r_2 \quad (3.222)$$

como el tensor de viscosidades es dado por la expresión,

$$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = -\mu \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \quad (3.223)$$

pero $v_r = 0$, entonces,

$$\tau_{r\theta} = -\mu r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) \quad (3.224)$$

reemplazando v_θ ,

$$\tau_{r\theta} = -\mu r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \omega r_2 \frac{\left(\frac{r_1}{r} - \frac{r}{r_1} \right)}{\left(\frac{r_1}{r_2} - \frac{r_2}{r_1} \right)} \right) \quad (3.225)$$

$$\tau_{r\theta} = -\mu \omega r_2 r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\left(\frac{r_1}{r} - \frac{r}{r_1} \right)}{\left(\frac{r_1}{r_2} - \frac{r_2}{r_1} \right)} \right) \quad (3.226)$$

$$\tau_{r\theta} = -\mu \omega r_2 r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\left(\frac{r_1}{r^2} - \frac{1}{r_1} \right)}{\left(\frac{r_1}{r_2} - \frac{r_2}{r_1} \right)} \right) \quad (3.227)$$

$$\tau_{r\theta} = -\mu \omega r_2 r \left(\frac{\left(-2 \frac{r_1}{r^3} \right)}{\left(\frac{r_1}{r_2} - \frac{r_2}{r_1} \right)} \right) \quad (3.228)$$

$$\tau_{r\theta} = 2\mu \omega r_2 r \left(\frac{r_1}{r^3} \right) \frac{1}{\left(\frac{r_1^2 - r_2^2}{r_2 r_1} \right)} \quad (3.229)$$

$$\tau_{r\theta} = 2\mu \omega \left(\frac{r_1 r_2}{r^2} \right) \frac{r_2 r_1}{r_1^2 - r_2^2} \quad (3.230)$$

multiplicando en ambos lados por $-2\pi r_2 L$ y haciendo $r = r_2$,

$$-2\pi r_2 L \tau_{r\theta} = -4\pi r_2 L \mu \omega \left(\frac{r_1 r_2}{r_2^2} \right) \frac{r_2 r_1}{r_1^2 - r_2^2} \quad (3.231)$$

$$-2\pi r_2 L \tau_{r\theta} = 4\pi L \mu \omega \frac{r_2 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \quad (3.232)$$

$$-2\pi r_2 L \tau_{r\theta} = 4\pi L \mu \omega \frac{r_2 r_1^2}{r_2^2 (1 - r_1^2/r_2^2)} \quad (3.233)$$

$$-2\pi r_2 L \tau_{r\theta} = 4\pi r_2 L \mu \omega \left[\frac{r_1^2/r_2^2}{1 - r_1^2/r_2^2} \right] \quad (3.234)$$

multiplicando en ambos lados por r_2 ,

$$-2\pi r_2 L \tau_{r\theta} r_2 = 4\pi r_2^2 L \mu \omega \left[\frac{(r_1/r_2)^2}{1 - (r_1/r_2)^2} \right] \quad (3.235)$$

de acuerdo con la ecuación (3.222), el lado izquierdo de (3.235) es el torque T ,

$$T = 4\pi r_2^2 L \mu \omega \left[\frac{(r_1/r_2)^2}{1 - (r_1/r_2)^2} \right] \quad (3.236)$$

3.9.3 Tensor de viscosidades en coordenadas esféricas

$$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = \mu \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \quad (3.237)$$

$$\tau_{\theta\phi} = \tau_{\phi\theta} = \mu \left[\frac{\sin\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{v_\theta}{\sin\theta} \right) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right] \quad (3.238)$$

$$\tau_{\phi r} = \tau_{r\phi} = \mu \left[\frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\phi}{r} \right) \right] \quad (3.239)$$

Tema No. 4

Ecuación de movimiento

Las ecuaciones de movimiento resultan de aplicar la segunda ley de Newton a un sistema. La ecuación de movimiento contiene toda la información de todas las fuerzas y la cantidad de movimiento en el volumen de control. En este caso y de acuerdo con la segunda ley de Newton, la suma de las fuerzas que actúan sobre el volumen de control son iguales a la variación de la cantidad de momentos en el volumen de control, lo cual puede escribirse como:

Suma de fuerzas actuando sobre el volumen de control	=	Variación temporal del momento que sale del volumen de control	−	Variación temporal del momento que entra al volumen de control	+	Variación temporal de la acumulación del momento en el volumen de control
--	---	--	---	--	---	---

que en términos matemáticos es,

$$F_{\text{total}} = \dot{M}_{\text{sale}} - \dot{M}_{\text{entra}} + \frac{\partial M}{\partial t} \quad (4.1)$$

La ecuación de movimiento es una ecuación vectorial con componentes x , y y z . Por ejemplo, la componente x es,

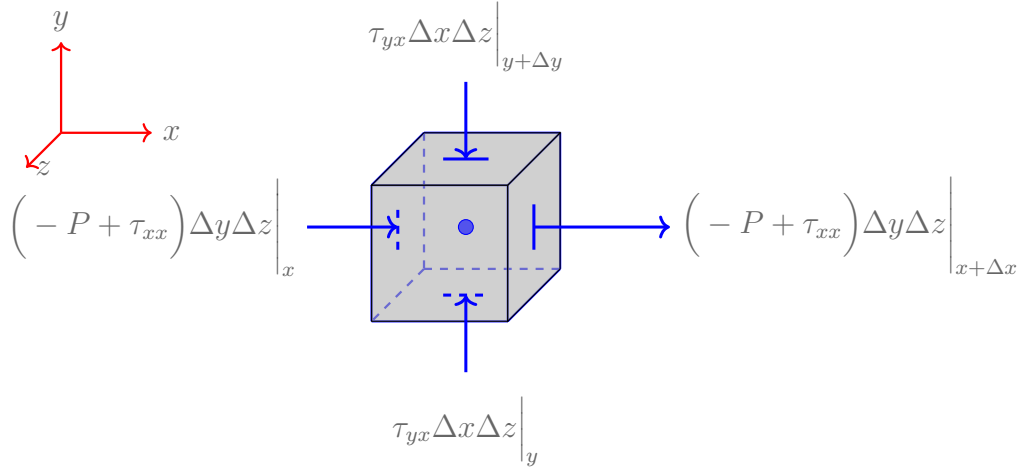
$$\sum_i F_{i,x} = \dot{M}_{\text{sale},x} - \dot{M}_{\text{entra},x} + \frac{\partial M}{\partial t} \quad (4.2)$$

Para la solución de la ecuación (4.2), se necesita calcular las fuerzas que actúan sobre el volumen de control y las variaciones temporales de la cantidad de movimiento que pasa a través del volumen de control.

4.1 Fuerzas en el volumen de control

El volumen de control se encuentra sometido a las fuerzas superficiales y a la fuerza de su propio peso. Las fuerzas superficiales que actúan sobre el volumen de control,

son las fuerzas de presión y las fuerzas debido a la viscosidad del fluido, las cuales corresponden a los esfuerzos normales τ_{ii} y tangenciales τ_{ij} . La siguiente Figura muestra el movimiento de las partículas en la dirección x y las fuerzas debido a la presión y a las viscosidades que actúan sobre el volumen de control.



Por lo tanto, la suma de todas las fuerzas en la dirección x , teniendo en cuenta las fuerzas del cuerpo, es igual a:

$$\begin{aligned} \sum_x F_x = & \left(-P + \tau_{xx} \right) \Delta y \Delta z \Big|_{x+\Delta x} - \left(-P + \tau_{xx} \right) \Delta y \Delta z \Big|_x + \\ & \tau_{yx} \Delta x \Delta z \Big|_{y+\Delta y} - \tau_{yx} \Delta x \Delta z \Big|_y + \\ & \tau_{zx} \Delta x \Delta y \Big|_{z+\Delta z} - \tau_{zx} \Delta x \Delta y \Big|_z + \sum_i \rho_i g_{ix} \Delta x \Delta y \Delta z \end{aligned} \quad (4.3)$$

donde τ_{yx} y τ_{zx} son los esfuerzos cortantes que se transmiten en las direcciones y y z , cuando el fluido viaja en la dirección x . $\sum_i \rho_i g_{ix} \Delta x \Delta y \Delta z$ es la fuerza debido a la gravedad en la dirección x . Sacando factor común el diferencial de volumen $\Delta x \Delta y \Delta z$,

$$\begin{aligned} \sum_x F_x = & \Delta x \Delta y \Delta z \left[\frac{\left(-P + \tau_{xx} \right) \Big|_{x+\Delta x} - \left(-P + \tau_{xx} \right) \Big|_x}{\Delta x} + \right. \\ & \left. \frac{\tau_{yx} \Big|_{y+\Delta y} - \tau_{yx} \Big|_y}{\Delta y} + \frac{\tau_{zx} \Big|_{z+\Delta z} - \tau_{zx} \Big|_z}{\Delta z} + \sum_i \rho_i g_{ix} \right] \end{aligned} \quad (4.4)$$

y en el límite cuando los diferenciales tienden a cero, se obtiene,

$$\sum_x F_x = \Delta x \Delta y \Delta z \left[\sum_i \rho_i g_{ix} + \frac{\partial}{\partial x} \left(-P + \tau_{xx} \right) + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right] \quad (4.5)$$

Realizando el mismo procedimiento, para las partículas de fluido que viajan en las direcciones y y z , se obtienen las siguientes sumatorias de fuerzas,

$$\sum_y F_y = \Delta x \Delta y \Delta z \left[\sum_i \rho_i g_{iy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(-P + \tau_{yy} \right) + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right] \quad (4.6)$$

y

$$\sum_z F_z = \Delta x \Delta y \Delta z \left[\sum_i \rho_i g_{iz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \left(-P + \tau_{zz} \right) \right] \quad (4.7)$$

4.2 Variación temporal de la cantidad de movimiento

La cantidad de movimiento lineal está dada por la expresión,

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \quad (4.8)$$

donde m es la masa del fluido y \mathbf{v} su velocidad. Reemplazando la masa en términos de la densidad, $\rho = m/V$,

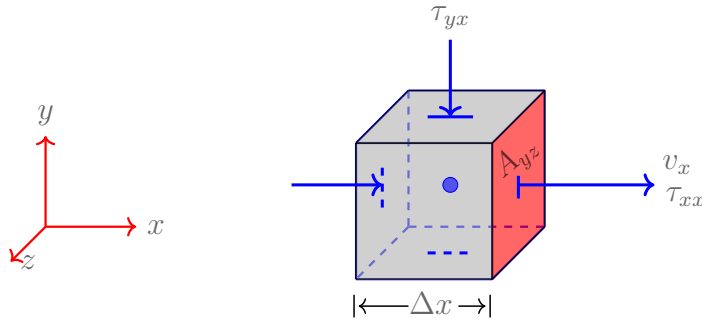
$$\mathbf{p} = \rho V \mathbf{v} \quad (4.9)$$

donde V es el volumen, y suponiendo que el fluido viaja en la dirección x , es dado como: $V = xA_{yz}$ con A_{yz} el área prependicular a la dirección de la velocidad del fluido. Así, el momento en la dirección x presenta la forma:

$$p_x = \rho A_{yz} x v_x \quad (4.10)$$

Entonces, la variación de la cantidad de movimiento en un diferencial de tiempo Δt es,

$$\frac{\Delta P_x}{\Delta t} = \rho A_{yz} \frac{\Delta x}{\Delta t} v_x \quad (4.11)$$



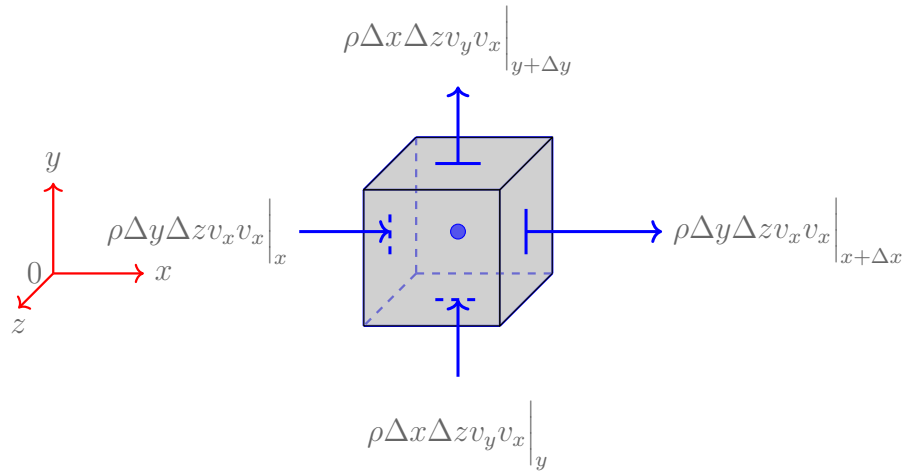
En la Figura, se observa que la variación Δx corresponde a una deformación longitudinal del volumen de control y su variación con respecto al diferencial de tiempo Δt corresponde a la velocidad de propagación del momento en la dirección x , generando una deformación longitudinal. Ahora, el producto $A_{yz} \frac{\Delta x}{\Delta t}$ es el cambio de volumen del volumen de control debido a las fuerzas viscosas del fluido. Por lo tanto, la variación temporal del momento en un tiempo t puede reescribirse como,

$$\dot{M}_x = \rho A_{yz} v_x v_x \quad (4.12)$$

donde una de las velocidades v_x corresponde a la velocidad de deformación del volumen de control en la dirección x y la otra velocidad v_x es la velocidad del fluido. Los momentos para las otras dos áreas A_{xy} y A_{xz} con el fluido viajando en la dirección x , son:

$$\dot{M}_y = \rho A_{xz} v_y v_x, \quad y \quad \dot{M}_z = \rho A_{xy} v_z v_x \quad (4.13)$$

donde v_y y v_z son las velocidades de deformación lineal del elemento de volumen de control en las direcciones y y z , respectivamente, mientras que la velocidad v_x es la velocidad del fluido. Estas tres cantidades de movimiento por unidad de tiempo que entra y que sale del volumen de control, para un fluido que viaja en la dirección x , pueden observarse en la siguiente Figura:



El flujo neto através del volumen de control es:

$$\begin{aligned} \dot{M}_{s,x} - \dot{M}_{e,x} = & \rho \Delta y \Delta z v_x v_x \Big|_{x+\Delta x} - \rho \Delta y \Delta z v_x v_x \Big|_x + \\ & \rho \Delta x \Delta z v_y v_x \Big|_{y+\Delta y} - \rho \Delta x \Delta z v_y v_x \Big|_y + \\ & \rho \Delta x \Delta y v_z v_x \Big|_{z+\Delta z} - \rho \Delta x \Delta y v_z v_x \Big|_z \end{aligned} \quad (4.14)$$

sacando factor común el diferencial de volumen $\Delta x \Delta y \Delta z$,

$$\dot{M}_{s,x} - \dot{M}_{e,x} = \Delta x \Delta y \Delta z \left[\frac{\rho v_x v_x \Big|_{x+\Delta x} - \rho v_x v_x \Big|_x}{\Delta x} + \frac{\rho v_y v_x \Big|_{y+\Delta y} - \rho v_y v_x \Big|_y}{\Delta y} + \frac{\rho v_z v_x \Big|_{z+\Delta z} - \rho v_z v_x \Big|_z}{\Delta z} \right] \quad (4.15)$$

y en el límite cuando el diferencial de volumen tiende a cero, se obtiene:

$$\dot{M}_{s,x} - \dot{M}_{e,x} = \Delta x \Delta y \Delta z \left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y v_x) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z v_x) \right] \quad (4.16)$$

Realizando el mismo procedimiento para la partícula cuando viaja en la dirección y y z , se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\dot{M}_{s,y} - \dot{M}_{e,y} = \Delta x \Delta y \Delta z \left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x v_y) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z v_y) \right] \quad (4.17)$$

y

$$\dot{M}_{s,z} - \dot{M}_{e,z} = \Delta x \Delta y \Delta z \left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x v_z) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y v_z) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z v_z) \right] \quad (4.18)$$

4.3 Acumulación de la cantidad de movimiento

El cambio en la cantidad de momento o acumulación del momento en el volumen de control, para la partícula que viaja en la dirección x , está dado por la expresión:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\Delta x \Delta y \Delta z \rho v_x) \quad (4.19)$$

y en el límite cuando el diferencial de volumen tiende a cero y conservándose con el tiempo, se obtiene:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_x) \quad (4.20)$$

4.4 Ecuación de Cauchy

Sustituyendo las ecuaciones de las fuerzas en x , ecuación (4.5), del flujo neto através del volumen de control, ecuación (4.16) y de la acumulación del momento, ecuación (4.20) en la ecuación del cantidad de movimiento, ecuación (4.2), para la partícula que viaja en la dirección x , se obtiene:

$$\sum_i F_{i,x} = \dot{M}_{\text{sale},x} - \dot{M}_{\text{entra},x} + \frac{\partial M}{\partial t} \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} \sum_i \rho_i g_{ix} + \frac{\partial}{\partial x} \left(-P + \tau_{xx} \right) + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_y v_x) + \\ \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z v_x) + \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_x) \end{aligned} \quad (4.22)$$

Si la partícula viaja en la dirección y y en la dirección z , se obtienen las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \sum_i \rho_i g_{iy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(-P + \tau_{yy} \right) + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x v_y) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_y v_y) + \\ \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z v_y) + \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_y) \end{aligned} \quad (4.23)$$

y

$$\begin{aligned} \sum_i \rho_i g_{iz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \left(-P + \tau_{zz} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x v_z) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_y v_z) + \\ \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z v_z) + \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_z) \end{aligned} \quad (4.24)$$

sumando las tres componentes, se obtiene una expresión en forma vectorial,

$$\rho \mathbf{g} - \nabla P + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) + \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}) \quad (4.25)$$

donde $\rho \mathbf{g}$ es la fuerza gravitacional, ∇P son las fuerzas de presión, $\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}$ son las fuerzas de viscosidad, $\nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v})$ velocidad de cambio de momentos. Este término es un vector y el producto $\mathbf{v} \mathbf{v}$ es un producto diádico y da como resultado un tensor y la divergencia de un tensor es un vector (Ver apéndice). El término temporal $\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v})$ es la velocidad de acumulación del momento en el volumen de control. A la ecuación (4.25) se le llama: Ecuación de movimiento, también referenciada como la ecuación de Cauchy.

Resolviendo el término de la velocidad de cambio de los momentos, la ecuación (4.25) puede reescribirse como:

$$\rho \mathbf{g} - \nabla P + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = \mathbf{v} \cdot \nabla (\rho \mathbf{v}) + \rho \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}) \quad (4.26)$$

Ahora, suponiendo que existe conservación del volumen, es decir: $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, aunque existan deformaciones lineales y angulares, se obtiene la ecuación de movimiento:

$$\rho \mathbf{g} - \nabla P + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = \mathbf{v} \cdot \nabla (\rho \mathbf{v}) + \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}) \quad (4.27)$$

A continuación se observará las ecuaciones de movimiento en coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas.

4.4.1 Ecuación de movimiento en coordenadas cartesianas

- Componente x

$$\begin{aligned} \rho \mathbf{g}_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \\ v_x \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + v_y \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial y} + v_z \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial z} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial t} \end{aligned} \quad (4.28)$$

- Componente y

$$\begin{aligned} \rho \mathbf{g}_y - \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = \\ v_x \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial x} + v_y \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + v_z \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial z} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial t} \end{aligned} \quad (4.29)$$

- Componente z

$$\begin{aligned} \rho \mathbf{g}_z - \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} = \\ v_x \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial x} + v_y \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial y} + v_z \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial t} \end{aligned} \quad (4.30)$$

4.4.2 Ecuación de movimiento en coordenadas cilíndricas

- Componente r ,

$$\rho \mathbf{g}_r - \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r\tau_{rr})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z} =$$

$$v_r \frac{\partial(\rho v_r)}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial(\rho v_r)}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial(\rho v_r)}{\partial z} + \frac{\partial(\rho v_r)}{\partial t} \quad (4.31)$$

donde $\frac{\rho v_\theta^2}{r}$ es la fuerza centrífuga.

- Componente θ

$$\rho \mathbf{g}_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 \tau_{r\theta})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial\tau_{\theta z}}{\partial z} =$$

$$v_r \frac{\partial(\rho v_\theta)}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial(\rho v_\theta)}{\partial \theta} - \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial(\rho v_\theta)}{\partial z} + \frac{\partial(\rho v_\theta)}{\partial t} \quad (4.32)$$

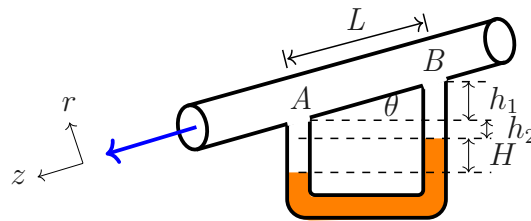
donde $\frac{v_r v_\theta}{r}$ es la fuerza de coriolis.

- Componente z

$$\rho \mathbf{g}_z - \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r\tau_{rz})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial\tau_{zz}}{\partial z} =$$

$$v_r \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial t} \quad (4.33)$$

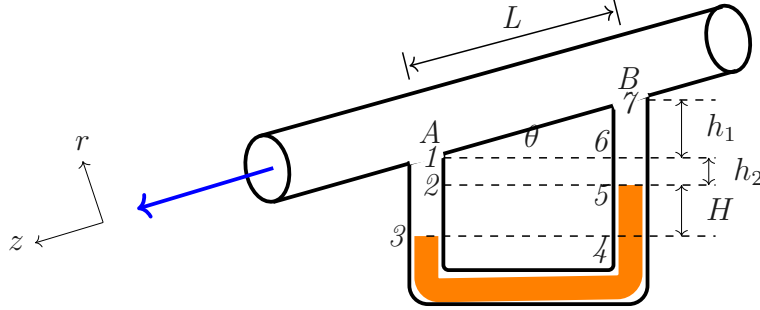
Problema 4.1 Demostrar que la distribución de velocidad de un fluido de agua que circula a través de un tubo de radio R como lo muestra la Figura, y como fluido manómetro se utiliza el tetracloruro de carbono, es:



$$v_z = \frac{R^2 g H}{4 \mu L} (\rho_t - \rho_a) \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad (4.34)$$

Solución

En el problema se observa que existen fuerzas de presión generadas por el gradiente de presión entre los puntos A y B, es decir $\frac{\Delta P}{\Delta z} = -\frac{P_B - P_A}{L}$. También existe la fuerza debido al peso del fluido, que es mg_z y la fuerza cortante τ_{rz} debido a la viscosidad del fluido.



Lo primero es el análisis de las fuerzas de presión. Por lo tanto, analizando las presiones del manómetro, se encuentran las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 P_A &= P_1 & \rightarrow & P_A = P_1 \\
 P_2 &= P_1 + \rho_{\text{agua}}gh_2 & \rightarrow & P_1 = P_2 - \rho_{\text{agua}}gh_2 \\
 P_3 &= P_2 + \rho_{\text{agua}}gH & \rightarrow & P_2 = P_3 - \rho_{\text{agua}}gH \\
 P_4 &= P_3 & \rightarrow & P_3 = P_4 \\
 P_4 &= P_5 + \rho_{\text{tetra}}gH & \rightarrow & P_4 = P_5 + \rho_{\text{tetra}}gH \\
 P_5 &= P_6 + \rho_{\text{agua}}gh_2 & \rightarrow & P_5 = P_6 + \rho_{\text{agua}}gh_2 \\
 P_6 &= P_7 + \rho_{\text{agua}}gh_1 & \rightarrow & P_6 = P_7 + \rho_{\text{agua}}gh_1 \\
 P_7 &= P_B & \rightarrow & P_7 = P_B
 \end{aligned}$$

sumando las ecuaciones (en ambos lados), se obtiene:

$$P_A = P_B - \rho_{\text{agua}}gh_2 - \rho_{\text{agua}}gH + \rho_{\text{tetra}}gH + \rho_{\text{agua}}gh_2 + \rho_{\text{agua}}gh_1 \quad (4.35)$$

cancelando el término $\rho_{\text{agua}}gh_2$

$$P_A = P_B - \rho_{\text{agua}}gH + \rho_{\text{tetra}}gH + \rho_{\text{agua}}gh_1 \quad (4.36)$$

$$P_A = P_B + (\rho_{\text{tetra}} - \rho_{\text{agua}})gH + \rho_{\text{agua}}gh_1 \quad (4.37)$$

de la Figura, se observa que la relación entre h_1 , L y el ángulo θ es $h_1 = L \sin \theta$. Reemplazando, se obtiene la diferencia de presiones entre los puntos A y B:

$$P_A - P_B = (\rho_{\text{tetra}} - \rho_{\text{agua}})gH + \rho_{\text{agua}}gL \sin \theta \quad (4.38)$$

Ahora, realizando un balance de fuerzas y de cantidad de movimiento, se puede demostrar que se obtiene la componente z de la cantidad de movimiento, ecuación (4.33),

$$\rho g_z - \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r\tau_{rz})}{\partial r} = 0 \quad (4.39)$$

como $g_z = g \sin \theta$,

$$\frac{1}{r} \frac{d(r\tau_{rz})}{dr} \approx \frac{\Delta P}{\Delta z} - \rho_{agua} g \sin \theta \quad (4.40)$$

reemplazando $\Delta P \approx P_B - P_A$ y $\Delta L \approx L$

$$\frac{1}{r} \frac{d(r\tau_{rz})}{dr} \approx \frac{(\rho_{tetra} - \rho_{agua})gH}{L} + \frac{\rho_{agua}gL \sin \theta}{L} - \rho_{agua}g \sin \theta \quad (4.41)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d(r\tau_{rz})}{dr} \approx \frac{(\rho_{tetra} - \rho_{agua})gH}{L} + \rho_{agua}g \sin \theta - \rho_{agua}g \sin \theta \quad (4.42)$$

cancelando términos,

$$\frac{1}{r} \frac{d(r\tau_{rz})}{dr} \approx \frac{gH}{L} (\rho_{tetra} - \rho_{agua}) \quad (4.43)$$

integrando,

$$r\tau_{rz} \approx \frac{gHr^2}{2L} (\rho_{tetra} - \rho_{agua}) + c \quad (4.44)$$

$$\tau_{rz} \approx \frac{gHr}{2L} (\rho_{tetra} - \rho_{agua}) + \frac{c}{r} \quad (4.45)$$

como $\tau_{rz} = -\mu \frac{dv_z}{dr}$,

$$-\mu \frac{dv_z}{dr} \approx \frac{gHr}{2L} (\rho_{tetra} - \rho_{agua}) + \frac{c}{r} \quad (4.46)$$

integrando,

$$-v_z \approx \frac{gHr^2}{4\mu L} (\rho_{tetra} - \rho_{agua}) + c_1 \ln r + c_2 \quad (4.47)$$

debido al término logaritmo $c_1 \ln r$ en $r = 0$ la distribución de velocidad v_z diverge, por lo tanto para eliminar éste término, la constante c_1 debe de tomar el valor de cero $c_1 = 0$,

$$-v_z \approx \frac{gHr^2}{4\mu L}(\rho_{tetra} - \rho_{agua}) + c_2 \quad (4.48)$$

ahora, usando la condición de frontera $r = R$ se tiene que $v_z = 0$,

$$c_2 = -\frac{gHR^2}{4\mu L}(\rho_{tetra} - \rho_{agua}) \quad (4.49)$$

reemplazando,

$$-v_z \approx \frac{gHr^2}{4\mu L}(\rho_{tetra} - \rho_{agua}) - \frac{gHR^2}{4\mu L}(\rho_{tetra} - \rho_{agua}) \quad (4.50)$$

$$-v_z \approx \frac{gH}{4\mu L}(\rho_{tetra} - \rho_{agua}) \left[r^2 - R^2 \right] \quad (4.51)$$

$$-v_z \approx \frac{gHR^2}{4\mu L}(\rho_{tetra} - \rho_{agua}) \left[\frac{r^2}{R^2} - 1 \right] \quad (4.52)$$

es decir, la solución anítica es:

$$v_z \approx \frac{gHR^2}{4\mu L}(\rho_{tetra} - \rho_{agua}) \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad (4.53)$$

Problema 4.2 Usando la ecuación (4.43) y sabiendo que el tensor de esfuerzos τ_{rz} es definido como $\tau_{rz} = -\mu \frac{dv_z}{dr}$, obtenga la siguiente ecuación diferencial:

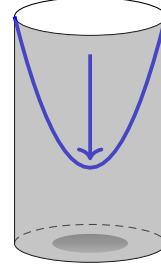
$$\frac{d^2v_z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv_z}{dr} + \frac{gH}{\mu L}(\rho_m - \rho_f) = 0 \quad (4.54)$$

donde ρ_m y ρ_f son las densidades del líquido que contiene un manómetro en U y la densidad del fluido que pasa através de un cilindro, respectivamente. H corresponde a la diferencia de altura entre los niveles del líquido de un manómetro en U y L es la distancia entre los dos orificios del manómetro. La condición de frontera para la velocidad en $r = 0$ es $v_z(r = R) = 0$. Discretice la ecuación (4.54), prográmela y obtenga un resultado para comparar con el valor estimado de la velocidad del fluido usando la aproximación analítica, ecuación (4.53).

Problema 4.3 Usando métodos numéricos.

Un fluido Newtoniano desciende por un tubo vertical y en estado estacionario. Use diferencias finitas para encontrar el perfil de velocidad a través del tubo con la siguiente información:

$$\mu = 20cp, \quad L = 20cm, \quad \Delta P = 0.02Kgf/cm^2, \\ R = 1cm, \Delta r = 0.1cm.$$



Asuma que los momentos en las direcciones $\tau_{\theta z}$ y τ_{zz} son cero.

Solución

La geometría del problema es cilíndrica y el fluido viaja en la dirección z . Por lo tanto, usando la componente z de la ecuación de movimiento en coordenadas cilíndricas, ecuación (4.33):

$$\rho \mathbf{g}_z - \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r\tau_{rz})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial\tau_{zz}}{\partial z} = \\ v_r \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial t} \quad (4.55)$$

Analizando la dirección del movimiento del fluido, se obtiene que las componentes de velocidad v_r y v_θ son cero y como el sistema se encuentra en estado estacionario, $\frac{\partial v_z}{\partial t} = 0$. La ecuación se reduce a:

$$\rho \mathbf{g}_z - \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r\tau_{rz})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial\tau_{zz}}{\partial z} = v_z \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} \quad (4.56)$$

Además, como los esfuerzos en este tipo de geometría solo se transmiten en la dirección radial, los esfuerzos cortantes $\tau_{\theta z}$ y τ_{zz} , también son iguales a cero,

$$\rho \mathbf{g}_z - \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r\tau_{rz})}{\partial r} = v_z \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} \quad (4.57)$$

como la densidad es constante, se obtiene:

$$\rho \mathbf{g}_z - \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r\tau_{rz})}{\partial r} = \rho v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (4.58)$$

También se puede predecir que la velocidad v_z , cuando el fluido alcanza el estado estacionario, es solo función del radio del cilindro, osea que $\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$. Otra forma de

analizar la variación de la velocidad v_z , es usar la ecuación de continuidad, ecuación (2.141), observándose que la variación de la velocidad v_z en la dirección z es cero, es decir,

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (4.59)$$

reemplazando se obtiene,

$$\rho \mathbf{g}_z - \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r\tau_{rz})}{\partial r} = 0 \quad (4.60)$$

usando la componente τ_{zr} , ecuación (3.183), con $v_r = 0$,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r\mu \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \rho \mathbf{g}_z = \frac{\partial P}{\partial z} \quad (4.61)$$

realizando derivadas,

$$\mu \frac{d^2 v_z}{dr^2} + \frac{\mu}{r} \frac{dv_z}{dr} + \rho g = \frac{dP}{dz} \quad (4.62)$$

$$\frac{d^2 v_z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv_z}{dr} = \frac{1}{\mu} \frac{dP}{dz} - \frac{\rho}{\mu} g \quad (4.63)$$

$$\frac{d^2 v_z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv_z}{dr} = \frac{P_L - P_0}{\mu L} - \frac{\rho g L}{\mu L} \quad (4.64)$$

$$\frac{d^2 v_z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv_z}{dr} = \frac{P_L - P_0 - \rho g L}{\mu L} \quad (4.65)$$

definiendo $P'_0 \equiv P_0 - \rho g L$

$$\frac{d^2 v_z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv_z}{dr} = -\frac{P'_0 - P_L}{\mu L} \quad (4.66)$$

por lo tanto,

- La ecuación válida para $r \neq 0$ es:

$$\frac{d^2 v_z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv_z}{dr} = -\frac{P'_0 - P_L}{\mu L} \quad (4.67)$$

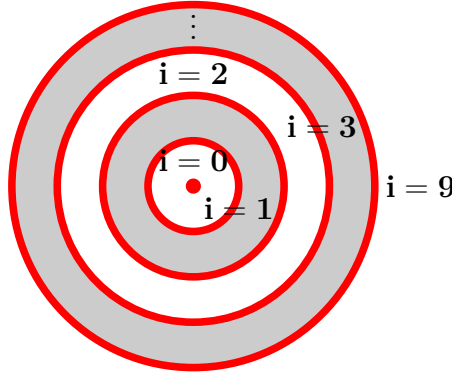
- Para $r = 0$, se puede demostrar que:

$$\frac{1}{r} \frac{dv_z}{dr} = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{1}{r} \frac{dv_z}{dr} \right) = \frac{d^2 v_z}{dr^2} \quad (4.68)$$

entonces,

$$\frac{d^2 v_z}{dr^2} = -\frac{P'_0 - P_L}{2\mu L} \quad (4.69)$$

El siguiente paso es discretizar las ecuaciones (4.67) y (4.69). Estas ecuaciones indican que la discretización se debe de realizar con respecto a la variable radial. Para este propósito, el cilindro es particionado de la siguiente forma:



donde i es una variable de discretización y se observa que en $r = 0$ (en el centro del cilindro), le corresponde la ecuación (4.69) con $i = 0$. Por lo tanto, discretizando para $r = 0$,

$$\frac{v(i+1) - 2v(i) + v(i-1))}{(\Delta r)^2} + \frac{1}{2\mu} \left[\frac{P'_0 - P_L}{L} \right] = 0 \quad (4.70)$$

como $i = 0$, se obtiene:

$$v(1) - 2v(0) + v(-1) + \frac{(\Delta r)^2}{2\mu} \left[\frac{P'_0 - P_L}{L} \right] = 0 \quad (4.71)$$

Se sabe que en $r = 0$ la velocidad del fluido es máxima ($v_z(r)|_{r=0} = \text{constante}$) y por lo tanto, se puede demostrar que la condición de frontera en $r = 0$ es $v(-1) = v(0)$. Así, en $r = 0$ se cumple la siguiente expresión:

$$\left. \frac{dv_z(r)}{dr} \right|_{r=0} = 0 \quad (4.72)$$

y usando diferencias finitas,

$$\left. \frac{v(i) - v(i-1)}{\Delta r} \right|_{r=0} = 0 \quad \rightarrow \quad v(-1) = v(0) \quad \text{para } i = 0 \quad (4.73)$$

reemplazando,

$$v(1) - v(0) + \frac{(\Delta r)^2}{2\mu} \left[\frac{P'_0 - P_L}{L} \right] = 0, \quad \text{para } r = 0 \quad (4.74)$$

Para $i \neq 0$, la ecuación a discretizar es (4.67). Entonces, discretizando para $r \neq 0$,

$$\frac{v(i+1) - 2v(i) + v(i-1)}{(\Delta r)^2} + \frac{1}{i\Delta r} \left(\frac{v(i) + v(i+1)}{\Delta r} \right) + \frac{1}{2\mu} \left[\frac{P'_0 - P_L}{L} \right] = 0 \quad (4.75)$$

simplificando,

$$v(i-1) + \left(-2 + \frac{1}{i} \right) v(i) + \left(1 + \frac{1}{i} \right) v(i+1) + \frac{(\Delta r)^2}{2\mu} \left[\frac{P'_0 - P_L}{L} \right] = 0 \quad (4.76)$$

donde $i = 1, 2, 3, \dots$. Dando valores a i , se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$i = 1, \quad \rightarrow \quad v(2) - v(1) + 2v(0) + \frac{1}{2\mu} \left[\frac{P'_0 - P_L}{L} \right] = 0 \quad (4.77)$$

$$i = 2, \quad \rightarrow \quad v(3) - \frac{3}{2}v(2) + \frac{3}{2}v(1) + \frac{1}{2\mu} \left[\frac{P'_0 - P_L}{L} \right] = 0 \quad (4.78)$$

$$i = 3, \quad \rightarrow \quad v(4) - \frac{5}{3}v(3) + \frac{4}{3}v(2) + \frac{1}{2\mu} \left[\frac{P'_0 - P_L}{L} \right] = 0 \quad (4.79)$$

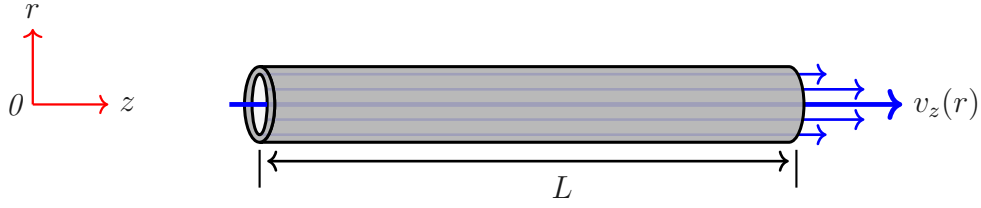
$$\vdots \quad (4.80)$$

$$i = 9, \quad \rightarrow \quad v(10) - \frac{17}{9}v(9) + \frac{10}{9}v(8) + \frac{1}{2\mu} \left[\frac{P'_0 - P_L}{L} \right] = 0 \quad (4.81)$$

Figura muestra que en $i = 9$ se tiene la frontera exterior del cilindro, es decir: $r = R$ con R radio del cilindro. Por lo tanto, la velocidad $v(10)$ es otra condición de frontera correspondiente a la velocidad del fluido en la pared, la cual es cero ($v(10) = 0$). Con las ecuaciones para $i = 0, 1, 2, 3, \dots, 9$, ecuaciones (4.74) a (4.81) y se obtiene el siguiente resultado:

r	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$v_z(r)$	134.8	132.3	127.4	120.0	110.5	98.0	83.3	66.2	46.6	31.1	0.0

Problema 4.4 Considere un flujo laminar y Newtoniano en estado estacionario dentro de un tubo horizontal de radio R y longitud L . Usar el método de diferencias finitas para deducir las ecuaciones que permitan obtener el perfil de velocidad $v_z(r)$.



De la ecuación de continuidad y de la ecuación de movimiento, se tiene:

$$\nu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \right] = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} \quad (4.82)$$

donde $\nu = \frac{\mu}{\rho}$. Las condiciones de frontera son:

$$\text{en } r = R \rightarrow v_z = 0, \quad (4.83)$$

$$\text{en } r = 0 \rightarrow \frac{dv_z}{dr} = 0. \quad (4.84)$$

$$\nu \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} \quad (4.85)$$

cuando $r = 0$, se tiene la indeterminación,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{1}{r} \frac{dv_z}{dr} \right) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\frac{dv_z}{dr}}{r} \rightarrow \frac{0}{0} \quad (4.86)$$

entonces, aplicando L'Hospital a la ecuación (9.104), se obtiene:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{1}{r} \frac{dv_z}{dr} \right) = \frac{d^2 v_z}{dr^2} \quad (4.87)$$

y asumiendo el gradiente de presión constante, se obtienen las siguientes ecuaciones a solucionar:

$$2\nu \frac{d^2 v_z}{dr^2} = \frac{1}{\rho} \frac{\Delta P}{\Delta z}, \quad \text{para } r = 0 \quad (4.88)$$

y

$$\nu \frac{d^2 v_z}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dv_z}{dr} = \frac{1}{\rho} \frac{\Delta P}{\Delta z}, \quad \text{para } r \neq 0 \quad (4.89)$$

discretizando la ecuación (4.88), para $r = 0$,

$$2\nu \frac{v(i+1) - 2v(i) + v(i-1))}{(\Delta r)^2} = \frac{1}{\rho} \frac{\Delta P}{\Delta z} \quad (4.90)$$

como en $r = 0$, se tiene un valor de $i = 0$, entonces:

$$2\nu \frac{v(1) - 2v(0) + v(-1))}{(\Delta r)^2} = \frac{1}{\rho} \frac{\Delta P}{\Delta z} \quad (4.91)$$

ahora, de la condición de frontera, ecuación (4.84), y en forma discreta,

$$\frac{v(i+1) - v(i-1)}{2\Delta r} = 0 \rightarrow v(1) = v(-1), \quad \text{para } i = 0. \quad (4.92)$$

reemplazando,

$$2\nu \frac{v(1) - 2v(0) + v(-1)}{(\Delta r)^2} = \frac{1}{\rho} \frac{\Delta P}{\Delta z} \quad (4.93)$$

$$2\nu \frac{2v(1) - 2v(0)}{(\Delta r)^2} = \frac{1}{\rho} \frac{\Delta P}{\Delta z} \quad (4.94)$$

$$4\nu \frac{v(1) - v(0)}{(\Delta r)^2} = \frac{1}{\rho} \frac{\Delta P}{\Delta z} \quad (4.95)$$

$$v(1) - v(0) = \frac{(\Delta r)^2}{4\nu\rho} \frac{\Delta P}{\Delta z} \quad (4.96)$$

$$v(0) = v(1) - \frac{(\Delta r)^2}{4\nu\rho} \frac{\Delta P}{\Delta z}, \quad \text{para } i = 0 \quad (4.97)$$

discretizando la ecuación (4.89), para $r \neq 0$,

$$\nu \frac{d^2 v_z}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dv_z}{dr} = \frac{1}{\rho} \frac{\Delta P}{\Delta z} \quad (4.98)$$

$$\nu \frac{v(i+1) - 2v(i) + v(i-1)}{(\Delta r)^2} + \frac{\nu}{i\Delta r} \frac{v(i+1) - v(i)}{\Delta r} = \frac{1}{\rho} \frac{\Delta P}{\Delta z} \quad (4.99)$$

observándose que en la discretización de la primera derivada se evitó que se generara $v(0)$ cuando $i = 1$.

$$\frac{\nu}{(\Delta r)^2} [v(i+1) - 2v(i) + v(i-1)] + \frac{\nu}{i(\Delta r)^2} [v(i+1) - v(i)] = \frac{1}{\rho} \frac{\Delta P}{\Delta z} \quad (4.100)$$

$$v(i+1) - 2v(i) + v(i-1) + \frac{1}{i} [v(i+1) - v(i)] = \frac{(\Delta r)^2}{\nu\rho} \frac{\Delta P}{\Delta z} \quad (4.101)$$

$$v(i+1) - 2v(i) + v(i-1) + \frac{v(i+1)}{i} - \frac{v(i)}{i} = \frac{(\Delta r)^2}{\nu\rho} \frac{\Delta P}{\Delta z} \quad (4.102)$$

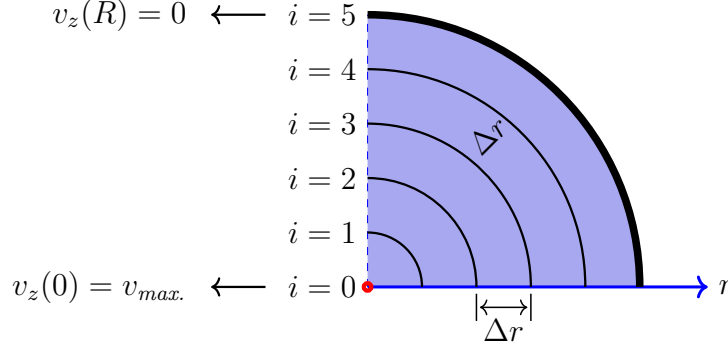
$$\left(1 + \frac{1}{i}\right) v(i+1) - \left(2 + \frac{1}{i}\right) v(i) + v(i-1) = \frac{(\Delta r)^2}{\nu\rho} \frac{\Delta P}{\Delta z}, \quad \text{para } i \neq 0 \quad (4.103)$$

obteniéndose las siguientes ecuaciones en diferencias finitas a resolver:

$$v(0) = v(1) - \frac{(\Delta r)^2}{4\nu\rho} \frac{\Delta P}{\Delta z}, \quad \text{para } i = 0 \quad (4.104)$$

$$v(i-1) - \left(2 + \frac{1}{i}\right)v(i) + \left(1 + \frac{1}{i}\right)v(i+1) = \frac{(\Delta r)^2}{\nu\rho} \frac{\Delta P}{\Delta z}, \quad \text{para } i \neq 0 \quad (4.105)$$

Dando valores a i , como lo muestra la Figura, se obtienen las siguientes ecuaciones:



$$i = 0, \quad \rightarrow \quad v(0) = v(1) - \frac{(\Delta r)^2}{4\nu\rho} \frac{\Delta P}{\Delta z} \quad (4.106)$$

$$i = 1, \quad \rightarrow \quad v(0) - 3v(1) + 2v(2) = \frac{(\Delta r)^2}{\nu\rho} \frac{\Delta P}{\Delta z} \quad (4.107)$$

$$i = 2, \quad \rightarrow \quad v(1) - \frac{5}{2}v(2) + \frac{3}{2}v(3) = \frac{(\Delta r)^2}{\nu\rho} \frac{\Delta P}{\Delta z} \quad (4.108)$$

$$i = 3, \quad \rightarrow \quad v(2) - \frac{7}{3}v(3) + \frac{4}{3}v(4) = \frac{(\Delta r)^2}{\nu\rho} \frac{\Delta P}{\Delta z} \quad (4.109)$$

$$i = 4, \quad \rightarrow \quad v(3) - \frac{9}{4}v(4) + \frac{5}{4}v(5) = \frac{(\Delta r)^2}{\nu\rho} \frac{\Delta P}{\Delta z} \quad (4.110)$$

insertando la ecuación (4.106) en la ecuación (4.107), se obtiene:

$$v(1) - \frac{(\Delta r)^2}{4\nu\rho} \frac{\Delta P}{\Delta z} - 3v(1) + 2v(2) = \frac{(\Delta r)^2}{\nu\rho} \frac{\Delta P}{\Delta z} \quad (4.111)$$

$$-2v(1) + 2v(2) = \frac{(\Delta r)^2}{\nu\rho} \frac{\Delta P}{\Delta z} + \frac{(\Delta r)^2}{4\nu\rho} \frac{\Delta P}{\Delta z} \quad (4.112)$$

$$-2v(1) + 2v(2) = \frac{5}{4} \frac{(\Delta r)^2}{\nu\rho} \frac{\Delta P}{\Delta z} \quad (4.113)$$

$$-v(1) + v(2) = \frac{5}{8} \frac{(\Delta r)^2}{\nu\rho} \frac{\Delta P}{\Delta z} \quad (4.114)$$

y sabiendo que $v(5) = 0$ por ser una condición de frontera (ver Figura), las ecuaciones a resolver, por el método de Gauss-Seidel son:

$$i = 1, \quad \rightarrow \quad -v(1) + v(2) = \frac{5}{8} \frac{(\Delta r)^2}{\nu \rho} \frac{\Delta P}{\Delta z} \quad (4.115)$$

$$i = 2, \quad \rightarrow \quad v(1) - \frac{5}{2}v(2) + \frac{3}{2}v(3) = \frac{(\Delta r)^2}{\nu \rho} \frac{\Delta P}{\Delta z} \quad (4.116)$$

$$i = 3, \quad \rightarrow \quad v(2) - \frac{7}{3}v(3) + \frac{4}{3}v(4) = \frac{(\Delta r)^2}{\nu \rho} \frac{\Delta P}{\Delta z} \quad (4.117)$$

$$i = 4, \quad \rightarrow \quad v(3) - \frac{9}{4}v(4) = \frac{(\Delta r)^2}{\nu \rho} \frac{\Delta P}{\Delta z} \quad (4.118)$$

Problema 4.5 Use los resultados del problema 4.4 para obtener el perfil de velocidad de un fluido que tiene la siguiente información:

$$\Delta P = -1013.25 \frac{N}{m^2}; \Delta z = 1; \rho = 1841 \frac{kg}{m^3}; \mu = 0.01915 \frac{N}{m^2}; R = 1 \quad (4.119)$$

calculando los términos:

$$\frac{(\Delta r)^2}{\nu \rho} \frac{\Delta P}{\Delta z} = \frac{(\Delta r)^2}{\mu} \frac{\Delta P}{\Delta z} = \frac{(0.01)^2}{0.01915} \frac{1013.25}{1} \approx 5.2911 \quad (4.120)$$

reemplazando,

$$-v(1) + v(2) = -3.3069 \quad (4.121)$$

$$2v(1) - 5v(2) + 3v(3) = -10.5822 \quad (4.122)$$

$$3v(2) - 7v(3) + 4v(4) = -15.8733 \quad (4.123)$$

$$4v(3) - 9v(4) = -21.1644 \quad (4.124)$$

y en forma matricial,

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -7 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v(1) \\ v(2) \\ v(3) \\ v(4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3.3069 \\ -10.5822 \\ -15.8733 \\ -21.1644 \end{pmatrix} \quad (4.125)$$

Usando la subroutine Gauss-Seidel para resolver la matriz (4.125),

```

1  PROGRAM GSFLUIDOCIL
2  INTEGER, PARAMETER :: M=100
3  INTEGER :: NMI,IJK,ITER,I,J,NAPROX
4  real, dimension(M,M) :: A
5  REAL,DIMENSION(M) :: B,X
6  !
7  WRITE(6,*) 'ECUACIONES DE ENTRADA. '
8  OPEN(2,FILE='datos_fluido.dat',STATUS='OLD')
9  READ(2,*)N,NMI,NAPROX ! LEE DATOS DEL ARCHIVO DE ENTRADA
10 APROX=10.0*(-NAPROX)
11 !
12 DO I=1,N
```

```

13      READ(2,*) (A(I,J),J=1,N),B(I)
14      WRITE(6,*) (A(I,J),J=1,N),B(I)
15  END DO
16  CLOSE (2)
17  !
18  DO I=1,N
19      X(I) = 0.0 ! PRIMERA APROXIMACION DE LA SOLUCION
20  END DO
21  !
22  WRITE(6,*) 'RESULTADOS'
23  WRITE(*,*) ! IMPRIME RESULTADOS
24  DO ITER=1,NMI
25      WRITE(*,*) ITER, (X(J),J=1,N)
26      IJK = 0
27      DO I=1,N
28          Y=B(I)
29          DO J=1,N
30              IF (I.EQ. J) GO TO 3
31              Y=Y-A(I,J)*X(J)
32          3 END DO
33          Y=Y/A(I,I)
34          IF (ABS( (X(I)-Y)/Y ).GT.APROX) IJK=1
35          X(I) = Y
36      END DO
37      IF ( IJK.EQ.0 ) GO TO 6
38  END DO
39  6 CONTINUE
40  WRITE(*,*) 'NUMERO DE ITERACIONES: ',ITER
41  END PROGRAM GSFLUIDOCIL

```

Los resultados son: $v_z(1) = 28.1529560$, $v_z(2) = 24.8460579$, $v_z(3) = 19.1140614$, $v_z(4) = 10.8467379$ y $v_z(5) = 0.00$. Para estimar el valor de $v_z(0)$, velocidad en $r = 0$, se emplea la ecuación (4.106),

$$v(0) = v(1) - \frac{(\Delta r)^2}{4\nu\rho} \frac{\Delta P}{\Delta z} \quad (4.126)$$

reemplazando valores,

$$v(0) = 28.1529560 + \frac{5.2911}{4} \rightarrow v(0) \approx 29.4757 \quad (4.127)$$

Usando el siguiente programa, se obtiene la gráfica del perfil de velocidad.

```

1  program graficofc
2  integer, parameter :: m=1000
3  real, parameter :: pi=3.141599
4  real, dimension (0:m) :: v,z
5  integer :: i,j,nd
6  real :: r,theta,theta1,x,y
7  nd = 5
8  v(0) = 29.4757; v(1)=28.1529; v(2)=24.8461
9  v(3) = 19.1141; v(4)=10.8467; v(5)=0.0
10 open(3,file='efluidoc.dat',status='unknown')
11 r = 0.0
12 do i=1,nd
13     r = r + 0.2
14     theta = 0.0
15     do j=1,24

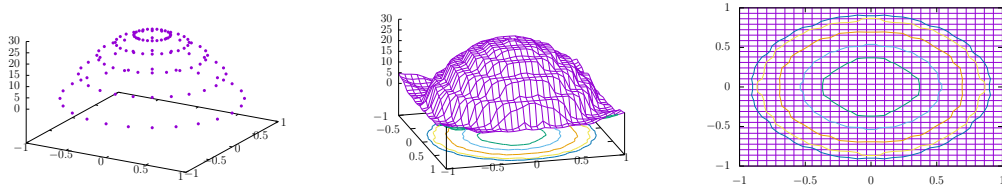
```

```

16      theta1 = theta*pi/180.0
17      x = r*sin(theta1)
18      y = r*cos(theta1)
19      write(3,*)x,y,v(i)
20      theta = theta + 15.0
21  end do
22 end do
23 close(3)
24 end program graficofc

```

Los siguientes gráficos muestran el perfil de velocidad del fluido.



Problema 4.6 El modelo de la ley de viscosidad de Ellis está dado por:

$$-\frac{dv_x}{dy} = \left(\phi_0 + \phi_1 |\tau_{yx}|^{\alpha-1} \right) \tau_{yx} \quad (4.128)$$

1. Demuestre que el perfil de velocidad de un fluido que obedece a la ley de viscosidad de Ellis y que fluye a través de un tubo de radio R y de longitud L , está dado por expresión:

$$v(i) - v(i-1) + \Delta r \left(\phi_0 + \phi_1 |\tau_{yx}|^{\alpha-1} \right) \tau(i) = 0 \quad (4.129)$$

y el esfuerzo cortante es dado por la expresión:

$$\tau(i) - \tau(i-1) - \frac{1}{i\Delta r} \cdot \frac{v(i) - v(i-1)}{\phi_0 + \phi_1 |\tau_{yx}|^{\alpha-1}} - \Delta r \left(\frac{P_0 - P_L}{L} \right) = 0 \quad (4.130)$$

2. Escriba un código en Fortran y obtenga los valores de la velocidad y de los esfuerzos cortantes usando un grid de 10 puntos con las siguientes condiciones y datos:

$$\alpha = 1; \phi_0 = 5; \tau(0) = 0; v(10) = 0; \Delta r = 0.1; R = 1 \text{ cm};$$

$$P_0 - P_L = 1960 \text{ g/cm} \cdot \text{s}^2; L = 20 \text{ cm}; \phi_1 = 0$$

Solución

Reescribiendo la ecuación (4.128) en coordenadas cilíndricas:

$$-\frac{dv_z}{dr} = \left(\phi_0 + \phi_1 |\tau_{rz}|^{\alpha-1} \right) \tau_{rz} \quad .$$

Discretizando esta ecuación por diferencias finitas:

$$-\frac{v(i) - v(i-1)}{\Delta r} = \left(\phi_0 + \phi_1 |\tau_{rz}|^{\alpha-1} \right) \tau(i) \quad .$$

Reorganizando la ecuación:

$$v(i) - v(i-1) + \Delta r \left(\phi_0 + \phi_1 |\tau_{rz}|^{\alpha-1} \right) \tau(i) = 0 \quad .$$

Esta ecuación es igual a la ecuación (4.129) y representa el perfil de velocidad del fluido.

Ahora, partamos de la ecuación de movimiento de un fluido:

$$\rho \mathbf{g} - \nabla P + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) + \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v})$$

Esta ecuación, en coordenadas cilíndricas, se divide en tres ecuaciones diferentes, una para cada componente.

- Componente en r :

$$\rho g_r - \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r \tau_{rr})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} = v_r \frac{\partial (\rho v_r)}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial (\rho v_r)}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial (\rho v_r)}{\partial z} + \frac{\partial (\rho v_r)}{\partial t}$$

- Componente en θ :

$$\rho g_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 \tau_{r\theta})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} = v_r \frac{\partial (\rho v_\theta)}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial (\rho v_\theta)}{\partial \theta} - \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial (\rho v_\theta)}{\partial z} + \frac{\partial (\rho v_\theta)}{\partial t}$$

- Componente en z :

$$\rho g_z - \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r \tau_{rz})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} = v_r \frac{\partial (\rho v_z)}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial (\rho v_z)}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial (\rho v_z)}{\partial z} + \frac{\partial (\rho v_z)}{\partial t}$$

En el caso del problema, teniendo en cuenta que el fluido se desplaza en la dirección z , la componente de interés de la ecuación de movimiento es la correspondiente a esta dirección. Asumiremos también que se cumplen las siguientes condiciones:

- El fluido solamente se mueve en dirección del eje z .

$$v_r = 0; v_\theta = 0.$$

- El fluido no se acelera.

$$\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial t} = 0; v_z \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0$$

- Las fuerzas viscosas solamente actúan en torno al plano rz .

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} = 0; \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} = 0$$

- La fuerza de la gravedad actúa perpendicular al eje z .

$$\rho g_z = 0$$

Teniendo en cuenta estas condiciones, la ecuación de movimiento para la componente en z simplificada queda de la forma:

$$-\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r\tau_{rz})}{\partial r} = 0$$

Reorganizando la ecuación:

$$\frac{\partial(r\tau_{rz})}{\partial r} = r \frac{\partial P}{\partial z}$$

Resolviendo la derivada del producto:

$$\tau_{rz} + r \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} = r \frac{\partial P}{\partial z} \quad (4.131)$$

Retomemos nuevamente la ecuación (4.128) en coordenadas cilíndricas:

$$-\frac{dv_z}{dr} = (\phi_0 + \phi_1 |\tau_{rz}|^{\alpha-1}) \tau_{rz} \quad .$$

Despejando τ_{rz} :

$$\tau_{rz} = -\frac{dv_z}{dr} \cdot \frac{1}{(\phi_0 + \phi_1 |\tau_{rz}|^{\alpha-1})}$$

Reemplazando este valor en la ecuación (4.131):

$$-\frac{dv_z}{dr} \cdot \frac{1}{(\phi_0 + \phi_1 |\tau_{rz}|^{\alpha-1})} + r \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} = r \frac{\partial P}{\partial z}$$

Dividiendo por r ambos lados de la ecuación:

$$-\frac{dv_z}{rdr} \cdot \frac{1}{(\phi_0 + \phi_1 |\tau_{rz}|^{\alpha-1})} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} = \frac{\partial P}{\partial z}$$

Discretizando esta ecuación por diferencias finitas:

$$-\frac{1}{i\Delta r\Delta r} \cdot \frac{v(i) - v(i-1)}{(\phi_0 + \phi_1 |\tau_{rz}|^{\alpha-1})} + \frac{\tau(i) - \tau(i-1)}{\Delta r} = \frac{P_0 - P_L}{L}$$

Multiplicando por Δr ambos lados de la ecuación y reorganizando:

$$\tau(i) - \tau(i-1) - \frac{1}{i\Delta r} \cdot \frac{v(i) - v(i-1)}{(\phi_0 + \phi_1 |\tau_{rz}|^{\alpha-1})} - \Delta r \left(\frac{P_0 - P_L}{L} \right) = 0$$

Esta ecuación es igual a la ecuación (4.130) y representa el perfil de esfuerzo cortante del fluido.

Comencemos primero hallando los valores y el perfil del esfuerzo cortante. Para ello, tomemos la ecuación (4.129) y despejemos la diferencia de velocidades:

$$v(i) - v(i-1) = -\Delta r (\phi_0 + \phi_1 |\tau_{yx}|^{\alpha-1}) \tau(i)$$

Reemplacemos ahora esta diferencia de velocidades en la ecuación (4.130):

$$\tau(i) - \tau(i-1) - \frac{\Delta r}{i\Delta r} \cdot \frac{-(\phi_0 + \phi_1 |\tau_{yx}|^{\alpha-1}) \tau(i)}{\phi_0 + \phi_1 |\tau_{yx}|^{\alpha-1}} - \Delta r \left(\frac{P_0 - P_L}{L} \right) = 0$$

$$\tau(i) - \tau(i-1) + \frac{\tau(i)}{i} - \Delta r \left(\frac{P_0 - P_L}{L} \right) = 0$$

Agrupando términos y reorganizando:

$$\left(1 + \frac{1}{i}\right) \tau(i) - \tau(i-1) = \Delta r \left(\frac{P_0 - P_L}{L} \right)$$

Calculando el término independiente con los datos propuestos:

$$\left(1 + \frac{1}{i}\right) \tau(i) - \tau(i-1) = 9.8$$

Esta es la ecuación con la cual hallaremos los valores del esfuerzo cortante. Realizando las iteraciones sobre los últimos 10 puntos:

- $i = 1 \rightarrow 2\tau(1) - \tau(0) = 9.8$
- $i = 2 \rightarrow \frac{3}{2}\tau(2) - \tau(1) = 9.8$
- $i = 3 \rightarrow \frac{4}{3}\tau(3) - \tau(2) = 9.8$
- $i = 4 \rightarrow \frac{5}{4}\tau(4) - \tau(3) = 9.8$
- $i = 5 \rightarrow \frac{6}{5}\tau(5) - \tau(4) = 9.8$
- $i = 6 \rightarrow \frac{7}{6}\tau(6) - \tau(5) = 9.8$
- $i = 7 \rightarrow \frac{8}{7}\tau(7) - \tau(6) = 9.8$
- $i = 8 \rightarrow \frac{9}{8}\tau(8) - \tau(7) = 9.8$

- $i = 9 \rightarrow \frac{10}{9}\tau(9) - \tau(8) = 9.8$
- $i = 10 \rightarrow \frac{11}{10}\tau(10) - \tau(9) = 9.8$

En forma matricial, el sistema se representa como:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{4}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{5}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{6}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{7}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{8}{7} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{9}{8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{10}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{11}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau(1) \\ \tau(2) \\ \tau(3) \\ \tau(4) \\ \tau(5) \\ \tau(6) \\ \tau(7) \\ \tau(8) \\ \tau(9) \\ \tau(10) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9.8 \\ 9.8 \\ 9.8 \\ 9.8 \\ 9.8 \\ 9.8 \\ 9.8 \\ 9.8 \\ 9.8 \\ 9.8 \end{pmatrix}$$

Al resolver el anterior sistema de ecuaciones en FORTRAN, se obtuvieron los siguientes resultados:

```

1      program Punto1bEsfuerzo
2      INTEGER, PARAMETER :: M = 10
3      real, parameter :: pi = 3.141599
4      INTEGER :: NMI, IJK, ITER, I, J
5      real, dimension(M,M) :: A
6      real, dimension(0:m) :: B,S
7      !
8      WRITE(6,*) 'ECUACIONES DE ENTRADA. '
9      OPEN(2, FILE = '1_datos_esfuerzo.txt')
10     READ(2,*)N,NMI,NAPROX ! Lee datos del archivo de entrada
11     APROX = 10.0**(-NAPROX)
12     !
13     S(0)=0 ! Condición de frontera
14     !
15     ! Lee datos de las matrices
16     DO I = 1,N
17     READ(2,*)(A(I,J), J = 1,N), B(I)
18     WRITE(6,*)(A(I,J), J = 1,N), B(I)
19     END DO
20     CLOSE (2)
21     !
22     DO I = 1,N
23     S(I)=0 ! Primera aproximacion de la solucion
24     END DO
25     !
26     WRITE(6,*) 'RESULTADOS'
27     WRITE(*,*) ! Imprime resultados
28     ! Solución del sistema de ecuaciones
29     DO ITER=1,NMI
30     WRITE(*,*)ITER,(S(J), J = 1,N)
31     IJK = 0
32     DO I = 1,N
33     Y = B(I)
34     DO J = 1,N
35     IF (I.EQ.J) GO TO 3
36     Y = Y - A(I,J)*S(J)
37     3 END DO
38     Y = Y/A(I,I)
39     IF (ABS( (S(I)-Y)/Y ).GT.APROX) IJK = 1

```

```

40         S(I) = Y
41     END DO
42     IF( IJK.EQ.0 ) GO TO 6
43 END DO
44 WRITE(*,*) 'NUMERO DE ITERACIONES: ', NMI
45 6 CONTINUE
46 !
47 ! Guardar resultados para graficar
48 open(3,file='1_resultados_esfuerzo.txt',status='unknown')
49 r = 0.0
50 nd = 10 ! Número de divisiones
51 write(3,*)0,0,s(0) ! T<82>rmino en r=0
52 do i = 1,nd
53     r = r + 0.1
54     theta = 0.0
55     do j = 1,24
56         theta1 = theta*pi/180.0
57         x = r*sin(theta1)
58         Y = r*cos(theta1)
59         write(3,*)x,y,s(i)
60         theta = theta + 15.0
61     end do
62 end do
63 close(3)
64 end program Punto1bEsfuerzo
65

```

- $\tau(0) = 0.0$ • $\tau(3) = 14.7$ • $\tau(6) = 29.4$ • $\tau(9) = 44.1$
- $\tau(1) = 4.9$ • $\tau(4) = 19.6$ • $\tau(7) = 34.3$
- $\tau(2) = 9.8$ • $\tau(5) = 24.5$ • $\tau(8) = 39.2$ • $\tau(10) = 49.0$

En la **Figura 4.1** se puede observar gráficamente el perfil del esfuerzo cortante obtenido para el fluido.

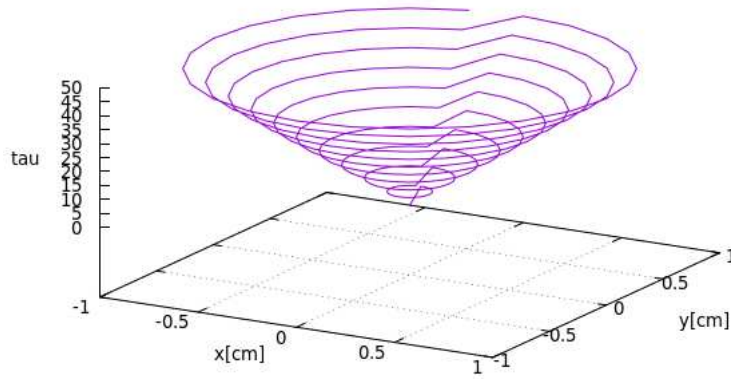


Figura 4.1: Perfil del esfuerzo cortante en el fluido.

Ahora, hallemos los valores y el perfil de la velocidad. Para ello, retomemos la ecuación (4.129).

$$v(i) - v(i - 1) + \Delta r \left(\phi_0 + \phi_1 |\tau_{yx}|^{\alpha-1} \right) \tau(i) = 0$$

Despejando la diferencia de velocidades:

$$v(i) - v(i-1) = -\Delta r \left(\phi_0 + \phi_1 |\tau_{yx}|^{\alpha-1} \right) \tau(i)$$

Reemplazando los datos propuestos en el problema:

$$v(i) - v(i-1) = -\frac{1}{2}\tau(i)$$

$$v(i-1) - v(i) = \frac{1}{2}\tau(i)$$

Esta es la ecuación con la cual hallaremos los valores de la velocidad. Realizando las iteraciones sobre los últimos 10 puntos y reemplazando los valores de esfuerzo cortante:

- $i = 1 \rightarrow v(0) - v(1) = 2.45$
- $i = 2 \rightarrow v(1) - v(2) = 4.9$
- $i = 3 \rightarrow v(2) - v(3) = 7.35$
- $i = 4 \rightarrow v(3) - v(4) = 9.8$
- $i = 5 \rightarrow v(4) - v(5) = 12.25$
- $i = 6 \rightarrow v(5) - v(6) = 14.7$
- $i = 7 \rightarrow v(6) - v(7) = 17.15$
- $i = 8 \rightarrow v(7) - v(8) = 19.6$
- $i = 9 \rightarrow v(8) - v(9) = 22.05$
- $i = 10 \rightarrow v(9) - v(10) = 24.5$

En forma matricial, el sistema se representa como:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v(0) \\ v(1) \\ v(2) \\ v(3) \\ v(4) \\ v(5) \\ v(6) \\ v(7) \\ v(8) \\ v(9) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.45 \\ 4.9 \\ 7.35 \\ 9.8 \\ 12.25 \\ 14.7 \\ 17.15 \\ 19.6 \\ 22.05 \\ 24.5 \end{pmatrix}$$

Al resolver el anterior sistema de ecuaciones en FORTRAN, se obtuvieron los siguientes resultados:

```

1  program Punto1bVelocidad
2  INTEGER, PARAMETER :: M = 11
3  real, parameter :: pi = 3.141599
4  INTEGER :: NMI,IJK,ITER,I,J,NAPROX
5  real, dimension(M,M) :: A
6  REAL, DIMENSION(M) :: B,V
7  !
8  WRITE(6,*) 'ECUACIONES DE ENTRADA '
```

```

9      OPEN(2, FILE = '1_datos_velocidad.txt', STATUS = 'OLD')
10     READ(2,*)N,NMI,NAPROX      ! Lee datos del archivo de entrada
11     APROX=10.0**(-NAPROX)
12     !
13     ! Lee datos de las matrices de entrada
14     DO I = 1,N
15         READ(2,*)(A(I,J), J = 1,N), B(I)
16         WRITE(6,*)(A(I,J), J = 1,N), B(I)
17     END DO
18     CLOSE(2)
19     !
20     DO I = 1,N
21         V(I) = 0.0      ! Primera aproximaci3n de la soluci3n
22     END DO
23     !
24     WRITE(6,*) 'RESULTADOS'
25     WRITE(*,*)
26     ! Soluci3n al sistema de ecuaciones
27     DO ITER = 1,NMI
28         WRITE(*,*)ITER,(V(J), J = 1,N)
29         IJK = 0
30         DO I = 1,N
31             Y = B(I)
32             DO J = 1,N
33                 IF (I.EQ.J) GO TO 3
34                 Y = Y - A(I,J)*V(J)
35             3      END DO
36             Y = Y/A(I,I)
37             IF (ABS( (V(I)-Y)/Y ).GT.APROX) IJK = 1
38             V(I) = Y
39         END DO
40         IF( IJK.EQ.0 ) GO TO 6
41     END DO
42     6      CONTINUE
43     WRITE(*,*) 'NUMERO DE ITERACIONES: ',ITER
44     !
45     ! Guardar resultados para graficar
46     open(3,file='1_resultados_velocidad.txt',status='unknown')
47     r = 0.0
48     nd = 10      ! N3mero de divisiones
49     V(11)=0.0    ! Velocidad en el borde del tubo
50     write(3,*)0,0,V(1)      ! Guarda velocidad en r=0
51     do i = 2,nd+1
52         r = r + 0.1
53         theta = 0.0
54         do j = 1,24
55             theta1 = theta*pi/180.0
56             x = r*sin(theta1)
57             Y = r*cos(theta1)
58             write(3,*)x,y,V(i)
59             theta = theta + 15.0
60         end do
61     end do
62     close(3)
63     end program Punto1bVelocidad

```

- $v(0) = 134.3$ • $v(3) = 119.6$ • $v(6) = 82.85$ • $v(9) = 24.05$
- $v(1) = 131.85$ • $v(4) = 109.8$ • $v(7) = 65.7$
- $v(2) = 126.95$ • $v(5) = 97.55$ • $v(8) = 46.1$ • $v(10) = 0.0$

En la **Figura 4.2** se puede observar gráficamente el perfil de la velocidad obtenido para el fluido.

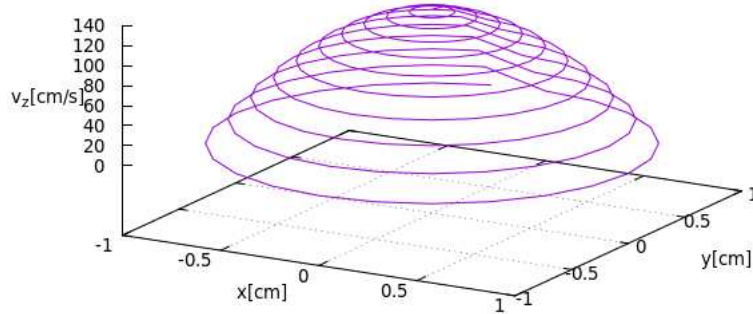
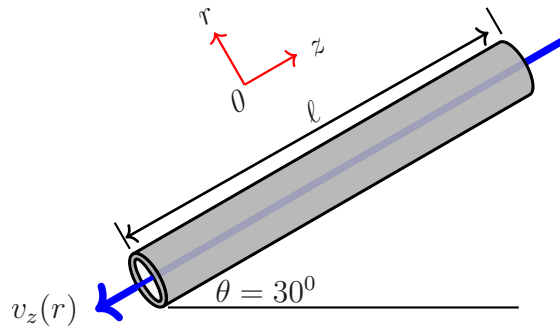


Figura 4.2: Perfil de velocidad en el fluido.

Problema 4.7 La Figura muestra un flujo en un tubo de longitud ℓ y radio R . El tubo se encuentra inclinado 30° con respecto a la horizontal.



Considere que la viscosidad varía de acuerdo a la siguiente expresión:

$$\mu(r) = \mu_0 e^{-\alpha \frac{r}{R}} \quad (4.132)$$

- Obtenga la ecuación del perfil de velocidad en forma analítica.
- A partir de la ecuación diferencial que rige el movimiento del fluido en el tubo, use el método de diferencias finitas para obtener las ecuaciones a programar.
- Construya un código en Fortran para obtener el perfil de velocidad, gráfiquelo u compare los resultados con los de la solución analítica.

Solución.

Usando de la ecuación de movimiento de un fluido:

$$\rho \mathbf{g} - \nabla P + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) + \frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{v})$$

Esta ecuación, en coordenadas cilíndricas, se divide en tres ecuaciones diferentes, una para cada componente.

- Componente en r :

$$\rho g_r - \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r \tau_{rr})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} = v_r \frac{\partial (\rho v_r)}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial (\rho v_r)}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial (\rho v_r)}{\partial z} + \frac{\partial (\rho v_r)}{\partial t}$$

- Componente en θ :

$$\rho g_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 \tau_{r\theta})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} = v_r \frac{\partial (\rho v_\theta)}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial (\rho v_\theta)}{\partial \theta} - \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial (\rho v_\theta)}{\partial z} + \frac{\partial (\rho v_\theta)}{\partial t}$$

- Componente en z :

$$\rho g_z - \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r \tau_{rz})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} = v_r \frac{\partial (\rho v_z)}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial (\rho v_z)}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial (\rho v_z)}{\partial z} + \frac{\partial (\rho v_z)}{\partial t}$$

En el caso del problema, teniendo en cuenta que el fluido se desplaza en la dirección z , la componente de interés de la ecuación de movimiento es la correspondiente a esta dirección. Se asumirá que se cumplen las siguientes condiciones:

- El fluido solamente se mueve en dirección del eje z .

$$v_r = 0; v_\theta = 0 \quad .$$

- El fluido no se acelera.

$$\frac{\partial (\rho v_z)}{\partial t} = 0; v_z \frac{\partial (\rho v_z)}{\partial z} = 0 \quad .$$

- Las fuerzas viscosas solamente actúan en torno al plano rz .

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} = 0; \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} = 0 \quad .$$

Teniendo en cuenta estas condiciones, la ecuación de movimiento para la componente en z simplificada queda de la forma:

$$\rho g_z - \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r \tau_{rz})}{\partial r} = 0 \quad .$$

Reorganizando y teniendo en cuenta el sentido y la dirección de la influencia gravitacional,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (r\tau_{rz})}{\partial r} = \rho g \sin 30^\circ + \frac{\partial P}{\partial z} \quad .$$

Integremos a ambos lados:

$$\int \frac{\partial (r\tau_{rz})}{\partial r} dr = \left(\frac{\rho g}{2} + \frac{\partial P}{\partial z} \right) \int r dr \quad \rightarrow \quad r\tau_{rz} = \left(\frac{\rho g}{4} + \frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial z} \right) r^2 + c_1 \quad .$$

El esfuerzo cortante en torno al plano rz se relaciona con la velocidad de movimiento del fluido mediante la siguiente expresión:

$$\tau_{rz} = -\mu \frac{\partial v_z}{\partial r} \quad .$$

Reemplazando esta expresión en el desarrollo anterior,

$$-r\mu \frac{\partial v_z}{\partial r} = \left(\frac{\rho g}{4} + \frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial z} \right) r^2 + c_1 \quad .$$

Haciendo uso de la ecuación (??),

$$-r\mu_0 e^{-\alpha \frac{r}{R}} \frac{\partial v_z}{\partial r} = \left(\frac{\rho g}{4} + \frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial z} \right) r^2 + c_1 \quad .$$

Despejando la derivada y discretizando el gradiente de presión,

$$\frac{\partial v_z}{\partial r} = - \left(\frac{\rho g}{4\mu_0} + \frac{\Delta P}{2\mu_0 \ell} \right) r e^{\alpha \frac{r}{R}} + \frac{c_1}{r\mu_0} e^{\alpha \frac{r}{R}} \quad .$$

Para hallar la constante c_1 , hagamos uso de las condiciones de frontera del problema, dadas por:

$$v_z(r) \Big|_{r=R} = 0 \quad , \quad \frac{\partial v_z}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0 \quad . \quad (4.133)$$

Haciendo uso de la segunda condición de frontera en el desarrollo anterior, tenemos que $c_1 = 0$. Por lo tanto, la expresión queda,

$$\frac{\partial v_z}{\partial r} = - \left(\frac{\rho g}{4\mu_0} + \frac{\Delta P}{2\mu_0 \ell} \right) r e^{\alpha \frac{r}{R}} \quad . \quad (4.134)$$

Integrando a ambos lados nuevamente:

$$\begin{aligned} \int \frac{\partial v_z}{\partial r} dr &= - \left(\frac{\rho g}{4\mu_0} + \frac{\Delta P}{2\mu_0 \ell} \right) \int r e^{\alpha \frac{r}{R}} dr \quad , \\ v_z &= - \left(\frac{\rho g}{4\mu_0} + \frac{\Delta P}{2\mu_0 \ell} \right) \left(\frac{R}{\alpha} r e^{\alpha \frac{r}{R}} - \frac{R^2}{\alpha^2} e^{\alpha \frac{r}{R}} + c_2 \right) \quad . \end{aligned}$$

Para hallar la constante c_2 , hagamos uso de la primera condición de frontera:

$$0 = - \left(\frac{\rho g}{4\mu_0} + \frac{\Delta P}{2\mu_0 \ell} \right) \left(\frac{R^2}{\alpha} e^\alpha - \frac{R^2}{\alpha^2} e^\alpha + c_2 \right) \rightarrow c_2 = \frac{R^2}{\alpha^2} e^\alpha (1 - \alpha) \quad .$$

Reemplazando el valor de la constante,

$$v_z = - \left(\frac{\rho g}{4\mu_0} + \frac{\Delta P}{2\mu_0 \ell} \right) \left[\frac{R}{\alpha} r e^{\alpha \frac{r}{R}} - \frac{R^2}{\alpha^2} e^{\alpha \frac{r}{R}} + \frac{R^2}{\alpha^2} e^\alpha (1 - \alpha) \right] \quad .$$

Finalmente, el perfil de velocidad del fluido está dado por:

$$\therefore v_z = - \left(\frac{\rho g}{4\mu_0} + \frac{\Delta P}{2\mu_0 \ell} \right) \frac{R}{\alpha} \left[e^{\alpha \frac{r}{R}} \left(r - \frac{R}{\alpha} \right) + \frac{R}{\alpha} e^\alpha (1 - \alpha) \right] \quad . \quad (4.135)$$

según la ecuación (4.134):

$$\frac{\partial v_z}{\partial r} = - \left(\frac{\rho g}{4\mu_0} + \frac{\Delta P}{2\mu_0 \ell} \right) r e^{\alpha \frac{r}{R}} \quad .$$

- Cuando $r = 0$, la ecuación (4.134) presenta la siguiente indeterminación:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{\partial v_z}{\partial r}}{r} \right) \rightarrow \frac{0}{0} \quad .$$

Aplicando la regla de L'Hopital a la anterior indeterminación,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) = \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} \quad .$$

Por lo tanto, la ecuación queda así:

$$\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} = - \left(\frac{\rho g}{4\mu_0} + \frac{\Delta P}{2\mu_0 \ell} \right) e^{\alpha \frac{r}{R}} \quad .$$

Discretizando esta ecuación por el método de diferencias finitas,

$$\frac{v(i+1) - 2v(i) + v(i-1))}{(\Delta r)^2} = - \left(\frac{\rho g}{4\mu_0} + \frac{\Delta P}{2\mu_0 \ell} \right) e^{\alpha \frac{i\Delta r}{R}} \quad ,$$

$$v(i+1) - 2v(i) + v(i-1)) = -Bb^i \quad ,$$

$$\text{donde } B = \left(\frac{\rho g}{4\mu_0} + \frac{\Delta P}{2\mu_0 \ell} \right) (\Delta r)^2 \quad , \quad b = e^{\alpha \frac{\Delta r}{R}} \quad .$$

Como el caso sólo es relevante para $r = 0$, el nodo que nos interesa corresponde a $i = 0$. Así,

$$v(1) - 2v(0) + v(-1) = -B \quad .$$

Discretizando la segunda condición de frontera, ecuación (4.133):

$$\frac{v(i+1) - v(i-1)}{2\Delta r} = 0 \quad \rightarrow \quad v(1) = v(-1) \quad , \quad \text{para } i = 0 \quad .$$

Reemplazando este resultado en el desarrollo previo,

$$2v(1) - 2v(0) = -B \quad .$$

Finalmente,

$$\therefore \quad v(0) - v(1) = \frac{B}{2} \quad , \quad \text{para } i = 0 \quad .$$

- Para el caso $r \neq 0$, basta con discretizar la ecuación (4.134) por diferencias finitas:

$$\frac{v(i+1) - v(i)}{\Delta r} = - \left(\frac{\rho g}{4\mu_0} + \frac{\Delta P}{2\mu_0 \ell} \right) i \Delta r e^{\alpha \frac{i\Delta r}{R}} \quad .$$

Siguiendo la convención de constantes definida en el caso anterior,

$$v(i+1) - v(i) = -B i b^i \quad .$$

Reorganizando, tenemos la ecuación final:

$$\therefore \quad v(i) - v(i+1) = i b^i B \quad , \quad \text{para } i \neq 0 \quad .$$

Para hallar numéricamente el perfil de velocidad se realizó un mallado de 11 puntos a lo largo del radio del tubo. Las condiciones del fluido propuestas son:

- | | | |
|----------------------|---|-----------------------------|
| • $\alpha = 0.1$ | • $\Delta P = 1960 \text{ g/cm} \cdot \text{s}^2$ | • $\mu_0 = 10 \text{ cp}$ |
| • $v(10) = 0$ | • $\Delta r = 0.1 \text{ cm}$ | • $\rho = 1 \text{ g/cm}^3$ |
| • $R = 1 \text{ cm}$ | • $\ell = 20 \text{ cm}$ | • $g = 981 \text{ cm/s}^2$ |

Las ecuaciones a programar son:

$$v(0) - v(1) = \frac{B}{2} \quad , \quad \text{para } i = 0 \quad ,$$

$$v(i) - v(i+1) = i b^i B \quad , \quad \text{para } i \neq 0 \quad .$$

Realizando las iteraciones sobre los primeros 10 puntos y calculando B y b :

- $i = 1 \rightarrow v(0) - v(1) = 14.7125$
- $i = 2 \rightarrow v(1) - v(2) = 29.7207$
- $i = 3 \rightarrow v(2) - v(3) = 60.0388$
- $i = 4 \rightarrow v(3) - v(4) = 90.9634$
- $i = 5 \rightarrow v(4) - v(5) = 122.5034$
- $i = 6 \rightarrow v(5) - v(6) = 154.6683$
- $i = 7 \rightarrow v(6) - v(7) = 187.4672$
- $i = 8 \rightarrow v(7) - v(8) = 220.9099$
- $i = 9 \rightarrow v(8) - v(9) = 255.0058$
- $i = 10 \rightarrow v(9) - v(10) = 289.7647$

En forma matricial, el sistema se representa como:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v(0) \\ v(1) \\ v(2) \\ v(3) \\ v(4) \\ v(5) \\ v(6) \\ v(7) \\ v(8) \\ v(9) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14.7125 \\ 29.7207 \\ 60.0388 \\ 90.9634 \\ 122.5034 \\ 154.6683 \\ 187.4672 \\ 220.9099 \\ 255.0058 \\ 289.7647 \end{pmatrix}$$

Al resolver el anterior sistema de ecuaciones en FORTRAN, se obtuvieron los siguientes resultados:

- $v(0) = 1425.7548$
- $v(1) = 1411.0422$
- $v(2) = 1381.3215$
- $v(3) = 1321.2827$
- $v(4) = 1230.3193$
- $v(5) = 1107.8159$
- $v(6) = 953.1476$
- $v(7) = 765.6804$
- $v(8) = 544.7705$
- $v(9) = 289.7647$
- $v(10) = 0.0$

4.5 Ecuación de Navier-Stokes

A las componentes x , y y z de la ecuación de movimiento, ecuaciones (4.22), (4.23) y (4.24) se les reemplaza los tensores de viscosidad τ_{ij} , $i, j = x, y, z$, los cuales son obtenidos por la expresión,

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \kappa (\nabla \cdot \mathbf{v}) \delta_{ij} \quad (4.136)$$

Asumiendo que el volumen de control se conserva, es decir se cumple la relación $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, las componentes τ_{ij} a reemplazar en la componente x , ecuación (4.22), son:

$$\tau_{xx} = 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} \quad (4.137)$$

$$\tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \quad (4.138)$$

$$\tau_{zx} = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \quad (4.139)$$

reemplazando en la componente x de la ecuación de movimiento, ecuación (4.22),

$$\begin{aligned} \sum_i \rho_i g_{ix} - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y v_x) + \\ &\quad \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z v_x) + \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_x) \end{aligned} \quad (4.140)$$

se obtiene:

$$\begin{aligned} \sum_i \rho_i g_{ix} - \frac{\partial P}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \\ = \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y v_x) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z v_x) + \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_x) \end{aligned} \quad (4.141)$$

donde se ha asumido que μ es constante. Realizando las operaciones indicadas y suponiendo que la densidad es constante, se obtiene:

$$\begin{aligned} \sum_i \rho_i g_{ix} - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left[\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right] + \mu \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] \\ = \rho \left[\frac{\partial}{\partial x}(v_x v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(v_y v_x) + \frac{\partial}{\partial z}(v_z v_x) \right] + \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} \end{aligned} \quad (4.142)$$

realizando las derivadas $\frac{\partial}{\partial x}(v_x v_x)$, $\frac{\partial}{\partial y}(v_y v_x)$ y $\frac{\partial}{\partial z}(v_z v_x)$, se obtiene,

$$\begin{aligned} \sum_i \rho_i g_{ix} - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left[\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right] + \mu \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] \\ = \rho \left[\left(\mathbf{v} \cdot \nabla \right) v_x + v_x \left(\nabla \cdot \mathbf{v} \right) \right] + \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} \end{aligned} \quad (4.143)$$

$$\begin{aligned}
\sum_i \rho_i g_{ix} - \frac{\partial P}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 v_y}{\partial y \partial x} + \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} + \mu \frac{\partial^2 v_z}{\partial z \partial x} \\
= \rho \left[\left(\mathbf{v} \cdot \nabla \right) v_x + v_x \left(\nabla \cdot \mathbf{v} \right) \right] + \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} \quad (4.144)
\end{aligned}$$

agrupando términos e identificando un gradiente,

$$\begin{aligned}
\sum_i \rho_i g_{ix} - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left[\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right] + \mu \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] \\
= \rho \left[\left(\mathbf{v} \cdot \nabla \right) v_x + v_x \left(\nabla \cdot \mathbf{v} \right) \right] + \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} \quad (4.145)
\end{aligned}$$

identificando un laplaciano y un gradiente,

$$\begin{aligned}
\sum_i \rho_i g_{ix} - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \nabla^2 v_x + \mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\nabla \cdot \mathbf{v} \right) \\
= \rho \left[\left(\mathbf{v} \cdot \nabla \right) v_x + v_x \left(\nabla \cdot \mathbf{v} \right) \right] + \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} \quad (4.146)
\end{aligned}$$

como existe conservación del volumen, $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, aunque existan distorsiones lineales y angulares, se obtiene la componente en la dirección x :

$$\sum_i \rho_i g_{ix} - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \nabla^2 v_x = \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} + \rho \left(\mathbf{v} \cdot \nabla \right) v_x \quad (4.147)$$

Para las direcciones y y z , se realiza el mismo procedimiento, obteniéndose las siguientes ecuaciones:

$$\sum_i \rho_i g_{iy} - \frac{\partial P}{\partial y} + \mu \nabla^2 v_y = \rho \frac{\partial v_y}{\partial t} + \rho \left(\mathbf{v} \cdot \nabla \right) v_y \quad (4.148)$$

y

$$\sum_i \rho_i g_{iz} - \frac{\partial P}{\partial z} + \mu \nabla^2 v_z = \rho \frac{\partial v_z}{\partial t} + \rho \left(\mathbf{v} \cdot \nabla \right) v_z \quad (4.149)$$

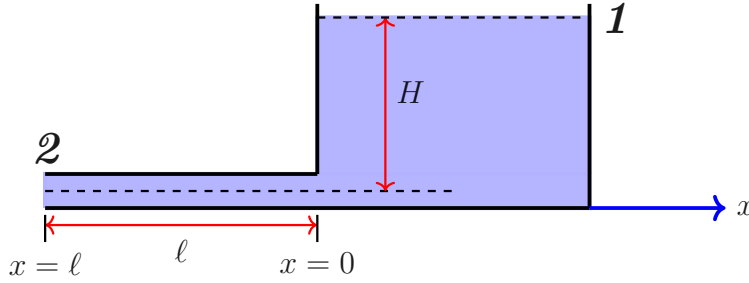
Ahora, con las componentes dadas por las ecuaciones (4.147), (4.148) y (4.149), se obtiene la forma vectorial,

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla P + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \rho \mathbf{g} \quad (4.150)$$

La ecuación (4.150) es conocida como la ecuación de Navier-Stokes, y de acuerdo con las restricciones que se han realizado, ésta ecuación se aplica a:

- Fluidos con densidad constante ($\rho = \text{constante}$).
- Fluidos con viscosidad constante ($\mu = \text{constante}$).
- Fluidos en donde se conserva el volumen ($\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$).

Problema 4.8 *Un tanque de grandes dimensiones se vacía usando una tubería delgada y de longitud ℓ como lo muestra la Figura.*



Use la ecuación de Navier-Stokes para demostrar que la velocidad del agua a la salida de la tubería, punto 2 de la Figura, en función del tiempo se puede aproximar a:

$$v_2 \approx \sqrt{2gH} \tanh \left(\frac{\sqrt{2gH}}{2\ell} t \right) \quad (4.151)$$

Considere que la sección del tanque es muy grande comparada con la sección de la tubería, el flujo del interior de la tubería es uniforme y considere la componente de la gravedad g_x como $g_x = -\nabla(gz)$.

Solución:

La componente en la dirección x de la ecuación de Navier-Stokes es:

$$\rho g_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \nabla^2 v_x = \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) v_x \quad (4.152)$$

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} + \rho \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x + \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) \quad (4.153)$$

como $\mu = 0$, $v_y = 0$ y $v_z = 0$, se obtiene:

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} + \rho v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x \quad (4.154)$$

haciendo,

$$g_x = -\nabla(gz) \rightarrow g_x = -g \frac{\partial z}{\partial x} \quad (4.155)$$

se tiene:

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} + \rho v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial x} - \rho g \frac{\partial z}{\partial x} \quad (4.156)$$

se observa que todas las funciones dependen de una sola variable,

$$\rho \frac{dv_x}{dt} + \rho v_x \frac{dv_x}{dx} = -\frac{dP}{dx} - \rho g \frac{dz}{dx} \quad (4.157)$$

multiplicando por dx , en ambos lados,

$$\frac{dv_x}{dt} dx + v_x dv_x = -\frac{1}{\rho} dP - g dz \quad (4.158)$$

integrando desde el punto 1 al punto 2 (ver Figura),

$$\int_1^2 \frac{dv_x}{dt} dx + \int_1^2 v_x dv_x = -\int_1^2 \frac{1}{\rho} dP - g \int_1^2 dz \quad (4.159)$$

$$\int_1^2 \frac{dv_x}{dt} dx + \frac{v_x^2(2) - v_x^2(1)}{2} = \frac{P_1 - P_2}{\rho} + g(z_2 - z_1) \quad (4.160)$$

como el depósito es muy grande, solo aparecerá la variación de la velocidad en la dirección x y $P_1 \approx P_2$ y $\frac{dv_x}{dt} \approx \frac{dv_x(2)}{dt}$, entonces:

$$\frac{dv_x(2)}{dt} \int_1^2 dx + \frac{v_x^2(2)}{2} = g(z_2 - z_1) \quad (4.161)$$

$$\frac{dv_x(2)}{dt} L + \frac{v_x^2(2)}{2} = g(z_2 - z_1) \quad (4.162)$$

como $H = z_2 - z_1$

$$\frac{dv_x(2)}{dt} L = gH - \frac{v_x^2(2)}{2} \rightarrow \frac{dv_x(2)}{dt} = \frac{2gH - v_x^2(2)}{2L} \quad (4.163)$$

despejando dt ,

$$\frac{dt}{2L} = \frac{dv_x(2)}{2gH - v_x^2(2)} \quad (4.164)$$

integrando,

$$\frac{1}{2L} \int_0^t dt = \int_0^{v_f} \frac{dv_x(2)}{2gH - v_x^2(2)} \quad (4.165)$$

resolviendo la integral,

$$\int_0^{v_f} \frac{dv_x(2)}{2gH - v_x^2(2)} = \frac{1}{\sqrt{2gH}} \int \frac{1}{1 - x^2} dx \quad \text{con} \quad x \equiv \frac{v_x}{\sqrt{2gH}} \quad (4.166)$$

$$\frac{t}{2L} = \frac{1}{\sqrt{2gH}} \arctang\left(\frac{v_x(2)}{\sqrt{2gH}}\right) \quad (4.167)$$

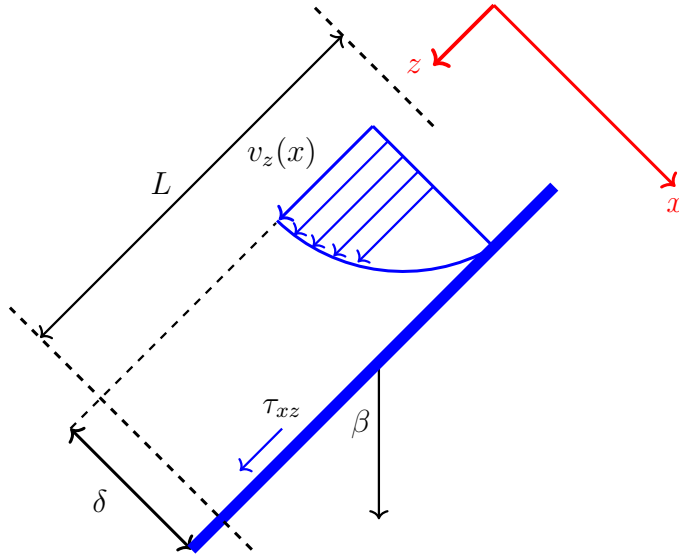
despejando la velocidad,

$$\frac{v_x(2)}{\sqrt{2gH}} \approx \tanh\left(\frac{\sqrt{2gH}}{2L} t\right) \quad (4.168)$$

es decir,

$$v_x(2) \approx \sqrt{2gH} \tanh\left(\frac{\sqrt{2gH}}{2L} t\right) \quad (4.169)$$

Problema 4.9 Considere un fluido sobre una lámina inclinada de longitud L , como lo muestra la Figura,



Obtenga los perfiles de velocidad v_z , el esfuerzo de corte τ_{xz} y una expresión para estimar la fuerza entre el fluido y la lámina. Asuma: La presión en dirección del eje z no varía, estado estacionario y un fluido con propiedades físicas constantes ($\rho = \text{constante}$ y $\mu = \text{constante}$).

Solución

Tomando la ecuación de continuidad (??) y la ecuación de conservación del momentum o ecuación de Navier-Stokes (4.150),

- La ecuación de continuidad es:

$$-\frac{\partial}{\partial t}\rho = \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) \quad (4.170)$$

Ahora, según las restricciones:

La densidad del fluido es constante y está en estado estacionario,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad \rightarrow \quad \rho \text{ es constante.} \quad (4.171)$$

el fluido solo tiene componente en la coordenada z ,

$$v_x = v_y = 0, \quad v_z \neq 0, \quad (4.172)$$

asi que la ecuación de continuidad se reduce a la expresión:

$$\frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0 \quad (4.173)$$

es decir,

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (4.174)$$

- La ecuación de conservación del momentum o ecuación de Navier-Stokes. De la componente (4.147),

$$\sum_i \rho_i g_{ix} - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \nabla^2 v_x = \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) v_x \quad (4.175)$$

como $v_x = 0$, entonces, solo es diferente de cero una componente de la gravedad g_x y una componente de la fuerza que realiza la presión en la dirección x , ver Figura los vectores.

$$\rho g_x - \frac{\partial P}{\partial x} = 0, \quad \rightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial x} = \rho g \sin \beta \quad (4.176)$$

No existe componente en y . El fluido está ubicado en el plano xz . La componente z , ecuación (4.149),

$$\rho g_z - \frac{\partial P}{\partial z} + \mu \nabla^2 v_z = \rho \frac{\partial v_z}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) v_z \quad (4.177)$$

teniendo en cuenta que es un estado estacionario, $\frac{\partial v_z}{\partial t} = 0$, esta componente queda de la forma:

$$\rho g_z - \frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) = \rho \left(v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \quad (4.178)$$

Ahora, como la velocidad del fluido $v_z(x)$ solo depende de la coordenada x , ver Figura, la presión del fluido en la dirección del eje z no varía y teniendo en cuenta el resultado de la ecuación de continuidad, ecuación (4.174). Entonces, se tiene:

$$\rho g_z + \mu \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} = 0 \quad (4.179)$$

es decir,

$$\mu \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} = -\rho g \cos \beta \quad (4.180)$$

integrando ésta ecuación,

$$d \left(\frac{dv_z}{dx} \right) = -\frac{\rho g}{\mu} \cos \beta \, dx \quad (4.181)$$

se obtiene

$$\frac{dv_z}{dx} = -\frac{\rho g}{\mu} x \cos \beta + C_1 \quad (4.182)$$

donde C_1 es una constnte de integración. Integrando por segunda vez,

$$v_z(x) = -\frac{\rho g}{2\mu} x^2 \cos \beta + C_1 x + C_2 \quad (4.183)$$

aplicando la condición de frontera: $\left. \frac{dv_z}{dx} \right|_{x=0} = 0$,

$$\left. \frac{dv_z}{dx} \right|_{x=0} = -\frac{\rho g}{2\mu} (2x) \cos \beta + C_1 \Big|_{x=0} = 0 \quad (4.184)$$

se obtiene que $C_1 = 0$, quedando la ecuación,

$$v_z(x) = -\frac{\rho g}{2\mu} x^2 \cos \beta + C_2 \quad (4.185)$$

Ahora, aplicando la condición de frontera: $v_z(x = \delta) = 0$,

$$v_z(x = \delta) = -\frac{\rho g}{2\mu} \delta^2 \cos \beta + C_2 = 0 \quad (4.186)$$

es decir,

$$C_2 = \frac{\rho g}{2\mu} \delta^2 \cos \beta \quad (4.187)$$

reemplazando el (4.185)

$$v_z(x) = -\frac{\rho g}{2\mu} x^2 \cos \beta + \frac{\rho g}{2\mu} \delta^2 \cos \beta \quad (4.188)$$

organizando, se obtiene el perfil de velocidad del fluido:

$$v_z(x) = \frac{\rho g}{2\mu} (\delta^2 - x^2) \cos \beta \quad (4.189)$$

Se observa que el perfil de velocidad es parabólico con una velocidad decreciente cuando se va incrementando la viscosidad. Usando éste perfil de velocidad, se puede calcular el esfuerzo laminar del fluido. Como,

$$\tau_{xz} = -\mu \frac{dv_z(x)}{dx} \quad (4.190)$$

entonces, derivando el perfil de velocidad v_z ,

$$\tau_{xz} = -\mu \left(\frac{\rho g}{2\mu} (-2x) \cos \beta \right) \quad (4.191)$$

cancelando términos, se obtiene:

$$\tau_{xz} = \rho g x \cos \beta \quad (4.192)$$

Este esfuerzo cortante presenta una distribución de los momentos en forma lineal. Ahora, la fuerza que el fluido impone sobre la lámina, debido al esfuerzo cortante entre el fluido y la superficie de la lámina es:

$$F = A \tau_{xz}(x = \delta) \quad (4.193)$$

donde A es el área perpendicular a la dirección del fluido. Reemplazando τ_{xz} ,

$$F = A \rho g x \cos \beta \quad (4.194)$$

resultado que es independiente de la viscosidad del fluido.

Problema 4.10 Partiendo de la ecuación (4.179):

$$\rho g_z + \mu \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} = 0 \quad (4.195)$$

y usando el método de diferencias finitas obtenga las ecuaciones y calcule el perfil de velocidad del fluido que fluye sobre la lámina inclinada del problema 4.9. Las condiciones de frontera estan dadas por las siguientes ecuaciones:

$$1. \quad \left. \frac{dv_z}{dx} \right|_{x=0} = 0 \quad (4.196)$$

$$2. \quad v_z(x = \delta) = 0 \quad (4.197)$$

Problema 4.11 Dos cilindros concéntricos de longitud ℓ , con radios R_{ext} y R_{int} , son separados por una película de aceite de viscosidad μ y densidad constante. El cilindro interior gira con una velocidad angular ω_{int} en sentido horario, mientras que el cilindro exterior gira con una velocidad angular ω_{ext} en sentido antihorario. Suponga estado estacionario.

Solución

Las condiciones de frontera son:

$$1. \text{ En } r = R_{int} \rightarrow v_\theta = -\omega_{int} R_{int}$$

$$2. \text{ En } r = R_{ext} \rightarrow v_\theta = \omega_{ext} R_{ext}$$

La ecuación de continuidad en coordenadas cilíndricas, ecuación (2.143):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho r v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0 \quad (4.198)$$

como solamente existe velocidad en la dirección angular, v_θ ,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(\rho v_\theta)}{\partial \theta} = 0 \rightarrow \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0 \quad (4.199)$$

resultado que indica que la velocidad solo varía con respecto a r . Como el movimiento del fluido solo es en la dirección angular θ , se toma la componente angular de la ecuación de Navier-Stokes en coordenadas cilíndricas:

$$\begin{aligned} \rho \left[\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{v_\theta v_r}{r} \right] &= -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \rho g_\theta + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right] \end{aligned} \quad (4.200)$$

como:

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} = \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = \frac{\partial v_\theta}{\partial z} = 0 \quad (4.201)$$

$$\rho \left[v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta v_r}{r} \right] = -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \rho g_\theta + \mu \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_\theta) \right) \quad (4.202)$$

y como $v_r = 0$ y como no existen fuerzas de presión y de gravedad en la dirección θ son cero,

$$\mu \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_\theta) \right) = 0 \rightarrow \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_\theta) \right) = 0 \quad (4.203)$$

integrando,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_\theta) = c_1 \rightarrow \frac{d(rv_\theta)}{dr} = c_1 r \quad (4.204)$$

integrando,

$$rv_\theta = \frac{c_1}{2} r^2 + c_2 \rightarrow v_\theta = \frac{c_1}{2} r + \frac{c_2}{r} \quad (4.205)$$

aplicando las condiciones de frontera, ecuación (2),

$$v_\theta(r = R_{int}) = \frac{R_{int}}{2} c_1 + \frac{c_2}{R_{int}} = -\omega_{int} R_{int} \quad (4.206)$$

$$v_\theta(r = R_{ext}) = \frac{R_{ext}}{2} c_1 + \frac{c_2}{R_{ext}} = \omega_{ext} R_{ext} \quad (4.207)$$

resolviendo éstas ecuaciones se obtiene la velocidad v_θ ,

$$v_\theta(r) = \frac{2(\omega_{int} R_{int}^2 + \omega_{ext} R_{ext}^2)}{R_{ext}^2 - R_{int}^2} \frac{r}{2} + \frac{R_{ext}^2}{r} \left(\omega_{ext} - \frac{(\omega_{int} R_{int}^2 + \omega_{ext} R_{ext}^2)}{R_{ext}^2 - R_{int}^2} \right) \quad (4.208)$$

Los esfuerzos cortantes:

$$\tau_{r\theta} = \mu r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) \Big|_{r=R_{ext}} \quad (4.209)$$

reemplazando la velocidad v_θ , ecuación (4.205)

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) = -2 \frac{c_2}{r^3} \quad (4.210)$$

entonces,

$$\tau_{r\theta} = -\frac{2\mu c_2}{r^2} \Big|_{r=R_{ext}} \rightarrow \tau_{r\theta} = -\frac{2\mu}{R_{ext}^2} c_2 \quad (4.211)$$

y el torque es:

$$T_{ext} = 2\pi R_{ext} \ell \tau_{r\theta} \Big|_{r=R_{ext}} \quad (4.212)$$

$$T_{ext} = \frac{2\pi \ell \mu}{R_{ext}} c_2 \quad (4.213)$$

reemplazando c_2 ,

$$T_{ext} = 2\pi \ell \mu R_{ext} \left[\omega_{ext} - \frac{(\omega_{int} R_{int}^2 + \omega_{ext} R_{ext}^2)}{R_{ext}^2 - R_{int}^2} \right] \quad (4.214)$$

4.6 Rotación debido a las viscosidad

A partir de la ecuación de Navier-Stokes, se puede observar que la viscosidad del fluido es la responsable de las rotaciones o deformaciones angulares de dicho fluido. Retomando la ecuación (4.150),

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla P + \rho \mathbf{g} + \mu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (4.215)$$

el término que es dependiente de la viscosidad y usando la identidad vectorial,

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C} \quad (4.216)$$

con $\mathbf{A} = \nabla$, $\mathbf{B} = \nabla$ y $\mathbf{C} = \mathbf{v}$, se obtiene:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - (\nabla \cdot \nabla) \mathbf{v} \quad (4.217)$$

como $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$,

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) = -\nabla^2 \mathbf{v} \quad (4.218)$$

reemplazando,

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla P + \rho \mathbf{g} - \mu \nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) \quad (4.219)$$

como la velocidad angular es dada por la expresión $2\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}$, se obtiene,

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla P + \rho \mathbf{g} - 2\mu \nabla \times \boldsymbol{\omega} \quad (4.220)$$

observándose la parte rotacional $\nabla \times \boldsymbol{\omega}$ del fluido debido a las fuerzas viscosas.

4.7 Ecuación de Euler-Bernoulli

Sí en el fluido no existen las fuerzas viscosas, la ecuación de Navier-Stokes,

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla P + \rho \mathbf{g} + \mu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (4.221)$$

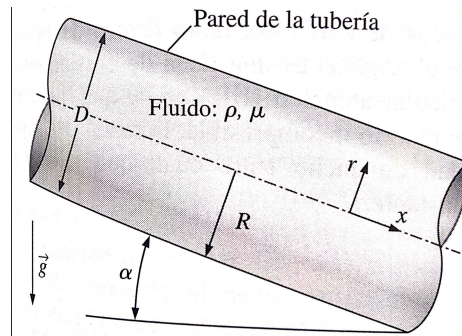
se reduce a la ecuación,

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla P + \rho \mathbf{g} \quad (4.222)$$

conocida como la ecuación de Euler-Bernoulli, donde la viscosidad es cero $\mu = 0$.

4.8 Ejercicios resueltos para analizar

1. Considere flujo laminar incompresible de un fluido newtoniano en una tubería redonda de longitud infinita y diámetro D o radio $R = D/2$ inclinado un ángulo α (ver Figura). No hay gradiente de presión aplicado $\left(\frac{\partial P}{\partial x} = 0\right)$. En vez de ello, el fluido fluye por tubería debido sólo a la gravedad. Se adopta el sistema coordinado que se muestra, con x como el eje de la tubería. Deduzca una expresión para la componente x de velocidad u como función del radio r y los otros parámetros del problema. Calcule la razón de flujo volumétrico y la velocidad axial promedio de la tubería.



Solución

Se realizan las siguientes suposiciones:

- Como la tubería es infinitamente larga en x , la componente x de velocidad no depende de x .
- El flujo solo tiene componente en x , por lo que $v_r = 0$ y $v_\phi = 0$.
- El problema tiene simetría axial, por lo que $\partial v / \partial \phi = 0$.
- El flujo en las paredes es cero.

Puede observarse que:

$$g_x = g \sin(\alpha) \quad (4.223)$$

Se parte de la ecuación de continuidad.

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (4.224)$$

En coordenadas cilíndricas:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \quad (4.225)$$

Al aplicar las suposiciones sobre v_r y v_ϕ :

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \quad \rightarrow \quad v_x = v_x(r) \quad (4.226)$$

Luego se toma la ecuación de Navier-Stokes.

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\nabla P + \rho g + \mu \nabla^2 v \quad (4.227)$$

Reescribiendo esta ecuación en coordenadas cilíndricas para la componente x se obtiene:

$$\rho \left[\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_x}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial v_x}{\partial \phi} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} \right] = -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_x}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_x}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \right] \quad (4.228)$$

de la ecuación (4.226),

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial v_x}{\partial \phi} = 0, \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v_x}{\partial \phi^2} = 0 \quad (4.229)$$

la ecuación se reduce a:

$$\rho v_r \frac{\partial v_x}{\partial r} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x + \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_x}{\partial r} \right) \quad (4.230)$$

y como $v_r = 0$ y el gradiente de presión $\frac{\partial P}{\partial x} = 0$, el resultado de la ecuación de continuidad, y reemplazando la componente x de la gravedad:

$$0 = \rho g \sin(\alpha) + \frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_x}{\partial r} \right) \quad (4.231)$$

separando variables,

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_x}{\partial r} \right) = -\frac{r \rho g \sin(\alpha)}{\mu} \quad (4.232)$$

Al resolver la ecuación diferencial,

$$r \frac{\partial v_x}{\partial r} = -\frac{r^2 \rho g \operatorname{sen}(\alpha)}{2\mu} + C_1 \quad (4.233)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial r} = -\frac{r \rho g \operatorname{sen}(\alpha)}{2\mu} + \frac{C_1}{r} \quad (4.234)$$

de nuevo, integrando se obtiene el perfil de velocidad:

$$v_x(r) = -\frac{r^2 \rho g \operatorname{sen}(\alpha)}{4\mu} + C_1 \ln r + C_2 \quad (4.235)$$

Para hallar la solución particular, deben aplicarse las condiciones de frontera. Se observa que $c_1 = 0$ para remover la singularidad en $r = 0$. La segunda condición de frontera establece que en $r = R$, $v_x = 0$. Así:

$$0 = -\frac{R^2 \rho g \operatorname{sen}(\alpha)}{4\mu} + c_2 \quad (4.236)$$

$$c_2 = \frac{R^2 \rho g \operatorname{sen}(\alpha)}{4\mu} \quad (4.237)$$

Al reemplazar, se halla la expresión particular para la componente x de la velocidad.

$$v_x = \frac{\rho g \operatorname{sen}(\alpha)}{4\mu} (R^2 - r^2) \quad (4.238)$$

Para hallar la velocidad promedio, se evalúa la siguiente integral:

$$v_{prom} = \frac{2}{R^2} \int_0^R v_x(r) r dr \quad (4.239)$$

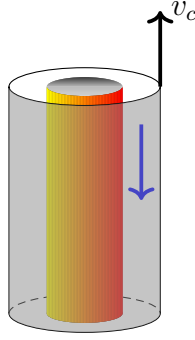
Lo que da como resultado:

$$v_{prom} = \frac{\rho g \operatorname{sen}(\alpha)}{8\mu} R^2 \quad (4.240)$$

Por último, para hallar la razón de flujo volumétrico:

$$Q = A v_{prom} = \frac{\pi \rho g \operatorname{sen}(\alpha)}{8\mu} R^4 \quad (4.241)$$

2. Obtenga el perfil de velocidad que describe el flujo incompresible y estacionario entre dos cilindros concéntricos verticales como lo muestra la Figura.



Solución

Se tienen en cuenta las siguientes suposiciones:

- Fluido incompresible, es decir con densidad ρ constante
- El flujo se encuentra sobre el eje z del cilindro. Por tanto $v_r = v_\theta = 0$
- Simetría azimutal, por lo que $\frac{\partial v_z}{\partial \theta} = 0$
- Flujo en estado estacionario

Partamos de la ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (4.242)$$

Como la densidad ρ es constante:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (4.243)$$

En coordenadas cilíndricas:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (4.244)$$

Como $v_r = v_\theta = 0$, la ecuación se reduce a:

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (4.245)$$

Lo que implica que $v_z = v_z(r)$. Tomando la ecuación de Navier-Stokes:

$$\rho \mathbf{g} - \nabla P + \mu \nabla^2 \mathbf{v} = \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \quad (4.246)$$

Donde $\frac{D}{Dt}$ es la derivada material definida como:

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \quad (4.247)$$

Como el fluido se encuentra en estado estacionario:

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = 0 \quad (4.248)$$

Reemplazando en la ecuación (4.246),

$$\rho \mathbf{g} - \nabla P + \mu \nabla^2 \mathbf{v} = 0 \quad (4.249)$$

Desarrollando la ecuación anterior, teniendo en cuenta la simetría azimutal y que $v_z = v_z(r)$:

$$\rho g - \frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (4.250)$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} - \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) = \rho g \quad (4.251)$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial z} \right) r - \mu \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) = \rho g r \quad (4.252)$$

Integrando respecto a r :

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right) r^2 - \mu r \frac{\partial v_z}{\partial r} = \frac{\rho g}{2} r^2 + K_1 \quad (4.253)$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right) r - \mu \frac{\partial v_z}{\partial r} = \frac{\rho g}{2} r + \frac{K_1}{r} \quad (4.254)$$

Integrando de nuevo respecto a r :

$$\frac{1}{4} \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right) r^2 - \mu v_z = \frac{\rho g}{4} r^2 + K_1 \ln r + K_2 \quad (4.255)$$

Despejando v_z y renombrando las constantes de integración como $C_1 = -K_1/\mu$ y $C_2 = -K_2/\mu$:

$$v_z = \frac{1}{4\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right) r^2 - \frac{\rho g}{4\mu} r^2 + C_1 \ln r + C_2 \quad (4.256)$$

Para hallar las constantes de integración, establecemos las siguientes condiciones de frontera:

(a) En $r = r_1$, $v_z = 0$

(b) En $r = r_2$, $v_z = v_c$

Utilizando las condiciones de frontera en la ecuación 4.256, se obtiene que:

$$\frac{1}{4\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right) r_1^2 - \frac{\rho g}{4\mu} r_1^2 + C_1 \ln r_1 + C_2 = 0 \quad (4.257)$$

$$\frac{1}{4\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right) r_2^2 - \frac{\rho g}{4\mu} r_2^2 + C_1 \ln r_2 + C_2 = v_c \quad (4.258)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$C_2 = -\frac{1}{4\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right) r_1^2 + \frac{\rho g}{4\mu} r_1^2 - C_1 \ln r_1 \quad (4.259)$$

Reemplazando en la ecuación 4.258:

$$\frac{1}{4\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right) (r_2^2 - r_1^2) - \frac{\rho g}{4\mu} (r_2^2 - r_1^2) + C_1 \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right) = v_c \quad (4.260)$$

Despejando C_1 :

$$C_1 = -\frac{1}{4\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right) \frac{r_2^2 - r_1^2}{\ln(r_2/r_1)} + \frac{\rho g}{4\mu} \frac{r_2^2 - r_1^2}{\ln(r_2/r_1)} + \frac{v_c}{\ln(r_2/r_1)} \quad (4.261)$$

Reemplazando la constante C_2 en la ecuación 4.256, se obtiene,

$$v_z = \frac{1}{4\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right) r^2 - \frac{\rho g}{4\mu} r^2 + C_1 \ln r - \frac{1}{4\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right) r_1^2 + \frac{\rho g}{4\mu} r_1^2 - C_1 \ln r_1 \quad (4.262)$$

$$v_z = \frac{1}{4\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right) (r^2 - r_1^2) - \frac{\rho g}{4\mu} (r^2 - r_1^2) + C_1 \ln(r/r_1) \quad (4.263)$$

Reemplazando C_1 , ecuación (4.261),

$$v_z = \frac{1}{4\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right) (r^2 - r_1^2) - \frac{\rho g}{4\mu} (r^2 - r_1^2) + \left(-\frac{1}{4\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right) \frac{r_2^2 - r_1^2}{\ln(r_2/r_1)} + \frac{\rho g}{4\mu} \frac{r_2^2 - r_1^2}{\ln(r_2/r_1)} + \frac{v_c}{\ln(r_2/r_1)} \right) \ln(r/r_1) \quad (4.264)$$

$$v_z = \frac{1}{4\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right) \left[(r^2 - r_1^2) - (r_2^2 - r_1^2) \frac{\ln(r/r_1)}{\ln(r_2/r_1)} \right] - \frac{\rho g}{4\mu} \left[(r^2 - r_1^2) - (r_2^2 - r_1^2) \frac{\ln(r/r_1)}{\ln(r_2/r_1)} \right] + v_c \frac{\ln(r/r_1)}{\ln(r_2/r_1)} \quad (4.265)$$

Finalmente:

$$v_z = \left[\frac{1}{4\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right) - \frac{\rho g}{2\mu} \right] \left[(r^2 - r_1^2) - (r_2^2 - r_1^2) \frac{\ln(r/r_1)}{\ln(r_2/r_1)} \right] + v_c \frac{\ln(r/r_1)}{\ln(r_2/r_1)} \quad (4.266)$$

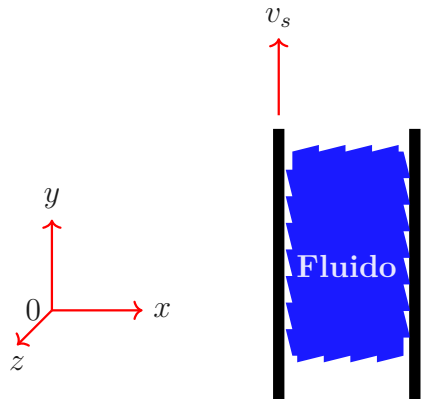
Esto para $r_1 < r < r_2$. Analizando la expresión se puede ver que se cumplen las condiciones de frontera. Si v_c es contrario al movimiento del fluido, tendrá un valor negativo, desfavoreciendo la velocidad del fluido. Si v_c tiene la misma dirección que el movimiento del fluido, tendrá un valor positivo, favoreciendo el movimiento. Se puede demostrar que $\partial P/\partial z$ es constante estudiando la tasa de flujo volumétrico:

$$Q = \int_0^Q dQ = \int_{r_1}^{r_2} v_z 2\pi r dr \quad (4.267)$$

Viendo esta integral se puede ver que $\partial P/\partial z$ es constante ya que $v_z = v_z(r)$, por lo que la integración con límites constantes dará una expresión en términos de los radios r_1 y r_2 , μ y Q , por lo que $\partial P/\partial z$ es constante.

4.9 Ejercicios

1. Use la ecuación de Navier-Stokes y obtenga la ecuación (4.268) del perfil de velocidad que describe el flujo de un fluido incompresible entre dos láminas verticales. La lámina derecha se encuentra en reposo, mientras que la izquierda se mueve hacia arriba con una velocidad constante v_s (ver Figura). Asuma flujo laminar.



$$v = \frac{1}{2\mu} \left[g\rho + \frac{dp}{dy} \right] (x^2 - \ell x) + v_s \left(1 - \frac{x}{\ell} \right) \quad (4.268)$$

2. Un fluido incompresible, laminar y viscoso fluye a través de un cilindro vertical de radio R y longitud L . Demuestre que si el fluido es considerado Newtoniano, la ecuación que relaciona la distribución de velocidad en cualquier punto está dada por la siguiente expresión:

$$v_z = \frac{P_0 - P_L}{4\mu L} R^2 \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad (4.269)$$

donde P_0 y P_L son las presiones que experimenta el fluido en los extremos del cilindro.

3. Para un fluido no Newtoniano, el modelo de la ley de viscosidad de Ostwald de Waele es dado por:

$$\tau_{rz} = \mu \left| \frac{dv_z}{dr} \right|^{n-1} \frac{dv_z}{dr} \quad (4.270)$$

Para el ejercicio anterior, demuestre que el perfil de velocidad v_z , usando el modelo de la ley de viscosidad de Ostwald de Waele es:

$$v_z = \left(\frac{P_0 - P_L}{2\mu L} \right) \frac{n}{n+1} R^{\frac{n+1}{n}} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^{\frac{n+1}{n}} \right] \quad (4.271)$$

compare este resultado con el obtenido en el modelo de la ley de viscosidad de Newton.

4. Repita el ejercicio del fluido incompresible, laminar y viscoso fluye a través de un cilindro vertical de radio R y longitud L utilizando el modelo de la ley de viscosidad de Ostwald de Waele y el método numérico de diferencias finitas para deducir las siguientes ecuaciones discretas:

$$\tau(i) - \tau(i-1) + \frac{\mu}{i} \left(\frac{v(i-1) - v(i)}{\Delta r} \right)^n - \Delta r \left(\frac{P_0 - P_L}{L} \right) = 0 \quad (4.272)$$

y

$$v(i-1) - v(i) + \Delta r \left(\frac{\tau(i)}{\mu} \right)^{\frac{1}{n}} = 0 \quad (4.273)$$

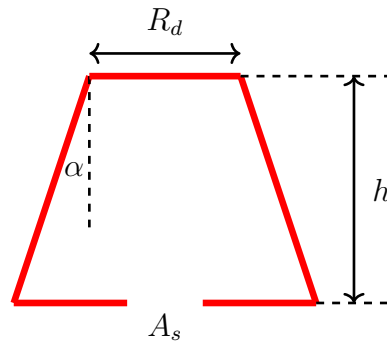
con condiciones de frontera:

$$\tau(0) = 0 \quad (4.274)$$

$$v(10) = 0 \quad (4.275)$$

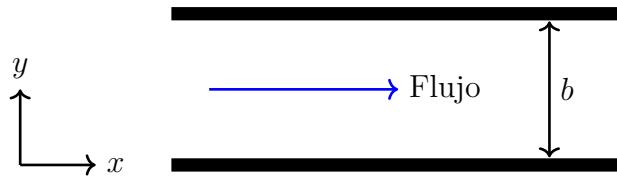
donde $i = 0$ en $r = 0$ y $i = 10$ en $r = R$.

5. Use la ecuación de continuidad para calcular el tiempo que tardará en vaciarse el agua contenida en un recipiente troncocónico, como lo muestra la Figura. $R_d = 0.2$ m, $h = 1$ m, $\alpha = 15^\circ$, $A_s = 0.1$ m².



6. Considere un flujo estacionario, bidimensional, laminar y de propiedades constantes entre dos placas paralelas (ver Figura) con una velocidad promedio de U_m . Si la presión es independiente de y y las fuerzas de cuerpo son despreciadas; use la ecuaciones de continuidad y de Navier-Stokes para demostrar que la velocidad de distribución v del flujo esta dada por la expresión:

$$v = 6U_m \left(\frac{y}{b} - \frac{y^2}{b^2} \right) \quad (4.276)$$



Tema No. 5

Ecuación de Navier-Stokes

La ecuación de Navier-Stokes no es *exacta* por sí misma, si no que se trata de un modelo de flujo de fluidos que incluye varias aproximaciones. No obstante, es un excelente modelo y fundamental en la mecánica de fluidos. Sin embargo, la ecuación de Navier-Stokes,

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla P + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \rho \mathbf{g} \quad (5.1)$$

presenta grandes dificultades durante el desarrollo matemático. La solución podría dar alrededor varias decenas de constantes y el cálculo de estas constantes requerirían el mismo número de condiciones de frontera, lo cual sería una tarea difícil. Por lo tanto, para resolver la ecuación de Navier-Stokes se deben de realizar aproximaciones obteniendo ecuaciones mucho más sencillas de analizar.

Una forma de obtener un *exacto* resultado a la ecuación de Navier-Stokes es el uso de la solución numérica. En dos dimensiones, las componentes x y y de la ecuación (5.1) son:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (5.2)$$

y

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (5.3)$$

donde $\nu = \frac{\mu}{\rho}$. En las ecuaciones (5.2) y (5.3) se observa que la presión y las velocidades en las direcciones x y y están acopladas. Para desacoplar estas variables,

se toma las derivadas espaciales $\frac{\partial}{\partial x}$ y $\frac{\partial}{\partial y}$ a las dos ecuaciones obteniéndose:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \nu \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \right) \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) + u \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + v \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \nu \left(\frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} \right)\end{aligned}$$

sumando éstas dos ecuaciones,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) + u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + v \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + u \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} + v \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \\ \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \nu \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \nu \left(\frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} \right)\end{aligned}$$

agrupando términos,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + v \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \\ \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) + \nu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)\end{aligned}$$

en esta ecuación se observa que la ecuación $\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)$, corresponde a la ecuación de continuidad. También puede analizarse como la conservación del volumen, es decir: $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$. Por lo tanto, la ecuación se reduce a:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) \quad (5.4)$$

donde ha mantenido la ecuación de continuidad de la parte temporal. Las ecuaciones (5.2), (5.3) y (5.4) son las ecuaciones que se deben de resolver usando el método de diferencias finitas, para obtener la solución de la ecuación de Navier-Stokes en dos dimensiones. Discretizando la ecuación (5.2),

$$\begin{aligned}\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} + u_{i,j}^n \frac{u_{i,j}^n - u_{i-1,j}^n}{\Delta x} + v_{i,j}^n \frac{u_{i,j}^n - u_{i,j-1}^n}{\Delta y} = -\frac{1}{\rho} \frac{P_{i+1,j}^n - P_{i-1,j}^n}{2\Delta x} \\ + \nu \left(\frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \right) \quad (5.5)\end{aligned}$$

discretizando (5.3),

$$\begin{aligned} \frac{v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^n}{\Delta t} + u_{i,j}^n \frac{v_{i,j}^n - v_{i-1,j}^n}{\Delta x} + v_{i,j}^n \frac{v_{i,j}^n - v_{i,j-1}^n}{\Delta y} = -\frac{1}{\rho} \frac{P_{i,j+1}^n - P_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \\ + \nu \left(\frac{v_{i+1,j}^n - 2v_{i,j}^n + v_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{v_{i,j+1}^n - 2v_{i,j}^n + v_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \right) \end{aligned} \quad (5.6)$$

y por último, realizando la discretización de (5.4),

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\Delta t} \right) \left(\frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2\Delta x} + \frac{v_{i,j+1}^n - v_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \right) + \left(\frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2\Delta x} \right)^2 \\ + 2 \left(\frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \right) \left(\frac{v_{i+1,j}^n - v_{i-1,j}^n}{2\Delta x} \right) + \left(\frac{v_{i,j+1}^n - v_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \right)^2 \\ = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{P_{i+1,j}^n - 2P_{i,j}^n + P_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{P_{i,j+1}^n - 2P_{i,j}^n + P_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \right) \end{aligned} \quad (5.7)$$

organizando la ecuación con el propósito de despejar la presión $P_{i,j}^n$,

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\Delta t} \right) \left(\frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2\Delta x} + \frac{v_{i,j+1}^n - v_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \right) + \left(\frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2\Delta x} \right)^2 \\ + 2 \left(\frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \right) \left(\frac{v_{i+1,j}^n - v_{i-1,j}^n}{2\Delta x} \right) + \left(\frac{v_{i,j+1}^n - v_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \right)^2 \\ = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{P_{i+1,j}^n + P_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{P_{i,j+1}^n + P_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \right) + \frac{2P_{i,j}^n}{\rho\Delta x^2} + \frac{2P_{i,j}^n}{\rho\Delta y^2} \end{aligned} \quad (5.8)$$

es decir,

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\Delta t} \right) \left(\frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2\Delta x} + \frac{v_{i,j+1}^n - v_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \right) + \left(\frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2\Delta x} \right)^2 \\ + 2 \left(\frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \right) \left(\frac{v_{i+1,j}^n - v_{i-1,j}^n}{2\Delta x} \right) + \left(\frac{v_{i,j+1}^n - v_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \right)^2 \\ = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{P_{i+1,j}^n + P_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{P_{i,j+1}^n + P_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \right) + \frac{2P_{i,j}^n}{\rho} \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right) \end{aligned} \quad (5.9)$$

Reorganizando las ecuaciones para un tiempo posterior y para la presión en el tiempo actual, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n + \Delta t \left[-u_{i,j}^n \frac{u_{i,j}^n - u_{i-1,j}^n}{\Delta x} - v_{i,j}^n \frac{u_{i,j}^n - u_{i,j-1}^n}{\Delta y} - \frac{1}{\rho} \frac{P_{i+1,j}^n - P_{i-1,j}^n}{2\Delta x} \right. \\ \left. + \nu \left(\frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.10)$$

resolviendo los paréntesis,

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n - u_{i,j}^n (u_{i,j}^n - u_{i-1,j}^n) \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right) - v_{i,j}^n (u_{i,j}^n - u_{i,j-1}^n) \left(\frac{\Delta t}{\Delta y} \right) - \frac{1}{\rho} (P_{i+1,j}^n - P_{i-1,j}^n) \left(\frac{\Delta t}{2\Delta x} \right) \\ + \nu (u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n) \left(\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \right) + \nu (u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n) \left(\frac{\Delta t}{\Delta y^2} \right) \quad (5.11)$$

Para la componente y , se obtiene:

$$v_{i,j}^{n+1} = v_{i,j}^n + \Delta t \left[-u_{i,j}^n \frac{v_{i,j}^n - v_{i-1,j}^n}{\Delta x} - v_{i,j}^n \frac{v_{i,j}^n - v_{i,j-1}^n}{\Delta y} - \frac{1}{\rho} \frac{P_{i,j+1}^n - P_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \right. \\ \left. + \nu \left(\frac{v_{i+1,j}^n - 2v_{i,j}^n + v_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{v_{i,j+1}^n - 2v_{i,j}^n + v_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \right) \right] \quad (5.12)$$

resolviendo los paréntesis,

$$v_{i,j}^{n+1} = v_{i,j}^n - u_{i,j}^n (v_{i,j}^n - v_{i-1,j}^n) \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right) - v_{i,j}^n (v_{i,j}^n - v_{i,j-1}^n) \left(\frac{\Delta t}{\Delta y} \right) - \frac{1}{\rho} (P_{i,j+1}^n - P_{i,j-1}^n) \left(\frac{\Delta t}{2\Delta y} \right) \\ + \nu (v_{i+1,j}^n - 2v_{i,j}^n + v_{i-1,j}^n) \left(\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \right) + \nu (v_{i,j+1}^n - 2v_{i,j}^n + v_{i,j-1}^n) \left(\frac{\Delta t}{\Delta y^2} \right) \quad (5.13)$$

y

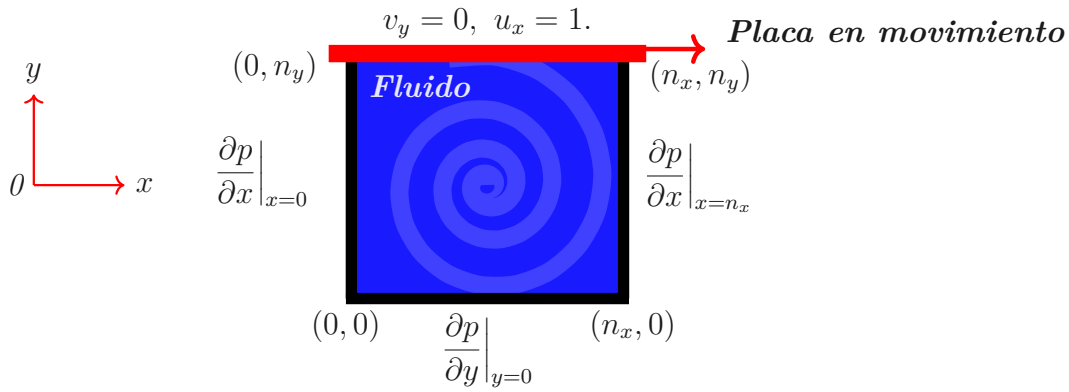
$$P_{i,j}^n = \frac{\rho \Delta x^2 \Delta y^2}{2(\Delta x^2 + \Delta y^2) \Delta t} \left(\frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2\Delta x} + \frac{v_{i,j+1}^n - v_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \right) \\ + \frac{\rho \Delta x^2 \Delta y^2}{2(\Delta x^2 + \Delta y^2)} \left[\left(\frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2\Delta x} \right)^2 + 2 \left(\frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \right) \left(\frac{v_{i+1,j}^n - v_{i-1,j}^n}{2\Delta x} \right) \right. \\ \left. + \left(\frac{v_{i,j+1}^n - v_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \right)^2 + \frac{1}{\rho} \left(\frac{P_{i+1,j}^n + P_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{P_{i,j+1}^n + P_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \right) \right] \quad (5.14)$$

Usando las ecuaciones (5.11), (5.13) y (5.14), se puede obtener una *buena* aproximación en la descripción de un flujo de un fluido, siguiendo el siguiente orden:

- Tener las condiciones iniciales del fluido a modelar
- Resuelva interactivamente la ecuación (5.14) hasta obtener una presión.
- Use la presión obtenida en el paso anterior en las ecuaciones (5.11) y (5.13) para encontrar la velocidad del fluido aproximada para el siguiente paso de tiempo.

- Use la velocidad aproximada del fluido para repetir el paso 2. Y así sucesivamente.

Problema 5.1 Encontrar y graficar los perfiles y los contornos de las componentes de velocidad u_x y v_y , la velocidad $U = \sqrt{u^2 + v^2}$ y la presión de las ecuaciones de Navier-Stokes en 2D, ecuación (5.1), para el estanque que se observa en la Figura. El estanque contiene un fluido con viscosidad $\mu = 0.1$, densidad $\rho = 1$ y su tapa superior se mueve con una velocidad constante $u_x = 1$. El estanque tiene las siguientes dimensiones: $L_x = L_y = 2$.



Además, en la Figura se observan las condiciones de frontera del estanque. Haga una malla de puntos de 21×21 y resuelva las ecuaciones para un tiempo de paso de $\Delta t = 0.01$, realizando un programa en Fortran.

Solución:

Las ecuaciones de Navier-Stokes en 2D discretizadas usando diferencias finitas son:

$$\begin{aligned}
 P_{i,j}^n = & \frac{\rho \Delta x^2 \Delta y^2}{2(\Delta x^2 + \Delta y^2) \Delta t} \left(\frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2\Delta x} + \frac{v_{i,j+1}^n - v_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \right) \\
 & + \frac{\rho \Delta x^2 \Delta y^2}{2(\Delta x^2 + \Delta y^2)} \left[\left(\frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2\Delta x} \right)^2 + 2 \left(\frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \right) \left(\frac{v_{i+1,j}^n - v_{i-1,j}^n}{2\Delta x} \right) \right. \\
 & \left. + \left(\frac{v_{i,j+1}^n - v_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \right)^2 + \frac{1}{\rho} \left(\frac{P_{i+1,j}^n + P_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{P_{i,j+1}^n + P_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \right) \right] \quad (5.15)
 \end{aligned}$$

y las ecuaciones discretizadas para las velocidades u y v son,

$$\begin{aligned}
u_{i,j}^{n+1} = & u_{i,j}^n - u_{i,j}^n (u_{i,j}^n - u_{i-1,j}^n) \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right) - v_{i,j}^n (u_{i,j}^n - u_{i,j-1}^n) \left(\frac{\Delta t}{\Delta y} \right) \\
& - \frac{1}{\rho} (P_{i+1,j}^n - P_{i-1,j}^n) \left(\frac{\Delta t}{2\Delta x} \right) + \nu (u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n) \left(\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \right) \\
& + \nu (u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n) \left(\frac{\Delta t}{\Delta y^2} \right)
\end{aligned} \tag{5.14}$$

$$\begin{aligned}
v_{i,j}^{n+1} = & v_{i,j}^n - u_{i,j}^n (v_{i,j}^n - v_{i-1,j}^n) \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right) - v_{i,j}^n (v_{i,j}^n - v_{i,j-1}^n) \left(\frac{\Delta t}{\Delta y} \right) \\
& - \frac{1}{\rho} (P_{i,j+1}^n - P_{i,j-1}^n) \left(\frac{\Delta t}{2\Delta y} \right) + \nu (v_{i+1,j}^n - 2v_{i,j}^n + v_{i-1,j}^n) \left(\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \right) \\
& + \nu (v_{i,j+1}^n - 2v_{i,j}^n + v_{i,j-1}^n) \left(\frac{\Delta t}{\Delta y^2} \right)
\end{aligned} \tag{5.13}$$

```

1  program Estanque
2  IMPLICIT NONE
3  INTEGER, PARAMETER :: M = 21
4  REAL :: dx, dy, Lx, Ly, dt, mu, nu, rho
5  INTEGER :: nit, nt, i, j, k, t, nx, ny
6  REAL, DIMENSION(M,M) :: ux, v, U, P, Pn, un, vn
7  ! Parametros del sistema
8  Lx = 2; Ly = 2 ! Longitud del estanque
9  nx = M; ny = M ! Numero de nodos
10 dx = Lx / (nx - 1); dy = Ly / (ny - 1)
11 nt = 500 ! Numero de iteraciones para calcular las velocidades
12 nit = 50 ! Numero de iteraciones para calcular la presión
13 dt = 0.01 ! Paso temporal
14 mu = 0.1 ! Viscosidad
15 rho = 1 ! Densidad
16 nu = mu/rho ! Viscosidad cinematica
17 DO i = 1,M
18   DO j = 1,M
19     ux(i, j) = 0.0
20     v(i, j) = 0.0
21     U(i, j) = 0.0
22     P(i, j) = 0.0
23   END DO
24 END DO
25 DO t = 1, nt
26   un = ux
27   vn = v
28   ! Condiciones de frontera para la presión
29   DO i = 1, ny
30     P(i, nx) = P(i, nx-1) ! dP/dx = 0 en x = 2
31     P(1, i) = P(2, i) ! dP/dy = 0 en y = 0
32     P(i, 1) = P(i, 2) ! dP/dx = 0 en x = 0
33     P(ny, i) = 0 ! P = 0 en y = 2
34   END DO
35   DO k = 1, nit
36     DO i = 2, ny-1
37       DO j = 2, nx-1
38         Pn = P

```

```

39 !      Calculo de presion
40          P(i, j) = (((Pn(i, j+1) + Pn(i, j-1)) * dy**2 +
41                      (Pn(i+1, j) + Pn(i-1, j)) * dx**2) /
42                      (2 * (dx**2 + dy**2)) -
43                      dx**2 * dy**2 / (2 * (dx**2 + dy**2)) *
44                      (rho * (1 / dt *
45                          ((ux(i, j+1) - ux(i, j-1)) /
46                          (2 * dx) + (v(i+1, j) - v(i-1, j)) / (2 * dy))
47                          - ((ux(i, j+1) - ux(i, j-1)) / (2 * dx))**2 -
48                          2 * ((ux(i+1, j) - ux(i-1, j)) / (2 * dy)) *
49                          (v(i, j+1) - v(i, j-1)) / (2 * dx)) -
50                          ((v(i+1, j) - v(i-1, j)) / (2 * dy))**2)))
51      END DO
52  END DO
53  DO i=2,ny-1
54      DO j=2,nx-1
55 !      Calculo de velocidad en x
56          ux(i, j) = (un(i, j) -
57                      un(i, j) * dt / dx *
58                      (un(i, j) - un(i, j-1)) -
59                      vn(i, j) * dt / dy *
60                      (un(i, j) - un(i-1, j)) -
61                      dt / (2 * rho * dx) * (P(i, j+1) - P(i, j-1)) +
62                      nu * (dt / dx**2 *
63                      (un(i, j+1) - 2 * un(i, j) + un(i, j-1)) +
64                      dt / dy**2 *
65                      (un(i+1, j) - 2 * un(i, j) + un(i-1, j))))
66 !      Calculo de velocidad en y
67          v(i, j) = (vn(i, j) -
68                      un(i, j) * dt / dx *
69                      (vn(i, j) - vn(i, j-1)) -
70                      vn(i, j) * dt / dy *
71                      (vn(i, j) - vn(i-1, j)) -
72                      dt / (2 * rho * dy) * (P(i+1, j) - P(i-1, j)) +
73                      nu * (dt / dx**2 *
74                      (vn(i, j+1) - 2 * vn(i, j) + vn(i, j-1)) +
75                      dt / dy**2 *
76                      (vn(i+1, j) - 2 * vn(i, j) + vn(i-1, j))))
77      END DO
78  END DO
79 !      Condiciones de frontera para la velocidad
80      DO i=1,ny
81          v(1, i) = 0
82          v(ny, i) = 0
83          v(i, 1) = 0
84          v(i, nx) = 0
85          ux(1, i) = 0
86          ux(i, 1) = 0
87          ux(i, nx) = 0
88          ux(ny, i) = 1      ! velocidad de la placa en movimiento
89      END DO
90  END DO
91 !      Velocidad total
92      DO i=1,ny
93          DO j=1,nx
94              U(i, j) = sqrt(ux(i, j)**2 + v(i, j)**2)
95          END DO
96      END DO
97 !      Guardamos datos para graficaci n
98      OPEN(2, file='resultados_U.txt', status='unknown')
99      DO i = 1,ny
100          DO j = 1,nx
101              write(2,*)(j-1)*dx, (i-1)*dy, U(i, j), ux(i, j), v(i, j)
102          END DO
103      END DO

```

```

104     END DO
105     CLOSE(2)
106     OPEN(3, file='resultados-ux.txt', status='unknown')
107     DO i = 1, ny
108         DO j = 1, nx
109             write(3,*)(j-1)*dx, (i-1)*dy, ux(i,j), ux(i,j), v(i,j)
110         END DO
111     END DO
112     CLOSE(3)
113     OPEN(4, file='resultados-v.txt', status='unknown')
114     DO i = 1, ny
115         DO j = 1, nx
116             write(4,*)(j-1)*dx, (i-1)*dy, v(i,j), ux(i,j), v(i,j)
117         END DO
118     END DO
119     CLOSE(4)
120     OPEN(5, file='resultados-P.txt', status='unknown')
121     DO i = 1, ny
122         DO j = 1, nx
123             write(5,*)(j-1)*dx, (i-1)*dy, P(i,j)
124         END DO
125     END DO
126     CLOSE(5)
127     END PROGRAM Estanque

```

El programa se ejecuta de acuerdo a los siguientes pasos:

1. *Se definen los parámetros del fluido, de la malla y de las cantidades a encontrar.*
2. *Se definen las condiciones iniciales del sistema.*
3. *Se resuelve iterativamente la ecuación de la presión hasta obtener un valor de esta cantidad para cada nodo de la malla.*
4. *Se usa la presión obtenida en el paso anterior para calcular las componentes de velocidad en cada nodo del estanque.*
5. *Se repiten los pasos c) y d) para un número de iteraciones dado.*
6. *Se calcula la velocidad total del fluido a partir de sus componentes finales y se guardan los datos para posterior graficación.*

Los resultados obtenidos al ejecutar el programar se muestran en la Figura 5.1.

5.1 Aproximaciones a la ecuación de Navier-Stokes

Para realizar aproximaciones a la ecuación de Navier-Stokes, ésta se debe adimensionalizarse. Así, en esta sección se desea dar un tratamiento meramente matemático a la ecuación de Navier-Stokes y así encontrar ecuaciones aproximadas de Navier-Stokes que tengan soluciones analíticas. El objetivo es eliminar las dimensiones de las ecuaciones de movimiento de manera que puedan compararsen los ordenes de

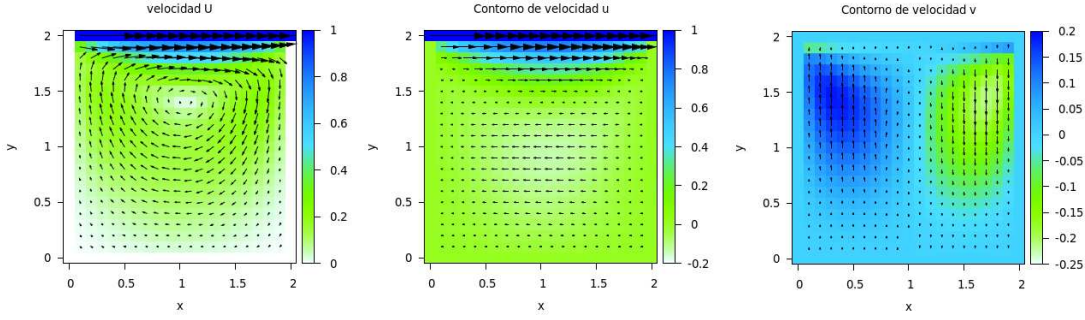


Figura 5.1: Velocidad total U y sus componentes u y v , en el estanque.

magnitud de los diversos términos en las ecuaciones. Para llevar a cabo dicho objetivo, se definen los siguientes parámetros de escalonamiento, los cuales se usan para eliminar las unidades de la ecuación.

Parámetros	Descripción	Dimensiones
L	Longitud	$\{L\}$
v	Velocidad	$\{Lt^{-1}\}$
f	Frecuencia	$\{t^{-1}\}$
$P_0 - P_\infty$	Presión	$\{mL^{-1}t^{-2}\}$
g	Gravedad	$\{Lt^{-2}\}$

Definiendo las siguientes variables adimensionales,

$$\begin{aligned}
 t^* &= ft, & P^* &= \frac{P - P_\infty}{P_0 - P_\infty} \\
 \mathbf{x}^* &= \frac{\mathbf{x}}{L}, & g^* &= \frac{\mathbf{g}}{g} \\
 \mathbf{v}^* &= \frac{\mathbf{v}}{v}, & \nabla^* &= L\nabla
 \end{aligned} \tag{5.14}$$

donde las cantidades v , f , L , P_0 , P_∞ y g son constantes y cada cantidad con asterísco es adimensional. Con la ayuda de éstas cantidades, se encuentra cada uno de los términos de la ecuación de Navier-Stokes, ecuación (5.1), en función de las variables adimensionales.

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \rho \frac{\partial v \mathbf{v}^*}{\partial \left(\frac{t^*}{f}\right)} = \rho f v \frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} \quad (5.15)$$

$$\rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \rho \left(v \mathbf{v}^* \frac{\nabla^*}{L} \right) v \mathbf{v}^* = \rho \frac{v^2}{L} (\mathbf{v}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{v}^* \quad (5.16)$$

$$\nabla P = \frac{\nabla^*}{L} \left(P^* (P_0 - P_\infty) + P_\infty \right) = \frac{P_0 - P_\infty}{L} \nabla^* P^* \quad (5.17)$$

$$\mu \nabla^2 \mathbf{v} = \frac{\mu}{L^2} \nabla^{2*} v \mathbf{v}^* = \frac{\mu v}{L^2} \nabla^{2*} \mathbf{v}^* \quad (5.18)$$

$$\rho \mathbf{g} = \rho g \mathbf{g}^* \quad (5.19)$$

Usando las ecuaciones (5.15)-(5.19), la ecuación de Navier-Stokes toma la siguiente forma:

$$\rho f v \frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} + \rho \frac{v^2}{L} (\mathbf{v}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{v}^* = - \frac{P_0 - P_\infty}{L} \nabla^* P^* + \frac{\mu v}{L^2} \nabla^{2*} \mathbf{v}^* + \rho g \mathbf{g}^* \quad (5.20)$$

multiplicando en ambos lados por $\frac{L}{\rho v^2}$,

$$\begin{aligned} \frac{L}{\rho v^2} \rho f v \frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} + \frac{L}{\rho v^2} \rho \frac{v^2}{L} (\mathbf{v}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{v}^* &= - \frac{L}{\rho v^2} \frac{P_0 - P_\infty}{L} \nabla^* P^* + \\ &\quad \frac{L}{\rho v^2} \frac{\mu v}{L^2} \nabla^{2*} \mathbf{v}^* + \frac{L}{\rho v^2} \rho g \mathbf{g}^* \end{aligned} \quad (5.21)$$

cancelando términos,

$$\begin{aligned} \left[\frac{Lf}{v} \right] \frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} + (\mathbf{v}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{v}^* &= - \left[\frac{P_0 - P_\infty}{\rho v^2} \right] \nabla^* P^* + \\ &\quad \left[\frac{\mu}{\rho v L} \right] \nabla^{2*} \mathbf{v}^* + \left[\frac{Lg}{v^2} \right] \mathbf{g}^* \end{aligned} \quad (5.22)$$

En esta ecuación se observa que cada cantidad que se encierra en los corchetes es adimensional y cada una de éstas cantidades poseen un nombre. A continuación se presenta una corta descripción de cada uno de éstas cantidades adimensionales:

- Número de Strouhal. Es denotado como St y definido como $St \equiv \frac{Lf}{v}$. Lleva el nombre del físico Vicent Strouhal y relaciona las oscilaciones de un flujo con su velocidad media. Por ejemplo, en fluidos viscosos se presenta muy pocas oscilaciones y por lo tanto $St \approx 1.0$.

- Número de Euler. Es denotado como Eu y definido como $Eu \equiv \frac{P_0 - P_\infty}{\rho v^2}$. Este número es usado para caracterizar las pérdidas en un flujo. Por ejemplo, si el fluido presenta pocas pérdidas (fluido perfecto) el número de Euler se aproxima a uno, $Eu \approx 1.0$.
- Número de Froude al cuadrado. Es denotado como Fr^2 y definido como $Fr^2 \equiv \frac{v^2}{Lg}$. Este número es usado para determinar la influencia de la gravedad en el fluido. Si $Fr \approx 1.0$ indica que la velocidad media del flujo es igual a la velocidad de las ondas superficiales. Obsérvese que es una comparación entre una energía cinética por el término v^2 y un potencial que corresponde al término gL , donde L es una profundidad dentro del fluido.
- Número de Reynolds. Es denotado como Re y definido como $Re \equiv \frac{\rho v L}{\mu}$. Es el único número que depende de la viscosidad del fluido y da información de la relación entre las fuerzas inerciales dadas por el término $\rho v L$ y las fuerzas viscosas generadas por la viscosidad μ . Si el fluido es viscoso, éste sería el único número que es diferente de uno, $Re \neq 1.0$.

Teniendo en cuenta la aproximación de las cantidades adimensionales: $St \approx 1.0$, $Eu \approx 1.0$, $Fr \approx 1.0$ y $Re \neq 1.0$, la ecuación de Navier-Stokes adimensional se reescribe como:

$$\frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} + (\mathbf{v}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{v}^* = -\nabla^* P^* + \frac{1}{Re} \nabla^{2*} \mathbf{v}^* + \mathbf{g}^* \quad (5.23)$$

Recordando que en ciencias el orden de magnitud de cualquier variable adimensional es uno, es decir que:

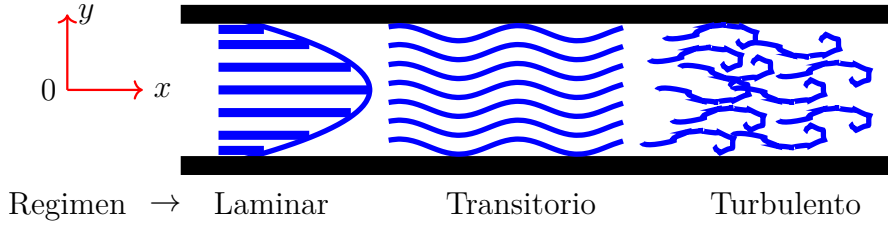
$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} &\sim 1.0, & (\mathbf{v}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{v}^* &\sim 1.0 \\ \nabla^* P^* &\sim 1.0, & \nabla^{2*} \mathbf{v}^* &\sim 1.0, & \mathbf{g}^* &\sim 1.0 \end{aligned} \quad (5.24)$$

indica la importancia de los coeficientes adimensionales en la ecuación de Navier-Stokes, ecuación (5.22), y se dice que solo depende de las magnitudes relativas de los parámetros adimensionales St , Eu , Fr y Re . Por ejemplo, si $f = 0$ entonces el parámetro adimensional de Strouhal es cero, $St = 0$, indicando que se trata de un flujo estacionario.

Las aproximaciones presentadas en la ecuación (5.24) son aplicadas a un fluido *ideal*, en donde solo se tiene que tener en cuenta el número de Reynolds (Re).

5.1.1 Número de Reynolds

En el año 1883 Osborne Reynolds propuso un criterio para diferenciar entre un fluido ordenado que sigue una trayectoria llamada línea de corriente y un fluido que viaja en forma caótica formando turbulencias o remolinos. Un fluido ordenado se modela en forma de placas o láminas paralelas que viajan en la misma dirección y no se mezclan entre ellas, y por lo tanto es llamado *flujo laminar*. Por otro lado, si las láminas de los fluidos se mezclan entre si, el flujo que viaja en forma caótica o formando turbulencias y se le llama *flujo turbulento*. La siguiente Figura, muestra tres estados que se presenta un fluido: El estado laminar, un estado de transición, y el estado turbulento.



El objetivo de ésta subsección es la familiarización con el número de Reynolds, el cual determina el tipo de comportamiento del fluido: laminar, transición o turbulento. Técnicamente, el número de Reynolds es la razón de las fuerzas (por unidad de área) inerciales y las fuerzas (por unidad de área) generadas por la viscosidad del fluido, es decir, la fuerza inercial estaría determinada por la segunda ley de Newton $F = ma = \rho V \frac{v_x}{t}$ donde V es el volumen dado por $V = Ax$ donde x es la distancia, entonces la fuerza inercial es $F = \rho A \frac{x}{t} v_x$, es decir,

$$\frac{F}{A} \sim \rho v^2 \quad (5.25)$$

Ahora, recordando que la fuerza por unidad de área debido a la viscosidad es $\mu \frac{dv_x}{dy}$, ésta puede aproximarse a:

$$\frac{\tau_{yx}}{A} \sim \mu \frac{v}{L} \quad (5.26)$$

y realizando la relación entre las fuerzas inerciales y las fuerzas viscosas o esfuerzos cortantes, se obtiene el número de Reynolds,

$$Re = \frac{\rho v^2}{\mu \frac{v}{L}} \rightarrow Re = \frac{\rho v L}{\mu} \quad (5.27)$$

Los resultados experimentales del regimen laminar se ajustan para valores del número de Reynolds menores que 2000, mientras que las predicciones experimentales para el regimen turbulento se ajustan para valores mayores a 4000, aproximadamente. Los

valores correspondientes al intervalo entre 2000 y 4000 corresponden a un regimen transitorio. Por lo tanto, la clasificación del fluido sería:

$$\begin{aligned} Re < 2000, & \rightarrow \text{Fluido laminar} \\ 2000 < Re < 4000, & \rightarrow \text{Regimen transitorio} \\ Re < 4000, & \rightarrow \text{Fluido Turbulento.} \end{aligned}$$

La aproximación de la ecuación de Navier-Stokes, está basada en el número de Reynolds. La aproximación consiste en derivar la ecuación de Navier-Stokes en una ecuación para fluidos viscosos y otra ecuación para fluidos no-viscosos.

5.1.2 Fluidos viscosos

Los fluidos viscosos se presentan cuando su número de Reynolds es pequeño ($Re \ll 1.0$), es decir que las fuerzas viscosas son muy grandes comparadas con la fuerzas inerciales, ver ecuación (5.27). Entonces, la ecuación de Navier-Stokes, ecuación (5.23) se reduce a:

$$\frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} = -\nabla^* P^* + \frac{1}{Re} \nabla^{2*} \mathbf{v}^* \quad (5.28)$$

donde el término $(\mathbf{v}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{v}^*$ que genera vorticidad sería anulado, puesto que en fluidos altamente viscosos, clasificados como fluidos laminares, no se generan turbulencias. La aproximación (5.28) en términos de los números de Strouhal, Euler y de Reynolds es:

$$St \frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} = -Eu \nabla^* P^* + \frac{1}{Re} \nabla^{2*} \mathbf{v}^* \quad (5.29)$$

Flujo viscoso no estacionario

Considerando un fluido perfecto, en donde no existen pérdidas energéticas, $Eu \sim 1.0$ y se presentan muy pocas oscilaciones debido a su viscosidad ($St \sim 1.0$), se obtiene la ecuación diferencial con comportamiento parabólico:

$$\nabla^2 v = Re \frac{\partial v}{\partial t} + Re \nabla P \quad (5.30)$$

Problema 5.2 Resolver la ecuación de Navier-Stokes unidimensional, ecuación (5.30), asumiendo que el gradiente de presión es despreciable.

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \quad (5.31)$$

Es una ecuación diferencial de variables separables, en donde se propone una solución de la forma: $v(t, x) = T(t)X(x)$, reemplazando,

$$Re \frac{\partial T(t)X(x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 T(t)X(x)}{\partial x^2} \quad (5.32)$$

$$Re X(x) \frac{\partial T(t)}{\partial t} = T(t) \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} \rightarrow Re \frac{X(x)T'(t)}{T(t)X(x)} = \frac{T(t)X''(x)}{T(t)X(x)} \quad (5.33)$$

obteniéndose,

$$Re \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2 \quad (5.34)$$

donde λ es una constante. Resolviendo cada una de las ecuaciones diferenciales,

$$Re \frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda^2 \rightarrow \frac{dT}{T} + \frac{\lambda^2}{Re} dt = 0 \quad (5.35)$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2 \rightarrow \frac{d^2 X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0 \quad (5.36)$$

La solución de éstas dos ecuaciones son:

$$T(t) = Ae^{-\frac{\lambda^2}{Re}t}, \quad (5.37)$$

$$X(x) = B \sin(\lambda x) \quad (5.38)$$

y la solución de la undimensional de Navier-Stokes es,

$$v_\lambda(x, t) = C_\lambda e^{-\frac{\lambda^2}{Re}t} \sin(\lambda x) \quad (5.39)$$

donde C_λ es una constante. En esta solución se puede observar que si la constante de Reynolds es muy pequeña, es decir un fluido con alta viscosidad, la amplitud de la función senosoidal $C_\lambda e^{-\frac{\lambda^2}{Re}t}$ es muy pequeña y se podría decir que la velocidad del fluido $v_\lambda(x, t)$ se comporta como una línea recta, mientras que si la constante de Reynolds es muy alta, es decir, se trata de un fluido con muy poca viscosidad, la amplitud de la función seno $C_\lambda e^{-\frac{\lambda^2}{Re}t}$ es muy grande, la velocidad del fluido $v_\lambda(x, t)$ oscila mucho y por lo tanto las láminas de fluido se van a mezclar.

Problema 5.3 Use diferencias finitas para obtener las ecuaciones que solucionen la ecuación de Poisson unidimensional.

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \quad (5.40)$$

La discretización para la variable espacial x en el tiempo k es,

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{i,j} = \frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{(\Delta x)^2} \quad (5.41)$$

La aproximación a la derivada temporal puede expresarse como:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\Delta t} \quad (5.42)$$

en donde el superíndice k , denota la dependencia temporal. La ecuación (5.42) indica que la derivada temporal es expresada en términos de la diferencia de la velocidad entre la nueva variable temporal (paso $k + 1$) y el previo paso temporal (paso k).

Por lo tanto, la velocidad en cualquier nodo i en el tiempo $t + \Delta t$ es calculada a partir del conocimiento de la velocidad del nodo i y los nodos vecinos en el tiempo previo t . Reemplazando (5.42) y (5.41) en (5.40),

$$\frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\Delta t} = \frac{1}{Re} \frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{(\Delta x)^2} \quad (5.43)$$

donde u_i^{k+1} y u_i^k es la velocidad en el nodo (i) en el tiempo posterior $t + \Delta t$ y anterior t , respectivamente.

$$u_i^{k+1} - u_i^k = \frac{\Delta t}{\Delta x^2 Re} (u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k) \quad (5.44)$$

$$u_i^{k+1} = u_i^k + \frac{\Delta t}{\Delta x^2 Re} (u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k) \quad (5.45)$$

definiendo una nueva variable F_0 como:

$$F_0 = \frac{\Delta t}{\Delta x^2 Re} \quad (5.46)$$

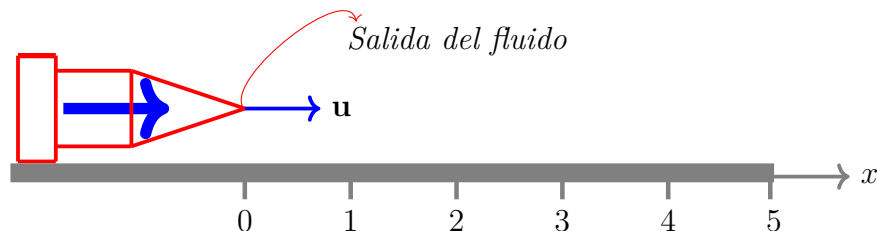
se obtiene la ecuación:

$$u_i^{k+1} = u_i^k + F_0 (u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k) \quad (5.47)$$

donde $F(0) \leq \frac{1}{4}$, para garantizar convergencia, estabilidad y que los errores no oscilen, es decir que los errores en cualquier etapa del cálculo no se amplifiquen, sino que se atenuen conforme avanza el cálculo. También se sabe que $F(0) \leq \frac{1}{6}$ se tiende a minimizar los errores por truncamiento.

Problema 5.4 Por una boquilla, sale un fluido con una velocidad horizontal u como lo muestra la Figura. Calcule la distribución de velocidad del fluido a lo largo de la horizontal para los tiempos: $t = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ segundos, y usando los siguientes

valores: $\Delta x = 2$ centímetros, $\Delta t = 0.1$ segundos, número de divisiones $nd = 5$ y número de Reynolds de 1.18 ($F0 \sim 0.021$). En $t = 0$ (en la salida de la boquilla), la magnitud de la velocidad del fluido es de 100 y al final de la horizontal (punto nd) es de 0. El código en Fortran para resolver la ecuación de Poisson unidimensional, ecuación(5.47), es:



```

1  ! ESTE PROGRAMA RESUELVE LA ECUACION DIFERENCIAL PARCIAL:
2  !
3  !      du/dt = (1/Re)*d^2u/dx^2
4  !
5  PROGRAM DIFUSION_1D
6  INTEGER,PARAMETER :: N=999
7  INTEGER :: I,ND,J,K,NAPROX,NMI
8  REAL,DIMENSION(0:N) :: C,CANT
9  REAL :: T,DELTAT,DELTAX,COND,REYNOLDS,LAMBDA
10
11  OPEN(2,FILE='ec-difusion-fluido-1d.dat',STATUS='OLD')
12  READ(2,*)REYNOLDS,DELTAT,DELTAX,NAPROX,ND,NMI
13  ! LEE LAS CONDICIONES INICIALES:
14      READ(2,*)(CANT(I),I=1,ND)
15  CLOSE (2)
16  !
17  LAMBDA = DELTAT/(REYNOLDS*DELTAX**2)
18  !
19  ! IMPRIME LOS DATOS DE ENTRADA
20  WRITE(*,*) 'Re=',REYNOLDS
21  WRITE(*,*) 'DT=',DELTAT
22  WRITE(*,*) 'DX = ',DELTAX
23  WRITE(*,*) 'F0=',LAMBDA
24  WRITE(*,*) 'APROXIMACION = ',NAPROX
25  WRITE(*,*)
26  !
27  COND = 1.0 - 2.0*LAMBDA      ! condicion de estabilidad
28  IF(COND.LT.0.1667)GO TO 30
29  APROX = 10.0**(-NAPROX)
30  !
31  ! imprime los resultados iniciales, en t=0.
32  T = 0.0
33      WRITE(*,100)T,(CANT(I),I=1,ND)
34  WRITE(*,*)
35  ! COMIENZO DEL CICLO
36  DO K=1,4
37      T = T + DELTAT
38      DO I=1,ND
39          C(I) = LAMBDA*( CANT(I+1) + CANT(I-1)) + 8
40                  + (1.0 - 2.0*LAMBDA)*CANT(I)
41          IF( (ABS( CANT(I)-C(I) )/C(I)).LE.APROX )GO TO 10
42          CANT(I) = C(I)
43      END DO
44  ! IMPRIME RESULTADOS

```



```

45      WRITE(*,100) T, (CANT(I), I=1,ND)
46      WRITE(*,*)
47  END DO
48  !
49  10  WRITE(*,*) 'ALCANZO EL ESTADO ESTACIONARIO'
50      WRITE(*,*)
51      GO TO 20
52  !
53  30  WRITE(*,*) '*****'
54      WRITE(*,*) 'REVISAR DATOS DE ENTRADA, EL SISTEMA NO ES ESTABLE'
55      WRITE(*,*) 'CONDICION DE ESTABILIDAD ES: ',COND
56      WRITE(*,*) '*****'
57      GO TO 40
58  !
59  20  WRITE(*,*) 'NORMAL TERMINACION'
60  100 FORMAT(2X,F6.2,50(2X,f9.4))
61  !
62  40  CONTINUE
63  !
64      END PROGRAM DIFUSION_1D

```

y el archivo de datos de entrada es:

REYNOLDS	DELTAT	DELTAX	NAPROX	ND	NMI
1.18	0.1	2.0	6	5	25
100.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

y los resultados fueron:

$Re = 1.18$; $DT = 0.1$; $DX = 2.0$; $F0 = 2.12E-02$; $APROXIMACION = 6$

tiempo	0	1	2	3	4	5
0.00	100.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.10	95.7627	2.0289	0.0430	0.0009	0.0000	0.0000
0.20	91.7480	3.8876	0.1235	0.0035	0.0001	0.0000
0.30	87.9427	5.5887	0.2368	0.0084	0.0003	0.0000
0.40	84.3347	7.1437	0.3783	0.0160	0.0006	0.0000

Flujo viscoso y estacionario

Si no se tiene en cuenta la dependencia del tiempo en la ecuación (5.30), se obtiene la ecuación que describe un fluido viscoso, perfecto y estacionario:

$$\nabla^2 v = Re \nabla P \quad (5.48)$$

Ecuación diferencial parcial de comportamiento elíptico. La ecuación (5.48) es una ecuación que es conocida como la ecuación de Poisson y da origen a la ecuación de Laplace cuando el gradiente de presión es cero.

Problema 5.5 El perfil de velocidad $U(x, y)$ para un flujo estacionario de un fluido viscoso y estacionario a través de un conducto rectangular puede describirse mediante

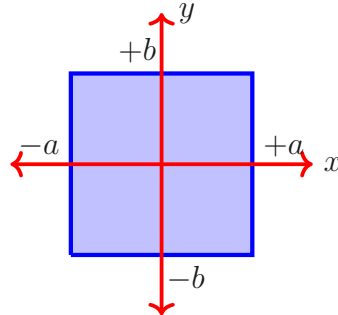
la siguiente ecuación:

$$\mu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) = \gamma \quad (5.49)$$

donde μ es el coeficiente de viscosidad y γ es una constante de presión. Solucionar esta ecuación con las siguientes condiciones de frontera:

$$U(-a, y) = U(a, y) = 0$$

$$U(x, -b) = U(x, b) = 0$$



Comparando las ecuaciones (5.49) y (5.48), se observa que $\gamma \approx \rho v L \nabla P$. Para realizar el cálculo numérico de la ecuación (5.49), se el siguiente código en Fortran:

```

1      program elipticas
2      integer, parameter :: n=90,m=90
3      real, dimension (n,m) :: U
4      integer :: i,j,nr,nc,nmi,icont,iter,numren,numcol,naprox
5      real :: tempor
6      !
7      !      INFORMACION QUE SE DEBE DE DAR COMO ENTRADA
8      !
9      Long = 4.0
10     DX = 0.1
11     NUMREN = Long/DX      ! observese que NUMREN=Long/DX
12     NUMCOL = Long/DX
13     NMI = 300
14     NAPROX = 7
15     !
16     open(unit=7,file='output.dat',status='unknown')
17     ! condiciones de frontera
18     DO I=0,NUMREN
19         U(I,NUMREN)=0.0
20         U(NUMREN,I)=0.0
21     END DO
22     ! iniciacion de la matriz en ceros
23     NR = NUMREN - 1
24     NC = NUMCOL - 1
25     DO I = 1,NR
26         DO J = 1,NC
27             u(I,j)=0.0
28         END DO
29     END DO
30     !
31     APROX = 10.0**(-NAPROX)
32     ! COMIENZO DE LAS ITERACIONES
33     DO 3 ITER = 1,NMI
34         ICONT = 0
35         DO I=1,NR
36             DO J=1,NC
37                 TEMPOR = ( U(I,J-1) + U(I,J+1) + &

```

```

38             U(I-1,J) + U(I+1,J) )/4.0 + 0.09
39             IF ( (ABS(U(I,J)-TEMPOR)/TEMPOR).LE.APROX )GO TO 2
40             ICONT = ICONT +1
41             U(I,J) = TEMPOR
42             END DO
43             END DO
44             IF (ICONT.EQ.0)GO TO 4
45             3 CONTINUE
46 !
47 4 do J=NUMCOL, 0, -1
48     write (7,*) (U(I,J),I=0,NUMREN)
49 end do
50 close (7)
51 !
52 end program elipticas

```

La Figura 5.2 muestra la forma del perfil de velocidad del flujo en el conducto rectangular.

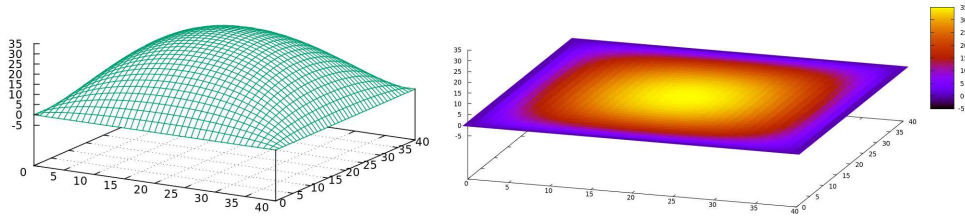


Figura 5.2: Gráfico del perfil de velocidad de un canal cuadrado de longitud $L = 4$, ancho de cada punto grid de $dx = dy = 0.1$ y una convergencia de 10^{-7} .

5.1.3 Fluidos no-viscosos

Para un número de Reynolds muy alto, los efectos viscosos apenas tienen influencia en el flujo, es decir $\mu \rightarrow 0$. Entonces, la ecuación de Navier-Stokes, ecuación (5.23), se reduce a una ecuación diferencial de primer orden,

$$\frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} + (\mathbf{v}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{v}^* = -\nabla^* P^* \quad (5.50)$$

es decir,

$$St \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla P \quad (5.51)$$

ecuación diferencial parcial de comportamiento hiperbólico. La siguiente Tabla resume los tipos de fluido que hasta el momento se tienen:

Flujos	viscosos	no-viscosos
Estacionario	$\nabla^2 v = Re \nabla P$	$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla P$
No-estacionario	$\nabla^2 v = Re St \frac{\partial v}{\partial t} + Re \nabla P$	$St \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla P$

Tema No. 6

Capa límite hidrodinámica

La ecuación de Navier-Stokes,

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla P + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \rho \mathbf{g} \quad (6.1)$$

es una ecuación conocida aproximadamente desde los años 1800, pero no se podía resolver excepto para flujos de geometría sencilla. Paralelamente, los matemáticos obtenían soluciones analíticas de la ecuación de Euler para flujos con geometría compleja, pero sus resultados con frecuencia carecían de sentido físico. Por lo tanto, la única forma de estudiar la dinámica de los fluidos, era usando fórmulas empíricas. La eliminación o desprecio de las fuerzas viscosas en la ecuación de Navier-Stokes, ecuación (4.150) conduce a la ecuación de Euler,

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla P + \rho \mathbf{g} \quad (6.2)$$

Ahora, existen dos situaciones en donde el término que depende de la viscosidad del fluido puede despreciarse:

- La primera sucede en las regiones del fluido que tienen un número de Reynolds muy grande, región que posee fuerzas viscosas despreciables, comparadas con las fuerzas inerciales. A estas regiones se les conoce como *regiones inviscosas*.
- La segunda situación ocurre cuando la vorticidad es muy pequeña debido a que las viscosidades son las responsables de las distorsiones angulares. A estas regiones se les llama *regiones irrotacionales*.

En cualquiera de las dos situaciones anteriores, la eliminación del término viscoso conduce a la ecuación de Euler. Aunque, la eliminación del término viscoso en la ecuación de Navier-Stokes simplifica los desarrollos matemáticos, existen deficiencias *serias* relacionadas con la aplicación de la ecuación de Euler a los problemas ingenieriles. Por ejemplo, en la ecuación de Euler existen deslizamientos, mientras que

en la ecuación de Navier-Stokes hay no-deslizamientos debido a que existen fuerzas entre el fluido y las paredes que lo contienen. Los resultados de ambas ecuaciones serán totalmente diferentes y no se podrán aproximarse entre ellas. Por lo tanto, las ecuaciones de Euler y de Navier-Stokes, bajo esta aproximación son consideradas como dos sistemas totalmente aislados y se necesitará un puente de union entre las dos sistemas para lograr resultados de unificación. La *Aproximación de capa límite* es el puente de union de las diferencias de los valores calculados usando las ecuaciones de Euler y las ecuaciones de Navier-Stokes.

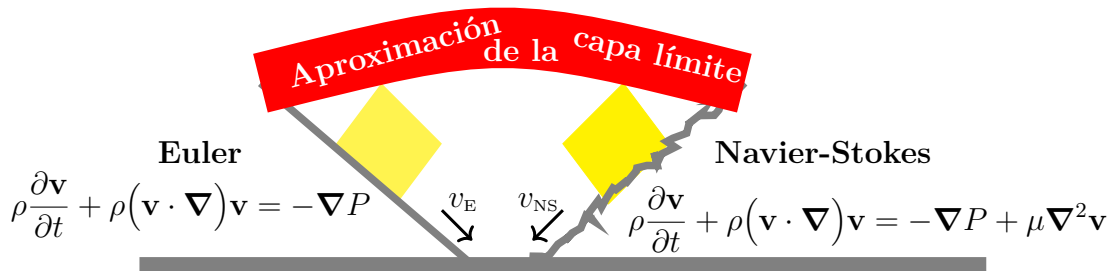
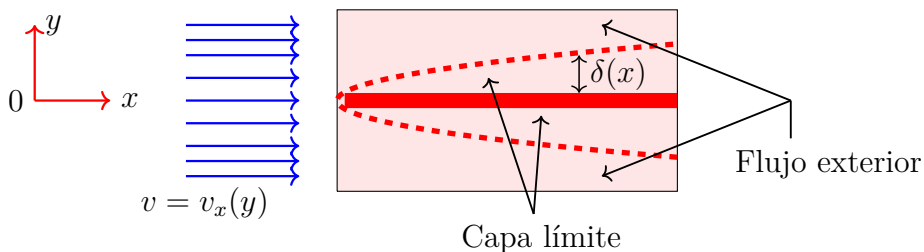


Figura 6.1: Una lámina de baja por una pendiente lisa (lado izquierdo) y otra (lado derecho) con alto coeficiente de fricción. Las velocidades calculadas usando las ecuaciones de Euler v_E y de Navier-Stokes v_{NS} son totalmente diferentes ($v_E \neq v_{NS}$).

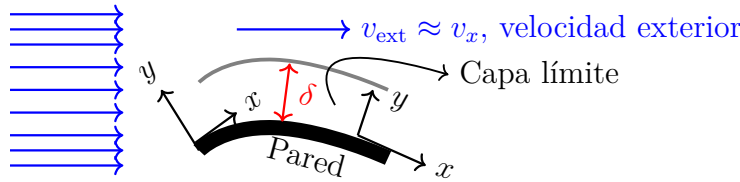
En 1904, Ludwig Prandtl introduce la *Aproximación de capa límite*. Prandtl observó que el fluido alrededor de un cuerpo se podía dividir en dos regiones: La primera que rodea al cuerpo, llamada *capa límite*, en la que los efectos viscosos son predominantes, presentando un gradiente de velocidad grande y una región exterior a la capa límite, en donde la interacción entre el fluido y el cuerpo se desprecian, región de fluido libre. La región de capa límite, es una región muy delgada ubicada en las cercanías de una pared sólida, en donde las fuerzas viscosas y rotacionales no pueden despreciarse. En esta región las fuerzas viscosas sobrepasan las fuerzas inerciales, originando una deformación en el fluido. La siguiente Figura muestra la región de capa límite, donde $\delta(x)$ es el espesor de la capa límite. $\delta(x)$ debe de ser muy pequeño y por lo general se define como la distancia a la pared a la cual la componente de velocidad paralela a la pared es el 90% de la velocidad del fluido afuera de la capa límite.



En la región de flujo exterior, se usa la continuidad y las ecuaciones de Euler para obtener el campo de velocidad de flujo exterior y la ecuación de Bernoulli para obtener el campo de presiones. Sin embargo, dentro de la región de capa límite, las fuerzas de viscosidad y la rotacionalidad no pueden despreciarse y por lo tanto se deben de resolver las ecuaciones de capa límite, las cuales son aproximaciones de la ecuación de Navier-Stokes.

6.1 Ecuaciones de la capa límite

Para derivar las ecuaciones de la capa límite, se incorporará un sistema coordenado llamado sistema coordenado de capa límite. En este sistema coordenado, el eje x en todas partes es paralelo a la pared, mientras que el eje y es en todas partes perpendicular a la pared, como lo muestra la siguiente Figura:



La deducción de las ecuaciones de la capa límite, se empieza con la ecuación adimensional de Navier-Stokes, ecuación (5.23), suponiendo estado estacionario y despreciando el término de la gravedad,

$$(\mathbf{v}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{v}^* = -[Eu] \nabla^* P^* + \left[\frac{1}{Re} \right] \nabla^{*2} \mathbf{v}^* \quad (6.3)$$

El número de Euler es del orden de la unidad ($Eu \sim 1.0$) debido a que las diferencias de presión afuera de la capa límite se determinan mediante la ecuación de Bernoulli y $\Delta P = P - P_\infty \sim \rho v^2$, donde v es la velocidad del fluido exterior v_{ext} , que usualmente es igual a la velocidad de flujo libre. Para analizar las magnitudes de las componentes de la velocidad del fluido dentro de la capa límite, se parte de la ecuación de continuidad,

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \quad (6.4)$$

en dos dimensiones con densidad constante y en estado estacionario, se tiene:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (6.5)$$

Usando la ecuación de continuidad, se puede realizar un análisis de la magnitud de la componente y de la velocidad, v_y dentro de la capa límite. Entonces, dentro

de la capa límite, se pueden realizar las siguientes aproximaciones en ordenes de magnitud,

$$v_x \approx v, \quad \frac{\partial}{\partial x} \approx \frac{1}{L}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \approx \frac{1}{\delta}. \quad (6.6)$$

donde v es la magnitud de la velocidad justo sobre la capa límite, L es la longitud de la pared que compone el cuerpo laminar sobre el que está el fluido. Reemplazando (6.6) e (6.5),

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \rightarrow \frac{v}{L} + \frac{v_y}{\delta} \approx 0 \quad (6.7)$$

despejando la componente de la velocidad v_y ,

$$v_y \approx \left(\frac{\delta}{L} \right) v \quad (6.8)$$

y como la capa límite es muy delgada se tiene la desigualdad $\frac{\delta}{L} \ll 1.0$ y por lo tanto se concluye que $v_y \ll v$ en la región de la capa límite. Con éste resultado, se definen las siguientes variables adimensionales:

$$x^* = \frac{x}{L}, \quad y^* = \frac{y}{\delta}, \quad v_x^* = \frac{v_x}{v}, \quad v_y^* = \frac{v_y L}{v \delta}, \quad P^* = \frac{P - P_\infty}{\rho v^2}. \quad (6.9)$$

en donde se observa que v_y es muy pequeño. A continuación se analizarán las componentes y y x de la ecuación de Navier-Stokes dentro de la capa límite.

6.1.1 Análisis en la dirección y

Ahora, tomando la componente en la dirección y de la ecuación de Navier-Stokes, ecuación (4.148),

$$\sum_i \rho_i g_{iy} - \frac{\partial P}{\partial y} + \mu \nabla^2 v_y = \rho \frac{\partial v_y}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) v_y \quad (6.10)$$

suponiendo estado estacionario y despreciando la gravedad, en dos dimensiones ésta ecuación se reduce a:

$$-\frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) v_y = \rho \left(v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} \right) v_y \quad (6.11)$$

multiplicando en ambos lados por $\frac{1}{\rho}$ y definiendo la viscosidad dinámica como $\nu = \frac{\mu}{\rho}$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) v_y = \left(v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} \right) v_y \quad (6.12)$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} = v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \quad (6.13)$$

reemplazando (6.9) en (6.13), en cada uno de los términos:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial (\delta y^*)} (\rho v^2 P^* + P_\infty) = \frac{v^2}{\delta} \frac{\partial P^*}{\partial y^*} \quad (6.14)$$

$$\nu \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} = \nu \frac{\partial^2 \left(\frac{v\delta}{L} v_y^* \right)}{\partial (Lx^*)^2} = \frac{\nu v \delta}{L^3} \frac{\partial^2}{\partial x^{*2}} \quad (6.15)$$

$$\nu \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^2 \left(\frac{v\delta}{L} v_y^* \right)}{\partial (\delta y^*)^2} = \frac{\nu v \delta}{L \delta^2} \frac{\partial^2}{\partial y^{*2}} \quad (6.16)$$

$$v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} = (v v_x^*) \frac{\partial \left(\frac{v v_y^* \delta}{L} \right)}{\partial (Lx^*)} = \frac{v^2 \delta}{L^2} v_x^* \frac{\partial v_y^*}{\partial x^*} \quad (6.17)$$

$$v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{v \delta}{L} v_y^* \frac{\partial \left(\frac{v v_y^* \delta}{L} \right)}{\partial (\delta y^*)} = \frac{v^2 \delta}{L^2} v_y^* \frac{\partial v_y^*}{\partial y^*} \quad (6.18)$$

sumando las ecuaciones desde (6.14) a (6.18)

$$\frac{v^2 \delta}{L^2} v_x^* \frac{\partial v_y^*}{\partial x^*} + \frac{v^2 \delta}{L^2} v_y^* \frac{\partial v_y^*}{\partial y^*} = -\frac{v^2}{\delta} \frac{\partial P^*}{\partial y^*} + \frac{\nu v \delta}{L^3} \frac{\partial^2}{\partial x^{*2}} + \frac{\nu v \delta}{L \delta^2} \frac{\partial^2}{\partial y^{*2}} \quad (6.19)$$

multiplicando en ambos lados por $\frac{L^2}{v^2 \delta}$,

$$v_x^* \frac{\partial v_y^*}{\partial x^*} + v_y^* \frac{\partial v_y^*}{\partial y^*} = -\frac{L^2}{v^2 \delta} \frac{v^2}{\delta} \frac{\partial P^*}{\partial y^*} + \frac{L^2}{v^2 \delta} \frac{\nu v \delta}{L^3} \frac{\partial^2}{\partial x^{*2}} + \frac{L^2}{v^2 \delta} \frac{\nu v \delta}{L \delta^2} \frac{\partial^2}{\partial y^{*2}} \quad (6.20)$$

$$v_x^* \frac{\partial v_y^*}{\partial x^*} + v_y^* \frac{\partial v_y^*}{\partial y^*} = -\left(\frac{L}{\delta}\right)^2 \frac{\partial P^*}{\partial y^*} + \left(\frac{\nu}{vL}\right) \frac{\partial^2 v_y^*}{\partial x^{*2}} + \left(\frac{\nu}{vL}\right) \left(\frac{L}{\delta}\right)^2 \frac{\partial^2 v_y^*}{\partial y^{*2}} \quad (6.21)$$

En la ecuación (6.21) se puede identificar el número de Reynolds $Re = \frac{vL}{\nu}$,

$$v_x^* \frac{\partial v_y^*}{\partial x^*} + v_y^* \frac{\partial v_y^*}{\partial y^*} = -\left(\frac{L}{\delta}\right)^2 \frac{\partial P^*}{\partial y^*} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 v_y^*}{\partial x^{*2}} + \frac{1}{Re} \left(\frac{L}{\delta}\right)^2 \frac{\partial^2 v_y^*}{\partial y^{*2}} \quad (6.22)$$

Comparando los coeficientes de la ecuación, se observa que el segundo término de del lado derecho de la ecuación, es el más pequeño, puesto que para fluidos con viscosidad pequeña en número de Reynolds es grande, $Re \gg 1.0$. Usando el mismo razonamiento, el último término del lado derecho es pequeño. Despreciando éstos términos, la ecuación se reduce a:

$$v_x^* \frac{\partial v_y^*}{\partial x^*} + v_y^* \frac{\partial v_y^*}{\partial y^*} = - \left(\frac{L}{\delta} \right)^2 \frac{\partial P^*}{\partial y^*} \quad (6.23)$$

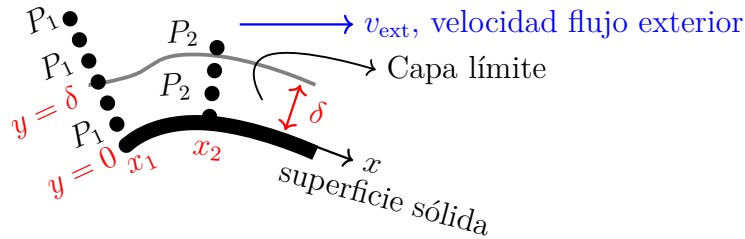
reescribiendo la ecuación como:

$$\frac{\partial P^*}{\partial y^*} = \left(\frac{\delta}{L} \right)^2 \left(v_x^* \frac{\partial v_y^*}{\partial x^*} + v_y^* \frac{\partial v_y^*}{\partial y^*} \right) \quad (6.24)$$

Además, como $L \gg \delta$, la ecuación se reduce a un gradiente de presión:

$$\frac{\partial P^*}{\partial y^*} \approx 0 \quad (6.25)$$

Es decir, un gradiente de presión normal a través de la capa límite es despreciable. Esto indica que aunque la presión puede variar a lo largo de la superficie sólida, en la dirección x , existe un cambio despreciable en la presión en la dirección normal a la superficie, en la dirección del eje coordenado y . La siguiente Figura muestra que el valor de la presión a lo largo del eje coordenado y es la misma.



La ecuación (6.25) y la Figura, indican que la presión en el borde exterior de la capa límite (en donde $y \approx \delta$) es la misma que la presión en el borde de la superficie sólida (en $y = 0$), y por lo tanto, dicha presión puede ser calculada a partir de la aproximación de flujo libre usando la ecuación de Bernoulli. Si se considera el último término de la ecuación (6.22) del orden unitario, se obtiene que el espesor de la capa límite es:

$$\delta = \frac{L}{\sqrt{Re}} \quad (6.26)$$

indicando que si se tiene un fluido con número de Reynolds muy grande, el grosor de su capa límite es muy pequeña.

Problema 6.1 Un automovil viaja a $50 \frac{Km}{H}$, si la viscosidad cinemática del aire a $20^\circ C$ es $1.51 \times 10^{-5} \frac{m}{s^2}$, ($\rho \approx 1.204 \frac{Kg}{m^3}$, $\mu \approx 1.81 \times 10^{-5} \frac{Ns}{m^2}$) y la longitud de cofre del auto es 112 cm . estime el valor del espesor de la capa límite.

Solución

El espesor de la capa límite es determinado por la ecuación:

$$\delta = \frac{L}{\sqrt{Re}} \quad (6.27)$$

calculando el número de Reynolds,

$$Re = \frac{vL}{\nu} = \frac{\left(50 \frac{Km}{H}\right) (112 \text{ cm})}{1.51 \times 10^{-5} \frac{m}{s^2}} \quad (6.28)$$

$$Re = \frac{\left(50 \frac{Km}{H} \times \frac{1000m}{1Km} \times \frac{1H}{60s}\right) \left(112 \text{ cm} \times \frac{1m}{100 \text{ cm}}\right)}{1.51 \times 10^{-5} \frac{m^2}{s}} \quad (6.29)$$

$$Re = \frac{\left(833,33 \frac{m}{s}\right) (1,12 \text{ m})}{1.51 \times 10^{-5} \frac{m^2}{s}} \approx \frac{933,33}{1.51 \times 10^{-5}} \quad (6.30)$$

$$Re \approx 618,1 \times 10^5 \quad (6.31)$$

es decir,

$$Re \approx 6,2 \times 10^7 \quad (6.32)$$

reemplazando en el espesor δ ,

$$\delta = \frac{L}{\sqrt{Re}} = \frac{112}{\sqrt{618,1 \times 10^5}} \text{ cm} \quad (6.33)$$

$$\delta \approx 0.014 \text{ cm} \quad (6.34)$$

6.1.2 Análisis en la dirección de x

Regresando a la ecuación de Navier-Stokes en 2-D, pero en la dirección del flujo, coordenada x , en estado estacionario y despreciando los efectos de gravedad,

$$-\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) v_x = \rho \left(v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} \right) v_x \quad (6.35)$$

organizando,

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \quad (6.36)$$

realizando el mismo análisis que en la dirección y , con las ecuaciones adimensionales (6.9), se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial (Lx^*)} (\rho v^2 P^* + P_\infty) = \frac{v^2}{L} \frac{\partial P^*}{\partial x^*} \quad (6.37)$$

$$\nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} = \nu \frac{\partial^2 (vv_x^*)}{\partial (Lx^*)^2} = \frac{\nu v}{L^2} \frac{\partial^2 v_x^*}{\partial x^{*2}} \quad (6.38)$$

$$\nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^2 (vv_x^*)}{\partial (\delta y^*)^2} = \frac{\nu v}{\delta^2} \frac{\partial^2 v_x^*}{\partial y^{*2}} \quad (6.39)$$

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} = vv_x^* \frac{\partial (vv_x^*)}{\partial (Lx^*)} = \frac{v^2}{L} v_x^* \frac{\partial v_x^*}{\partial x^*} \quad (6.40)$$

$$v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\delta v}{L} v_y^* \frac{\partial (vv_x^*)}{\partial (\delta y^*)} = \frac{v^2}{L} v_y^* \frac{\partial v_x^*}{\partial y^*} \quad (6.41)$$

sumando las ecuaciones de (6.37) a (6.41) con el objetivo de obtener a (6.36), tiene:

$$-\frac{v^2}{L} \frac{\partial P^*}{\partial x^*} + \frac{\nu v}{L^2} \frac{\partial^2 v_x^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\nu v}{\delta^2} \frac{\partial^2 v_x^*}{\partial y^{*2}} = \frac{v^2}{L} v_x^* \frac{\partial v_x^*}{\partial x^*} + \frac{v^2}{L} v_y^* \frac{\partial v_x^*}{\partial y^*} \quad (6.42)$$

multiplicando a ambos lados por $\frac{L}{v^2}$,

$$-\frac{\partial P^*}{\partial x^*} + \left(\frac{\nu}{vL}\right) \frac{\partial^2 v_x^*}{\partial x^{*2}} + \left(\frac{\nu}{vL}\right) \left(\frac{L}{\delta}\right)^2 \frac{\partial^2 v_x^*}{\partial y^{*2}} = v_x^* \frac{\partial v_x^*}{\partial x^*} + v_y^* \frac{\partial v_x^*}{\partial y^*} \quad (6.43)$$

y en función del número de Reynolds Re ,

$$v_x^* \frac{\partial v_x^*}{\partial x^*} + v_y^* \frac{\partial v_x^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial P^*}{\partial x^*} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 v_x^*}{\partial x^{*2}} + \frac{1}{Re} \left(\frac{L}{\delta}\right)^2 \frac{\partial^2 v_x^*}{\partial y^{*2}} \quad (6.44)$$

en donde se observa que $\frac{1}{Re} \left(\frac{L}{\delta}\right)^2 \gg \frac{1}{Re}$, y por lo tanto, para grandes valores de Reynolds ($\mu \rightarrow 0$), la ecuación puede reducirse a:

$$v_x^* \frac{\partial v_x^*}{\partial x^*} + v_y^* \frac{\partial v_x^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial P^*}{\partial x^*} + \frac{1}{Re} \left(\frac{L}{\delta}\right)^2 \frac{\partial^2 v_x^*}{\partial y^{*2}} \quad (6.45)$$

donde se ha eliminado el término de la derivada $\frac{1}{Re} \frac{\partial^2 v_x^*}{\partial x^{*2}}$ y de esta forma también se elimina de la ecuación original (6.36) obteniéndose:

$$\rho v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \rho v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad (6.46)$$

es decir,

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \quad (6.47)$$

y en términos de la viscosidad cinemática ν ,

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \quad (6.48)$$

Usando la ecuación de Bernoulli para calcular el campo de presiones,

$$\frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz = 0 \quad (6.49)$$

se obtiene que:

$$\frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} = \text{constante} \quad (6.50)$$

derivando con respecto a x

$$\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} + v \frac{dv}{dx} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} = -v \frac{dv}{dx} \quad (6.51)$$

reemplazando este resultado en (6.48)

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = v \frac{dv}{dx} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad (6.52)$$

donde v es la velocidad en el exterior de la capa límite. Resumiendo: Las ecuaciones de movimiento para una capa límite laminar de flujo estacionario e incompresible en el plano xy , sin efectos gravitacionales son:

- La ecuación de continuidad, ecuación (6.5)

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (6.53)$$

- La ecuación de cantidad de movimiento en x dentro de la capa límite, ecuación (6.52)

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = v \frac{dv}{dx} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad (6.54)$$

Observaciones

- La aproximación de la capa límite, no es válida si el número de Reynolds no es suficientemente grande, por ejemplo:

$$\frac{\delta}{L} \sim 0.03 \quad 3 \text{ por ciento} \rightarrow Re \approx 1000 \quad (6.55)$$

$$\frac{\delta}{L} \sim 0.01 \quad 1 \text{ por ciento} \rightarrow Re \approx 10000 \quad (6.56)$$

- La suposición del gradiente de presión cero, en la dirección y , no es válida si la curvatura de la pared es de magnitud similar a δ . En estos casos no se pueden ignorar los efectos de la aceleración centrípeta debidos a la curvatura de la línea del corriente del flujo.
- Si la capa límite no es laminar (el número de Reynolds es demasiado alto) la aproximación de la capa límite no es apropiada. Esta aproximación no es para flujos de transición o turbulentos.

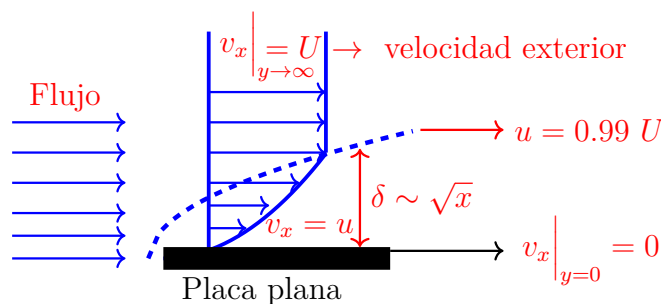
6.2 Capa límite en una placa plana

Para una placa plana, la capa límite laminar usando el último término de la ecuación (6.22) con $L = x$, es:

$$\left(\frac{\nu}{vx}\right) \left(\frac{x}{\delta}\right)^2 \approx 1.0 \rightarrow \delta = \left(\frac{\nu x}{v}\right)^{1/2} \quad (6.57)$$

es decir, el grosor de la capa límite crece como la raíz cuadrada de x (ver Figura),

$$\delta \approx \sqrt{x} \quad (6.58)$$



La Figura también muestra que la magnitud de los vectores de velocidad $v_x = u$ que se encuentran dentro de la región de la capa límite varían con respecto a la coordenada y , y cuando el perfil de velocidad intercepta con la curva que encierra la capa límite, la magnitud de los vectores de velocidad se tornan constante para todos los valores de y .

Examinemos las ecuaciones de la capa límite sobre una placa plana. La solución exacta, fué propuesta por H. Blasius en 1908. Para un flujo bidimensional en estado estable y con gradiente de presión despreciable, las ecuaciones son: la ecuación de continuidad y la ecuación de cantidad de movimiento,

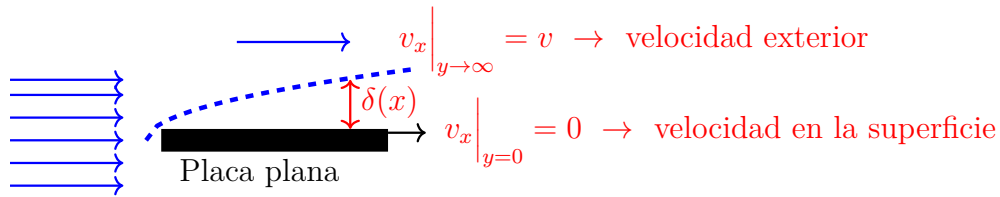
$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (6.59)$$

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad (6.60)$$

donde $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ es la viscosidad cinemática. La siguiente Figura, muestra las condiciones de frontera para solucionar éstas ecuaciones.

$$v_x = 0 \quad \text{en} \quad y = 0 \quad (6.61)$$

$$v_x = v \quad \text{cuando} \quad y \rightarrow \infty \quad (6.62)$$



Blasius propuso la solución de similitud:

$$\frac{v_x}{v} = g(\eta), \quad \text{donde} \quad \eta \sim \frac{y}{\delta} \quad (6.63)$$

con δ como el espesor de la capa límite y η es función de x , y , v y ν , tal que:

$$\eta = y \sqrt{\frac{v}{\nu x}} \quad (6.64)$$

además, define la función de corriente ψ mediante la expresión,

$$v_x \equiv \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y \equiv -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (6.65)$$

la cual satisface la ecuación de continuidad. Definiendo la función de corriente adimensional,

$$f(\eta) = \frac{\psi}{\sqrt{\nu x v}} \quad (6.66)$$

se obtiene la función de corriente de Blasius,

$$\psi = \sqrt{\nu x v} f(\eta) \quad (6.67)$$

Entonces, para la componente de velocidad v_x , se tiene:

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (6.68)$$

derivando las ecuaciones (6.67) con respecto a η y la ecuación (6.64) con respecto a y , se obtiene:

$$v_x = \left(\sqrt{\nu x v} \frac{\partial f(\eta)}{\partial \eta} \right) \left(\sqrt{\frac{v}{\nu x}} \right) \quad (6.69)$$

$$v_x = v \frac{\partial f}{\partial \eta} \quad (6.70)$$

Ahora, para obtener la componente de velocidad en la dirección y , v_y de la ecuación (6.65), primero se calcula la variación de la función de corriente con respecto a x ,

$$v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} [\sqrt{\nu x v} f(\eta)] \quad (6.71)$$

es decir,

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{2} \sqrt{\nu v} x^{-1/2} f(\eta) + \sqrt{\nu x v} \frac{\partial f}{\partial x} \quad (6.72)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu v}{x}} f(\eta) + \sqrt{\nu x v} \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (6.73)$$

derivando a (6.64) con respecto a x ,

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{y}{2} \sqrt{\frac{v}{\nu x}} \frac{1}{x} \quad (6.74)$$

reemplazando,

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu v}{x}} f - \frac{y}{2} \sqrt{\frac{v}{\nu x}} \frac{1}{x} \sqrt{\nu x v} \frac{\partial f}{\partial \eta} \quad (6.75)$$

de nuevo, recuperando la ecuación (6.64),

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu v}{x}} f - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu x v}{x}} \frac{\eta}{\partial \eta} \frac{\partial f}{\partial \eta} \quad (6.76)$$

organizando,

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu v}{x}} f - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu v}{x}} \eta \frac{\partial f}{\partial \eta} \quad (6.77)$$

es decir,

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu v}{x}} \left(f - \eta \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) \quad (6.78)$$

y la componente y de la velocidad es,

$$v_y = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu v}{x}} \left(\eta \frac{\partial f}{\partial \eta} - f \right) \quad (6.79)$$

Para reemplazar éstas ecuaciones en la ecuaciones (6.59) y (6.60), se necesitan tener las derivadas de la componentes v_x y v_y , ver ecuaciones (6.70) y (6.79), entonces,

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (6.80)$$

$$= \frac{\partial}{\partial \eta} \left(v \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(y \sqrt{\frac{v}{\nu x}} \right) \quad (6.81)$$

$$= \left(v \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) \left(-\frac{1}{2} \frac{\eta}{x} \right) \quad (6.82)$$

$$(6.83)$$

osea,

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{v}{2x} \eta \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \quad (6.84)$$

derivando a la componente v_x con respecto a y , conociendo las ecuaciones (6.64) y (6.70),

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial v_x}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (6.85)$$

$$= \frac{\partial}{\partial \eta} \left(v \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left(y \sqrt{\frac{v}{\nu x}} \right) \quad (6.86)$$

es decir,

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = v \sqrt{\frac{v}{\nu x}} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \quad (6.87)$$

y la segunda derivada con respecto a y ,

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (6.88)$$

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(v \sqrt{\frac{v}{\nu x}} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left(y \sqrt{\frac{v}{\nu x}} \right) \quad (6.89)$$

obteniéndose,

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \frac{v^2}{\nu x} \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} \quad (6.90)$$

Ahora, con las ecuaciones (6.70), (6.84), (6.79), (6.87) y (6.90), se reemplazan en la ecuación de cantidad de movimiento (6.60),

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad (6.91)$$

se obtiene:

$$\left(v \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) \left(-\frac{v}{2x} \eta \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu v}{x}} \left(\eta \frac{\partial f}{\partial \eta} - f \right) \left(v \sqrt{\frac{v}{\nu x}} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) = \nu \frac{v^2}{\nu x} \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} \quad (6.92)$$

organizando la ecuación,

$$-\left(\frac{v^2 \eta}{2x} \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \left(\frac{v^2 \eta}{2x} \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \frac{1}{2} \frac{v^2}{x} f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} = \frac{v^2}{x} \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} \quad (6.93)$$

cancelando términos,

$$-f \frac{d^2 f}{d\eta^2} = 2 \frac{d^3 f}{d\eta^3} \quad (6.94)$$

es decir, se debe de resolver la ecuación diferencial,

$$2\frac{d^3f}{d\eta^3} + f\frac{d^2f}{d\eta^2} = 0 \quad (6.95)$$

con las siguientes condiciones de frontera: En $\eta = 0$, no se presentan deslizamientos y las velocidades u y v son iguales a cero ($u = v = 0$), así que:

$$f(0) = 0, \quad \left. \frac{df}{d\eta} \right|_{\eta=0} = f'(0) = 0, \quad \text{en } \eta = 0, \text{ osea en } y = 0 \quad (6.96)$$

y cuando $\eta \rightarrow \infty$, la velocidad u se aproxima a la velocidad del fluido libre, $u \rightarrow U$, así que se tiene la condición de frontera:

$$\left. \frac{df}{d\eta} \right|_{\eta \rightarrow \infty} = f'(\infty) = 1, \quad \text{en } \eta \rightarrow \infty, \text{ osea en } y \rightarrow \infty \quad (6.97)$$

Los valores para η , $\frac{df}{d\eta}$ y $\frac{d^2f}{d\eta^2}$ obtenidos de la solución numérica de esta ecuación diferencial, son mostrados en la Tabla 6.1 y sus gráficas se muestran en la Figura 6.2.

El perfil de velocidad se obtiene de forma adimensional al graficar $\frac{u}{U}$ versus η usando los valores de la Tabla. En la Figura 6.2 se observa que el perfil de velocidad normalizada $f' = \frac{u}{U}$, asintóticamente se aproxima al valor de 1.0. El valor típico de η , se escoje cuando la velocidad es aproximadamente el 99% de la velocidad del fluido libre, $u \approx 0.99U$. La Figura 6.2 muestra el punto (4.92, 0.99), valores que corresponde a un $\eta = 4.92$ cuando se cumple la condición $u \approx 0.99U$. También se observa que se cumple con la condición de frontera $f'(\eta \rightarrow \infty) \approx 1$, cuando $\eta \approx 4.92$.

6.2.1 Espesor, esfuerzo cortante y fuerza de arrastre

En Figura 6.2 (también ver Tabla 6.1) se observa que para $\eta \approx 4.92$, se tiene $\frac{v_x}{v} \approx 0.99$ (para $\frac{v_x}{v} \approx 0.99$, $\eta \approx 4.92$). Ahora, definiendo el espesor de la capa límite δ , como el valor de y para el cual $\frac{v_x}{v} \approx 0.99$, se obtiene que el espesor de la capa límite para una placa es:

$$\delta \approx \frac{4.92x}{\sqrt{Re}} \quad (6.98)$$

en donde se ha usado la ecuación (6.64), $\eta = y\sqrt{\frac{v}{\nu x}}$ con $y = \delta$, $Re = \frac{vx}{\nu}$, y $\eta \approx 4.92$. Para una capa límite bidimensional, el esfuerzo cortante tangencial puede escribirse como:

Tabla 6.1: Resultados de la solución de la ecuación de Blasius, ecuación (6.95)

$\eta = y\sqrt{\frac{U}{\nu x}}$	$f(\eta)$	$f'(\eta) = \frac{u}{U}$	$f''(\eta)$
0.00	0.000	0.000	0.332
0.32	0.017	0.105	0.332
0.63	0.066	0.210	0.330
0.95	0.149	0.313	0.324
1.26	0.264	0.414	0.314
1.58	0.411	0.511	0.298
1.90	0.587	0.602	0.275
2.21	0.790	0.685	0.247
2.53	1.019	0.758	0.214
2.85	1.269	0.820	0.179
3.16	1.536	0.871	0.143
3.48	1.818	0.911	0.110
3.79	2.111	0.941	0.081
4.11	2.412	0.962	0.056
4.43	2.719	0.977	0.038
4.74	3.029	0.986	0.024
5.06	3.342	0.992	0.014
5.38	3.657	0.996	0.008
5.69	3.972	0.998	0.005
6.01	4.288	0.999	0.002
6.32	4.604	1.000	0.001
6.64	4.920	1.000	0.001
6.96	5.236	1.000	0.000

$$\tau_{yx} = -\mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \quad (6.99)$$

Pero, de acuerdo con la ecuación (6.8), la componente de la velocidad v_y es muy pequeña comparada con la componente de velocidad v_x , $v_y \approx \left(\frac{\delta}{L} \right) v$, por lo tanto, el esfuerzo cortante en la pared puede escribirse como:

$$\tau_{\text{pared}} = -\mu \frac{\partial v_x}{\partial y} \bigg|_{y=0} \quad (6.100)$$

reemplazando la derivada de v_x , ecuación (6.87),

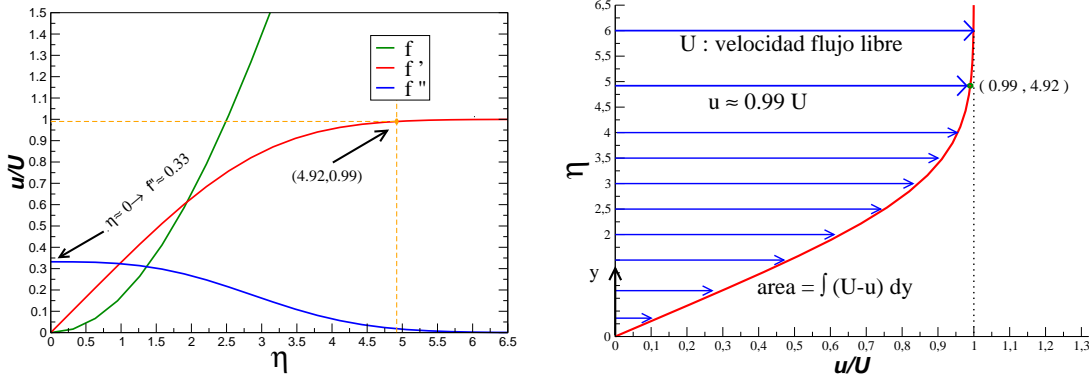


Figura 6.2: Soluciones de la ecuación de Blasius para una viscosidad cinética de $\nu \approx 0.01$, número de Reynolds de $Re_x \approx 1000$ y el grosor del perfil de la capa límite en una placa plana..

$$\tau_{\text{pared}} = \mu v \sqrt{\frac{v}{\nu x}} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \Big|_{y=0} = v^2 \sqrt{\frac{\mu^2 \rho}{\mu \nu x}} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \Big|_{y=0} \quad (6.101)$$

organizando la ecuación,

$$\tau_{\text{pared}} = v^2 \sqrt{\frac{\mu \rho^2}{\rho \nu x}} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \Big|_{y=0} = \rho v^2 \sqrt{\frac{\nu}{v x}} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \Big|_{y=0} \quad (6.102)$$

es decir,

$$\tau_{\text{pared}} = \rho v^2 \sqrt{\frac{1}{\frac{vx}{\nu}}} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \Big|_{y=0} \quad (6.103)$$

$$\tau_{\text{pared}} = \frac{\rho v^2}{\sqrt{Re}} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \Big|_{y=0} \quad (6.104)$$

de la Figura 6.2 (también ver Tabla 6.1), también se observa que cuando $\eta \rightarrow 0$ (recordar que si $y \rightarrow 0$, entonces $\eta \rightarrow 0$), la segunda derivada de f se aproxima a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \Big|_{y=0} \approx 0.33, \text{ obteniéndose un esfuerzo cortante:}$$

$$\tau_{\text{pared}} \approx 0.33 \frac{\rho v^2}{\sqrt{Re}} \quad (6.105)$$

y el coeficiente de esfuerzo cortante en la pared, C_f , es:

$$C_f = \frac{\tau_{\text{pared}}}{\frac{1}{2} \rho U^2} \approx \frac{0.66}{\sqrt{Re}} \quad (6.106)$$

La fuerza de arrastre F_a sobre cada cara de la placa de longitud L y anchura la unidad,

$$F_a = \int_0^L \tau_{\text{pared}} dx \approx 0.33v^2 \sqrt{\frac{\mu^2 \rho}{\mu v}} \int_0^L x^{-1/2} dx \quad (6.107)$$

$$F_a = \int_0^L \tau_{\text{pared}} dx \approx 0.66v^2 \sqrt{\frac{\mu^2 \rho L}{\mu v}} \quad (6.108)$$

$$F_a \approx 0.66 \sqrt{v^3 \mu \rho L} \quad (6.109)$$

Problema 6.2 La vorticidad se determina usando la siguiente expresión:

$$\omega_z = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \quad (6.110)$$

donde u y v son las velocidades del fluido en las direcciones x y y , respectivamente. Además, el esfuerzo cortante sobre la superficie del plano yx es:

$$\tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (6.111)$$

donde μ es la viscosidad del fluido.

- Demuestre que dentro de la capa límite, la vorticidad puede calcularse usando la aproximación

$$\omega \approx \mu \left(\frac{U^3}{2\nu x} \right) \frac{\partial^2 f(\eta)}{\partial \eta^2} \quad (6.112)$$

donde μ es la viscosidad del fluido, U es la velocidad del fluido fuera de la capa límite, ν es la viscosidad cinemática, x es un punto ubicado en la placa, en la dirección x y $f(\eta)$ es la función de Blasius.

- Demuestre que dentro de la capa límite, el esfuerzo cortante sobre la placa ubicada en el plano xy puede calcularse usando la aproximación

$$\tau_{yx} \approx \mu \left(\frac{U^3}{2\nu x} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 f(\eta)}{\partial \eta^2} \quad (6.113)$$

Problema 6.3 El esfuerzo cortante que se produce en una lámina delgada τ_{pared} , es decir cuando $y = 0$, es dado por la integral de la cantidad de movimiento de Von-Karman:

$$\tau = -\frac{d}{dx} \left(\int_0^\delta \rho (u^2 - Uu) dy \right) \quad (6.114)$$

Suponga que el perfil de velocidades dentro de la capa límite es cuadrático y posee la siguiente forma:

$$u = ay + by^2 \quad (6.115)$$

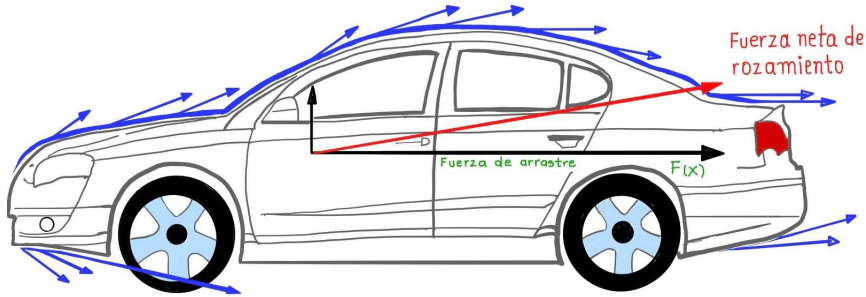
con las siguientes condiciones de frontera:

$$u(y) \Big|_{y=\delta} = U, \quad \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=\delta} = 0 \quad (6.116)$$

Demuestre que el espesor de la capa límite generada sobre la placa plana es:

$$\delta \approx 5.48 \sqrt{Re_x x} \quad (6.117)$$

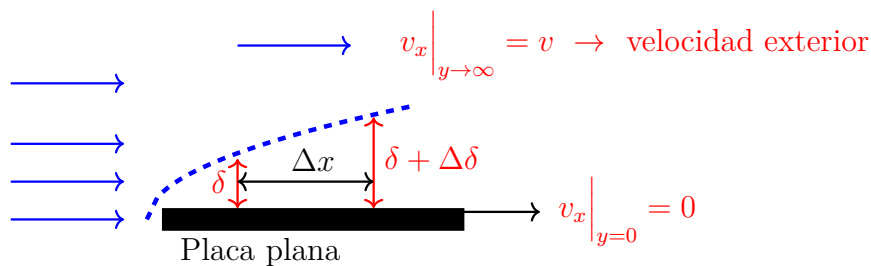
Realice una gráfica para comparar éste resultado con la solución obtenida por Blasius.



Tema No. 7

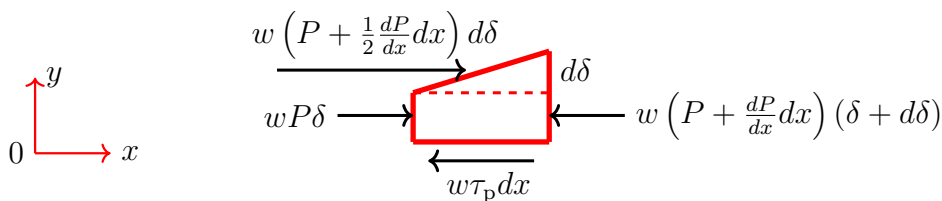
Ecuación de Von-Karman

Ya se había comentado, resolver de forma analítica las ecuaciones de Navier-Stokes es una tarea imposible, salvo en los casos muy simplificados o sencillos, otra de las alternativas de obtener información de resultados de aplicar la ecuación de Navier-Stokes a un sistema en la región de capa límite, es analizar la fuerza neta, el flujo de masa y la variación del momentum en un elemento diferencial de la región de capa límite. La siguiente Figura muestra la variación de la región de capa límite.



7.1 Fuerza neta en la capa límite

La siguiente Figura, muestra las fuerzas externas que actúan sobre el elemento de la capa límite. Como $F = PA \approx Pw\delta$, donde w es la distancia z , perpendicular al plano de la hoja.



Entonces, las fuerzas externas que actúan sobre el diferencial, en la dirección x son:

$$dF_{\text{neta},x} = wP\delta - w \left(P + \frac{dP}{dx} dx \right) (\delta + d\delta) + w \left(P + \frac{1}{2} \frac{dP}{dx} dx \right) d\delta - w\tau_p dx \quad (7.1)$$

realizando multiplicaciones,

$$dF_{\text{neta},x} = wP\delta - wP\delta - w \frac{dP}{dx} dx \delta - wP d\delta - w \frac{dP}{dx} dx d\delta + wP d\delta + \frac{1}{2} w \frac{dP}{dx} dx d\delta - w\tau_p dx \quad (7.2)$$

cancelando términos,

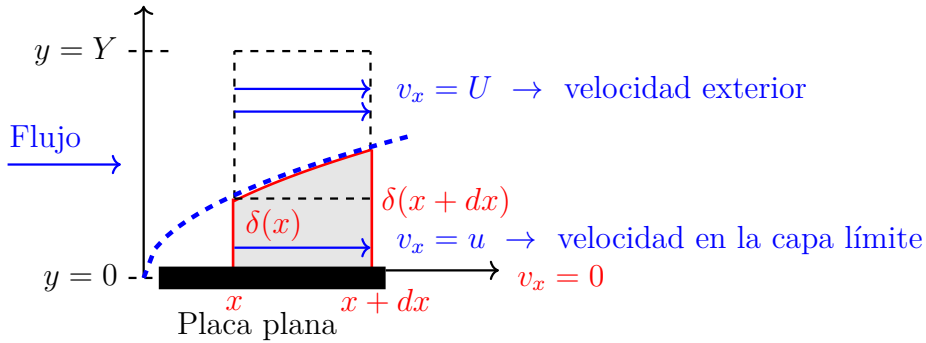
$$dF_{\text{neta},x} = -w \frac{dP}{dx} dx \delta - \frac{1}{2} w \frac{dP}{dx} dx d\delta - w\tau_p dx \quad (7.3)$$

despreciando el término de segundo orden $dx d\delta$, por ser muy pequeño, se obtiene:

$$dF_{\text{neta},x} \approx -w \delta \frac{dP}{dx} dx - w\tau_p dx \quad (7.4)$$

7.2 Flujo de masa en la capa límite

Como la razón de flujo de masa \dot{m} es expresada como: $\dot{m} = w \rho v_x dy$, con w como la coordenada z perpendicular al plano de la hoja, entonces,



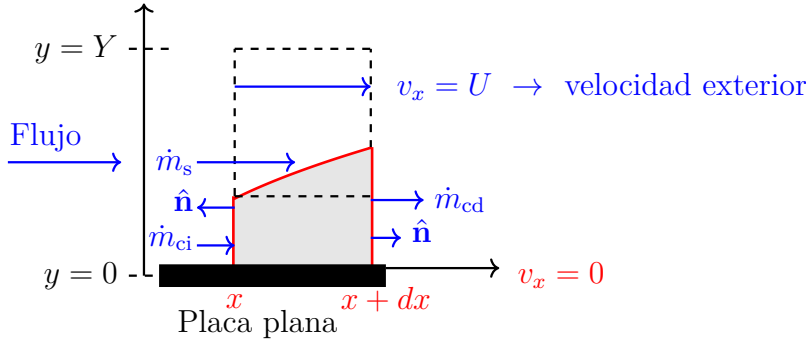
la razón de flujo de masa que entra en la Figura a través de la cara izquierda es:

$$\dot{m}_{\text{iz}} = \rho w \int_0^Y u dy \quad (7.5)$$

y el flujo de masa que sale por el lado derecho de la Figura es:

$$\dot{m}_{\text{der}} = \rho w \int_0^Y u dy + \rho w \frac{d}{dx} \left[\int_0^Y u dy \right] dx \quad (7.6)$$

donde w es el ancho del volumen de control. Dada la forma del volumen de control en la capa límite, ver Figura:



se observa que $\dot{m}_{cd} < \dot{m}_{ci}$ ya que \dot{m}_s es positivo (la masa fluye hacia afuera), y por lo tanto, la ley de conservación de la masa aplicada al volumen de control es:

$$\dot{m}_s + \dot{m}_{ci} = \dot{m}_{cd} \quad (7.7)$$

despejando \dot{m}_s ,

$$\dot{m}_s = \dot{m}_{cd} - \dot{m}_{ci} \quad (7.8)$$

reemplazando,

$$\dot{m}_s = \rho w \int_0^Y u dy + \rho w \frac{d}{dx} \left[\int_0^Y u dy \right] dx - \rho w \int_0^Y u dy \quad (7.9)$$

$$\dot{m}_s = \rho w \frac{d}{dx} \left[\int_0^Y u dy \right] dx \quad (7.10)$$

donde \dot{m}_s corresponde a la variación del flujo de masa de la parte superior de la Figura anterior.

7.3 Variación del momentum en la capa límite

Sabiendo que $\dot{\mathbf{p}}_x = \rho v_x \frac{\mathbf{x}}{t} \cdot \mathbf{A}$, es decir, $\dot{\mathbf{p}}_x = \rho v_x \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}$, se tiene que la variación del momentum es:

$$\dot{\mathbf{p}} = \int \rho u \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA \quad (7.11)$$

donde \mathbf{n} es el vector unitario perpendicular al plano que forma el área A . Ahora, aplicando la ley de conservación de la cantidad de momentum en la dirección x , y

debido a que en la parte superior $d\delta$ es muy pequeño, entonces la velocidad que pasa por el plano inclinado del elemento de control en la capa límite, en su mayoría, corresponde a la velocidad del fluido libre U y de esta forma $U\dot{m}_s$ es la fuerza que se le realiza al plano inclinado, y el balance de fuerzas es escrito como:

$$dF_{\text{neta},x} = \dot{p}_{\text{entra},x} + \dot{p}_{\text{sale},x} + U\dot{m}_s \quad (7.12)$$

donde U es la velocidad del fluido libre y multiplica a la variación del flujo de masa que entra por la parte superior del volumen de control en la capa límite. En este caso, la velocidad libre del fluido se rotula como $v_{\text{libre},x} = U$.

$$dF_{\text{neta},x} = \int_{\text{entra}} \rho u \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA + \left[\int_{\text{sale}} \rho u \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA + \frac{d}{dx} \left(\int_{\text{sale}} \rho u \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA \right) dx \right] + U\dot{m}_s \quad (7.13)$$

El vector unitario $\hat{\mathbf{n}}$ tiene dirección opuesta a la dirección del momento que entra y tiene la misma dirección que la del momento que sale (ver Figura), y sabiendo que la velocidad dentro de la región de capa límite es $\mathbf{v} = v_x \mathbf{i}$, la ecuación toma la forma:

$$dF_{\text{neta},x} = - \int \rho u v_x dA + \left[\int \rho u v_x dA + \frac{d}{dx} \left(\int \rho u v_x dA \right) dx \right] + U\dot{m}_s \quad (7.14)$$

el diferencial de área perpendicular el eje x es $dA = w dy$ y dentro de la región de la capa límite la velocidad en x es rotulada como u ($v_x = u$), por lo tanto,

$$dF_{\text{neta},x} = -w \int \rho u^2 dy + \left[w \int \rho u^2 dy + \frac{d}{dx} \left(w \int \rho u^2 dy \right) dx \right] + U\dot{m}_s \quad (7.15)$$

reemplazando la variación del flujo de masa que entra al volumen de control ubicado en la región de capa límite, ecuación (7.10) e integrando en la región del volumen de control (ver Figura), se obtiene:

$$dF_{\text{neta},x} = -w \int_0^Y \rho u^2 dy + \left[w \int_0^Y \rho u^2 dy + \frac{d}{dx} \left(w \int_0^Y \rho u^2 dy \right) dx \right] - \rho U w \frac{d}{dx} \left[\int_0^Y u dy \right] dx \quad (7.16)$$

cancelando los dos primeros términos,

$$dF_{\text{neta},x} = w \rho \frac{d}{dx} \left(\int_0^Y u^2 dy \right) dx - \rho U w \frac{d}{dx} \left[\int_0^Y u dy \right] dx \quad (7.17)$$

La fuerza neta que se realiza en el volumen de control $dF_{\text{net},x}$ está dada por la ecuación (7.4). reemplazando ésta fuerza neta,

$$-wY \frac{dP}{dx} dx - w\tau_p dx = w\rho \frac{d}{dx} \left(\int_0^Y u^2 dy \right) dx - \rho U w \frac{d}{dx} \left[\int_0^Y u dy \right] dx \quad (7.18)$$

cancelando w ,

$$-Y \frac{dP}{dx} - \tau_p = \rho \frac{d}{dx} \left(\int_0^Y u^2 dy \right) - \rho U \frac{d}{dx} \left[\int_0^Y u dy \right] \quad (7.19)$$

Recordando que la presión es constante con respecto a la coordenada y , la presión dentro de la región de capa límite puede calcularse fuera de la región de la capa límite, es decir, la presión puede calcularse usando la ecuación de Bernoulli, la cual dá como resultado:

$$\frac{dP}{dx} = -\rho U \frac{dU}{dx} \quad (7.20)$$

Además, la variable Y , puede escribirse de forma integral como:

$$Y = \int_0^Y dy \quad (7.21)$$

con (7.20) y (7.21), la ecuación (7.19) puede reescribirse como:

$$\rho U \frac{dU}{dx} \int_0^Y dy - \tau_p = \rho \frac{d}{dx} \left[\int_0^Y u^2 dy \right] - \rho U \frac{d}{dx} \left[\int_0^Y u dy \right] \quad (7.22)$$

despejando τ_p ,

$$\frac{\tau_p}{\rho} = U \frac{dU}{dx} \int_0^Y dy - \frac{d}{dx} \left[\int_0^Y u^2 dy \right] + U \frac{d}{dx} \left[\int_0^Y u dy \right] \quad (7.23)$$

como,

$$U \frac{d}{dx} \left[\int_0^Y u dy \right] = \frac{d}{dx} \left[U \int_0^Y u dy \right] - \frac{dU}{dx} \left[\int_0^Y u dy \right] \quad (7.24)$$

reemplazando,

$$\begin{aligned} \frac{\tau_p}{\rho} = U \frac{dU}{dx} \int_0^Y dy - \frac{d}{dx} \left[\int_0^Y u^2 dy \right] + \frac{d}{dx} \left[U \int_0^Y u dy \right] \\ - \frac{dU}{dx} \left[\int_0^Y u dy \right] \end{aligned} \quad (7.25)$$

organizando,

$$\frac{\tau_p}{\rho} = \frac{dU}{dx} \int_0^Y (U - u) dy + \frac{d}{dx} \int_0^Y (Uu - u^2) dy \quad (7.26)$$

$$\frac{\tau_p}{\rho} = \frac{d}{dx} \int_0^Y Uu \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy + \frac{dU}{dx} \int_0^Y U \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy \quad (7.27)$$

y como la velocidad libre U solo es función de x , $U = U(x)$, se obtiene:

$$\frac{\tau_p}{\rho} = \frac{d}{dx} \left[U^2 \int_0^Y \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy \right] + \frac{dU}{dx} \left[U \int_0^Y \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy \right] \quad (7.28)$$

definiendo el *espesor de cantidad de movimiento* como:

$$\Theta \equiv \int_0^Y \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy \quad (7.29)$$

y *espesor de desplazamiento* como:

$$\delta^* \equiv \int_0^Y \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy \quad (7.30)$$

la ecuación (7.28), se escribe de una forma más compacta como:

$$\frac{d}{dx} (U^2 \Theta) + U \frac{dU}{dx} \delta^* = \frac{\tau_p}{\rho} \quad (7.31)$$

La ecuación (7.31) es la ecuación de Von-Karman, en honor a Theodor von-Karman, estudiante de Prandtl quien fué el primero en deducir la ecuación en 1921. Otra forma de escribir la ecuación de Von-Karman es:

$$2U\Theta \frac{dU}{dx} + U^2 \frac{d\Theta}{dx} + U\delta^* \frac{dU}{dx} = \frac{\tau_p}{\rho} \quad (7.32)$$

dividiendo a ambos lados por U^2 ,

$$2 \frac{\Theta}{U} \frac{dU}{dx} + \frac{d\Theta}{dx} + \frac{\delta^*}{U} \frac{dU}{dx} = \frac{\tau_p}{U^2 \rho} \quad (7.33)$$

$$\frac{d\Theta}{dx} + \left(2 \frac{\Theta}{U} + \frac{\delta^*}{U}\right) \frac{dU}{dx} = \frac{\tau_p}{U^2 \rho} \quad (7.34)$$

$$\frac{d\Theta}{dx} + \left(2 + \frac{\delta^*}{\Theta}\right) \frac{\Theta}{U} \frac{dU}{dx} = \frac{\tau_p}{U^2 \rho} \quad (7.35)$$

7.4 Coeficiente de fricción

Definiendo el coeficiente de fricción como:

$$C_{f,x} = \frac{\tau_p}{\frac{1}{2}\rho U^2} \quad (7.36)$$

reemplazando el esfuerzo cortante en la pared τ_p , ecuación (6.105),

$$C_{f,x} = \frac{(2)(0.33206)}{\rho v^2} \frac{\rho v^2}{\sqrt{Re_x}} \quad (7.37)$$

obteniéndose,

$$C_{f,x} = \frac{0.66412}{\sqrt{Re_x}} \quad (7.38)$$

El coeficiente de fricción $C_{f,x}$, es un coeficiente local, es decir el coeficiente para un x dado. Para calcular la resistencia total resultante del flujo viscoso sobre la superficie de una placa de longitud L , se debe de conocer el factor de fricción promedio para toda la longitud de la placa, usando la expresión:

$$\overline{C}_{f,L} = \frac{1}{L} \int_0^L C_{f,x} dx \quad (7.39)$$

reemplazando el coeficiente de fricción,

$$\overline{C}_{f,L} = \frac{0.66412}{L} \left(\frac{\nu}{v}\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^L x^{-\frac{1}{2}} dx \quad (7.40)$$

$$\overline{C}_{f,L} = 2 \frac{0.66412}{L} \left(\frac{\nu}{v}\right)^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} \approx 1.32824 \left(\frac{\nu}{vL}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (7.41)$$

y en términos del número de Reynolds,

$$\overline{C}_{f,L} \approx \frac{1.32824}{\sqrt{Re_L}} \quad (7.42)$$

donde el coeficiente de fricción promedio $\overline{C}_{f,L}$ solo es válido mientras que Re_L sea menor o igual a 3×10^5 , región de flujo laminar.

Problema 7.1 *El perfil de velocidad en el regimen laminar propuesto por Von-Karman para una placa plana es de tipo parabólico, dado por la expresión:*

$$u(x, y) = U_{\infty} \left(\frac{2y}{\delta} - \frac{y^2}{\delta^2} \right) \quad (7.43)$$

Muestre que el espesor de cantidad de movimiento Θ es:

$$\Theta = \frac{2}{15}\delta \quad (7.44)$$

Que el esfuerzo cortante de la pared τ_p está dado por:

$$\tau_p = \frac{2\mu U_\infty}{\delta} \quad (7.45)$$

Que el espesor de la capa límite es:

$$\frac{\delta}{x} \approx \frac{5.5}{Re_x^{\frac{1}{2}}} \quad (7.46)$$

y que el coeficiente de fricción local es:

$$C_{f,x} \approx \frac{0.73}{Re_x^{\frac{1}{2}}} \quad (7.47)$$

Problema 7.2 Demuestre que usando el perfil de velocidad senoidal,

$$v_x = a \sin(\alpha y) \quad (7.48)$$

donde a y α son constantes a determinar, el espesor de la capa límite está dado por la ecuación:

$$\frac{\delta}{x} \approx \frac{4.80}{\sqrt{Re_x}} \quad (7.49)$$

y el coeficiente de fricción promedio, puede determinarse mediante la expresión:

$$\overline{C}_{f,L} \approx \frac{1.310}{\sqrt{Re_L}} \quad (7.50)$$

En la Tabla 7.1 se presenta algunos coeficientes de esfuerzos cortantes, válidos para las regiones laminar y turbulento.

Tabla 7.1: Coeficientes de esfuerzos cortantes para las zonas: laminar y turbulento.

	$\overline{C}_{f,L}$	Re	Capa
Blasius	$\frac{1.32824}{Re^{1/2}}$	10×10^5	Laminar
Prandtl	$\frac{0.074}{Re^{1/5}}$	10×10^7	Turbulento
Schlichting	$\frac{0.455}{(\log Re)^{2.58}}$	10×10^7	Turbulento

mientras que la Tabla 7.2 presenta los coeficientes de esfuerzos cortantes válidos en toda la región de la placa plana.

Tabla 7.2: Coeficientes de esfuerzos cortantes para las zonas: laminar y turbulento.

Schlichting	$\frac{0.074}{Re^{1/5}} - \frac{1.700}{Re}$
-------------	---

7.5 Solución numérica de la capa límite

7.5.1 Adimensionalidad

7.5.2 Discretización

7.6 Ecuación de Von-Karman alternativa

Definiendo el factor de forma H como:

$$H = \frac{\delta^*}{\Theta} \quad (7.51)$$

y teniendo en cuenta la definición del coeficiente de fricción C_f , se obtiene la ecuación de Von-Karman de forma alternativa,

$$\frac{C_{f,x}}{2} = \frac{d\Theta}{dx} + (2 + H) \frac{\Theta}{U} \frac{dU}{dx} \quad (7.52)$$

Obsérvese que $C_{f,x}$ y H son funciones de x , para el caso general de capa límite con un gradiente de presión diferente de cero que se forma a lo largo de una superficie. Las ecuaciones (7.35) y (7.52), el coeficiente $C_{f,x}$ y el factor de forma H , son válidas para cualquier capa límite de flujo estacionario, incompresible, a lo largo de la pared, sin importar si es flujo laminar, turbulento o está en alguna parte intermedia.

Para el caso especial de la capa límite sobre una placa plana, $U(x) = U = \text{constante}$ y la ecuación alternativa de Von-Karman, se reduce a:

$$\frac{C_{f,x}}{2} = \frac{d\Theta}{dx} \quad (7.53)$$

Problema 7.3 Suponga que se conoce el coeficiente de fricción de la capa límite de una placa plana de longitud L :

$$C_{f,L} \approx \frac{0.02708}{Re_L^{1/2}} \quad (7.54)$$

donde $Re_L = \frac{vL}{\nu}$ es la constante de Reynolds para la longitud de la placa L (no varía a lo largo de la placa plana). Use la aproximación de la ley de la séptima potencia para la forma del perfil de capa límite,

$$\frac{u}{U} \approx \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}} \quad \text{para } y \leq \delta \quad (7.55)$$

y

$$\frac{u}{U} \approx 1.0 \quad \text{para } y > \delta \quad (7.56)$$

para estimar el espesor de la capa límite δ , el espesor de desplazamiento δ^* y el espesor de cantidad de movimiento Θ en función del valor de cualquier punto de la placa plana. Suponga placa delgada y alineada paralela al flujo libre de modo que $U(x) = V = \text{constante}$.

Solución

- Espesor de cantidad de movimiento, ecuación (7.29):

$$\Theta \equiv \int_0^Y \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy \quad (7.57)$$

reemplazando la ley de la séptima potencia para la forma del perfil de capa límite e integrando en todos los valores de y ,

$$\Theta \equiv \int_0^\infty \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}} \left[1 - \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}}\right] dy = \int_0^\delta \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}} \left[1 - \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}}\right] dy \quad (7.58)$$

realizando un cambio de variable, $w = \frac{y}{\delta}$, $dw = \frac{dy}{\delta}$, se obtiene:

$$\Theta \equiv \delta \int_0^1 w^{\frac{1}{7}} \left[1 - w^{\frac{1}{7}}\right] dw = \delta \int_0^1 \left[w^{\frac{1}{7}} - w^{\frac{2}{7}}\right] dw \quad (7.59)$$

$$\Theta = \delta \left[\frac{7}{8} w^{\frac{8}{7}} - \frac{7}{9} w^{\frac{9}{7}} \right]_0^1 = 7\delta \left[\frac{1}{8} - \frac{1}{9} \right] \quad (7.60)$$

$$\Theta = \frac{7}{72} \delta \approx 0.0972 \delta \quad (7.61)$$

- *Espesor de desplazamiento es determinado usando la ecuación (7.30),*

$$\delta^* = \int_0^Y \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy \quad (7.62)$$

reemplazando la ley de la séptima potencia para el perfil de capa límite,

$$\delta^* = \int_0^\infty \left[1 - \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}}\right] dy = \int_0^\delta \left[1 - \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}}\right] dy \quad (7.63)$$

$$\delta^* = y - \frac{7}{8} \frac{y^{\frac{8}{7}}}{\delta^{\frac{1}{7}}} \bigg|_0^\delta = \delta - \frac{7\delta}{8} \quad (7.64)$$

$$\delta^* = \frac{1}{8} \delta \approx 0.125 \delta \quad (7.65)$$

- *El espesor de la capa límite está, puede calcularse usando la ecuación alternativa de Von-Karman para una placa plana con $U(x) = U = \text{constante}$, ecuación (7.53).*

$$\frac{C_{f,x}}{2} = \frac{d\Theta}{dx} \quad (7.66)$$

derivando (7.61) con respecto a x

$$\frac{d\Theta}{dx} = \frac{7}{72} \frac{d\delta}{dx} \quad (7.67)$$

reemplazando,

$$C_{f,x} = 2 \frac{7}{72} \frac{d\delta}{dx} = \frac{14}{72} \frac{d\delta}{dx} \quad (7.68)$$

reemplazando el coeficiente,

$$\frac{d\delta}{dx} = \left(\frac{72}{14}\right) \frac{0.02708}{Re_L^{\frac{1}{2}}} \quad (7.69)$$

integrando, se obtiene el espesor de la capa límite en función de un punto dado de la placa plana:

$$\frac{\delta}{x} \approx \frac{0.14}{Re_L^{\frac{1}{2}}} \quad (7.70)$$

Ahora, reemplazando $\delta \approx \frac{0.14}{Re_L^{\frac{1}{2}}}x$ en el espesor de desplazamiento δ^* para un punto x de la placa plana, se obtiene:

$$\frac{\delta^*}{x} \approx \frac{0.018}{Re_L^{\frac{1}{2}}} \quad (7.71)$$

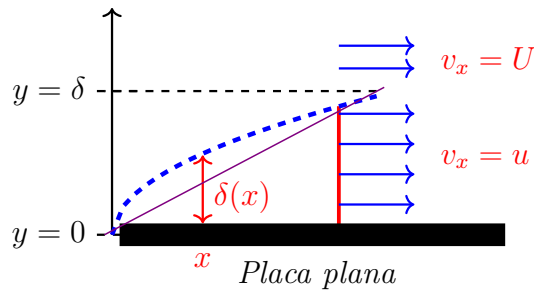
y en el espesor de cantidad de movimiento Θ para un punto x de la placa plana, se obtiene:

$$\frac{\Theta}{x} \approx \frac{0.014}{Re_L^{\frac{1}{2}}} \quad (7.72)$$

Problema 7.4 La componente de velocidad en la dirección del flujo estacionario e incompresible con una capa límite laminar de espesor δ sobre una placa plana, se aproxima mediante la expresión:

$$u = \begin{cases} \frac{Uy}{\delta} & \text{si } 0 < y \leq \delta \\ U & \text{si } y > \delta \end{cases} \quad (7.73)$$

Ver Figura:



Genere expresiones para el espesor de desplazamiento y el espesor de cantidad de movimiento como función de δ , con base a esta aproximación lineal del perfil de velocidad. Compare sus resultados de $\frac{\delta^*}{\delta}$ y $\frac{\Theta}{\delta}$ con los valores obtenidos a partir de la ecuación de Blasius.

Problema 7.5 Considere una capa límite turbulenta sobre una placa plana. Suponga se solo se conocen el coeficiente de fricción local,

$$C_{f,x} \approx \frac{0.059}{Re^{\frac{1}{5}}} \quad (7.74)$$

y el espesor de cantidad de movimiento,

$$\frac{\Theta}{\delta} \approx 0.097 \quad (7.75)$$

Use la ecuación de Karman para generar una expresión para $\frac{\delta}{x}$ y compare su resultado con,

$$\frac{\delta}{x} \approx \frac{0.38}{Re^{\frac{1}{5}}} \quad (7.76)$$

7.7 Coeficiente de resistencia: C_D

El coeficiente de resistencia se denota como C_D y para una placa plana y de longitud L puede obtenerse mediante la siguiente expresión:

$$C_D = \frac{1}{L} \int_0^L C_{f,x} dx \quad (7.77)$$

donde C_f es el coeficiente de fricción definido en la ecuación (7.36) como:

$$C_{f,x} = \frac{\tau_p}{\frac{1}{2}\rho U^2} \quad (7.78)$$

y τ_p como el esfuerzo cortante de la pared.

7.8 C_D en zona laminar y turbulenta

En la mayoría de los casos, existe una zona inicial de la placa donde la capa límite es laminar y una segunda región donde la capa límite es turbulenta, con lo cual el coeficiente de arrastre (o resistencia) debe de tener el aporte de éstas dos regiones. Este coeficiente se estima usando la expresión:

$$C_D = \frac{1}{L} \int_0^{X_{tr}} C_{f,\text{lam}} dx + \frac{1}{L} \int_{X_{tr}}^L C_{f,\text{turb}} dx \quad (7.79)$$

donde $C_{f,\text{lam}}$ y $C_{f,\text{turb}}$ son los coeficientes de fricción en la zona laminar y turbulenta, respectivamente. X_{tr} es el punto de transición de la zona laminar a turbulenta y

corresponde a la distancia entre el origen de la placa y el inicio de la turbulencia. El valor de X_{tr} se estima usando la expresión:

$$\frac{\rho U_{\infty} X_{tr}}{\mu} \approx 5 \times 10^5 \quad (7.80)$$

es decir, el punto de transición entre la zona laminar y la zona turbulenta puede estimarse mediante la expresión:

$$X_{tr} = 5 \times 10^5 \frac{\mu}{\rho U_{\infty}} = 5 \times 10^5 \frac{\nu}{v} \quad (7.81)$$

expresión que posee un valor de Reynolds de: $Re \approx 5 \times 10^5$. En muchos casos se aceptan valores de Reynolds menores, del orden de $Re \approx 3 \times 10^5$.

Problema 7.6 *Determinar el coeficiente de arrastre C_D en una placa plana, en donde las regiones laminar y turbulenta de la capa límite son relevantes, considerando los coeficientes de fricción propuestos por Blasius:*

- Para la placa plana laminar,

$$C_{f,lam} = \frac{0.66412}{Re_x^{1/2}} \quad (7.82)$$

- Para la placa plana turbulenta,

$$C_{f,turb} = \frac{0.02708}{Re_x^{1/7}} \quad (7.83)$$

Solución

Reemplazando los coeficientes de fricción en la ecuación (7.79),

$$C_D = \frac{1}{L} \int_0^{X_{tr}} \frac{0.66412}{Re_x^{1/2}} dx + \frac{1}{L} \int_{X_{tr}}^L \frac{0.02708}{Re_x^{1/7}} dx \quad (7.84)$$

como $Re_x = \frac{vx}{\nu}$ entonces,

$$C_D = \frac{0.66412}{L} \left(\frac{\nu}{v}\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^{X_{tr}} x^{-1/2} dx + \frac{0.02708}{L} \left(\frac{\nu}{v}\right)^{\frac{1}{7}} \int_{X_{tr}}^L x^{-1/7} dx \quad (7.85)$$

$$C_D = 2 \left(\frac{0.66412}{L}\right) \left(\frac{\nu}{v}\right)^{\frac{1}{2}} X_{tr}^{1/2} + \frac{7}{6} \left(\frac{0.02708}{L}\right) \left(\frac{\nu}{v}\right)^{\frac{1}{7}} X^{6/7} \Big|_{X_{tr}}^L \quad (7.86)$$

$$C_D = 2 \left(\frac{0.66412}{L} \right) \left(\frac{\nu}{v} \right)^{\frac{1}{2}} X_{tr}^{1/2} + \frac{7}{6} \left(\frac{0.02708}{L} \right) \left(\frac{\nu}{v} \right)^{\frac{1}{7}} L^{6/7} - \frac{7}{6} \left(\frac{0.02708}{L} \right) \left(\frac{\nu}{v} \right)^{\frac{1}{7}} X_{tr}^{6/7} \quad (7.87)$$

Usando la ecuación (7.81) para el punto de transición X_{tr} ,

$$C_D = 2 \left(\frac{0.66412}{L} \right) \left(\frac{\nu}{v} \right)^{\frac{1}{2}} \left(5 \times 10^5 \frac{\nu}{v} \right)^{1/2} + \frac{7}{6} \left(\frac{0.02708}{L} \right) \left(\frac{\nu}{v} \right)^{\frac{1}{7}} L^{6/7} - \frac{7}{6} \left(\frac{0.02708}{L} \right) \left(\frac{\nu}{v} \right)^{\frac{1}{7}} \left(5 \times 10^5 \frac{\nu}{v} \right)^{6/7} \quad (7.88)$$

$$C_D = (2)(0.66412) \left(5 \times 10^5 \right)^{1/2} \left(\frac{\nu}{vL} \right) + \frac{7}{6} (0.02708) \left(\frac{\nu}{vL} \right)^{\frac{1}{7}} - \frac{7}{6} (0.02708) \left(5 \times 10^5 \right)^{6/7} \left(\frac{\nu}{vL} \right) \quad (7.89)$$

$$C_D \approx 0.03159 \left(\frac{\nu}{vL} \right)^{\frac{1}{7}} - 1484.37 \left(\frac{\nu}{vL} \right) \quad (7.90)$$

como $Re_L = \frac{vL}{\nu}$, se obtiene el siguiente coeficiente de arrastre, válido en todas las regiones (laminar y turbulenta) de la capa placa:

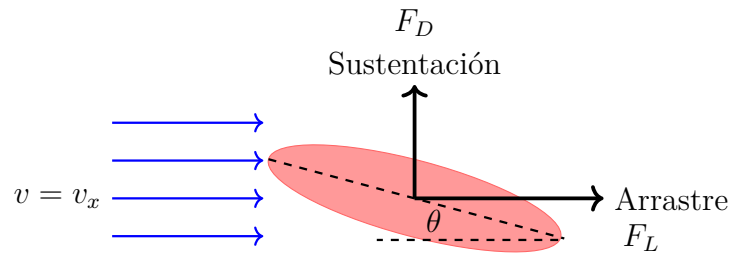
$$C_D \approx \frac{0.03159}{Re_L^{1/7}} - \frac{1484.37}{Re_L} \quad (7.91)$$

7.9 Fuerza de arrastre y de sustentación

Una experiencia muy común, es que un cuerpo encuentra resistencia cuando se fuerza a moverse a través de un fluido. Un fluido ejerce fuerzas y momentos sobre un cuerpo en varias direcciones. Así, la fuerza que un fluido ejerce sobre el cuerpo en la dirección del flujo, se llama *arrastre*. Usualmente el arrastre es un efecto indeseable como lo es la fuerza de fricción y su reducción esta relacionada con:

- La reducción de combustible en automóviles, submarinos y aeronaves.
- La seguridad y la durabilidad de las estructuras expuestas a vientos fuertes.
- Reducción del ruido y vibración.

Por lo general, la fuerza de arrastre se debe a los efectos combinados de la presión y las fuerzas de corte en la dirección del flujo. Las componentes de presión y las fuerzas de corte en la dirección normal al flujo, tienden a mover el cuerpo en dicha dirección y su suma se llama *sustentación*.



Parte II

Transporte de Energía

Tema No. 8

Formas de transferencia de calor

En acuerdo con los conceptos de la termodinámica, la energía se transfiere como resultado de una diferencia de energía. Por otro lado, las leyes termodinámicas tratan la transferencia de energía solo en sistemas que se encuentran en equilibrio, y pueden utilizarse para predecir la cantidad de energía requerida para modificar un sistema de un estado de equilibrio a otro estado, pero no sirven para predecir la rapidez (tiempo) con que pueden producirse estos cambios.

Existen tres mecanismos diferentes de la transferencia del calor: La transferencia por conducción, por convección y por radiación. A continuación se hará una breve descripción de cada uno de los mecanismos de transferencia de calor.

8.1 Transferencia de calor por conducción

La conducción, es el único mecanismo de transmisión del calor posible en los medios sólidos, cuando en éstos cuerpos existe un gradiente de temperatura. *EL CALOR DE TRANSFIERE DE LA REGIÓN DE MAYOR TEMPERATURA A LA REGIÓN DE MENOR TEMPERATURA, DEBIDO AL MOVIMIENTO CINÉTICO DE LOS ÁTOMOS.*

La ley básica de la conducción del calor fué establecida por Joseph Fourier: *La tasa de transferencia de calor por conducción en una dirección dada, es proporcional al área normal a la dirección del flujo de calor y al gradiente de temperatura en esa dirección.* Por ejemplo para un flujo en la dirección x , se tiene:

$$Q_x = -\kappa A \frac{\partial T}{\partial x} \quad (8.1)$$

donde A es el área normal a la dirección x y κ es una constante de proporcionalidad.

8.2 Transferencia de calor por convección

El intercambio de energía térmica entre un fluido y un sólido se llama convección. Si T_f es la temperatura del fluido y T_s es la temperatura del sólido, entonces el calor transferido q_{conv} es dado por la ley de enfriamiento de Newton:

$$q_{\text{conv}} = hA_s (T_s - T_f) \quad (8.2)$$

donde h es el coeficiente de transmisión del calor por convección en la interface líquido sólido y A_s es el área de contacto del sólido con el fluido.

8.3 Transferencia de calor por radiación

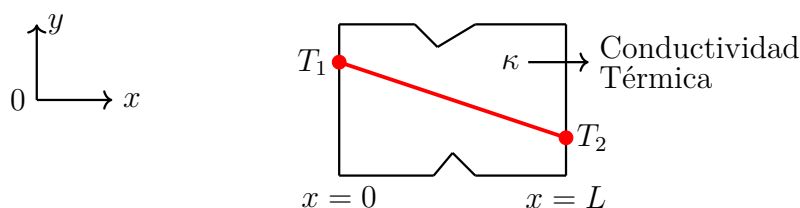
La transferencia de calor en los procesos de conducción y convección térmica tiene lugar en medios *densos* (sólidos y fluidos), en donde la densidad del medio es constante. La radiación térmica es un proceso de transporte de calor a través de un fluido o del vacío, en forma de ondas electromagnéticas o fotones como resultado de los cambios de la configuración electrónica de los átomos o moléculas, los cuales se propagan a la velocidad de la luz. La conducción del calor por radiación obedece a la ley de Stefan-Boltzmann,

$$q_r = A\sigma T^4 \quad (8.3)$$

donde A es la constante adimensional de Stefan-Boltzmann.

8.4 Ley de Ohm para el flujo de calor

Considere una conducción de calor en estado estacionario, a través de una pared plana de longitud L y conductividad térmica κ que mantiene sus superficies a temperaturas T_1 y T_2 , como lo muestra la Figura:



La rapidez de transferencia de calor a través de la pared, está dada por la ley de Fourier:

$$\frac{q_x}{A} = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \quad (8.4)$$

asumiendo que el flujo de calor q_x es constante y resolviendo para la ecuación con condiciones de frontera,

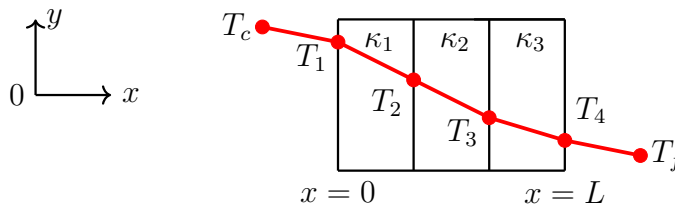
$$T = T_1 \quad \text{en} \quad x = 0, \quad (8.5)$$

$$T = T_2 \quad \text{en} \quad x = L \quad (8.6)$$

se obtiene:

$$q_x = \frac{\kappa A}{L} (T_1 - T_2) \quad (8.7)$$

ecuación que se conoce como: *la ecuación de Newton*. Ahora, considere la pared plana compuesta de tres capas de diferentes materiales. Si κ_1 , κ_2 y κ_3 son las conductividades térmicas de los materiales, como lo muestra la Figura,



la rapidez de transferencia de calor, en estado estacionario por unidad de área entre la temperatura caliente T_c y la temperatura de la pared más cercana T_1 es:

$$q_x = h_c A (T_c - T_1) \quad (8.8)$$

donde h_c es una constante que depende del medio exterior a la pared en la región caliente. Debido a que el flujo de calor se encuentra en estado estacionario, se obtiene la siguiente expresión:

$$q_x = h_c A (T_c - T_1) = \frac{\kappa_1 A}{L_1} (T_1 - T_2) = \frac{\kappa_2 A}{L_2} (T_2 - T_3) = \frac{\kappa_3 A}{L_3} (T_3 - T_4) = h_f A (T_4 - T_f) \quad (8.9)$$

despejando las diferencias de temperatura de cada una de las desigualdades,

$$T_c - T_1 = q_x \left(\frac{1}{h_c A} \right) \quad (8.10)$$

$$T_1 - T_2 = q_x \left(\frac{L_1}{\kappa_1 A} \right) \quad (8.11)$$

$$T_2 - T_3 = q_x \left(\frac{L_2}{\kappa_2 A} \right) \quad (8.12)$$

$$T_3 - T_4 = q_x \left(\frac{L_3}{\kappa_3 A} \right) \quad (8.13)$$

$$T_4 - T_f = q_x \left(\frac{1}{h_f A} \right) \quad (8.14)$$

sumando éstas ecuaciones, se obtiene:

$$T_c - T_f = q_x \left(\frac{1}{h_c A} \right) + q_x \left(\frac{L_1}{\kappa_1 A} \right) + q_x \left(\frac{L_2}{\kappa_2 A} \right) + q_x \left(\frac{L_3}{\kappa_3 A} \right) + q_x \left(\frac{1}{h_f A} \right) \quad (8.15)$$

sacando factor común q_x ,

$$T_c - T_f = q_x \left(\frac{1}{h_c A} + \frac{L_1}{\kappa_1 A} + \frac{L_2}{\kappa_2 A} + \frac{L_3}{\kappa_3 A} + \frac{1}{h_f A} \right) \quad (8.16)$$

despejando el flujo de calor,

$$q_x = \frac{T_c - T_f}{\frac{1}{h_c A} + \frac{L_1}{\kappa_1 A} + \frac{L_2}{\kappa_2 A} + \frac{L_3}{\kappa_3 A} + \frac{1}{h_f A}} \quad (8.17)$$

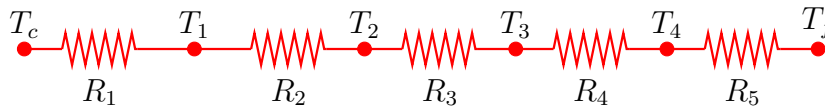
Obsérvese que la rapidez de transferencia de calor en términos de la diferencia total de temperatura, es semejante a considerar un circuito electrónico en serie, con resistencias son: $R_1 = \frac{1}{h_c A}$, $R_2 = \frac{L_1}{\kappa_1 A}$, $R_3 = \frac{L_2}{\kappa_2 A}$, $R_4 = \frac{L_3}{\kappa_3 A}$, $R_5 = \frac{1}{h_f A}$, es decir,

$$q_x = \frac{T_c - T_f}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5} \quad (8.18)$$

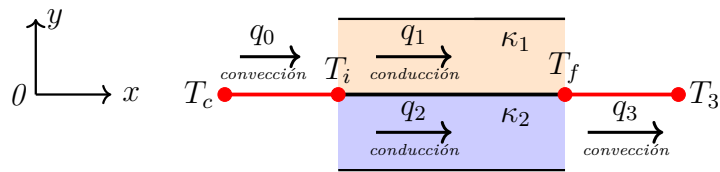
y el denominador puede considerarse como una resistencias térmica debido a la conducción o convección. En general, el flujo de calor, estaría determinado por la expresión:

$$q = \frac{\Delta T}{\sum_{i=1} R_i} \quad (8.19)$$

con ΔT a determinar. Se observa que el cálculo puede realizarse usando la ley de Ohm, en donde el circuito térmico, circuito en serie, es representado por la siguiente Figura.

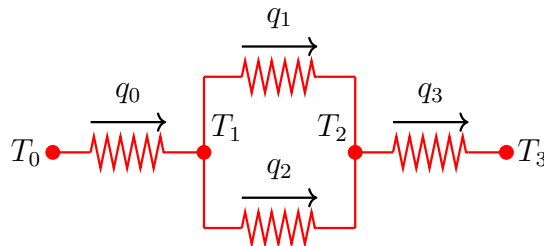


Problema 8.1 Realizar el circuito térmico correspondiente al flujo calórico de la pared de la Figura.

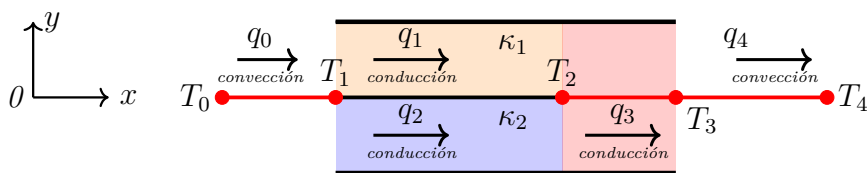


Solución

El circuito térmico es:

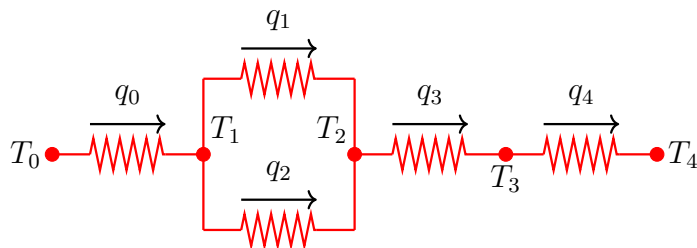


Problema 8.2 Realizar el circuito térmico correspondiente al flujo calórico de la pared de la Figura.



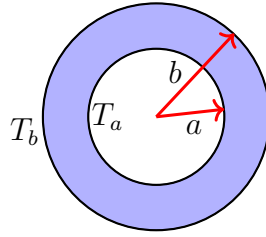
Solución

El circuito térmico con resistencia en serie y en paralelo es:



Problema 8.3 Demuestre que la resistencia térmica de una cascara cilíndrica de radio interno a y radio externo b y longitud ℓ que se encuentra a las temperaturas interior de T_a y exterior T_b , esta dada por la expresión:

$$R = \frac{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}{2\pi\kappa\ell} \quad (8.20)$$



Solución

El flujo de calor está determinado por la ley de Fourier,

$$q_r = -\kappa A \frac{dT}{dr} \quad (8.21)$$

Reemplazando el área $A = 2\pi r\ell$,

$$q_r = -2\pi r\kappa\ell \frac{dT}{dr} \quad (8.22)$$

asumiendo que q_r es constante y separando Variables,

$$q_r \int_a^b \frac{dr}{r} = -2\pi\kappa\ell \int_{T_a}^{T_b} dT \quad (8.23)$$

integrando,

$$q_r \ln\left(\frac{b}{a}\right) = 2\pi\kappa\ell (T_a - T_b) \quad (8.24)$$

es decir,

$$q_r = \frac{2\pi\kappa\ell}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} (T_a - T_b) \quad (8.25)$$

obteniéndose que la resistencia térmica para el cascarón cilíndrico es;

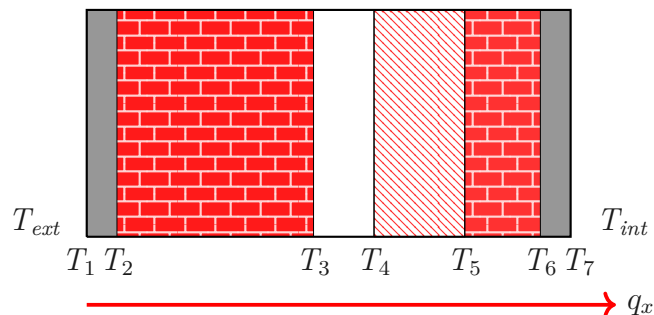
$$R = \frac{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}{2\pi\kappa\ell} \quad (8.26)$$

Problema 8.4 Un frigorífico o cámara frigorífica es un local que se mantiene a una temperatura estable y preestablecida en donde se almacenan productos comestibles para su posterior comercialización. Esta cámara puede construirse como sigue:

- Una capa de cemento de 2 cm de espesor ($\kappa = 0.8 \text{ kca/h}\cdot\text{m}^0\text{C.}$)
- Una pared de ladrillo de 20 cm de espesor ($\kappa = 0.6 \text{ kca/h}\cdot\text{m}^0\text{C.}$)
- Una pantalla antivapor de 1.2 cm de espesor ($\kappa = 0.4 \text{ kca/h}\cdot\text{m}^0\text{C.}$)
- Una lámina de corcho ($\kappa = 0.05 \text{ kca/h}\cdot\text{m}^0\text{C.}$)

- Un muro de la ladrillo hueco de 7 cm de espesor ($\kappa = 1.1 \text{ kca/h}\cdot\text{m}^0\text{C.}$)
- Una capa de cemento de 2 cm de espesor ($\kappa = 0.8 \text{ kca/h}\cdot\text{m}^0\text{C.}$)

Si la temperatura interior de la cámara debe de estar a -25^0C y la del exterior es de 30^0C , Estime cuál sería el espesor del corcho que se debe de colocar sabiendo que el flujo de calor, por pérdidas, se estima en $10 \text{ kca/h}\cdot\text{m}^0\text{C.}$



Usando la ley de Ohm,

$$q_x = \frac{T_{ext} - T_{int}}{\sum_{i=1}^7 R_i} \quad (8.27)$$

$$q_x = \frac{T_{ext} - T_{int}}{\frac{1}{h_{ext}} + \frac{e_1}{R_1} + \frac{e_2}{R_2} + \frac{e_3}{R_3} + \frac{e_4}{R_4} + \frac{e_5}{R_5} + \frac{e_6}{R_6} + \frac{1}{h_{int}}} \quad (8.28)$$

donde e_i corresponden a los espesores de cada pared y q_x tiene un valor de $10 \text{ kca/h}\cdot\text{m}^0\text{C.}$ En la siguiente Tabla, se encuentran los datos de las resistencias.

R_i	Resistencias de las capas							
	ext.	1	2	3	4	5	6	int.
$\text{m}^2\cdot^0\text{C}\cdot\text{h/kcal.}$	0.05	0.025	0.417	0.03	4.81	0.064	0.025	0.083

Reemplazando los valores de la Tabla y sabiendo que $q_x = 10 \text{ kca/h}\cdot\text{m}^0\text{C.}$, se obtiene que el espesor de la capa de corcho es de $e_4 \sim 25 \text{ cm}$ y las temperaturas son calculadas, por ejemplo como:

$$q_x = \frac{T_{ext} - T_1}{\frac{1}{h_{ext}}} \rightarrow T_1 \sim 29.5^0\text{C} \quad (8.29)$$

y

$$q_x = \frac{T_1 - T_2}{\frac{e_1}{\kappa_1}} \rightarrow T_2 \sim 29.3^0\text{C} \quad (8.30)$$

y así sucesivamente. La siguiente Tabla consigna todos los valores de las temperaturas en cada una de las superficies.

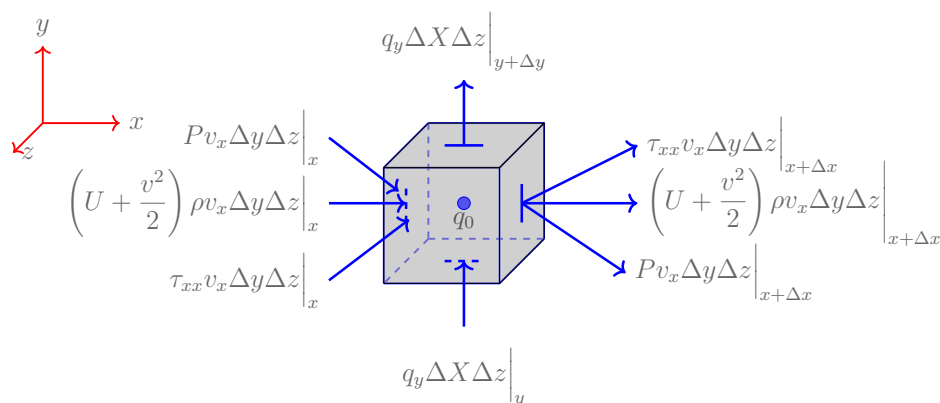
	Temperaturas de las superficies							
	ext.	1	2	3	4	5	6	int.
$T(^0\text{C})$	30	29.5	29.3	25.1	24.8	-23.3	-23.9	-25

8.5 Ecuación general de la energía

La derivación de la ecuación general para la energía, resulta de aplicar la primera ley de la termodinámica a un volumen de control de un sistema abierto. La ley de conservación de la energía, primera ley de la termodinámica, puede expresarse como sigue:

$$\left| \begin{array}{l} \text{Variación temporal} \\ \text{de la energía interna} \\ \text{y cinética en el} \\ \text{volumen de control} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{l} \text{Flujo de energía} \\ \text{interna y cinética} \\ \text{a través del volumen} \\ \text{de control} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{l} \text{Velocidad} \\ \text{de los flujos} \\ \text{de calor en el} \\ \text{volumen de control} \end{array} \right| - \left| \begin{array}{l} \text{Velocidad} \\ \text{de los trabajos} \\ \text{en el volumen} \\ \text{de control} \end{array} \right|$$

donde la energía interna U , es la energía asociada a los movimientos moleculares y es una función del material, la temperatura y la presión. La energía cinética por unidad de masa, es denotada como $\frac{v^2}{2}$, es la energía asociada al movimiento de un *bulk* de fluido. Para tener una claridad en la evaluación de la ley de conservación de la energía, se realiza el volumen de control mostrado en la siguiente volumen de control:



A continuación se describen los flujos de energía que se presentan en el volumen de control.

8.5.1 Variación temporal de la energía

La variación temporal de la energía interna y cinética en el volumen de control, está dada por el producto de la masa del volumen de control y de las energías, es decir,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\left(U + \frac{v^2}{2} \right) \rho \Delta x \Delta y \Delta z \right] = \Delta x \Delta y \Delta z \rho \frac{\partial}{\partial t} \left(U + \frac{v^2}{2} \right) \quad (8.31)$$

La energía interna y cinética asociadas al flujo de calor, entran al volumen de control, pasan a través de sus caras en el punto (x, y, z) y salen a través de las caras en los puntos $(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$. El flujo neto de energía interna y cinética, puede escribirse como:

$$\begin{aligned}
& \rho v_x \left(U + \frac{v^2}{2} \right) \Delta y \Delta z \Big|_{x+\Delta x} - \rho v_x \left(U + \frac{v^2}{2} \right) \Delta y \Delta z \Big|_x + \\
& \rho v_y \left(U + \frac{v^2}{2} \right) \Delta x \Delta z \Big|_{y+\Delta y} - \rho v_y \left(U + \frac{v^2}{2} \right) \Delta x \Delta z \Big|_y + \\
& \rho v_z \left(U + \frac{v^2}{2} \right) \Delta x \Delta y \Big|_{z+\Delta z} - \rho v_z \left(U + \frac{v^2}{2} \right) \Delta x \Delta y \Big|_z
\end{aligned} \tag{8.32}$$

reorganizando,

$$\begin{aligned}
& \Delta x \Delta y \Delta z \left[\frac{\rho v_x \left(U + \frac{v^2}{2} \right) \Big|_{x+\Delta x} - \rho v_x \left(U + \frac{v^2}{2} \right) \Big|_x}{\Delta x} \right] + \\
& \Delta x \Delta y \Delta z \left[\frac{\rho v_y \left(U + \frac{v^2}{2} \right) \Big|_{y+\Delta y} - \rho v_y \left(U + \frac{v^2}{2} \right) \Big|_y}{\Delta y} \right] + \\
& \Delta x \Delta y \Delta z \left[\frac{\rho v_z \left(U + \frac{v^2}{2} \right) \Big|_{z+\Delta z} - \rho v_z \left(U + \frac{v^2}{2} \right) \Big|_z}{\Delta z} \right]
\end{aligned} \tag{8.33}$$

dando origen a una ecuación de la forma:

$$\begin{aligned}
& \Delta x \Delta y \Delta z \left[\frac{\partial}{\partial x} \left[\rho v_x \left(U + \frac{v^2}{2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\rho v_y \left(U + \frac{v^2}{2} \right) \right] + \right. \\
& \left. \frac{\partial}{\partial z} \left[\rho v_z \left(U + \frac{v^2}{2} \right) \right] \right]
\end{aligned} \tag{8.34}$$

$$\Delta x \Delta y \Delta z \nabla \cdot \left[\rho \left(U + \frac{v^2}{2} \right) \mathbf{v} \right] \tag{8.35}$$

8.5.2 Flujo de transferencia de calor

El flujo de transferencia de calor por conducción a el volumen de control es:

$$\begin{aligned}
& q_x \Delta y \Delta z \Big|_{x+\Delta x} - q_x \Delta y \Delta z \Big|_x + q_y \Delta x \Delta z \Big|_{y+\Delta y} - q_y \Delta x \Delta z \Big|_y + \\
& q_z \Delta x \Delta y \Big|_{z+\Delta z} - q_z \Delta x \Delta y \Big|_z
\end{aligned} \tag{8.36}$$

reorganizando,

$$\Delta x \Delta y \Delta z \left[\frac{q_x|_{x+\Delta x} - q_x|_x}{\Delta x} + \frac{q_y|_{y+\Delta y} - q_y|_y}{\Delta y} + \frac{q_z|_{z+\Delta z} - q_z|_z}{\Delta z} \right] \quad (8.37)$$

y cuando se cumple que $\Delta \rightarrow 0$, se tiene:

$$\Delta x \Delta y \Delta z \left[\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right] \quad (8.38)$$

dando origen a la ecuación,

$$\Delta x \Delta y \Delta z \nabla \cdot \mathbf{q} \quad (8.39)$$

de la misma forma se puede obtener una ecuación para el flujo de calor por convección. Usando las mismas ecuaciones del flujo de calor por conducción, se obtiene el flujo de calor por radiación, es cual es:

$$\Delta x \Delta y \Delta z \nabla \cdot \mathbf{q}_r \quad (8.40)$$

Otra forma de calor, es el generado o disipado dentro del volumen de control, debido a fuentes o suministros de calor. Este calor esta dado por la siguiente expresión;

$$q_{\text{gen}} = q_0 \Delta x \Delta y \Delta z \quad (8.41)$$

8.5.3 Velocidad de los trabajos

La evaluación de la velocidad de los trabajos en el volumen de control, consiste de dos partes: El trabajo realizado por la gravedad y los trabajos realizados en las caras del volumen de control que son los debido a la viscosidad del fluido y la presión.

La fuerza de gravedad es la principal responsable del trabajo que se realiza sobre el volumen de control, es cual está dado por la siguiente expresión:

$$\Delta x \Delta y \Delta z \rho (g_x v_x + g_y v_y + g_z v_z) \quad (8.42)$$

Para diferentes fuerzas que actuan sobre las especies individuales, la velocidad de trabajo es dado por:

$$\Delta x \Delta y \Delta z \sum_i \rho_i g_i \cdot v_i \quad (8.43)$$

Ahora, las fuerzas debido a la viscosidad del fluido realizan trabajo en las caras del fluido, y por lo tanto, el trabajo asociado a un fluido que tiene la dirección x es:

$$\begin{aligned} v_x \tau_{xx} \Delta y \Delta z \Big|_{x+\Delta x} - v_x \tau_{xx} \Delta y \Delta z \Big|_x + v_y \tau_{yx} \Delta x \Delta z \Big|_{y+\Delta y} - v_y \tau_{yx} \Delta x \Delta z \Big|_y + \\ v_z \tau_{zx} \Delta x \Delta y \Big|_{z+\Delta z} - v_z \tau_{zx} \Delta x \Delta y \Big|_z \end{aligned} \quad (8.44)$$

organizando la ecuación,

$$\Delta x \Delta y \Delta z \left[\frac{v_x \tau_{xx} \Big|_{x+\Delta x} - v_x \tau_{xx} \Big|_x}{\Delta x} + \frac{v_y \tau_{yx} \Big|_{y+\Delta y} - v_y \tau_{yx} \Big|_y}{\Delta y} + \frac{v_z \tau_{zx} \Big|_{z+\Delta z} - v_z \tau_{zx} \Big|_z}{\Delta z} \right] \quad (8.45)$$

y cuando se hace muy pequeño los deltas, se obtiene:

$$\Delta x \Delta y \Delta z \left[\frac{\partial (v_x \tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial (v_y \tau_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial (v_z \tau_{zx})}{\partial z} \right] \quad (8.46)$$

y en una forma más compacta,

$$\Delta x \Delta y \Delta z \left[\nabla \cdot (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau}) \right] \quad (8.47)$$

Otro de los trabajos que se realiza sobre las caras del volumen de control, es el que realiza la presión externa y está dado por la siguiente expresión:

$$\Delta x \Delta y \Delta z \left[\frac{P v_x \Big|_{x+\Delta x} - P v_x \Big|_x}{\Delta x} + \frac{P v_y \Big|_{y+\Delta y} - P v_y \Big|_y}{\Delta y} + \frac{P v_z \Big|_{z+\Delta z} - P v_z \Big|_z}{\Delta z} \right] \quad (8.48)$$

es decir,

$$\Delta x \Delta y \Delta z \left[\frac{\partial (Pv_x)}{\partial x} + \frac{\partial (Pv_y)}{\partial y} + \frac{\partial (Pv_z)}{\partial z} \right] \quad (8.49)$$

obteniéndose la expresión,

$$\Delta x \Delta y \Delta z \left[\nabla \cdot (P\mathbf{v}) \right] \quad (8.50)$$

reuniendo las ecuaciones (8.31), (8.35), (8.39), (8.40), (8.41), (8.43), (8.47) y (8.50), se obtiene la ecuación general para la energía:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial}{\partial t} \left(U + \frac{v^2}{2} \right) + \nabla \cdot \left[\rho \left(U + \frac{v^2}{2} \right) \mathbf{v} \right] = & -\nabla \cdot \mathbf{q} - \nabla \cdot \mathbf{q}_r + q_0 - \nabla \cdot (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau}) \\ & - \nabla \cdot (P\mathbf{v}) + \sum_i \rho_i g_i \cdot v_i \end{aligned} \quad (8.51)$$

Para un sistema con propiedades constante y con conservación del volumen ($\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$), en términos de la derivada substancial se tiene:

$$\begin{aligned} \rho \frac{D}{Dt} \left(U + \frac{v^2}{2} \right) = & -\nabla \cdot \mathbf{q} - \nabla \cdot \mathbf{q}_r + q_0 - \nabla \cdot (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau}) \\ & - \nabla \cdot (P\mathbf{v}) + \sum_i \rho_i g_i \cdot v_i \end{aligned} \quad (8.52)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{DU}{Dt} + \rho \mathbf{v} \cdot \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = & -\nabla \cdot \mathbf{q} - \nabla \cdot \mathbf{q}_r + q_0 - \nabla \cdot (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau}) \\ & - \nabla \cdot (P\mathbf{v}) + \sum_i \rho_i g_i \cdot v_i \end{aligned} \quad (8.53)$$

usando la identidad,

$$\nabla \cdot (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau}) = \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) \quad (8.54)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{DU}{Dt} + \rho \mathbf{v} \cdot \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = & -\nabla \cdot \mathbf{q} - \nabla \cdot \mathbf{q}_r + q_0 - \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) \\ & - \nabla \cdot (P\mathbf{v}) + \sum_i \rho_i g_i \cdot v_i \end{aligned} \quad (8.55)$$

como

$$\nabla \cdot (P\mathbf{v}) = P\nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla P \quad (8.56)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{DU}{Dt} + \rho \mathbf{v} \cdot \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = & -\nabla \cdot \mathbf{q} - \nabla \cdot \mathbf{q}_r + q_0 - \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) \\ & - P\nabla \cdot \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \nabla P + \sum_i \rho_i g_i \cdot v_i \end{aligned} \quad (8.57)$$

usando la ecuación de continuidad,

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla P + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \sum_i \rho_i g_i \cdot v_i \quad (8.58)$$

se obtiene:

$$\rho \frac{DU}{Dt} = -\nabla \cdot \mathbf{q} - \nabla \cdot \mathbf{q}_r + q_0 - \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v} - P\nabla \cdot \mathbf{v} \quad (8.59)$$

y por conservación del volumen,

$$\rho \frac{DU}{Dt} = -\nabla \cdot \mathbf{q} - \nabla \cdot \mathbf{q}_r - \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v} + q_0 \quad (8.60)$$

como la entalpía está relacionada con la primera ley de la termodinámica mediante la expresión,

$$H = U + \frac{1}{\rho}P \quad (8.61)$$

donde $V = \frac{1}{\rho}$. Entonces la variación de la energía interna es de la forma,

$$\rho \frac{DU}{Dt} = \rho \frac{DH}{Dt} - \frac{DP}{Dt} \quad (8.62)$$

reemplazando,

$$\rho \frac{DH}{Dt} - \frac{DP}{Dt} = -\nabla \cdot \mathbf{q} - \nabla \cdot \mathbf{q}_r - \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v} + q_0 \quad (8.63)$$

Además, la entalpía es una propiedad que depende de la temperatura, presión y de la concentración, es decir $H = H(T, P, \rho)$, por lo tanto, el cambio infinitesimal está dado por la expresión:

$$DH = \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_{P,\rho} DT + \left(\frac{\partial H}{\partial P} \right)_{T,\rho} DP + \left(\frac{\partial H}{\partial \rho} \right)_{P,T} D\rho \quad (8.64)$$

recordando que ρ es constante y como la capacidad calórica a presión constante es $C_p = \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_P$, y las otras derivadas son,

$$\frac{\partial H}{\partial P} = \frac{1}{\rho} \quad (8.65)$$

reemplazando en el DH , se tiene:

$$DH = c_p DT + \frac{1}{\rho} DP \quad (8.66)$$

es decir,

$$\rho \frac{DH}{Dt} = \rho c_p \frac{DT}{Dt} + \frac{DP}{Dt} \quad (8.67)$$

reemplazando ésta ecuación en (8.63), se obtiene la ecuación general de la energía para un fluido Newtoniano con propiedades constantes.

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = -\nabla \cdot \mathbf{q} - \nabla \cdot \mathbf{q}_r - \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v} + q_0 \quad (8.68)$$

Por lo general, la transferencia de calor debido a la radiación \mathbf{q}_r no es común y la transferencia de calor por conducción \mathbf{q} es expresada usando la ley de Fourier $\mathbf{q} = -\kappa \nabla T$. Usando estos argumentos, la ecuación general de la energía toma la forma:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_p (\mathbf{v} \cdot \nabla) T = \kappa \nabla^2 T - \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v} + q_0 \quad (8.69)$$

donde el término $\kappa \nabla^2 T$ representa el calor transferido por conducción térmica, $\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v}$ representa la energía generada por la disipación viscosa y el término $\mathbf{v} \cdot \nabla$ proviene del cambio de los momentos, ver ecuación (4.26). q_0 es una fuente de calor, c_p es la capacidad calórica a presión constante y κ es la conductividad térmica.

Tema No. 9

Aproximaciones a la ecuación de la energía

9.1 Transferencia de calor por conducción

Esta forma de Transferencia de calor se presenta en los sólidos y por lo tanto los términos de viscosidad y de la variación de los momentos no son relevantes. Así, la ecuación de energía que describe la transferencia de calor en los sólidos sería de la forma:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \nabla^2 T + q_0 \quad (9.1)$$

donde el término $\kappa \nabla^2 T$ representa el calor transferido por conducción térmica, q_0 es una fuente de calor, c_p es la capacidad calórica a presión constante y κ es la conductividad térmica. Organizando la ecuación (9.1)

$$\nabla^2 T + \frac{q_0}{\kappa} = \frac{\rho c_p}{\kappa} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (9.2)$$

definiendo la difusividad térmica como,

$$\alpha = \frac{\kappa}{\rho c_p} \quad (9.3)$$

se obtiene:

$$\nabla^2 T + \frac{q_0}{\kappa} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (9.4)$$

y cuando no existe generación interna de energía, $q_0 = 0$, se obtiene la ecuación de Fourier o ecuación de calor, o de difusión,

$$\nabla^2 T = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \rightarrow \text{ecuación de difusión} \quad (9.5)$$

en estado estacionario y sin generación interna de energía, se obtiene la ecuación de Laplace,

$$\nabla^2 T = 0 \rightarrow \text{ecuación de Laplace} \quad (9.6)$$

mientras que en estado estacionario y con generación de energía, se obtiene la ecuación de Poisson,

$$\nabla^2 T = -\frac{q_0}{\kappa} \rightarrow \text{ecuación de Poisson} \quad (9.7)$$

9.2 Temperatura en estado estacionario sin fuente

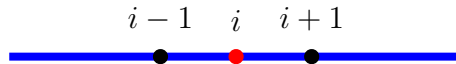
En estado estacionario y sin fuentes, la ecuación de Fourier, ecuación (9.5), se reduce a la ecuación de Laplace. El método apropiado para la solución de la ecuación de Laplace, es el método de separación de variables. A continuación se planteará un ejemplo de cada sistema coordenado para encontrar la función de distribución de temperatura en estado estacionario y sin fuentes.

9.2.1 Distribución de temperatura en un alambre

En esta sección se tratará de estimar los perfiles de temperatura en los sistemas coordenados de una, dos y tres dimensiones. La estimación de los perfiles se realizará solucionando las ecuaciones de forma anítica y usando el método de diferencias finitas. En el caso unidimensional, la ecuación de Poisson, ecuación (9.7), toma la siguiente forma:

$$\nabla^2 T + \frac{q_0}{\kappa} = 0 \quad (9.8)$$

y la Figura del mallado es:



Para la segunda derivada, se usará las diferencias centrales de tres puntos:

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} \approx \frac{\phi(i+1) - 2\phi(i) + \phi(i-1)}{(\Delta x)^2} \quad (9.9)$$

reemplazando en (9.8),

$$\frac{T(i+1) - 2T(i) + T(i-1))}{(\Delta x)^2} + \frac{q_0}{\kappa} = 0 \quad (9.10)$$

$$T(i+1) - 2T(i) + T(i-1) + \frac{q_0}{\kappa} (\Delta x)^2 = 0 \quad (9.11)$$

despejando $T(i)$,

$$T(i) = \frac{T(i+1) + T(i-1))}{2} + \frac{q_0}{2\kappa} (\Delta x)^2 \quad (9.12)$$

$$2\kappa T(i) = \kappa T(i+1) + \kappa T(i-1) + q_0 (\Delta x)^2 \quad (9.13)$$

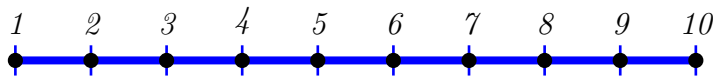
ecuación que puede escribirse como:

$$a_i T(i) = a_{i+1} T(i+1) + a_{i-1} T(i-1) + b \quad (9.14)$$

Problema 9.1 Considere una conducción de Temperatura unidimensional (un alambre), estacionaria y sin generación de calor. Las temperaturas en los extremos de un alambre se mantienen constante a T_0 y T_L en $x = 0$ y $x = L$, respectivamente. Determine la distribución de temperatura y la velocidad de transferencia de calor en el alambre. Use $\kappa = 120 \text{ W/cm}\cdot\text{C}$, $L=10 \text{ cm}$. $T_0 = 100^0 \text{ C}$ y $T_L = 200^0 \text{ C}$.

Solución

El primer paso para resolver la ecuación (9.14), es realizar la malla unidimensional:



con un número de 10 puntos $N = 10$, con $T_1 = 100^0 \text{ C}$ y $T_{10} = 200^0 \text{ C}$. Usando la ecuación (9.14), donde:

$$a_i = 2\kappa = 2(120) = 240 \quad (9.15)$$

$$a_{i+1} = a_{i-1} = \kappa = 120 \quad (9.16)$$

$$b = q_0 (\Delta x)^2 = 0. \quad (9.17)$$

sustituyendo los coeficientes, la ecuación se escribe como:

$$240T(i) = 120T(i+1) + 120T(i-1) \quad (9.18)$$

es decir,

$$T(i-1) - 2T(i) + T(i+1) = 0 \quad (9.19)$$

Aplicando valores de i en los puntos o nodos interiores 2,3,4,..., se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\text{Nodo 2: } \rightarrow T(1) - 2T(2) + T(3) = 0 \rightarrow -2T(2) + T(3) = -100$$

$$\text{Nodo 3: } \rightarrow T(2) - 2T(3) + T(4) = 0$$

$$\text{Nodo 4: } \rightarrow T(3) - 2T(4) + T(5) = 0$$

$$\text{Nodo 5: } \rightarrow T(4) - 2T(5) + T(6) = 0$$

$$\text{Nodo 6: } \rightarrow T(5) - 2T(6) + T(7) = 0$$

$$\text{Nodo 7: } \rightarrow T(6) - 2T(7) + T(8) = 0$$

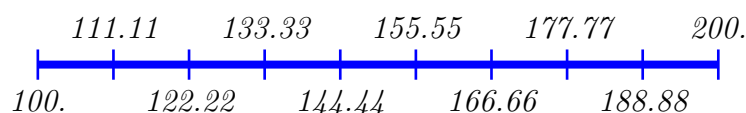
$$\text{Nodo 8: } \rightarrow T(7) - 2T(8) + T(9) = 0$$

$$\text{Nodo 9: } \rightarrow T(8) - 2T(9) + T(10) = 0 \rightarrow T(8) - 2T(9) = -200$$

construyendo un sistema algebraico en forma matricial,

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T(2) \\ T(3) \\ T(4) \\ T(5) \\ T(6) \\ T(7) \\ T(8) \\ T(9) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -100 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -200 \end{pmatrix} \quad (9.20)$$

El último paso es la escojencia de una apropiada subroutine para la solución de éste sistema. En este caso se usará el método de Gauss-Seidel, obteniéndose los siguientes resultados: $T(1) = 100$, $T(2) = 111.11$, $T(3) = 122.22$, $T(4) = 133.33$, $T(5) = 144.44$, $T(6) = 155.55$, $T(7) = 166.66$, $T(8) = 177.77$, $T(9) = 188.88$, $T(10) = 200$



La velocidad de transferencia de calor en $x = 0$ es estimada como:

$$q''\big|_{x=0} = \kappa \frac{T_1 - T_2}{\Delta x} \approx 120 \frac{100.00 - 111.11}{1.11} \quad (9.21)$$

$$q''\big|_{x=0} \approx -1201.08 \text{ W/cm}^2 \quad (9.22)$$

y la velocidad de transferencia de calor en $x = L$ es:

$$q''\big|_{x=L} = \kappa \frac{T_9 - T_{10}}{\Delta x} \approx 120 \frac{188.88 - 200.00}{1.11} \quad (9.23)$$

$$q''\big|_{x=L} \approx -1202.16 \text{ W/cm}^2 \quad (9.24)$$

donde el signo negativo indica que la velocidad de transferencia de calor se realiza en la dirección negativa del eje x .

A continuación se presenta un programa que resuelve la siguiente ecuación diferencial ordinaria de orden 2 a una matriz que luego se resuelve por Gauss-Seidel:

$$\frac{d^2Y(x)}{dx^2} + p(x)\frac{dY(x)}{dx} + q(x)Y(x) = f(x) \quad (9.25)$$

```

1  program efid2
2  integer :: i,j
3  integer, parameter :: n=8
4  real, dimension (0:n,0:n) :: m
5  real, dimension (0:n) :: b,p,q,f,y
6  real :: h,L
7  !
8  do i=0,n
9      do j=0,n
10         m(i,j)=0.0
11     end do
12 end do
13 L = 10.0    ! longitud de la barilla
14 p = 0.      ! valor del coeficiente p(x)
15 q = 0.      ! valor del coeficiente q(x)
16 y(0) = 100.0 ! condicon inicial en x=0
17 y(n) = 200.0 ! condicion inicial en x=L
18 h = L/(n+1) ! tamaño del paso.
19 f = 0.0     ! valor de la funcion f(x).
20 !
21 m(1,1) = ( -2.0 + (h**2)*q(1) )
22 m(1,2) = ( 1.0 + h*p(1)/2.0 )
23 b(1) = (h**2)*f(1) - ( 1.0 - h*p(1)/2.0 )*y(0)
24 write(*,100)(m(1,j),j=1,n),b(1)
25 !
26 do i=2,n-1
27     j=i
28     m(i,j-1) = ( 1.0 - h*p(i)/2.0 )
29     m(i,j) = ( -2.0 + (h**2)*q(i) )
30     m(i,j+1) = ( 1.0 + h*p(i)/2.0 )
31     b(i) = (h**2)*f(i)
32     write(*,100)(m(i,k),k=1,n),b(i)
33 end do

```

```

34 !
35     m(n,n-1) = ( 1.0 - h*p(n)/2.0 )
36     m(n,n) = ( -2.0 + (h**2)*q(n) )
37     b(n) = (h**2)*f(n) - (1.0 + h*p(n)/2.0)*y(n)
38     write(*,100)(m(n,j),j=1,n),b(n)
39 !
40     100 format(9(2x,f7.2))
41 !
42     end program efid2

```

9.2.2 Distribución de temperatura en una placa rectangular

En el caso de una placa rectangular bidimensional, la ecuación de Poisson, ecuación (9.7), toma la siguiente forma:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (9.26)$$

$$\frac{T(i+1,j) - 2T(i,j) + T(i-1,j)}{\Delta x^2} + \frac{T(i,j+1) - 2T(i,j) + T(i,j-1)}{\Delta y^2} = 0 \quad (9.27)$$

considerando los espaciamientos de las mallas en la dirección x y en la dirección y iguales, es decir: $\Delta x = \Delta y = h$,

$$\frac{T(i+1,j) - 2T(i,j) + T(i-1,j)}{h^2} + \frac{T(i,j+1) - 2T(i,j) + T(i,j-1)}{h^2} = 0 \quad (9.28)$$

cancelando h ,

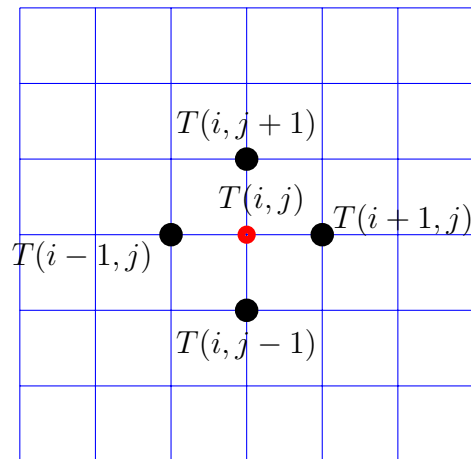
$$T(i+1,j) - 2T(i,j) + T(i-1,j) + T(i,j+1) - 2T(i,j) + T(i,j-1) = 0 \quad (9.29)$$

$$T(i+1,j) - 4T(i,j) + T(i-1,j) + T(i,j+1) + T(i,j-1) = 0 \quad (9.30)$$

despejando $T(i,j)$,

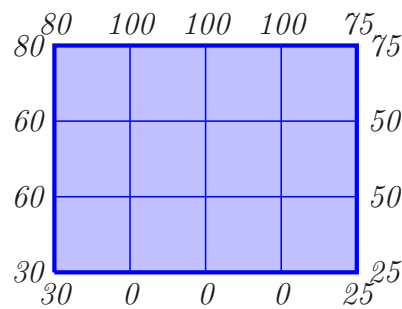
$$T(i,j) = \frac{1}{4} \left(T(i+1,j) + T(i-1,j) + T(i,j+1) + T(i,j-1) \right) \quad (9.31)$$

La ecuación (9.31) indica que para estimar el valor de la temperatura en el punto $T(i,j)$, necesita conocer el estimativo o aproximación de los valores de los vecinos. Es decir, el valor de la Temperatura es el promedio de los valores de la Temperatura de los cuatro puntos vecinos. La siguiente Figura muestra la ubicación de los puntos en la malla:



Para analizar los resultados de la solución de la ecuación en diferencias finitas, ecuación (9.31), se plantean varios problemas con diferentes tipos de condiciones de frontera.

Problema 9.2 Se tiene una placa plana y en sus bordes presenta temperaturas en grados celsius como los muestra la siguiente Figura:



Solución

La Figura presenta 4 fila (renglones) y 5 columnas. Se realiza un programa en Fortran con un máximo de 100 ciclos para su convergencia y una aproximación de 10^{-5} de grado de convergencia. La siguiente Tabla tiene la información necesaria que necesita el programa de Fortra.

4	5	100	5	
30.0	0.0	0.0	0.0	25.0
80.0	100.0	100.0	100.0	75.0
30.0	60.0	60.0	80.0	
25.0	50.0	50.0	75.0	

```

1  !      SOLUCION A LA ECUACION DE LAPLACE
2  !      d2T/dx2 + d2T/dy2 = 0
3  !
4  program laplace

```

```

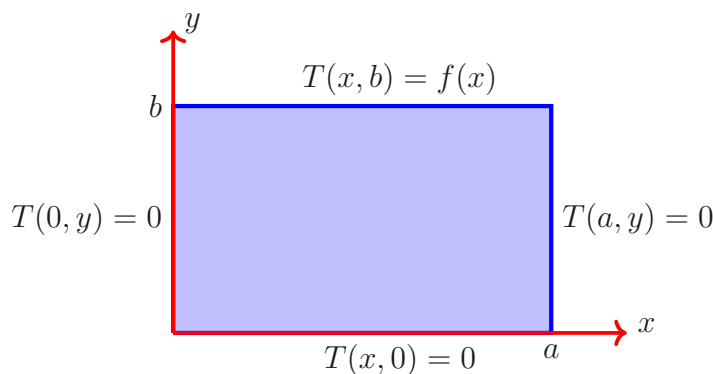
5      integer , parameter :: n=20,m=20
6      real , dimension (n,m) :: U
7      integer :: i,j,nr,nc,nmi,icont,iter,numren,numcol,naprox
8      real :: tempor
9      !
10     open(unit=7,file='output.dat',status='unknown')
11     open(unit=2,file='input',status='old')
12     write(6,100)
13     ! lee las condiciones de frontera
14     read(2,*)numren,numcol,nmi,naprox
15     read(2,*)(U(1,j),j=1,numcol)
16     read(2,*)(U(numren,j),j=1,numcol)
17     read(2,*)(U(i,1),i=1,numren)
18     read(2,*)(U(i,numcol),i=1,numren)
19     close(2)
20     ! iniciacion de la matriz en ceros
21     nr = numren - 1
22     nc = numcol - 1
23     do i = 2,nr
24         do j = 2,nc
25             u(i,j)=0.0
26         end do
27     end do
28     !
29     aprox = 10.0*(-naprox)
30     ! comienzo de las iteraciones.
31     do 3 iter = 1,nmi
32         icont = 0
33         do i=2,nr
34             do j=2,nc
35                 tempor = ( U(i,j-1) + U(i,j+1) +
36                           U(i-1,j) + U(i+1,j) )/4.0
37                 IF( (abs(U(i,j)-tempor)/tempor).le.aprox )go to 2
38                 icont = icont +1
39             2      U(i,j) = tempor
40             end do
41         end do
42         if(icont.eq.0)go to 4
43     3 continue
44     write(*,*)iter,icont
45     4 do i=1,numren
46         write(7,*)(U(i,j),j=1,numcol)
47         write(*,*)(U(i,j),j=1,numcol)
48     end do
49     close(7)
50     !
51     100 format(10x,'Solucion: ')
52     104 format(5(2x,F6.2))
53     !
54     end program laplace

```

y la solución se presenta en la siguiente Tabla:

80.00	100.00	100.00	100.00	75.00
60.00	66.85	66.65	63.52	50.00
60.00	40.77	36.21	37.43	50.00
30.00	0.00	0.00	0.00	25.00

Problema 9.3 Considerese el siguiente problema de Dirichlet:



La ecuación de Laplace en dos dimensiones es:

$$\frac{\partial^2 T(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x, y)}{\partial y^2} = 0 \quad (9.32)$$

donde $0 < x < a$ y $0 < y < b$ con condiciones de frontera como lo muestra la Figura.

La ecuación de Laplace, ecuación (9.32), puede resolverse usando el método de separación de variables, asumiendo que la función temperatura puede representarse como un producto de dos funciones que dependen de las variables x y y :

$$T(x, y) = X(x)Y(y) \quad (9.33)$$

Sustituyendo la función $T(x, y)$, ecuación (9.33), se obtienen las dos siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\begin{aligned} X''(x) + \lambda^2 X(x) &= 0 \\ Y''(y) - \lambda^2 Y(y) &= 0 \end{aligned} \quad (9.34)$$

donde λ^2 es una constante determinada por las condiciones de frontera. Las ecuaciones diferenciales (9.34), tienen las siguientes condiciones de frontera:

$$\begin{aligned} X(0) &= X(a) = 0 \\ Y(0) &= 0 \quad T(x, b) = f(x) \end{aligned} \quad (9.35)$$

Resolviendo las ecuaciones (9.35) y aplicando las condiciones de frontera, se obtienen las soluciones:

$$X_n(x) = \text{sen} \left(\frac{n\pi}{a} x \right), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (9.36)$$

y

$$Y_n(y) = c_1 \cosh \left(\frac{n\pi}{a} y \right) + c_2 \sinh \left(\frac{n\pi}{a} y \right) \quad (9.37)$$

y se observa que si se aplica la condición de frontera $Y(0) = 0$, se obliga a que la constante c_1 sea igual a cero, por lo tanto la solución particular es de la siguiente forma:

$$T_n(x, y) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{a}y\right) \quad (9.38)$$

y la solución general sería la superposición de todas las soluciones particulares:

$$T(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{a}y\right) \quad (9.39)$$

La ecuación (9.39) satisface la ecuación de Laplace y tres de las ecuaciones de frontera de la placa plana. Usando la cuarta condición de frontera: $T(x, b) = f(x)$, se determina el coeficiente c_n de la ecuación (9.39). Haciendo $y = b$ en la ecuación (9.39),

$$T(x, b) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi b}{a}\right) \quad (9.40)$$

es decir,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi b}{a}\right) \quad (9.41)$$

como las funciones trigonométricas forman un conjunto de funciones ortogonales, para despejar la constante c_n se puede premultiplicar la ecuación (9.41) por la función $\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right)$ e integrar,

$$\int_0^a f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi b}{a}\right) \int_0^a \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx \quad (9.42)$$

Usando las relaciones trigonométricas: $\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$, la integral puede escribirse como:

$$\int_0^a \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx = \frac{1}{2} \int_0^a \cos\left[(n-m)\frac{\pi}{a}x\right] dx - \frac{1}{2} \int_0^a \cos\left[(n+m)\frac{\pi}{a}x\right] dx \quad (9.43)$$

$$\int_0^a \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx = \frac{a}{2} \frac{\operatorname{sen}\left[(n-m)\frac{\pi}{a}x\right]}{(n-m)\pi} \Bigg|_0^a - \frac{a}{2} \frac{\operatorname{sen}\left[(n+m)\frac{\pi}{a}x\right]}{(n+m)\pi} \Bigg|_0^a \quad (9.44)$$

se observa que el segundo término del lado derecho es igual a cero para cualquier valor de $n \neq m$, habiendo evaluado los límites de integración. Osea que la integral se reduce a:

$$\int_0^a \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx = \frac{a}{2} \frac{\operatorname{sen}\left[(n-m)\pi\right]}{(n-m)\pi} \quad (9.45)$$

de nuevo para $n \neq m$ la integral tiene un valor de cero, mientras que si $n = m$, se obtiene una indeterminación, la cual se resuelve aplicando el teorema de H'opital y dando como resultado:

$$\int_0^a \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx = \frac{a}{2} \delta_{nm} \quad (9.46)$$

reemplazando en (9.42),

$$\int_0^a f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right) dx = \frac{a}{2} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi b}{a}\right) \delta_{nm} \quad (9.47)$$

cancelando la sumatoria,

$$\int_0^a f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right) dx = \frac{a}{2} c_m \operatorname{senh}\left(\frac{m\pi b}{a}\right) \quad (9.48)$$

despejando la constante,

$$c_m = \frac{2 \int_0^a f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right) dx}{a \operatorname{senh}\left(\frac{m\pi b}{a}\right)} \quad (9.49)$$

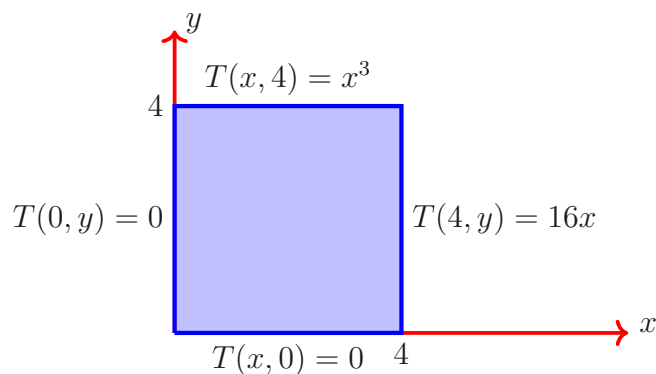
reemplazando en (9.39),

$$T(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \int_0^a f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx}{a \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi b}{a}\right)} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{a}y\right) \quad (9.50)$$

Ahora, si $f(x) = T_0 x(a - x)$, la distribución de Temperatura está determinada por la ecuación:

$$T(x, y) = \frac{8T_0 a^2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[1 - (-1)^n]}{n^3} \frac{\operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{a}y\right)}{\operatorname{senh}\left(\frac{n\pi b}{a}\right)} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \quad (9.51)$$

Problema 9.4 En este ejemplo se tiene un programa en Fortran para encontrar la distribución de temperatura en una placa cuadrada con las condiciones de frontera como lo muestra la Figura:



```

1      program placa
2      integer , parameter :: n=50,m=50
3      real , dimension (n,m) :: U
4      integer :: i,j,nr,nc,nmi,icont,iter,numren,numcol,naprox
5      real :: tempor
6      !
7      !      INFORMACION QUE SE DEBE DE DAR COMO ENTRADA
8      !
9      DX = 0.5
10     NUMREN = 8
11     NUMCOL = 8
12     NMI = 300
13     NAPROX = 5
14     !
15     open(unit=7,file='output.dat',status='unknown')
16     ! condiciones de frontera
17     DO I=0,NUMREN
18         U(I,NUMREN)=(I*DX)**3
19         U(NUMREN,I)=16.0*I*DX
20     END DO
21     ! iniciacion de la matriz en ceros
22     NR = NUMREN - 1
23     NC = NUMCOL - 1
24     DO I = 1,NR
25         DO J = 1,NC
26             u(I,j)=0.0
27         END DO
28     END DO
29     !
30     APROX = 10.0**(-NAPROX)
31     ! COMIENZO DE LAS ITERACIONES
32     DO 3 ITER = 1,NMI
33         ICONT = 0
34         DO I=1,NR
35             DO J=1,NC
36                 TEMPOR = ( U(I,J-1) + U(I,J+1) + U(I-1,J) + U(I+1,J) )/4.0
37                 IF ( ABS(U(I,J)-TEMPOR)/TEMPOR ).LE. APROX ) GO TO 2
38                 ICONT = ICONT + 1
39             END DO
40             U(I,J) = TEMPOR
41         END DO
42     END DO
43     IF(ICONT.EQ.0)GO TO 4
44     3 CONTINUE
45     WRITE(*,*)ITER,ICONT
46     4 do J=NUMCOL, 0, -1
47         write(*,120) (U(I,J),I=0,NUMREN)
48         write(7,120) (U(I,J),I=0,NUMREN)
49     end do

```

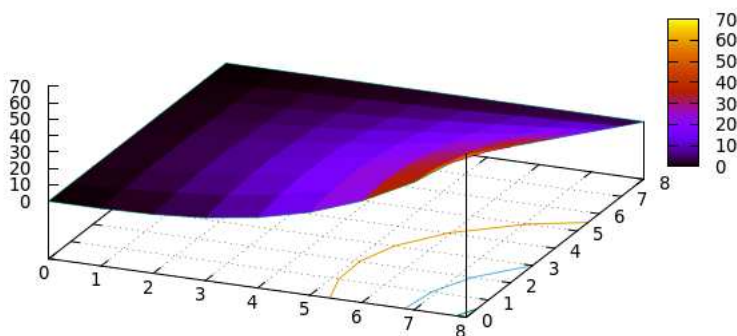
```

50      close (7)
51  !
52  120 format(9F8.3)
53  !
54      end program placa

```

El resultado que arroja el programa es el siguiente grid de puntos:

0.000	0.125	1.000	3.375	8.000	15.625	27.000	42.875	64.000
0.000	1.401	3.401	6.586	11.515	18.693	28.509	41.106	56.000
0.000	2.078	4.616	8.052	12.783	19.122	27.237	37.040	48.000
0.000	2.297	4.932	8.224	12.442	17.774	24.278	31.818	40.000
0.000	2.176	4.592	7.470	10.987	15.254	20.283	25.953	32.000
0.000	1.815	3.791	6.076	8.782	11.974	15.646	19.711	24.000
0.000	1.291	2.682	4.260	6.092	8.213	10.616	13.244	16.000
0.000	0.669	1.385	2.190	3.113	4.172	5.360	6.651	8.000
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

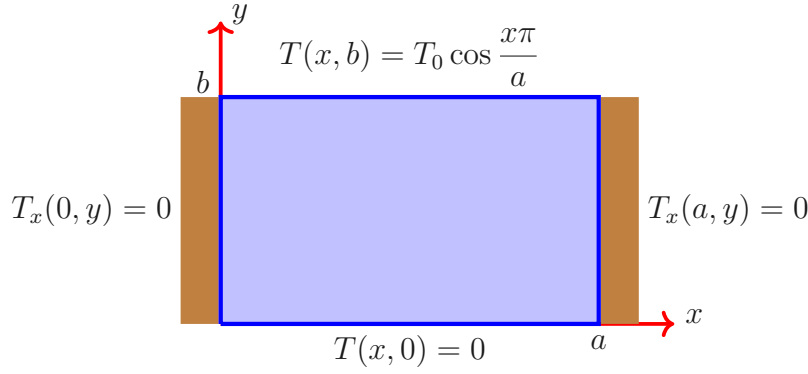


Problema 9.5 La siguiente Figura muestra las condiciones de frontera de una lámina rectangular que se encuentra aislada a lo largo de los ejes $x = 0$ y $x = a$, es decir:

$$T_x(0, y) = 0, \quad T_x(a, y) = 0 \quad (9.52)$$

y cuyos ejes $y = 0$ y $y = b$ están puestos a 0 y $T_0 \cos \frac{x\pi}{a}$, respectivamente. Así que:

$$T(x, 0) = 0, \quad T(x, b) = T_0 \cos \frac{x\pi}{a} \quad (9.53)$$



- Demuestre que la distribución de temperatura en estado estacionario en una lámina rectangular es:

$$T(x, y) = T_0 \frac{\sinh \frac{\pi y}{a} \cos \frac{\pi x}{a}}{\sinh \frac{\pi b}{a}} \quad (9.54)$$

- Use el método de diferencias finitas y obtenga y compare con el resultado analítico la distribución de temperatura en la placa rectangular.

La ecuación (9.7) en estado estacionario y sin fuentes de temperaturas se convierte en la ecuación de Laplace, que en tres dimensiones y en coordenadas cartesianas es;

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (9.55)$$

Para la solución analítica se emplea el método de separación de variables el cual propone una solución de la forma:

$$T(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z) \quad (9.56)$$

donde ésta solución debe de satisfacer la ecuación de Laplace, por lo tanto,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} X(x)Y(y)Z(z) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} X(x)Y(y)Z(z) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} X(x)Y(y)Z(z) = 0 \quad (9.57)$$

dividiendo la ecuación por $X(x)Y(y)Z(z)$, se obtiene:

$$\frac{1}{X(x)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} X(x) + \frac{1}{Y(y)} \frac{\partial^2}{\partial y^2} Y(y) + \frac{1}{Z(z)} \frac{\partial^2}{\partial z^2} Z(z) = 0 \quad (9.58)$$

Debido a que la ecuación (9.58) depende de tres variables diferentes, la suma de éstas tres variables solo se cumple si cada uno de sus términos es igual a una constante. Obsérvese que se pueden obtener las siguientes tres ecuaciones:

$$\frac{1}{X(x)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} X(x) = -m^2 \quad (9.59)$$

$$\frac{1}{Y(y)} \frac{\partial^2}{\partial y^2} Y(y) = -n^2 \quad (9.60)$$

y

$$\frac{1}{Z(z)} \frac{\partial^2}{\partial z^2} Z(z) = -(m^2 + n^2) = -k^2 \quad (9.61)$$

donde las soluciones, para cada una de las coordenadas, son de la forma:

$$X(x) = A_m \text{sen}(mx) \quad (9.62)$$

$$Y(y) = B_n \text{sen}(ny) \quad (9.63)$$

$$Z(z) = C_k \text{sen}(kz) \quad (9.64)$$

y la solución particular de $T(x, y, z)$ es,

$$T_{mnk}(x, y, z) = D_{mnk} \text{sen}(mx) \text{sen}(ny) \text{sen}(kz) \quad (9.65)$$

y la solución general es:

$$T(x, y, z) = \sum_{m,n,k} D_{mnk} \text{sen}(mx) \text{sen}(ny) \text{sen}(kz) \quad (9.66)$$

9.2.3 Distribución de temperatura en un disco

Las coordenadas cilíndricas para un disco son de la forma:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0 \quad (9.67)$$

Usando el método de diferencias finitas, las derivadas se escriben como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &\approx \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta r}, & \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} &\approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta r^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} &\approx \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\Delta \phi^2} \end{aligned} \quad (9.68)$$

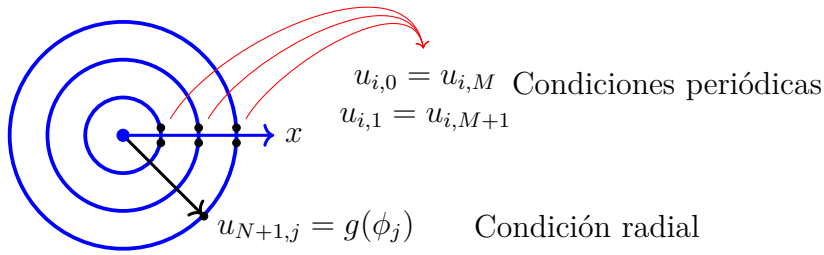
reemplazando en (9.67), se obtiene:

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta r^2} + \frac{1}{r_i} \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta r} + \frac{1}{r_i^2} \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\Delta \phi^2} = 0 \quad (9.69)$$

donde i toma los valores de los números enteros $1, 2, 3, \dots, N+1$ y j toma los valores de $1, 2, 3, \dots, M+1$. En la dirección radial, la malla de puntos se elige la mitad de un número entero i , mientras que en la dirección azimutal se usa los números enteros dados por j , es decir:

$$r_i = \left(i - \frac{1}{2}\right) \Delta r; \quad \phi_j = (j-1) \Delta \phi \quad (9.70)$$

donde $\Delta r = \frac{2}{2N+1}$ y $\Delta \phi = \frac{2\pi}{M}$. Se elige r_i como la mitad del i -ésimo número entero, permite eliminar la condición inicial radial u_{0j} que aparece en la ecuación (9.69) cuando $i = 0$. Así, Las condiciones de contorno para la ecuación (9.67) son:



La Figura muestra que $U(r, \phi)$ es 2π periódica en θ , cumpliéndose las condiciones $u_{i,0} = u_{i,M}$ y $u_{i,1} = u_{i,M+1}$ y radialmente solo se necesita la condición de borde $u_{N+1,j} = g(\phi_j)$. Reemplazando (9.70) en (9.69),

$$\begin{aligned} \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta r^2} + \frac{1}{\left(i - \frac{1}{2}\right) \Delta r} \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta r} \\ + \frac{1}{\left(i - \frac{1}{2}\right)^2 \Delta r^2} \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\Delta \phi^2} = 0 \end{aligned} \quad (9.71)$$

$$u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j} + \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\left(i - \frac{1}{2}\right)} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\left(i - \frac{1}{2}\right)^2 \Delta \phi^2} = 0 \quad (9.72)$$

organizando la ecuación,

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{2\left(i - \frac{1}{2}\right)}\right) u_{i+1,j} - 2\left(1 + \frac{1}{\left(i - \frac{1}{2}\right)^2 \Delta \phi^2}\right) u_{i,j} + \left(1 - \frac{1}{2\left(i - \frac{1}{2}\right)}\right) u_{i-1,j} \\ + \frac{u_{i,j-1}}{\left(i - \frac{1}{2}\right)^2 \Delta \phi^2} + \frac{u_{i,j+1}}{\left(i - \frac{1}{2}\right)^2 \Delta \phi^2} = 0 \end{aligned} \quad (9.73)$$

dándole valores a i y a j ,

Para $j = 1, 2, 3, \dots, M$:

$$\text{para } i = 1 \rightarrow 2u_{2,1} - 2 \left(1 + \frac{4}{\Delta\phi^2} \right) u_{1,1} + \frac{4u_{1,0}}{\Delta\phi^2} + \frac{4u_{1,2}}{\Delta\phi^2} = 0$$

$$\text{para } i = 2 \rightarrow \frac{4}{3}u_{3,1} - 2 \left(1 + \frac{4}{9\Delta\phi^2} \right) u_{2,1} + \frac{2}{3}u_{1,1} + \frac{4u_{2,0}}{9\Delta\phi^2} + \frac{4u_{2,2}}{9\Delta\phi^2} = 0$$

$$\text{para } i = 3 \rightarrow \frac{11}{10}u_{4,1} - 2 \left(1 + \frac{4}{25\Delta\phi^2} \right) u_{3,1} + \frac{9u_{2,1}}{10} + \frac{4u_{3,0}}{25\Delta\phi^2} + \frac{4u_{3,2}}{25\Delta\phi^2} = 0$$

\vdots

$$\begin{aligned} \text{para } i = N \rightarrow & \left(1 + \frac{1}{2 \left(N - \frac{1}{2} \right)} \right) u_{N+1,1} - 2 \left(1 + \frac{1}{\left(N - \frac{1}{2} \right)^2 \Delta\phi^2} \right) u_{N,1} \\ & + \left(1 - \frac{1}{2 \left(N - \frac{1}{2} \right)} \right) u_{N-1,1} + \frac{u_{N,0}}{\left(N - \frac{1}{2} \right)^2 \Delta\phi^2} + \frac{u_{N,2}}{\left(N - \frac{1}{2} \right)^2 \Delta\phi^2} = 0 \end{aligned}$$

Termina los valores de j .

9.2.4 Distribución de temperatura en un cilindro

La ecuación de Laplace en Coordenadas (r, ϕ, z) para un cilindro es dada por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (9.74)$$

la cual, frecuentemente se encuentra en los problemas de calor, transferencia de masa, fluidos, elasticidad, electrostática, y otras áreas de mecánica y la física. La solución analítica de la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas, es compleja debido al manejo de las ecuaciones de Bessel y muy laborioso según la complejidad de los problemas. En esta sección se planteará la solución analítica de la ecuación de Laplace y la deducción de las ecuaciones en diferencias finitas para su programación.

Problema 9.6 *La superficie curva de un cilindro recto de radio a se mantiene a una temperatura de cero y sus dos caras en $z = \ell$ están fijas a $T(r, \theta, \ell) = T_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right)$ y $T = 0$ en $z = 0$. Determine la distribución de la temperatura en el cilindro en estado estacionario.*

$$\text{Ayuda :} \rightarrow \int_0^1 (1-x^2)x J_0(\alpha_n x) dx = \frac{2J_2(\alpha_n)}{\alpha_n^2} \quad (9.75)$$

Solución

La solución de la ecuación de Laplace,

$$\nabla^2 T(r, \theta, \phi) = 0 \quad (9.76)$$

en coordenadas cilíndricas es:

$$T(r, \theta, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} C_{m,k} J_m\left(\frac{\alpha_{m,k}}{a} r\right) \left[A_{m,k} \sinh\left(\frac{\alpha_{m,k}}{a} z\right) + B_{m,k} \cosh\left(\frac{\alpha_{m,k}}{a} z\right) \right] \times \\ \left[D \sin(m\theta) + E \cos(m\theta) \right] \quad (9.77)$$

En la base del cilindro, en $z = 0$, la temperatura es cero. Esto significa que $T(r, \theta, 0) = R(r)\Theta(\theta)H(0) = 0$ así que $H(0) = A \sinh(k(0)) + B \cosh(k(0)) = 0$. De esta condición se deduce que $B = 0$ y por lo tanto la solución particular del eje z es $H_{m,n}(z) = A_{m,n} \sinh\left(\frac{\alpha_{m,n}}{a} z\right)$

$$T(r, \theta, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} C_{m,k} J_m\left(\frac{\alpha_{m,k}}{a} r\right) \sinh\left(\frac{\alpha_{m,k}}{a} z\right) (D \sin(m\theta) + E \cos(m\theta)) \quad (9.78)$$

Como la condición de frontera es $z = l$ es una función que depende únicamente de r , se espera que la distribución de temperatura tenga simetría angular, es decir, que la temperatura no dependa de θ . Esta solución particular se da cuando $m = 0$

$$T(r, z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k J_0\left(\frac{\alpha_{0,k}}{a} r\right) \sinh\left(\frac{\alpha_{0,k}}{a} z\right) \quad (9.79)$$

Aplicamos la condición de frontera restante, esta es

$$T(r, \pm l) = T_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) \quad (9.80)$$

$$T_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k J_0\left(\frac{\alpha_{0,k}}{a} r\right) \sinh\left(\frac{\alpha_{0,k}}{a} l\right) \quad (9.81)$$

Multiplicamos en ambos lados por $r J_0\left(\frac{\alpha_{0,n}}{a} r\right)$ e integramos con respecto a r entre el intervalo 0 y 1.

$$\int_0^1 T_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) r J_0\left(\frac{\alpha_{0,n}}{a} r\right) dr = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 C_k J_0\left(\frac{\alpha_{0,k}}{a} r\right) \sinh\left(\frac{\alpha_{0,k}}{a} l\right) r J_0\left(\frac{\alpha_{0,n}}{a} r\right) dr \quad (9.82)$$

$$T_0 \int_0^1 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) r J_0\left(\frac{\alpha_{0,n}}{a} r\right) dr = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \sinh\left(\frac{\alpha_{0,k}}{a} l\right) \int_0^1 r J_0\left(\frac{\alpha_{0,k}}{a} r\right) J_0\left(\frac{\alpha_{0,n}}{a} r\right) dr \quad (9.83)$$

haciendo $x = \frac{r}{a}$, $dx = dr$

$$T_0 \int_0^1 \left(1 - x^2\right) ax J_0(\alpha_{0,n}x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \sinh\left(\frac{\alpha_{0,k}}{a}l\right) \int_0^1 ax J_0(\alpha_{0,k}x) J_0(\alpha_{0,n}x) dx \quad (9.84)$$

usando la ayuda de la ortogonalidad de las funciones de Bessel,

$$T_0 \int_0^1 x J_0(\alpha_{0,k}x) J_0(\alpha_{0,n}x) dx = \frac{\delta_{k,n}}{2} J_1^2(\alpha_{0,k}) \quad (9.85)$$

se obtiene que

$$\frac{2T_0 J_2(\alpha_{0,k})}{\alpha_{0,k}^2} = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \sinh\left(\frac{\alpha_{0,k}}{a}l\right) \frac{\delta_{k,n}}{2} J_1^2(\alpha_{0,k}) \quad (9.86)$$

Como $\delta_{m \neq n} = 0$ se puede eliminar la sumatoria

$$\frac{4T_0 J_2(\alpha_{0,k})}{\alpha_{0,k}^2} = C_k \sinh\left(\frac{\alpha_{0,k}}{a}l\right) J_1^2(\alpha_{0,k}) \quad (9.87)$$

$$C_k = \frac{4T_0 J_2(\alpha_{0,k})}{\alpha_{0,k}^2 \sinh\left(\frac{\alpha_{0,k}}{a}l\right) J_1^2(\alpha_{0,k})} \quad (9.88)$$

Finalmente, la distribución de temperaturas en el cilindro es

$$T(r, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4T_0 J_2(\alpha_{0,k})}{\alpha_{0,k}^2 \sinh\left(\frac{\alpha_{0,k}}{a}l\right) J_1^2(\alpha_{0,k})} J_0\left(\frac{\alpha_{0,k}}{a}r\right) \sinh\left(\frac{\alpha_{0,k}}{a}z\right) \quad (9.89)$$

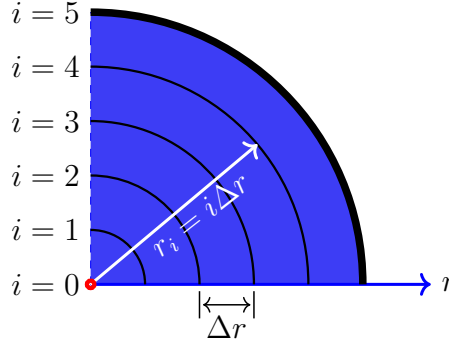
En el planteamiento numérico se usará el método de diferencias finitas. Para $r \neq 0$, el esquema de la aproximación de diferencias finitas es:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &\approx \frac{u_{i+1,j,k} - u_{i-1,j,k}}{2\Delta r}; & \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} &\approx \frac{u_{i+1,j,k} - 2u_{i,j,k} + u_{i-1,j,k}}{\Delta r^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} &\approx \frac{u_{i,j+1,k} - 2u_{i,j,k} + u_{i,j-1,k}}{\Delta \phi^2}; & \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &\approx \frac{u_{i,j,k+1} - 2u_{i,j,k} + u_{i,j,k-1}}{\Delta z^2} \end{aligned} \quad (9.90)$$

reemplazando (9.90) en (9.74), se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{u_{i+1,j,k} - 2u_{i,j,k} + u_{i-1,j,k}}{\Delta r^2} + \frac{1}{r_i} \frac{u_{i+1,j,k} - u_{i-1,j,k}}{2\Delta r} + \frac{1}{r_i^2} \frac{u_{i,j+1,k} - 2u_{i,j,k} + u_{i,j-1,k}}{\Delta \phi^2} + \\ \frac{u_{i,j,k+1} - 2u_{i,j,k} + u_{i,j,k-1}}{\Delta z^2} = 0 \end{aligned} \quad (9.91)$$

En la siguiente Figura, se observa que la posición r_i corresponde a i veces Δr , es decir $r_i = i\Delta r$. Reemplazando r_i en la ecuación (9.91)



$$\frac{u_{i+1,j,k} - 2u_{i,j,k} + u_{i-1,j,k}}{\Delta r^2} + \frac{1}{i\Delta r} \frac{u_{i+1,j,k} - u_{i-1,j,k}}{2\Delta r} + \frac{1}{i^2\Delta r^2} \frac{u_{i,j+1,k} - 2u_{i,j,k} + u_{i,j-1,k}}{\Delta \phi^2} + \frac{u_{i,j,k+1} - 2u_{i,j,k} + u_{i,j,k-1}}{\Delta z^2} = 0 \quad (9.92)$$

$$\frac{u_{i+1,j,k} - 2u_{i,j,k} + u_{i-1,j,k}}{\Delta r^2} + \frac{1}{2i\Delta r^2} (u_{i+1,j,k} - u_{i-1,j,k}) + \frac{1}{i^2\Delta r^2} \frac{u_{i,j+1,k} - 2u_{i,j,k} + u_{i,j-1,k}}{\Delta \phi^2} + \frac{u_{i,j,k+1} - 2u_{i,j,k} + u_{i,j,k-1}}{\Delta z^2} = 0 \quad (9.93)$$

multiplicando en ambos lados por Δr^2 ,

$$u_{i+1,j,k} - 2u_{i,j,k} + u_{i-1,j,k} + \frac{1}{2i} (u_{i+1,j,k} - u_{i-1,j,k}) + \frac{1}{i^2\Delta \phi^2} (u_{i,j+1,k} - 2u_{i,j,k} + u_{i,j-1,k}) + \frac{\Delta r^2}{\Delta z^2} (u_{i,j,k+1} - 2u_{i,j,k} + u_{i,j,k-1}) = 0 \quad (9.94)$$

$$\left(1 + \frac{1}{2i}\right) u_{i+1,j,k} + \left(1 - \frac{1}{2i}\right) u_{i-1,j,k} + \frac{1}{i^2\Delta \phi^2} (u_{i,j+1,k} + u_{i,j-1,k}) + \frac{\Delta r^2}{\Delta z^2} (u_{i,j,k+1} + u_{i,j,k-1}) - 2 \left(1 + \frac{1}{i^2\Delta \phi^2} + \frac{\Delta r^2}{\Delta z^2}\right) u_{i,j,k} = 0 \quad (9.95)$$

definiendo las variables:

$$\alpha_i = \frac{1}{2i}; \quad \beta_i = \frac{1}{i^2\Delta \phi^2}; \quad \gamma = \frac{\Delta r^2}{\Delta z^2}$$

$$\delta_i = 2 \left(1 + \frac{1}{i^2\Delta \phi^2} + \frac{\Delta r^2}{\Delta z^2}\right) = 2(1 + \beta_i + \gamma) \quad (9.96)$$

reemplazando,

$$\begin{aligned} (1 + \alpha_i)u_{i+1,j,k} + (1 - \alpha_i)u_{i-1,j,k} + \beta_i(u_{i,j+1,k} + u_{i,j-1,k}) + \gamma(u_{i,j,k+1} + u_{i,j,k-1}) \\ - \delta_i u_{i,j,k} = 0 \quad \text{para } r \neq 0 \end{aligned} \quad (9.97)$$

$$\begin{aligned} (1 + \alpha_i)u_{i+1,j,k} + (1 - \alpha_i)u_{i-1,j,k} + \beta_i(u_{i,j+1,k} + u_{i,j-1,k}) + \\ \gamma(u_{i,j,k+1} + u_{i,j,k-1}) - \delta_i u_{i,j,k} = 0, \quad \text{para } r \neq 0 \end{aligned} \quad (9.98)$$

es decir, la ecuación a programar es:

$$\begin{aligned} u_{i,j,k} = \left(\frac{1}{\delta_i} + \frac{\alpha_i}{\delta_i}\right)u_{i+1,j,k} + \left(\frac{1}{\delta_i} - \frac{\alpha_i}{\delta_i}\right)u_{i-1,j,k} + \frac{\beta_i}{\delta_i}(u_{i,j+1,k} + u_{i,j-1,k}) + \\ \frac{\gamma}{\delta_i}(u_{i,j,k+1} + u_{i,j,k-1}), \quad \text{para } r \neq 0 \end{aligned} \quad (9.99)$$

donde, las variables α_i , β_i , γ y δ_i estan definidas en la ecuación (9.96).

Problema 9.7 Las tapas superior e inferior de un sólido cilíndrico de radio a y altura ℓ , se mantienen a una temperatura de cero grado ($T = 0$), mientras que su superficie curva es mantenida a una temperatura de $f(z) = T_0 z(\ell - z)$.

- Use el método de diferencias finitas para estimar la distribución de temperatura en el cilindro.
- Compare los resultados numéricos con la solución analítica dada por la ecuación:

$$T(r, z) = \frac{4T_0\ell^2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n^3} \frac{J_0\left(\frac{n\pi r}{a}\right)}{J_0\left(\frac{n\pi\ell}{a}\right)} \sin \frac{n\pi z}{\ell} \quad (9.100)$$

Obsérvese que sí existe simetría azimutal, la constante β_i es cero la constante γ debe de ser modificada. Entonces, la ecuación a programar, para $r \neq 0$ es:

$$u_{i,k} = \frac{1}{\delta_i}(1 + \alpha_i)u_{i+1,k} + \frac{1}{\delta_i}(1 - \alpha_i)u_{i-1,k} + \frac{\gamma}{\delta_i}(u_{i,k+1} + u_{i,k-1}) \quad (9.101)$$

donde, las variables α_i , γ y δ_i son:

$$\alpha_i = \frac{1}{2i}; \quad \gamma = \frac{\Delta r^2}{\Delta z^2}; \quad \delta_i = 2\left(1 + \frac{\Delta r^2}{\Delta z^2}\right) = 2(1 + \gamma) \quad (9.102)$$

cuando $r = 0$, la ecuación diferencial (9.74),

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \phi} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (9.103)$$

presenta una indeterminación, en el segundo término $\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r}$, es decir:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial u}{\partial r}}{r} \rightarrow \frac{0}{0} \quad (9.104)$$

entonces, aplicando L'Hospital a la ecuación (9.104), se obtiene:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \quad (9.105)$$

reemplazando en la ecuación diferencial, ésta toma la forma de:

$$2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \phi} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (9.106)$$

y sabiendo que existe simetría azimutal, se obtiene:

$$2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad \text{para } r = 0. \quad (9.107)$$

usando el método de diferencias finitas, ecuación (9.90), con $j = 0$,

$$2 \frac{u_{i+1,k} - 2u_{i,k} + u_{i-1,k}}{\Delta r^2} + \frac{u_{i,k+1} - 2u_{i,k} + u_{i,k-1}}{\Delta z^2} = 0 \quad (9.108)$$

$$-\frac{4}{\Delta r^2} u_{i,k} - \frac{2}{\Delta z^2} u_{i,k} + \frac{2}{\Delta r^2} (u_{i+1,k} + u_{i-1,k}) + \frac{1}{\Delta z^2} (u_{i,k+1} + u_{i,k-1}) = 0 \quad (9.109)$$

$$-2 \left(\frac{2}{\Delta r^2} + \frac{1}{\Delta z^2} \right) u_{i,k} + \frac{2}{\Delta r^2} (u_{i+1,k} + u_{i-1,k}) + \frac{1}{\Delta z^2} (u_{i,k+1} + u_{i,k-1}) = 0 \quad (9.110)$$

multiplicando por Δr^2 ,

$$-2 \left(2 + \frac{\Delta r^2}{\Delta z^2} \right) u_{i,k} + 2 (u_{i+1,k} + u_{i-1,k}) + \frac{\Delta r^2}{\Delta z^2} (u_{i,k+1} + u_{i,k-1}) = 0 \quad (9.111)$$

y tomando la definición de las variables de la ecuación (9.96), $\gamma = \frac{\Delta r^2}{\Delta z^2}$, se obtiene:

$$-2 (2 + \gamma) u_{i,k} + 2 (u_{i+1,k} + u_{i-1,k}) + \gamma (u_{i,k+1} + u_{i,k-1}) = 0 \quad (9.112)$$

despejando $u_{i,k}$,

$$u_{i,k} = \frac{u_{i+1,k} + u_{i-1,k}}{2 + \gamma} + \frac{\gamma}{2} \cdot \frac{u_{i,k+1} + u_{i,k-1}}{2 + \gamma}, \quad \text{para } r = 0 \quad (9.113)$$

Problema 9.8 La superficie curva de un cilindro recto de radio a se mantiene a una temperatura de cero y sus dos caras en $z = \ell$ están fijas a $T(r, \theta, l) = T_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)$ y $T = 0$ en $z = 0$. Use el método de diferencias finitas para determinar la distribución de la temperatura en el cilindro en estado estacionario. Compare éstos resultados numéricos con la solución analítica, resultado del problema 9.6.

9.2.5 Distribución de temperatura en una esfera

La ecuación de Laplace en Coordenadas esféricas es dada por

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} = 0 \quad (9.114)$$

suponiendo que existe simetría azimutal, la ecuación deja de ser dependiente del ángulo azimutal,

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (9.115)$$

En ésta ecuación se observa que existen singularidades en la parte radial, como en la parte angular, las cuales pueden ser removidas usando la regla de H'opital. El término radial presenta singularidad en el punto $r = 0$,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} = 3 \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \quad (9.116)$$

El segundo término de la ecuación contiene singularidades en los puntos $r = 0$, $\theta = 0$ y $\theta = \pi$. La singularidad debido al ángulo polar puede removerse usando la regla de H'opital.

$$\lim_{\substack{\theta \rightarrow 0 \\ \theta \rightarrow \pi}} \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) = \lim_{\substack{\theta \rightarrow 0 \\ \theta \rightarrow \pi}} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\cos \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) \quad (9.117)$$

$$= \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \lim_{\substack{\theta \rightarrow 0 \\ \theta \rightarrow \pi}} \frac{1}{r^2 \tan \theta} \frac{\partial T}{\partial \theta} \quad (9.118)$$

$$= \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \lim_{\substack{\theta \rightarrow 0 \\ \theta \rightarrow \pi}} \frac{1}{r^2 \cos^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \quad (9.119)$$

$$= \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \quad (9.120)$$

es decir,

$$\lim_{\substack{\theta \rightarrow 0 \\ \theta \rightarrow \pi}} \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) = \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \quad (9.121)$$

Observándose que, aunque las singularidades en $\theta = 0$ y $\theta = \pi$ fueron removidas, queda una singularidad en $r = 0$. Por lo tanto, para $r = 0$ la ecuación a programar es:

$$3 \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = 0 \quad \text{para } r = 0. \quad (9.122)$$

donde se propone realizar un mallado de puntos radiales como ubicados en la mitad de un entero para superar la singularidad. Para el mallado de la variable polar, también se puede proponer los puntos ubicados en la mitad de un número entero. Es decir,

$$r_i = \left(i - \frac{1}{2}\right) \Delta r; \quad i = 1, 2, 3, \dots, N + 1. \quad (9.123)$$

$$\theta_j = \left(j - \frac{1}{2}\right) \Delta \theta; \quad j = 1, 2, 3, \dots, M + 1. \quad (9.124)$$

Usando el método de diferencias finitas,

$$3 \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta r^2} + \frac{2}{r_i^2} \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\Delta \phi^2} = 0 \quad (9.125)$$

$$-\frac{6}{\Delta r^2} u_{i,j} + 3 \frac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j}}{\Delta r^2} - \frac{4u_{i,j}}{r_i^2 \Delta \phi^2} + \frac{2}{r_i^2} \frac{u_{i,j+1} + u_{i,j-1}}{\Delta \phi^2} = 0 \quad (9.126)$$

$$-2 \left(\frac{3}{\Delta r^2} + \frac{2}{r_i^2 \Delta \phi^2} \right) u_{i,j} + 3 \frac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j}}{\Delta r^2} + \frac{2}{r_i^2} \frac{u_{i,j+1} + u_{i,j-1}}{\Delta \phi^2} = 0 \quad (9.127)$$

reemplazando r_i , según la ecuación (9.123),

$$-2 \left(\frac{3}{\Delta r^2} + \frac{2}{\left(i - \frac{1}{2}\right)^2 \Delta r^2 \Delta \phi^2} \right) u_{i,j} + 3 \frac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j}}{\Delta r^2} + \frac{2}{\left(i - \frac{1}{2}\right)^2 \Delta r^2} \frac{u_{i,j+1} + u_{i,j-1}}{\Delta \phi^2} = 0 \quad (9.128)$$

cancelando Δr^2 ,

$$-2 \left(3 + \frac{2}{\left(i - \frac{1}{2}\right)^2 \Delta \phi^2} \right) u_{i,j} + 3(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) + \frac{2}{\left(i - \frac{1}{2}\right)^2} \frac{u_{i,j+1} + u_{i,j-1}}{\Delta \phi^2} = 0 \quad (9.129)$$

dando el valor a $i = 1$, se obtiene:

$$-2 \left(3 + \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 \Delta \phi^2} \right) u_{1,j} + 3(u_{2,j} + u_{0,j}) + \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} \frac{u_{1,j+1} + u_{1,j-1}}{\Delta \phi^2} = 0 \quad (9.130)$$

$$-2\left(3 + \frac{8}{\Delta\phi^2}\right)u_{1,j} + 3(u_{2,j} + u_{0,j}) + \frac{8}{\Delta\phi^2}(u_{1,j+1} + u_{1,j-1}) = 0 \quad (9.131)$$

En esta ecuación se debe dar información del valor de la condición de frontera $u_{0,j}$. Estos valores de condición de frontera internos, pueden encontrarse usando condiciones de simetría (ver Journal of Numerical Methods for Partial Differential Equations, vol:18, No.1, 2002, pp:56-58) $u_{0,j} = (-1)^n u_n(\Delta r/2, j) \approx (-1)^n u_{1,j}$. Por lo tanto,

$$u_{0,j} \approx -u_{1,j} \quad (9.132)$$

reemplazando, se obtiene la ecuación en diferencias finitas cuando $r \rightarrow 0$ y para $i = 1$:

$$-2\left(3 + \frac{8}{\Delta\phi^2}\right)u_{1,j} + 3(u_{2,j} - u_{1,j}) + \frac{8}{\Delta\phi^2}(u_{1,j+1} + u_{1,j-1}) = 0, \quad \text{para } r = 0 \quad (9.133)$$

Ahora, para $r \neq 0$, es decir con $i = 2, 3, 4, \dots$, se retoma la ecuación (9.115),

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (9.134)$$

realizando las derivadas,

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0 \quad (9.135)$$

usando la aproximación de diferencias finitas,

FALTA TERMINAR

Problema 9.9 Determine la distribución de temperatura en estado estacionario de un sólido esférico homogéneo de radio a , sabiendo que su superficie se mantiene a una temperatura de $T_0 \cos^2 \theta$.

Solución

Para una esfera de radio a , la ecuación de Laplace es

$$\nabla^2 T(r, \theta, \phi) = 0 \quad (9.136)$$

y su solución general es de la forma:

$$T(r, \theta, \phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(A_{\ell} r^{\ell} + \frac{B_{\ell}}{r^{\ell+1}} \right) P_{\ell}^m(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (9.137)$$

Podemos considerar simetría azimutal ya que la condición de frontera solo depende de θ , haciendo que no hayan cambios en ϕ ($m = 0$). Cuando $m = 0$ el polinomio asociado de Legendre $P_\ell^m(\cos\theta)$ se convierte en el polinomio de Legendre $P_\ell(\cos\theta)$

$$T(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos\theta) \quad (9.138)$$

Podemos hacer B sabiendo que se necesita una solución finita en $r = 0$ y

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^{l+1}} = \infty \quad (9.139)$$

$$T(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos\theta) \quad (9.140)$$

Aplicamos la condición de frontera

$$T(a, \theta) = T_0 \cos^2 \theta \quad (9.141)$$

$$T_0 \cos^2 \theta = \sum_{l=0}^{\infty} A_l a^l P_l(\cos\theta) \quad (9.142)$$

Utilizamos la siguiente relación de los polinomios de Legendre para obtener los coeficientes A_l

$$P_2(\cos\theta) = \frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \quad (9.143)$$

$$\cos^2 \theta = \frac{2}{3} P_2(\cos\theta) + \frac{1}{3} \quad (9.144)$$

$$T_0 \left(\frac{2}{3} P_2(\cos\theta) + \frac{1}{3} \right) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l a^l P_l(\cos\theta) \quad (9.145)$$

Multiplicamos en ambos lados por $P_2(\cos\theta)$ e integramos entre $(-1, 1)$.

$$\int_{-1}^1 T_0 \left(\frac{2}{3} P_2(x) P_2(x) + \frac{T_0}{3} P_2(x) \right) dx = \sum_{l=0}^{\infty} A_l a^l \int_{-1}^1 P_l(x) P_2(x) dx \quad (9.146)$$

$$T_0 \frac{2}{3} \int_{-1}^1 P_2(x) P_2(x) dx + \frac{1}{3} \int_{-1}^1 P_2(x) dx = \sum_{l=0}^{\infty} A_l a^l \int_{-1}^1 P_l(x) P_2(x) dx \quad (9.147)$$

Aplicamos la ortogonalidad de los polinomios de Legendre, y la propiedad de integración,

$$\int_{-1}^1 P_l(x) P_m(x) dx = \frac{2}{2l+1} \delta_{l,m} \quad (9.148)$$

$$\int_a^1 P_l(x) dx = \frac{1-a^2}{l(l+1)} \frac{dP_l(x)}{dx} \quad (9.149)$$

$$T_0 \frac{2}{3} \left(\frac{2}{2(2)+1} \right) + \frac{T_0}{3} \left(\frac{1-(-1)^2}{2(2+1)} \frac{dP_2(x)}{dx} \right) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l a^l \frac{2}{2l+1} \delta_{l,m} \quad (9.150)$$

$$\frac{4}{15} T_0 = A_l a^l \frac{2}{2l+1} \quad (9.151)$$

$$A_\ell = \frac{2(2\ell+1)}{15a^\ell} T_0 \quad (9.152)$$

La solución general de la distribución de temperaturas de la esfera es

$$T(r, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{2(2\ell+1)}{15a^\ell} T_0 r^\ell P_\ell(\cos \theta) \quad (9.153)$$

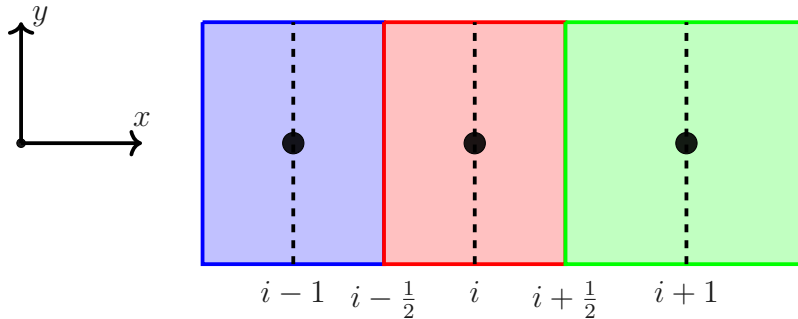
Problema 9.10 Obtenga la distribución de temperatura en el interior de un hemisferio de radio R , si su base está a temperatura cero y su superficie esférica se encuentra a una temperatura $T(\theta) = T_0 \cos \theta$.

Problema 9.11 La base a tierra de una bobeda de radio b puesta a una temperatura $T_0 \cos^3 \theta$ tiene una protuberancia hemisférica de radio a puesta a una temperatura cero. Muestre que la distribución de la temperatura dentro de la bobeda es:

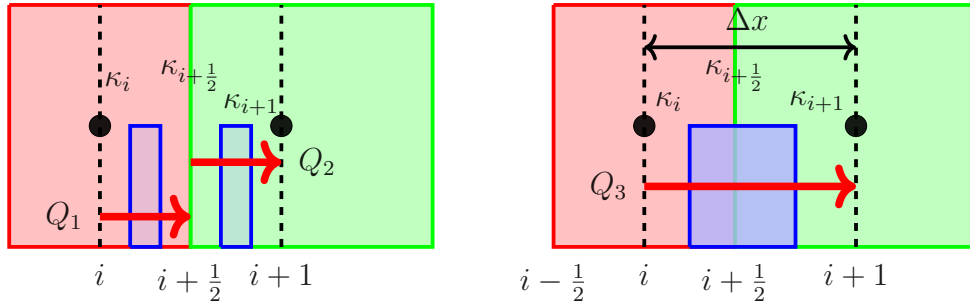
$$T(r, \theta) = \frac{3T_0 b^2}{5(b^3 - a^3)} \left(r - \frac{a^3}{r^2} \right) \cos \theta + \frac{2T_0 b^4}{5(b^7 - a^7)} \left(r^3 - \frac{a^7}{r^4} \right) P_3(\cos \theta)$$

9.3 Distribución de Temperatura en sistemas no uniformes

En materiales compuestos se presentan variaciones en la conductividad térmica y por lo tanto ésta propiedad varía en las interfases del material. Lo primero que se debe de hacer en éstos sistemas, es estimar el valor de la constante dieléctrica en las interfases del material. La siguiente Figura bosqueja un material compuesto con sus nodos e interfases:



Para estimar el valor de la propiedad en el interfase, en este caso la conductividad térmica $\kappa_{\frac{1}{2}}$,



Una forma de calcular $\kappa_{\frac{1}{2}}$ se basa en la evaluación del flujo através de las superficies. En la Figura se muestran los flujos Q_1 y Q_2 , los cuales son representados por las siguientes ecuaciones:

$$Q_1 = \kappa_i \frac{T_i - T_{i+\frac{1}{2}}}{\frac{\Delta x}{2}} \quad (9.154)$$

$$Q_2 = \kappa_{i+1} \frac{T_{i+\frac{1}{2}} - T_{i+1}}{\frac{\Delta x}{2}} \quad (9.155)$$

y el valor del flujo que toma la interfase,

$$Q_3 = \kappa_{i+\frac{1}{2}} \frac{T_i - T_{i+1}}{\Delta x} \quad (9.156)$$

resolviendo (9.154),

$$Q_1 = \frac{2\kappa_i}{\Delta x} T_i - \frac{2\kappa_i}{\Delta x} T_{i+\frac{1}{2}} \quad (9.157)$$

resolviendo (9.155),

$$Q_2 = \frac{2\kappa_{i+1}}{\Delta x} T_{i+\frac{1}{2}} - \frac{2\kappa_{i+1}}{\Delta x} T_{i+1} \quad (9.158)$$

se desea eliminar a $T_{i+\frac{1}{2}}$,

$$\kappa_{i+1} Q_1 = \frac{2\kappa_{i+1}\kappa_i}{\Delta x} T_i - \frac{2\kappa_{i+1}\kappa_i}{\Delta x} T_{i+\frac{1}{2}} \quad (9.159)$$

$$\kappa_i Q_2 = \frac{2\kappa_i\kappa_{i+1}}{\Delta x} T_{i+\frac{1}{2}} - \frac{2\kappa_i\kappa_{i+1}}{\Delta x} T_{i+1} \quad (9.160)$$

sumando las ecuaciones,

$$\kappa_{i+1} Q_1 + \kappa_i Q_2 = \frac{2\kappa_{i+1}\kappa_i}{\Delta x} T_i - \frac{2\kappa_i\kappa_{i+1}}{\Delta x} T_{i+1} \quad (9.161)$$

$$\kappa_{i+1}Q_1 + \kappa_i Q_2 = \frac{2\kappa_{i+1}\kappa_i}{\Delta x} (T_i - T_{i+1}) \quad (9.162)$$

asumiendo flujos térmicos iguales, $Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q$

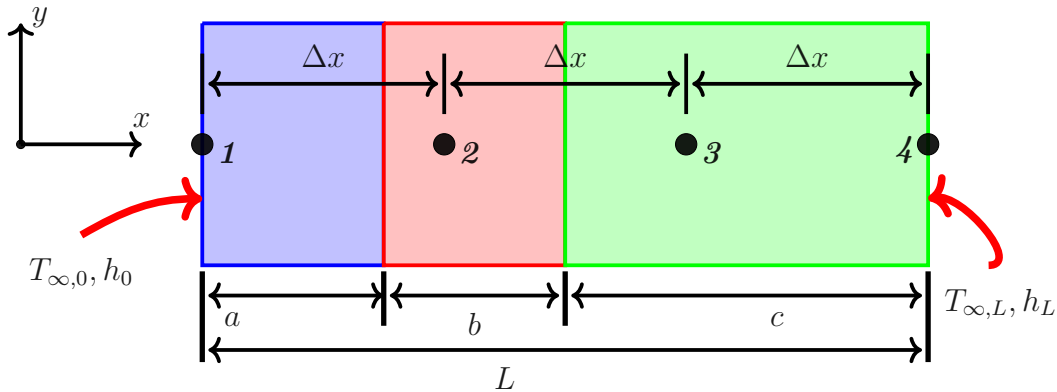
$$Q = \frac{2\kappa_{i+1}\kappa_i}{\kappa_{i+1} + \kappa_i} \frac{T_i - T_{i+1}}{\Delta x} \quad (9.163)$$

comparando esta ecuación con la ecuación (9.156), se obtiene:

$$\kappa_{i+\frac{1}{2}} = \frac{2\kappa_{i+1}\kappa_i}{\kappa_{i+1} + \kappa_i} \quad (9.164)$$

y a esta propiedad, la cual estima la propiedad de transporte en la interfase se le llama: la media armónica

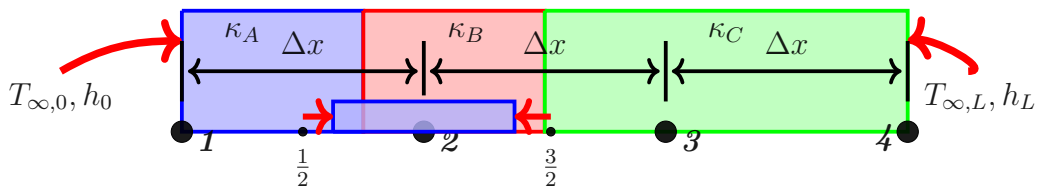
Problema 9.12 Considere la conducción térmica en estado estacionario através de una pared como lo muestra la Figura:



Estime los valores de las temperaturas en cada nodo de esta pared compuesta.

Solución

- *Nodo 2.* El nodo 2 es un nodo interno y se muestra en la siguiente Figura:



La Figura muestra el siguiente balance térmico:

$$\kappa_{1/2} \frac{T_1 - T_2}{\Delta x} + \kappa_{3/2} \frac{T_3 - T_2}{\Delta x} = 0 \quad (9.165)$$

$$\frac{\kappa_{1/2}}{\Delta x} T_1 - \frac{\kappa_{1/2}}{\Delta x} T_2 + \frac{\kappa_{3/2}}{\Delta x} T_3 - \frac{\kappa_{3/2}}{\Delta x} T_2 = 0 \quad (9.166)$$

$$\left(\frac{\kappa_{1/2}}{\Delta x} + \frac{\kappa_{3/2}}{\Delta x} \right) T_2 = \frac{\kappa_{1/2}}{\Delta x} T_1 + \frac{\kappa_{3/2}}{\Delta x} T_3 \quad (9.167)$$

Usando la ecuación de la media armónica, ecuación (9.164) para calcular las constantes $\kappa_{1/2}$ y $\kappa_{3/2}$, se tiene:

$$\kappa_{1/2} = \frac{2\kappa_A \kappa_B}{\kappa_A + \kappa_B} = \frac{2\kappa_1 \kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2} = \frac{2(2)(30)}{2 + 30} \approx 3.75 \quad (9.168)$$

$$\kappa_{3/2} = \frac{2\kappa_B \kappa_C}{\kappa_B + \kappa_C} = \frac{2(30)(0.1)}{30 + 0.1} \approx 0.1993 \quad (9.169)$$

entonces,

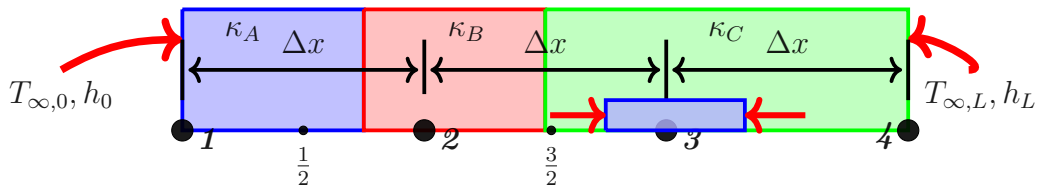
$$\frac{\kappa_{1/2}}{\Delta x} = \frac{3.75}{0.1} \approx 373.5 \quad (9.170)$$

$$\frac{\kappa_{3/2}}{\Delta x} = \frac{0.1993}{0.1} \approx 1.993 \quad (9.171)$$

dando como resultado la ecuación:

$$39.493T_2 = 1.993T_3 + 37.5T_1 \quad (9.172)$$

- Para el nodo 3, se tiene la siguiente Figura:



El balance de flujo térmico es:

$$\kappa_{3/2} \frac{T_2 - T_3}{\Delta x} + \kappa_4 \frac{T_4 - T_3}{\Delta x} = 0 \quad (9.173)$$

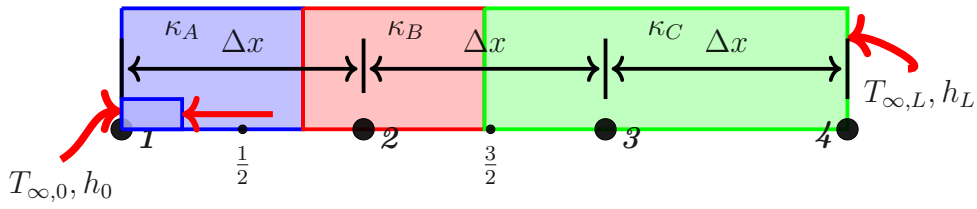
$$\frac{\kappa_{3/2}}{\Delta x}T_2 - \frac{\kappa_{3/2}}{\Delta x}T_3 + \frac{\kappa_4}{\Delta x}T_4 - \frac{\kappa_4}{\Delta x}T_3 = 0 \quad (9.174)$$

usando el resultado de la ecuación (9.171) y como $\kappa_4 = 0.1$ y $\Delta x = 0.1$, reemplazando:

$$1.993T_2 - 1.993T_3 + T_4 - T_3 = 0 \quad (9.175)$$

$$2.993T_3 = 1.993T_2 + T_4 \quad (9.176)$$

- Para el nodo 1.



$$h_0(T_{\infty,0} - T_1) + \kappa_{1/2} \frac{T_2 - T_1}{\Delta x} = 0 \quad (9.177)$$

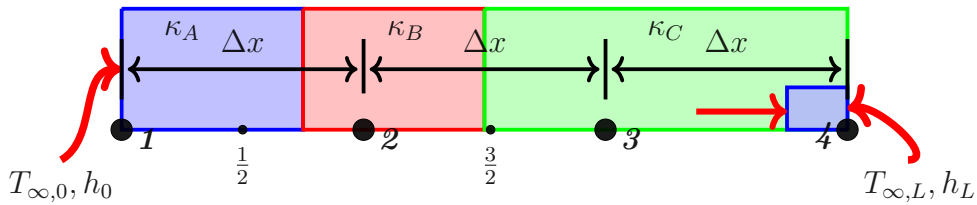
$$h_0T_{\infty,0} - h_0T_1 + \frac{\kappa_{1/2}}{\Delta x}T_2 - \frac{\kappa_{1/2}}{\Delta x}T_1 = 0 \quad (9.178)$$

Usando el valor de la ecuación (9.170), $h_0 = 20$ y $T_{\infty,0} = 100$, se obtiene:

$$2000 - 20T_1 + 37.5T_2 - 37.5T_1 = 0 \quad (9.179)$$

$$57.5T_1 = 37.5T_2 + 2000 \quad (9.180)$$

- Para el nodo 4.



$$\kappa_3 \frac{T_3 - T_4}{\Delta x} + h_L(T_{\infty,L} - T_4) = 0 \quad (9.181)$$

$$\frac{\kappa_3}{\Delta x} T_3 - \frac{\kappa_3}{\Delta x} T_4 + h_L T_{\infty,L} - h_L T_4 = 0 \quad (9.182)$$

como $\frac{\kappa_3}{\Delta x} = 1$, $h_L = 50$ y $T_{\infty,L} = 20$, se obtiene:

$$T_3 - T_4 + 1000 - 50T_4 = 0 \quad (9.183)$$

es decir,

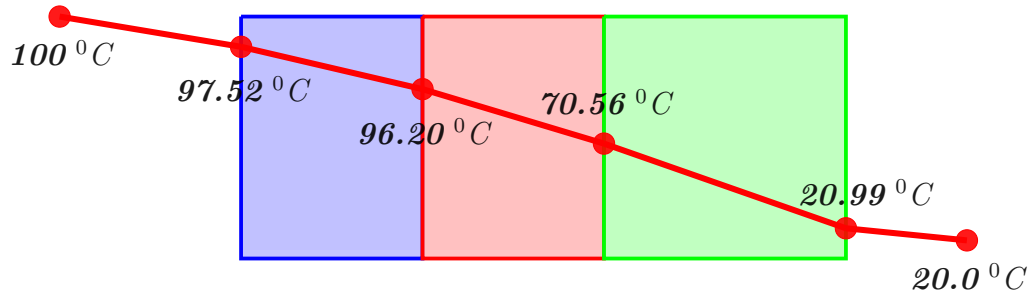
$$51T_4 = T_3 + 1000 \quad (9.184)$$

Reuniendo las ecuaciones resultantes para cada nodo, es decir, las ecuaciones (9.172), (9.176), (9.180) y (9.184) en forma matricial, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} 57.5 & -37.5 & 0 & 0 \\ -37.5 & 39.493 & -1.993 & 0 \\ 0 & -1.993 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 51 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2000 \\ 0 \\ 0 \\ 1000 \end{bmatrix} \quad (9.185)$$

y usando Gauss-Seidel para solucionar el sistema de ecuaciones, se obtiene las siguientes Temperaturas: $T_1 = 97.52$, $T_2 = 96.20$, $T_3 = 70.56$ y $T_4 = 20.99$

y la Figura de la transferencia de la Temperatura es:



Los resultados indican que:

- La velocidad de transferencia de calor desde la superficie izquierda es estimada como:

$$q_L = h_0(T_{\infty,0} - T_1) \approx 20(100 - 97.52) = 49.6 \text{ W/m}^2 \quad (9.186)$$

- La velocidad de transferencia de calor desde la superficie derecha es estimada como:

$$q'' = h_L(-T_4 - T_{\infty,L}) \approx 50(20.99 - 20.0) = 49.5 \text{ W/m}^2 \quad (9.187)$$

resultados que concuerdan con los valores esperados, puesto que se trata de un balance energético cuando el sistema alcance el estado estacionario, aunque el mallado o número de nodos no es lo suficientemente grande.

Problema 9.13 Considere una lámina cuadrada de 1.5 m por 1.5 m sabiendo que la superficie superior es mantenida a una temperatura de $T_{sup} = 600^{\circ}C$ y la superficie del lado izquierdo es mantenida a $T_{izq} = 20^{\circ}C$. La superficie del lado derecho y la inferior se encuentran a condiciones de convección con $h_{conv} = 30 W/m^2 C$ y $T_{\infty} = 25^{\circ}C$. La conductividad del material es $\kappa = 30 W/m^{\circ}C$.

- Aplique el método de diferencias finitas para demostrar que las distribuciones de temperatura en la lámina son: 276.1977, 340.1860, 293.1860, 144.6047, 191.3605, 160.5581, 90.8605, 120.0930 y $101.8837^{\circ}C$ para una malla con 3 divisiones en cada lado.
- Use la ley de Fourier para demostrar que la transferencia de calor desde la parte superior es igual a $q_{sup} = 22110.699 W$.
- Use la ley de Fourier para demostrar que la transferencia de calor desde la parte izquierda es igual a $q_{izq} = 12486.9795 W$.
- Use la ley de Newton para demostrar que la transferencia de calor desde superficie derecha es igual a $q_{der} = 6632.78925 W$.
- Use la ley de Newton para demostrar que la transferencia de calor desde superficie inferior es igual a $q_{inf} = 2990.93025 W$.

Tema No. 10

Temperatura en estado estacionario con fuente

La ecuación (9.1) para un sistema en estado estacionario y con generación de energía, toma la forma:

$$\nabla^2 T = -\frac{q_0}{\kappa} \quad \rightarrow \quad \text{ecuación de Poisson} \quad (10.1)$$

ecuación conocida como la ecuación de Poisson.

10.1 Conducción del calor unidimensional

En la transferencia de calor unidimensional se tienen diferentes sistemas en los que se encuentran, los filamentos que poseen una distribución de temperatura longitudinal; las placas cilíndricas, los cilindros y las esferas, los cuales presentan una distribución radial con simetría azimutal y angular.

10.1.1 Filamentos

Para filamentos o alambres, la ecuación (10.1), puede escribirse como:

$$\frac{d}{dx} \left(\kappa \frac{dT}{dx} \right) + f(x) = 0 \quad (10.2)$$

deonde κ es la conductividad térmica y $f(x)$ es una función que representa una fuente o sumidero de temperatura. En diferencias finitas con conductividad térmica constante,

$$\frac{T(i+1) - 2T(i) + T(i-1))}{(\Delta x)^2} + \frac{f(x)}{\kappa} = 0 \quad (10.3)$$

obteniéndose la ecuación:

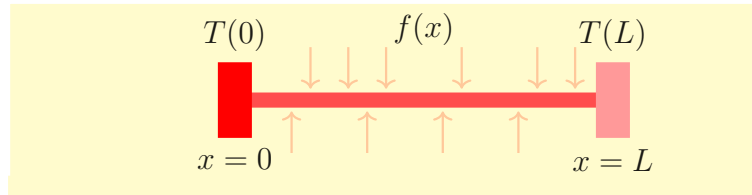
$$T(i) = \frac{T(i+1) + T(i-1)}{2} + \frac{f(x)}{2\kappa}(\Delta x)^2 \quad (10.4)$$

con Δx como la distancia entre los nodos.

Problema 10.1 La siguiente Figura muestra un alambre unidimensional de longitud L dentro de un fluido considerado como una fuente de calor externa dada por la función $f(x)$ y conductividad térmica 1. La distribución de temperatura en el alambre puede modelarse mediante la ecuación de Poisson

$$\frac{\partial^2 T(x)}{\partial x^2} = -f(x) \quad (10.5)$$

donde $f(x)$ es una función que define una fuente de calor a lo largo del alambre.



Los extremos de la barra se encuentran a temperatura fijas $T(0) = T_1$ y $T(L) = T_2$. Resuelva la ecuación (10.4) para un alambre de longitud 10, sabiendo que sus extremos se encuentran a $T(0) = 40$ y $T(L) = 200$ con una fuente de calor de 10. Use solución analítica y numérica con diferencias finitas.

Solución

Para $f(x) = 10$, la ecuación a solucionar es:

$$\frac{\partial^2 T(x)}{\partial x^2} = -10 \quad (10.6)$$

es decir,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) = -10 \rightarrow \frac{\partial T}{\partial x} = -10x + c_1 \quad (10.7)$$

separando variables e integrando, se obtiene:

$$T(x) = -5x^2 + c_1x + c_2 \quad (10.8)$$

usando las condiciones de frontera para encontrar las constantes c_1 y c_2 , se obtiene la siguiente solución analítica:

$$\text{en } x = 0, \quad T(0) = 40 \rightarrow c_2 = 40, \quad (10.9)$$

$$\text{en } x = 10, \quad T(10) = 200 \rightarrow c_1 = 66. \quad (10.10)$$

Reemplazando los valores de c_1 y c_2 ,

$$T(x) = -5x^2 + 66x + 40 \quad (10.11)$$

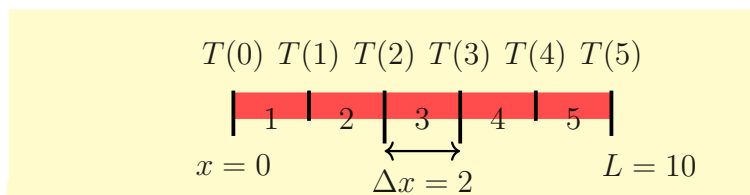
Para la solución numérica, se realiza la discretización de la ecuación diferencial,

$$\frac{\partial^2 T(x)}{\partial x^2} = \frac{T(i-1) - 2T(i) + T(i+1)}{\Delta x^2} = -f(i) \quad (10.12)$$

Por lo tanto, la ecuación a solucionar es:

$$T(i-1) - 2T(i) + T(i+1) = -\Delta x^2 f(i) \quad (10.13)$$

con $i = 1, 2, 3, \dots$. Si el alambre se divide en 5 segmentos ($\Delta x = 2$), se obtiene la siguiente Figura:



En la Figura, se observa que la variable i toma los valores de $1 \rightarrow 4$, entonces, las ecuaciones resultantes para los diferentes i son:

$$i = 1 \rightarrow T(0) - 2T(1) + T(2) = -\Delta x^2 f(1) \quad (10.14)$$

$$i = 2 \rightarrow T(1) - 2T(2) + T(3) = -\Delta x^2 f(2) \quad (10.15)$$

$$i = 3 \rightarrow T(2) - 2T(3) + T(4) = -\Delta x^2 f(3) \quad (10.16)$$

$$i = 4 \rightarrow T(3) - 2T(4) + T(5) = -\Delta x^2 f(4) \quad (10.17)$$

$$(10.18)$$

como $T(0) = 40$, $T(5) = 200$, $\Delta x = 2$ y $f(1) = f(2) = f(3) = f(4) = 10$, reemplazando éstos valores,

$$40 - 2T(1) + T(2) = -40 \quad (10.19)$$

$$T(1) - 2T(2) + T(3) = -40 \quad (10.20)$$

$$T(2) - 2T(3) + T(4) = -40 \quad (10.21)$$

$$T(3) - 2T(4) + 200 = -40 \quad (10.22)$$

$$(10.23)$$

se observa que se tienen 4 incógnitas y 4 ecuaciones:

$$-2T(1) + T(2) = -80 \quad (10.24)$$

$$T(1) - 2T(2) + T(3) = -40 \quad (10.25)$$

$$T(2) - 2T(3) + T(4) = -40 \quad (10.26)$$

$$T(3) - 2T(4) = -240 \quad (10.27)$$

$$(10.28)$$

y en forma matricial,

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(1) \\ T(2) \\ T(3) \\ T(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -80 \\ -40 \\ -40 \\ -240 \end{bmatrix} \quad (10.29)$$

Usando el método interactivo de Gauss-Seidel con una aproximación de 10^{-6} , se gasta 33 ciclos iterativos con los siguientes resultados:

$$T(0) = 40, \quad T(1) = 152, \quad T(2) = 224, \quad T(3) = 256, \quad T(4) = 248, \quad T(5) = 200$$

Estos resultados deben de ser consistentes con los resultados analíticos. El programa en Fortran que se usó para obtener los datos de entrada, datos de la ecuación (10.29), para luego usar el método de Gauss-Seidel es:

```

1  program efid2
2      integer :: i,j
3      integer, parameter :: n=4
4      real, dimension (0:n,0:n) :: m
5      real, dimension (0:n) :: b,p,q,f,y
6      real :: h,L
7      do i=0,n
8          do j=0,n
9              m(i,j)=0.0
10         end do
11     end do
12     L = 10.0      ! longitud de la barilla
13     p = 0.        ! valor del coeficiente p(x)
14     q = 0.        ! valor del coeficiente q(x)
15     y(0) = 40.0   ! condicon inicial en x=0
16     y(n) = 200.0  ! condicion inicial en x=L
17     h = L/(n+1)   ! tama\~no del paso.
18     f = -10.0     ! valor de la funcion f(x).
19     m(1,1) = ( -2.0 + (h**2)*q(1) )
20     m(1,2) = ( 1.0 + h*p(1)/2.0 )
21     b(1) = (h**2)*f(1) - ( 1.0 - h*p(1)/2.0 )*y(0)
22     write(*,*)(m(1,j),j=1,n ), b(1)
23     do i=2,n-1
24         j=i
25         m(i,j-1) = ( 1.0 - h*p(i)/2.0 )
26         m(i,j) = ( -2.0 + (h**2)*q(i) )
27         m(i,j+1) = ( 1.0 + h*p(i)/2.0 )
28         b(i) = (h**2)*f(i)
29         write(*,*)(m(i,k),k=1,n), b(i)
30     end do

```

```

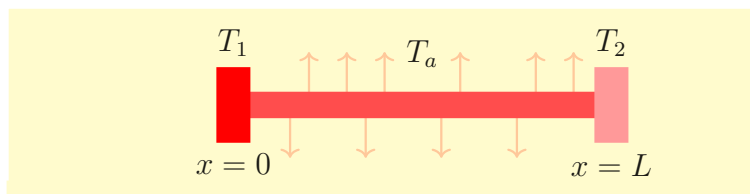
31     m(n,n-1) = ( 1.0 - h*p(n)/2.0 )
32     m(n,n) = ( -2.0 + (h**2)*q(n) )
33     b(n) = (h**2)*f(n) - (1.0 + h*p(n)/2.0)*y(n)
34     write(*,*)(m(n,j),j=1,n),b(n)
35 end program efid2

```

Los resultados anlíticos y numéricos son mostrados en la siguiente Tabla

Solución numérica		Solución analítica	
i	$T(i)$	x	$T(x)$
0	40	0	40
1	152	2	152
2	224	4	225
3	256	6	256
4	248	8	248
5	200	10	200

Problema 10.2 Un alambre uniforme de longitud L colocado entre dos cuerpos de temperatura constantes T_1 y T_2 ($T_1 > T_2$) se encuentra en un medio gaseoso a una temperatura T_a .



Use diferencias finitas para encontrar la forma del perfil de distribución de temperatura en el alambre.

Solución.

Como existe un intercambio de energía térmica entre alambre y el medio (un fluido gaseoso), esta transferencia de calor puede considerarse como un sumidero de energía, por lo tanto, la ecuación a solucionar es la de Poisson unidimensional, ecuación (9.7):

$$\frac{d^2T}{dx^2} = Q \quad (10.30)$$

Esta ecuación, (10.30) resulta de un balance de energía entre el alambre y el medio gaseoso. Q está dada por la ley de enfriamiento de Newton dada por la siguiente ecuación:

$$Q = hA(T_s - T_f) \quad (10.31)$$

con T_s temperatura del sólido, T_f la temperatura del fluido y h es una constante que depende del medio en donde se encuentra el alambre (coeficiente de transferencia de calor). Reemplazando, se obtiene la ecuación diferencial a solucionar:

$$\frac{d^2T}{dx^2} + hA(T_f - T) = 0 \quad (10.32)$$

con condiciones de frontera fijas o de Dirichlet:

$$T(0) = T_1 \quad (10.33)$$

$$T(L) = T_2 \quad (10.34)$$

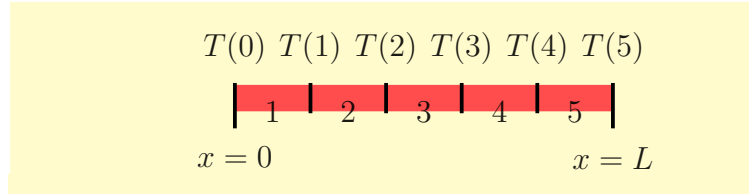
Obsérvese que la ecuación (10.32) puede reescribirse como:

$$\frac{d^2T}{dx^2} - hAT = -hAT_f \quad (10.35)$$

que en forma general es una ecuación diferencial ordinaria de orden dos de la siguiente forma:

$$\frac{d^2T(x)}{dx^2} - qT(x) = f(x) \quad (10.36)$$

Para solucionar este problema, hay que dividir el alambre en un número determinado de segmentos, por ejemplo 5 segmentos ($\Delta x = 2$).



Usando el método de diferencias finitas, la ecuación (10.32) se reescribe como:

$$\frac{T(i+1) - 2T(i) + T(i-1))}{(\Delta x)^2} - h(T(i) - T_f) = 0 \quad (10.37)$$

agrupando términos, se obtiene

$$-T(i-1) + (2 + h(\Delta x)^2)T(i) - T(i+1) = h(\Delta x)^2 T_f \quad (10.38)$$

y para diferentes valores de i , se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} i = 1 &\rightarrow -T(0) + (2 + h(\Delta x)^2)T(1) - T(2) = h(\Delta x)^2 T_f \\ i = 2 &\rightarrow -T(1) + (2 + h(\Delta x)^2)T(2) - T(3) = h(\Delta x)^2 T_f \\ i = 3 &\rightarrow -T(2) + (2 + h(\Delta x)^2)T(3) - T(4) = h(\Delta x)^2 T_f \\ i = 4 &\rightarrow -T(3) + (2 + h(\Delta x)^2)T(4) - T(5) = h(\Delta x)^2 T_f \end{aligned} \quad (10.39)$$

Obsérvese que $T(0) = T_1$ y $T(5) = T_2$ son condiciones de frontera, $\Delta x = \frac{L}{5}$, h y T_f es la constante y la temperatura del medio (por ejemplo del fluido) en que se encuentra el alambre.

Problema 10.3 En el ejercicio anterior, suponga que los extremos de un alambre de longitud 10 se encuentran a las temperaturas de $T(0) = 40$ y $T(5) = 200$ y dentro de un fluido con temperatura de 20 grados y de coeficiente de transferencia de calor por unidad de longitud de 0.01. Obtenga valores de temperatura a través de la alambre.

Solución.

Se tienen los siguientes datos,

$$\begin{aligned} \Delta x &= \frac{L}{5} = \frac{10}{5} = 2, \\ T(0) &= 40, \quad T(5) = 200, \quad T_f = 20 \quad \text{y} \quad h = 0.01. \end{aligned}$$

se calculan las siguientes constantes:

$$\begin{aligned} h(\Delta x)^2 T_f &= 0.01 \times 2^2 \times 20 = 0.80 \\ 2 + h(\Delta x)^2 &= 2 + 0.01 \times 2^2 = 2.04 \end{aligned}$$

Reemplazando éstos valores en las ecuaciones (10.39), las ecuaciones para los diferentes valores de i toman la forma:

$$\begin{aligned} -40 + 2.04T(1) - T(2) &= 0.8 \\ -T(1) + 2.04T(2) - T(3) &= 0.8 \\ -T(2) + 2.04T(3) - T(4) &= 0.8 \\ -T(3) + 2.04T(4) - 200 &= 0.8 \end{aligned} \quad (10.40)$$

se observa que se obtuvieron 4 ecuaciones con 4 incógnitas: $T(1)$, $T(2)$, $T(3)$ y $T(4)$. Organizándolo el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2.04T(1) - T(2) + 0 + 0 &= 40.8 \\ -T(1) + 2.04T(2) - T(3) + 0 &= 0.8 \\ 0 - T(2) + 2.04T(3) - T(4) &= 0.8 \\ 0 + 0 - T(3) + 2.04T(4) &= 200.8 \end{aligned} \quad (10.41)$$

y en forma matricial es:

$$\begin{bmatrix} 2.04 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2.04 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2.04 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2.04 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(1) \\ T(2) \\ T(3) \\ T(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40.8 \\ 0.8 \\ 0.8 \\ 200.8 \end{bmatrix} \quad (10.42)$$

Los valores de la matriz (10.42) se solucionaron usando el método interactivo de Gauss-Seidel. Como la ecuación a solucionar es de la forma de la ecuación (10.36) entonces, en este caso también se puede usar la solución de una ecuación diferencial ordinaria de orden dos para obtener los elementos matriciales y luego usar Gauss-Seidel. El siguiente programa en Fortran presenta esa solución.

```

1  program efid2
2  integer :: i,j
3  integer, parameter :: n=4
4  real, dimension (0:n,0:n) :: m
5  real, dimension (0:n) :: b,p,q,f,y
6  real :: h,L,Ta
7  do i=0,n
8      do j=0,n
9          m(i,j)=0.0
10     end do
11 end do
12 Ta = 20.0
13 L = 10.0 ! longitud de la barilla
14 p = 0. ! valor del coeficiente p(x)
15 q = -0.01 ! valor del coeficiente q(x)
16 y(0) = 40.0 ! condicion inicial en x=0
17 y(n) = 200.0 ! condicion inicial en x=L
18 h = L/(n+1) ! tamaño del paso.
19 do i=1,n
20     f(i) = -0.01*20.0 ! valor de la funcion f(x).
21 end do
22 m(1,1) = ( -2.0 + (h**2)*q(1) )
23 m(1,2) = ( 1.0 + h*p(1)/2.0 )
24 b(1) = (h**2)*f(1) - ( 1.0 - h*p(1)/2.0 ) * y(0)
25 write(*,*)(m(1,j),j=1,n),b(1)
26 do i=2,n-1
27     j=i
28     m(i,j-1) = ( 1.0 - h*p(i)/2.0 )
29     m(i,j) = ( -2.0 + (h**2)*q(i) )
30     m(i,j+1) = ( 1.0 + h*p(i)/2.0 )
31     b(i) = (h**2)*f(i)
32     write(*,*)(m(i,k),k=1,n),b(i)
33 end do
34 m(n,n-1) = ( 1.0 - h*p(n)/2.0 )
35 m(n,n) = ( -2.0 + (h**2)*q(n) )
36 b(n) = (h**2)*f(n) - ( 1.0 + h*p(n)/2.0 ) * y(n)
37 write(*,*)(m(n,j),j=1,n),b(n)
38 end program efid2

```

Luego de aplicar el método de Gauss-Seidel, con 31 ciclos se obtuvieron las siguientes temperaturas de los 4 puntos del alambre:

$$T(1) = 65.9697, \quad T(2) = 93.7783, \quad T(3) = 124.5381, \quad T(4) = 159.4795$$

10.1.2 Láminas, cilindros y esferas

Las láminas, cilindros y esferas que se tratan en esta sección, se asumirán que todas las variables presentan simetría, excepto la radial. Considere un sistema de difusión en estado estacionario en un slab, cilindro y/o esfera. La ecuación de energía que gobierna estos sistemas es:

$$\frac{1}{r^p} \frac{d}{dr} \left(r^p \frac{dT}{dr} \right) + \frac{1}{\kappa} f(r) = 0, \quad \text{con } r \neq 0 \quad (10.43)$$

o

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{p}{r} \frac{dT}{dr} + \frac{1}{\kappa} f(r) = 0, \quad \text{con } r \neq 0 \quad (10.44)$$

donde

$$p = \begin{cases} 0 & \text{Láminas} \\ 1 & \text{Cilindro} \\ 2 & \text{Esfera} \end{cases} \quad (10.45)$$

En el caso de la conducción de calor, el término $f(r)$ representa la velocidad de generación de energía volumétrica (por ejemplo en W/m^3). En el caso de una difusión másica, κ es reemplazado por el coeficiente de difusión $D(\text{cm}^2/\text{s})$ y $f(r)$ representa la velocidad de generación de masa (por ejemplo en $\text{g/cm}^3 \cdot \text{s}$), y T representa la concentración másica volumétrica (por ejemplo en g/cm^3).

Láminas

La ecuación (10.44) se reduce a:

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{\kappa} f(r) = 0, \quad \text{con } r \neq 0 \quad (10.46)$$

Cilindros

En la ecuación (10.44) se puede observar que la ecuación para el cilindro y la esfera presentan una singularidad en el origen (en $r = 0$). Sin embargo, analizando el segundo término de la ecuación cuando $r \rightarrow 0$, la derivada se hace cero, $\frac{dT}{dr} \rightarrow 0$, dando origen a una indeterminación $\frac{0}{0}$. Esta indeterminación se resuelve aplicando la regla de L'Hopital dando como resultado:

$$\left. \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} \right|_{r \rightarrow 0} = \frac{\left. \frac{dT}{dr} \right|_{r \rightarrow 0}}{\left. \frac{dr}{dr} \right|_{r \rightarrow 0}} = \frac{d^2 T}{dr^2} \quad (10.47)$$

por lo tanto, la ecuación (10.44), se reescribe como:

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + p \frac{dT}{dr^2} + \frac{1}{\kappa} f(r) = 0 \quad (10.48)$$

$$(1+p)\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{1}{\kappa}f(r) = 0, \quad \text{para } r = 0 \quad (10.49)$$

Para aproximar las ecuaciones a ecuaciones de diferencias finitas, se construye un mallado como lo muestra la Figura 10.1.

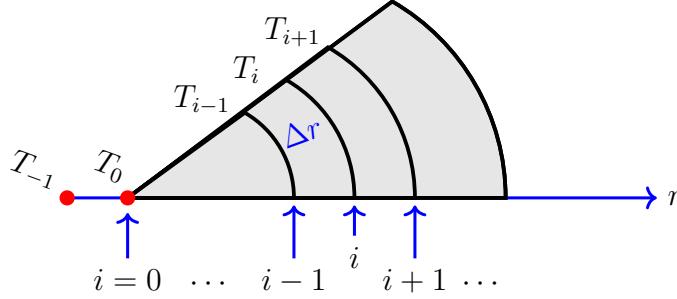


Figura 10.1: Mallado utilizado en la aproximación de diferencias finitas para las simetrías cilíndricas y esféricas.

Usando diferencias finitas para $r \neq 0$, la ecuación (10.44) es escrita como:

$$\frac{T(i-1) - 2T(i) + T(i+1)}{\Delta r^2} + \frac{p}{i\Delta r} \frac{T(i+1) - T(i-1)}{2\Delta r} + \frac{f(i)}{\kappa} = 0, \quad \text{con } i = 1, 2, 3, \dots \quad (10.50)$$

$$T(i-1) - 2T(i) + T(i+1) + \frac{p}{2i} (T(i+1) - T(i-1)) + \frac{\Delta r^2}{\kappa} f(i) = 0 \quad (10.51)$$

$$\left(1 - \frac{p}{2i}\right) T(i-1) - 2T(i) + \left(1 + \frac{p}{2i}\right) T(i+1) + \frac{\Delta r^2}{\kappa} f(i) = 0, \quad \text{con } i = 1, 2, 3, \dots \quad (10.52)$$

Para $r = 0$, la ecuación (10.49) en diferencias finitas es:

$$(1+p)\frac{T(i-1) - 2T(i) + T(i+1)}{\Delta r^2} + \frac{f(i)}{\kappa} = 0, \quad \text{para } R = 0 \quad (10.53)$$

Ahora, en la Figura 10.1 se observa que para $r = 0$, el índice i tiene el valor de cero ($i = 0$), así que la ecuación en diferencias finitas para $R = 0$ es:

$$(1+p)\frac{T(-1) - 2T(0) + T(1)}{\Delta r^2} + \frac{f(0)}{\kappa} = 0 \quad (10.54)$$

En la ecuación (10.54) se observa que existe un punto ficticio ($i = -1$) con su correspondiente temperatura ficticia $T(-1)$. Este punto ficticio se encuentra al lado izquierdo del origen $R = 0$ a una distancia Δr y por lo tanto se usa la condición de simetría para encontrar este punto ficticio, es decir, se debe de cumplir la siguiente condición:

$$\left. \frac{dT}{dR} \right|_{i=0} = \frac{T(i+1) - T(i-1)}{2\Delta r} \Big|_{i=0} = \frac{T(1) - T(-1)}{2\Delta r} = 0 \quad (10.55)$$

dando como resultado,

$$T(-1) = T(1) \quad (10.56)$$

Reemplazando (10.56) en (10.54),

$$(1+p) \frac{T(1) - 2T(0) + T(1)}{\Delta r^2} + \frac{f(0)}{\kappa} = 0 \quad (10.57)$$

$$2(1+p) \frac{T(1) - T(0)}{\Delta r^2} + \frac{f(0)}{\kappa} = 0 \quad (10.58)$$

$$2(1+p) \left(T(1) - T(0) \right) + \frac{\Delta r^2 f(0)}{\kappa} = 0, \quad \text{para } i = 0. \quad (10.59)$$

Así, las ecuaciones de difusión en términos de las ecuaciones de diferencias finitas de la ecuación (10.44) son:

$$2(1+p) \left(T(1) - T(0) \right) + \frac{\Delta r^2 f(0)}{\kappa} = 0, \quad \text{para } i = 0. \quad (10.60)$$

y

$$\left(1 - \frac{p}{2i} \right) T(i-1) - 2T(i) + \left(1 + \frac{p}{2i} \right) T(i+1) + \frac{\Delta r^2}{\kappa} f(i) = 0, \\ \text{para } i = 1, 2, 3, \dots \quad (10.61)$$

donde

$$p = \begin{cases} 1 & \text{para geometrías cilíndricas} \\ 2 & \text{para geometrías esféricas} \end{cases}$$

Problema 10.4 Una barra de acero sólido de 10 cm de diámetro de conductividad térmica $k = 40 \text{ W/m}^\circ\text{C}$ se calienta eléctricamente por el paso de corriente eléctrica, que genera energía dentro de la barra a una velocidad de $f = 4 \times 10^6 \text{ W/m}^3$. El calor es disipado desde la superficie de la barra por convección con un coeficiente de transferencia de calor de $h = 400 \text{ W/m}^2 \text{ }^\circ\text{C}$ en un ambiente a temperatura $T_\infty =$

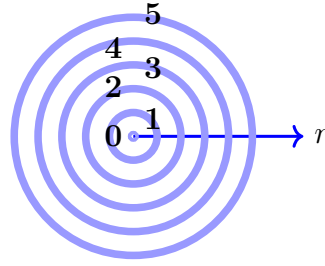


Figura 10.2: Nodos de la barra de acero

$20^0 C$. Dividiendo el radio de la barra en cinco partes iguales, desarrolle las ecuaciones de diferencias finitas para este problema de conducción de calor. Compare la solución de diferencia finita con la solución analítica exacta.

Solución

datos: $b = 0.05m$, $N = 5$, $f = 4 \times 10^6 \text{ W/m}^3$, $h_b = 400 \text{ W/m}^2 \text{ }^0 C$, $\kappa = 40 \text{ W/m}^0 C$ y $T_\infty = 20^0 C$.

El problema involucra seis nodos de temperatura desconocidos: $T_i/i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. en la región $0 \leq r \leq b$, donde b es el radio del cilindro. Como se trata de un cilindro, la ecuación en diferencias finitas, ecuación (10.60), para el nodo ubicado en el centro del círculo, con $p = 1$ es:

$$4\left(T(1) - T(0)\right) + \frac{\Delta r^2 f(0)}{\kappa} = 0, \quad \text{para } i = 0. \quad (10.62)$$

para los otros nodos internos es la ecuación (10.61) con $p = 1$,

$$\left(1 - \frac{1}{2i}\right) T(i-1) - 2T(i) + \left(1 + \frac{1}{2i}\right) T(i+1) + \frac{\Delta r^2}{\kappa} f(i) = 0, \\ \text{para } i = 1, 2, 3, \dots \quad (10.63)$$

Las ecuaciones a resolver son:

$$\begin{aligned}
\text{para } i = 0 & \rightarrow 4T(1) - 4T(0) + \frac{\Delta r^2 f(0)}{\kappa} = 0 \\
\text{para } i = 1 & \rightarrow \left(1 - \frac{1}{2}\right) T(0) - 2T(1) + \left(1 + \frac{1}{2}\right) T(2) + \frac{\Delta r^2}{\kappa} f(1) = 0 \\
\text{para } i = 2 & \rightarrow \left(1 - \frac{1}{4}\right) T(1) - 2T(2) + \left(1 + \frac{1}{4}\right) T(3) + \frac{\Delta r^2}{\kappa} f(2) = 0 \\
\text{para } i = 3 & \rightarrow \left(1 - \frac{1}{6}\right) T(2) - 2T(3) + \left(1 + \frac{1}{6}\right) T(4) + \frac{\Delta r^2}{\kappa} f(3) = 0 \\
\text{para } i = 4 & \rightarrow \left(1 - \frac{1}{8}\right) T(3) - 2T(4) + \left(1 + \frac{1}{8}\right) T(5) + \frac{\Delta r^2}{\kappa} f(4) = 0 \\
\text{para } i = 5 & \rightarrow \left(1 - \frac{1}{10}\right) T(4) - 2T(5) + \left(1 + \frac{1}{10}\right) T(6) + \frac{\Delta r^2}{\kappa} f(5) = 0
\end{aligned}$$

donde $f(0) = f(1) = \dots = f(5)$ y calculando la constante α , usando los valores de $b = 0.05m$, $N = 5$, $f = 4 \times 10^6 \text{ W/m}^3$, $h_b = 400 \text{ W/m}^2 \text{ } ^\circ C$, $\kappa = 40 \text{ W/m}^0 C$ y $T_\infty = 20^\circ C$.

$$\Delta r = \frac{\text{radio}}{\text{divisiones}} = \frac{0.05}{5} = 0.01 \quad (10.64)$$

$$\alpha = \frac{f \Delta r^2}{\kappa} = \frac{(4 \times 10^6)(0.01)^2}{40} = 10 \quad (10.65)$$

$$\begin{aligned}
\text{para } i = 0 & \rightarrow 4T(1) - 4T(0) + 10 = 0 \\
\text{para } i = 1 & \rightarrow \left(1 - \frac{1}{2}\right) T(0) - 2T(1) + \left(1 + \frac{1}{2}\right) T(2) + 10 = 0 \\
\text{para } i = 2 & \rightarrow \left(1 - \frac{1}{4}\right) T(1) - 2T(2) + \left(1 + \frac{1}{4}\right) T(3) + 10 = 0 \\
\text{para } i = 3 & \rightarrow \left(1 - \frac{1}{6}\right) T(2) - 2T(3) + \left(1 + \frac{1}{6}\right) T(4) + 10 = 0 \\
\text{para } i = 4 & \rightarrow \left(1 - \frac{1}{8}\right) T(3) - 2T(4) + \left(1 + \frac{1}{8}\right) T(5) + 10 = 0 \\
\text{para } i = 5 & \rightarrow \left(1 - \frac{1}{10}\right) T(4) - 2T(5) + \left(1 + \frac{1}{10}\right) T(6) + 10 = 0
\end{aligned}$$

resolviendo los paréntesis,

$$4T(1) - 4T(0) + 10 = 0 \rightarrow \frac{1}{2}T(0) = \frac{10}{8} + \frac{1}{2}T(1) \quad (10.66)$$

$$\frac{1}{2}T(0) - 2T(1) + \frac{3}{2}T(2) + 10 = 0 \quad (10.67)$$

$$\frac{3}{4}T(1) - 2T(2) + \frac{5}{4}T(3) + 10 = 0 \quad (10.68)$$

$$\frac{5}{6}T(2) - 2T(3) + \frac{7}{6}T(4) + 10 = 0 \quad (10.69)$$

$$\frac{7}{8}T(3) - 2T(4) + \frac{9}{8}T(5) + 10 = 0 \quad (10.70)$$

$$\frac{9}{10}T(4) - 2T(5) + \frac{11}{10}T(6) + 10 = 0 \quad (10.71)$$

resolviendo las dos primeras ecuaciones,

$$\frac{10}{8} + \frac{1}{2}T(1) - 2T(1) + \frac{3}{2}T(2) + 10 = 0 \quad (10.72)$$

$$-\frac{3}{2}T(1) + \frac{3}{2}T(2) + \frac{90}{8} = 0 \quad (10.73)$$

$$-12T(1) + 12T(2) + 90 = 0 \quad (10.74)$$

$$-2T(1) + 2T(2) + 15 = 0 \quad (10.75)$$

$$(10.76)$$

es decir,

$$-2T(1) + 2T(2) + 15 = 0 \quad (10.77)$$

$$\frac{3}{4}T(1) - 2T(2) + \frac{5}{4}T(3) + 10 = 0 \quad (10.78)$$

$$\frac{5}{6}T(2) - 2T(3) + \frac{7}{6}T(4) + 10 = 0 \quad (10.79)$$

$$\frac{7}{8}T(3) - 2T(4) + \frac{9}{8}T(5) + 10 = 0 \quad (10.80)$$

$$\frac{9}{10}T(4) - 2T(5) + \frac{11}{10}T(6) + 10 = 0 \quad (10.81)$$

es decir,

$$-2T(1) + 2T(2) = -15 \quad (10.82)$$

$$3T(1) - 8T(2) + 5T(3) = -40 \quad (10.83)$$

$$5T(2) - 12T(3) + 7T(4) = -60 \quad (10.84)$$

$$7T(3) - 16T(4) + 9T(5) = -80 \quad (10.85)$$

$$9T(4) - 20T(5) + 11T(6) = -100 \quad (10.86)$$

En la ecuación (10.86), se observa que $T(6)$ proviene de la condición de frontera. Como la condición de frontera es por convección, dada por la ecuación

$$\kappa \frac{dT}{dR} + h_b T = h_b T_\infty \quad \text{en} \quad R = b. \quad (10.87)$$

y en diferencias finitas,

$$\kappa \frac{T(i+1) - T(i-1)}{2\Delta r} + h_b T(i) = h_b T_\infty \quad \text{en} \quad R = b. \quad (10.88)$$

como se trata de una condición de frontera en $i = 5$, se obtiene:

$$\kappa \frac{T(6) - T(4)}{2\Delta r} + h_b T(5) = h_b T_\infty \quad (10.89)$$

despejando a $T(6)$,

$$T(6) - T(4) + \frac{2\Delta r}{\kappa} h_b T(5) = \frac{2\Delta r}{\kappa} h_b T_\infty \quad (10.90)$$

es decir,

$$11T(6) = 11T(4) - \frac{22\Delta r}{\kappa} h_b T(5) + \frac{22\Delta r}{\kappa} h_b T_\infty \quad (10.91)$$

reemplazando en la ecuación (10.86), se obtiene:

$$9T(4) - 20T(5) + 11T(4) - \frac{22\Delta r}{\kappa} h_b T(5) + \frac{22\Delta r}{\kappa} h_b T_\infty = -100 \quad (10.92)$$

$$20T(4) - 20T(5) - \frac{22\Delta r}{\kappa} h_b T(5) + \frac{22\Delta r}{\kappa} h_b T_\infty = -100 \quad (10.93)$$

$$20T(4) - 2 \left(10 + \frac{11\Delta r}{\kappa} h_b \right) T(5) = -100 - \frac{22\Delta r}{\kappa} h_b T_\infty \quad (10.94)$$

$$10T(4) - \left(10 + \frac{11\Delta r}{\kappa} h_b \right) T(5) = -50 - \frac{11\Delta r}{\kappa} h_b T_\infty \quad (10.95)$$

calculando los términos:

$$\frac{11\Delta r}{\kappa} h_b T_\infty = 11 \times \frac{0.01 \times 400 \times 20}{40} = 22 \quad (10.96)$$

$$\frac{11\Delta r}{\kappa} h_b = 11 \times \frac{0.01 \times 400}{40} = 1.1 \quad (10.97)$$

reemplazando,

$$10T(4) - (10 + 1.1)T(5) = -50 - 22 \quad (10.98)$$

$$10T(4) - 11.1T(5) = -72 \quad (10.99)$$

Asi que las ecuaciones (10.82), (10.83), (10.84), (10.85) y (10.99) son las ecuaciones finales a resolver son

$$-2T(1) + 2T(2) = -15 \quad (10.100)$$

$$3T(1) - 8T(2) + 5T(3) = -40 \quad (10.101)$$

$$5T(2) - 12T(3) + 7T(4) = -60 \quad (10.102)$$

$$7T(3) - 16T(4) + 9T(5) = -80 \quad (10.103)$$

$$10T(4) - 11.1T(5) = -72 \quad (10.104)$$

y en forma matricial, se tiene:

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -8 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -12 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -16 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & -11.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T(1) \\ T(2) \\ T(3) \\ T(4) \\ T(5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ -40 \\ -60 \\ -80 \\ -72 \end{pmatrix} \quad (10.105)$$

Usando el método interactivo de Gauss-Seidel con una aproximación de 10^{-6} , se obtienen los siguientes resultados:

$$T(1) = 330.0, T(2) = 322.5, T(3) = 310.0, T(4) = 292.5, T(5) = 270.0.$$

y la temperatura $T(0)$, se calcula usando la ecuación (10.66),

$$T(0) = 2.5 + T(1) = 2.5 + 330.0, \rightarrow T(0) = 332.5 \quad (10.106)$$

```

1  PROGRAM GAUSSSEIDEL
2  INTEGER, PARAMETER :: M=100
3  INTEGER :: NMI,IJK,ITER,I,J,NAPROX
4  real, dimension(M,M) :: A
5  REAL,DIMENSION(M) :: B,X
6  !
7  WRITE(6,*) 'ECUACIONES DE ENTRADA. '
8  OPEN(2,FILE='datos-temp.dat',STATUS='OLD')
9  READ(2,*)N,NMI,NAPROX ! LEE DATOS DEL ARCHIVO DE ENTRADA
10 APROX=10.0**(-NAPROX)
11 !
12 DO I=1,N
```

```

13      READ(2,*) (A(I,J),J=1,N),B(I)
14      WRITE(6,*) (A(I,J),J=1,N),B(I)
15  END DO
16  CLOSE (2)
17  !
18  DO I=1,N
19      X(I) = 0.0  ! PRIMERA APROXIMACION DE LA SOLUCION
20  END DO
21  !
22  WRITE(6,*) 'RESULTADOS'
23  WRITE(*,*)  ! IMPRIME RESULTADOS
24  DO ITER=1,NMI
25      WRITE(*,*) ITER, (X(J),J=1,N)
26      IJK = 0
27      DO I=1,N
28          Y=B(I)
29          DO J=1,N
30              IF (I.EQ. J) GO TO 3
31              Y=Y-A(I,J)*X(J)
32          3  END DO
33              Y=Y/A(I,I)
34              IF (ABS( (X(I)-Y)/Y ).GT.APROX) IJK=I
35              X(I) = Y
36      END DO
37      IF ( IJK.EQ.0 ) GO TO 6
38  END DO
39  WRITE(*,*) 'NUMERO DE ITERACIONES: ',NMI
40  6  CONTINUE
41  !
42  END PROGRAM GAUSSSEIDEL

```

La solución exacta de este problema con lleva a la siguiente ecuación:

$$T(R) = T_{\infty} + \frac{fb}{2h_b} + \frac{fb^2}{4\kappa} \left[1 - \left(\frac{R}{b} \right)^2 \right] \quad (10.107)$$

reemplazando los sguietes valores,

$$\frac{fb}{2h_b} = \frac{(4 \times 10^6)(5 \times 10^{-2})}{2 \times 400} = 250 \quad (10.108)$$

$$\frac{fb^2}{4\kappa} = \frac{(4 \times 10^6)(25 \times 10^{-4})}{2 \times 40} = 62.6 \quad (10.109)$$

$$T_{\infty} = 20^{\circ}C \quad (10.110)$$

la solución exacta toma la forma:

$$T(R) = 20 + 250 + 62.5 \left[1 - \left(\frac{R}{b} \right)^2 \right] \quad (10.111)$$

$$T(R) = 270 + 62.5 \left[1 - \left(\frac{R}{b} \right)^2 \right] \quad (10.112)$$

Tabla 10.1: Comparación de los resultados estimados usando diferencias finitas del ejemplo 10.4 con los valores exactos de la ecuación (10.112)

R	$\frac{R}{b}$	$T(i)$	valor numérico	valor exacto
0.00	0.00	$T(0)$	332.500	332.500
0.01	0.02	$T(1)$	329.991	330.000
0.02	0.04	$T(2)$	322.492	322.500
0.03	0.06	$T(3)$	309.992	310.000
0.04	0.08	$T(4)$	292.493	292.500
0.05	1.00	$T(5)$	269.993	270.000

Problema 10.5 Para el ejemplo 10.4, demostrar que la solución exacta esta dada por la siguiente ecuación:

$$T(R) = 270 + 62.5 \left[1 - \left(\frac{R}{b} \right)^2 \right] \quad (10.113)$$

Se puede construir una solución a la original ecuación diferencial usando la aproximación en diferencias finitas, ecuación (10.60), válida para el origen ($r = 0$) y la ecuación (10.61), válida para la región donde el radio es diferente de cero ($r \neq 0$). Recordando las ecuaciones:

$$2(1+p)(T(1) - T(0)) + \frac{\Delta r^2 f(0)}{\kappa} = 0, \quad \text{para } i = 0. \quad (10.114)$$

y

$$\left(1 - \frac{p}{2i} \right) T(i-1) - 2T(i) + \left(1 + \frac{p}{2i} \right) T(i+1) + \frac{\Delta r^2}{\kappa} f(i) = 0, \\ \text{para } i = 1, 2, 3, \dots, M \quad (10.115)$$

donde se observa que M es el valor del último nodo (último índice de i) a calcular. El nodo ubicado en la posición $i = M$ se encuentra en el borde del cilindro, es decir $r = b$ con b radio del cilindro. En este nodo se debe de evaluar las condición de frontera o la temperatura que posee el cilindro $T(r = b)$. Como el cilindro se encuentra en un ambiente a temperatura constante T_∞ , la condición de frontera es por convección con un coeficiente de transferencia de h_b . La condición de frontera es dada por la ecuación:

$$\kappa \frac{dT}{dR} + h_b T = h_b T_\infty \quad \text{en } R = b \quad (10.116)$$

La discretización de ésta ecuación diferencial alrededor del nodo M con la fórmula de diferencias centrales dá:

$$\kappa \frac{T(M+1) - T(M-1)}{2\Delta R} + h_b T(M) = h_b T_\infty \quad (10.117)$$

observándose que se genera un nodo adicional fuera del radio del cilindro, este nodo es un nodo ficticio, y para eliminarlo se necesita evaluar la ecuación (10.115) cuando $i = M$.

$$\left(1 - \frac{p}{2M}\right) T(M-1) - 2T(M) + \left(1 + \frac{p}{2M}\right) T(M+1) + \frac{\Delta r^2}{\kappa} f(M) = 0 \quad (10.118)$$

Usando la ecuaciones (10.117) y (10.118), se elimina el término ficticio $T(M+1)$, obteniéndose la ecuación:

$$2T(M-1) - 2A_M T(M) + 2B_M + C_M = 0 \quad (10.119)$$

donde

$$A_M = 1 + \left(1 + \frac{p}{2M}\right) \frac{\Delta R}{\kappa} h_b \quad (10.120)$$

$$B_M = \left(1 + \frac{p}{2M}\right) \frac{\Delta R}{\kappa} h_b T_\infty \quad (10.121)$$

$$C_M = \frac{\Delta r^2}{\kappa} f(M) \quad (10.122)$$

Las ecuaciones (10.114), (10.115) y (10.119) son las ecuaciones que resueltas dan información de la distribución radial del perfil de temperatura del cilindro. El siguiente código en Fortran muestra la programación de estas tres ecuaciones.

```

1      PROGRAM ECCALORCILINDRICA
2      INTEGER,PARAMETER :: N=10000
3      INTEGER :: I,ND,ITER,ICONT
4      REAL,DIMENSION(0:N) :: U,F,FF
5      REAL :: DELTAR,R,BETA,GAMA,A,B
6      !
7      R = 0.05; KAPPA = 40.0; Tinf = 20.0; P = 1.0; h = 400.0
8      ND = 5 ! numero de divisiones en la barra
9      NMI = 500 ! numero maximo de iteraciones
10     NAPROX = 8 ! aproximacion
11     !
12     DELTAR = R/REAL(ND)
13     DO I=0,ND
14         F(I) = 4.0E6 ! FUENTE DE LA EC. DIF.
15     END DO
16     !
17     DO I=0,ND
18         FF(I) = (DELTAR*DELTAR)*F(I)/KAPPA
19     END DO
20     50 format(F8.3)
21     !
22     APROX = 10.0**(-NAPROX)
23     ! iniciacion de la matriz en ceros
24     DO J = 0,ND
25         U(J)=0.0
26     END DO

```

```

27 !      COMIENZO DEL CICLO
28 DO ITER = 1,NMI
29     ICONT = 0
30     DO I=1,ND
31         U(0) = U(1) + FF(I)/( 2.0*(1.0+p) )
32         A = 1.0 - P/(2.0*REAL(I))
33         B = 1.0 + P/(2.0*REAL(I))
34         TEMPOR = 0.5*( A*U(I-1) + B*U(I+1) + FF(I) )
35         IF (I.EQ.ND)THEN
36             BETA = 1.0 + (1.0+P/(2.0*ND))*(DELTAR*H/KAPPA)
37             GAMA = (1.0+P/(2.0*ND))*(DELTAR*H*Tinf/KAPPA)
38             TEMPOR = ( U(ND-1) + GAMA + 0.5*FF(ND) )/BETA
39         END IF
40         IF ( (ABS(U(I)-TEMPOR)/TEMPOR).LE.APROX )GO TO 2
41         ICONT = ICONT +1
42     2    U(I) = TEMPOR
43     END DO
44     IF (ICONT.EQ.0)GO TO 4
45     END DO
46 !
47 4 DO I =0,ND
48     WRITE(*,100) I,U(I)      !   imprime resultados
49     END DO
50     WRITE(*,*) 'ITERACCIONES REALIZADAS: ',ITER
51 100 format (5x, 'T( ',I1, ')=' ,9F7.3)
52 !
53     END PROGRAM ECCALORCILINDRICA

```

Al ejecutar el programa se observa que se obtienen los mismos resultados que aparecen en la Tabla 10.1.

Esferas

Retomando las ecuaciones de diferencias finitas (10.60) y (10.61) de la ecuación (10.44):

$$2(1+p)\left(T(1) - T(0)\right) + \frac{\Delta r^2 f(0)}{\kappa} = 0, \quad \text{para } i = 0. \quad (10.123)$$

y

$$\left(1 - \frac{p}{2i}\right) T(i-1) - 2T(i) + \left(1 + \frac{p}{2i}\right) T(i+1) + \frac{\Delta r^2}{\kappa} f(i) = 0, \\ \text{para } i = 1, 2, 3, \dots \quad (10.124)$$

las ecuaciones para una esfera, con $p = 2$, son:

$$6\left(T(1) - T(0)\right) + \frac{\Delta r^2 f(0)}{\kappa} = 0, \quad \text{para } i = 0. \quad (10.125)$$

y

$$\left(1 - \frac{1}{i}\right) T(i-1) - 2T(i) + \left(1 + \frac{1}{i}\right) T(i+1) + \frac{\Delta r^2}{\kappa} f(i) = 0, \\ \text{para } i = 1, 2, 3, \dots \quad (10.126)$$

Problema 10.6 Realice un código en Fortran con los datos del ejercicio 10.4 para el caso de una esfera sólida.

Solución

El código en Fortran que resuelve las ecuaciones para el sólido esférico en diferencias finitas (10.125) y (10.126) con las condiciones de frontera es:

```

1      PROGRAM TEMPSOLIDOESFERICO
2      INTEGER,PARAMETER :: N=100000
3      INTEGER :: I,ND,ITER,ICONT
4      REAL,DIMENSION(0:N) :: U,F,FF
5      REAL :: DELTAR,R,BETA,GAMA,A,B
6      !
7      R=0.05; KAPPA=40.0; Tinf=20.0; P=2.0; h=400.0
8      ND = 5
9      NMI = 50000
10     NAPROX = 8
11     !
12     DELTAR = R/REAL(ND)
13     DO I=0,ND
14         F(I) = 4.0E6      ! FUENTE DE LA EC. DIF.
15     END DO
16     !
17     DO I=0,ND
18         FF(I) = (DELTAR*DELTAR)*F(I)/KAPPA
19     END DO
20     50 format(F8.3)
21     !
22     APROX = 10.0**(-NAPROX)
23     ! iniciacion de la matriz en ceros
24     DO J = 0,ND
25         U(J)=0.0
26     END DO
27     ! COMIENZO DEL CICLO
28     DO ITER = 1,NMI
29         ICONT = 0
30         DO I=1,ND
31             U(0) = U(1) + FF(I)/( 2.0*(1.0+p) )
32             A = 1.0 - P/(2.0*REAL(I))
33             B = 1.0 + P/(2.0*REAL(I))
34             TEMPOR = 0.5*( A*U(I-1) + B*U(I+1) + FF(I) )
35             IF (I.EQ.ND)THEN
36                 BETA = 1.0 + (1.0+P/(2.0*ND))*(DELTAR*H/KAPPA)
37                 GAMA = (1.0+P/(2.0*ND))*(DELTAR*H*Tinf/KAPPA)
38                 TEMPOR = ( U(ND-1) + GAMA + 0.5*FF(ND) )/BETA
39             END IF
40             IF ( (ABS(U(I)-TEMPOR)/TEMPOR).LE.APROX )GO TO 2
41             ICONT = ICONT +1
42             2      U(I) = TEMPOR
43         END DO
44         IF (ICONT.EQ.0)GO TO 4
45     END DO
46     !
47     4 DO I =0,ND
48         WRITE(*,*) I,U(I)
49     END DO
50     WRITE(*,*) 'ITERACCIONES REALIZADAS: ',ITER
51     100 format(5x,'T( ',I1,' )= ',9F7.3)
52     !
53     END PROGRAM TEMPSOLIDOESFERICO

```

La solución exacta de la conducción de calor en este sólido esférico es:

$$T(R) = T_{\infty} + \frac{fb}{3h} + \frac{fb^2}{6\kappa} \left[1 - \left(\frac{R}{b} \right)^2 \right] \quad (10.127)$$

reemplazando los siguientes valores,

$$\frac{fb}{3h} = \frac{(4 \times 10^6)(5 \times 10^{-2})}{3 \times 400} = 166.6667 \quad (10.128)$$

$$\frac{fb^2}{6\kappa} = \frac{(4 \times 10^6)(25 \times 10^{-4})}{6 \times 40} = 41.6667 \quad (10.129)$$

$$T_{\infty} = 20^{\circ}C \quad (10.130)$$

la solución exacta toma la forma:

$$T(R) = 20 + 166.6667 + 41.6667 \left[1 - \left(\frac{R}{b} \right)^2 \right] \quad (10.131)$$

$$T(R) = 186.6667 + 41.6667 \left[1 - \left(\frac{R}{b} \right)^2 \right] \quad (10.132)$$

La Tabla 10.2 muestra los resultados de la distribución de temperatura dentro del sólido esférico, calculados con el programa del problema 10.6 y la solución exacta (10.132).

Tabla 10.2: Comparación de los resultados de la temperatura en cada uno de los nodos calculados usando el programa y la solución exacta. $b = 0.05$.

R	$\frac{R}{b}$	$T(i)$	valor numérico	valor exacto
0.00	0.00	$T(0)$	228.333069	228.333344
0.01	0.02	$T(1)$	226.666397	226.666672
0.02	0.04	$T(2)$	221.666397	221.666672
0.03	0.06	$T(3)$	213.333069	213.333344
0.04	0.08	$T(4)$	201.666412	201.666672
0.05	1.00	$T(5)$	186.666428	186.666672

10.1.3 Cilindros y esferas huecas

En esta sección se considera el proceso de transferencia de calor radial en cilindros y esferas huecas con radio interno $r = a$ y radio externo $r = b$, como lo muestra el mallado en la Figura 10.3.

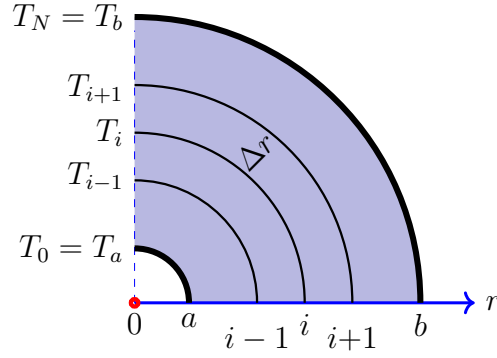


Figura 10.3: Mallado utilizado en la aproximación de diferencias finitas para los cilindros y esferas huecas.

La ecuación (10.44) aplicada en la región $a \leq r \leq b$, es válida para la transferencia de calor en los cilindros y esferas huecas, es decir:

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{p}{r} \frac{dT}{dr} + \frac{1}{\kappa} f(r) = 0, \quad \text{en } a \leq r \leq b \quad (10.133)$$

Usando la representación de diferencias finitas, en donde la variable r toma los valores desde $r = a + i\Delta r$ hasta $r = b$ y dividiendo esta región en N subregiones, el ancho de cada subregión Δr es dado por:

$$\Delta r = \frac{b - a}{N} \quad (10.134)$$

Discretizando la ecuación (10.133),

$$\frac{T(i-1) - 2T(i) + T(i+1))}{\Delta r^2} + \frac{p}{a + i\Delta r} \frac{T(i+1) - T(i-1)}{2\Delta r} + \frac{f(i)}{\kappa} = 0 \quad (10.135)$$

$$\begin{aligned} \frac{T(i-1)}{\Delta r^2} - 2\frac{T(i)}{\Delta r^2} + \frac{T(i+1)}{\Delta r^2} + \frac{p}{a + i\Delta r} \frac{T(i+1)}{2\Delta r} - \\ \frac{p}{a + i\Delta r} \frac{T(i-1)}{2\Delta r} + \frac{f(i)}{\kappa} = 0 \end{aligned} \quad (10.136)$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{\Delta r^2} - \frac{p}{2\Delta r(a + i\Delta r)} \right] T(i-1) - 2\frac{T(i)}{\Delta r^2} + \left[\frac{1}{\Delta r^2} + \frac{p}{2\Delta r(a + i\Delta r)} \right] T(i+1) \\ + \frac{f(i)}{\kappa} = 0 \end{aligned} \quad (10.137)$$

premultiplicando por Δr^2 ,

$$\left[1 - \frac{p\Delta r}{2(a + i\Delta r)}\right] T(i-1) - 2T(i) + \left[1 + \frac{p}{2(a + i\Delta r)}\right] T(i+1) + \frac{\Delta r^2 f(i)}{\kappa} = 0 \quad (10.138)$$

es decir,

$$\left[1 - \frac{p}{2\left(\frac{a}{\Delta r} + i\right)}\right] T(i-1) - 2T(i) + \left[1 + \frac{p}{2\left(\frac{a}{\Delta r} + i\right)}\right] T(i+1) + \frac{\Delta r^2 f(i)}{\kappa} = 0, \quad \text{para } i = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (10.139)$$

donde

$$p = \begin{cases} 1 & \text{para geometrías cilíndricas} \\ 2 & \text{para geometrías esféricas} \end{cases}$$

Condiciones de frontera

La ecuación (10.139) dá lugar a $N - 1$ ecuaciones algebraicas, pero involucra $N + 1$ nodos de temperatura desconocidos: $T(i)/i = 0, 1, 2, \dots, N$, donde N es el número de divisiones de la malla (ver Figura 10.3). De los $N + 1$ nodos desconocidos 2 son encontrados usando las condiciones de frontera en $r = a$ y en $r = b$. Para encontrar estos dos nodos, existen las siguientes posibilidades:

- Las temperaturas $T_0 = T_a$ y $T_N = T_b$, las cuales corresponden a los puntos $r = a$ y $r = b$, respectivamente son conocidas.
- Las temperaturas en los puntos $r = a$ y $r = b$ son estimadas usando la transferencia de temperatura por convección:

$$-\kappa \frac{dT}{dr} + h_a T = h_a T_{\infty, a}, \quad \text{en } r = a \quad (10.140)$$

$$\kappa \frac{dT}{dr} + h_b T = h_b T_{\infty, b}, \quad \text{en } r = b \quad (10.141)$$

discretizando las ecuaciones (10.140) y (10.141),

$$-\kappa \frac{T(i+1) - T(i-1)}{2\Delta r} + h_a T(i) = h_a T_{\infty, a} \quad (10.142)$$

$$\kappa \frac{T(i+1) - T(i-1)}{2\Delta r} + h_b T(i) = h_b T_{\infty, b} \quad (10.143)$$

evaluando primero para $i = 0$ en la ecuación (10.142), nodo ubicado en $r = a$, se tiene:

$$-\kappa \frac{T(1) - T(-1)}{2\Delta r} + h_a T(0) = h_a T_{\infty, a} \quad (10.144)$$

observándose que existe un nodo ficticio $T(-1)$ localizado a la izquierda del nodo $T(0)$. Despejando este nodo ficticio,

$$T(-1) = T(1) - \frac{2h_a \Delta r}{\kappa} T(0) + \frac{2h_a \Delta r}{\kappa} T_{\infty, a} \quad (10.145)$$

Para eliminar este nodo ficticio, se evalúa la ecuación (10.139) en $i = 0$,

$$\left[1 - \frac{p}{\frac{2a}{\Delta r}}\right] T(-1) - 2T(0) + \left[1 + \frac{p}{\frac{2a}{\Delta r}}\right] T(1) + \frac{\Delta r^2 f(0)}{\kappa} = 0 \quad (10.146)$$

reemplazando (10.145) en (10.146),

$$\begin{aligned} \left[1 - \frac{p}{\frac{2a}{\Delta r}}\right] T(1) - \left[1 - \frac{p}{\frac{2a}{\Delta r}}\right] \frac{2h_a \Delta r}{\kappa} T(0) + \left[1 - \frac{p}{\frac{2a}{\Delta r}}\right] \frac{2h_a \Delta r}{\kappa} T_{\infty, a} \\ - 2T(0) + \left[1 + \frac{p}{\frac{2a}{\Delta r}}\right] T(1) + \frac{\Delta r^2 f(0)}{\kappa} = 0 \end{aligned} \quad (10.147)$$

reuniendo términos,

$$\begin{aligned} \left[1 - \frac{p}{\frac{2a}{\Delta r}} + 1 + \frac{p}{\frac{2a}{\Delta r}}\right] T(1) - \left[2 + \left(1 - \frac{p}{\frac{2a}{\Delta r}}\right) \frac{2h_a \Delta r}{\kappa}\right] T(0) + \left[1 - \frac{p}{\frac{2a}{\Delta r}}\right] \frac{2h_a \Delta r}{\kappa} T_{\infty, a} \\ + \frac{\Delta r^2 f(0)}{\kappa} = 0 \end{aligned} \quad (10.148)$$

cancelando términos,

$$\begin{aligned} 2T(1) - 2 \left[1 + \left(1 - \frac{p}{\frac{2a}{\Delta r}}\right) \frac{h_a \Delta r}{\kappa}\right] T(0) + \left[1 - \frac{p}{\frac{2a}{\Delta r}}\right] \frac{2h_a \Delta r}{\kappa} T_{\infty, a} \\ + \frac{\Delta r^2 f(0)}{\kappa} = 0 \end{aligned} \quad (10.149)$$

definiendo las siguientes constantes,

$$A_0 = 1 + \left(1 - \frac{p}{\frac{2a}{\Delta r}}\right) \frac{h_a \Delta r}{\kappa} \quad (10.150)$$

$$B_0 = \left[1 - \frac{p}{\frac{2a}{\Delta r}}\right] \frac{h_a \Delta r}{\kappa} T_{\infty, a} \quad (10.151)$$

$$F_0 = \frac{\Delta r^2 f(0)}{\kappa} \quad (10.152)$$

la ecuación se reduce a:

$$2T(1) - 2A_0T(0) + 2B_0 + F_0 = 0, \quad \text{para } i = 0 \quad (10.153)$$

Ahora, evaluando en $i = N$ en la ecuación (10.143), nodo ubicado en $r = b$, se tiene:

$$\kappa \frac{T(N+1) - T(N-1)}{2\Delta r} + h_b T(N) = h_b T_{\infty, b} \quad (10.154)$$

observándose que existe un nodo ficticio $T(N+1)$, el cuál será eliminado usando la ecuación (10.139) evaluada en $i = N$:

$$\left[1 - \frac{p}{2\left(\frac{a}{\Delta r} + N\right)}\right] T(N-1) - 2T(N) + \left[1 + \frac{p}{2\left(\frac{a}{\Delta r} + N\right)}\right] T(N+1) + \frac{\Delta r^2 f(N)}{\kappa} = 0 \quad (10.155)$$

despejando el punto ficticio de (10.154),

$$T(N+1) - T(N-1) + \frac{2\Delta r}{\kappa} h_b T(N) = \frac{2\Delta r}{\kappa} h_b T_{\infty, b} \quad (10.156)$$

$$T(N+1) = T(N-1) - \frac{2\Delta r}{\kappa} h_b T(N) + \frac{2\Delta r}{\kappa} h_b T_{\infty, b} \quad (10.157)$$

reemplazando $T(N+1)$ en (10.155),

$$\begin{aligned} &\left[1 - \frac{p}{2\left(\frac{a}{\Delta r} + N\right)}\right] T(N-1) - 2T(N) + \left[1 + \frac{p}{2\left(\frac{a}{\Delta r} + N\right)}\right] T(N-1) - \\ &\quad \left[1 + \frac{p}{2\left(\frac{a}{\Delta r} + N\right)}\right] \frac{2\Delta r}{\kappa} h_b T(N) + \left[1 + \frac{p}{2\left(\frac{a}{\Delta r} + N\right)}\right] \frac{2\Delta r}{\kappa} h_b T_{\infty, b} \\ &\quad + \frac{\Delta r^2 f(N)}{\kappa} = 0 \end{aligned} \quad (10.158)$$

simplificando,

$$2T(N-1) - 2 \left[1 + \left(1 + \frac{p}{2 \left(\frac{a}{\Delta r} + N \right)} \right) \frac{\Delta r}{\kappa} h_b \right] T(N) + \left[1 + \frac{p}{2 \left(\frac{a}{\Delta r} + N \right)} \right] \frac{2\Delta r}{\kappa} h_b T_{\infty,b} + \frac{\Delta r^2 f(N)}{\kappa} = 0 \quad (10.159)$$

definiendo las variables,

$$A_N = 1 + \left(1 + \frac{p}{2 \left(\frac{a}{\Delta r} + N \right)} \right) \frac{\Delta r}{\kappa} h_b \quad (10.160)$$

$$B_N = \left(1 + \frac{p}{2 \left(\frac{a}{\Delta r} + N \right)} \right) \frac{\Delta r}{\kappa} h_b T_{\infty,b} \quad (10.161)$$

$$F_N = \frac{\Delta r^2 f(N)}{\kappa} \quad (10.162)$$

se obtiene la ecuación,

$$2T(N-1) - 2A_N T(N) + 2B_N + F_N = 0, \quad \text{para } i = N \quad (10.163)$$

En resumen, las ecuaciones a solucionar son:

$$2T(1) - 2A_0 T(0) + 2B_0 + F_0 = 0, \quad \text{para } i = 0 \quad (10.164)$$

$$\left[1 - \frac{p}{2 \left(\frac{a}{\Delta r} + i \right)} \right] T(i-1) - 2T(i) + \left[1 + \frac{p}{2 \left(\frac{a}{\Delta r} + i \right)} \right] T(i+1) + \frac{\Delta r^2 f(i)}{\kappa} = 0, \quad \text{para } i = 1, 2, 3, \dots, (N-1) \quad (10.165)$$

y

$$2T(N-1) - 2A_N T(N) + 2B_N + F_N = 0, \quad \text{para } i = N \quad (10.166)$$

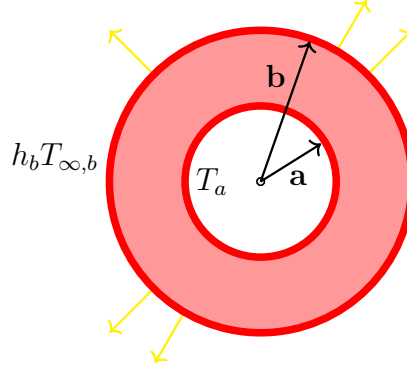
donde

$$p = \begin{cases} 1 & \text{para geometrías cilíndricas} \\ 2 & \text{para geometrías esféricas} \end{cases}$$

Problema 10.7 Considere una distribución de temperatura radial y en estado estacionario de una esfera hueca de radio interno $a = 2$ cm, de radio externo $b = 7$ cm y de conductividad térmica $\kappa = 50$ W/(m \cdot $^{\circ}$ C). La esfera tiene una fuente de energía generada a una velocidad de $f = 5 \times 10^6$ W/m 3 , mientras que la superficie interna se mantiene a una temperatura constante de $T_a = 100^{\circ}$ C y la superficie exterior disipa el calor por convección con un coeficiente de transferencia de $h_b = 500$ W/(m 2 \cdot $^{\circ}$ C) en un ambiente a temperatura cero ($T_{\infty,b} = 0$). Use el método de diferencias finitas dividiendo la región entre los radios internos y externos en 5 partes iguales y estime los valores de la temperatura en esta distribución de temperatura radial.

Solución

La Figura representa la esfera hueca. Se puede observar que el problema 10.7 tiene una condición de frontera constante ($T_a = 100^{\circ}$) en el radio interno, mientras que el radio externo tiene una condición de frontera tipo convección $h_b T_{\infty,b}$.



Usando las ecuaciones (10.166) para i igual a 5 y la ecuación (10.165) para $i = 1, 2, 3, 4$ con $p = 2$, se obtienen las siguientes ecuaciones algebraicas:

$$\begin{aligned}
 \text{para } i = 1 & \rightarrow \left[1 - \frac{1}{\frac{a}{\Delta r} + 1} \right] T(0) - 2T(1) + \left[1 + \frac{1}{\frac{a}{\Delta r} + 1} \right] T(2) + \frac{\Delta r^2 f(1)}{\kappa} = 0 \\
 \text{para } i = 2 & \rightarrow \left[1 - \frac{1}{\frac{a}{\Delta r} + 2} \right] T(1) - 2T(2) + \left[1 + \frac{1}{\frac{a}{\Delta r} + 2} \right] T(3) + \frac{\Delta r^2 f(2)}{\kappa} = 0 \\
 \text{para } i = 3 & \rightarrow \left[1 - \frac{1}{\frac{a}{\Delta r} + 3} \right] T(2) - 2T(3) + \left[1 + \frac{1}{\frac{a}{\Delta r} + 3} \right] T(4) + \frac{\Delta r^2 f(3)}{\kappa} = 0 \\
 \text{para } i = 4 & \rightarrow \left[1 - \frac{1}{\frac{a}{\Delta r} + 4} \right] T(3) - 2T(4) + \left[1 + \frac{1}{\frac{a}{\Delta r} + 4} \right] T(5) + \frac{\Delta r^2 f(4)}{\kappa} = 0 \\
 \text{para } i = 5 & \rightarrow 2T(4) - 2A_5 T(5) + 2B_5 + F_5 = 0
 \end{aligned}$$

donde $T(0) = T_a$ es la temperatura de la superficie interna y las constantes A_5 , B_5 y F_5 son definidas como:

$$A_5 = 1 + \left(1 + \frac{1}{\left(\frac{a}{\Delta r} + 5\right)}\right) \frac{\Delta r}{\kappa} h_b \quad (10.167)$$

$$B_5 = \left(1 + \frac{1}{\left(\frac{a}{\Delta r} + 5\right)}\right) \frac{\Delta r}{\kappa} h_b T_{\infty,b} \quad (10.168)$$

$$F_5 = \frac{\Delta r^2}{\kappa} f(5) \quad (10.169)$$

Usando los datos del problema: $a = 0.02m$; $b = 0.07m$, $N = 5$, $f = 5 \times 10^6 \text{ W/m}^3$, $h_b = 500 \text{ W/m}^2 \text{ } ^\circ C$, $\kappa = 50 \text{ W/m}^0 C$ y $T_{\infty,b} = 0^\circ C$, se calculan los valores de las constantes (10.169),

$$\begin{aligned} \Delta r &= \frac{b-a}{N} = \frac{0.07-0.02}{5} = 0.01 & \frac{a}{\Delta r} &= \frac{0.02}{0.01} = 2 \\ \frac{\Delta r^2}{\kappa} f &= \frac{0.01^2}{50} \times 5 \times 10^6 = 10 & \frac{\Delta r}{\kappa} h_b &= \frac{0.01 \times 500}{50} = 0.1 \\ \frac{\Delta r}{\kappa} h_b T_{\infty,b} &= 0.1 \times 0 = 0 \end{aligned} \quad (10.170)$$

con estos resultados se obtienen los siguientes valores:

$$A_5 = 1.1143, \quad B_5 = 0.0, \quad F_5 = 10.0$$

obteniéndose las siguientes ecuaciones algebraicas:

$$-2T(1) + 1.333T(2) = -10 - 0.666T(0) \quad (10.171)$$

$$0.750T(1) - 2T(2) + 1.250T(3) = -10 \quad (10.172)$$

$$0.800T(2) - 2T(3) + 1.200T(4) = -10 \quad (10.173)$$

$$0.833T(3) - 2T(4) + 1.166T(5) = -10 \quad (10.174)$$

$$T(4) - 1.1143T(5) = -5 \quad (10.175)$$

despejando $T(5)$ de la ecuación (10.175),

$$T(5) = 0.8974T(4) + 4.4871 \quad (10.176)$$

$$1.166T(5) = 1.0464T(4) + 5.2320 \quad (10.177)$$

reemplazando $T(5)$ en las ecuaciones algebraicas y sabiendo que $T(0) = T_a = 100$, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$-2T(1) + 1.333T(2) = -76.66 \quad (10.178)$$

$$0.750T(1) - 2T(2) + 1.250T(3) = -10 \quad (10.179)$$

$$0.800T(2) - 2T(3) + 1.200T(4) = -10 \quad (10.180)$$

$$0.833T(3) - 0.9536T(4) = -15.2320 \quad (10.181)$$

y en forma matricial,

$$\begin{pmatrix} -2.00 & 1.333 & 0.000 & 0.000 \\ 0.750 & -2.00 & 1.250 & 0.000 \\ 0.000 & 0.800 & -2.00 & 1.200 \\ 0.000 & 0.000 & 0.833 & -0.954 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T(1) \\ T(2) \\ T(3) \\ T(4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -76.66 \\ -10.00 \\ -10.00 \\ -15.232 \end{pmatrix} \quad (10.182)$$

Resolviendo la forma matricial usando la subroutine de Gauss-Seidel, se obtienen los resultados de las temperaturas de los nodos internos: $T(1)$, $T(2)$, $T(3)$ y $T(4)$. Los resultados obtenidos son:

$$\begin{aligned} T(0) &= 100.00 \rightarrow \text{Condición inicial de la esfera interna} \\ T(1) &= 152.44 \\ T(2) &= 171.20 \\ T(3) &= 174.46 \\ T(4) &= 168.30 \\ T(5) &= 0.8974 \times 168.30 + 4.4871 \approx 155.52 \end{aligned} \quad (10.183)$$

donde la temperatura $T(5)$ se calculó usando la ecuación (10.176).

Problema 10.8 El siguiente programa estima los valores de la temperatura del ejemplo 10.7 usando las ecuaciones (10.165), (10.166).

```

1      program tempesferahueca
2      integer, parameter :: m=100000
3      integer :: i,k,iter,ND,nmi
4      real,dimension (0:m) :: T,f,AA,BB,FF
5      real :: b,a,kappa,hb,tinf,tempor,deltar,asdr,dr2sk,drhb,drhbt
6      !
7      nmi = 10000
8      naprox = 6
9      ND = 5 ! numero de divisiones en la malla
10     p = 2.0
11     a=0.02; b=0.07; kappa=50.0; hb=500.0; tinf=0.0
12     deltar = (b-a)/real(ND)
13     drhb = deltar*hb/kappa
14     drhbt = deltar*hb*tinf/kappa
15     T(0) = 100.0 ! condicion de frontera en el radio interno a
16     do i=1,ND
17         f(i) = 5.0E6 ! fuente: energia generada en la esfera hueca
18     end do
19     aprox = 10.0*(-naprox)
20     do i=1,ND-1
21         T(i) = 0.0 ! puntos de la malla inicialmente en ceros
22     end do
23     !
24     ! comienzo de ciclo
25     do iter = 1,nmi
26         icon = 0
27         do i=1,ND
28             AA(i) = 1.0 - (0.5*p)/(a/deltar + real(i))
29             BB(i) = 1.0 + (0.5*p)/(a/deltar + real(i))
30             FF(i) = deltar*deltar*f(i)/kappa
31             tempor = 0.5*( AA(i)*T(i-1) + BB(i)*T(i+1) + FF(i) )
32             if (i.EQ.ND) then

```



```

33      AA(ND) = 1.0 + (1.0+(0.5*p)/(a/deltar + real(ND)))*drhb
34      BB(ND) = ( 1.0+(0.5*p)/(a/deltar + real(ND)))*drhbt
35      FF(ND) = deltar*deltar*f(ND)/kappa
36      tempor = (2.0*T(ND-1)+2.0*BB(ND)+FF(ND))/(2.0*AA(ND))
37      end if
38      if(abs(T(i)-tempor)/tempor.le.aprox)go to 2
39      icon = icon + 1
40      T(i) = tempor
41      end do
42      if(icon.eq.0)go to 4
43      end do
44      do i=0,ND
45          write(*,*)i,T(i)
46      end do
47      write(*,*)'Iteracciones realizadas: ',iter
48      !
49      end program tempesferahueca

```

Los resultados se muestran en la siguiente Tabla

Nodo	Distribución de la Temperatura	
	Problema 10.8	Problema 10.7
0	100.00	100.00
1	153.07	152.44
2	172.10	171.20
3	175.52	174.46
4	169.47	168.30
5	156.58	155.52

Problema 10.9 La solución exacta de la esfera hueca con radio interno a y radio externo b es:

$$T(r) = T_a - \frac{fr^2}{6\kappa} + \frac{c_1}{r} + c_2 \quad (10.184)$$

donde

$$c_1 = \frac{ab^2}{a\kappa + bh_b(b-a)} \left[h_b(T_a - T_\infty) - \frac{f}{3} \left(b + \frac{h_b}{2\kappa}(b^2 - a^2) \right) \right] \quad (10.185)$$

$$c_2 = \frac{fa^2}{6\kappa} - \frac{c_1}{a} \quad (10.186)$$

Use la solución exacta, ecuación (10.184) y estime los valores de temperaturas de cada uno de los nodos del problema 10.7 y realice una comparación de los resultados.

10.2 Conducción del calor en 2D y 3D

10.2.1 Coordenadas cartesianas

La ecuación (10.1), en dos dimensiones, en coordenadas cartesianas y en forma general puede escribirse como:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = f(x, y) \quad (10.187)$$

la cual corresponde a la ecuación de Poisson en 2D. La función $f(x, y)$ es conocida como una función fuente. Usando la aproximación del método de diferencias finitas,

$$\frac{T(i+1, j) - 2T(i, j) + T(i-1, j))}{\Delta x^2} + \frac{T(i, j+1) - 2T(i, j) + T(i, j-1))}{\Delta y^2} = f(x_i, y_i) \quad (10.188)$$

$$-2 \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right) T(i, j) + \frac{T(i+1, j) + T(i-1, j))}{\Delta x^2} + \frac{T(i, j+1) + T(i, j-1))}{\Delta y^2} = f(x_i, y_i) \quad (10.189)$$

$$-2 \left(\frac{\Delta x^2 + \Delta y^2}{\Delta x^2 \Delta y^2} \right) T(i, j) + \frac{T(i+1, j) + T(i-1, j))}{\Delta x^2} + \frac{T(i, j+1) + T(i, j-1))}{\Delta y^2} = f(x_i, y_i) \quad (10.190)$$

$$2 \left(\frac{\Delta x^2 + \Delta y^2}{\Delta x^2 \Delta y^2} \right) T(i, j) = \frac{T(i+1, j) + T(i-1, j))}{\Delta x^2} + \frac{T(i, j+1) + T(i, j-1))}{\Delta y^2} - f(x_i, y_i) \quad (10.191)$$

si se realiza un mallado tal que $\Delta x = \Delta y = h$, se obtiene:

$$2 \left(\frac{2h^2}{h^4} \right) T(i, j) = \frac{T(i+1, j) + T(i-1, j))}{h^2} + \frac{T(i, j+1) + T(i, j-1))}{h^2} - f(x_i, y_i) \quad (10.192)$$

$$\frac{4}{h^2} T(i, j) = \frac{T(i+1, j) + T(i-1, j))}{h^2} + \frac{T(i, j+1) + T(i, j-1))}{h^2} - f(x_i, y_i) \quad (10.193)$$

multiplicando en ambos lados por $\frac{h^2}{4}$, se despeja $T(i, j)$,

$$T(i, j) = \frac{1}{4} \left(T(i+1, j) + T(i-1, j) + T(i, j+1) + T(i, j-1) - h^2 f(x_i, y_j) \right) \quad (10.194)$$

donde $i = 1, 2, 3, \dots, N$. y $j = 1, 2, 3, \dots, M$. Para $i = 1$, lado izquierdo de la membrana, la ecuación (10.194) es:

$$T(1, j) = \frac{1}{4} \left(T(2, j) + T(0, j) + T(1, j+1) + T(1, j-1) - h^2 f(x_1, y_j) \right) \quad (10.195)$$

donde se observa que $T(0, j)$ es una condición de frontera del lado izquierdo de una membrana rectangular. Para $i = N$, donde N es el punto máximo que toma i , se obtiene

$$T(N, j) = \frac{1}{4} \left(T(N+1, j) + T(N-1, j) + T(N, j+1) + T(N, j-1) - h^2 f(x_N, y_j) \right) \quad (10.196)$$

donde $T(N+1, j)$ es una condición de frontera correspondiente al lado derecho de una placa bidimensional. Realizando las mismas sustituciones para el índice j , se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$T(i, 1) = \frac{1}{4} \left(T(i+1, 1) + T(i-1, 1) + T(i, 2) + T(i, 0) - h^2 f(x_i, y_1) \right) \quad (10.197)$$

y

$$T(i, M) = \frac{1}{4} \left(T(i+1, M) + T(i-1, M) + T(i, M+1) + T(i, M-1) - h^2 f(x_i, y_M) \right) \quad (10.198)$$

donde se observa que se necesitan dos condiciones de frontera $T(i, 0)$ y $T(i, M+1)$, correspondientes a los valores que tienen los lados de abajo y de arriba, respectivamente de una membrana rectangular.

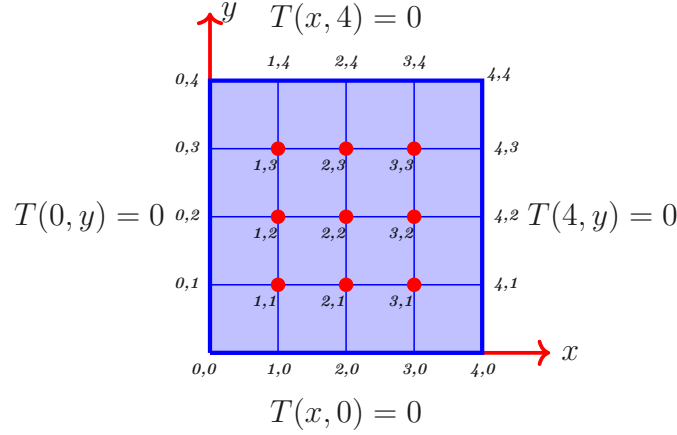
Problema 10.10 Una membrana rectangular de dimensiones de 1×1 , tiene una fuente de temperatura de magnitud igual a $-2\pi^2 \sin(\pi x) \sin(\pi y)$ y sus bordes se encuentran a temperatura igual a cero grados. Es decir: las condiciones de frontera son:

$$T(0, y) = T(1, y) = T(x, 0) = T(x, 1) = 0.$$

estimar la distribución de temperatura en la membrana realizando un mallado de 4×4 puntos.

Solución

Para un mallado de 4×4 puntos, como lo muestra la Figura, se genera un $\Delta x = \Delta y = 0.25$.



La ecuación a solucionar es:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = -2\pi^2 \sin(\pi x) \sin(\pi y) \quad (10.199)$$

Organizando la ecuación (10.194),

$$4T(i,j) - T(i+1,j) - T(i-1,j) - T(i,j+1) - T(i,j-1) = \Delta x^2 f(x_i, y_j)$$

donde $i = 1, 2, 3, \dots, N$. y $j = 1, 2, 3, \dots, M$.

• Para $j = 1$

$$i = 1 \rightarrow 4T(1,1) - T(2,1) - T(0,1) - T(1,2) - T(1,0) = \Delta x^2 f(x_1, y_1)$$

$$i = 2 \rightarrow 4T(2,1) - T(3,1) - T(1,1) - T(2,2) - T(2,0) = \Delta x^2 f(x_2, y_1)$$

$$i = 3 \rightarrow 4T(3,1) - T(4,1) - T(2,1) - T(3,2) - T(3,0) = \Delta x^2 f(x_3, y_1)$$

• Para $j = 2$

$$i = 1 \rightarrow 4T(1,2) - T(2,2) - T(0,2) - T(1,3) - T(1,1) = \Delta x^2 f(x_1, y_2)$$

$$i = 2 \rightarrow 4T(2,2) - T(3,2) - T(1,2) - T(2,3) - T(2,1) = \Delta x^2 f(x_2, y_2)$$

$$i = 3 \rightarrow 4T(3,2) - T(4,2) - T(2,2) - T(3,3) - T(3,1) = \Delta x^2 f(x_3, y_2)$$

• Para $j = 3$

$$i = 1 \rightarrow 4T(1,3) - T(2,3) - T(0,3) - T(1,4) - T(1,2) = \Delta x^2 f(x_1, y_3)$$

$$i = 2 \rightarrow 4T(2,3) - T(3,3) - T(1,3) - T(2,4) - T(2,2) = \Delta x^2 f(x_2, y_3)$$

$$i = 3 \rightarrow 4T(3,3) - T(4,3) - T(2,3) - T(3,4) - T(3,2) = \Delta x^2 f(x_3, y_3)$$

de la Figura, se observa que las condiciones de frontera son: $T(0, j) = T(4, j) = T(i, 0) = T(i, 4) = 0$, elementos que pueden ser eliminados de las ecuaciones. Eliminando estos nodos (nodos de frontera), las ecuaciones resultantes SOLO contienen los nodos internos, y se reducen a:

$$\begin{aligned}
4T(1, 1) - T(2, 1) - T(1, 2) &= \Delta x^2 f(x_1, y_1) \\
4T(2, 1) - T(3, 1) - T(1, 1) - T(2, 2) &= \Delta x^2 f(x_2, y_1) \\
4T(3, 1) - T(2, 1) - T(3, 2) &= \Delta x^2 f(x_3, y_1) \\
4T(1, 2) - T(2, 2) - T(1, 3) - T(1, 1) &= \Delta x^2 f(x_1, y_2) \\
4T(2, 2) - T(3, 2) - T(1, 2) - T(2, 3) - T(2, 1) &= \Delta x^2 f(x_2, y_2) \\
4T(3, 2) - T(2, 2) - T(3, 3) - T(3, 1) &= \Delta x^2 f(x_3, y_2) \\
4T(1, 3) - T(2, 3) - T(1, 2) &= \Delta x^2 f(x_1, y_3) \\
4T(2, 3) - T(3, 3) - T(1, 3) - T(2, 2) &= \Delta x^2 f(x_2, y_3) \\
4T(3, 3) - T(2, 3) - T(3, 2) &= \Delta x^2 f(x_3, y_3)
\end{aligned} \tag{10.200}$$

También se observa de la Figura y/o de las ecuaciones que existen 9 nodos con valores a determinar y por tanto, las ecuaciones (10.200) pueden reescribirse en términos de éstos 9 nodos así:

$$\begin{aligned}
4T_{1,1} - T_{2,1} + 0T_{3,1} - T_{1,2} + 0T_{2,2} + 0T_{3,2} + 0T_{1,3} + 0T_{2,3} + 0T_{3,3} &= \Delta x^2 f(x_1, y_1) \\
-T_{1,1} + 4T_{2,1} - T_{3,1} + 0T_{1,2} - T_{2,2} + 0T_{3,2} + 0T_{1,3} + 0T_{2,3} + 0T_{3,3} &= \Delta x^2 f(x_2, y_1) \\
0T_{1,1} - T_{2,1} + 4T_{3,1} + 0T_{1,2} + 0T_{2,2} - T_{3,2} + 0T_{1,3} + 0T_{2,3} + 0T_{3,3} &= \Delta x^2 f(x_3, y_1) \\
-T_{1,1} + 0T_{2,1} + 0T_{3,1} + 4T_{1,2} - T_{2,2} + 0T_{3,2} - T_{1,3} + 0T_{2,3} + 0T_{3,3} &= \Delta x^2 f(x_1, y_2) \\
0T_{1,1} - T_{2,1} + 0T_{3,1} - T_{1,2} + 4T_{2,2} - T_{3,2} + 0T_{1,3} - T_{2,3} + 0T_{3,3} &= \Delta x^2 f(x_2, y_2) \\
0T_{1,1} + 0T_{2,1} - T_{3,1} + 0T_{1,2} - T_{2,2} + 4T_{3,2} + 0T_{1,3} + 0T_{2,3} - T_{3,3} &= \Delta x^2 f(x_3, y_2) \\
0T_{1,1} + 0T_{2,1} + 0T_{3,1} - T_{1,2} + 0T_{2,2} + 0T_{3,2} + 4T_{1,3} - T_{2,3} + 0T_{3,3} &= \Delta x^2 f(x_1, y_3) \\
0T_{1,1} + 0T_{2,1} + 0T_{3,1} + 0T_{1,2} - T_{2,2} + 0T_{3,2} - T_{1,3} + 4T_{2,3} - T_{3,3} &= \Delta x^2 f(x_2, y_3) \\
0T_{1,1} + 0T_{2,1} + 0T_{3,1} + 0T_{1,2} + 0T_{2,2} - T_{3,2} + 0T_{1,3} - T_{2,3} + 4T_{3,3} &= \Delta x^2 f(x_3, y_3)
\end{aligned} \tag{10.201}$$

y en forma matricial,

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{1,1} \\ T_{2,1} \\ T_{3,1} \\ T_{1,2} \\ T_{2,2} \\ T_{3,2} \\ T_{1,3} \\ T_{2,3} \\ T_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta x^2 f(x_1, y_1) \\ \Delta x^2 f(x_2, y_1) \\ \Delta x^2 f(x_3, y_1) \\ \Delta x^2 f(x_1, y_2) \\ \Delta x^2 f(x_2, y_2) \\ \Delta x^2 f(x_3, y_2) \\ \Delta x^2 f(x_1, y_3) \\ \Delta x^2 f(x_2, y_3) \\ \Delta x^2 f(x_3, y_3) \end{pmatrix} \quad (10.202)$$

Ahora, solo falta calcular los términos que contienen la fuente de temperatura $\Delta x^2 f(x_i, y_j) = \Delta x^2 f(i\Delta x, j\Delta y)$. Estos términos se calculan de la siguiente forma. Por ejemplo:

$$f(x_1, y_2) = f(\Delta x, 2\Delta y) \quad (10.203)$$

$$f(x_1, y_2) = -2\pi^2 \sin(\pi\Delta x) \sin(2\pi\Delta y) \quad (10.204)$$

$$f(x_1, y_2) = -2\pi^2 \sin(0.25\pi) \sin(0.5\pi) \quad (10.205)$$

$$f(x_1, y_2) = -2\pi^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1 \quad (10.206)$$

$$f(x_1, y_2) \approx -13.9577 \quad (10.207)$$

y por lo tanto,

$$\Delta x^2 f(x_1, y_2) \approx 0.87236 \quad (10.208)$$

realizando los otros cálculos, se obtiene la siguiente matriz para solucionarse por Gauss-Seidel:

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{1,1} \\ T_{2,1} \\ T_{3,1} \\ T_{1,2} \\ T_{2,2} \\ T_{3,2} \\ T_{1,3} \\ T_{2,3} \\ T_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.61685 \\ 0.87236 \\ 0.61685 \\ 0.87236 \\ 1.23370 \\ 0.87236 \\ 0.61685 \\ 0.87236 \\ 0.61685 \end{pmatrix} \quad (10.209)$$

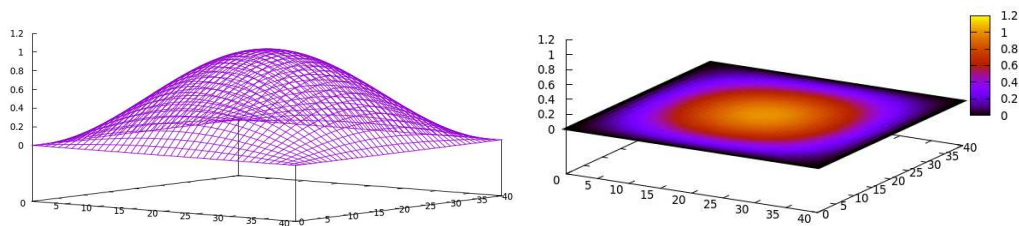
con una aproximación de 10^{-6} , realizando 22 iteraciones se obtuvo el siguiente resultado: $T_{1,1} = 0.5265$, $T_{2,1} = 0.7446$, $T_{3,1} = 0.5265$, $T_{1,2} = 0.7446$, $T_{2,2} = 1.0530$, $T_{3,2} = 0.7446$, $T_{1,3} = 0.5265$, $T_{2,3} = 0.7446$, $T_{3,3} = 0.5265$. La solución analítica o exacta está dada por la expresión:

$$T(x, y) = \sin(\pi x) \sin(\pi y) \quad (10.210)$$

La siguiente Tabla muestra los resultados de la solución analítica y la solución numérica. Los resultados Numérica1 corresponden a una malla de $\Delta x = \Delta y = 0.25$, mientras que los resultados Numérica2 corresponden a un mallado con $\Delta x = \Delta y = 0.025$

Solución	$T_{1,1}$	$T_{2,1}$	$T_{3,1}$	$T_{1,2}$	$T_{2,2}$	$T_{3,2}$	$T_{1,3}$	$T_{2,3}$	$T_{3,3}$
Numérica1	0.5265	0.7446	0.5265	0.7446	1.0530	0.7446	0.5265	0.7446	0.5265
Numérica2	0.5002	0.7074	0.5002	0.7074	1.0004	0.7074	0.5002	0.7074	0.5002
Analítica	0.5000	0.7071	0.5000	0.7071	1.0000	0.7071	0.5000	0.7071	0.5000

Las Gráficas correspondientes a los valores de la solución Numérica2 de la anterior Tabla son:



El siguiente programa estima los valores de la distribución de temperatura del ejemplo 10.10.

```

1  program Poisson2Dxy
2  DOUBLE PRECISION, PARAMETER :: PI=4.D0*DATAN(1.0D0)
3  integer ,parameter :: k=999
4  integer :: i,j,n,m,nmi,naprox,icont,iter
5  double precision, dimension (0:k,0:k) :: T
6  real(kind=8), external :: fxy
7  double precision :: temp,h,dx,dy,argx,argy,aprox,long
8  !
9  nmi = 10000; naprox = 6; nd = 4
10 long = 1.0 ! longitud de la placa cuadrada
11 dx = long/real(nd) ! longitud de la placa/numero de divisiones
12 dy = long/real(nd) ! longitud de la placa/numero de divisiones
13 aprox = 10.0*(-naprox)
14 !
15 do i=1,nd-1
16   do j=1,nd-1
17     T(i,j) = 0.0 ! iniciamos todos los puntos internos en ceros.
18   end do
19 end do
20 ! TEMPERATURAS EN LOS LADOS DE LA PLACA:
21 do i=0,nd
22   T(i,0) = 0.0 ! TEMPERATURA EN Y=0
23   T(i,nd) = 0.0 ! TEMPERATURA EN Y=b
24 end do
25 do j=1,nd-1
26   T(0,j) = 0.0 ! TEMPERATURA EN X=0
27   T(nd,j) = 0.0 ! TEMPERATURA EN X=a
28 end do
29 ! COMIENZO DE LAS ITERACIONES
30 do 3 iter=1,nmi
31   icont = 0

```

```

32      do i=1,nd-1
33      do j=1,nd-1
34          argx = real(i)*pi*dx
35          argy = real(j)*pi*dy
36          temp = 0.25*(T(i+1,j)+T(i-1,j)+T(i,j+1)+T(i,j-1)-&
37              fxy(argx, argy)*dx**2 )
38          if ((abs(T(i,j)-temp)/temp).le.aprox) go to 2
39          icon = icon + 1
40      2      T(i,j) = temp
41      end do
42      end do
43      if(icon.eq.0) go to 4
44      3 continue
45      !      imprime resultados
46      4 do i=0,nd
47          write(*,100)(T(i,j),j=0,nd)
48      end do
49      write(*,*) 'Numero de iteraciones: ', iter
50      100 format(3x,30(2x,f12.6))
51      !
52      end program Poisson2Dxy
53      !!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
54      real(kind=8) function fxy(argx, argy)
55      DOUBLE PRECISION, PARAMETER :: PI=4.D0*DATAN(1.0D0)
56      double precision :: argx, argy
57      fxy = -2.0*pi*pi*sin(argx)*sin(argy)
58      end function fxy
59      !!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

```

Problema 10.11 Usar la aproximación de diferencias finitas para solucionar la ecuación:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 4; \quad 0 \leq x, y \leq 1 \quad (10.211)$$

con condiciones de frontera:

$$\begin{aligned} T_x(0, y) = 0; \quad T(1, y) = 1 + y^2; \quad T(x > 0.5, 0) = x^2 \\ T(x > 0.5, 1) = x^2 + 1; \quad T_y(x \leq 0.5, 0) = 0; \quad T_y(x \leq 0.5, 1) = 2. \end{aligned}$$

La solución exacta es: $T(x, y) = x^2 + y^2$.

10.2.2 Coordenadas cilíndricas

La ecuación de Poisson en coordenadas (r, ϕ, z) para un cilindro es dada por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f(r, \phi, z) \quad (10.212)$$

En el planteamiento numérico se usará el método de diferencias finitas. Para $r \neq 0$, el esquema de la aproximación de diferencias finitas es:

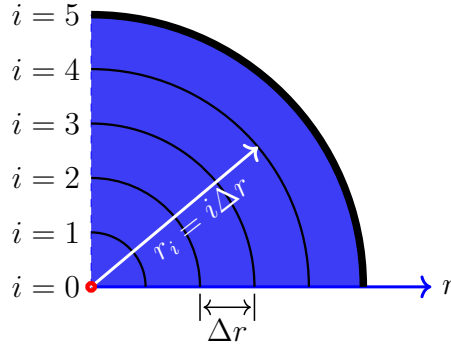
$$\frac{\partial u}{\partial r} \approx \frac{u_{i+1,j,k} - u_{i-1,j,k}}{2\Delta r}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \approx \frac{u_{i+1,j,k} - 2u_{i,j,k} + u_{i-1,j,k}}{\Delta r^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} \approx \frac{u_{i,j+1,k} - 2u_{i,j,k} + u_{i,j-1,k}}{\Delta \phi^2}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \approx \frac{u_{i,j,k+1} - 2u_{i,j,k} + u_{i,j,k-1}}{\Delta z^2} \quad (10.213)$$

reemplazando (10.213) en (10.212), se obtiene:

$$\frac{u_{i+1,j,k} - 2u_{i,j,k} + u_{i-1,j,k}}{\Delta r^2} + \frac{1}{r_i} \frac{u_{i+1,j,k} - u_{i-1,j,k}}{2\Delta r} + \frac{1}{r_i^2} \frac{u_{i,j+1,k} - 2u_{i,j,k} + u_{i,j-1,k}}{\Delta \phi^2} + \frac{u_{i,j,k+1} - 2u_{i,j,k} + u_{i,j,k-1}}{\Delta z^2} = f(i, j, k) \quad (10.214)$$

En la siguiente Figura, se observa que la posición r_i corresponde a i veces Δr , es decir $r_i = R_0 + i\Delta r$, $\phi_j = \phi_0 + j\Delta \phi$ y $z_k = z_0 + k\Delta z$.



$$\frac{u_{i+1,j,k} - 2u_{i,j,k} + u_{i-1,j,k}}{\Delta r^2} + \frac{1}{r_i} \frac{u_{i+1,j,k} - u_{i-1,j,k}}{2\Delta r} + \frac{1}{r_i^2} \frac{u_{i,j+1,k} - 2u_{i,j,k} + u_{i,j-1,k}}{\Delta \phi^2} + \frac{u_{i,j,k+1} - 2u_{i,j,k} + u_{i,j,k-1}}{\Delta z^2} = f(i, j, k) \quad (10.215)$$

$$\frac{u_{i+1,j,k} - 2u_{i,j,k} + u_{i-1,j,k}}{\Delta r^2} + \frac{1}{2r_i \Delta r} (u_{i+1,j,k} - u_{i-1,j,k}) + \frac{1}{r_i^2} \frac{u_{i,j+1,k} - 2u_{i,j,k} + u_{i,j-1,k}}{\Delta \phi^2} + \frac{u_{i,j,k+1} - 2u_{i,j,k} + u_{i,j,k-1}}{\Delta z^2} = f(i, j, k) \quad (10.216)$$

multiplicando en ambos lados por Δr^2 ,

$$u_{i+1,j,k} - 2u_{i,j,k} + u_{i-1,j,k} + \frac{\Delta r}{2r_i} (u_{i+1,j,k} - u_{i-1,j,k}) + \frac{1}{r_i^2} \frac{\Delta r^2}{\Delta \phi^2} (u_{i,j+1,k} - 2u_{i,j,k} + u_{i,j-1,k}) + \frac{\Delta r^2}{\Delta z^2} (u_{i,j,k+1} - 2u_{i,j,k} + u_{i,j,k-1}) = \Delta r^2 f(i, j, k) \quad (10.217)$$

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{\Delta r}{2r_i}\right)u_{i+1,j,k} + \left(1 - \frac{\Delta r}{2r_i}\right)u_{i-1,j,k} + \frac{1}{r_i^2} \frac{\Delta r^2}{\Delta \phi^2} (u_{i,j+1,k} + u_{i,j-1,k}) + \\ & \frac{\Delta r^2}{\Delta z^2} (u_{i,j,k+1} + u_{i,j,k-1}) - 2 \left(1 + \frac{1}{r_i^2} \frac{\Delta r^2}{\Delta \phi^2} + \frac{\Delta r^2}{\Delta z^2}\right) u_{i,j,k} = \Delta r^2 f(i, j, k) \end{aligned} \quad (10.218)$$

definiendo las variables:

$$\begin{aligned} \alpha_i &= 1 + \frac{\Delta r}{2r_i}; & \beta_i &= 1 - \frac{\Delta r}{2r_i}; \\ \gamma_i &= \frac{1}{r_i^2} \frac{\Delta r^2}{\Delta \phi^2}; & \delta &= \frac{\Delta r^2}{\Delta z^2}; \\ \eta_i &= 2 \left(1 + \frac{1}{r_i^2} \frac{\Delta r^2}{\Delta \phi^2} + \frac{\Delta r^2}{\Delta z^2}\right) \end{aligned} \quad (10.219)$$

reemplazando,

$$\begin{aligned} \alpha_i u_{i+1,j,k} + \beta_i u_{i-1,j,k} + \gamma_i (u_{i,j+1,k} + u_{i,j-1,k}) + \delta (u_{i,j,k+1} + u_{i,j,k-1}) - \eta_i u_{i,j,k} \\ = \Delta r^2 f(i, j, k) \quad \text{para } r \neq 0 \end{aligned} \quad (10.220)$$

con $i = 1, 2, \dots, N-1; j = 1, 2, \dots, M-1; k = 1, 2, \dots, P-1$.

Por lo tanto, la ecuación a programar es:

$$\begin{aligned} \eta_i u_{i,j,k} &= \alpha_i u_{i+1,j,k} + \beta_i u_{i-1,j,k} + \gamma_i (u_{i,j+1,k} + u_{i,j-1,k}) + \delta (u_{i,j,k+1} + u_{i,j,k-1}) \\ &\quad - \Delta r^2 f(i, j, k), \quad \text{para } r \neq 0 \end{aligned} \quad (10.221)$$

donde, las variables α_i , β_i , γ_i , δ y η_i estan definidas en la ecuación (10.219). Dándole valores a las variables i, j, k de la ecuación (10.220),

- Para $i = 1, j, k$:

$$\begin{aligned} \alpha_1 u_{2,j,k} + \beta_1 u_{0,j,k} + \gamma_1 (u_{1,j+1,k} + u_{1,j-1,k}) + \delta (u_{1,j,k+1} + u_{1,j,k-1}) \\ - \eta_1 u_{1,j,k} = \Delta r^2 f(1, j, k) \end{aligned} \quad (10.222)$$

- Para $i = N-1, j, k$:

$$\begin{aligned} \alpha_{N-1} u_{N,j,k} + \beta_{N-1} u_{N-2,j,k} + \gamma_{N-1} (u_{N-1,j+1,k} + u_{N-1,j-1,k}) \\ + \delta (u_{N-1,j,k+1} + u_{N-1,j,k-1}) - \eta_{N-1} u_{N-1,j,k} = \Delta r^2 f(N-1, j, k) \end{aligned} \quad (10.223)$$

en donde se puede observar que $u_{0,j,k}$ y $u_{N,j,k}$ son condiciones de frontera de la parte radial.

- Para $i, j = 1, k$:

$$\alpha_i u_{i+1,1,k} + \beta_i u_{i-1,1,k} + \gamma_i (u_{i,2,k} + u_{i,0,k}) + \delta (u_{i,1,k+1} + u_{i,1,k-1}) - \eta_i u_{i,1,k} = \Delta r^2 f(i, 1, k) \quad (10.224)$$

- Para $i, j = M - 1, k$:

$$\alpha_i u_{i+1,M-1,k} + \beta_i u_{i-1,M-1,k} + \gamma_i (u_{i,M,k} + u_{i,M-2,k}) + \delta (u_{i,M-1,k+1} + u_{i,M-1,k-1}) - \eta_i u_{i,M-1,k} = \Delta r^2 f(i, M - 1, k) \quad (10.225)$$

observándose que $u_{i,0,k}$ y $u_{i,M,k}$ son condiciones de frontera de la parte angular.

- Para $i, j, k = 1$:

$$\alpha_i u_{i+1,j,1} + \beta_i u_{i-1,j,1} + \gamma_i (u_{i,j+1,1} + u_{i,j-1,1}) + \delta (u_{i,j,2} + u_{i,j,0}) - \eta_i u_{i,j,1} = \Delta r^2 f(i, j, 1) \quad (10.226)$$

- Para $i, j, k = P - 1$:

$$\alpha_i u_{i+1,j,P-1} + \beta_i u_{i-1,j,P-1} + \gamma_i (u_{i,j+1,P-1} + u_{i,j-1,P-1}) + \delta (u_{i,j,P} + u_{i,j,P-2}) - \eta_i u_{i,j,P-1} = \Delta r^2 f(i, j, P - 1) \quad (10.227)$$

donde $u_{i,j,0}$ y $u_{i,j,P}$ son las condiciones de frontera de la componente axial. Es decir, las condiciones de frontera que se requieren para solucionar el sistema de ecuaciones son:

$$u_{0,j,k}; \quad u_{N,j,k} \quad \rightarrow \quad \text{radial} \quad (10.228)$$

$$u_{i,0,k}; \quad u_{i,M,k} \quad \rightarrow \quad \text{angular} \quad (10.229)$$

$$u_{i,j,0}; \quad u_{i,j,P} \quad \rightarrow \quad \text{axial} \quad (10.230)$$

Problema 10.12 suponga un cilindro sólido hueco con radio interno 1.0, radio externo 2.0 y altura 1.0, tiene una fuente de temperatura igual a $f(r, \phi, z) = -\pi^2 r \cos \phi \sin(\pi z)$. Es decir:

$$\nabla^2 T(r, \phi, z) = -\pi^2 r \cos \phi \sin(\pi z)$$

El cilindro se encuentra sometido a las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} T(1, \phi, z) &= \cos \phi \sin(\pi z); & T(2, \phi, z) &= 2 \cos \phi \sin(\pi z) \\ T(r, \phi, 0) &= 0; & T(r, \phi, 1) &= 0 \\ T(r, 0, z) &= r \sin(\pi z); & T(r, \pi, z) &= -r \sin(\pi z) \end{aligned}$$

Compare sus resultados numéricos con los resultados de la solución exacta dada por la siguiente ecuación:

$$T(r, \phi, z) = r \cos \phi \sin(\pi z)$$

Solución

El código para realizar los cálculos numéricos y obtener los valores del mallado del cilindro hueco es:

```

1  program Poisson3Dcil
2  double precision , parameter :: pi=4.d0*datan(1.0d0)
3  integer , parameter :: d=999
4  integer :: nmi,naprox,icont,iter,N,M,P,i,j,k
5  double precision , dimension (0:d,0:d,0:d) :: T
6  double precision :: l,a,b,dz,da,dr,aprox,conv,temp
7  double precision :: arg2,arg3,ang,alpha,beta,gama,delta,eta
8  double precision :: ase,bse,gse,dse,dr2se
9  real(kind=8), external :: f
10 !
11  nmi = 10000
12  naprox = 6
13  l = 1.0; a=1.0; b=2.0 !altura y radio del cilindro
14  N=50; M=360; P=50 ! numero de divisiones
15  dz = l/real(P) !
16  da = 360.0/real(M) !M debe de ser numero par
17  dr = (b-a)/real(N) !
18  aprox = 10.0*(-naprox)
19 !
20  conv = pi/180.0 !conversion de angulo a radianes
21  do i=0,N
22    do j=0,M
23      do k=0,P
24        T(i,j,k) = 0.0
25      end do
26    end do
27  end do
28 ! Condiciones de frontera:
29  do i=0,N
30    do j=0,M
31      do k=0,P
32        arg2 = real(j)*da*conv
33        arg3 = pi*real(k)*dz
34        T(0,j,k) = cos(arg2)*sin(arg3)
35        T(N,j,k) = 2.0*cos(arg2)*sin(arg3)
36        T(i,0,k) = (a+real(i)*dr)*sin(arg3)
37        T(i,M,k) = (a+real(i)*dr)*sin(arg3)
38        T(i,j,0) = 0.0
39        T(i,j,P) = 0.0
40      end do
41    end do
42  end do
43 ! Comienzo de los ciclos
44  do 3 iter=1,nmi
45    icont = 0

```

```

46  do i=1,N-1
47      do j=1,M-1
48          do k=1,P-1
49              arg2 = real(j)*da*conv
50              arg3 = pi*real(k)*dz
51              alpha = 1.0 + real(i)*dr/(2.0*(a+real(i)*dr))
52              beta = 1.0 - real(i)*dr/(2.0*(a+real(i)*dr))
53              gama = (dr**2/da**2)*( 1.0/(a+real(i)*dr)**2 )
54              delta = dr**2/dz**2
55              eta = 2.0*( 1.0 + gama + delta )
56  !
57              ase = alpha/eta
58              bse = beta/eta
59              gse = gama/eta
60              dse = delta/eta
61              dr2se = dr**2/eta
62              ang = a+real(i)*dr
63  !
64              temp = ase*T(i+1,j,k) + bse*T(i-1,j,k) +
65                  gse*( T(i,j+1,k) + T(i,j-1,k) ) +
66                  dse*( T(i,j,k+1) + T(i,j,k-1) ) -
67                  dr2se*f(ang, arg2, arg3)
68              if((abs(T(i,j,k)-temp)/temp).le.aprox)go to 2
69              icon = icon + 1
70          2      T(i,j,k) = temp
71      end do
72  end do
73  end do
74      if(icon.eq.0)go to 4
75  3  continue
76  !      imprime resultados numericos:
77      write(*,*) 'Solucion numerica'
78  4  open(2,file='Poisson_variable_3Dcil.dat',status='unknown')
79      do k=0,P
80          write(2,90) real(k)*dz
81          do j=0,M
82              write(2,100)(T(i,j,k), i=0,N)
83          end do
84      end do
85      close(2)
86      write(*,100)T(2,0,1)
87  !
88      90 format(2x,'z=',f8.2)
89      100 format(2x,99(2x,f12.5))
90  !
91  end program Poisson3Dcil
92  !!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
93      real(kind=8) function f(ang, arg2, arg3)
94      double precision, parameter :: pi=4.d0*datan(1.0d0)
95      double precision :: arg2, arg3, ang
96      f = -pi*pi*ang*cos(arg2)*sin(arg3)
97      end function f
98  !!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

```

La siguiente Figura muestra la distribución radial y angular del perfil de temperatura al nivel de $z=0.25$ (lado derecho), y en lado izquierdo se muestra la distribución de temperatura para un cálculo con $\Delta z = 0.05$, $\Delta \phi = 5^\circ$ y $\Delta r = 0.05$. Los datos impresos para realizar la Figura izquierda son cada $\Delta z = 0.6$, $\Delta \phi = 30^\circ$ y $\Delta r = 0.2$.

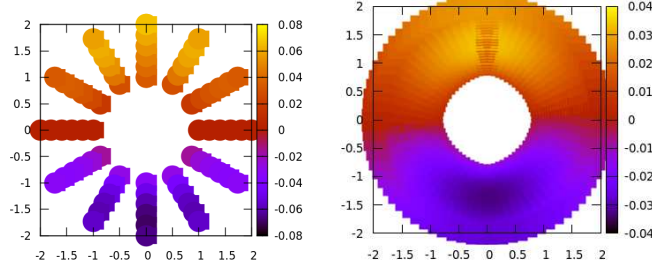


Figura 10.4: Distribución radial de la temperatura. Proyección en el plano r, ϕ .

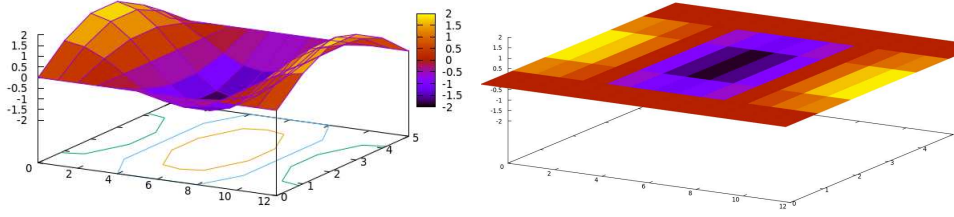


Figura 10.5: Distribución de la temperatura en la superficie del cilindro cuando $r = 2$.

10.2.3 Coordenadas esféricas

La ecuación de Poisson en coordenadas esféricas es dada por

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} = f(r, \theta, \phi) \quad (10.231)$$

suponiendo que existe simetría azimutal, la ecuación deja de ser dependiente del ángulo azimutal,

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) = f(r, \theta, \phi) \quad (10.232)$$

En ésta ecuación se observa que existen singularidades en la parte radial, como en la parte angular, las cuales pueden ser removidas usando la regla de H'opital. El término radial presenta singularidad en el punto $r = 0$,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} = 3 \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \quad (10.233)$$

El segundo término de la ecuación contiene singularidades en los puntos $r = 0$, $\theta = 0$ y $\theta = \pi$. La singularidad debido al ángulo polar puede removerse usando la regla de H'opital.

$$\lim_{\substack{\theta \rightarrow 0 \\ \theta \rightarrow \pi}} \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) = \lim_{\substack{\theta \rightarrow 0 \\ \theta \rightarrow \pi}} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\cos \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) \quad (10.234)$$

$$= \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \lim_{\substack{\theta \rightarrow 0 \\ \theta \rightarrow \pi}} \frac{1}{r^2 \tan \theta} \frac{\partial T}{\partial \theta} \quad (10.235)$$

$$= \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \lim_{\substack{\theta \rightarrow 0 \\ \theta \rightarrow \pi}} \frac{1}{r^2 \cos^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \quad (10.236)$$

$$= \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \quad (10.237)$$

es decir,

$$\lim_{\substack{\theta \rightarrow 0 \\ \theta \rightarrow \pi}} \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) = \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \quad (10.238)$$

Observándose que, aunque las singularidades en $\theta = 0$ y $\theta = \pi$ fueron removidas, queda una singularidad en $r = 0$. Por lo tanto, para $r = 0$ la ecuación a programar es:

$$3 \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = f(r, \theta, \phi) \quad \text{para } r = 0. \quad (10.239)$$

donde se propone realizar un mallado de puntos radiales como ubicados en la mitad de un entero para superar la singularidad. Para el mallado de la variable polar, también se puede proponer los puntos ubicados en la mitad de un número entero. Es decir,

$$r_i = \left(i - \frac{1}{2} \right) \Delta r; \quad i = 1, 2, 3, \dots, N + 1. \quad (10.240)$$

$$\theta_j = \left(j - \frac{1}{2} \right) \Delta \theta; \quad j = 1, 2, 3, \dots, M + 1. \quad (10.241)$$

Usando el método de diferencias finitas,

$$3 \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta r^2} + \frac{2}{r_i^2} \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\Delta \phi^2} = f(i, j) \quad (10.242)$$

$$-\frac{6}{\Delta r^2} u_{i,j} + 3 \frac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j}}{\Delta r^2} - \frac{4u_{i,j}}{r_i^2 \Delta \phi^2} + \frac{2}{r_i^2} \frac{u_{i,j+1} + u_{i,j-1}}{\Delta \phi^2} = f(i, j) \quad (10.243)$$

$$-2 \left(\frac{3}{\Delta r^2} + \frac{2}{r_i^2 \Delta \phi^2} \right) u_{i,j} + 3 \frac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j}}{\Delta r^2} + \frac{2}{r_i^2} \frac{u_{i,j+1} + u_{i,j-1}}{\Delta \phi^2} = f(i, j) \quad (10.244)$$

reemplazando r_i , según la ecuación (10.240),

$$-2 \left(\frac{3}{\Delta r^2} + \frac{2}{\left(i - \frac{1}{2}\right)^2 \Delta r^2 \Delta \phi^2} \right) u_{i,j} + 3 \frac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j}}{\Delta r^2} + \frac{2}{\left(i - \frac{1}{2}\right)^2 \Delta r^2} \frac{u_{i,j+1} + u_{i,j-1}}{\Delta \phi^2} = f(i, j) \quad (10.245)$$

multiplicando por Δr^2 ,

$$-2 \left(3 + \frac{2}{\left(i - \frac{1}{2}\right)^2 \Delta \phi^2} \right) u_{i,j} + 3(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) + \frac{2}{\left(i - \frac{1}{2}\right)^2} \frac{u_{i,j+1} + u_{i,j-1}}{\Delta \phi^2} = \Delta r^2 f(i, j) \quad (10.246)$$

dando el valor a $i = 1$, se obtiene:

$$-2 \left(3 + \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 \Delta \phi^2} \right) u_{1,j} + 3(u_{2,j} + u_{0,j}) + \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} \frac{u_{1,j+1} + u_{1,j-1}}{\Delta \phi^2} = \Delta r^2 f(1, j) \quad (10.247)$$

$$-2 \left(3 + \frac{8}{\Delta \phi^2} \right) u_{1,j} + 3(u_{2,j} + u_{0,j}) + \frac{8}{\Delta \phi^2} (u_{1,j+1} + u_{1,j-1}) = \Delta r^2 f(1, j) \quad (10.248)$$

En esta ecuación se debe dar información del valor de la condición de frontera $u_{0,j}$. Estos valores de condición de frontera internos, pueden encontrarse usando condiciones de simetría (ver Journal of Numerical Methods for Partial Differential Equations, vol:18, No.1, 2002, pp:56-58) $u_{0,j} = (-1)^n u_n(\Delta r/2, j) \approx (-1)^n u_{1,j}$. Por lo tanto,

$$u_{0,j} \approx -u_{1,j} \quad (10.249)$$

reemplazando, se obtiene la ecuación en diferencias finitas cuando $r \rightarrow 0$ y para $i = 1$:

$$-2 \left(3 + \frac{8}{\Delta \phi^2} \right) u_{1,j} + 3(u_{2,j} - u_{1,j}) + \frac{8}{\Delta \phi^2} (u_{1,j+1} + u_{1,j-1}) = \Delta r^2 f(1, j), \quad \text{para } r \rightarrow 0 \quad (10.250)$$

Ahora, para $r \neq 0$, es decir con $i = 2, 3, 4, \dots$, se retoma la ecuación (10.232),

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) = f(r, \theta, \phi) \quad (10.251)$$

realizando las derivadas,

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial T}{\partial \theta} = f(r, \theta, \phi) \quad (10.252)$$

usando la aproximación de diferencias finitas,

FALTA TERMINAR

Tema No. 11

Ecuación de difusión para el calor

La ecuación de difusión sin fuentes de energía, está dada por la expresión:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{\alpha} \nabla^2 T \quad (11.1)$$

donde α contiene la información de la difusividad térmica y la capacidad calórica del material,

$$\alpha = \frac{\kappa}{\rho c_p} \quad (11.2)$$

11.1 Ecuación de difusión unidimensional

Considere un problema de difusión en una región finita $0 \leq x \leq L$ dada por la ecuación

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \ell, \quad t > 0 \quad (11.3)$$

donde la región $0 \leq x \leq L$ es dividida en M partes iguales, tal que:

$$\Delta x = \frac{L}{M} \quad (11.4)$$

Discretizando la ecuación (11.3) usando el método de diferencias finitas,

$$\frac{T^{k+1}(i) - T^k(i)}{\Delta t} = \frac{1}{\alpha} \frac{T^k(i+1) - 2T^k(i) + T^k(i-1)}{\Delta x^2} \quad (11.5)$$

donde $T(x, t) = T^k(i)$. Despejando la temperatura para un tiempo posterior,

$$T^{k+1}(i) - T^k(i) = \frac{\Delta t}{\alpha} \frac{T^k(i+1) - 2T^k(i) + T^k(i-1)}{\Delta x^2} \quad (11.6)$$

$$T^{k+1}(i) = T^k(i) + \frac{\Delta t}{\alpha} \frac{T^k(i+1) - 2T^k(i) + T^k(i-1)}{\Delta x^2} \quad (11.7)$$

$$T^{k+1}(i) = T^k(i) + \frac{\Delta t}{\alpha \Delta x^2} (T^k(i+1) - 2T^k(i) + T^k(i-1)) \quad (11.8)$$

definiendo $r = \frac{\Delta t}{\alpha \Delta x^2}$,

$$T^{k+1}(i) = rT^k(i+1) + (1-2r)T^k(i) + rT^k(i-1) \quad (11.9)$$

ecuación válida para $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ y $i = 1, 2, 3, \dots, M-1$.

Los problemas transitorios surgen del efecto instantáneo de una fuente de calor en un punto, línea o plano. Para una unidimensión, la ecuación del calor es,

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} \quad (11.10)$$

Para realizar una fácil solución, se debe de adimensionar la ecuación. Realizando los cambios de variable:

$$\tau = \frac{t}{\alpha \ell^2} \quad \text{y} \quad \chi = \frac{x}{\ell} \quad (11.11)$$

se obtiene:

$$\frac{1}{\alpha \ell^2} \frac{\partial T(\tau, \chi)}{\partial \tau} = \frac{1}{\alpha \ell^2} \frac{\partial^2 T(\tau, \chi)}{\partial \chi^2} \quad (11.12)$$

es decir,

$$\frac{\partial T(\tau, \chi)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 T(\tau, \chi)}{\partial \chi^2} \quad (11.13)$$

Usando la condición de frontera $x = 0$, $\chi = 0$, la solución para $X(\chi)$ es igual a:

$$X(\chi) = A \sin(k\chi) \quad (11.14)$$

y con la condición de frontera $x = \ell$, entonces $\chi = 1$, la solución para $X(\chi)$ es igual a:

$$X_n(\chi) = A_n \sin(n\pi\chi) \quad (11.15)$$

Ahora, la solución temporal es:

$$T(\tau) = B e^{k^2 \tau} \quad (11.16)$$

y como $k = n\pi$, se obtiene:

$$T(\tau) = Be^{n^2\pi^2\tau} \quad (11.17)$$

y la solución general es:

$$T(\chi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n\pi\chi) e^{n^2\pi^2\tau} \quad (11.18)$$

Suponiendo que en $t = 0$, $T(\chi, 0) = f(\chi)$, los coeficientes que satisfacen esta condición inicial son:

$$T(\chi, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n\pi\chi) = f(\chi) \quad (11.19)$$

Usando la propiedad de ortogonalidad de las funciones trigonométricas, se tiene:

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n\pi\chi) \sin(m\pi\chi) = f(\chi) \sin(m\pi\chi) \quad (11.20)$$

integrando

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \int_0^1 \sin(n\pi\chi) \sin(m\pi\chi) d\chi = \int_0^1 f(\chi) \sin(m\pi\chi) d\chi \quad (11.21)$$

como:

$$\int_0^{\ell} \sin(nx) \sin(mx) dx = \frac{\ell}{2} \delta_{nm} \quad (11.22)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{\delta_{nm}}{2} = \int_0^1 f(\chi) \sin(m\pi\chi) d\chi \quad (11.23)$$

$$B_m = 2 \int_0^1 f(\chi) \sin(m\pi\chi) d\chi \quad (11.24)$$

sustituyendo la constante B_m en (11.18),

$$T(\chi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[2 \int_0^1 f(\chi) \sin(m\pi\chi) d\chi \right] \sin(n\pi\chi) e^{n^2\pi^2\tau} \quad (11.25)$$

donde $f(\chi)$ es la temperatura en el tiempo $t = 0$. Si la función $f(\chi) = T_0$, se tiene:

$$\int_0^1 T_0 \sin(n\pi\chi) d\chi = T_0 \int_0^1 \sin(n\pi\chi) d\chi \quad (11.26)$$

$$= -\frac{T_0}{n\pi} \cos(n\pi\chi) \Big|_0^1 \quad (11.27)$$

$$= \frac{T_0}{n\pi} (1 - \cos(n\pi)) \quad (11.28)$$

$$= \frac{T_0}{n\pi} (1 - (-1)^n) \quad (11.29)$$

reemplazando en la solución general (11.25),

$$T(\chi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[2 \frac{T_0}{n\pi} (1 - (-1)^n) \right] \sin(n\pi\chi) e^{n^2\pi^2\tau} \quad (11.30)$$

Se observa que para n par, la distribución de temperatura es igual a cero, mientras que si n es impar $(1 - (-1)^n) = 2$. Por lo tanto, redefiniendo los índices, se tiene:

$$T(\chi, \tau) = \frac{4T_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin((2n-1)\pi\chi)}{(2n-1)} e^{-(2n-1)^2\pi^2\tau} \quad (11.31)$$

Obteniendo una solución aproximada, la expansión de la ecuación (11.31) es:

$$T(\chi, \tau) = \frac{4T_0}{\pi} \left[\sin(\pi\chi) e^{-\pi^2\tau} + \frac{\sin(3\pi\chi)}{3} e^{-9\pi^2\tau} + \dots \right] \quad (11.32)$$

La relación entre el primer término y el segundo es:

$$\frac{\frac{\sin(3\pi\chi)}{3} e^{-9\pi^2\tau}}{\sin(\pi\chi) e^{-\pi^2\tau}} = \frac{1}{3} \frac{|\sin(3\pi\chi)|}{|\sin(\pi\chi)|} e^{-8\pi^2\tau} \quad (11.33)$$

usando la desigualdad $|\sin(nx)| \leq n|\sin(x)|$, se obtiene la desigualdad:

$$\frac{\frac{\sin(3\pi\chi)}{3} e^{-9\pi^2\tau}}{\sin(\pi\chi) e^{-\pi^2\tau}} \leq e^{-8\pi^2\tau} \quad (11.34)$$

ahora, si $\tau \geq \frac{1}{\pi^2}$,

$$\frac{\frac{\sin(3\pi\chi)}{3}e^{-9\pi^2\tau}}{\sin(\pi\chi)e^{-\pi^2\tau}} \leq e^{-8} \quad (11.35)$$

es decir,

$$\frac{\frac{\sin(3\pi\chi)}{3}e^{-9\pi^2\tau}}{\sin(\pi\chi)e^{-\pi^2\tau}} \leq 0.00034 \quad (11.36)$$

indicando que el primer término es el más relevante y la solución *puede* aproximarse a:

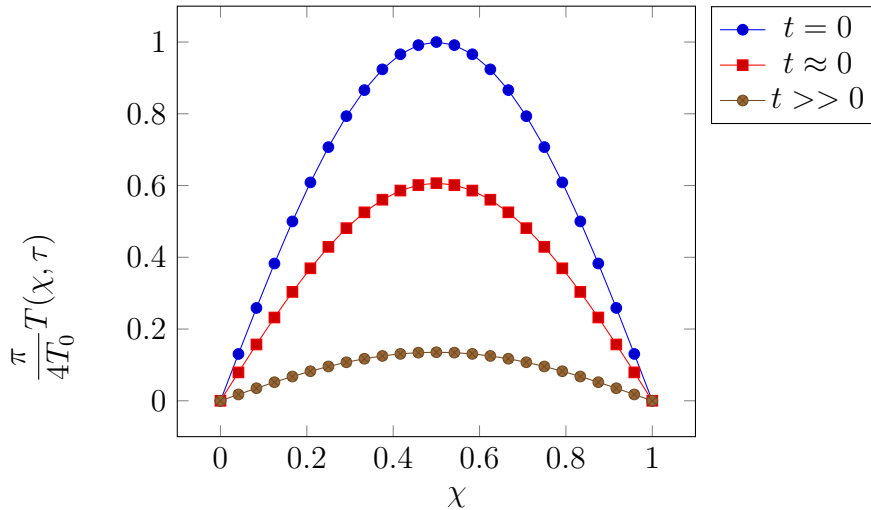
$$T(\chi, \tau) \approx \frac{4T_0}{\pi} \sin(\pi\chi) e^{-\pi^2\tau} \quad \text{para } \tau \geq \frac{1}{\pi^2} \quad (11.37)$$

Si la temperatura esta en el centro de una barilla, es decir en $x = \frac{\ell}{2}$, $\chi = \frac{1}{2}$ en un tiempo $\tau \geq \frac{1}{\pi^2}$, se obtiene que su perfil de temperatura es:

$$T(\chi, \tau) \approx \frac{4T_0}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) e^{-1} \quad (11.38)$$

$$T(\chi, \tau) \approx \frac{4}{e\pi} T_0 \rightarrow T(\chi, \tau) \approx 0.47 T_0 \quad (11.39)$$

indicando que la temperatura ha disminuido en un 47% de la temperatura inicial T_0 . La siguiente Figura muestra las gráficas para diferentes tiempos de la ecuación aproximada (11.37), normalizada a la unidad.



Problema 11.1 Considere una barra delgada de 10 cm de largo. En $t = 0$, la temperatura de la barra es cero y las condiciones de frontera se fijan para todos los tiempos en:

$$T(x = 0) = 100^{\circ}\text{C} \text{ y} \quad (11.40)$$

$$T(x = 10) = 50^{\circ}\text{C} \quad (11.41)$$

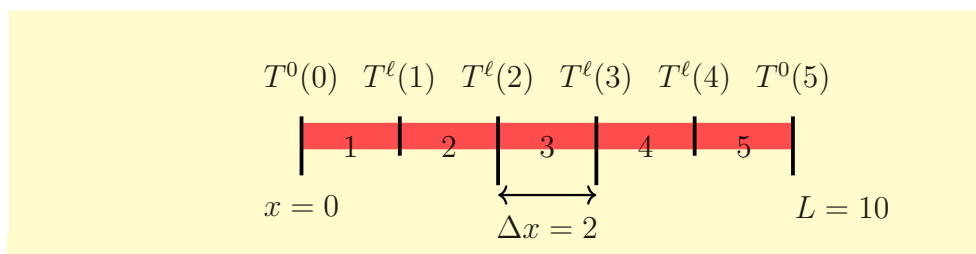
considere $\Delta x = 2$ cm, $\Delta t = 0.1$ s y $\kappa = 0.835$ para determinar la distribución de temperatura en la barra a medida que transcurre el tiempo.

Solución:

La ecuación que describe el flujo de temperatura a través de la barra y dependiente del tiempo es:

$$\kappa \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (11.42)$$

como el $\Delta x = 2$, la barra de 10 cm es dividida en 5 partes, como lo muestra la siguiente Figura:



En la Figura, los superíndices de valor cero en las temperaturas $T^0(0)$ y $T^0(5)$ indican las condiciones iniciales en el tiempo $t = 0$, mientras que en los otros puntos $T^{\ell}(i)/i = 1, 2, 3, 4$, el superíndice ℓ indica que el tiempo varía en cada paso Δt . Por ejemplo: para $\Delta t = 0.1$, el superíndice toma el valor de $\ell = 0$; para $\Delta t = 0.2$, $\ell = 1$; y así sucesivamente.

- La condición inicial: la temperatura de la barra es cero, indica que en $t = 0$ las temperaturas de los puntos internos son:

$$T^0(1) = T^0(2) = T^0(3) = T^0(4) = 0 \quad (11.43)$$

- Las condiciones de frontera en los extremos de la barra, en $t = 0$ son:

$$T^0(0) = 100 \quad (11.44)$$

$$T^0(5) = 50 \quad (11.45)$$

y como éstas condiciones de frontera se mantienen en el tiempo, también, entonces se cumple que:

$$T^{\ell}(0) = 100, \quad \text{para todos los valores de } \Delta t \quad (11.46)$$

$$T^{\ell}(5) = 50, \quad \text{para todos los valores de } \Delta t \quad (11.47)$$

La ecuación en diferencias finitas a resolver es:

$$T^{\ell+1}(i) = T^{\ell}(i) + \lambda \left[T^{\ell}(i+1) - 2T^{\ell}(i) + T^{\ell}(i-1) \right] \quad (11.48)$$

donde

$$\lambda = \frac{\kappa \Delta t}{(\Delta x)^2} = \frac{(0.835)(0.1)}{2^2} \approx 0.0209 \quad (11.49)$$

– Para $\ell = 0$ ($\Delta t = 0.1$), la ecuación (11.48) toma la forma:

$$T^1(i) = T^0(i) + 0.0209 \left[T^0(i+1) - 2T^0(i) + T^0(i-1) \right] \quad (11.50)$$

* Para $i = 1 \rightarrow$,

$$\begin{aligned} T^1(1) &= T^0(1) + 0.0209 \left[T^0(2) - 2T^0(1) + T^0(0) \right] \\ T^1(1) &= 0 + 0.0209 \left[0 - 2(0) + 100 \right] \\ T^1(1) &= 2.09 \end{aligned} \quad (11.51)$$

* Para $i = 2 \rightarrow$,

$$\begin{aligned} T^1(2) &= T^0(2) + 0.0209 \left[T^0(3) - 2T^0(2) + T^0(1) \right] \\ T^1(2) &= 0 + 0.0209 \left[0 - 2(0) + 0 \right] \\ T^1(2) &= 0 \end{aligned} \quad (11.52)$$

* Para $i = 3 \rightarrow$,

$$\begin{aligned} T^1(3) &= T^0(3) + 0.0209 \left[T^0(4) - 2T^0(3) + T^0(2) \right] \\ T^1(3) &= 0 + 0.0209 \left[0 - 2(0) + 0 \right] \\ T^1(3) &= 0 \end{aligned} \quad (11.53)$$

* Para $i = 4 \rightarrow$,

$$\begin{aligned} T^1(4) &= T^0(4) + 0.0209 \left[T^0(5) - 2T^0(4) + T^0(3) \right] \\ T^1(4) &= 0 + 0.0209 \left[50 - 2(0) + 0 \right] \\ T^1(4) &= 1.045 \end{aligned} \quad (11.54)$$

– Para $\ell = 1$ ($\Delta t = 0.2$), la ecuación (11.48) toma la forma:

$$T^2(i) = T^1(i) + 0.0209 \left[T^1(i+1) - 2T^1(i) + T^1(i-1) \right] \quad (11.55)$$

* Para $i = 1 \rightarrow :$

$$\begin{aligned} T^2(1) &= T^1(1) + 0.0209 \left[T^1(2) - 2T^1(1) + T^1(0) \right] \\ T^2(1) &= 2.09 + 0.0209 \left[0 - 2(2.09) + 100 \right] \\ T^2(1) &= 4.093 \end{aligned} \quad (11.56)$$

* Para $i = 2 \rightarrow :$

$$\begin{aligned} T^2(2) &= T^1(2) + 0.0209 \left[T^1(3) - 2T^1(2) + T^1(1) \right] \\ T^2(2) &= 0 + 0.0209 \left[0 - 2(0) + 2.09 \right] \\ T^2(2) &= 0.044 \end{aligned} \quad (11.57)$$

* Para $i = 3 \rightarrow :$

$$\begin{aligned} T^2(3) &= T^1(3) + 0.0209 \left[T^1(4) - 2T^1(3) + T^1(2) \right] \\ T^2(3) &= 0 + 0.0209 \left[1.045 - 2(0) + 0 \right] \\ T^2(3) &= 0.022 \end{aligned} \quad (11.58)$$

* Para $i = 4 \rightarrow :$

$$\begin{aligned} T^2(4) &= T^1(4) + 0.0209 \left[T^1(5) - 2T^1(4) + T^1(3) \right] \\ T^2(4) &= 1.045 + 0.0209 \left[50 - 2(1.045) + 0 \right] \\ T^2(4) &= 2.046 \end{aligned} \quad (11.59)$$

	$T^0(0)$	$T^\ell(1)$	$T^\ell(2)$	$T^\ell(3)$	$T^\ell(4)$	$T^0(5)$
		1	2	3	4	5
$t = 0.0 \rightarrow$	100	0.000	0.000	0.000	0.000	50
$\Delta t = 0.1 \rightarrow \ell = 0$	100	2.090	0.000	0.000	1.045	50
$\Delta t = 0.2 \rightarrow \ell = 1$	100	4.093	0.044	0.022	2.046	50

Los resultados numéricos son:

Δt	$T^\ell(0)$	$T^\ell(1)$	$T^\ell(2)$	$T^\ell(3)$	$T^\ell(4)$	$T^\ell(5)$
0.0	100.0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	50.0
0.1	100.0	2.087500	0.043577	0.000910	1.043769	50.0
0.2	100.0	4.088757	0.127129	0.025314	2.044470	50.0
0.3	100.0	6.008204	0.247771	0.072108	3.004369	50.0
0.4	100.0	7.850034	0.402801	0.140222	3.925613	50.0
0.5	100.0	9.618204	0.589692	0.228625	4.810242	50.0

Los resultados numéricos se obtuvieron usando el siguiente programa:

```

1      PROGRAM PARABOLICA
2      INTEGER,PARAMETER :: N=100
3      INTEGER :: I,ND,J
4      REAL,DIMENSION(0:N) :: U,UANT
5      REAL :: T,DELTAT,DELTAX,TEMPIZQ,TEMPDER,TEMPBAR,LAMBDA,KAPPA
6      OPEN(2,FILE='DATOS.DAT',STATUS='OLD')
7      READ(2,*)KAPPA,DELTAT,DELTAX,TEMPIZQ,TEMPDER,TEMPBAR,ND
8      CLOSE (2)
9      U(0) = TEMPIZQ ! temperatura en x=0
10     U(ND) = TEMPDER ! temperatura en x=L
11     UANT(0)=U(0)
12     UANT(ND)=U(ND)
13     T = 0.0
14     DO I=1,ND-1
15     UANT(I) = TEMPBAR ! temperatura inicial de la barra.
16     ENDDO
17 !     IMPRIME VALORES DE LAS CONSTANTES
18     LAMBDA = (KAPPA*DELTAT)/(DELTAX)**2
19     WRITE(*,*) 'LAMBDA=',LAMBDA
20     WRITE(*,*) 'KAPPA=',KAPPA
21     WRITE(*,*) 'DELTAX=',DELTAX
22     WRITE(*,*) 'DELTAT=',DELTAT
23     WRITE(*,*)
24 !     imprime las resultados iniciales.
25     WRITE(*,100)T,(UANT(I),I=0,ND)
26 !     COMIENZO DEL CICLO
27     DO J=1,30
28     T = T + DELTAT
29     DO I=1,ND-1
30     U(I) = UANT(I) + LAMBDA*(UANT(I+1) - 2.0*UANT(I) + UANT(I-1))
31     UANT(I) = U(I)
32     END DO
33 !     IMPRIME RESULTADOS
34 !     DO I=0,ND
35     WRITE(*,100)T,(UANT(I),I=0,ND)
36 !     END DO
37 100 FORMAT(F5.2,2X,6(2X,F10.6))
38     END DO
39     END PROGRAM PARABOLICA

```

11.2 Ecuación de difusión bidimensional

La ecuación (11.1) en coordenadas cartesianas y bidimensional es:

$$\alpha \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (11.60)$$

realizando la discretización de la ecuación:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T^{k+1}(i, j) - T^k(i, j)}{\Delta t} \quad (11.61)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T^k(i+1, j) - 2T^k(i, j) + T^k(i-1, j)}{(\Delta x)^2} \quad (11.62)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{T^k(i, j+1) - 2T^k(i, j) + T^k(i, j-1)}{(\Delta y)^2} \quad (11.63)$$

reemplazando las ecuaciones (11.61), (11.62) y (11.63) en (11.72),

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{\Delta t} \left(T^{k+1}(i, j) - T^k(i, j) \right) &= \frac{T^k(i+1, j) - 2T^k(i, j) + T^k(i-1, j)}{(\Delta x)^2} \\ &+ \frac{T^k(i, j+1) - 2T^k(i, j) + T^k(i, j-1)}{(\Delta y)^2} \end{aligned}$$

reorganizando,

$$\begin{aligned} T^{k+1}(i, j) - T^k(i, j) &= \frac{\Delta t}{\alpha(\Delta x)^2} \left[T^k(i+1, j) - 2T^k(i, j) + T^k(i-1, j) \right] \\ &+ \frac{\Delta t}{\alpha(\Delta y)^2} \left[T^k(i, j+1) - 2T^k(i, j) + T^k(i, j-1) \right] \end{aligned} \quad (11.64)$$

entonces, para una placa en forma rectangular, se obtiene la ecuación en diferencias finitas:

$$\begin{aligned} T^{k+1}(i, j) &= T^k(i, j) + \frac{\Delta t}{\alpha(\Delta x)^2} \left[T^k(i+1, j) - 2T^k(i, j) + T^k(i-1, j) \right] \\ &+ \frac{\Delta t}{\alpha(\Delta y)^2} \left[T^k(i, j+1) - 2T^k(i, j) + T^k(i, j-1) \right] \end{aligned} \quad (11.65)$$

definiendo las variables:

$$\lambda_x = \frac{\Delta t}{\alpha(\Delta x)^2} \quad (11.66)$$

$$\lambda_y = \frac{\Delta t}{\alpha(\Delta y)^2} \quad (11.67)$$

se obtiene:

$$T^{k+1}(i, j) = T^k(i, j) + \lambda_x T^k(i+1, j) - 2\lambda_x T^k(i, j) + \lambda_x T^k(i-1, j) + \lambda_y T^k(i, j+1) - 2\lambda_y T^k(i, j) + \lambda_y T^k(i, j-1) \quad (11.68)$$

reuniendo términos semejantes,

$$T^{k+1}(i, j) = \lambda_x \left[T^k(i+1, j) + T^k(i-1, j) \right] + \lambda_y \left[T^k(i, j+1) + T^k(i, j-1) \right] + \left[1 - 2(\lambda_x + \lambda_y) \right] T^k(i, j) \quad (11.69)$$

y para un rectángulo cuadrado en donde $\lambda_x = \lambda_y = \lambda$, se obtiene la siguiente expresión:

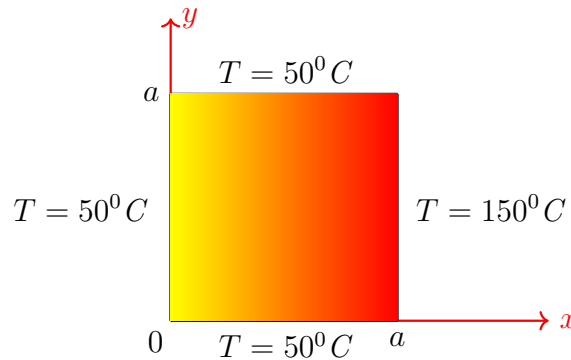
$$T^{k+1}(i, j) = \lambda \left[T^k(i+1, j) + T^k(i-1, j) + T^k(i, j+1) + T^k(i, j-1) \right] + (1 - 4\lambda) T^k(i, j) \quad (11.70)$$

donde,

$$\lambda = \frac{\kappa}{\rho c_p} \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \quad (11.71)$$

con κ la conductividad térmica, ρ densidad del material y c_p la capacidad calórica del material en estudio. La estabilidad de la ecuación (11.69) se garantiza cuando se cumple la desigualdad: $1 - 2(\lambda_x + \lambda_y) \geq 0$, mientras que para la forma rectangular cuadrada, ecuación (11.73), se garantiza con la desigualdad: $1 - 4\lambda \geq 0$.

Problema 11.2 Considere una lámina rectangular cuadrada bidimensional, la cual contiene una conductividad térmica de $50 \frac{W}{m \cdot K}$. Si inicialmente la placa se encuentra a una temperatura de $20^\circ C$, analice la distribución de calor en la placa si ésta se encuentra sometida a diferentes temperaturas como lo muestra la Figura:



considere $\Delta x = 0.1 \text{ cm}$, $\Delta t = 0.1 \text{ s}$.

Solución:

La ecuación que describe el flujo de temperatura a través de la barra y dependiente del tiempo es:

$$\alpha \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (11.72)$$

Solución analítica:

La solución anítica de esta ecuación que puede resolverse usando el método de separación de variables.

Solución numérica:

Para un rectangulo cuadrado la siguiente expresión describe la distribución de la temperatura en la placa::

$$T^{k+1}(i, j) = \lambda \left[T^k(i+1, j) + T^k(i-1, j) + T^k(i, j+1) + T^k(i, j-1) \right] + (1-4\lambda)T^k(i, j) \quad (11.73)$$

donde,

$$\lambda = \frac{\kappa}{\rho c_p} \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \quad (11.74)$$

con κ la conductividad térmica, ρ densidad del material y c_p la capacidad calórica del material en estudio. La estabilidad de la ecuación (11.73), se garantiza con la desigualdad: $1-4\lambda \geq 0$. El resultado de la distribución de temperatura, para cada uno de los pasos temporales es:

• **TIEMPO = 0.00**

50.0000000	50.0000000	50.0000000	50.0000000	50.0000000	100.000000
50.0000000	20.0000000	20.0000000	20.0000000	20.0000000	150.000000
50.0000000	20.0000000	20.0000000	20.0000000	20.0000000	150.000000
50.0000000	20.0000000	20.0000000	20.0000000	20.0000000	150.000000
50.0000000	20.0000000	20.0000000	20.0000000	20.0000000	150.000000
50.0000000	50.0000000	50.0000000	50.0000000	50.0000000	100.000000

• **TIEMPO = 1.00**

50.0000000	50.0000000	50.0000000	50.0000000	50.0000000	100.000000
50.0000000	37.5781250	32.8906250	31.2207031	73.8134766	150.000000
50.0000000	30.3125000	23.9843750	21.9921875	64.0332031	150.000000
50.0000000	31.2500000	25.6250000	23.9843750	64.1406250	150.000000
50.0000000	35.0000000	31.2500000	30.3125000	62.5781250	150.000000
50.0000000	50.0000000	50.0000000	50.0000000	50.0000000	100.000000

después de 33 ciclos de tiempo, la distribución de la temperatura en la placa converge a los siguientes datos de temperatura:

- | | | | | | |
|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| 50.0000000 | 50.0000000 | 50.0000000 | 50.0000000 | 50.0000000 | 100.000000 |
| 50.0000000 | 54.5454178 | 60.9848022 | 72.3484497 | 95.4545288 | 150.000000 |
| 50.0000000 | 57.1969032 | 67.0453644 | 82.9544754 | 109.469666 | 150.000000 |
| 50.0000000 | 57.1968880 | 67.0453491 | 82.9544601 | 109.469650 | 150.000000 |
| 50.0000000 | 54.5453949 | 60.9847679 | 72.3484192 | 95.4545135 | 150.000000 |
| 50.0000000 | 50.0000000 | 50.0000000 | 50.0000000 | 50.0000000 | 100.000000 |

El programa usado para obtener los datos de la distribución de temperatura en la placa es el siguiente:

```

1      PROGRAM PARABOLICA
2      INTEGER,PARAMETER :: N=999
3      INTEGER :: I,ND,J,K,NAPROX
4      REAL,DIMENSION(0:N,0:N) :: U,UANT
5      REAL :: T,DELTAT,DELTAX,KAPPA,RHO,CP,TEMPIZQ,TEMPDER,TEMPINF
6      REAL :: TEMPSUP,TEMPPLACA,DELTA,COND
7      OPEN(2,FILE='DATOS2D.DAT',STATUS='OLD')
8      READ(2,*)KAPPA,RHO,CP,DELTAT,DELTAX,NAPROX
9      READ(2,*)ND,TEMPIZQ,TEMPDER,TEMPINF,TEMPSUP,TEMPPLACA
10     CLOSE (2)
11     ALPHA = KAPPA/(RHO*CP)
12     DELTA = (DELTAT*ALPHA)/(DELTAX**2)
13     COND = 1.0 - 4.0*DELTA
14     IF(COND.LT.0)GO TO 30
15     APROX = 10.0*(-NAPROX)
16 !    TEMPERATURAS EN LOS LADOS DE LA PLACA:
17     DO J=1,ND-1
18         U(0,J) = TEMPIZQ ! TEMPERATURA EN X=0
19         UANT(0,J) = U(0,J)
20     END DO
21     DO J=1,ND-1
22         U(ND,J) = TEMPDER ! TEMPERATURA EN X=a
23         UANT(ND,J) = U(ND,J)
24     END DO
25     DO I=1,ND-1
26         U(I,0) = TEMPINF ! TEMPERATURA EN Y=0
27         UANT(I,0) = U(I,0)
28     END DO
29     DO I=1,ND-1
30         U(I,ND) = TEMPSUP ! TEMPERATURA EN Y=b
31         UANT(I,ND) = U(I,ND)
32     END DO
33 !    TEMPERATURAS EN LAS ESQUINAS DE LA PLACA: SE APROXIMAN COMO EL
34 !    PROMEDIO DE LAS DOS TEMPERATURAS DE LOS LADOS:
35     U(0,0) = ( TEMPIZQ + TEMPINF )/2.0
36     UANT(0,0) = U(0,0)
37     U(0,ND) = ( TEMPIZQ + TEMPSUP )/2.0
38     UANT(0,ND) = U(0,ND)
39     U(ND,ND) = ( TEMPSUP + TEMPDER )/2.0
40     UANT(ND,ND) = U(ND,ND)
41     U(ND,0) = ( TEMPINF + TEMPDER )/2.0
42     UANT(ND,0) = U(ND,0)
43 !    COPIA LA TEMPERATURA INICIAL DE LA PLACA:
44     DO I=1,ND-1
45         DO J=1,ND-1
46             UANT(I,J) = TEMPPLACA
47         END DO
48     END DO

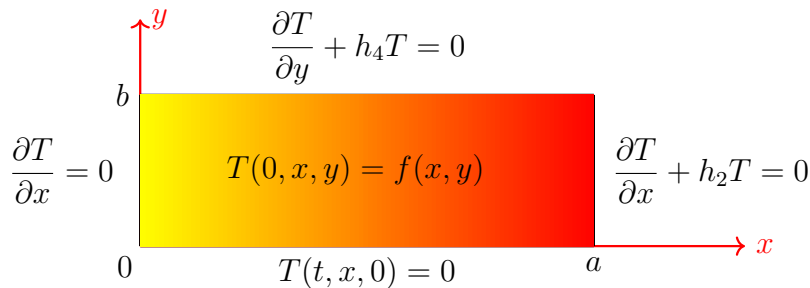
```

```

49 !   imprime las resultados iniciales , en t=0.
50     T = 0.0
51     WRITE(*,100)T
52     DO J=ND,0,-1
53         WRITE(*,*)(UANT(I,J),I=0,ND)
54     END DO
55     WRITE(*,*)
56 !   COMIENZO DEL CICLO
57     DO K=1,999
58     IF (K.EQ.999)THEN
59         WRITE(*,*) 'EL CALCULO NO CONVERGE'
60         EXIT
61     ELSE
62         T = T + DELTAT
63     END IF
64     DO I=1,ND-1
65         DO J=1,ND-1
66             U(I,J) = DELTA*( UANT(I+1,J) + UANT(I-1,J) + UANT(I,J+1) + \&
67                 UANT(I,J-1) ) + (1.0 -4.0*DELTA)*UANT(I,J)
68             IF ( (ABS( UANT(I,J)-U(I,J) )/U(I,J)).LE.APROX )GO TO 10
69             UANT(I,J) = U(I,J)
70         END DO
71     END DO
72 !   IMPRIME RESULTADOS
73     WRITE(*,100)T
74     DO J=ND,0,-1
75         WRITE(*,*)(UANT(I,J),I=0,ND)
76     END DO
77     WRITE(*,*)
78     END DO
79 !   IMPRIME EL ULTIMO RESULTADO FINAL
80 10 WRITE(*,*) 'ALCANZO EL ESTADO ESTACIONARIO'
81     WRITE(*,*)
82     GO TO 20
83 30 WRITE(*,*) '*****'
84     WRITE(*,*) 'REVISAR DATOS DE ENTRADA, EL SISTEMA NO ES ESTABLE'
85     WRITE(*,*) '*****'
86 20 WRITE(*,*) 'NORMAL TERMINACION'
87 100 FORMAT(2X, 'TIEMPO = ',F6.2)
88     END PROGRAM PARABOLICA

```

Problema 11.3 Una región rectangular $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$ inicialmente se encuentra a una temperatura $f(x, y)$. Para tiempos mayores que cero ($t > 0$), el lado $x = 0$ permanece aislado, en $y = 0$ la temperatura permanece igual a cero y en los bordes $x = a$ y $y = b$ el calor es disipado por convección a un medio que se encuentra a una temperatura de cero, como se ilustra en la Figura. Obtenga una expresión para la distribución de temperatura $T(t, x, y)$ para $t > 0$.



Solución

La ecuación a resolver es:

$$\alpha \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \quad \text{en } 0 < x < a, \quad 0 < y < b \quad (11.75)$$

con condiciones iniciales de:

$$T(0, x, y) = f(x, y) \quad \text{en } t = 0. \quad (11.76)$$

y con condiciones de frontera, para $t > 0$:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad \text{en } x = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial x} + h_2 T = 0 \quad \text{en } x = a \quad (11.77)$$

$$T(t, x, 0) = 0 \quad \text{en } y = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial y} + h_4 T = 0 \quad \text{en } y = b. \quad (11.78)$$

Usando el método de separación de variables, se propone una solución de la forma:

$$T(t, x, y) = \Gamma(t)X(x)Y(y) \quad (11.79)$$

reemplazando la solución propuesta, ecuación (11.79) en (11.75), se obtienen las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\frac{d^2 X(x)}{dx^2} + \beta^2 X(x) = 0 \quad (11.80)$$

con

$$\frac{dX(x)}{dx} = 0 \quad \text{en } x = 0; \quad (11.81)$$

$$\frac{dX(x)}{dx} + h_2 X(x) = 0 \quad \text{en } x = a. \quad (11.82)$$

y

$$\frac{d^2 Y(y)}{dy^2} + \gamma^2 Y(y) = 0 \quad (11.83)$$

con

$$T(t, x, 0) = 0 \quad \text{en } y = 0; \quad (11.84)$$

$$\frac{dT}{dy} + h_4 Y(y) = 0 \quad \text{en } y = b \quad (11.85)$$

y la solución temporal es dada por la expresión,

$$\Gamma(t) = e^{-\alpha(\beta^2 + \gamma^2)t} \quad (11.86)$$

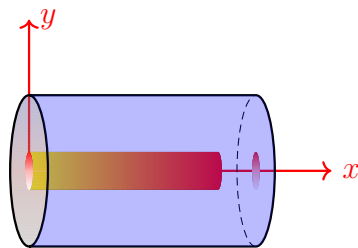
Problema 11.4 Encuentre la distribución de temperatura de una placa de aluminio (Al) de área de $2m \times 2m$, de coeficiente de transmisión de calor de convección de 25, densidad $2702 \frac{Kg}{m^3}$, conductividad térmica igual a $237 \frac{W}{m \cdot K}$. La placa inicialmente se encuentra a una temperatura de 330 K y la temperatura exterior es de 300 K. Las condiciones de borde de la placa son:

$$\begin{aligned} T_{BS} &= 860 \text{ K}, & T_{BI} &= 420 \text{ K} \\ T_{LD} &= 480 \text{ K}, & T_{LI} &= 560 \text{ K} \end{aligned}$$

donde los subíndices indican: BS: borde superior, BI: borde izquierdo, LD: lado derecho, y LI: lado izquierdo. Usar 150, 500 y 1500 iteraciones para el tiempo.

Problema 11.5 Realizar el mismo procedimiento anterior con material de acero, donde $\rho = 7870 \frac{Kg}{m^3}$, $c_p = 447 \frac{J}{Kg \cdot K}$ y $\kappa = 80.2 \frac{W}{m \cdot K}$. Usar las mismas condiciones de borde del Aluminio.

Problema 11.6



Considere un varilla de longitud ℓ aislada mediante una capa adiabática cilíndrica como lo muestra la Figura. Inicialmente, la varilla se encuentra a una temperatura uniforme T_b y en instante dado, la varilla se somete a una temperatura T_0 en $x = 0$. Se desea determinar la distribución de temperatura en la varilla en función de la posición y del tiempo, así como la velocidad de transferencia de calor en la varilla.

Solución

La ecuación diferencial que proporciona la solución de la distribución de temperatura es:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \rightarrow \frac{\partial T(t, x)}{\partial t} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial^2 T(t, x)}{\partial x^2} \quad (11.87)$$

donde $\alpha = \frac{\rho c_p}{\kappa}$. Las condiciones de frontera del ejercicio son:

$$T(0, x) = T_b, \quad 0 < x \leq \ell \quad (11.88)$$

$$T(t, 0) = T_0, \quad t > 0 \quad (11.89)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=\ell} = 0, \quad t \geq 0. \quad (11.90)$$

Antes de aplicar cualquier método, se debe de adimensionar la ecuación diferencial parcial, realizando el siguiente cambio de variable:

$$\psi = \frac{T - T_0}{T_b - T_0}, \quad \xi = \frac{x}{\ell}, \quad \tau = \frac{t}{\alpha \ell^2} \quad (11.91)$$

realizando las sustituciones, se tiene:

$$\frac{\partial T(t, x)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial(\alpha \ell^2 \tau)} [(T_b - T_0)\psi + T_0] = \frac{(T_b - T_0)}{\alpha \ell^2} \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \quad (11.92)$$

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial^2 T(t, x)}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial^2 (T_b - T_0)\psi}{\partial(\ell \xi)^2} = \frac{(T_b - T_0)}{\alpha \ell^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} \quad (11.93)$$

sumando éstas últimas dos ecuaciones, se obtiene:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} \quad (11.94)$$

y se puede verificar que las condiciones de frontera toman la siguiente forma:

$$\psi(0, \xi) = 1, \quad 0 < \xi \leq 1 \quad (11.95)$$

$$\psi(\tau, 0) = 0, \quad \tau > 0 \quad (11.96)$$

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right|_{\xi=1} = 0, \quad \tau \geq 0. \quad (11.97)$$

La solución propuesta para la nueva ecuación diferencial es:

$$\psi(\tau, \xi) = F(\tau)G(\xi) \quad (11.98)$$

reemplazando,

$$G(\xi) \frac{\partial F(\tau)}{\partial \tau} = F(\tau) \frac{\partial^2 G(\xi)}{\partial \xi^2} \quad (11.99)$$

obteniendose,

$$\frac{1}{F(\tau)} \frac{\partial F(\tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{G(\xi)} \frac{\partial^2 G(\xi)}{\partial \xi^2} = -k^2 \quad (11.100)$$

con soluciones,

$$G(\xi) = A \cos(k\xi) + B \sin(k\xi) \quad (11.101)$$

$$F(\tau) = C e^{-k^2 \tau} \quad (11.102)$$

Según la condición de frontera (11.96), se obtiene la solución particular:

$$\psi(\tau, \xi) = Ae^{-k^2\tau} \sin(k\xi) \quad (11.103)$$

según la condición de frontera (11.97), se tiene que:

$$\left. \frac{\partial \psi(\tau, \xi)}{\partial \xi} \right|_{\xi=1} = \left. ke^{-k^2\tau} \cos(k\xi) \right|_{\xi=1} \quad (11.104)$$

$$ke^{-k^2\tau} \cos(k) = 0 \rightarrow k_n = \frac{(2n-1)}{2}\pi, \text{ con } n = 1, 2, 3, \dots \quad (11.105)$$

y la solución (11.103) toma la forma:

$$\psi(\tau, \xi) = \sum_{n=1} A_n e^{-k_n^2\tau} \sin(k_n\xi), \text{ con } k_n = \frac{(2n-1)}{2}\pi \quad (11.106)$$

La constante A_n puede encontrarse usando la condición de frontera (11.95), así:

$$\psi(0, \xi) = \sum_{n=1} A_n \sin(k_n\xi) = 1 \quad (11.107)$$

premultiplicando en ambos lados por $\sin(k_m\xi)$ e integrando en el intervalo $(0,1)$,

$$\sum_{n=1} A_n \int_0^1 \sin(k_n\xi) \sin(k_m\xi) dx = \int_0^1 \sin(k_m\xi) dx \quad (11.108)$$

$$\sum_{n=1} A_n \frac{1}{2} \delta_{nm} = -\frac{1}{k_m} \cos(k_m\xi) \Big|_0^1 \quad (11.109)$$

despejando la constante,

$$A_m = \frac{2}{k_m} \left[1 - \cos(k_m) \right] \quad (11.110)$$

y recordando que $k_m = \frac{(2m-1)}{2}\pi$, entonces

$$A_m = \frac{2}{k_m} \left[1 - \cos \left(m\pi - \frac{\pi}{2} \right) \right] \quad (11.111)$$

$$A_m = \frac{2}{k_m} \left[1 - \sin(m\pi) \right] \quad (11.112)$$

todos los valores de $\sin(m\pi)$ son ceros y de esta forma, la solución general, ecuación (11.106) es:

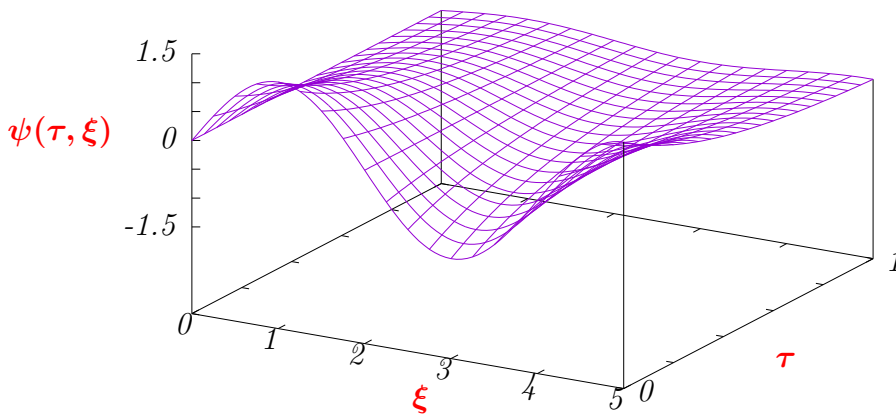
$$\psi(\tau, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{k_n} e^{-k_n^2 \tau} \sin(k_n \xi) \quad (11.113)$$

donde $k_n = \frac{(2n-1)}{2}\pi$. Si se tomara el primer término como predominante, se tendría la ecuación a graficar:

$$\psi(\tau, \xi) \approx 1.27 e^{-2.47\tau} \sin\left(\frac{\pi}{2}\xi\right) \quad (11.114)$$

Gráfico de la función:

$$\psi(\tau, \xi) = 1.27 e^{-2.47\tau} \sin\left(\frac{\pi}{2}\xi\right)$$



La velocidad de transferencia de calor de la barra durante un periodo dado, es dada por:

$$\dot{Q} = Aq \Big|_{z=0} = -A\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} \quad (11.115)$$

usando las variables adimensionales,

$$\dot{Q} = Aq|_{z=0} = -A\kappa(T_b - T_0) \frac{\partial \psi}{\partial(\ell\xi)} \Big|_{\xi=0} \quad (11.116)$$

$$\dot{Q} = -\frac{A\kappa(T_b - T_0)}{\ell} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} \quad (11.117)$$

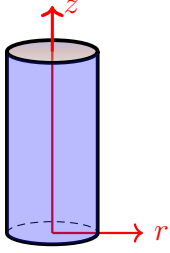
$$\dot{Q} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2A\kappa(T_0 - T_b)}{\ell} e^{-k_n^2 \tau} \cos(k_n \xi) \Big|_{\xi=0} \quad (11.118)$$

$$\dot{Q} = \frac{2A\kappa}{\ell} (T_0 - T_b) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-k_n^2 \tau} \quad (11.119)$$

donde A es el área transversal a la barilla.

11.3 Ecuación de difusión en cilíndricas

Problema 11.7



Un cilindro sólido de radio R , como lo muestra la Figura, se encuentra a una temperatura T_0 . En un instante dado, su superficie externa es mantenida a una temperatura T_1 . Se desea determinar el perfil de temperatura en el cilindro en cualquier instante T .

Solución

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (11.120)$$

condiciones de frontera:

$$T(o, r) = T_0, \quad 0 \leq r \leq R \quad (11.121)$$

$$T(t, R) = T_1, \quad t \geq 0 \quad (11.122)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0, \quad t > 0. \quad (11.123)$$

Para facilitar la solución, se realizan los siguientes cambios de variable:

$$\phi = \frac{T - T_1}{T_0 - T_1}, \quad \xi = \frac{r}{R}, \quad \tau = \frac{\kappa}{\rho c_p R^2} t \quad (11.124)$$

Reemplazando los cambios de variable en cada uno de los términos de la ecuación (11.120), se obtiene:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{(T_0 - T_1)}{R^2} \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \quad (11.125)$$

$$\kappa \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{\kappa}{R\xi} \frac{\partial}{\partial (R\xi)} \left(R\xi \frac{\partial}{\partial (R\xi)} (T_0 - T_1) \phi \right) \quad (11.126)$$

$$\kappa \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{\kappa (T_0 - T_1)}{R^2 \xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right) \quad (11.127)$$

sumando las ecuaciones (11.125) y (11.127),

$$\kappa \frac{(T_0 - T_1)}{R^2} \frac{\partial \phi}{\partial \tau} = \frac{\kappa (T_0 - T_1)}{R^2 \xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right) \quad (11.128)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} = \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right) \quad (11.129)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} = \frac{1}{\xi} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} \quad (11.130)$$

con condiciones de frontera,

$$\phi(o, \xi) = 1, \quad \phi(\tau, 1) = T_1, \quad \left. \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = 0. \quad (11.131)$$

La ecuación (11.130) puede solucionarse usando el método de separación de variable usando la propuesta:

$$\phi(\tau, \xi) = F(\tau)G(\xi) \quad (11.132)$$

Reemplazando la solución propuesta, se obtienen los siguientes resultados:

$$F(\tau) = Ae^{-n^2\tau} \quad (11.133)$$

$$\xi^2 \frac{d^2 G(\xi)}{d\xi^2} + \xi \frac{dG(\xi)}{d\xi} + n^2 \xi^2 G(\xi) = 0 \quad (11.134)$$

Comparando la ecuación (11.134) con la ecuación diferencial de Bessel,

$$x^2 \frac{d^2 G(x)}{dx^2} + x \frac{dG(x)}{dx} + (n^2 x^2 - m^2) G(x) = 0 \quad (11.135)$$

la cual tiene como solución,

$$G(x) = C_{mn} J_m \left(\frac{\alpha_{mn}}{a} x \right) \quad (11.136)$$

se observa que $m = 0$ y por lo tanto (11.134) tiene como solución,

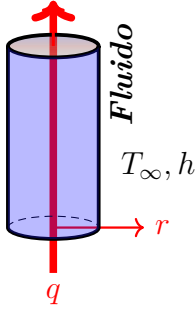
$$G(\xi) = C_{0n} J_0 \left(\frac{\alpha_{0n}}{a} \xi \right) \quad (11.137)$$

entonces, la solución de (11.130) es de la forma:

$$\phi(\tau, \xi) = \sum_n A_n e^{-n^2\tau} J_0 \left(\frac{\alpha_{0n}}{a} \xi \right) \quad (11.138)$$

Para calcular los valores que debe de tener n y la constante A_n , se aplican las condiciones de frontera.

Problema 11.8



Un cilindro sólido de radio R , inicialmente se encuentra a una temperatura T_i . Una corriente eléctrica atraviesa por el centro del cilindro generando una fuente de calor q . El cilindro se enfría en la superficie por convección. Determine la distribución de temperatura en función del tiempo. Asuma conducción unidimensional radial y propiedades constantes.

Solución

La ecuación de difusión sin fuentes de energía, está dada por la expresión:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \nabla^2 T + q \quad (11.139)$$

y en términos de la difusividad térmica $\alpha = \frac{\kappa}{\rho c_p}$,

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla^2 T + \frac{q}{\kappa} \quad (11.140)$$

Ahora, como no existe dependencia angular, ni del eje z , la ecuación se reduce a:

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{q}{\kappa} \quad (11.141)$$

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{q}{\kappa} \quad (11.142)$$

realizando el siguiente cambio de variable,

$$\Theta(r, t) = T(r, t) - T_\infty \quad (11.143)$$

la ecuación a resolver es:

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial \Theta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Theta}{\partial r} + \frac{q}{\kappa} \quad (11.144)$$

con las siguientes condiciones de frontera:

$$1. \quad \frac{\partial \Theta(0, t)}{\partial r} = 0 \rightarrow \text{en } r = 0 \rightarrow \Theta(0, t) \text{ es finita.} \quad (11.145)$$

$$2. \quad -\kappa \frac{\partial \Theta(R, t)}{\partial r} = h\Theta(R, t) \rightarrow \text{en la superficie del cilindro.} \quad (11.146)$$

$$3. \quad \Theta(r, 0) = T_i - T_\infty \rightarrow \text{condición inicial.} \quad (11.147)$$

La ecuación diferencial (11.144) es una ecuación no homogénea, por lo tanto se plantea una solución de la forma:

$$\Theta(r, t) = \psi(r, t) + \phi(r, t) \quad (11.148)$$

esta solución debe de satisfacer la ecuación diferencial, por lo tanto, reemplazando la solución propuesta en la ecuación diferencial, se tiene:

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial \Theta}{\partial t} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (11.149)$$

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \quad (11.150)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \Theta}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad (11.151)$$

sumando las ecuaciones (11.149), (11.150) y (11.151), se obtienen las siguientes dos ecuaciones:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (11.152)$$

$$\frac{d^2 \phi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\phi}{dr} + \frac{q}{\kappa} = 0 \quad (11.153)$$

Se puede verificar que la solución de la ecuación diferencial (11.153) es:

$$\phi(r) = -\frac{q}{4\kappa} r^2 + c_1 \ln r + c_2 \quad (11.154)$$

y para la ecuación (11.152), se propone una solución de variables separables:

$$\psi(r, t) = R(r)\tau(t) \quad (11.155)$$

Reemplazando (11.155) en la ecuación diferencial (11.152), se obtienen las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \lambda^2 R = 0 \quad (11.156)$$

$$\frac{d\tau}{dt} + \lambda^2 \alpha \tau = 0. \quad (11.157)$$

con soluciones:

$$\tau(t) = C e^{-\lambda^2 \alpha t} \quad (11.158)$$

$$R(r) = A J_0(\lambda r) + B Y_0(\lambda r) \quad (11.159)$$

Ahora, como $Y_0(\lambda r)$ diverge en $r = 0$, entonces la solución general para $\psi(r, t)$ es:

$$\psi(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\lambda_n^2 \alpha t} J_0(\lambda_n r) \quad (11.160)$$

donde A_n se determina con las condiciones iniciales y de frontera. Por lo tanto, la solución de la distribución de temperatura en función del tiempo y del radio del cilindro es:

$$T(r, t) = T_{\infty} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\lambda_n^2 \alpha t} J_0(\lambda_n r) - \frac{q}{4\kappa} r^2 + c_1 \ln r + c_2 \quad (11.161)$$

donde α es la difusividad térmica dada por $\alpha = \frac{\kappa}{\rho c_p}$,

11.4 Ecuación de difusión en esféricas

La ecuación general de difusión es:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T + \frac{q}{\rho c_p} \quad (11.162)$$

donde α es la difusividad térmica, ρ y c_p son la densidad y la capacidad calórica del material y q es una fuente externa de energía. Con el laplaciano en coordenadas esféricas, la ecuación de difusión es de la forma:

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{q}{\rho c_p} \quad (11.163)$$

Problema 11.9 Una esfera sólida de radio R y conductividad térmica κ , inicialmente se encuentra a una temperatura T_i . En un tiempo $t > 0$ comienza a intercambiar calor con sus alrededores por convección. El coeficiente de transferencia de calor y la temperatura de los alrededores es h y T_∞ , respectivamente. Demuestre que la distribución o perfil de temperatura es:

$$T(r, t) = T_\infty + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\alpha \lambda_n^2 t} \frac{\sin(\lambda_n r)}{r} \quad (11.164)$$

donde el coeficiente de expansión es:

$$a_n = 2 (T_i - T_\infty) \frac{\sin(\lambda_n R) - \lambda_n R \cos(\lambda_n R)}{\lambda_n [\lambda_n R - \sin(\lambda_n R) \cos(\lambda_n R)]} \quad (11.165)$$

y el parámetro λ_n es obtenido usando la ecuación:

$$(1 - Bi) \tan(\lambda_n R) = \lambda_n R \quad \text{con} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (11.166)$$

con Bi el número de Biot, definido como $Bi = \frac{hR}{\kappa}$.

Solución

La ecuación para coordenadas esféricas es:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T + \frac{q}{\rho c_p} \quad (11.167)$$

como no existen fuentes de energía $q = 0$,

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} \quad (11.168)$$

Debido a la simetría esférica, la transferencia de calor en la esfera solamente es radial y por lo tanto unidimensional, entonces:

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (11.169)$$

haciendo el siguiente cambio de variable:

$$\Theta(r, t) = T(r, t) - T_{\infty} \quad (11.170)$$

la ecuación toma la siguiente forma:

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial \Theta}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial r} \right) \quad (11.171)$$

con los siguientes condiciones de frontera:

$$1). \quad \frac{\partial T(0, t)}{\partial r} = 0 \quad \text{o} \quad T(0, t) = \text{constante} \rightarrow \frac{\partial \Theta(0, t)}{\partial r} = 0 \quad (11.172)$$

$$2). \quad -\kappa \frac{\partial T(R, t)}{\partial r} = h(T(R, t) - T_{\infty}) \rightarrow -\kappa \frac{\partial \Theta(R, t)}{\partial r} = h\Theta(R, t) \quad (11.173)$$

$$3). \quad T(r, 0) = T_i \rightarrow \Theta(r, 0) = T_i - T_{\infty} \rightarrow \text{condición inicial.} \quad (11.174)$$

se observa que es una ecuación de variables separables y por lo tanto se puede proponer como solución,

$$\Theta(r, t) = R(r)\tau(t) \quad (11.175)$$

Al reemplazar (11.175) en la ecuación diferencial (11.171), se obtienen las dos siguientes ecuaciones diferenciales:

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} + \lambda^2 r^2 R = 0 \quad (11.176)$$

y

$$\frac{d\tau}{dt} + \lambda^2 \alpha \tau = 0 \quad (11.177)$$

La solución radial es:

$$R_n(r) = \frac{1}{\sqrt{r}} \left[A_n J_{1/2}(\lambda_n r) + B_n J_{-1/2}(\lambda_n r) \right] \quad (11.178)$$

Ahora, como:

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x \quad (11.179)$$

$$J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x \quad (11.180)$$

la solución radial toma la forma:

$$R_n(r) = \frac{1}{\sqrt{r}} \left[A_n \sqrt{\frac{2}{\pi \lambda_n r}} \sin(\lambda_n r) + B_n \sqrt{\frac{2}{\pi \lambda_n r}} \cos \lambda_n r \right] \quad (11.181)$$

por lo tanto, la solución radial puede reescribirse como,

$$R_n(r) = A_n \frac{\sin(\lambda_n r)}{r} + B_n \frac{\cos(\lambda_n r)}{r} \quad (11.182)$$

La solución temporal tiene la forma:

$$\tau_n(t) = c_n e^{-\alpha \lambda_n^2 t} \quad (11.183)$$

Aplicando la condición de frontera, ecuación (11.172),

$$\frac{\partial T(0, t)}{\partial r} = 0 \rightarrow \frac{\partial R(0)}{\partial r} = 0 \quad (11.184)$$

$$\left[-A_n \frac{\sin(\lambda_n r)}{r^2} + A_n \lambda_n \frac{\cos(\lambda_n r)}{r} - B_n \frac{\cos(\lambda_n r)}{r^2} - B_n \lambda_n \frac{\sin(\lambda_n r)}{r} \right]_{r=0} = 0 \quad (11.185)$$

se observa que $\frac{\cos(\lambda_n r)}{r^n} \Big|_{r=0} \rightarrow 0$,

$$\left[-A_n \lambda_n \frac{\cos(\lambda_n r)}{r^2} - B_n \lambda_n \frac{\sin(\lambda_n r)}{r} \right]_{r=0} = 0 \quad (11.186)$$

removiendo la indeterminación,

$$-B_n \lambda_n^2 \cos(\lambda_n r) \Big|_{r=0} = 0 \rightarrow B_n = 0 \quad (11.187)$$

y de esta forma, la solución radial es:

$$R_n(r) = A_n \frac{\sin(\lambda_n r)}{r} \quad (11.188)$$

Ahora, Aplicando la segunda condición de frontera, ecuación (11.173),

$$-\kappa A_n \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\sin(\lambda_n r)}{r} \right) \Big|_{r=R} = h A_n \frac{\sin(\lambda_n r)}{r} \Big|_{r=R} \quad (11.189)$$

$$-\kappa \left(-\frac{\sin(\lambda_n r)}{r^2} + \lambda_n \frac{\cos(\lambda_n r)}{r} \right) \Big|_{r=R} = h \frac{\sin(\lambda_n r)}{r} \Big|_{r=R} \quad (11.190)$$

$$-\kappa \left(-\frac{\sin(\lambda_n R)}{R^2} + \lambda_n \frac{\cos(\lambda_n R)}{R} \right) = h \frac{\sin(\lambda_n R)}{R} \quad (11.191)$$

$$\frac{\sin(\lambda_n R)}{R^2} - \lambda_n \frac{\cos(\lambda_n R)}{R} = \frac{h}{\kappa} \frac{\sin(\lambda_n R)}{R} \quad (11.192)$$

multiplicando en ambos lados por $\frac{R^2}{\cos(\lambda_n R)}$,

$$\frac{\sin(\lambda_n R)}{\cos(\lambda_n R)} - \lambda_n R = \frac{hR}{\kappa} \frac{\sin(\lambda_n R)}{\cos(\lambda_n R)} \quad (11.193)$$

definiendo el número de Biot como $Bi = \frac{hR}{\kappa}$,

$$\tan(\lambda_n R) - \lambda_n R = Bi \tan(\lambda_n R) \quad (11.194)$$

es decir,

$$(1 - Bi) \tan(\lambda_n R) = \lambda_n R \quad \text{con } n = 1, 2, 3, \dots \quad (11.195)$$

y la solución general es:

$$\Theta(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\sin(\lambda_n r)}{r} e^{-\alpha \lambda_n^2 t} \quad (11.196)$$

$$T(r, t) = T_{\infty} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\sin(\lambda_n r)}{r} e^{-\alpha \lambda_n^2 t} \quad (11.197)$$

Aplicando la condición de frontera temporal es:

$$\Theta(r, 0) = T_i - T_{\infty} \quad (11.198)$$

$$T_i - T_{\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\sin(\lambda_n r)}{r} \quad (11.199)$$

puede verificarse que la ecuación diferencial es una ecuación de Sturm-Liouville y las funciones $\frac{\sin(\lambda_n r)}{r}$ son ortogonales con respecto a $w(r) = r^2$. Por lo tanto, multiplicando a ambos lados por $\frac{\sin(\lambda_i r)}{r} r^2 dr$ e integrando de 0 a R ,

$$(T_i - T_{\infty}) \int_0^R \frac{\sin(\lambda_i r)}{r} r^2 dr = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^R \frac{\sin(\lambda_n r)}{r} \frac{\sin(\lambda_i r)}{r} r^2 dr \quad (11.200)$$

$$(T_i - T_{\infty}) \int_0^R r \sin(\lambda_i r) dr = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^R \sin(\lambda_n r) \sin(\lambda_i r) dr \quad (11.201)$$

despejando a_n ,

$$a_n = 2(T_i - T_{\infty}) \frac{\int_0^R r \sin(\lambda_i r) dr}{\int_0^R \sin^2(\lambda_n r) dr} \quad (11.202)$$

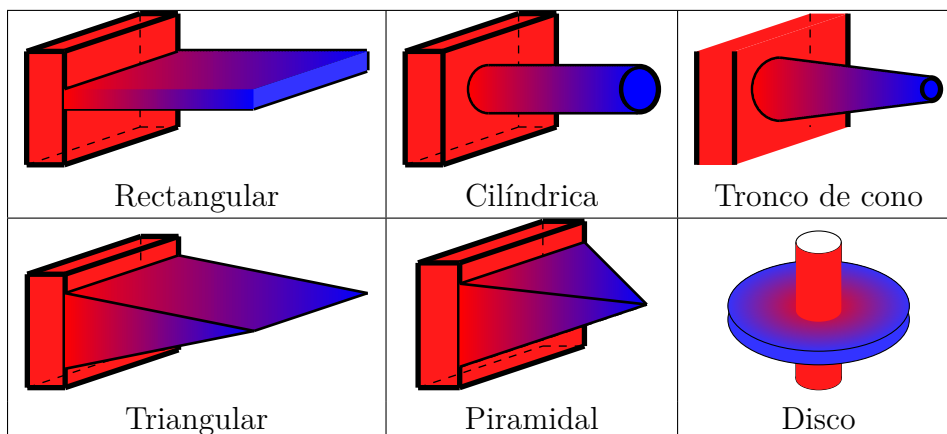
resolviendo las integrales, se obtiene:

$$a_n = 2 (T_i - T_\infty) \frac{\sin(\lambda_n R) - \lambda_n R \cos(\lambda_n R)}{\lambda_n [\lambda_n R - \sin(\lambda_n R) \cos(\lambda_n R)]} \quad (11.203)$$

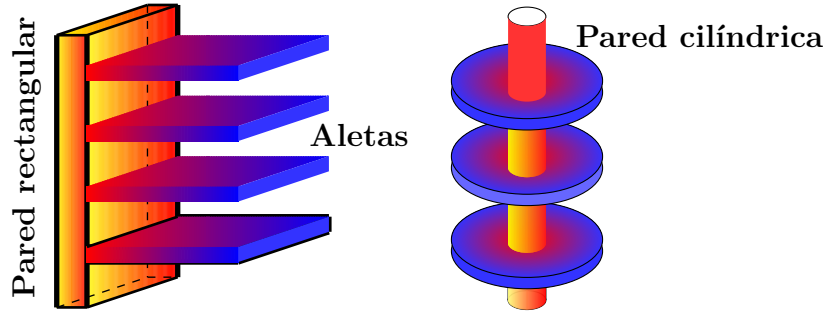
Tema No. 12

Aletas de enfriamiento

Las Aletas de enfriamiento, son superficies utilizadas como un mecanismo que acelera el enfriamiento de una superficie, usando la combinación de las transferencias de calor de conducción y de convección. Las aletas son utilizadas cuando el coeficiente de transferencia de calor de una superficie es muy bajo y por lo tanto, esta deficiencia es compensado con el área añadida por la superficie de la aleta (superficie extendida). Es decir, la superficie extendida o aleta se usa para mejorar la transferencia de calor, y por lo tanto estas superficies extendidas son muy usadas en la ingeniería. Las aletas poseen geometrías con posibilidades de fabricación en serie, tales como las rectangulares, triangulares, piramidales, cilíndrica, trapezoidales, parabólicas e hiperbólicas, como muestra la siguiente Figura algunas de ellas:



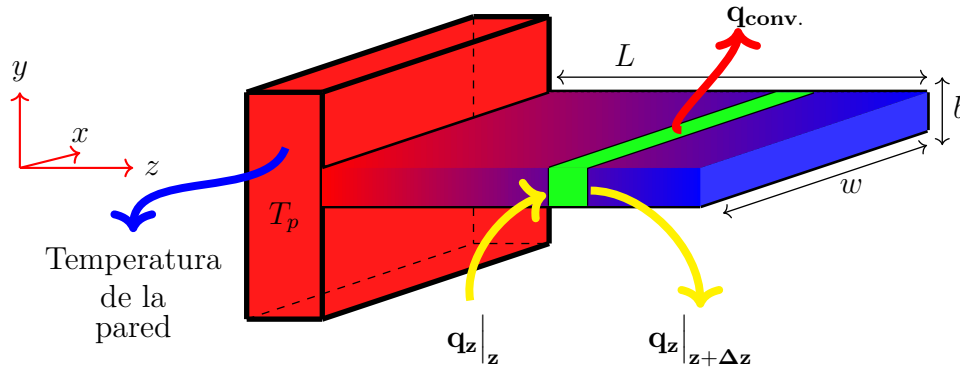
En la ingeniería, sus aplicaciones en la transmisión de calor van desde los radiadores de automóviles, equipos de aire acondicionado, reactores nucleares refrigerados por gases, o los elementos de absorción y todo lo que se relacione con la disipación de energía en la industria. La siguiente Figura ilustra el uso de las aletas en la disipación del calor en una pared usando aletas rectangulares y la disipación del calor en un cilindro sólido usando aletas en forma de disco.



El coeficiente de convección es un parámetro que depende de distintos factores como: la geometría, la velocidad y propiedades del fluido, conductividad térmica alta del material que se emplea para disipar el calor, como lo es el cobre ($\kappa = 401 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$) y el aluminio ($\kappa = 237 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$), mientras que el coeficiente de convección del fluido debe de ser pequeño.

12.1 Aleta rectangular

Una aleta rectangular tiene la siguiente forma:



Despreciando las pérdidas de calor en los bordes de la aleta, se puede realizar el siguiente balance energético,

$$q_z|_z bw - q_z|_{z+\Delta z} bw - q_{conv.} w \Delta z = 0 \quad (12.1)$$

donde, $q_z|_z bw$, $q_z|_{z+\Delta z} bw$ es la energía que entra y sale de la aleta y $q_c w \Delta z$ es la energía que se transfiere por convección entre el área superficial dada por $w \Delta z$ y el fluido o medio (por ejemplo el ambiente). bw es el área transversal a la dirección del flujo de calor q_z . En este caso no existe generación y acumulación de energía. Dividiendo por $-bw \Delta z$ a la ecuación (12.1),

$$\frac{q_z|_{z+\Delta z} - q_z|_z}{\Delta z} + \frac{q_c}{b} = 0 \quad (12.2)$$

en el límite cuando $\Delta z \rightarrow 0$, se tiene:

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{q_z|_{z+\Delta z} - q_z|_z}{\Delta z} + \frac{q_c}{b} = 0 \quad (12.3)$$

se obtiene:

$$\frac{dq_z}{dz} + \frac{q_c}{b} = 0 \quad (12.4)$$

según la ley de Fourier $q_z = -\kappa \frac{dT}{dz}$ y la ley de enfriamiento de Newton $q_c = h(T - T_f)$, se obtiene:

$$\frac{d^2T}{dz^2} - \frac{h}{\kappa b}(T - T_f) = 0 \quad (12.5)$$

es decir,

$$\frac{d^2T}{dz^2} - \frac{h}{\kappa b}T = -\frac{h}{\kappa b}T_f \quad (12.6)$$

donde T_f es la temperatura del fluido y b es el espesor de la aleta; h y κ son las conductividades térmicas por convección y por conducción. La ecuación (12.5) es la ecuación diferencial para la aleta de enfriamiento se sección transversal constante.

12.1.1 Condiciones de frontera

Se pueden establecer varias condiciones de frontera, tales como:

- Condiciones de frontera con extremo activo. Es la condición de frontera que se conoce como transferencia de calor por convección:

$$\text{para } z = 0, \rightarrow T(z) = T_p \quad (12.7)$$

$$\text{para } z = L \rightarrow -\kappa \frac{dT}{dz} = h(T - T_f) \quad (12.8)$$

Se observa que en la condición de frontera en $z = L$, existe una transferencia de calor desde la aleta hacia un fluido de transferencia de calor h .

- Condición de frontera con extremo adiabático:

$$\text{para } z = 0, \rightarrow T(z) = T_p \quad (12.9)$$

$$\text{para } z = L \rightarrow \frac{dT}{dz} = 0 \quad (12.10)$$

En extremo de la aleta (en $z = L$) se encuentra aislada.

- Condición de frontera con temperatura establecida:

$$\text{para } z = 0, \rightarrow T(z) = T_p \quad (12.11)$$

$$\text{para } z = L \rightarrow T(z) = T_L \quad (12.12)$$

La aleta en $z = L$ permanece a una temperatura constante.

- Condición de frontera con aleta infinita:

$$\text{para } z = 0, \rightarrow T(z) = T_p \quad (12.13)$$

$$\text{para } z = L \rightarrow T(z) = T_\infty \quad (12.14)$$

donde una aleta se considera infinita, cuando se la relación entre la longitud de la aleta y el número de Biot es: $L \geq \frac{2.65}{\sqrt{Bi}}$, correspondiendo a una transferencia de calor del promedio de 98% y 99.5%. Es decir,

$$\tan(\sqrt{Bi}L) = 0.98 \rightarrow \sqrt{Bi}L = 2.3 \quad (12.15)$$

$$\tan(\sqrt{Bi}L) = 0.995 \rightarrow \sqrt{Bi}L = 3.0 \quad (12.16)$$

$$\overline{\sqrt{Bi}L} = \frac{2.3 + 3.0}{2} = 2.65 \rightarrow L \geq \frac{2.65}{\sqrt{Bi}}. \quad (12.17)$$

Usando las condiciones de frontera adiabáticas para esta aleta:

$$(1). \quad z = 0, \quad T = T_p \quad (12.18)$$

$$(2). \quad z = L, \quad \frac{dT}{dz} = 0 \quad (12.19)$$

la ecuación (12.5) puede adimensionalizarse mediante los siguientes cambios de variable:

$$\theta = \frac{T - T_f}{T_p - T_f}, \quad N = \sqrt{\frac{hL^2}{\kappa b}}, \quad \xi = \frac{z}{L} \quad (12.20)$$

usando la regla de la cadena,

$$\frac{d}{dz} = \frac{d}{d\xi} \frac{d\xi}{dz} = \frac{1}{L} \frac{d}{d\xi} \rightarrow \frac{d^2}{dz^2} = \frac{1}{L^2} \frac{d^2}{d\xi^2} \quad (12.21)$$

como $T = \theta(T_p - T_f) + T_f$,

$$\frac{d^2T}{dz^2} = \frac{T_p - T_f}{L^2} \frac{d^2\theta}{d\xi^2} \quad (12.22)$$

reemplazando en (12.5),

$$\frac{T_p - T_f}{L^2} \frac{d^2\theta}{d\xi^2} - \frac{h}{\kappa b} (T - T_f) = 0 \quad (12.23)$$

$$\frac{d^2\theta}{d\xi^2} - \frac{L^2 h}{\kappa b} \frac{(T - T_f)}{T_p - T_f} = 0 \quad (12.24)$$

teniendo en cuenta el cambio de variables, ecuación (12.20), se obtiene la ecuación diferencial adimensional:

$$\frac{d^2\theta}{d\xi^2} - Bi\theta = 0 \quad (12.25)$$

donde Bi es el número de Biot,

$$Bi = \frac{h L^2}{\kappa b} \quad (12.26)$$

en honor al físico francés Jean Baptiste Biot (1774-1862), el cuál relaciona la transferencia de calor por conducción dentro de un cuerpo y la transferencia de calor por convección en la superficie de dicho cuerpo. Se observa que el número de Biot es la relación entre la transferencia de calor por convección y la transferencia de calor por conducción. Las condiciones de frontera de la ecuación (12.25) son:

$$(1). \quad \xi = 0, \quad \theta = 1 \quad (12.27)$$

$$(2). \quad \xi = 1, \quad \frac{d\theta}{d\xi} = 0 \quad (12.28)$$

La solución analítica de la ecuación diferencial (12.25) es:

$$\theta(\xi) = c_1 \sinh(\sqrt{Bi}\xi) + c_2 \cosh(\sqrt{Bi}\xi) \quad (12.29)$$

teniendo en cuenta las condiciones de frontera (12.28), se calculan las constantes c_1 y c_2 . Entonces, para $\xi = 0$, se tiene:

$$1 = c_1 \sinh(0) + c_2 \cosh(0) \quad (12.30)$$

y como $\sinh(0) = 0$ y $\cosh(0) = 1$, entonces $c_2 = 1$. La ecuación queda de la forma:

$$\theta(\xi) = c_1 \sinh(\sqrt{Bi}\xi) + \cosh(\sqrt{Bi}\xi) \quad (12.31)$$

considerando la otra condición de frontera:

$$\left. \frac{d\theta}{d\xi} \right|_{\xi=1} = 0 \quad \rightarrow \quad \sqrt{Bi} c_1 \cosh(\sqrt{Bi}) + \sqrt{Bi} \sinh(\sqrt{Bi}) = 0 \quad (12.32)$$

$$c_1 \cosh(\sqrt{Bi}) = -\sinh(\sqrt{Bi}) \quad (12.33)$$

despejando a c_1 ,

$$c_1 = -\frac{\sin(\sqrt{Bi})}{\cosh(\sqrt{Bi})} \quad (12.34)$$

es decir,

$$c_1 = -\tanh(\sqrt{Bi}) \quad (12.35)$$

reemplazando,

$$\theta(\xi) = -\tanh(\sqrt{Bi}) \sinh(\sqrt{Bi}\xi) + \cosh(\sqrt{Bi}\xi) \quad (12.36)$$

y se puede demostrar que la solución toma la siguiente forma:

$$\theta(\xi) = \cosh(\sqrt{Bi}\xi) \left(1 - \tanh(\sqrt{Bi}) \tanh(\sqrt{Bi}\xi) \right) \quad (12.37)$$

Ahora, de vuelta a las variables dimensionales, se obtiene:

$$\frac{T - T_f}{T_p - T_f} = \cosh\left(\frac{\sqrt{Bi}}{L}z\right) \left[1 - \tanh(\sqrt{Bi}) \tanh\left(\frac{\sqrt{Bi}}{L}z\right) \right] \quad (12.38)$$

12.1.2 Disipación del calor

Suponiendo que la aleta se encuentra en estado estacionario, la cantidad de calor que se pierde por convección a través de la aleta, es la que entra por conducción a través de la base de la aleta:

$$q_z = -\kappa \frac{dT}{dz} \Big|_{z=0} \quad (12.39)$$

o en términos de las variables adimensionales, ver ecuación (12.22),

$$q_z = -\frac{\kappa A(T_p - T_f)}{L} \frac{d\theta}{d\xi} \Big|_{\xi=0} \quad (12.40)$$

donde

$$\frac{d\theta}{d\xi} = -\sqrt{Bi} \tanh(\sqrt{Bi}) \cosh(\sqrt{Bi}\xi) + \sqrt{Bi} \sinh(\sqrt{Bi}\xi) \quad (12.41)$$

evaluando la ecuación en $\xi = 0$,

$$\frac{d\theta}{d\xi} \Big|_{\xi=0} = -\sqrt{Bi} \tanh(\sqrt{Bi}) \cosh(0) + \sqrt{Bi} \sinh(0) \quad (12.42)$$

$$\frac{d\theta}{d\xi} \Big|_{\xi=0} = -\sqrt{Bi} \tanh(\sqrt{Bi}) \quad (12.43)$$

reemplazando en q_z

$$q_z = \frac{\kappa A(T_p - T_f)}{L} \sqrt{Bi} \tanh(\sqrt{Bi}) \quad (12.44)$$

12.1.3 Eficiencia de la aleta

La eficiencia de la aleta se estima mediante la relación entre el calor máximo que se transfiere, el cual corresponde a un calor ideal y el calor verdadero que transfiere la aleta.

$$\eta = \frac{q_{aleta}}{q_{max.}} \quad (12.45)$$

Para estimar el valor del calor ideal, se supone que la aleta es isotérmica, es decir que la aleta se encuentra a la misma temperatura de la pared:

$$q_{max.} = hS(T_p - T_f) \quad (12.46)$$

donde S es el área superficial total de la aleta. Para una aleta recta de sección transversal constante $S = pL$ donde p es el perímetro de la aleta. Reemplazando (12.44) y (12.46) en la eficiencia,

$$\eta = \frac{\frac{\kappa A(T_p - T_f)}{L} \sqrt{Bi} \tanh(\sqrt{Bi})}{hpL(T_p - T_f)} \quad (12.47)$$

$$\eta = \frac{\kappa A}{hpL^2} \sqrt{Bi} \tanh(\sqrt{Bi}) \quad (12.48)$$

según la definición del número de Biot, ecuación (12.26),

$$\frac{\kappa A}{hpL^2} = \frac{1}{Bi} \quad (12.49)$$

entonces, la eficiencia de la aleta es:

$$\eta = \frac{\tanh(\sqrt{Bi})}{\sqrt{Bi}} \quad (12.50)$$

12.1.4 Solución numérica de la aleta rectangular

Para realizar la solución numérica de la aleta rectangular, se procede a discretizar la ecuación (12.6) o resolver la ecuación (12.25), la cual en diferencias finitas es:

$$\theta_{i+1} - 2\theta_i + \theta_{i-1} - \Delta\xi^2 Bi\theta_i = 0, \quad \text{con } i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (12.51)$$

y en el caso particular, discretizando la condición de frontera (12.28),

$$\frac{\theta_{N+1} - \theta_N}{\Delta\xi} = 0 \quad \rightarrow \quad \theta_{N+1} = \theta_N \quad (12.52)$$

En resumen, la ecuación a solucionar numéricamente:

$$\theta_{i+1} - 2\theta_i + \theta_{i-1} - \Delta\xi^2 Bi\theta_i = 0, \quad \text{con } i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (12.53)$$

con las siguientes condiciones de frontera:

$$(1). \quad \theta_1 = 1 \quad (12.54)$$

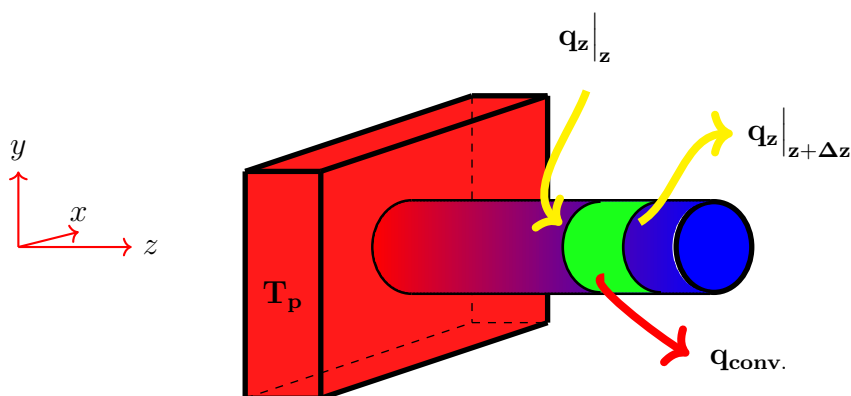
$$(2). \quad \theta_{N+1} = \theta_N \quad (12.55)$$

Problema 12.1 Una pared se encuentra a una temperatura constante de 150°C . Para disipar el calor de la pared, se le incorpora una aleta rectangular de longitud $L = 2.0\text{ cm}$ y de espesor $b = 1.4\text{ mm}$. La conductividad térmica de la aleta es $\kappa = 60\text{ W/m}\cdot\text{C}$ y es expuesta a un ambiente convectivo a $T = 20^\circ\text{C}$, de conductividad térmica de $h = 500\text{ W/m}^2\cdot\text{C}$.

- Realice una solución analítica para determinar el perfil de temperatura en la aleta.
- Use un grid de $N=8$ y resuelva numéricamente el perfil de temperatura en la aleta.
- Compare los resultados numéricos y analíticos con sus porcentajes de error.

12.2 Aleta cilíndrica

La aleta o superficie extendida cilíndrica tiene la forma como la Figura:



La Figura muestra que la transferencia de calor por convección se debe al contacto entre la superficie curva del cilindro y el fluido en donde se encuentra. Así, el balance energético para una aleta cilíndrica es:

$$A_T q_z \Big|_z - A_T q_z \Big|_{z+\Delta z} - h A_L (T - T_f) = 0 \quad (12.56)$$

donde $A_T = \pi R^2$ y $A_L = 2\pi R \Delta z$. Reemplazando,

$$\pi R^2 q_z \Big|_z - \pi R^2 q_z \Big|_{z+\Delta z} - 2\pi R \Delta z h (T - T_f) = 0 \quad (12.57)$$

dividiendo la ecuación por $\pi R^2 \Delta z$,

$$\frac{\pi R^2 q_z \Big|_z - \pi R^2 q_z \Big|_{z+\Delta z}}{\pi R^2 \Delta z} - \frac{2\pi R \Delta z h (T - T_f)}{\pi R^2 \Delta z} = 0 \quad (12.58)$$

$$\frac{q_z \Big|_z - q_z \Big|_{z+\Delta z}}{\Delta z} - \frac{2h}{R} (T - T_f) = 0 \quad (12.59)$$

sí $\Delta z \rightarrow 0$,

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left[\frac{q_z \Big|_z - q_z \Big|_{z+\Delta z}}{\Delta z} \right] - \frac{2h}{R} (T - T_f) = 0 \quad (12.60)$$

$$\frac{dq_z}{dz} - \frac{2h}{R} (T - T_f) = 0 \quad (12.61)$$

como $q_z = -\kappa \frac{dT}{dz}$, se obtiene la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2 T}{dz^2} - \frac{2h}{\kappa R} (T - T_f) = 0 \quad (12.62)$$

donde κ y h son las conductividades térmicas de la aleta cilíndrica y del fluido, R es el radio de la aleta cilíndrica y T_f es la temperatura del fluido en contacto con la aleta cilíndrica. La ecuación (12.62) se soluciona con las siguientes condiciones de frontera:

$$1). \quad z = 0 \rightarrow T = T_{pared} \quad (12.63)$$

$$2). \quad z = L \rightarrow \begin{cases} \frac{dT}{dz} = 0 \\ -\kappa \frac{dT}{dz} = h(T - T_f) \end{cases} \quad (12.64)$$

Problema 12.2 Usar el método de diferencias finitas para obtener el perfil de temperatura de la aleta cilíndrica, conociendo los siguientes datos:

$$\begin{aligned} \kappa &= 50 \frac{W}{m \cdot ^\circ C}, & h &= 120 \frac{W}{m^2 \cdot ^\circ C}, & R &= 2cm, & T_f &= 20^\circ C, \\ T_{pared} &= 300^\circ C & y & \Delta z &= 0.02cm. \end{aligned}$$

Solución.

Desarrollando en diferencias finitas la ecuación (12.62),

$$\frac{T(i+1) - 2T(i) + T(i-1))}{\Delta z^2} - \frac{2h}{\kappa R} (T(i) - T_f) = 0 \quad (12.65)$$

$$T(i+1) - 2T(i) + T(i-1) - \frac{2h\Delta z^2}{\kappa R}(T(i) - T_f) = 0 \quad (12.66)$$

$$T(i+1) - \left(2 + \frac{2h\Delta z^2}{\kappa R}\right)T(i) + T(i-1) + \frac{2h\Delta z^2}{\kappa R}T_f = 0 \quad (12.67)$$

$$T(i+1) - \left(2 + \frac{2h\Delta z^2}{\kappa R}\right)T(i) + T(i-1) = -\frac{2h\Delta z^2}{\kappa R}T_f \quad (12.68)$$

dándole valores a i :

$$i = 1 \rightarrow T(2) - \left(2 + \frac{2h\Delta z^2}{\kappa R}\right)T(1) + T(0) = -\frac{2h\Delta z^2}{\kappa R}T_f$$

$$i = 2 \rightarrow T(3) - \left(2 + \frac{2h\Delta z^2}{\kappa R}\right)T(2) + T(1) = -\frac{2h\Delta z^2}{\kappa R}T_f$$

$$i = 3 \rightarrow T(4) - \left(2 + \frac{2h\Delta z^2}{\kappa R}\right)T(3) + T(2) = -\frac{2h\Delta z^2}{\kappa R}T_f$$

$$i = 4 \rightarrow T(5) - \left(2 + \frac{2h\Delta z^2}{\kappa R}\right)T(4) + T(3) = -\frac{2h\Delta z^2}{\kappa R}T_f$$

$$i = 5 \rightarrow T(6) - \left(2 + \frac{2h\Delta z^2}{\kappa R}\right)T(5) + T(4) = -\frac{2h\Delta z^2}{\kappa R}T_f$$

calculando,

$$\begin{aligned} \frac{2h\Delta z^2}{\kappa R} &= \frac{2 \cdot 120 \cdot 0.02^2}{50 \cdot 0.02} = 0.096 \\ \frac{2h\Delta z^2}{\kappa R}T_f &= \frac{2 \cdot 120 \cdot 0.02^2}{50 \cdot 0.02} \cdot 20 = 1.92 \\ T(0) &= T_{pared} = 300 \end{aligned}$$

Condiciones de frontera adiabáticas:

Usando las condiciones de frontera $\frac{dT}{dz} = 0$, ecuación (12.64), se calcula $T(6)$,

$$\left. \frac{T(i+1) - T(i)}{\Delta z} \right|_{i=5} = 0, \quad \rightarrow \quad T(6) = T(5) \quad (12.69)$$

reemplazando,

$$T(2) - 2.096T(1) + 300 = -1.92$$

$$T(3) - 2.096T(2) + T(1) = -1.92$$

$$T(4) - 2.096T(3) + T(2) = -1.92$$

$$T(5) - 2.096T(4) + T(3) = -1.92$$

$$T(5) - 2.096T(5) + T(4) = -1.92$$

$$\begin{aligned}
-2.096T(1) + T(2) &= -301.92 \\
T(1) - 2.096T(2) + T(3) &= -1.92 \\
T(2) - 2.096T(3) + T(4) &= -1.92 \\
T(3) - 2.096T(4) + T(5) &= -1.92 \\
T(4) - 1.096T(5) &= -1.92
\end{aligned}$$

en forma de matriz,

$$\begin{bmatrix} -2.096 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2.096 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2.096 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2.096 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1.096 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -301.92 \\ -1.92 \\ -1.92 \\ -1.92 \\ -1.92 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T(1) \\ T(2) \\ T(3) \\ T(4) \\ T(5) \end{bmatrix} \quad (12.70)$$

Condiciones de frontera por convección:

La ecuación (12.68), puede escribirse como:

$$T(i+1) - \alpha T(i) + T(i-1) = -\beta \quad (12.71)$$

donde

$$\alpha = 2 \left(1 + \frac{h\Delta z^2}{\kappa R} \right) \quad (12.72)$$

$$\beta = \frac{2h\Delta z^2}{\kappa R} T_f \quad (12.73)$$

despejando $T(i)$,

$$T(i) = \frac{1}{\alpha} \left(T(i+1) + T(i-1) + \beta \right) \quad (12.74)$$

Ahora, usando la condición de frontera: $-\kappa \frac{dT}{dz} = h(T - T_f)$. Discretizando esta condición de frontera,

$$-\kappa \frac{T(i+1) - T(i)}{\Delta z} = h(T(i) - T_f) \quad (12.75)$$

$$-T(i+1) + T(i) = \frac{h\Delta z}{\kappa} T(i) - \frac{h\Delta z}{\kappa} T_f \quad (12.76)$$

$$T(i) - \frac{h\Delta z}{\kappa} T(i) + \frac{h\Delta z}{\kappa} T_f = T(i+1) \quad (12.77)$$

$$T(i+1) = \left(1 - \frac{h\Delta z}{\kappa} \right) T(i) + \frac{h\Delta z}{\kappa} T_f \quad (12.78)$$

por lo tanto, para $i = 5$, se tiene que:

$$T(6) = \left(1 - \frac{h\Delta z}{\kappa}\right)T(5) + \frac{h\Delta z}{\kappa}T_f \quad (12.79)$$

Solucionando las ecuaciones, se obtuvieron los siguientes resultados, usando las dos condiciones de frontera:

Tabla 12.1: Distribución de la temperatura en una aleta cilíndrica a diferentes condiciones de frontera

Temperatura	Adiabática		Convección
	$\Delta z = 0.02$	$\Delta z = 0.002$	$\Delta z = 0.02$
$T(0)$	300.000000	300.000000	300.000000
$T(1)$	231.349365	232.781509	229.809525
$T(2)$	182.988373,	186.155945	179.760757
$T(3)$	150.274414,	155.612167	145.049011
$T(4)$	130.066940	138.193985	122.341972
$T(5)$	120.426041	132.215775	109.459763

Para estimar la eficiencia de ésta aleta cilíndrica, haremos uso de la condición de frontera adiabática: $\left.\frac{dT}{dz}\right|_{z=L} = 0$, ecuación (12.64). Recordando que la eficiencia es la relación entre la transferencia de calor de la aleta y la transferencia de calor de la aleta ideal:

$$\eta = \frac{Q_{aleta}^{real}}{Q_{aleta}^{ideal}} \quad (12.80)$$

y para calcular el valor del calor ideal, se supone que la aleta es isotérmica, es decir que la aleta se encuentra a la misma temperatura de la pared. Es decir las temperaturas $T(0)$, $T(1)$, $T(2)$, $T(3)$, $T(4)$, y $T(5)$ tienen un valor de T_{pared} ,

$$Q_{aleta}^{ideal} \approx 2\pi R\Delta z h(T_p - T_f) \rightarrow Q_{aleta}^{ideal} = 2\pi R \int_0^L h(T_p - T_f)dz \quad (12.81)$$

donde T_p es la temperatura de la pared, T_f es la temperatura del fluido y $2\pi R\Delta z$ es el área superficial total de la aleta. La transferencia de calor real Q_{aleta}^{real} se calcula como el flujo de calor que atraviesa el área superficial del cilindro.

$$Q_{aleta}^{real} \approx 2\pi R\Delta z h(T - T_f) \rightarrow Q_{aleta}^{real} = 2\pi R \int_0^L h(T - T_f)dz \quad (12.82)$$

donde T es la temperatura en cada punto del cilindro y T_f es la temperatura del fluido. Reemplazando,

$$\eta = \frac{2\pi R \int_0^L h(T - T_f) dz}{2\pi R \int_0^L h(T_p - T_f) dz} \quad (12.83)$$

como T_p y T_f corresponden a la temperatura de la pared y temperatura del fluido, es decir son constantes, se tiene:

$$\eta = \frac{2\pi R \int_0^L h(T - T_f) dz}{2\pi R L h(T_p - T_f)} \quad (12.84)$$

$$\eta = \frac{\int_0^L (T - T_f) dz}{L(T_p - T_f)} \quad (12.85)$$

La integral, puede realizarse usando los resultados de la Tabla 12.1 obtenidos en el mallado de 5 puntos por el método del trapecio:

$$\int_0^L T(z) dz \approx \frac{\Delta z}{2} \left(T(0) + 2T(\Delta z) + 2T(2\Delta z) + 2T(3\Delta z) + 2T(4\Delta z) + T(L) \right) \quad (12.86)$$

donde $T(z) = T(i) - T_f$, es decir:

$$\int_0^L (T(i) - T_f) dz \approx \frac{\Delta z}{2} \left(T(0) - T_f + 2 \left[(T(1) - T_f) + (T(2) - T_f) + (T(3) - T_f) + (T(4) - T_f) \right] + T(5) \right) \quad (12.87)$$

$$\int_0^L (T(i) - T_f) dz \approx \frac{0.02}{2} \left(280.0 + 2 \left[211.3494 + 162.9884 + 130.2744 + 110.0669 \right] + 120.4260 \right) \quad (12.88)$$

$$\int_0^L (T(i) - T_f) dz \approx 0.01 \left(410.2744 + 2 \left[614.6791 \right] \right) \quad (12.89)$$

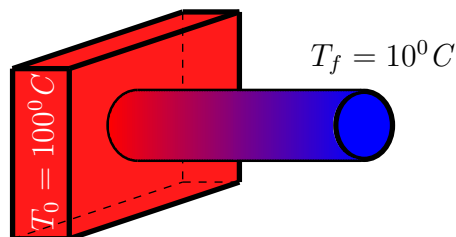
$$\int_0^L (T(i) - T_f) dz \approx 0.01 \left(410.2744 + 1229.3582 \right) = 16.3963 \quad (12.90)$$

reemplazando,

$$\eta = \frac{16.3963}{0.1(300 - 20)} \quad (12.91)$$

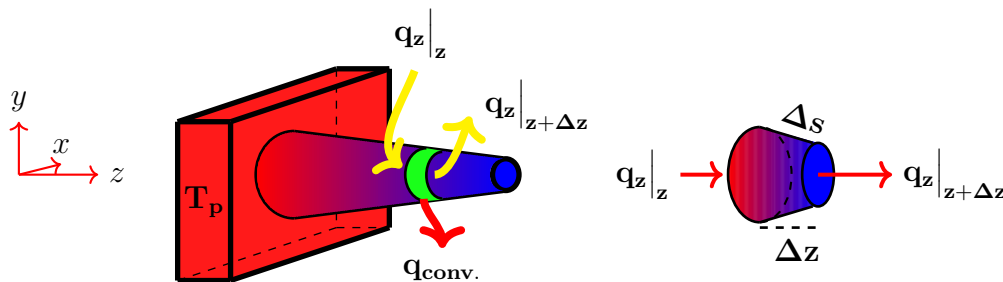
$$\eta \approx 0.59 \quad (12.92)$$

Problema 12.3 Una aleta de aluminio con un diámetro $D = 1 \text{ cm}$ y una longitud $L = 6 \text{ cm}$ (ver Figura), está expuesta a un fluido circundante con temperatura $T_f = 10^\circ \text{C}$, y coeficiente de transferencia de calor por convección $h = 8.0 \text{ W/m}^2 \text{C}$. La base de la aleta se encuentra empotrada en una temperatura de $T_0 = 100^\circ \text{C}$. Determine la distribución de temperatura y la eficiencia de la aleta utilizando el método de diferencias finitas usando un mallado de $N=6$ puntos. Suponga la conductividad térmica del material (la pared) que se desea disipar el calor. es $\kappa = 200 \text{ W/mC}$. Muestre el balance energético total.



12.3 Aleta cónica

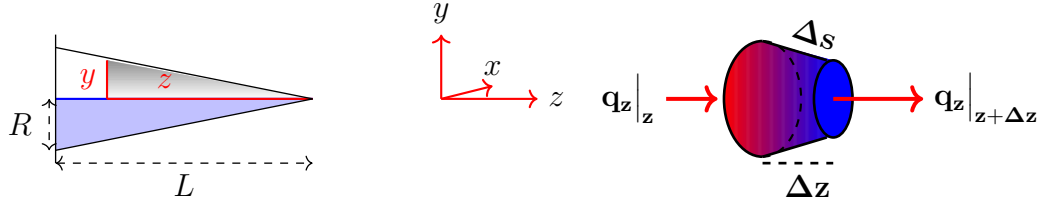
considerando una aleta cónica de longitud L y de radio base R , como se muestra en la siguiente Figura:



La Figura muestra que la transferencia de calor por convección se debe al contacto entre la superficie curva de un cono truncado y un medio. Así, el balance energético para una aleta cilíndrica es:

$$A(y, z)q_z \Big|_z - A(y + \Delta y, z + \Delta z)q_z \Big|_{z+\Delta z} - hA_s(T - T_f) = 0 \quad (12.93)$$

donde $A(y, z)$ es el área perpendicular al flujo de calor q_z en el punto z y $A(y, z + \Delta z)$ es el área perpendicular al flujo de calor q_z en el punto $z + \Delta z$, mientras que A_s es el área superficial del cono y de acuerdo con la ley de Fourier, el flujo de calor es $q_z = -\kappa A(y, z) \frac{\partial T}{\partial z}$. En la siguiente Figura se visualiza que el área $A(y, z)$ es igual a $A(y, z) = \pi y^2 \Big|_z$.



y del triángulo se obtiene la relación,

$$y = \frac{R}{L}z \quad (12.94)$$

Aí, que el área en función de la variable del radio y y para un punto dado z es:

$$A(y) = \pi \left(\frac{R}{L} \right)^2 z^2 \quad (12.95)$$

Ahora, calculando el área superficial del cono A_s :

$$A_s = 2\pi y ds \quad (12.96)$$

así que la variación del área A_s a medida que se avanza en z es,

$$\frac{dA_s}{dz} = 2\pi y \frac{ds}{dz} \quad (12.97)$$

donde, donde,

$$ds = \sqrt{dz^2 + dy^2} \quad (12.98)$$

$$\frac{ds}{dz} = \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dz^2}} \quad (12.99)$$

usando la ecuación (12.94),

$$\frac{ds}{dz} = \sqrt{1 + \frac{R^2}{L^2}} \quad (12.100)$$

reemplazando,

$$\frac{dA_s}{dz} = 2\pi y \sqrt{1 + \frac{R^2}{L^2}} \quad (12.101)$$

La variación del flujo de calor en la dirección z , de la ecuación (12.93) es,

$$\frac{A(y, z)q_z \Big|_z - A(y + \Delta y, z + \Delta z)q_z \Big|_{z+\Delta z}}{\Delta z} - h \frac{\Delta A_s}{\Delta z} (T - T_f) = 0 \quad (12.102)$$

en el límite cuando $\Delta z \rightarrow 0$,

$$\frac{\partial Aq_z}{\partial z} + 2\pi h y \sqrt{1 + \frac{R^2}{L^2}} (T - T_f) = 0 \quad (12.103)$$

de la ecuación (12.94), se reempaza y ,

$$\frac{\partial Aq_z}{\partial z} + \frac{2\pi Rh}{L} z \sqrt{1 + \frac{R^2}{L^2}} (T - T_f) = 0 \quad (12.104)$$

como $q_z = -\kappa \frac{\partial T}{\partial z}$ y $A(y)$ de la ecuación (12.95),

$$-\pi\kappa \frac{R^2}{L^2} \frac{\partial}{\partial z} \left(z^2 \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{2\pi Rh}{L} z \sqrt{1 + \frac{R^2}{L^2}} (T - T_f) = 0 \quad (12.105)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(z^2 \frac{\partial T}{\partial z} \right) - \frac{2Lh}{\kappa R} z \sqrt{1 + \frac{R^2}{L^2}} (T - T_f) = 0 \quad (12.106)$$

$$z^2 \frac{d^2 T}{dz^2} + 2z \frac{dT}{dz} - \frac{2Lh}{\kappa R} z \sqrt{1 + \frac{R^2}{L^2}} (T - T_f) = 0 \quad (12.107)$$

definiendo las siguientes variables,

$$\beta^2 = \frac{2Lh}{\kappa R} \sqrt{1 + \frac{R^2}{L^2}} \quad (12.108)$$

$$\Theta = T - T_f \quad (12.109)$$

se obtiene la ecuación diferencial de orden dos con coeficientes variables,

$$z^2 \frac{d^2 \Theta}{dz^2} + 2z \frac{d\Theta}{dz} - \beta^2 z \Theta = 0 \quad (12.110)$$

La solución de esta ecuación diferencial es la suma de las funciones de Bessel modificada de primera y segunda especie:

$$T(z) = \frac{1}{\sqrt{z}} \left[c_1 I_1(2\beta\sqrt{z}) + c_2 K_1(2\beta\sqrt{z}) \right] + T_f \quad (12.111)$$

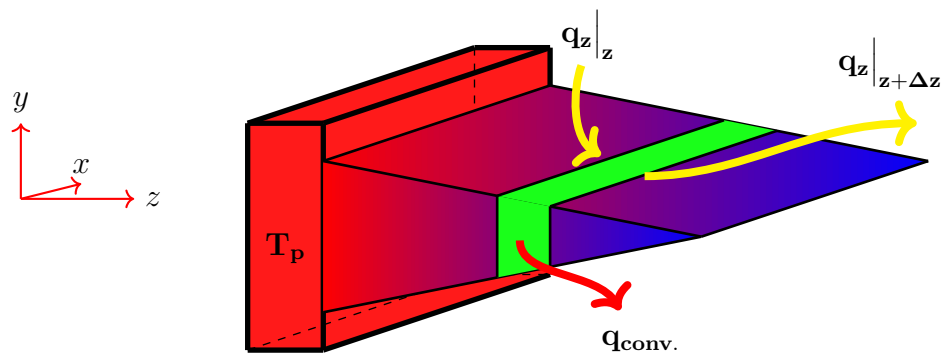
donde c_1 y c_2 son constantes y $I_1(2\beta\sqrt{z})$ es la función de Bessel modificada de primera clase y de orden 1 y $K_1(2\beta\sqrt{z})$ es la función de Bessel modificada de segunda clase y de orden 1. Ahora, como en $z = 0$ se tiene que $K_1(0) \rightarrow \infty$, entonces $c_2 = 0$ y por lo tanto la solución se reduce a:

$$T(z) = \frac{c_1}{\sqrt{z}} I_1(2\beta\sqrt{z}) + T_f \quad (12.112)$$

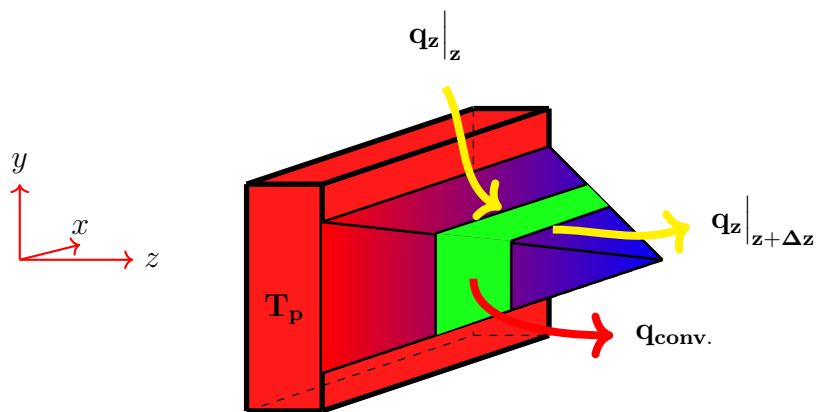
donde

$$\beta^2 = \frac{2Lh}{\kappa R} \sqrt{1 + \frac{R^2}{L^2}} \quad (12.113)$$

12.4 Aleta triangular



12.5 Aleta piramidal



Tema No. 13

Transferencia de calor por radiación

En las secciones anteriores se analizó la transferencia de calor por conducción y convección. La transferencia de calor por estos dos medios solo se da través de un sólido y de un fluido (gas o líquido) y acompañada por un gradiente de temperatura. Pero, la ciencia indica que existe otro modo de transferencia de calor que puede tener lugar incluso sin un medio, y si hay un medio presente, no es necesario que el flujo de calor tenga que ir acompañado de una disminución continua de la temperatura del punto de más alta temperatura al del más baja temperatura. Este modo de transferencia de calor se conoce como transferencia de calor por radiación. La transferencia de calor radiativa depende de la longitud de onda de la emisión térmica y las propiedades materiales de los cuerpos que participan en esta transferencia de calor. En esta sección analizará los principios básicos de la transferencia de calor por radiación.

13.1 Fundamentos de radiación

Existen dos puntos de vista que explican el fenómeno de la radiación de los materiales. Uno es que la radiación se ve como la propagación de una colección de partículas denominadas fotones o cuantos. El otro punto de vista, es considerar la radiación como la propagación de ondas electromagnéticas y, en este caso se llama radiación electromagnética.

La teoría de los fotones fué propuesta por Max Planck, mientras que la teoría de las ondas electromagnéticas fué propuesta por James Clerk Maxwell. Ambos conceptos se han utilizado para describir la emisión y propagación de la radiación. Cuando la radiación se trata como una onda electromagnética, se considera que la radiación del cuerpo a una temperatura absoluta T se emite en todas las longitudes de onda de 0 a ∞ . La naturaleza de la radiación térmica ondulatoria implica que la longitud

de onda λ debe estar relacionada con la frecuencia de radiación ν , mediante la expresión:

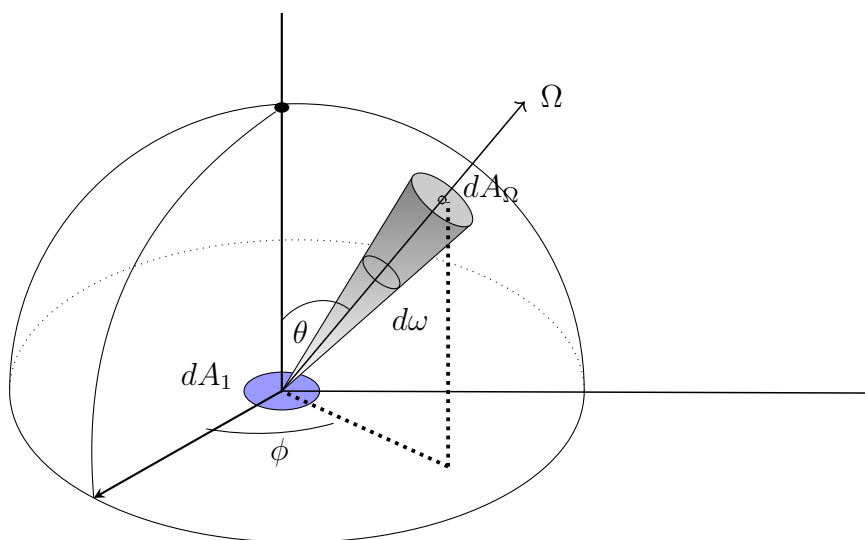
$$\lambda = \frac{c}{\nu} \quad (13.1)$$

donde c es la velocidad de propagación en el medio. Ahor, si el medio de la radiación es el vacío, la velocidad de propagación es igual a la velocidad de la luz, que es 2.9979×10^8 m/s. En el espectro electromagnético, la porción que incluye la radiación, se encuentra entre $0.1 \mu\text{m}$ a $100 \mu\text{m}$ de longitud de onda, región conocida como radiación térmica (ver Figura 13.1).

La radiación es un fenómeno volumétrico. Esto se debe a que los electrones, átomos y moléculas de todos los sólidos, líquidos y gases por encima de la temperatura del cero absoluto están en constante movimiento y, por lo tanto, la energía se emite, absorbe y transmite constantemente a través de todo el volumen de la materia. Aunque, en algunos materiales la radiación se considera un fenómeno de superficie, ya que la radiación emitida por las regiones interiores nunca puede llegar a la superficie, y la radiación que incide en dichos cuerpos generalmente se absorbe dentro de unas pocas micras de la superficie. Estos materiales o cuerpos se denominan opacos a la radiación.

13.2 Intensidad de la radiación y potencia emisiva

La radiación de una superficie se emite en todas las direcciones y es de gran importancia conocer la cantidad de radiación emitida por un cuerpo en una dirección determinada. Considere la emisión desde un elemento de área dA_1 en la dirección Ω especificada por los ángulos polar y azimutal, θ y ϕ , respectivamente, como lo muestra la Figura:



Si se considera el elemento de área dA_Ω perpendicular a la dirección Ω a una distancia radial r , entonces el ángulo sólido es definido como:

$$d\omega = \frac{dA_\Omega}{r^2} \quad (13.2)$$

Es decir, el ángulo sólido es la región que contiene todos los haces de radiación emitidos desde el punto de origen y que atraviesan el área dA_Ω . La intensidad de la radiación espectral se define como el cambio de energía de radiación emitida por el cuerpo a una temperatura T , fluyendo a través de una unidad de área perpendicular a la dirección de propagación, por unidad de intervalo de longitud de onda $d\lambda$ y por unidad de ángulo sólido $d\omega$. Es decir, si $\delta q(T)$ es la cantidad de energía de radiación emitida desde la superficie dA_1 , entonces la intensidad es dada por la expresión:

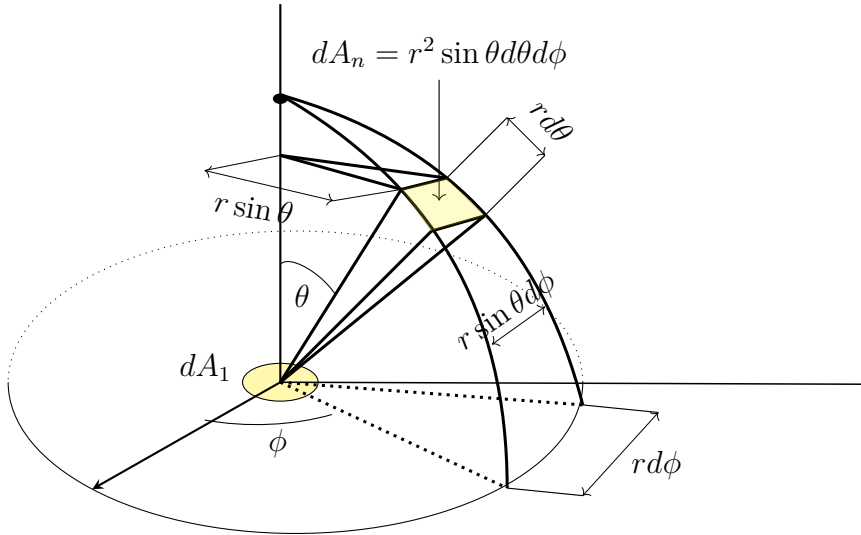
$$I(\lambda, \theta, \phi, T) = \frac{\delta q(T)}{(dA_1 \cos \theta)(d\omega)(d\lambda)} \quad (13.3)$$

donde $I(\lambda, \theta, \phi, T)$ es la intensidad de radiación espectral. Definiendo a

$$\delta q_\lambda(T) = \frac{\delta q(T)}{d\lambda} \quad (13.4)$$

como la emisión de energía de radiación por unidad de intervalo de longitud de onda, la ecuación (13.3) puede reescribirse como:

$$\delta q_\lambda(T) = I(\lambda, \theta, \phi, T) dA_1 \cos \theta \cdot d\omega \quad (13.5)$$



Además, el ángulo sólido en coordenadas esféricas tiene la forma:

$$d\omega = \frac{dA_\Omega}{r^2} = \frac{r^2 \sin \theta d\theta d\phi}{r^2} \quad (13.6)$$

$$d\omega = \sin \theta d\theta d\phi \quad (13.7)$$

reemplazando en $\delta q_\lambda(T)$,

$$\delta q_\lambda(T) = I(\lambda, \theta, \phi, T) dA_1 \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi \quad (13.8)$$

El cambio total de emisión de energía de radiación de longitud de onda λ , conocida como la potencia emisiva espectral y denotada como E_λ , que sale de una superficie en todas las direcciones por unidad de área superficial, por unidad de intervalo $d\lambda$, es:

$$E_\lambda = \frac{1}{dA_1} \int \int \delta q_\lambda(T) \quad (13.9)$$

reemplazando $\delta q_\lambda(T)$,

$$E_\lambda = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} I(\lambda, \theta, \phi, T) \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi \quad (13.10)$$

y en este caso E_λ es llamado potencia emisiva de radiación hemisférica. El poder hemisférico total emisivo corresponde a la energía de radiación por unidad de área en todas las direcciones y en todas las longitudes de onda posibles que se emite.

13.3 Energía de radiación entre cuerpos negros

Un cuerpo a una temperatura superior al cero absoluto emite radiación en todas las direcciones en un amplio rango de longitudes de onda. La cantidad de radiación de la superficie de un cuerpo a una temperatura dada y a una determinada longitud de onda depende del material del cuerpo y de la naturaleza de su superficie. Por lo tanto, diferentes cuerpos emiten diferentes cantidades de radiación incluso bajo idénticas condiciones de temperatura. Con el fin de comparar las propiedades radiativas de superficies reales, se ha elaborado el concepto de superficie idealizada que es un emisor y absorbente perfecto de radiación. Esta superficie ideal se conoce como **cuerpo negro** y tiene las siguientes características:

- La radiación de cuerpo negro emite radiación uniformemente en todas las direcciones y absorbe toda la radiación incidente independientemente de longitud de onda y dirección de los rayos.
- Para una longitud de onda y temperatura dada, ninguna superficie puede emitir más energía de radiación que la que emite un cuerpo negro.

La distribución de Planck de la radiación del cuerpo negro está dada por

$$I_{\lambda,b}(\lambda, T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5 \left(e^{\frac{hc}{k_B \lambda T}} - 1 \right)} \quad (13.11)$$

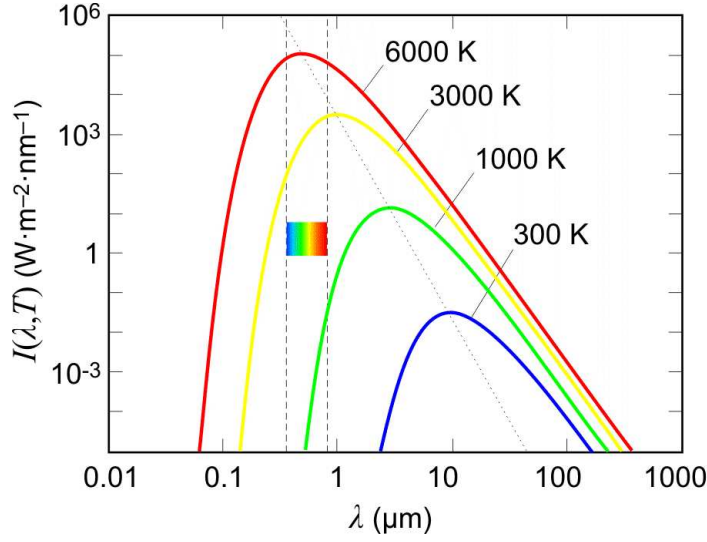


Figura 13.1: Intensidad de la radiación de un cuerpo negro versus la longitud de onda

donde $I_{\lambda,b}$ es la intensidad del cuerpo negro, h , k_B y c es la constante de Planck, la constante de Boltzman y la velocidad de la luz, respectivamente.

La variación del poder emisor del cuerpo negro se calcula reemplazando $I_{\lambda,b}(\lambda, T)$ en la ecuación (13.10):

$$E_{b,\lambda} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{2hc^2}{\lambda^5 \left(e^{\frac{hc}{k_B \lambda T}} - 1 \right)} \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi \quad (13.12)$$

integrando se obtiene:

$$E_{b,\lambda,T} = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5 \left(e^{\frac{hc}{k_B \lambda T}} - 1 \right)} \quad (13.13)$$

reemplazando (13.11), se obtiene:

$$E_{b,\lambda} = \pi I_b(\lambda, T) \quad (13.14)$$

La longitud de onda máxima, λ_{max} en la distribución de Planck, alcanza un máximo dado por:

$$\lambda_{max} \approx \frac{2898 \mu m K}{T} \quad (13.15)$$

La ecuación (13.15) es conocida como la ley de desplazamiento de Wien y vincula el máximo longitud de onda de emisión térmica y temperatura del medio.

13.3.1 Ley de Stefan-Boltzmann

El poder emisor total de un cuerpo negro E_b , es decir, el cambio total de energía de radiación emitida por un cuerpo negro a una temperatura absoluta T en todas las longitudes de onda por unidad de área, se obtiene integrando la ecuación (13.13)

$$E_b = \int_0^\infty \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5 \left(e^{\frac{hc}{\lambda T}} - 1 \right)} d\lambda \quad (13.16)$$

realizando el siguiente cambio de variable de $\lambda T = x$, la integral se reescribe como:

$$E_b = T^4 2\pi hc^2 \int_0^\infty \frac{dx}{x^5 \left(e^{\frac{hc}{kx}} - 1 \right)} \quad (13.17)$$

y la integral tiene un valor de

$$2\pi hc^2 \int_0^\infty \frac{dx}{x^5 \left(e^{\frac{hc}{kx}} - 1 \right)} \approx 5.67 \times 10^{-8} \quad (13.18)$$

Así que, la integración del poder emisor del cuerpo negro en todo el espectro da como resultado la ley de Stefane Boltzmann,

$$E_b = \sigma T^4 \quad (13.19)$$

donde σ es la constante de Stefane Boltzmann y tiene como valor 5.67×10^{-8} W/(m²K⁴).

13.3.2 Emisividad espectral

En la ecuación (13.13) se calculó la variación del poder emisor del cuerpo negro y en términos de la temperatura T , $E_{b,\lambda,T}$. Ahora, la relación entre el poder emisor espectral de un cuerpo cualquiera $E_{\lambda,T}$ y el de un cuerpo negro $E_{b,\lambda,T}$, se define como emisividad espectral $\epsilon_{\lambda,T}$ del cuerpo:

$$\epsilon_{\lambda,T} = \frac{E_{\lambda,T}}{E_{b,\lambda,T}} \quad (13.20)$$

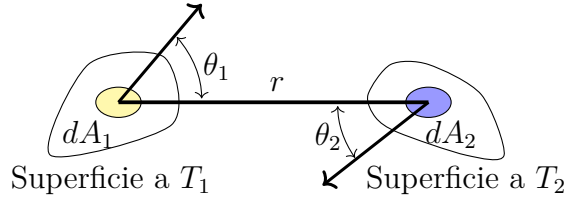
Si se integra cada poder emisor espectral en todas las longitudes de onda, se obtiene la emisividad total ϵ_T ,

$$\epsilon_T = \frac{\int_0^\infty E_{\lambda,T} d\lambda}{\int_0^\infty E_{b,\lambda,T} d\lambda} \quad (13.21)$$

donde, el poder emisor de un cuerpo negro es mayor que el de cualquier otro cuerpo y, por lo tanto, la emisividad ϵ_T de cualquier cuerpo (o superficie) es siempre menor que la unidad. Un cuerpo (o superficie) cuyas propiedades de radiación son independientes de la longitud de onda se conoce como *cuerpo gris*. Por tanto, la emisividad

de un cuerpo gris es la misma en todas las longitudes de onda y, por tanto, la misividad espectral es igual a la emisividad total.

Ahora, suponga que se tiene dos superficies de áreas A_1 y A_2 a diferentes temperaturas T_1 y T_2 que intercambian energía de radiación entre ellas y se desea encontrar la energía de radiación neta que se intercambia entre ellas.



Como la energía de radiación que emite cada una de las superficies es en todas las direcciones, son emisores difusos y por lo tanto toda la energía emitida por cada superficie no llega a la otra superficie. En este caso se debe de definir la fracción de energía que sale de la superficie i que alcanza la superficie j , y se denota como F_{ij} .

Sí I_1 es la intensidad de la radiación que sale del elemento de superficie dA_1 difusamente en todas direcciones, entonces la cantidad de radiación que sale del elemento de superficie dA_1 y llega al elemento de superficie dA_2 es:

$$\delta Q_{1-2} = I_1 (dA_1 \cos \theta_1) \omega_{1-2} \quad (13.22)$$

donde ω_{1-2} es el ángulo sólido bajo el cual un observador en dA_1 ve el elemento de superficie dA_2 . Recordando que la ecuación (13.14) relaciona la intensidad con el poder emisor del cuerpo negro mediante la relación $E_{b,\lambda} = \pi I_b(\lambda, T)$, entonces,

$$\delta Q_{1-2} = \frac{E_{b,\lambda}}{\pi} (dA_1 \cos \theta_1) \omega_{1-2} \quad (13.23)$$

Ahora, de acuerdo con las Figuras anteriores, el ángulo sólido puede expresarse como:

$$\omega_{1-2} = \frac{dA_2 \cos \theta_2}{r^2} \quad (13.24)$$

reemplazando se obtiene,

$$\delta Q_{1-2} = E_{b1,\lambda} \cos \theta_1 \cos \theta_2 \frac{dA_1 dA_2}{\pi r^2} \quad (13.25)$$

Realizando el mismo procedimiento para analizar la cantidad de radiación que sale de dA_2 y llega a dA_1 , se obtiene:

$$\delta Q_{2-1} = E_{b2,\lambda} \cos \theta_1 \cos \theta_2 \frac{dA_1 dA_2}{\pi r^2} \quad (13.26)$$

Con las ecuaciones (13.25) y (13.26), se puede estimar la variación energía de radiación neta de intercambio entre las áreas dA_1 y dA_2 ,

$$\delta Q_{neta} = \left(E_{b1,\lambda} - E_{b2,\lambda} \right) \cos \theta_1 \cos \theta_2 \frac{dA_1 dA_2}{\pi r^2} \quad (13.27)$$

mientras que la energía de radiación neta entre las superficies A_1 y A_2 corresponde a la integración sobre las áreas,

$$\delta Q_{neta} = \left(E_{b1,\lambda} - E_{b2,\lambda} \right) \int_{A_1} \int_{A_2} \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{\pi r^2} dA_1 dA_2 \quad (13.28)$$

Ahora, sí la energía que sale de la superficie A_1 y llega a la superficie A_2 es: $E_{b1} A_1 F_{12}$ y la energía que sale de la superficie A_2 y llega a la superficie A_1 es: $E_{b2} A_2 F_{21}$, donde F_{ij} se conoce como el *factor visión* y corresponde a la fracción de energía de radiación que sale del área A_i y llega al área A_j . En éste caso la variación de la energía neta entre las dos superficies es:

$$\delta Q_{neta} = E_{b1} A_1 F_{12} - E_{b2} A_2 F_{21} \quad (13.29)$$

comparando las ecuaciones (13.28) y (13.29) se obtienen la fracción de energía que salen del área 1 y llega al área 2, F_{12} :

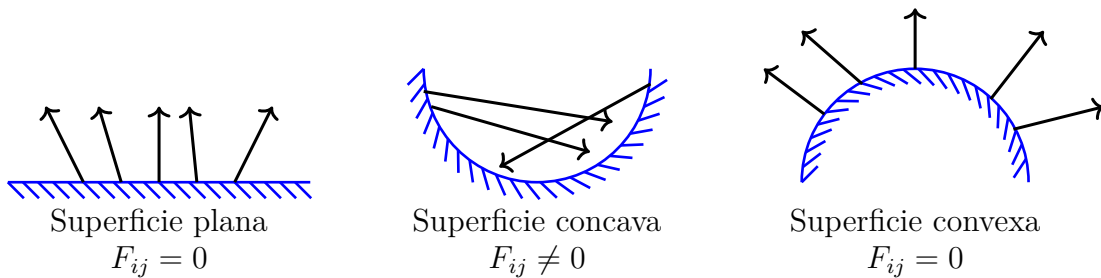
$$F_{12} = \frac{1}{A_1} \int_{A_1} \int_{A_2} \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{\pi r^2} dA_1 dA_2 \quad (13.30)$$

y la fracción de energía que salen del área 2 y llega al área 1, F_{21} es :

$$F_{21} = \frac{1}{A_2} \int_{A_1} \int_{A_2} \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{\pi r^2} dA_1 dA_2 \quad (13.31)$$

13.3.3 Factor visión F_{ij} en diferentes superficies

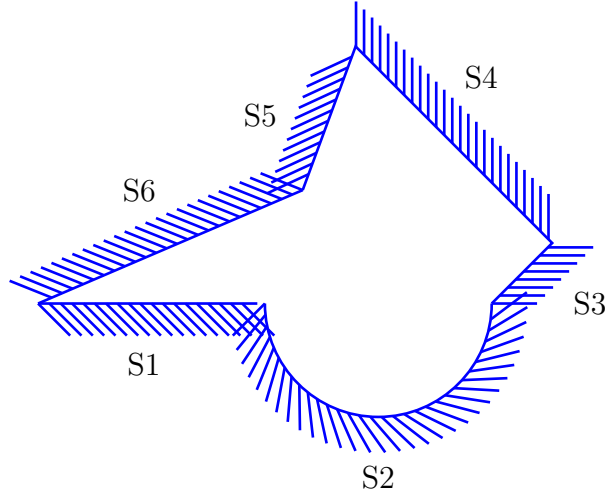
Para diferentes formas superficiales abiertas, tales como se presentan en la siguiente Figura:



En las tres Figuras se observa la divergencia y convergencia de la energía emitida por las tres superficies. Se observa que el factor visión F_{ij} es:

$$F_{ij} \begin{cases} = 0 & \text{superficies planas y convexas} \\ \neq 0 & \text{superficie convcava} \end{cases} \quad (13.32)$$

Para determinar el factor visión para una superficie cerrada, cosidere la siguiente superficie cerrada que consta de 6 superficies: S1, S2, S3, S4, S5 y S6.



En este caso el factor visión F_{ij} es una matriz de 6×6 :

$$F_{ij} = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & F_{14} & F_{15} & F_{16} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & F_{24} & F_{25} & F_{26} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & F_{34} & F_{35} & F_{36} \\ F_{41} & F_{42} & F_{43} & F_{44} & F_{45} & F_{46} \\ F_{51} & F_{52} & F_{53} & F_{54} & F_{55} & F_{56} \\ F_{61} & F_{62} & F_{63} & F_{64} & F_{65} & F_{66} \end{pmatrix} \quad (13.33)$$

y en el caso general, para una superficie cerrada de N superficies, el factor visión es:

$$F_{ij} = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & \cdots & F_{1N} \\ F_{21} & F_{22} & \cdots & F_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ F_{N1} & F_{N2} & \cdots & F_{NN} \end{pmatrix} \quad (13.34)$$

donde F_{ii} corresponde a la fracción de energía emitida y absorbida en la misma superficie, mientras que F_{ij} es la fracción de energía radioactiva emitida por la superficie i y absorbida por la superficie j . Una relación que se debe de cumplir es la relación de reciprocidad, la cual se cumple cuando las temperaturas de las superficies son iguales ($T_1 = T_2$) y está dad por la siguiente expresión:

$$A_i F_{ij} = A_j F_{ji} \quad (13.35)$$

Asi que se tienen

$$\binom{N}{2} = \frac{N!}{2!(N-2)!} = \frac{N(N-1)}{2} \quad (13.36)$$

generando $\frac{N(N-1)}{2}$ relaciones o condiciones que ayudan a reducir el número de factores visión F_{ij} de la matriz (13.34). Otra condición que se debe de cumplir es la suma de los factores de visión:

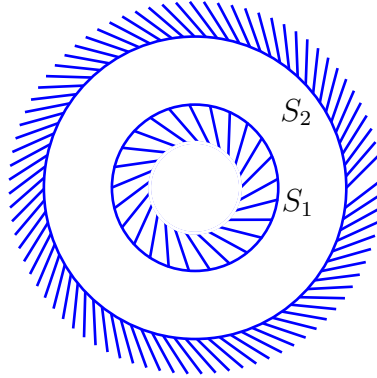
$$\sum_{j=1}^N F_{ij} = 1 \quad \text{para } i = 1, \dots, N. \quad (13.37)$$

Así, el número total de factores de visión F_{ij} en las N superficies que forman la superficie cerrada es:

$$N^2 - \frac{N(N-1)}{2} - N = N^2 - \frac{1}{2}N^2 + \frac{1}{2}N - N \quad (13.38)$$

$$N^2 - \frac{N(N-1)}{2} - N = \frac{N(N-1)}{2} \quad (13.39)$$

Problema 13.1 Considere dos esferas concéntricas como se muestra en la Figura. La superficie exterior de la esfera interior se designa como 1, mientras que la superficie interior de la esfera exterior se designa como 2. Determine todos los factores de vista asociados a este arreglo de esferas concéntricas.



Solución.

Se observa que existen dos superficies: S_1 y S_2 , es decir $N = 2$ y por lo tanto se tiene que el número de factores de visión son $2^2 = 4$. Los factores de visión son: F_{11} , F_{12} , F_{21} y F_{22} .

- La superficie S_1 es una superficie convexa y por lo tanto $F_{11} = 0$.
- La regla de las sumas, ecuación (13.37), genera las dos siguientes ecuaciones:

$$\sum_{j=1}^N F_{1j} = 1 \rightarrow F_{11} + F_{12} = 1 \rightarrow F_{12} = 1 \quad (13.40)$$

y

$$\sum_{j=1}^N F_{2j} = 1 \rightarrow F_{21} + F_{22} = 1 \quad (13.41)$$

- La relación recíproca, ecuación (13.35), genera la siguiente ecuación:

$$A_1 F_{12} = A_2 F_{21} \quad (13.42)$$

y de acuerdo con el resultado de la ecuación (13.40), se obtiene:

$$F_{21} = \frac{A_1}{A_2} \quad (13.43)$$

y reemplazando este resultado en (13.41), se obtiene:

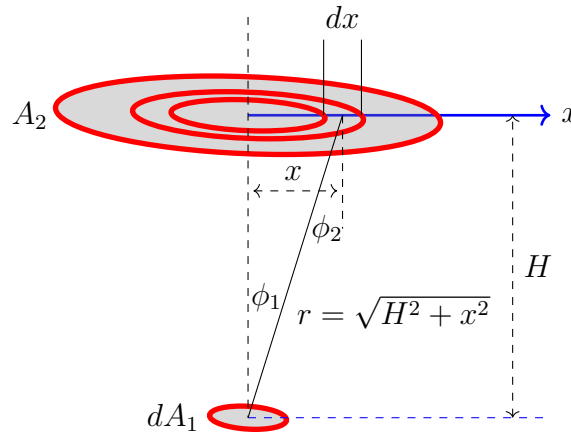
$$F_{22} = 1 - F_{21} = 1 - \frac{A_1}{A_2} \quad (13.44)$$

$$F_{22} = 1 - \frac{A_1}{A_2} \quad (13.45)$$

En resumen, los factores visión para este sistema de esferas concéntricas son:

$$F_{11} = 0, F_{12} = 1, F_{21} = \frac{A_1}{A_2}, F_{22} = 1 - \frac{A_1}{A_2} \quad (13.46)$$

Problema 13.2 Considere una superficie de área dA_1 y un disco plano circular de área A_2 paralelos entre sí y separados por una distancia H como se muestra en la Figura.



La superficie dA_1 se designa como 1 y la superficie del disco plano circular como A_2 se designa como 2. Determine el factor de visión F_{12} .

Solución

Para un disco de radio x y espesor dx como se puede apreciar en la Figura, el elemento de área dA_2 es:

$$dA_2 = 2\pi x dx \quad (13.47)$$

Además, se observa que los ángulos ϕ_1 y ϕ_2 son iguales:

$$\phi_1 = \phi_2 \quad (13.48)$$

Para encontrar el factor visión F_{12} , se usa la ecuación (13.30)

$$F_{12} = \frac{1}{A_1} \int_{A_1} \int_{A_2} \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{\pi r^2} dA_1 dA_2 \quad (13.49)$$

donde $A_1 = dA_1$, $\phi_1 = \phi_2$ y $dA_2 = 2\pi x dx$. reemplazando estos datos,

$$F_{12} = \frac{dA_1}{dA_1} \int_{A_2} \frac{\cos^2 \phi_1}{\pi r^2} 2\pi x dx \quad (13.50)$$

de la Figura se obtiene el $\cos \phi_1$,

$$r = \sqrt{H^2 + x^2} \quad (13.51)$$

$$\cos \phi_1 = \frac{H}{\sqrt{H^2 + x^2}} \quad (13.52)$$

reemplazando en la integral,

$$F_{12} = \int_0^{D/2} \frac{H^2}{(H^2 + x^2)} \frac{2x}{(H^2 + x^2)} dx \quad (13.53)$$

donde D es el diámetro del disco de área A_2 .

$$F_{12} = H^2 \int_0^{D/2} \frac{2x}{(H^2 + x^2)^2} dx \quad (13.54)$$

La integral se puede reescribir como:

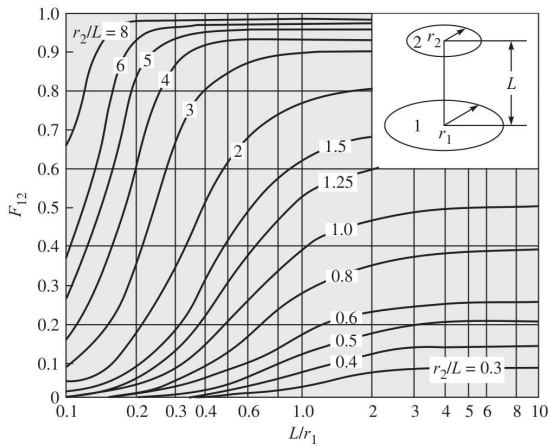
$$F_{12} = H^2 \int_0^{D/2} \frac{d(H^2 + x^2)}{(H^2 + x^2)^2} \quad (13.55)$$

integrando,

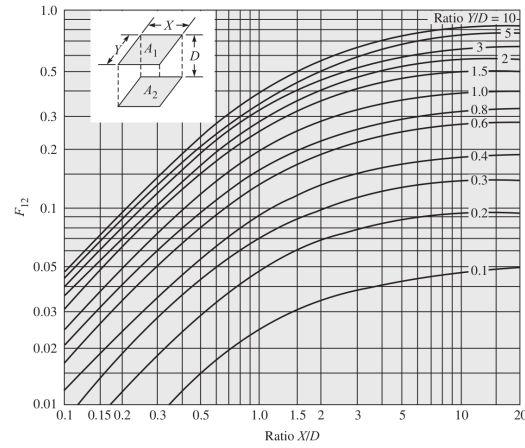
$$F_{12} = H^2 \left[-\frac{1}{H^2 + x^2} \right]_0^{D/2} \quad (13.56)$$

dando como resultado,

$$F_{12} = \frac{D^2}{4H^2 + D^2} \quad (13.57)$$



(a) Discos coaxiales paralelos

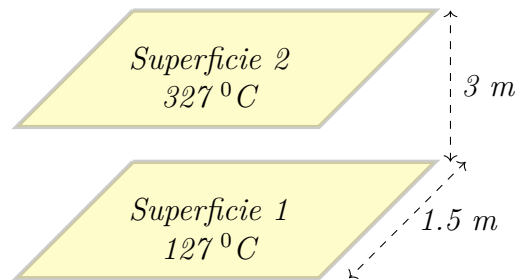


(b) Rectángulos paralelos

Figura 13.2: Factor vista (ref: Introduction to heat transfer by S.K. Som)

Los factores visión para las geometrías más comunes ya se encuentran tabulados y sus valores pueden extrapolarse de Figuras. Por ejemplo, para dos discos y planos paralelos, las Figuras son las siguientes:

Problema 13.3 Dos rectángulos de cuerpo negro de 1.5 m por 3.0 m se encuentran paralelos, como se muestra en la Figura.



Los rectángulos están separados por 3 m. Si la superficie 1 se encuentra a una temperatura de 127 °C y la superficie 2 a 327 °C, determine:

- La velocidad de transferencia de calor Q_{12}
- La pérdida de energía de la superficie a 127, si el entorno que no sea las dos superficies se comporta como un cuerpo negro a 0 °C y a 327 °C.

Solución

- La velocidad de transferencia de calor Q_{12} . Usando la ecuación (13.29)

$$\delta Q_{1-2} = E_{b1}A_1F_{12} - E_{b2}A_2F_{21} \quad (13.58)$$

y de acuerdo con la relación de reciprocidad, ecuación (13.35), se tiene:

$$A_1 F_{12} = A_2 F_{21} \quad (13.59)$$

y como $A_1 = A_2$, entonces $F_{12} = F_{21}$, por lo tanto,

$$\delta Q_{1-2} = E_{b1} A_1 F_{12} - E_{b2} A_2 F_{12} \quad (13.60)$$

$$\delta Q_{1-2} = A_1 F_{12} (E_{b1} - E_{b2}) \quad (13.61)$$

y de acuerdo con la ley de Stefan-Boltzmann, ecuación (13.19),

$$\delta Q_{1->2} = A_1 F_{12} (\sigma T_1^4 - \sigma T_2^4) \quad (13.62)$$

$$\delta Q_{1->2} = A_1 F_{12} \sigma (T_1^4 - T_2^4) \quad (13.63)$$

para encontrar el valor del factor visión F_{12} , se debe de calcular las relaciones de:

$$\frac{X}{D} = \frac{3}{3} = 1 \quad (13.64)$$

$$\frac{Y}{D} = \frac{1.5}{3} = 0.5 \quad (13.65)$$

interceptando los valores de 1 y 0.5 en la Figura 13.2b se obtiene que $F_{12} \approx 0.11$. reemplazando todos los valores:

$$Q_{1->2} = (1.5)(3)(0.11)(5.67 \times 10^{-8}) (400^4 - 600^4) \quad (13.66)$$

$$Q_{1->2} \approx -2919 \text{ W.} \quad (13.67)$$

donde el signo menos indica que la transferencia neta del calor de radiación va desde la superficie 2 a la superficie 1.

- La pérdida de energía de la superficie a 127, si el entorno que no sea las dos superficies se comporta como un cuerpo negro a 0 K. La superficie 1 recibe energía solo de la superficie 2, ya que el entorno está a 0 K. Por lo tanto,

$$Q_1 = A_1 E_{b1} - A_2 F_{21} E_{b2} \quad (13.68)$$

como $A_1 = A_2$, entonces la relación de reciprocidad es:

$$F_{21} = F_{12} \quad (13.69)$$

reemplazando,

$$Q_1 = A_1 E_{b1} - A_2 F_{12} E_{b2} \quad (13.70)$$

$$Q_1 = A_1 \sigma \left(T_1^4 - F_{12} T_2^4 \right) \quad (13.71)$$

reemplazando datos,

$$Q_1 = (1.5)(3)(5.67 \times 10^{-8}) \left((400)^4 - (0.11)(600)^4 \right) \quad (13.72)$$

$$Q_1 \approx 2894 \text{ W}. \quad (13.73)$$

En el caso en que el entorno esté a 300 K, la energía recibida del entorno por la superficie 1 debe de tenerse en cuenta. Aplicando la regla de la suma del factor vista:

$$F_{11} + F_{12} + F_{1s} = 1 \quad (13.74)$$

donde el subíndice s indica la superficie de los alrededores.

$$F_{1s} = 1 - F_{11} - F_{12} = 1 - 0 - 0.11 \quad (13.75)$$

$$F_{1s} = 0.89 \quad (13.76)$$

$$Q_1 = A_1 E_{b1} - A_2 F_{21} E_{b2} - A_s F_{1s} E_{bs} \quad (13.77)$$

usando las relaciones de reciprocidad,

$$A_2 F_{21} = A_1 F_{12} \quad (13.78)$$

$$A_s F_{s1} = A_1 F_{1s} \quad (13.79)$$

se puede escribir,

$$Q_1 = A_1 \left(E_{b1} - F_{12} E_{b2} - F_{1s} E_{bs} \right) \quad (13.80)$$

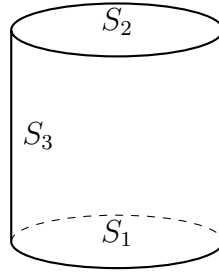
$$Q_1 = A_1 \sigma \left(T_1^4 - F_{12} T_2^4 - F_{1s} T_s^4 \right) \quad (13.81)$$

reemplazando valores,

$$Q_1 = (1.5)(3)(5.67 \times 10^{-8}) \left((400)^4 - (0.11)(600)^4 - (0.89)(300)^4 \right) \quad (13.82)$$

$$Q_1 \approx 1055 \text{ W}. \quad (13.83)$$

Problema 13.4 Considere el cilindro que se muestra en la Figura. Determine el factor de vista de la superficie cilíndrica con respecto a la base, cuando $L = 2r$.



En la Figura, S_1 , S_2 y S_3 indican las superficies de la base, de la tapa y la superficie cilíndrica, respectivamente. Para $L = 2r$ de la Figura de factores de visión para dos platos cilíndricos y paralelos, se encuentra que:

$$F_{12} \approx 0.16 \quad (13.84)$$

donde las relaciones entre la altura del cilindro y los radios son:

$$\frac{L}{r_1} = \frac{2r}{r} = 2 \rightarrow \frac{L}{r_1} = 2 \quad (13.85)$$

y

$$\frac{r_2}{L} = \frac{r}{2r} = 0.5 \rightarrow \frac{r_2}{L} = 0.5 \quad (13.86)$$

Ahora, interceptando los valores de 2 y 0.5 en la Figura de factor visión, se obtiene que $F_{12} \approx 0.16$. Usando la regla de la suma,

$$F_{11} + F_{12} + F_{13} = 1 \quad (13.87)$$

pero $F_{11} = 0$ por ser una superficie plana. Entonces,

$$F_{13} = 1 - 0.16 \quad (13.88)$$

$$F_{13} = 0.84 \quad (13.89)$$

Usando el teorema de reciprocidad,

$$F_{31} = \frac{A_1}{A_3} F_{13} \quad (13.90)$$

$$F_{31} = \frac{\pi r^2}{2\pi r(2r)} F_{13} = \frac{1}{4} F_{13} = \frac{0.84}{4} \quad (13.91)$$

es decir,

$$F_{31} \approx 0.21 \quad (13.92)$$

y por lo tanto, los resultados son:

$$F_{11} = 0; F_{12} = 0.16; F_{13} = 0.84; F_{31} \approx 0.21 \quad (13.93)$$

13.4 Energía de radiación entre cuerpos no-negros

Hasta ahora hemos considerado el intercambio de energía de radiación entre cuerpos negros. Si los cuerpos que intercambian energía no son negros, la situación se vuelve más compleja. Esto se debe a que toda la energía que golpea una superficie no será absorbida, una parte se reflejará de regreso a otra superficie de transferencia de calor y una parte puede reflejarse fuera del sistema.

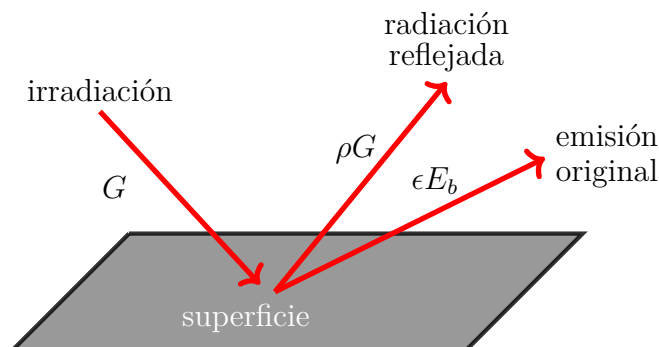
En este contexto, se debe de definir dos términos importantes: *la radiosidad* y *la irradiación*. La radiosidad se define como la energía de radiación total que sale de una superficie por unidad de tiempo y por unidad de área y se denota con el símbolo J . La irradiación se define como la energía de radiación total incidente en una superficie por unidad de tiempo por unidad de área y se denota con el símbolo G . La relación entre J y G , está dada por la expresión:

$$J = \epsilon E_b + \rho G \quad (13.94)$$

donde ϵ y ρ corresponden a la emisividad y reflectividad de la superficie, respectivamente.

13.4.1 Resistencia superficial a la transferencia de radiación

Considere una superficie no negra como se muestra en la Figura.



Se supone que la superficie es difusa, uniforme en temperatura y que las propiedades de radiación son constantes en toda la superficie. Si las propiedades de la radiación se consideran independientes de la longitud de onda, significa que la superficie es gris (opaca). Si la superficie es considerada opaca, entonces la relación entre la emisividad y reflectividad es:

$$\rho = 1 - \epsilon \quad (13.95)$$

y

$$J = \epsilon E_b + (1 - \epsilon)G \quad (13.96)$$

La energía neta Q que sale de la superficie es la diferencia entre la radiosidad y la irradiación. Así:

$$\frac{Q}{A} = J - G \quad (13.97)$$

sustituyendo (13.96) en (13.97)

$$\frac{Q}{A} = \epsilon E_b + (1 - \epsilon)G - G \quad (13.98)$$

$$\frac{Q}{A} = \epsilon E_b + G - \epsilon G - G \quad (13.99)$$

$$\frac{Q}{A} = \epsilon E_b - \epsilon G \quad (13.100)$$

y de (13.96),

$$G = \frac{J - \epsilon E_b}{1 - \epsilon} \quad (13.101)$$

reemplazando,

$$\frac{Q}{A} = \epsilon E_b - \epsilon \frac{J - \epsilon E_b}{1 - \epsilon} = \frac{\epsilon E_b - \epsilon^2 E_b - \epsilon J + \epsilon^2 E_b}{1 - \epsilon} \quad (13.102)$$

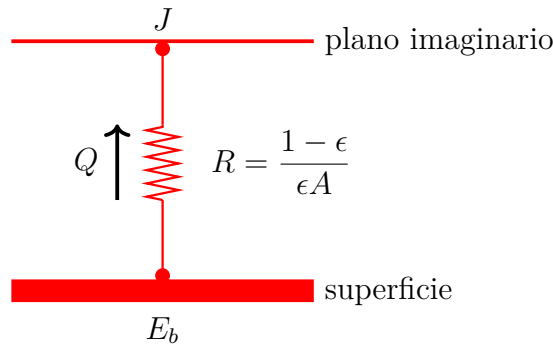
$$\frac{Q}{A} = \frac{\epsilon E_b - \epsilon J}{1 - \epsilon} = \frac{\epsilon}{1 - \epsilon} (E_b - J) \quad (13.103)$$

$$Q = \frac{\epsilon A}{1 - \epsilon} (E_b - J) \quad (13.104)$$

reescribiendo la ecuación como:

$$Q = \frac{E_b - J}{\frac{1 - \epsilon}{\epsilon A}} \quad (13.105)$$

El numerador de esta ecuación, puede verse como una diferencia de potencial en la superficie y el denominador como la resistencia de la superficie al flujo neto de calor de radiación desde la superficie. La ecuación (13.105) puede expresarse como una red eléctrica, la cual se muestra en la siguiente Figura:



13.4.2 Caso especial

Sí la superficie es negra, se tiene que $\epsilon = 1$ y por lo tanto la resistencia es $R = 0$, así que la ecuación (13.96) se reduce a:

$$J = E_b \quad (13.106)$$

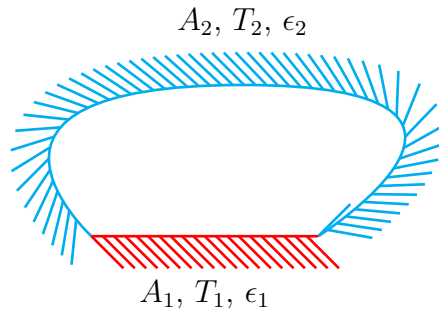
y de acuerdo con la ley de Stefan-Boltzmann, se obtiene que:

$$J = \sigma T^4 \quad (13.107)$$

En este caso, la radiosidad es igual al poder emisor del cuerpo negro de la superficie. Además, si la superficie tiene un área muy grande ($A \rightarrow \infty$), la resistencia superficial también es cero y $J = E_b$. En este caso no se quiere decir que la resistencia de la superficie es cero.

13.4.3 Superficie cerrada por dos superficies

Considere una superficie cerrada formada por dos superficies grises de áreas A_1 y A_2 como se muestra en la Figura:



Esto significa que solo hay intercambio de energía entre los dos superficies. La superficie A_1 posee una temperatura T_1 , mientras que la superficie A_2 tiene una temperatura T_2 . Asumiendo que $T_1 > T_2$, entonces la transferencia de radiación iría desde A_1 a A_2 . Si J_1 y J_2 son las radiosidades de las superficies A_1 a A_2 , respectivamente, entonces la energía de intercambio entre ellas las dos superficies es:

$$Q_{1 \rightarrow 2} = J_1 A_1 F_{12} - J_2 A_2 F_{21} \quad (13.108)$$

usando la relación de reciprocidad $A_1 F_{12} = A_2 F_{21}$,

$$Q_{1 \rightarrow 2} = J_1 A_1 F_{12} - J_2 A_1 F_{12} \quad (13.109)$$

$$\frac{Q_{1 \rightarrow 2}}{A_1 F_{12}} = J_1 - J_2 \quad (13.110)$$

Como la energía neta que sale de la superficie está dada por la ecuación (13.105), entonces para las dos superficies el intercambio de energía $Q_{1\rightarrow 2}$, en términos de la resistencia superficial son:

$$Q_{1\rightarrow 2} = \frac{E_{b1} - J_1}{\frac{1-\epsilon_1}{\epsilon_1 A_1}} \quad (13.111)$$

y en términos de J_2 , E_{b2} y ϵ_2 ,

$$Q_{1\rightarrow 2} = \frac{J_2 - E_{b2}}{\frac{1-\epsilon_2}{\epsilon_2 A_2}} \quad (13.112)$$

y la energía de intercambio neta se estima combinando las ecuaciones (13.110), (13.111) y de (13.112). Por ejemplo, de la ecuación (13.110) se despeja J_1 y se reemplaza en la ecuación (13.111):

$$Q_{1\rightarrow 2} = \frac{E_{b1} - \frac{Q_{1\rightarrow 2}}{A_1 F_{12}} - J_2}{\frac{1-\epsilon_1}{\epsilon_1 A_1}} \quad (13.113)$$

despejando J_2 de la ecuación (13.112),

$$J_2 = \frac{\epsilon_2 A_2}{1 - \epsilon_2} Q_{1\rightarrow 2} + E_{b2} \quad (13.114)$$

y reemplazando en la ecuación (13.113),

$$Q_{1\rightarrow 2} = \frac{E_{b1} - \frac{Q_{1\rightarrow 2}}{A_1 F_{12}} - \frac{\epsilon_2 A_2}{1 - \epsilon_2} Q_{1\rightarrow 2} - E_{b2}}{\frac{1-\epsilon_1}{\epsilon_1 A_1}} \quad (13.115)$$

$$\frac{1 - \epsilon_1}{\epsilon_1 A_1} Q_{1\rightarrow 2} = E_{b1} - \frac{Q_{1\rightarrow 2}}{A_1 F_{12}} - \frac{\epsilon_2 A_2}{1 - \epsilon_2} Q_{1\rightarrow 2} - E_{b2} \quad (13.116)$$

reuniendo términos,

$$\frac{1 - \epsilon_1}{\epsilon_1 A_1} Q_{1\rightarrow 2} + \frac{Q_{1\rightarrow 2}}{A_1 F_{12}} + \frac{\epsilon_2 A_2}{1 - \epsilon_2} Q_{1\rightarrow 2} = E_{b1} - E_{b2} \quad (13.117)$$

$$Q_{1\rightarrow 2} \left[\frac{1 - \epsilon_1}{\epsilon_1 A_1} + \frac{1}{A_1 F_{12}} + \frac{\epsilon_2 A_2}{1 - \epsilon_2} \right] = E_{b1} - E_{b2} \quad (13.118)$$

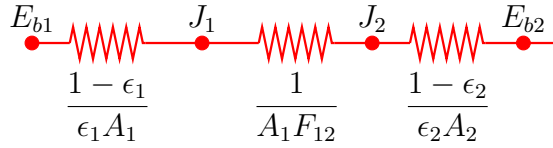
despejando $Q_{1\rightarrow 2}$,

$$Q_{1\rightarrow 2} = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{\frac{1-\epsilon_1}{\epsilon_1 A_1} + \frac{1}{A_1 F_{12}} + \frac{\epsilon_2 A_2}{1-\epsilon_2}} \quad (13.119)$$

y según la ley de Stefan-Boltzmann, ecuación (13.19),

$$Q_{1\rightarrow 2} = \frac{\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1-\epsilon_1}{\epsilon_1 A_1} + \frac{1}{A_1 F_{12}} + \frac{1-\epsilon_2}{\epsilon_2 A_2}} \quad (13.120)$$

La ecuación (13.120) indica que el intercambio de calor entre dos superficies se puede representar por una red de circuitos como se muestra en la siguiente Figura.

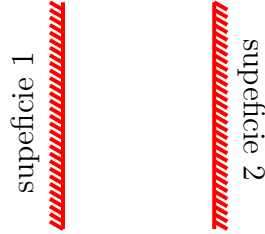


Cuando las superficies son negras, las resistencias superficiales $\frac{1 - \epsilon_1}{\epsilon_1 A_1}$ y $\frac{1 - \epsilon_2}{\epsilon_2 A_2}$ son cero y la ecuación (13.120) se reduce a:

$$Q_{1 \rightarrow 2} = A_1 F_{12} \sigma (T_1^4 - T_2^4) \quad (13.121)$$

Placas paralelas e infinitas

En el caso que se tenga dos superficies paralelas e infinitas, como lo muestra la Figura:



En la ecuación (13.120) se reemplaza $A_1 = A_2 = A$ y $F_{12} = 1$,

$$Q_{1 \rightarrow 2} = \frac{\sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1 - \epsilon_1}{\epsilon_1 A} + \frac{1}{A} + \frac{1 - \epsilon_2}{\epsilon_2 A}} \quad (13.122)$$

$$Q_{1 \rightarrow 2} = \frac{A \sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1 - \epsilon_1}{\epsilon_1} + 1 + \frac{1 - \epsilon_2}{\epsilon_2}} \quad (13.123)$$

resolviendo el denominador,

$$\frac{1 - \epsilon_1}{\epsilon_1} + 1 + \frac{1 - \epsilon_2}{\epsilon_2} = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_2 \epsilon_1 + \epsilon_1 - \epsilon_1 \epsilon_2}{\epsilon_1 \epsilon_2} + 1 \quad (13.124)$$

$$\frac{1 - \epsilon_1}{\epsilon_1} + 1 + \frac{1 - \epsilon_2}{\epsilon_2} = \frac{\epsilon_2 - 2\epsilon_2 \epsilon_1 + \epsilon_1}{\epsilon_1 \epsilon_2} + 1 \quad (13.125)$$

$$\frac{1 - \epsilon_1}{\epsilon_1} + 1 + \frac{1 - \epsilon_2}{\epsilon_2} = \frac{1}{\epsilon_1} - 2 + \frac{1}{\epsilon_2} + 1 \quad (13.126)$$

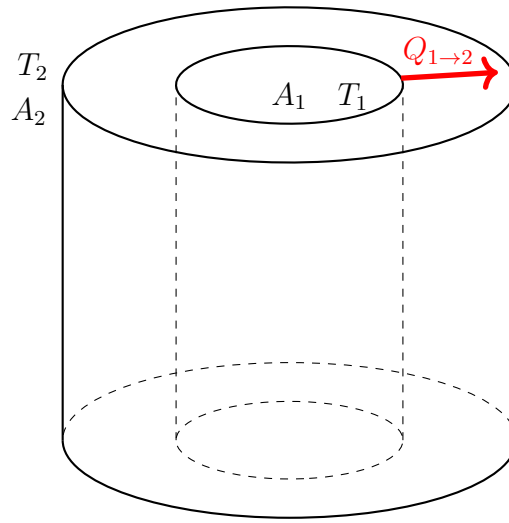
$$\frac{1 - \epsilon_1}{\epsilon_1} + 1 + \frac{1 - \epsilon_2}{\epsilon_2} = \frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} - 1 \quad (13.127)$$

reemplazando, se obtiene que el calor de radiación por unidad de área es:

$$\frac{Q}{A} = \frac{\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} - 1} \quad (13.128)$$

Cilindros concéntricos

En el caso de tener dos cilindros concéntricos de áreas A_1 y A_2 , como lo muestra la siguiente Figura,



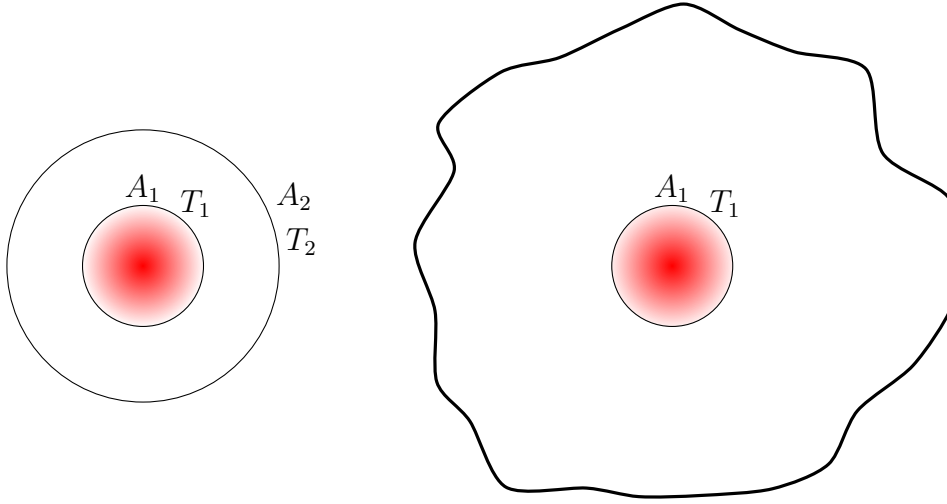
La ecuación (13.120) con $F_{12} = 1$, se reduce a:

$$Q_{1 \rightarrow 2} = \frac{A_1 \sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\epsilon_1} + \left(\frac{A_1}{A_2}\right) \left(\frac{1}{\epsilon_2} - 1\right)} \quad (13.129)$$

donde A_1 y A_2 son las áreas superficiales de los cilindros.

Esferas concéntricas

En el caso de dos esferas concéntricas, como lo muestra el lado izquierdo de la siguiente Figura,



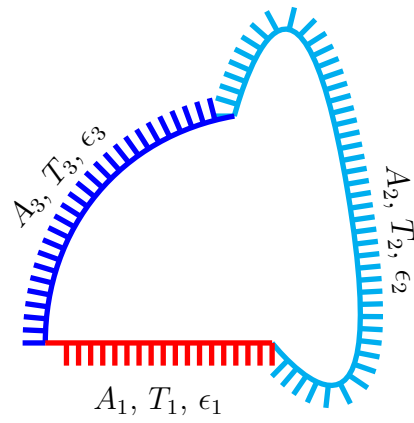
con $F_{12} = 1$, se puede analizar la ecuación de los cilindros concéntricos, ecuación (13.129), con la idea de que se tiene una superficie convexa dentro de un recinto muy grande (ver el lado derecho de la Figura), es decir, la relación de las áreas de las esferas es $\frac{A_1}{A_2} \rightarrow 0$. Por lo tanto, la ecuación (13.129) se reduce a:

$$Q_{1 \rightarrow 2} = \frac{A_1 \sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\epsilon_1}} \quad (13.130)$$

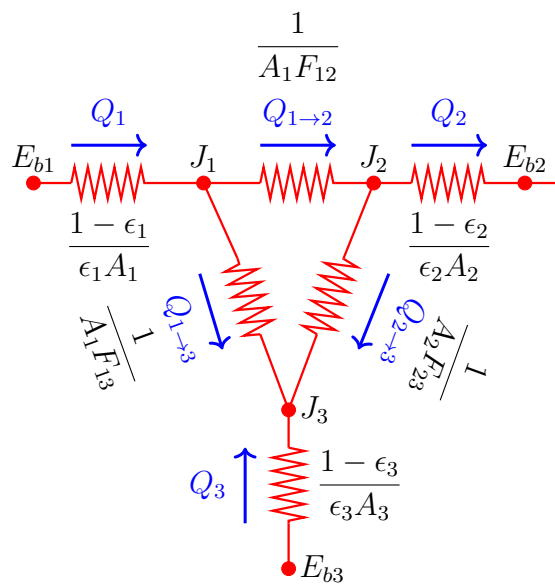
$$Q_{1 \rightarrow 2} = A_1 \epsilon_1 \sigma (T_1^4 - T_2^4) \quad (13.131)$$

13.4.4 Superficie cerrada por tres superficies

En el caso de una superficie cerrada por tres superficies como se muestra en la Figura,



la red de radiación es como se muestra en la Figura.



13.4.5 Apantamiento en la radiación

13.5 Radiación en un medio emisor absorbente

Parte III

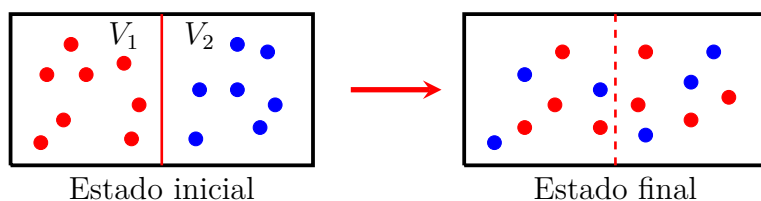
Transporte de Masa

Tema No. 14

Difusión másica

Dentro de las aplicaciones de transferencia de masa, se incluyen los procesos de dispersión de contaminantes, el secado, la humedad, segregación, dopaje de materiales, vaporización y condensación en mezclas, evaporación, adsorción en una interface y en sólidos, entre otros.

El movimiento espontáneo de partículas como iones, moléculas desde una región con mayor concentración a otra región con menor concentración se conoce como un proceso de difusión. El fenómeno de difusión es un proceso irreversible; por ejemplo si se considera dos sistemas gaseosos y se realiza un proceso isotérmico, como lo muestra la siguiente Figura:

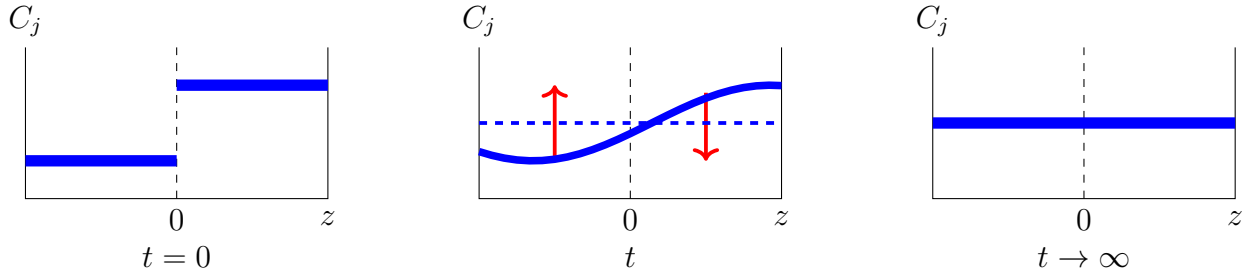


El balance de entropía en el estado inicial y final son:

$$(S_1 + S_2)_{\text{inicial}} = (n_1 + n_2)R \ln V \quad (14.1)$$

$$(S_1 + S_2)_{\text{final}} = (n_1 + n_2)R \ln 2V \quad (14.2)$$

observándose que $(S_1 + S_2)_{\text{final}} > (S_1 + S_2)_{\text{inicial}}$. Si se analiza el perfil de la concentración de cualquiera de las especies A o B a diferentes tiempos, se obtendrían las siguientes gráficas:



Las Figuras, de izquierda a derecha, muestran la evolución temporal de la concentración de las partículas en las regiones de alta y baja concentración hasta alcanzar el equilibrio.

14.1 Primera ley de Fick

En el sistema propuesto, ésta difusión desaparece cuando las diferencias de concentración desaparecen alcanzando el regimen estacionario. Experimentalmente, la velocidad del flujo $\frac{dn_j}{dt}$ a través del plano, es proporcional al área del plano y al gradiente de la concentración,

$$\frac{dn_j}{dt} = -D_{jk}A \frac{dC_j}{dz} \quad (14.3)$$

donde D_{jk} es una constante de proporcionalidad llamada constante de difusión binaria o difusividad de la masa y depende de la presión, temperatura y de las interacciones moleculares. Hay que tener en cuenta el orden de los subíndices, los cuales se refieren a la difusión de j en una mezcla con k , por lo que $D_{jk} \neq D_{kj}$. La ecuación (14.3) se conoce como la primera ley de Fick propuesta por Adolf Fick en 1855 y es válida para situaciones no muy alejadas del equilibrio, que es lo mismo, cuando la fuerza impulsadora o gradiente de la concentración, no es muy grande. En general, la ecuación de difusión para más de una dimensión es:

$$\mathbf{J}_A = -D_{AB} \nabla C_A \quad (14.4)$$

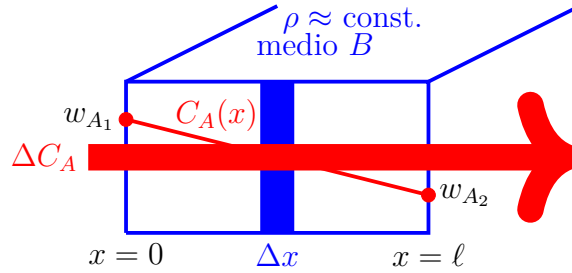
donde \mathbf{J}_A corresponde al número de partículas por unidad de área y de tiempo, C_A es el número de partículas A por unidad de volumen y D_{AB} es el coeficiente de difusión de A en B y es semejante a los coeficientes de difusividad térmica $\alpha = \frac{\kappa}{\rho c_p}$,

y cinética $\nu = \frac{\mu}{\rho}$. Todos éstos coeficientes tienen unidades de $\frac{\text{Long.}^2}{\text{tiempo}}$.

14.2 Ley de Ohm para la difusión másica

Considere una pared plana y sólida (medio B) de área \mathcal{A} y espesor ℓ y densidad ρ . La pared está sujeta a diferentes concentraciones en ambos lados de una especie A ,

a la cual es permeable. Las superficies fronteras, en $x = 0$ y $x = \ell$, están localizadas dentro del sólido adyacentes a las interfaces y las fracciones másicas de la especie A en las superficies se mantienen en w_{A_1} y w_{A_2} , respectivamente, en todo momento.



La fracción de masa de la especie A en la pared, varía solo en la dirección x y puede expresarse como $w_A(x)$. La concentración de A en cualquier punto no cambia con el tiempo, por lo tanto, de acuerdo con el principio de conservación de la masa, se cumple la siguiente relación:

$$\dot{m}_A = \mathbf{J}_A \mathcal{A} \quad (14.5)$$

y según la primera ley de Fick, ecuación (14.4),

$$\mathbf{J}_A = \frac{\dot{m}_A}{\mathcal{A}} = -D_{AB} \frac{dC_A}{dx} = \text{constante} \quad (14.6)$$

separando variables e integrando,

$$\frac{\dot{m}_A}{\mathcal{A}} \int_0^\ell dx = -D_{AB} \int_{w_{A_1}}^{w_{A_2}} dC_A \quad (14.7)$$

$$\frac{\dot{m}_A}{\mathcal{A}} \ell = -D_{AB} (w_{A_2} - w_{A_1}) \quad (14.8)$$

despejando la razón de transferencia de masa,

$$\dot{m}_A = -\frac{\mathcal{A} D_{AB}}{\ell} (w_{A_2} - w_{A_1}) \quad (14.9)$$

organizando,

$$\dot{m}_A = \frac{(w_{A_1} - w_{A_2})}{\frac{\ell}{\mathcal{A} D_{AB}}} \quad (14.10)$$

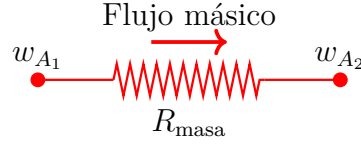
definiendo la resistencia de difusión de la pared como:

$$R_{\text{dif,pared}} \equiv \frac{\ell}{\mathcal{A} D_{AB}} \quad (14.11)$$

se obtiene la ley de Ohm para el flujo de masa:

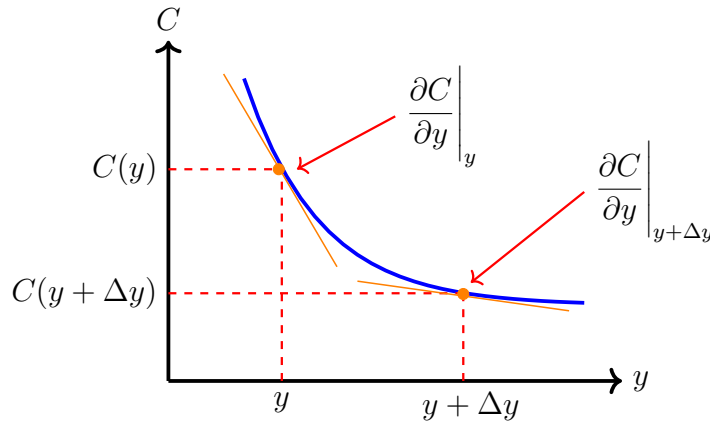
$$\dot{m}_A = \frac{w_{A1} - w_{A2}}{R_{\text{dif,pared}}} \quad (14.12)$$

El diagrama de ésta ley de Ohm se muestra en la siguiente Figura:



14.3 Segunda ley de Fick

Esta ley describe la difusión de una especie en estado no estacionario. La mayoría de las situaciones prácticas de difusión se presentan en estado no estacionario. En estas condiciones, se usa la variación de la concentración de la especie con respecto al tiempo $\frac{\partial C}{\partial t}$. La siguiente Figura muestra el perfil de concentraciones en la dirección de y ,



y en cualquier punto de la curva, la variación de la concentración $\frac{\partial C}{\partial y}$ es proporcional al flujo másico:

$$\mathbf{J} \propto \frac{\partial C}{\partial y} \quad \rightarrow \quad \mathbf{J} = -D \frac{\partial C}{\partial y} \quad (14.13)$$

ecuación que corresponde a la primera ley de Fick. Ahora, de la Figura, puede apreciarse que el flujo másico que cruza el plano en el punto y , $\mathbf{J}(y)$, es mayor que el flujo que pasa por el plano $y + \Delta y$, $\mathbf{J}(y + \Delta y)$, por lo que las diferencias de flujos másicos que cruzan por los dos planos corresponde a la variación temporal de la concentración másica de las especies:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\mathbf{J}(y) - \mathbf{J}(y + \Delta y)}{\Delta y} \quad (14.14)$$

es decir,

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial y} \quad (14.15)$$

y usando la primera ley de Fick, ecuación (14.13),

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -D \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \quad (14.16)$$

donde D es el coeficiente de difusión y se asumió como constante. En tres dimensiones, se obtiene:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -D \nabla^2 C \quad (14.17)$$

Esta ecuación es conocida como la segunda ley de Fick y es una ecuación de difusión másica.

14.3.1 Solución unidimensional a la ecuación de difusión

Usualmente, la ecuación de difusión es aplicada a la difusión de una especie a través de algún medio. La solución de ésta ecuación depende de la geometría del sistema y de la concentración inicial de la especie. Sin embargo, una solución fundamental es la difusión en un medio infinito (sin fronteras) con una condición inicial en el origen para la especie que se va a difundir. Esta solución es llamada la función de Green de la ecuación de difusión.

Tomando el caso de la difusión unidimensional, la ecuación de difusión a solucionar es:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < \infty \quad (14.18)$$

con condición inicial,

$$C(x, 0) = C_0 \delta(x) \quad (14.19)$$

Esta ecuación es sencilla de resolver usando transformadas de Fourier. Por lo tanto, sea la transformada:

$$\hat{C}(k, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} C(x, t) dx \quad (14.20)$$

realizando el cambio de variables:

$$u = C(x, t) \rightarrow du = \frac{\partial C}{\partial x} dx \quad (14.21)$$

$$dv = e^{ikx} dx, \rightarrow v = \int e^{ikx} dx, \rightarrow v = \frac{1}{ik} e^{ikx} \quad (14.22)$$

e integrando por partes se obtiene:

$$\hat{C}(k, t) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}ik} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \frac{\partial C(x, t)}{\partial x} dx \quad (14.23)$$

de nuevo, realizando el cambio de variables $u = \frac{\partial C(x, t)}{\partial x}$ y $dv = e^{ikx} dx$, se obtiene la ecuación:

$$-k^2 \hat{C}(k, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \frac{\partial^2 C(x, t)}{\partial x^2} dx \quad (14.24)$$

Ahora, derivando (14.20) con respecto al tiempo, se obtiene la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial \hat{C}(k, t)}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \frac{\partial C(x, t)}{\partial t} dx \quad (14.25)$$

Tomando la transformada de Fourier en ambos lados de la ecuación de difusión, ecuación (14.18),

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \frac{\partial C}{\partial t} dx = -\frac{D}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} dx \quad (14.26)$$

Además, tomando la transformada de Fourier a la condición inicial,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} C(x, 0) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} C_0 \delta(x) dx \quad (14.27)$$

se obtiene:

$$\hat{C}(k, 0) = \frac{C_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \delta(x) dx \quad (14.28)$$

$$\hat{C}(k, 0) = \frac{C_0 e^0}{\sqrt{2\pi}} \rightarrow \hat{C}(k, 0) = \frac{C_0}{\sqrt{2\pi}} \quad (14.29)$$

usando las ecuaciones (14.24), (14.25) y (14.29) se obtiene una ecuación diferencial sencilla:

$$\frac{\partial \hat{C}(k, t)}{\partial t} = -k^2 D \hat{C}(k, t) \quad (14.30)$$

con la siguiente condición inicial,

$$\hat{C}(k, 0) = \frac{C_0}{\sqrt{2\pi}} \quad (14.31)$$

La solución de ésta ecuación diferencial, es de forma logarítmica,

$$\ln \hat{C}(k, t) = -k^2 Dt + A \quad (14.32)$$

y como en $t = 0$, se obtiene:

$$\ln \left(\frac{C_0}{\sqrt{2\pi}} \right) = A \quad (14.33)$$

reemplazando en la solución,

$$\ln \hat{C}(k, t) = -k^2 Dt + \ln \left(\frac{C_0}{\sqrt{2\pi}} \right) \quad (14.34)$$

es decir,

$$\ln \left(\frac{\sqrt{2\pi} \hat{C}(k, t)}{C_0} \right) = -k^2 Dt \quad (14.35)$$

despejando $\hat{C}(k, t)$,

$$\hat{C}(k, t) = \frac{C_0}{\sqrt{2\pi}} e^{-k^2 Dt} \quad (14.36)$$

Ahora, se invierte la transformada,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-ikx} \hat{C}(k, t) dk = \frac{C_0}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-ikx} e^{-k^2 Dt} dk \quad (14.37)$$

$$C(x, t) = \frac{C_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-Dt(k^2 + \frac{ix}{Dt}k)} dk \quad (14.38)$$

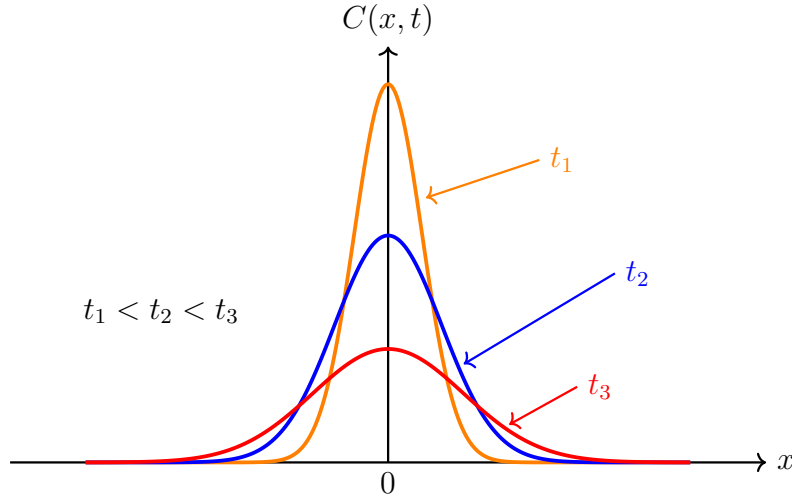
completando cuadrados en el exponencial,

$$C(x, t) = \frac{C_0 e^{-\frac{x^2}{4Dt}}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-Dt(k + \frac{ix}{2Dt})^2} dk \quad (14.39)$$

identificando la integral como una función Gaussiana, se obtiene como resultado final:

$$C(x, t) = \frac{C_0}{2\sqrt{\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \quad (14.40)$$

La ecuación (14.40) es la solución fundamental de la ecuación de difusión. La siguiente Figura, muestra el comportamiento de la solución de la ecuación de difusión unidimensional.



14.3.2 Solución tridimensional a la ecuación de difusión

Para el caso tridimensional y asumiendo que la difusión es isotrópica, la ecuación de difusión es:

$$\frac{\partial C(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = D \nabla^2 C(\mathbf{r}, t) \quad (14.41)$$

con condición inicial,

$$C(\mathbf{r}, t) = C_0 \delta(\mathbf{r}) \quad (14.42)$$

en coordenadas cartesianas, la solución tridimensional sería el producto de las soluciones unidimensionales,

$$C(x, t) = \frac{C_0}{8 (\pi D t)^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} e^{-\frac{y^2}{4Dt}} e^{-\frac{z^2}{4Dt}} \quad (14.43)$$

$$C(x, t) = \frac{C_0}{8 (\pi D t)^{3/2}} e^{-\frac{\mathbf{r}^2}{4Dt}} \quad (14.44)$$

14.4 Solución numérica de la Segunda ley de Fick

La segunda ley de Fick es simplemente una combinación de Conservación de la masa con la primera ley de Fick.

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \nabla^2 C \quad (14.45)$$

en coordenadas cartesianas y bidimensional,

$$\frac{1}{D} \frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \quad (14.46)$$

usando la aproximación de las diferencias finitas, para la variable x :

$$\left. \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \right|_{i,j} = \frac{C_{i+1,j} - 2C_{i,j} + C_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} \quad (14.47)$$

Usando el mismo procedimiento, se obtiene la discretización para la variable y ,

$$\left. \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right|_{i,j} = \frac{C_{i,j+1} - 2C_{i,j} + C_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} \quad (14.48)$$

El siguiente paso, es la discretización de la variación temporal de la concentración. Para realizar esta discretización, se recomienda realizar un cambio de variable. Suponiendo que la duración temporal total es $t = k\Delta t$, donde Δt es el tiempo de cada paso, entonces la aproximación a la derivada temporal puede expresarse como:

$$\frac{\partial C}{\partial t} \approx \frac{C_{i,j}^{k+1} - C_{i,j}^k}{\Delta t} \quad (14.49)$$

en donde el superíndice k , denota la dependencia temporal. La ecuación (14.49) indica que la derivada temporal es expresada en términos de la diferencia de concentración entre la nueva variable temporal (paso $k + 1$) y el previo paso temporal (paso k).

Por lo tanto, la concentración en cualquier nodo (i, j) en el tiempo $t + \Delta t$ es calculada a partir del conocimiento de la concentración del nodo (i, j) y los nodos vecinos en el tiempo previo t . Así, la segunda ley de Fick en forma discreta es:

$$\frac{1}{D} \frac{C_{i,j}^{k+1} - C_{i,j}^k}{\Delta t} = \frac{C_{i+1,j}^k - 2C_{i,j}^k + C_{i-1,j}^k}{(\Delta x)^2} + \frac{C_{i,j+1}^k - 2C_{i,j}^k + C_{i,j-1}^k}{(\Delta y)^2} \quad (14.50)$$

donde $C_{i,j}^{k+1}$ y $C_{i,j}^k$ es la concentración en el nodo (i, j) en el tiempo posterior $t + \Delta t$ y anterior t , respectivamente. La ecuación (14.50) es una forma general de la ecuación de difusión. Esta ecuación puede simplificarse si se usa volúmenes de control cuadrados, así que: $\Delta x = \Delta y$,

$$\frac{1}{D} \frac{C_{i,j}^{k+1} - C_{i,j}^k}{\Delta t} = \frac{C_{i+1,j}^k - 2C_{i,j}^k + C_{i-1,j}^k}{(\Delta x)^2} + \frac{C_{i,j+1}^k - 2C_{i,j}^k + C_{i,j-1}^k}{(\Delta x)^2} \quad (14.51)$$

$$\frac{1}{D} \frac{C_{i,j}^{k+1} - C_{i,j}^k}{\Delta t} = \frac{C_{i+1,j}^k - 2C_{i,j}^k + C_{i-1,j}^k + C_{i,j+1}^k - 2C_{i,j}^k + C_{i,j-1}^k}{(\Delta x)^2} \quad (14.52)$$

$$C_{i,j}^{k+1} - C_{i,j}^k = \frac{D\Delta t}{(\Delta x)^2} \left(C_{i+1,j}^k - 2C_{i,j}^k + C_{i-1,j}^k + C_{i,j+1}^k - 2C_{i,j}^k + C_{i,j-1}^k \right) \quad (14.53)$$

definiendo una nueva constante adimensional F_0 , la cual es conocida como el número de Fourier:

$$F_0 = \frac{D\Delta t}{(\Delta x)^2} \quad (14.54)$$

$$C_{i,j}^{k+1} - C_{i,j}^k = F_0 \left(C_{i+1,j}^k + C_{i-1,j}^k + C_{i,j+1}^k + C_{i,j-1}^k - 4C_{i,j}^k \right) \quad (14.55)$$

despejando la concentración en el punto (i, j) en el próximo paso $t + \Delta t$, $C_{i,j}^{k+1}$

$$C_{i,j}^{k+1} = F_0 \left(C_{i+1,j}^k + C_{i-1,j}^k + C_{i,j+1}^k + C_{i,j-1}^k \right) + \left(1 - 4F_0 \right) C_{i,j}^k \quad (14.56)$$

y para una dimensión, la ecuación (14.56) toma la siguiente forma:

$$C_i^{k+1} = F_0 \left(C_{i+1}^k + C_{i-1}^k \right) + \left(1 - 2F_0 \right) C_i^k \quad (14.57)$$

Ahora, para prevenir resultados erróneos cuando la solución es inestable, el valor de la variable F_0 debe de cumplir la desigualdad:

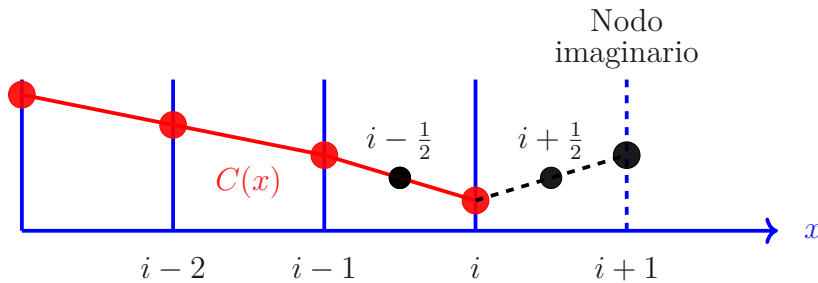
$$F_0 \leq \frac{1}{4} \quad \text{para 2D} \quad (14.58)$$

$$F_0 \leq \frac{1}{2} \quad \text{para 1D} \quad (14.59)$$

indicando que para un valor de Δx , se debe usar el número F_0 , cumpliendo los criterios de una solución estable, para estimar el valor del paso temporal Δt .

14.4.1 Condiciones de frontera

Una de las particularidades que tiene las ecuaciones de flujo de masa, se trata de la condición de que su gradiente en las fronteras debe de ser cero, es decir, no debe de existir flujo másico a través de las superficies. En la siguiente Figura, se observa que el gradiente másico va disminuyendo hacia las fronteras. Para obtener el flujo másico de cero en las fronteras, es necesario incluir un nodo imaginario en las afueras de la frontera, como se puede observar en la Figura.



Esta condición puede modelarse usando las ecuaciones que describen los nodos interiores, como lo es la ecuación (14.57) y las ecuaciones del gradiente de concentración en los nodos $i + \frac{1}{2}$ y $i - \frac{1}{2}$, imponiendo la condición $C_{i+1} = C_{i-1}$. Usando esta condición, se puede demostrar que el promedio del gradiente en la frontera es cero. Ahora, para una dimensión:

$$\left. \frac{\partial C}{\partial x} \right|_{i+1/2} \approx \frac{C_{i+1} - C_i}{\Delta x} \quad (14.60)$$

$$\left. \frac{\partial C}{\partial x} \right|_{i-1/2} \approx \frac{C_i - C_{i-1}}{\Delta x} = \quad (14.61)$$

sumando éstas dos ecuaciones, se obtiene:

$$\left. \frac{\partial C}{\partial x} \right|_{i+1/2} + \left. \frac{\partial C}{\partial x} \right|_{i-1/2} \approx \frac{C_{i+1} - C_i}{\Delta x} + \frac{C_i - C_{i-1}}{\Delta x} \quad (14.62)$$

$$\left. \frac{\partial C}{\partial x} \right|_{i+1/2} + \left. \frac{\partial C}{\partial x} \right|_{i-1/2} \approx \frac{1}{\Delta x} (C_{i+1} - C_i + C_i - C_{i-1}) \quad (14.63)$$

y como en los puntos medios $i + \frac{1}{2}$ y $i - \frac{1}{2}$ se cumple la condición $C_{i+1} = C_{i-1}$,

$$\left. \frac{\partial C}{\partial x} \right|_{i+1/2} + \left. \frac{\partial C}{\partial x} \right|_{i-1/2} \approx \frac{1}{\Delta x} (C_{i+1} - C_i + C_i - C_{i-1}) \quad (14.64)$$

$$\left. \frac{\partial C}{\partial x} \right|_{i+1/2} + \left. \frac{\partial C}{\partial x} \right|_{i-1/2} \approx 0 \quad (14.65)$$

indicando que el valor promedio del gradiente de concentración entre los puntos medios $\left(i + \frac{1}{2}, i - \frac{1}{2}\right)$ es cero, es decir no hay flujo másico en las superficies. Por lo tanto, las ecuaciones de difusión para los nodos internos y para los nodos de la superficie son:

- Para los nodos internos:

- Bidimensional

$$C_{i,j}^{k+1} = F_0 (C_{i+1,j}^k + C_{i-1,j}^k + C_{i,j+1}^k + C_{i,j-1}^k) + (1 - 4F_0) C_{i,j}^k \quad (14.66)$$

- Unidimensional

$$C_i^{k+1} = F_0 (C_{i+1}^k + C_{i-1}^k) + (1 - 2F_0) C_i^k \quad (14.67)$$

- Para los nodos de la frontera:

– Bidimensional

$$C_{i,j}^{k+1} = 2F_0 \left(C_{i-1,j}^k + C_{i,j-1}^k \right) + \left(1 - 4F_0 \right) C_{i,j}^k \rightarrow \text{en el lado derecho} \quad (14.68)$$

y

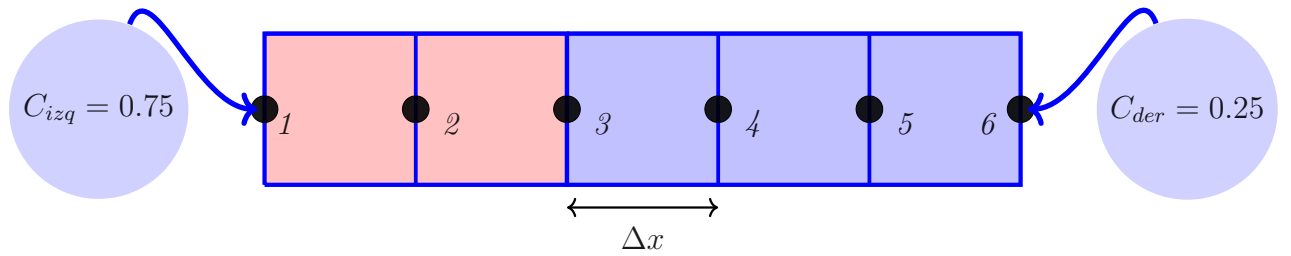
$$C_{i,j}^{k+1} = 2F_0 \left(C_{i+1,j}^k + C_{i,j+1}^k \right) + \left(1 - 4F_0 \right) C_{i,j}^k \rightarrow \text{en el lado izquierdo} \quad (14.69)$$

– Unidimensional

$$C_i^{k+1} = 2F_0 C_{i-1}^k + \left(1 - 2F_0 \right) C_i^k \rightarrow \text{en el lado derecho} \quad (14.70)$$

$$C_i^{k+1} = 2F_0 C_{i+1}^k + \left(1 - 2F_0 \right) C_i^k \rightarrow \text{en el lado izquierdo} \quad (14.71)$$

Problema 14.1 La difusión de una sustancia a través de un tubo horizontal. Asuma $D = 1 \times 10^{-9} \text{ cm}^2/\text{s}$ y composiciones igual a $C_{izq} = 0.75$ y $C_{der} = 0.25$, con $\Delta x = 0.001 \text{ cm}$.



- Construya la matriz para los 6 nodos que se muestran en la Figura.
- Resuelva la matriz para los primeros 4 pasos de tiempo, es decir para $k = 1, 2, 3, 4$.
- Realice un gráfico de concentración versus el nodo que contenga la información de los 4 pasos de tiempos.
- Encuentre la solución analítica y compare sus resultados con las soluciones numéricas.
- Recuerde que estos resultados son calculados para un tiempo de 50 segundos. Entonces, repita el ejercicio para un tiempo de $t = 200$ segundos.

Solcuión

Usando el criterio de estabilidad, se puede estimar el valor del paso temporal Δt ,

$$F_0 = \frac{D\Delta t}{(\Delta x)^2} = \frac{1}{2} \quad (14.72)$$

despejando Δt ,

$$\Delta t = \frac{1}{2} \frac{(\Delta x)^2}{D} \quad (14.73)$$

reemplazando valores,

$$\Delta t = \frac{1}{2} \cdot \frac{(1.0 \times 10^{-3})^2}{1.0 \times 10^{-9}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1.0 \times 10^{-6}}{1.0 \times 10^{-9}} \quad (14.74)$$

dando como resultado un paso temporal de menor o igual a 500 segundos, para que el sistema sea estable,

$$\Delta t \leq 500 \text{ s} \quad (14.75)$$

Usando la ecuación (14.71) para la condición de frontera en el lado izquierdo,

$$C_1^{k+1} = 2F_0 C_2^k + (1 - 2F_0) C_1^k \quad (14.76)$$

y la ecuación (14.67) para los nodos internos:

$$C_2^{k+1} = F_0 (C_3^k + C_1^k) + (1 - 2F_0) C_2^k \quad (14.77)$$

$$C_3^{k+1} = F_0 (C_4^k + C_2^k) + (1 - 2F_0) C_3^k \quad (14.78)$$

$$C_4^{k+1} = F_0 (C_5^k + C_3^k) + (1 - 2F_0) C_4^k \quad (14.79)$$

$$C_5^{k+1} = F_0 (C_6^k + C_4^k) + (1 - 2F_0) C_5^k \quad (14.80)$$

y para el otro nodo de frontera, se usa la ecuación (14.70),

$$C_6^{k+1} = 2F_0 C_5^k + (1 - 2F_0) C_6^k \quad (14.81)$$

Las ecuaciones (14.76) a (14.81), se puede escribir en forma matricial:

$$\begin{vmatrix} 1 - 2F_0 & 2F_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ F_0 & 1 - 2F_0 & F_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & F_0 & 1 - 2F_0 & F_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F_0 & 1 - 2F_0 & F_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F_0 & 1 - 2F_0 & F_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2F_0 & 1 - 2F_0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} C_1^k \\ C_2^k \\ C_3^k \\ C_4^k \\ C_5^k \\ C_6^k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_1^{k+1} \\ C_2^{k+1} \\ C_3^{k+1} \\ C_4^{k+1} \\ C_5^{k+1} \\ C_6^{k+1} \end{vmatrix} \quad (14.82)$$

en donde las nuevas concentraciones en cada uno de los nodos son calculadas resolviendo la matriz en cada paso de tiempo. En cada paso de tiempo, se usa los resultados de las concentraciones calculadas en el paso de tiempo anterior. Es decir, el resultado de C_i^{k+1} es igual a la concentración C_i^k para encontrar una nueva concentración C_i^{k+1} . Ahora, si el paso temporal es igual a 50 s, es decir $\Delta t = 50$, se obtiene:

$$F_0 = \frac{D\Delta t}{(\Delta x)^2} = \frac{1 \times 10^{-9} \times 50}{(1 \times 10^{-3})^2} \quad (14.83)$$

$$F_0 \approx 0.05 \text{ s} \quad (14.84)$$

reemplazando en los elementos matriciales, se obtiene:

$$\begin{vmatrix} 0.9 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.05 & 0.9 & 0.05 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.05 & 0.9 & 0.05 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.05 & 0.9 & 0.05 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.05 & 0.9 & 0.05 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.9 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} C_1^k \\ C_2^k \\ C_3^k \\ C_4^k \\ C_5^k \\ C_6^k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_1^{k+1} \\ C_2^{k+1} \\ C_3^{k+1} \\ C_4^{k+1} \\ C_5^{k+1} \\ C_6^{k+1} \end{vmatrix} \quad (14.85)$$

Ahora, solo resta resolver la matriz para los diferentes pasos de tiempo.

Problema 14.2 Repetir el mismo ejercicio suponiendo que los nodos de frontera C_1 y C_6 poseen concentraciones fijas y los nodos internos C_2 , C_3 , C_4 y C_5 tienen concentraciones iguales a cero.

Solución

La solución se obtiene usando el siguiente programa:

```

1      PROGRAM DIFUSION_1D
2      INTEGER, PARAMETER :: M=100
3      REAL, DIMENSION (M) :: C,CANT
4      INTEGER :: I,K,ITER,NMI,NPT,CONT,NNODOS
5      REAL :: t,DELTA t,APROX
6      NNODOS = 6; NPT = 4; NMI = 25; APROX = 0.000001
7      DIFUSION = 1.0E-9; DELTAX = 0.001; DELTA t = 50.
8      F0 = (DIFUSION*DELTA t)/(DELTAX)**2
9      ! CONDICIONES INICIALES CON EXTREMOS FIJOS.
10     DO I = 2,NNODOS-1
11         CANT(I) = 0.0          ! NODOS INTERNOS IGUALES A CERO.
12     END DO
13     CANT(1) = 0.75             ! NODO IZQUIERDO FIJO.
14     CANT(NNODOS) = 0.25       ! NODO DERECHO FIJO.
15     t = 0.0                    ! TIEMPO INICIAL
16     ! IMPRIME CONDICIONES INICIALES
17     WRITE(*,*) t, (CANT(I), I=1,NNODOS)
18     ! NUMERO DE PASOS TEMPORALES
19     DO K = 1,NPT               ! ABRE EL CICLO DE NODOS.
20         t = t + DELTA t
21         DO 3 ITER = 1,NMI      ! INICIO DE ITERACIONES
22             CONT = 0
23             DO I = 2,NNODOS-1
24                 C(I) = F0*( CANT(I+1) + CANT(I-1) ) + 8

```

```

25          ( 1.0 - 2.0*F0 ) * CANT(I)
26      IF (ABS(( CANT(I) - C(I) ) / C(I) .LE. APROX ) GO TO 2
27      CONT = CONT + 1
28      CANT(I) = C(I)
29  END DO
30  IF ( CONT.EQ.0 ) GO TO 4
31  3 CONTINUE      ! CIERRE DEL CICLO DE NODOS.
32  4 WRITE(*,*) t, (CANT(I), I = 1, NNODOS)
33  END DO      ! CIERRE DEL CICLO TEMPORAL.
34  END PROGRAM DIFUSION_1D

```

14.5 Problemas

1. La ecuación

$$D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial C}{\partial t} \quad (14.86)$$

describe un sistema de partículas difundiéndose con una velocidad constante μ . Muestre que la concentración en un tiempo t está dada por la ecuación:

$$C(x, t) = \frac{C_0}{(4\pi Dt)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{(x-x_0-\mu t)^2}{4Dt}} \quad (14.87)$$

2. Considere una ecuación de difusión unidimensional para la región de $-\infty < x < a$, con una pared absorbente localizada en $x = a$. Use las condiciones iniciales $C(x, 0) = C_0 \delta(x)$ y la condición $C(a, t) = 0$. Ésta última condición es la declaración matemática de una barrera absorbente. Encuentre una solución a la ecuación de difusión unidimensional.
3. Resuelva la ecuación unidimensional en un intervalo infinito con condiciones iniciales:

$$C(x, 0) = \begin{cases} C_0 & -a < x < a; \\ 0 & \text{para otras regiones.} \end{cases} \quad (14.88)$$

4. Resolver la ecuación de difusión unidimensional en el intervalo infinito con la condición inicial $C(x, 0) = 0$ para $-\infty < x < \infty$ y con una fuente de partículas $-q(x, t)$, donde $q(x, t) = \alpha \delta(x)$. En éste caso, la ecuación de difusión es:

$$D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = \frac{\partial C}{\partial t} - q(x, t) \quad (14.89)$$

14.6 Ecuaciones para la transferencia de masa

Las ecuaciones diferenciales de transferencia de masa, son ecuaciones generales que describen la transferencia de masa en todas las direcciones y condiciones. Éstas ecuaciones se obtienen mediante la aplicación de las leyes de conservación de la masa a un volumen de control, el cual representa el sistema. De acuerdo con la ecuación de continuidad, ecuación (2.141),

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (14.90)$$

ésta puede tomar las siguientes formas, dependiendo de las unidades de concentración:

- Ecuación de continuidad másica.
- Ecuación de continuidad molar.

A continuación se deducirán las ecuaciones de continuidad másica y molar.

14.7 Ecuación de continuidad másica

Aplicando la ley de conservación de la masa en el volumen de control de dimensiones $\Delta x \Delta y \Delta z$: la cantidad de masa por unidad de volumen y de tiempo $\left(\frac{\text{masa}}{\text{volumen} \cdot \text{tiempo}} \right)$, se obtiene:

$$\left| \begin{array}{c} \text{Flujo de} \\ \text{masa que} \\ \text{entra} \end{array} \right| - \left| \begin{array}{c} \text{Flujo de} \\ \text{masa que} \\ \text{sale} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} \text{Flujo de} \\ \text{masa que} \\ \text{se genera} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} \text{Flujo de} \\ \text{masa que} \\ \text{se acumula} \end{array} \right| \quad (14.91)$$

Si A es la especie generada dentro del volumen de control por una reacción química a una velocidad r_A , el flujo de generación de A es $r_A \Delta x \Delta y \Delta z$ y la acumulación es $\Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial \rho_A}{\partial t}$, entonces la ecuación (14.91) en las tres direcciones puede escribirse como:

$$\begin{aligned} & \left(n_{A,x} \Big|_x - n_{A,x} \Big|_{x+\Delta x} \right) \Delta y \Delta z + \left(n_{A,y} \Big|_y - n_{A,y} \Big|_{y+\Delta y} \right) \Delta x \Delta z + \\ & \left(n_{A,z} \Big|_z - n_{A,z} \Big|_{z+\Delta z} \right) \Delta x \Delta y + r_A \Delta x \Delta y \Delta z = \Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial \rho_A}{\partial t} \end{aligned} \quad (14.92)$$

ecuación que puede reescribirse como:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{n_{A,x}|_x - n_{A,x}|_{x+\Delta x}}{\Delta x} \right] + \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left[\frac{n_{A,y}|_y - n_{A,y}|_{y+\Delta y}}{\Delta y} \right] + \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left[\frac{n_{A,z}|_z - n_{A,z}|_{z+\Delta z}}{\Delta z} \right] + r_A = \frac{\partial \rho_A}{\partial t} \quad (14.93)$$

y de acuerdo con el teorema fundamental del cálculo, se obtiene la forma diferencial,

$$-\frac{\partial n_{A,x}}{\partial x} - \frac{\partial n_{A,y}}{\partial y} - \frac{\partial n_{A,z}}{\partial z} + r_A = \frac{\partial \rho_A}{\partial t} \quad (14.94)$$

organizando la ecuación,

$$\frac{\partial n_{A,x}}{\partial x} + \frac{\partial n_{A,y}}{\partial y} + \frac{\partial n_{A,z}}{\partial z} + \frac{\partial \rho_A}{\partial t} - r_A = 0 \quad (14.95)$$

y en forma vectorial,

$$\nabla \cdot \mathbf{n}_A + \frac{\partial \rho_A}{\partial t} - r_A = 0 \quad (14.96)$$

La ecuación (14.96) es la ecuación de continuidad másica, donde \mathbf{n}_A es el flujo másico de la especie A . En acuerdo con la ley de Fick, el flujo másico puede escribirse como:

$$\mathbf{n}_A = -\rho D_{AB} \nabla w_A + \rho_A \mathbf{v} \quad (14.97)$$

reemplazando la ecuación (14.97) en la ecuación de continuidad másica, ecuación (14.96), se obtiene una ecuación de continuidad en términos de la densidad:

$$-\nabla \cdot (\rho D_{AB} \nabla w_A) + \nabla \cdot (\rho_A \mathbf{v}) + \frac{\partial \rho_A}{\partial t} - r_A = 0 \quad (14.98)$$

La ecuación (14.98) es la ecuación general que permite describir el perfil de concentración en una difusión.

14.8 Ecuación de continuidad molar

Las ecuaciones (14.95), (14.96) y (14.97), pueden escribirse en unidades molares reemplazando las variables de:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_A &\rightarrow \mathbf{N}_A, & \rho &\rightarrow C, & w_A &\rightarrow y_A, \\ \rho_A &\rightarrow C_A, & y & & r_A &\rightarrow R_A. \end{aligned} \quad (14.99)$$

Al reemplazar éstas variables, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial N_{A,x}}{\partial x} + \frac{\partial N_{A,y}}{\partial y} + \frac{\partial N_{A,z}}{\partial z} + \frac{\partial C_A}{\partial t} - R_A = 0 \quad (14.100)$$

forma vectorial,

$$\nabla \cdot \mathbf{N}_A + \frac{\partial C_A}{\partial t} - R_A = 0 \quad (14.101)$$

y la ley de Fick, toma la forma:

$$\mathbf{N}_A = -CD_{AB} \nabla y_A + C_A \mathbf{v} \quad (14.102)$$

donde \mathbf{N}_A es el flujo molar de la especie A , y_A es la fracción molar de la especie A , C es la concentración del sistema y C_A es la concentración de la especie A en el sistema. Obsérvese que $C_A = y_A C$. Sustituyendo (14.102) en (14.101), se obtiene:

$$-\nabla \cdot (CD_{AB} \nabla y_A) + \nabla \cdot (C_A \mathbf{v}) + \frac{\partial C_A}{\partial t} - r_A = 0 \quad (14.103)$$

donde la ecuación (14.103) describe los perfiles de concentración en moles.

14.9 Condiciones de frontera

Existen varios tipos de condiciones de frontera, en donde la concentración de las especies son conocidas en las interfaces.

- Para una mezcla líquida en contacto con una superficie sólida A , interface líquido-sólido, la concentración de la especie A en la superficie del líquido es la solubilidad de A en el líquido, C_{A_s} .
- Para un contacto líquido-gas, interface líquido-gas, en donde las especies A están presentes en ambas fases, existen dos formas para especificar la concentración en la interface líquido-gas:

- a). Si ambas especies en la fase líquida son volátiles, entonces la condición de frontera líquido-gas es definida usando la ley de Raoult,

$$p_{A_s} = x_A p_A \quad (14.104)$$

y desde la ley de Dalton,

$$y_{A_s} = \frac{p_{A_s}}{p} \quad (14.105)$$

o la concentración en la superficie usando la ley de gas ideal:

$$C_{A_s} = \frac{p_{A_s}}{RT} \quad (14.106)$$

Tabla 14.1: Ecuaciones diferenciales con coeficiente de difusión D_{AB} constante y con conservación del volumen: $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$

Ecuación diferencial	Aproximaciones
$-D_{AB}\nabla^2\rho_A + \mathbf{v}\nabla \cdot \rho_A + \frac{\partial\rho_A}{\partial t} - r_A = 0$	con fuente
$-D_{AB}\nabla^2C_A + \mathbf{v}\nabla \cdot C_A + \frac{\partial C_A}{\partial t} - R_A = 0$	con fuente
$-D_{AB}\nabla^2\rho_A + \mathbf{v}\nabla \cdot \rho_A + \frac{\partial\rho_A}{\partial t} = 0$	sin fuentes
$-D_{AB}\nabla^2C_A + \mathbf{v}\nabla \cdot C_A + \frac{\partial C_A}{\partial t} = 0$	sin fuentes
$\frac{\partial\rho_A}{\partial t} = D_{AB}\nabla^2\rho_A$	sin fuentes, fluido sin mvto
$\frac{\partial C_A}{\partial t} = D_{AB}\nabla^2C_A$	sin fuentes, fluido sin mvto

- b). Para soluciones en donde la especie A es debilmente soluble en el líquido, la ley de Henry puede usarse para relacionar la fracción molar de A en el líquido con la presión parcial de A en el gas:

$$p_A = H \cdot x_A \quad (14.107)$$

donde H es la constante de Henry.

- c). Para la interface gas-sólido, se usa la siguiente expresión:

$$C_{A_{\text{sólido}}} = S \cdot p_A \quad (14.108)$$

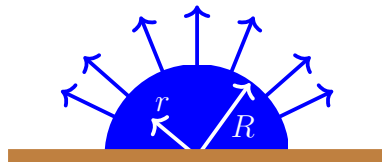
donde $C_{A_{\text{sólido}}}$ es la concentración molar de A dentro del sólido en la interface en unidades de kg mol/m³ y p_A es la presión parcial de la especie A en la fase gaseosa que está sobre el sólido en unidades de Pa. S es la constante de solubilidad o coeficiente de partición.

Problema 14.3 Una gota semiesférica de agua líquida con radio R (radio inicial) se encuentra sobre una superficie plana y se evapora por difusión molecular a través del aire que se encuentra a los alrededores de la gota semiesférica. La gota de agua se evapora lentamente y por lo tanto, su tamaño se reduce muy lentamente con el tiempo, tal que el flujo de vapor de agua se puede considerar en estado estacionario. La temperatura del aire y de la gota de agua son constantes. Dibuje un diagrama del

proceso de la difusión, realice las suposiciones básicas para describir el proceso de difusión y obtenga una expresión para calcular la fracción molar de aire en términos del radio de la gota semiesférica.

Solución.

El diagrama del proceso es:



Las suposiciones básicas son:

1. Proceso en estado estacionario: $\frac{\partial C_A}{\partial t} = 0$.
2. Temperatura y presión constante.
3. No existe reacción química.
4. Flujo molar del aire es despreciable: $N_{\text{aire}} = 0$.
5. La transferencia molar es unidimensional, en dirección radial.
6. No existen fuentes externas: $R_A = 0$.

Según las suposiciones anteriores, la ecuación (14.101),

$$\nabla \cdot \mathbf{N}_A + \frac{\partial C_A}{\partial t} - R_A = 0 \quad (14.109)$$

se reduce a:

$$\nabla \cdot \mathbf{N}_{\text{Agua}} = 0 \quad (14.110)$$

en coordenadas esféricas y solamente la transferencia molar radial, se obtiene:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 N_{\text{Agua}}) = 0 \rightarrow \frac{d}{dr} (r^2 N_{\text{Agua}}) = 0 \quad (14.111)$$

es decir,

$$r^2 N_{\text{Agua}} = c_1 = \text{constante} \quad (14.112)$$

usando la ley de Fick para un sistema binario:

$$N_{\text{Agua}} = -CD_{\text{Ag,Ai}} \frac{dy_{\text{Agua}}}{dz} + y_{\text{Agua}}(N_{\text{Agua}} + N_{\text{Aire}}) \quad (14.113)$$

como $N_{Aire} = 0$,

$$N_{Agua} = -CD_{Ag,Ai} \frac{dy_{Agua}}{dz} + y_{Agua} N_{Agua} \quad (14.114)$$

$$N_{Agua}(1 - y_{Agua}) = -CD_{Ag,Ai} \frac{dy_{Agua}}{dz} \quad (14.115)$$

donde el flujo molar del aire desde la gota semiesférica es:

$$N_{Agua} = -\frac{CD_{Ag,Ai}}{(1 - y_{Agua})} \frac{dy_{Agua}}{dr} \quad (14.116)$$

Usando las ecuaciones (14.112) y (14.116) se resuelve para y_{Agua} en función del radio r .

Problema 14.4 *Un fluido fluye sobre un sólido plano delgado y ligeramente soluble. La dirección de la velocidad del fluido puede asumirse paralela al plano y descrita por la ecuación $v_x = ay$, donde y es la distancia vertical desde el plano y a es una constante. Mostrar que la ecuación que gobierna la transferencia de masa es:*

$$D_{AB} \left(\frac{\partial^2 C_A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C_A}{\partial y^2} \right) = ay \frac{\partial C_A}{\partial x} \quad (14.117)$$

Solución.

Principales suposiciones básicas:

- Proceso en condición en estado estacionario.
- Transferencia de masa en las direcciones x y y .
- No existen reacciones químicas.
- La temperatura y la presión son constantes.
- velocidad en la dirección y es cero. $v_y = 0$

Con las condiciones anteriores y usando la ecuación de continuidad molar (14.100),

$$\frac{\partial N_{A,x}}{\partial x} + \frac{\partial N_{A,y}}{\partial y} + \frac{\partial N_{A,z}}{\partial z} + \frac{\partial C_A}{\partial t} - R_A = 0 \quad (14.118)$$

se obtiene la siguiente expresión:

$$\frac{\partial N_{A,x}}{\partial x} + \frac{\partial N_{A,y}}{\partial y} = 0 \quad (14.119)$$

En acuerdo con la ley de Fick, ecuación (14.102),

$$\mathbf{N}_A = -CD_{AB}\nabla y_A + C_A\mathbf{v} \quad (14.120)$$

y en términos de la concentración C_A ,

$$\mathbf{N}_A = -D_{AB}\nabla C_A + C_A\mathbf{v} \quad (14.121)$$

y para cada una de las direcciones, se tienen las siguientes expresiones:

$$N_{A,x} = -D_{AB}\frac{dC_A}{dx} + C_A v_x \quad (14.122)$$

$$N_{A,y} = -D_{AB}\frac{dC_A}{dy} + C_A v_y \quad (14.123)$$

reemplazando las velocidades $v_x = ay$ y $v_y = 0$, se obtiene:

$$N_{A,x} = -D_{AB}\frac{dC_A}{dx} + ayC_A \quad (14.124)$$

$$N_{A,y} = -D_{AB}\frac{dC_A}{dy} \quad (14.125)$$

Sustituyendo éstas dos ecuaciones en (14.119),

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(D_{AB}\frac{dC_A}{dx} - ayC_A\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(D_{AB}\frac{dC_A}{dy}\right) = 0 \quad (14.126)$$

con el coeficiente de difusión D_{AB} constante, se tiene:

$$D_{AB}\frac{\partial^2 C_A}{\partial x^2} - ay\frac{\partial C_A}{\partial x} + D_{AB}\frac{\partial^2 C_A}{\partial y^2} = 0 \quad (14.127)$$

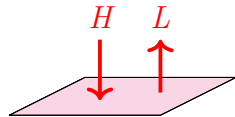
es decir,

$$D_{AB}\left(\frac{\partial^2 C_A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C_A}{\partial y^2}\right) = ay\frac{\partial C_A}{\partial x} \quad (14.128)$$

ecuación diferencial que se debe de resolver con las siguientes condiciones de frontera:

- $C_A = C_{A_s}$ en $y = 0$.
- $C_A = 0$ cuando $y \rightarrow \infty$.
- $C_A = 0$ en $x = 0$.

Problema 14.5 La siguiente Figura ilustra la difusión de un gas en las vecindades de una superficie catalítica. Gases calientes de hidrocarburo pesado se difunden en la superficie catalítica y son descompuestos en hidrocarburos livianos mediante la reacción $H \rightarrow 2L$. Los productos ligeros se difunden nuevamente a la corriente de gas.



Obtener una ecuación diferencial general para la transferencia de masa que describa el proceso de transferencia en estado estacionario si la catálisis es considerada en la superficie plana. Use la ley de Fick para determinar el flujo de moles de hidrocarburo.

Solución:

Usando la ecuación de continuidad molar (14.100),

$$\frac{\partial N_{A,x}}{\partial x} + \frac{\partial N_{A,y}}{\partial y} + \frac{\partial N_{A,z}}{\partial z} + \frac{\partial C_A}{\partial t} - R_A = 0 \quad (14.129)$$

como el proceso se da a lugar en estado estacionario y en solo una dirección, la ecuación se reduce a:

$$\frac{\partial N_{H,z}}{\partial z} + R_H = 0 \quad (14.130)$$

En acuerdo con la ley de Fick (14.102),

$$\mathbf{N}_H = -CD_{HL}\nabla y_H + C_H\mathbf{v} \quad (14.131)$$

donde \mathbf{N}_H es el flujo molar de hidrocarburo H , y_H es la fracción molar del hidrocarburo H , C es la concentración del sistema y C_H es la concentración del hidrocarburo H en el sistema. En la dirección z , se tiene:

$$N_H = -CD_{HL}\frac{dy_H}{dz} + C_Hv_z \quad (14.132)$$

como $C_H = y_HC$,

$$N_H = -CD_{HL}\frac{dy_H}{dz} + y_HCv_z \quad (14.133)$$

Ahora, Cv_z corresponde al flujo de moles totales (moles del sistema por unidad de área), por lo tanto, como solo existen moles de H y moles de L , la ecuación puede escribirse como:

$$N_H = -CD_{HL}\frac{dy_H}{dz} + y_H(N_H + N_L) \quad (14.134)$$

como $N_L = -2N_H$, reemplazando:

$$N_H = -CD_{HL} \frac{dy_H}{dz} + y_H (N_H - 2N_H) \quad (14.135)$$

$$N_H = -CD_{HL} \frac{dy_H}{dz} - y_H N_H \quad (14.136)$$

$$N_H (1 - y_H) = -CD_{HL} \frac{dy_H}{dz} \quad (14.137)$$

osea que el flujo de moles de hidrocarburo N_H es:

$$N_H = -\frac{CD_{HL}}{(1 - y_H)} \frac{dy_H}{dz} \quad (14.138)$$

14.10 Velocidad de reacción r_A de orden 1 y 2.

La velocidad de reacción es la rapidez a la que se convierten el o los reactivos a productos de una ecuación química dada. Para la reacción



donde A y B son los reactivos y C son los productos, se define la velocidad de reacción como:

$$v = \frac{dC_C}{dt} = -\frac{dC_A}{dt} \quad (14.140)$$

donde C_C y C_A son las concentraciones del producto C y del reactivo A , respectivamente. El signo menos en la ecuación indica que el reactivo A disminuye a medida que transcurre el tiempo, pero la velocidad de reacción es considerada una cantidad positiva. Para reacciones cuya estequiometría no es sencilla,



donde α , β , γ , δ , \dots , son los coeficientes estequiométricos, la definición general de la velocidad de reacción es:

$$v = \frac{1}{\gamma} \frac{dC_C}{dt} = \frac{1}{\delta} \frac{dC_D}{dt} = \dots = -\frac{1}{\alpha} \frac{dC_A}{dt} - \frac{1}{\beta} \frac{dC_B}{dt} = \dots \quad (14.142)$$

Se puede escribir una relación empírica entre las concentraciones de los reactantes y la velocidad de reacción química. Esta relación se conoce como *ley de velocidad* y para la reacción (14.141), se escribe como:

$$v = k[A]^\alpha[B]^\beta \dots \quad (14.143)$$

donde $[A]$ es la concentración del reactante A , $[B]$ es la concentración del reactante B y así sucesivamente. La constante α se conoce como el orden de la reacción con respecto a la especie A , β es el orden de la reacción con respecto a $[B]$, y así sucesivamente. El orden de la reacción global es igual a la suma de los ordenes de las reacciones individuales ($\alpha + \beta + \dots$). Finalmente, k es referida como constante de velocidad de la reacción. En esta sección solo se tendrán en cuenta las reacciones de primer y segundo orden, es decir:

$$v = k[A] \quad \text{reacción de primer orden} \quad (14.144)$$

$$v = k[A]^2 \quad \text{reacción de segundo orden} \quad (14.145)$$

Problema 14.6 *Un fluido incompresible, en estado estacionario y completamente desarrollado fluye en un reactor tubular isotérmico con una generación de masa dada por una reacción de primer orden $R_A = -kC_A$.*

Solución

Tomando la ecuación

$$-D_{AB} \nabla^2 C_A + \mathbf{v} \nabla \cdot C_A + \frac{\partial C_A}{\partial t} - R_A = 0 \quad (14.146)$$

en la dirección z y en estado estacionario y coordenadas cilíndricas,

$$v_z \frac{dC_A}{dz} = D \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dC_A}{dr} \right) \right] + R_A \quad (14.147)$$

como se trata de un flujo totalmente desarrollado, através de un cilindro, cuando alcanza el estado estacionario la velocidad del fluido en términos de su velocidad máxima es:

$$v_z = v_{max.} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad (14.148)$$

además, la fuente de concentración está dada por una reacción de primer orden, la ecuación a solucionar toma la siguiente forma:

$$v_{max.} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \frac{dC_A}{dz} = D \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dC_A}{dr} \right) \right] - kC_A \quad (14.149)$$

$$v_{max.} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \frac{dC_A}{dz} = D \left[\frac{d^2 C_A}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dC_A}{dr} \right] - kC_A \quad (14.150)$$

discretizando para $r \neq 0$,

$$v_{max} \left[1 - \left(\frac{i\Delta r}{R} \right)^2 \right] \frac{C_{i,j+1} - C_{i,j}}{\Delta z} = D \left[\frac{C_{i+1,j+1} - 2C_{i,j+1} + C_{i-1,j+1}}{(\Delta r)^2} + \frac{1}{i\Delta r} \frac{C_{i,j+1} - C_{i-1,j+1}}{\Delta r} \right] - kC_{i,j+1} \quad (14.151)$$

dando valores a los subíndices i y j :

- Para $i = 1, j = 0$:

$$v_{max} \left[1 - \left(\frac{\Delta r}{R} \right)^2 \right] \frac{C_{1,1} - C_{1,0}}{\Delta z} = D \left[\frac{C_{2,1} - 2C_{1,1} + C_{0,1}}{(\Delta r)^2} + \frac{1}{\Delta r} \frac{C_{1,1} - C_{0,1}}{\Delta r} \right] - kC_{1,1} \quad (14.152)$$

- Para $i = 2, j = 0$:

$$v_{max} \left[1 - \left(\frac{2\Delta r}{R} \right)^2 \right] \frac{C_{2,1} - C_{2,0}}{\Delta z} = D \left[\frac{C_{3,1} - 2C_{2,1} + C_{1,1}}{(\Delta r)^2} + \frac{1}{2\Delta r} \frac{C_{2,1} - C_{1,1}}{\Delta r} \right] - kC_{2,1} \quad (14.153)$$

y así sucesivamente hasta:

- Para $i = 9, j = 0$:

$$v_{max} \left[1 - \left(\frac{9\Delta r}{R} \right)^2 \right] \frac{C_{9,1} - C_{9,0}}{\Delta z} = D \left[\frac{C_{10,1} - 2C_{9,1} + C_{8,1}}{(\Delta r)^2} + \frac{1}{9\Delta r} \frac{C_{9,1} - C_{8,1}}{\Delta r} \right] - kC_{9,1} \quad (14.154)$$

En $r = 0$, el término $\frac{1}{r} \frac{dC_A}{dr}$ de la ecuación (14.150) presenta una singularidad. Ahora, si se observa la ecuación (14.148) cuando $r = 0$, se obtiene que $v_z = v_{max} =$ constante, por lo tanto la concentración C_A cuando $r \rightarrow 0$ es una constante, entonces:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \frac{dC_A}{dr} \rightarrow \frac{0}{0} \rightarrow \text{indeterminado} \quad (14.155)$$

usando *H'opital*,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \frac{dC_A}{dr} \rightarrow \frac{d^2 C_A}{dr^2} \quad (14.156)$$

es decir,

$$\left. \frac{1}{r} \frac{dC_A}{dr} \right|_{r \rightarrow 0} \rightarrow \frac{d^2 C_A}{dr^2} \quad (14.157)$$

y por lo tanto, la ecuación (14.150), para $r = 0$, se toma la forma de:

$$v_{max} \frac{dC_A}{dz} = 2D \frac{d^2 C_A}{dr^2} - kC_A \quad (14.158)$$

y discretizando, se obtiene:

$$v_{max} \frac{C_{i,j+1} - C_{i,j}}{\Delta z} = 2D \frac{C_{i+1,j+1} - 2C_{i,j+1} + C_{i-1,j+1}}{(\Delta r)^2} - kC_{i,j+1} \quad (14.159)$$

Las ecuaciones (14.151) y (14.159), se solucionan con las siguientes condiciones de frontera:

$$z = 0, \rightarrow C_A = C_{A_0}, \quad \forall r \quad (14.160)$$

$$r = 0, \rightarrow \frac{dC_A}{dr} = 0, \quad (14.161)$$

$$r = R, \rightarrow \frac{dC_A}{dz} = 0, \quad (14.162)$$

entonces,

- Para $i = 0, j = 0$:

$$v_{max} \frac{C_{0,1} - C_{0,0}}{\Delta z} = 2D \frac{C_{1,1} - 2C_{0,1} + C_{-1,1}}{(\Delta r)^2} - kC_{0,1} \quad (14.163)$$

Ahora, se resuelven las ecuaciones (14.152) \rightarrow (14.154) y (14.163) simultáneamente. Para éste ejemplo usar los siguientes valores:

$$R = 1, \quad dr = \frac{R}{10}, \quad v_{max} = 5, \quad D = 0.00002 \quad (14.164)$$

$$k = 0.8, \quad z_0 = 0, \quad z_f = 20. \quad (14.165)$$

valores en la frontera:

$$C_{i,0} = 10. \text{ con } i = 0, 1, 2, \dots, 8, 9, 10 \text{ y } C_{9,0} = C_{10,0}. \quad (14.166)$$

para obtener y graficar el perfil de concentración.

Parte IV

Apéndices

Apéndice A. Vectores y tensores

A.1 Definiciones

- Un vector

$$\mathbf{u} = \sum_i^3 \mathbf{e}_i u_i \quad (1)$$

- Operador vectorial diferencial nábla,

$$\nabla = \sum_i^3 \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (2)$$

- Un tensor de segundo orden,

$$\boldsymbol{\tau} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \tau_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \quad (3)$$

donde τ_{ij} son las componentes del tensor de segundo orden $\boldsymbol{\tau}$ y son cantidades escalares.

- Símbolo de Levi-Civita,

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si } (ijk) \text{ es } (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2) \\ -1 & \text{si } (ijk) \text{ es } (3, 2, 1), (2, 1, 3), (1, 3, 2) \\ 0 & \forall \text{ otro caso} \end{cases} \quad (4)$$

- Delta de Kronecker,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (5)$$

A.2 Operaciones con vectores

1. Producto punto entre dos vectores unitarios

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} \quad (6)$$

2. Producto cruz entre dos vectores unitarios

$$\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = \sum_k \epsilon_{ijk} \mathbf{e}_k \quad (7)$$

3. Divergencia de un vector

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \sum_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \quad (8)$$

4. Rotacional de un vector

$$\nabla \times \mathbf{u} = \sum_{ik} \epsilon_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \quad (9)$$

5. Divergencia de un tensor

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = \left(\sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \tau_{jk} \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k \right) \quad (10)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = \sum_{ijk=1}^3 \frac{\partial \tau_{jk}}{\partial x_i} (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) \mathbf{e}_k \quad (11)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = \sum_{ijk=1}^3 \frac{\partial \tau_{jk}}{\partial x_i} \delta_{ij} \mathbf{e}_k \quad (12)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = \sum_{ik=1}^3 \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_i} \mathbf{e}_k \quad (13)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = \sum_{k=1}^3 \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_i} \right) \mathbf{e}_k \rightarrow \text{es un vector} \quad (14)$$

A.3 Operaciones tensores

Los tensores son de gran utilidad en problemas que involucran fenómenos de transporte porque en la mayoría de los problemas se desea conocer como varían las propiedades con respecto a las direcciones coordenadas del sistema. Existen algunas propiedades de los tensores de segundo orden como:

- Si $\tau_{ij} = \tau_{ji}$, entonces se dice que el tensor $\boldsymbol{\tau}$ es simétrico.
- Si $\tau_{ij} = -\tau_{ji}$, entonces se dice que el tensor $\boldsymbol{\tau}$ es antisimétrico.

1. Suma de tensores

Sean $\boldsymbol{\tau}$ y $\boldsymbol{\omega}$ dos tensores de segundo orden. La suma se define como:

$$\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\omega} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \tau_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \omega_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \quad (15)$$

sacando factor común,

$$\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\omega} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (\tau_{ij} + \omega_{ij}) \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \rightarrow \text{es un tensor} \quad (16)$$

2. Multiplicación de un tensor por un escalar

Sean $\boldsymbol{\tau}$ un tensor de segundo orden y a un escalar. La multiplicación está dada por:

$$a\boldsymbol{\tau} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (a\tau_{ij}) \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \rightarrow \text{es un tensor} \quad (17)$$

3. Producto punto de un tensor y un vector

Sean $\boldsymbol{\tau}$ un tensor de segundo orden y \mathbf{u} un vector. El producto punto es:

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{u} = \left(\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \tau_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^3 u_k \mathbf{e}_k \right) \quad (18)$$

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{u} = \sum_{ijk=1}^3 \tau_{ij} u_k (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k) \quad (19)$$

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{u} = \sum_{ijk=1}^3 \tau_{ij} u_k \mathbf{e}_i \delta_{jk} \quad (20)$$

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{u} = \sum_{ij=1}^3 \tau_{ij} u_j \mathbf{e}_i \rightarrow \text{es un vector} \quad (21)$$

4. Producto cruz de un tensor y un vector

Sean $\boldsymbol{\tau}$ un tensor de segundo orden y \mathbf{u} un vector. El producto cruz es de la forma:

$$\boldsymbol{\tau} \times \mathbf{u} = \left(\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \tau_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \right) \times \left(\sum_{k=1}^3 u_k \mathbf{e}_k \right) \quad (22)$$

$$\boldsymbol{\tau} \times \mathbf{u} = \sum_{ijk=1}^3 \tau_{ij} u_k \mathbf{e}_i (\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k) \quad (23)$$

$$\boldsymbol{\tau} \times \mathbf{u} = \sum_{ijk=1}^3 \tau_{ij} u_k \mathbf{e}_i \left(\sum_{\ell=1}^3 \epsilon_{j k \ell} \mathbf{e}_\ell \right) \quad (24)$$

$$\boldsymbol{\tau} \times \mathbf{u} = \sum_{jk=1}^3 \left(\sum_{i\ell=1}^3 \epsilon_{j k \ell} \tau_{ij} u_k \right) \mathbf{e}_i \mathbf{e}_\ell \rightarrow \text{es un tensor} \quad (25)$$

5. Producto punto de dos tensores

Sean $\boldsymbol{\tau}$ y $\boldsymbol{\omega}$ dos tensores de segundo orden. El producto escalar es:

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\omega} = \left(\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \tau_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^3 \sum_{\ell=1}^3 \omega_{k\ell} \mathbf{e}_k \mathbf{e}_\ell \right) \quad (26)$$

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\omega} = \sum_{i,j,k,\ell=1}^3 \tau_{ij} \omega_{k\ell} (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k \mathbf{e}_\ell) \quad (27)$$

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\omega} = \sum_{i,j,k,\ell=1}^3 \tau_{ij} \omega_{k\ell} \mathbf{e}_i (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k) \mathbf{e}_\ell \quad (28)$$

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\omega} = \sum_{i,j,k,\ell=1}^3 \tau_{ij} \omega_{k\ell} \mathbf{e}_i \delta_{jk} \mathbf{e}_\ell \quad (29)$$

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\omega} = \sum_{i,j,\ell=1}^3 \tau_{ij} \omega_{j\ell} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_\ell \quad (30)$$

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\omega} = \sum_{i,\ell=1}^3 \mathbf{e}_i \mathbf{e}_\ell \left(\sum_{j=1}^3 \tau_{ij} \omega_{j\ell} \right) \rightarrow \text{es un tensor} \quad (31)$$

6. Producto dos puntos de dos tensores

Sean $\boldsymbol{\tau}$ y $\boldsymbol{\omega}$ dos tensores de segundo orden, entonces

$$\boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\omega} = \left(\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \tau_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \right) : \left(\sum_{k=1}^3 \sum_{\ell=1}^3 \omega_{k\ell} \mathbf{e}_k \mathbf{e}_\ell \right) \quad (32)$$

$$\boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\omega} = \sum_{i,j,k,\ell=1}^3 \tau_{ij} \omega_{k\ell} (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j : \mathbf{e}_k \mathbf{e}_\ell) \quad (33)$$

$$\boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\omega} = \sum_{i,j,k,\ell=1}^3 \tau_{ij} \omega_{k\ell} (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k) (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_\ell) \quad (34)$$

$$\boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\omega} = \sum_{i,j,k,\ell=1}^3 \tau_{ij} \omega_{k\ell} \delta_{jk} \delta_{i\ell} \quad (35)$$

$$\boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\omega} = \sum_{i,j=1}^3 \tau_{ij} \omega_{ji} \rightarrow \text{es un escalar} \quad (36)$$

7. Producto diádico

Es un producto entre dos vectores y no usa ningún signo de multiplicación. Su resultado dá a lugar a cantidades conocidas como tensores de segundo orden. El producto diádico entre los vectores \mathbf{v} y \mathbf{u} se define como \mathbf{uv} y su resultado es:

$$\mathbf{uv} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 u_i v_j \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \rightarrow \text{es un tensor} \quad (37)$$

obsérse que $\mathbf{uv} \neq \mathbf{vu}$, pero se cumple que $\mathbf{uv} = (\mathbf{vu})^\dagger$.

Apéndice B. Ecuación de Laplace

B.1 Laplace en coordenadas cilíndricas

la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 T(r, \theta, z) = 0$$

Dada la simetría cilíndrica del problema, es conveniente utilizar el operador Laplaciano ∇^2 en coordenadas cilíndricas

$$\frac{\partial^2 T(r, \theta, z)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T(r, \theta, z)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T(r, \theta, z)}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T(r, \theta, z)}{\partial z^2} = 0 \quad (38)$$

Realizando el procedimiento de separación de variables para resolver la ecuación diferencial planteada. Para esto, consideramos que la solución es de la forma $T(r, \theta, z) = R(r)\Theta(\theta)H(z)$. Reemplazamos esta solución en la ecuación (38).

$$\frac{\partial^2 [R(r)\Theta(\theta)H(z)]}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial [R(r)\Theta(\theta)H(z)]}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 [R(r)\Theta(\theta)H(z)]}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 [R(r)\Theta(\theta)H(z)]}{\partial z^2} = 0$$

$$\Theta(\theta)H(z) \frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} + \frac{\Theta(\theta)H(z)}{r} \frac{\partial R(r)}{\partial r} + \frac{R(r)H(z)}{r^2} \frac{\partial^2 \Theta(\theta)}{\partial \theta^2} + R(r)\Theta(\theta) \frac{\partial^2 H(z)}{\partial z^2} = 0$$

$$\frac{1}{R(r)} \frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{rR(r)} \frac{\partial R(r)}{\partial r} + \frac{1}{r^2\Theta(\theta)} \frac{\partial^2 \Theta(\theta)}{\partial \theta^2} + \frac{1}{H(z)} \frac{\partial^2 H(z)}{\partial z^2} = 0 \quad (39)$$

En la ecuación (39) los primeros dos términos forman una función de únicamente r , el tercer término es una función de θ y el último término es una función de z . Entonces, si

$$\frac{1}{\Theta(\theta)} \frac{\partial^2 \Theta(\theta)}{\partial \theta^2} = -m^2 \quad (40)$$

y

$$\frac{1}{H(z)} \frac{\partial^2 H(z)}{\partial z^2} = k^2 \quad (41)$$

se obtiene

$$\frac{1}{R(r)} \frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{rR(r)} \frac{\partial R(r)}{\partial r} + k^2 - \frac{m^2}{r^2} = 0$$

Como $R(r)$ solo depende de r la derivada parcial puede pasar a ser ordinaria y se puede denotar R'

$$r^2 R'' + rR' + (k^2 r^2 - m^2)R = 0 \quad (42)$$

La ecuación (42) es una ecuación diferencial cuya solución está determinada por la ecuación de Bessel

$$R(r) = C_1 J_m(kr) + C_2 Y_m(kr)$$

$J_m(kr)$ es la función de Bessel de primer tipo y $Y_m(kr)$ es la función de Bessel de segundo tipo. Esta segunda tiene una particularidad y es que

$$\lim_{r \rightarrow 0} Y_m(kr) = -\infty$$

y como se requiere que la solución sea finita en $r = 0$, entonces se hace $C_2 = 0$. En la función de Bessel existen puntos en donde la función se anula, es decir, $J_m(ka) = 0$. Las raíces de la función de Bessel se conocen como $\alpha_{m,n}$, donde m es el orden de la función de Bessel y n se refiere a la n -ésima raíz. Por lo tanto, $J_m(ka) = 0$ cuando $ka = \alpha_{m,k}$ lo que significa que $k_n = \frac{\alpha_{m,k}}{a}$ y la solución radial particular es

$$R_{m,k}(r) = C_{m,k} J_m\left(\frac{\alpha_{m,k}}{a} r\right) \quad (43)$$

También se obtiene la ecuación diferencial en z :

$$H'' - k^2 H = 0$$

La solución es de la forma $C_3 e^{zR_1} + C_4 e^{zR_2}$ donde R_1 y R_2 son las raíces de la ecuación característica

$$R^2 - k^2 = 0 \rightarrow R = \pm k$$

$$H(z) = C_3 e^{kz} + C_4 e^{-kz}$$

$$H(z) = A \sinh(kz) + B \cosh(kz)$$

Por último, la tercera ecuación diferencial es

$$\Theta'' + m^2 \Theta = 0$$

La solución también es de la forma $C_3 e^{\theta R_1} + C_4 e^{\theta R_2}$ donde R_1 y R_2 son las raíces de la ecuación característica

$$R^2 + m^2 = 0 \rightarrow R = \pm im$$

$$\Theta(\theta) = C_5 e^{im\theta} + C_6 e^{-im\theta}$$

$$\Theta(\theta) = D \operatorname{sen}(m\theta) + E \cos(m\theta)$$

La solución final es el producto de las tres soluciones obtenidas,

$$T(r, \theta, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} C_{m,k} J_m\left(\frac{\alpha_{m,k}}{a} r\right) \left[A_{m,k} \operatorname{senh}\left(\frac{\alpha_{m,k}}{a} z\right) + B_{m,k} \cosh\left(\frac{\alpha_{m,k}}{a} z\right) \right] \times \left[D \operatorname{sen}(m\theta) + E \cos(m\theta) \right] \quad (44)$$

B.2 Laplace en coordenadas esféricas

La ecuación de Laplace es:

$$\nabla^2 T(r, \theta, \phi) = 0 \quad (45)$$

El operador Laplaciano ∇^2 en coordenadas esféricas

$$\left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\operatorname{sen} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \phi^2} \right] T(r, \theta, \phi) = 0 \quad (46)$$

Realizamos el procedimiento de separación de variables para resolver la ecuación diferencial planteada. Para esto, consideramos que la solución es de la forma $T(r, \theta, \phi) = R(r)Y(\theta, \phi)$. Reemplazando,

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) \right] R(r) Y(\theta, \phi) + \left[\frac{1}{\operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\operatorname{sen} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \phi^2} \right] R(r) Y(\theta, \phi) &= 0 \\ \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right) \right] Y(\theta, \phi) + R(r) L^2 Y(\theta, \phi) &= 0 \\ \frac{1}{R(r)} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right) + \frac{1}{Y(\theta, \phi)} L^2 Y(\theta, \phi) &= 0 \end{aligned} \quad (47)$$

De nuevo, tenemos que al sumar dos funciones cada una dependiente de funciones diferentes se obtiene cero. Para que eso ocurra tiene que ser que ambas sean

iguales a constantes. Sea la parte radial igual a $l(l+1)$ y la parte angular igual a $-l(l+1)$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{R(r)} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right) - l(l+1) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right) - l(l+1)R(r) &= 0\end{aligned}\tag{48}$$

Las derivadas parciales ahora son ordinarias ya que R es una función únicamente de r . Si definimos una variable $z = \ln(r)$, $r = e^z$ y $dr/dz = e^z$. Por la regla de la cadena:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dr} &= \frac{d}{dz} \frac{dz}{dr} \\ \frac{d}{dr} &= e^{-z} \frac{d}{dz}\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right) - l(l+1)R(r) = e^{-z} \frac{d}{dz} \left(e^{2z} e^{-z} \frac{dR(r)}{dz} \right) - l(l+1)R(r) = 0$$

$$e^{-z} \frac{d}{dz} \left(e^z \frac{dR(z)}{dz} + e^z \frac{d^2 R(z)}{dz^2} \right) - l(l+1)R(z) = 0$$

$$R'' + R' - l(l+1)R = 0$$

Con $R' = dR/dz$. La solución a esta ecuación diferencial es de la forma $R(z) = C_1 e^{zR_1} + C_2 e^{zR_2}$, donde R_1 y R_2 son las raíces de la ecuación característica

$$R^2 + R - l(l+1)R = 0$$

$$R = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4l(l+1)}}{2}$$

$$R = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4l^2 + 4l}}{2}$$

$$R = \frac{-1 \pm \sqrt{4(l^2 + l + \frac{1}{4})}}{2}$$

$$R = \frac{-1 \pm 2\sqrt{(l + \frac{1}{2})^2}}{2}$$

$$R = \frac{-1 \pm 2(l + \frac{1}{2})}{2}$$

$$R_1 = \frac{-1 + 2(l + \frac{1}{2})}{2} \quad R_2 = \frac{-1 - 2(l + \frac{1}{2})}{2}$$

$$R_1 = \frac{-1 + 2l + 1}{2} \quad R_2 = \frac{-1 - 2l - 1}{2}$$

$$R_1 = l \quad R_2 = -(l + 1)$$

$$R(z) = C_1 e^{lz} + C_2 e^{-(l+1)z}$$

$$R(r) = C_1 e^{\ln(r)l} + C_2 e^{-(l+1)\ln(r)}$$

$$R(r) = C_1 e^{\ln(r)l} + C_2 e^{\ln(r^{-(l+1)})}$$

$$R(r) = C_1 r^l + C_2 r^{-(l+1)} \quad (49)$$

Ahora, también se obtiene una ecuación diferencial para la parte angular de la distribución

$$\frac{1}{Y(\theta, \phi)} L^2 Y(\theta, \phi) + l(l + 1) = 0$$

$$L^2 Y(\theta, \phi) + l(l + 1) Y(\theta, \phi) = 0$$

Separamos $Y(\theta, \phi)$ como $Y(\theta, \phi) = \Theta(\theta)\Phi(\phi)$

$$\frac{\sin\theta}{\Theta(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta} \right) + l(l + 1) \sin^2\theta + \frac{1}{\Phi(\phi)} \frac{d^2\Phi(\phi)}{d\phi^2} = 0$$

Tenemos que la suma de dos funciones que depende cada una de variables diferentes es cero, tiene que sea que cada una sea igual a una constante. Tomemos que la función que depende de Θ es igual a m^2 mientras que la función que depende de ϕ es igual a $-m^2$

$$\frac{\sin\theta}{\Theta(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta} \right) + l(l + 1) \sin^2\theta = m^2$$

$$\left[\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{d}{d\theta} \right) + l(l + 1) + \frac{m^2}{\sin^2\theta} \right] \Theta(\theta) = 0$$

Haciendo $x = \cos\theta$, $\sin^2\theta = 1 - x^2$, por la regla de la cadena

$$\frac{d}{d\theta} = \frac{d}{dx} \frac{dx}{d\theta}$$

$$\frac{d}{d\theta} = \frac{d}{dx}(-\operatorname{sen}\theta)$$

$$\frac{d}{d\theta} = -\sqrt{1-x^2} \frac{d}{dx}$$

$$\left[\frac{-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} \frac{d}{dx} \left(-\sqrt{1-x^2} \sqrt{1-x^2} \frac{d}{dx} \right) + l(l+1) + \frac{m^2}{1-x^2} \right] P(x) = 0$$

$$\left[\frac{d}{dx} \left((1-x^2) \frac{d}{dx} \right) + l(l+1) + \frac{m^2}{1-x^2} \right] \Theta(x) = 0$$

La ecuación diferencial tiene como solución los polinomios asociados de Legendre de orden m y grado l

$$\Theta(x) = P_l^m(\cos\theta)$$

Por último, la parte azimutal nos resulta como

$$\frac{1}{\Phi(\phi)} \frac{d^2 \Phi(\phi)}{d\phi^2} = -m^2$$

$$\frac{d^2 \Phi(\phi)}{d\phi^2} + m^2 \Phi(\phi) = 0$$

la solución a este tipo de ecuación diferencial es de la forma

$$\Phi(\phi) = C_3 e^{im\phi}$$

Al unir las tres soluciones obtenidas, se obtiene la función $T(r, \theta, \phi)$

$$T(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l^m(\cos\theta) e^{im\phi}$$

Apéndice C. Ecuación de Poisson

La ecuación de Poisson tiene la forma:

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \quad (50)$$

donde $\phi(\mathbf{r})$ es un campo escalar y $\rho(\mathbf{r})$ es la densidad o fuente. La ecuación (50), es una ecuación de autovalores de la forma $\hat{L}\phi(x) = f(x)$ y por lo tanto se puede usar la idea que presentó George Green en 1825 usada para resolver las ecuaciones diferenciales no homogéneas. La importancia del método de las funciones de Green radica en su simplicidad para aplicarse en sistemas físicos gobernados por ecuaciones diferenciales, aunque se requiere a la par una fuerte dosis de conocimiento matemático. En la actualidad, las funciones de Green se han convertido en un elemento de investigación para entender nuevas propiedades de los materiales estudiándolos a nivel cuántico.

Si se tiene una carga puntual de magnitud q que genera la densidad $\rho(\mathbf{r})$, ésta se puede escribir en términos de la función delta de Dirac $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ de la siguiente forma:

$$q = \int q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')d\mathbf{r} \quad (51)$$

donde q es una constante y se ha usado la propiedad del delta de Dirac:

$$\int f(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}') \quad (52)$$

La carga q en términos de la densidad es,

$$q = \int \rho(\mathbf{r})d\mathbf{r} \quad (53)$$

si se comparan las ecuaciones (51) y (53), se obtiene que $\rho(\mathbf{r}) = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ y la ecuación de Poisson puede reescribirse como:

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) = -\frac{q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\epsilon_0} \quad (54)$$

y para una carga puntual de magnitud $q = 4\pi\epsilon_0$, se tiene que la ecuación (54) se escribe como:

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (55)$$

donde $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ es conocida como la función de Green. Reuniendo las ecuaciones (50) y (55) de la siguiente forma:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rightarrow \nabla'^2 \phi(\mathbf{r}') = -\frac{\rho(\mathbf{r}')}{\epsilon_0} \quad (56)$$

$$\phi(\mathbf{r}') \rightarrow \nabla'^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -4\pi\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \quad (57)$$

se obtiene:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla'^2 \phi(\mathbf{r}') = -\frac{1}{\epsilon_0} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') \quad (58)$$

$$\phi(\mathbf{r}') \nabla'^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -4\pi\phi(\mathbf{r}')\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \quad (59)$$

restando ambas ecuaciones,

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla'^2 \phi(\mathbf{r}') - \phi(\mathbf{r}') \nabla'^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{\epsilon_0} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') + 4\pi\phi(\mathbf{r}')\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \quad (60)$$

organizando,

$$4\pi\phi(\mathbf{r}')\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') + G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla'^2 \phi(\mathbf{r}') - \phi(\mathbf{r}') \nabla'^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (61)$$

integrando en ambos lados sobre el volumen de contorno que encierra la densidad $\rho(\mathbf{r}')$,

$$\begin{aligned} 4\pi \int_V \phi(\mathbf{r}')\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) d\mathbf{r}' &= \frac{1}{\epsilon_0} \int_V G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \\ &+ \int_V \left[G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla'^2 \phi(\mathbf{r}') - \phi(\mathbf{r}') \nabla'^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right] d\mathbf{r}' \end{aligned} \quad (62)$$

usando la propiedad del delta de Dirac, ecuación (52),

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \\ &+ \frac{1}{4\pi} \int_V \left[G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla'^2 \phi(\mathbf{r}') - \phi(\mathbf{r}') \nabla'^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right] d\mathbf{r}' \end{aligned} \quad (63)$$

como

$$\nabla \cdot (G \nabla \phi) = G \nabla^2 \phi + \nabla G \nabla \phi \quad (64)$$

$$\nabla \cdot (\phi \nabla G) = \phi \nabla^2 G + \nabla \phi \nabla G \quad (65)$$

restando ambas ecuaciones,

$$\nabla \cdot (G \nabla \phi) - \nabla \cdot (\phi \nabla G) = G \nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 G \quad (66)$$

es decir,

$$G \nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 G = \nabla \cdot (G \nabla \phi - \phi \nabla G) \quad (67)$$

Reemplazando (67) en (63),

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' + \frac{1}{4\pi} \int_V \nabla' \cdot (G \nabla' \phi(\mathbf{r}') - \phi(\mathbf{r}') \nabla' G) d\mathbf{r}' \quad (68)$$

usando el teorema de la divergencia,

$$\int_{\text{Vol.}} \nabla \cdot \mathbf{A} d\mathbf{r} = \oint_{\text{Sup.}} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS \quad (69)$$

donde \mathbf{A} es un campo vectorial y \mathbf{n} es un vector unitario normal a la superficie S . Por lo tanto,

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' + \frac{1}{4\pi} \oint_{\text{Sup.}} [G \nabla' \phi(\mathbf{r}') - \phi(\mathbf{r}') \nabla' G] \cdot \mathbf{n}' dS' \quad (70)$$

como,

$$\nabla' \phi(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}' = \frac{\partial \phi(\mathbf{r}')}{\partial n'} \quad (71)$$

$$\nabla' G \cdot \mathbf{n}' = \frac{\partial G}{\partial n'} \quad (72)$$

son las derivadas normales, se obtiene como resultado:

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) = & \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' + \frac{1}{4\pi} \oint_{\text{Sup.}} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \phi(\mathbf{r}')}{\partial n'} dS' \\ & - \frac{1}{4\pi} \oint_{\text{Sup.}} \phi(\mathbf{r}') \frac{\partial G}{\partial n'} dS' \end{aligned} \quad (73)$$

donde $\phi(\mathbf{r})$ es el potencial escalar a evaluar, $\phi(\mathbf{r}')$ es el potencial escalar en la superficie S' y es una condición de frontera y $\rho(\mathbf{r}')$ es la densidad o fuente que generadora del potencial y localizada por el vector \mathbf{r}' . Se puede observar que La ecuación (71) es una densidad de carga superficial, es decir,

$$\sigma(\mathbf{r}') = \epsilon_0 \frac{\partial \phi(\mathbf{r}')}{\partial n'} \quad (74)$$

y también se puede observar una capa dipolar (arreglos dipolares), es decir,

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}') = \epsilon_0 \phi(\mathbf{r}') \quad (75)$$

C.1 Cálculo de la función de Green

Para encontrar la forma de la función de Green $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, se procederá a solucionar la ecuación (55),

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (76)$$

Las funciones $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ y $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$, pueden expresarse como una combinación lineal de funciones base $\{\phi_i(\mathbf{r})/i = 1, 2, 3, \dots\}$

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \sum_i a_i(\mathbf{r}') \phi_i(\mathbf{r}) \quad (77)$$

donde $a_i(\mathbf{r}')$ son los coeficientes de expansión. Premultiplicando a ambos lados por la función base $\phi_j^*(\mathbf{r})$,

$$\phi_j(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \sum_i a_i(\mathbf{r}') \phi_j^*(\mathbf{r}) \phi_i(\mathbf{r}) \quad (78)$$

integrando en ambos lados,

$$\int \phi_j(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\mathbf{r} = \sum_i a_i(\mathbf{r}') \int \phi_j^*(\mathbf{r}) \phi_i(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (79)$$

resolviendo,

$$\phi_j^*(\mathbf{r}') = \sum_i a_i(\mathbf{r}') \delta_{ij} \quad (80)$$

se obtiene el coeficiente de expansión,

$$a_j(\mathbf{r}') = \phi_j^*(\mathbf{r}') \quad (81)$$

y por lo tanto, la función delta de Dirac puede expresarse en términos de un conjunto de funciones base como:

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \sum_i \phi_i(\mathbf{r}) \phi_i^*(\mathbf{r}') \quad (82)$$

Ahora, si se expande la función de Green $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ en términos del mismo conjunto de funciones base, se tiene:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_i b_i(\mathbf{r}') \phi_i(\mathbf{r}) \quad (83)$$

donde $b_i(\mathbf{r}')$ son los coeficientes de expansión. Reemplazando (83) y (82) en (76),

$$\nabla^2 \left[\sum_i b_i(\mathbf{r}') \phi_i(\mathbf{r}) \right] = -4\pi \sum_i \phi_i(\mathbf{r}) \phi_i^*(\mathbf{r}') \quad (84)$$

$$\sum_i b_i(\mathbf{r}') \left[\nabla^2 \phi_i(\mathbf{r}) \right] = -4\pi \sum_i \phi_i(\mathbf{r}) \phi_i^*(\mathbf{r}') \quad (85)$$

se debe de cumplir la relación de autovalores,

$$\hat{L}^2 \phi_i(\mathbf{r}) = -\lambda_i^2 \phi_i(\mathbf{r}) \quad (86)$$

donde λ son los autovalores del operador \hat{L}^2 . Entonces,

$$\sum_i b_i(\mathbf{r}') \left[-\lambda_i^2 \phi_i(\mathbf{r}) \right] = -4\pi \sum_i \phi_i(\mathbf{r}) \phi_i^*(\mathbf{r}') \quad (87)$$

obteniéndose, que el coeficiente de expansión $b_i(\mathbf{r}')$ es:

$$b_i(\mathbf{r}') = 4\pi \frac{\phi_i^*(\mathbf{r}')}{\lambda_i^2} \quad (88)$$

Reemplazando en la función de Green propuesta, se obtiene la siguiente expresión para la función de Green,

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 4\pi \sum_i \frac{\phi_i(\mathbf{r}) \phi_i^*(\mathbf{r}')}{\lambda_i^2} \quad (89)$$

donde $\phi_i(\mathbf{r})$ es una función base y λ son los autovalores.

Bibliografía

- [1] R. Byron Bird; Warren E. Stewart; Edwin N. Lightfoot , *Fenómenos de Transporte*, EDITORIAL LIMUSA, S.A, México, 2006.