Dpnt. de Ciència de la Computació i Intel·ligència Artificial
Dpto. de Ciencia de la Computación e Inteligencia Artificial

Tema 3. Búsqueda en juegos y Búsqueda para problemas de satisfacción de restricciones.

Parte 2: Búsqueda para problemas de satisfacción de restricciones

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Dpnt. de Ciència de la Computació i Intel·ligència Artificial
Dpto. de Ciencia de la Computación e Inteligencia Artificial

Búsqueda para problemas de satisfacción de restricciones

- Formulación de CSPs como redes de restricciones
- Ejemplos
- Métodos de resolución:
  - Esquema backtracking
  - Esquema Forward Checking
  - Esquema de propagación de restricciones

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Problemas de satisfacción de restricciones (CSP)

Conjunto de **variables** definidas sobre **dominios** finitos y conjunto de **restricciones** definidas sobre subconjuntos de dichas variables.

(V,D, ρ)

- un conjunto de **variables**

  $V = \{V_1, V_2, \ldots, V_n\}$ $V=\{V_i\}_{i=1..n}$

- definidas sobre **dominios** discretos D_i (conjunto finito de posibles valores)

  $D = \{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$ $D=\{D_j\}_{j=1..n}$

- un conjunto de **restricciones** definidas sobre subconjuntos de dichas variables

  $\rho = \{\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n\}$ $\rho =\{\rho_k\}_{k=1..n}$

Problemas de satisfacción de restricciones (CSP)

Ejemplo:

X::{1,2}, Y::{1,2}, Z::{1,2}

X = Y, X ≠ Z, Y > Z

Solución: encontrar asignaciones de valor a las variables que satisfagan todas las restricciones.

(X = 2, Y = 2, Z = 1)

Solución al problema: la relación n-aria que satisface todas las restricciones del problema

Dependiendo de los requerimientos del problema hay que encontrar todas las soluciones o sólo una

Redes de restricciones

- Un CSP se puede representar como un grafo.
- Sobre el grafo se puede definir una red de restricciones:

  Quíntupla **<V, E, c, l, a>**
  - V: conjunto de nodos.
  - E: conjunto de aristas.
  - c: $E \rightarrow V^k$, $k \leq n$; función de asignación de aristas a tuplas de nodos.
  - l: $E \rightarrow \rho$; función de asignación de aristas a restricciones.
  - a: permutación que define el orden de selección para resolver el problema.

CSP binario

- Variables

  $V = \{V_1, V_2, \ldots, V_n\}$
- Dominios discretos y finitos

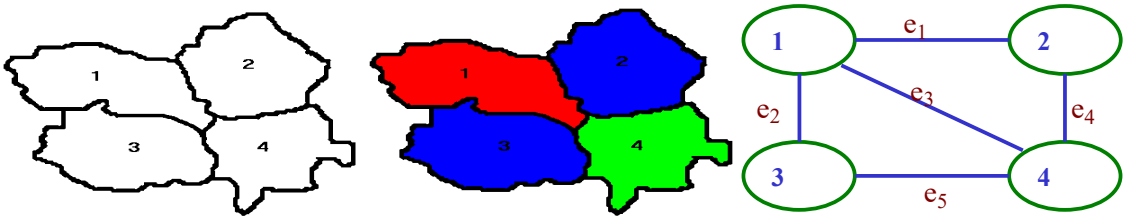
  $D = \{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$
- Restricciones binarias

  $\{R_{ij}\}$

Todo problema n-ario se puede formular como un problema binario

- Ejemplos de CSP binarios:
  - Coloreado de mapas
  - Asignación de tareas para un robot
  - N-reinas
  - Generación de crucigramas

Ejemplo: Coloreado de mapas



$\mathbf{V}=\{V_1, V_2, V_3, V_4\}$

$D_i=\{\text{rojo, azul, verde}\},\ \forall\ i,\ 1 \le i \le 4$

$\mathbf{E}=\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$

$\rho_k(V_i, V_j)=\{<v_i, v_j> |\ v_i \in D_i, v_j \in D_j, v_i \neq v_j\},\quad k,\ 1 \le k \le 5$

$\mathbf{c}(e_1)=<V_1, V_2>,\ c(e_2)=<V_1, V_3>,\ c(e_3)=<V_1, V_4>,\ \ldots$

$\mathbf{l}(e_j)=\{$<azul, verde>, <azul, rojo>, <verde, azul>, <verde, rojo>, <rojo, azul>, <rojo, verde>$\}\ \forall\quad j,\ 1 \le j \le 5$

$\mathbf{a}=\{V_1, V_4, V_2, V_3\}$

Generación de crucigramas

- Dada una rejilla y un diccionario, construir un crucigrama legal

Slot horizontal de tres letras

C	O	L
O		
Z		

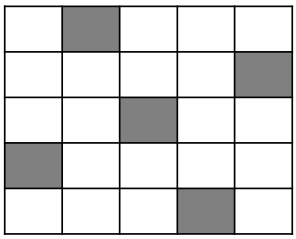
4 palabras de 1 letra
4 palabras de 3 letras
2 palabras de 5 letras

- Formulación:
  - variables : grupo de casillas para una palabra (*slots*)
  - dominios : palabras del diccionario con la longitud adecuada
  - restricciones : misma letra en la intersección de dos palabras

- Características :
  - CSP binario, discreto (dominios grandes)

N-reinas

- Posicionar n reinas en un tablero de ajedrez $n \times n$, de forma que no se ataquen



n = 5
(4,1,3,5,2)

- Formulación: (1 reina por columna)
  - variables : reinas, X_i reina en la columna i-ésima
  - dominios : filas posibles *{1, 2, …, n}*
  - restricciones : no colocar dos reinas en
    - la misma columna
    - la misma diagonal
- Características :
  - Dominios discretos y restricciones binarias

Criptoaritmética

- Sustituir cada letra por un dígito distinto (distinta cifra, distinta letra) de manera que la suma sea correcta

```
  GOTA
  GOTA
+ GOTA
  GOTA
  GOTA
----------
  AGUA
```

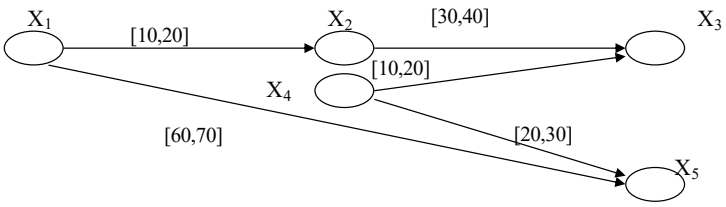
- Formulación:
  - variables : G, O, T, A, U, C_1, C_2, C_3
    (C_1, C_2, C_3 variables de acarreo)
  - dominios : O, T, U ∈ {0, …, 9}
    G, A ∈ {1, …, 9}
    C_1, C_2, C_3 ∈ {0, …, 4}
  - restricciones :
    - letras distintas G ≠ O, G ≠ T, …, A ≠ U
    - suma correcta

(unidades)	$5*A = 10*C_1+A$
(decenas)	$5*T+C_1 = 10*C_2+U$
(centenas)	$5*O+C_2 = 10*C_3+G$
(unidades millar)	$5*G+C_3 = A$

- Características :
  - Dominios discretos y restricciones múltiples

Restricciones temporales

- Dado un conjunto de sucesos que ocurren en intervalos temporales con ciertas relaciones, encontrar un asignación temporal consistente

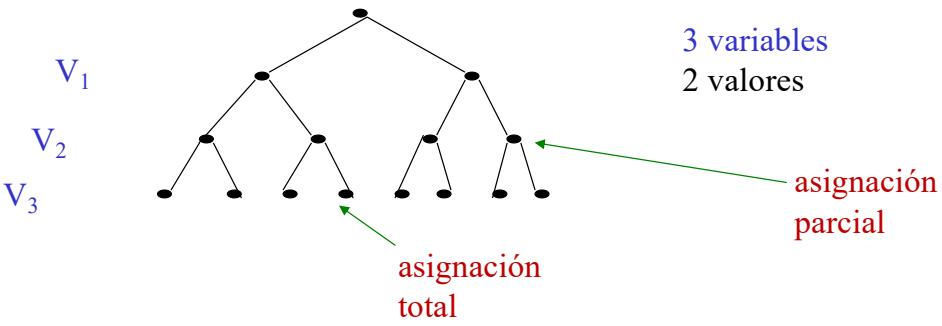


- Formulación:
  - variables : sucesos
  - dominios : intervalo temporal para cada suceso
  - restricciones : distancia temporal permitida entre sucesos; relaciones temporales antes, después, solapado, etc.

- Características :
  - Dominios continuos y restricciones binarias

Arbol de interpretaciones

- Partimos de un nodo raíz que supervisa el proceso.
- Cada nivel corresponde a una asignación de valor para una característica de datos. El orden de descenso viene especificado por a.
- Cada nodo identifica una posibilidad de asignación (Variable, valor).
- La solución se construye de forma incremental de tal forma que cada hoja es una interpretación.

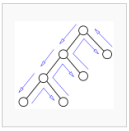


Métodos de resolución

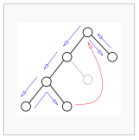
Búsqueda

Generación y test : generar de forma sistemática y exhaustiva cada una de las posibles asignaciones a las variables y comprobar si satisfacen todas las restricciones. Hay que explorar el espacio definido por el producto cartesiano de los dominios de las variables.

Backtracking : se trata de construir la solución de forma gradual, instanciando variables en el orden definido por la permutación dada



Backjumping: parecido al BT pero el retroceso no se hace a la variable instanciada anteriormente sino a la variable más profunda que está en conflicto con la variable actual.



Explorar el espacio de estados hasta encontrar una solución, demostrar que no existe o agotar los recursos

Métodos de resolución

Inferencia

- **Consistencia de arco**
- Consistencia de caminos
- K-consistencia

Deducir un problema equivalente que sea más fácil de resolver

Algoritmos híbridos

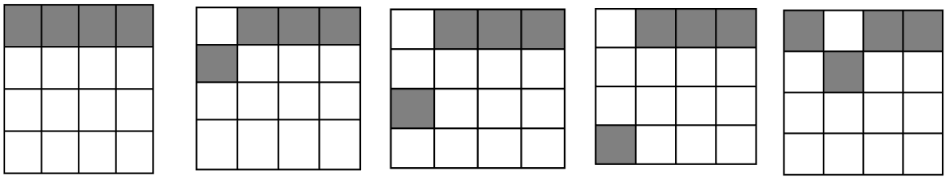
- **Forward Checking**
- Maintaining Arc Consistency
- Heurísticas

Combinación de las aproximaciones anteriores. Sobre un esquema de búsqueda se incorporan métodos de inferencia

Generación y test

Estrategia:

- generación y test de todas las asignaciones totales posibles
  1. Generar una asignación de todas las variables
  2. Comprobar si es solución. Si es, stop, sino ir a 1



Eficiencia:

- es muy poco eficiente
- genera muchas asignaciones que violan la misma restricción

Backtracking

Estrategia:

- Construir una solución parcial : asignación parcial que satisface las restricciones de las variables involucradas
- Extender la solución parcial, incluyendo una variable cada vez hasta llegar una solución total
- Si no se puede extender: backtracking
  - cronológico: se elimina la última decisión
  - no cronológico : se elimina una decisión anterior

Backtracking recursivo

```
procedimiento Backtracking(k, V[n])    ; Llamada inicial: Backtracking(1, V[n])
inicio
V[k] = Selección(d_k)    ; Selecciona un valor de d_k para asignar a x_k
si Comprobar(k, V[n]) entonces
   si k = n entonces
      devolver V[n]    ; Es una solución
   si no
      Backtraking(k + 1, V[n])
   fin si
si no
   si quedan_valores(d_k) entonces
      Backtraking(k, V[n])
   si no
      si k = 1 entonces
         devolver ∅    ; Fallo
      si no
         Backtraking(k − 1, V[n])
      fin si
   fin si
fin si
fin Backtracking
```


Limitaciones del backtracking

- Trashing e inconsistencia de nodo

  Relacionado con las restricciones unarias. Sucede cuando un dominio contiene un valor que no satisface una restricción unaria.

- Inconsistencia de arista

  Relacionado con las restricciones binarias. Sucede cuando existe una restricción binaria entre dos variables de tal forma que para un determinado valor de la primera variable no existe ninguna asignación posible para la segunda.

- Dependencia de la ordenación

  El orden de selección de las variables es un factor crítico. Se han desarrollado diversas heurísticas de selección de variable y de valor.

  Variable: Orden estático y Orden dinámico

  Valor: p.e. los que conducen a un CPS más simple

Forward checking

- En cada etapa de la búsqueda, FC comprueba hacia delante la asignación actual con todos los valores de las futuras variables que están restringidas con la variable actual.
- Los valores de las variables futuras que son inconsistentes con la asignación actual son temporalmente eliminados de sus dominios.
- Si el dominio de una variable futura se queda vacío, la instanciación de la variable actual se deshace y se prueba con un nuevo valor. Si ningún valor es consistente, entonces se lleva a cabo el backtracking cronologico.

Forward checking

1. Seleccionar x_i.
2. Instanciar $x_i \leftarrow a_i : a_i \in D_i$.
3. Razonar hacia adelante (forward-check):
   - Eliminar de los dominios de las variables $(x_{i+1}, \ldots, x_n)$ aún no instanciadas, aquellos valores inconsistentes con respecto a la instanciación (x_i, a_i), de acuerdo al conjunto de restricciones.
4. Si quedan valores posibles en los dominios de todas las variables por instanciar, entonces:
   - Si $i < n$, incrementar i, e ir al paso (1).
   - Si $i = n$, salir con la solución.
5. Si existe una variable por instanciar, sin valores posibles en su dominio, entonces retractar los efectos de la asignación $x_i \leftarrow a_i$. Hacer:
   - Si quedan valores por intentar en D_i, ir al paso (2).
   - Si no quedan valores:
     - Si $i > 1$, decrementar i y volver al paso (2).
     - Si $i = 1$, salir sin solución.

Forward checking

```
funcion FC(i variable): booleano
    para cada a ∈ factibles[i] hacer
        Xi ← a
        si i=N solución retorna CIERTO
        sino
                si forward (i,a)
                        si FC(i+1) retorna CIERTO
                Restaurar (i)
    retorna FALSO
funcion forward(i variable, a valor): booleano
    para toda j=i+1 hasta N hacer
        Vacio ← CIERTO
        para cada b ∈ factibles[j] hacer
                si (a,b) ∈ Rij vacio ←FALSO
                sino eliminar b de factible[j]
                        Añadir b a podado[j]
        si vacio retorna FALSO
    retorna CIERTO
procedimiento restaura(i variable)
    para toda j=i+1 hasta N hacer
        para todo b ∈ podado[j] hacer
                si Xi responsable filtrado b
                        Eliminar b de podado[j]
                        Añadir b a factible[j]
```


Forward Checking

Ejemplo Forward Checking:

Variables x, y
Dx= Dy ={1,2,3,4,5}
Restricción x < y-1

Inicialmente CDx = CDy = {1,2,3,4,5}

Si asignamos x = 2, entonces:
Los únicos valores que puede tomar y son 4, 5
por tanto CDy= {4,5}
..
..

Si asignamos x = 4, entonces:
No hay asignación posible compatible con la restricción.
por tanto CDy= {}
Deshacer x = 4 y backtracking

Propagación de Restricciones

- Transformar el problema en otro más sencillo sin inconsistencias de arco.
- Propiedad de consistencia de arista

  Una arista dirigida $c(e_p) = <V_i, V_j>$ es consistente si y sólo si para todo valor asignable a V_i existe al menos un valor en V_j que satisface la restricción asociada a la arista.
- Un CSP puede transformarse en una red consistente mediante un algoritmo sencillo (AC3) que examina las aristas, eliminando los valores que causan inconsistencia del dominio de cada variable.
- Después del proceso:
  - No hay solución
  - Hay más de una solución
  - Hay una única solución

Algoritmo AC3

$Q = \{c(e_p) = <V_i, V_j> | e_p \in E, i \neq j\}$

Mientras $Q \neq \emptyset$ hacer

  $<V_k, V_m>$ = seleccionar_y_borrar(Q)

  cambio = falso

  Para todo $v_k \in D_k$ hacer

    Si no_consistente (v_k, D_m) entonces

      borrar (v_k, D_k)

      cambio = cierto

    FinSi

  FinPara

  Si Dk = Ø entonces salir_sin_solución FinSi

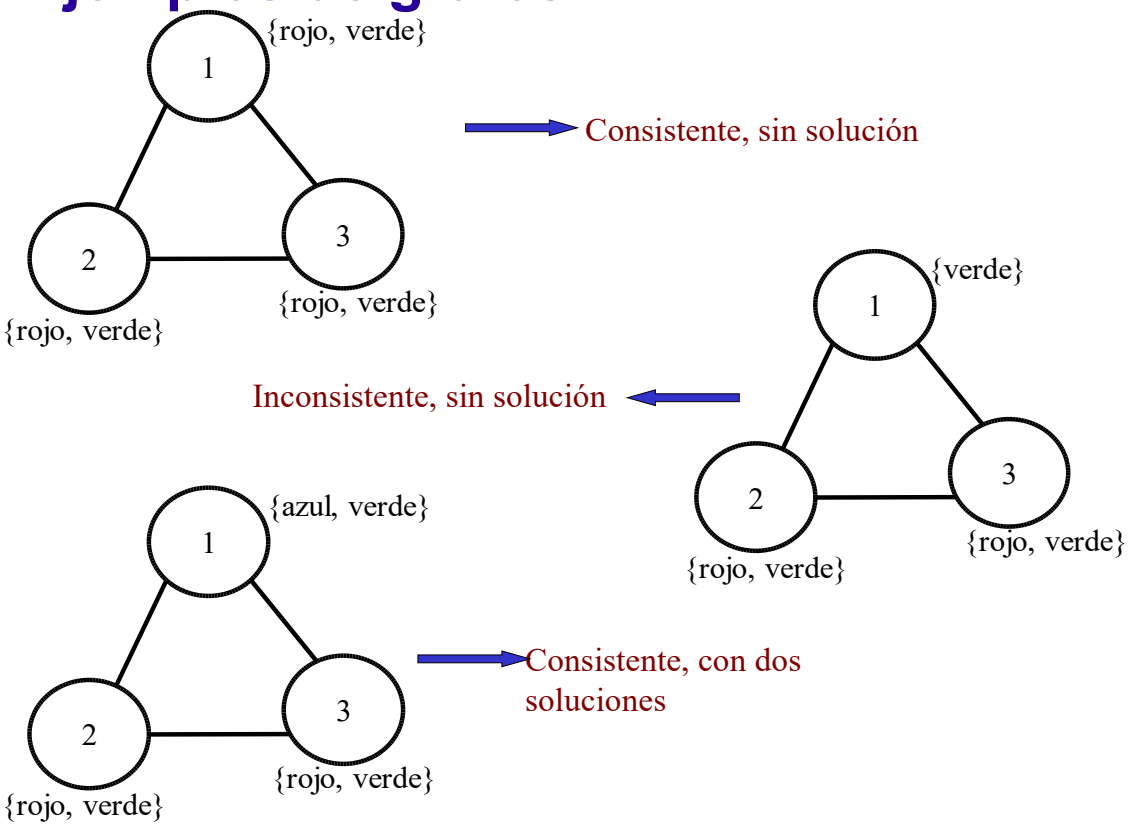
  Si cambio = cierto entonces

    $Q = Q \cup \{c(e_r) = <V_i, V_k> | e_r \in E, i \neq k, i \neq m\}$

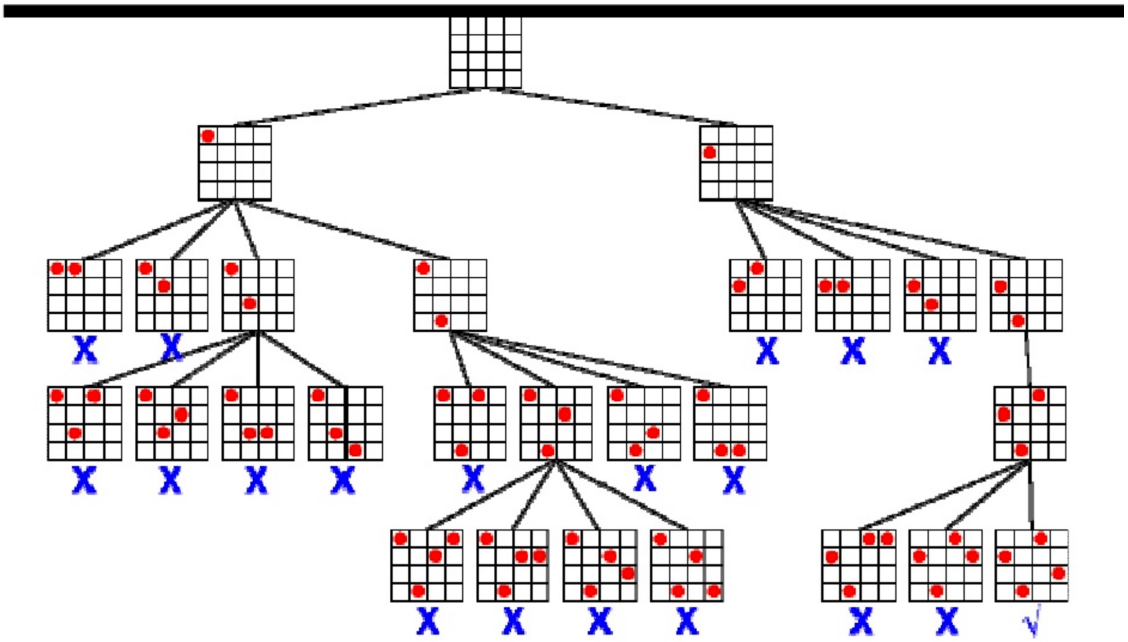
  FinSi

FinMientras

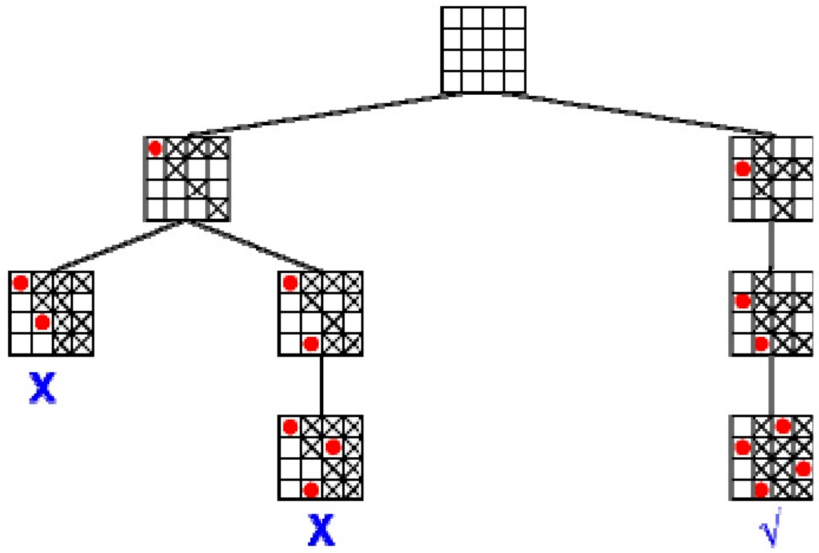
Ejemplos de grafos



Algoritmo AC-3 para backtracking ejemplo



Algoritmo AC-3 para Forward checking: ejemplo



Tema 3. Estrategias de búsqueda.
Bibliografía

- Stuart Russell, Peter Noving. "**Artificial Intelligence: A Modern Approach, Global Edition** " Ed. Pearson. Prentice Hall. 2021.