

## هوش مصنوعی

دانشکده مهندسی کامپیوتر

محمدحسین رهبان  
بهار ۱۴۰۳



زمان آزمون: ۱۸۰ دقیقه

### آزمون پایان ترم

۳ تیر ۱۴۰۳، ساعت ۹:۰۰

۱. لطفا پاسخ خود را با خط خوانا بنویسید.
۲. پاسخ هر سوال را در یک صفحه جدا و شماره پرسش را به صورت واضح در بالای هر صفحه بنویسید.
۳. نوشته‌های شما در قسمت چرک‌نویس یا برگه سوال به هیچ عنوان تصحیح نخواهد شد.
۴. استفاده از منابع و لوازم الکترونیکی حین پاسخگویی به سوالات آزمون غیرمجاز است.
۵. آزمون از ۱۱۰ نمره می‌باشد و دریافت ۱۰۰ نمره از ۱۱۰ نمره به منزله‌ی کسب نمره‌ی کامل خواهد بود. دقت کنید که نمره‌ی بالای ۱۰۰ سرریز نخواهد کرد.

### پرسش‌های آزمون (۱۰۰ + ۱۰ نمره)

- پرسش ۱ (۱۲ نمره) به سوالات زیر پاسخ دهید.
- (آ) (۴ نمره) درست یا نادرست بودن جملات زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید.
- الگوریتم یادگیری  $Q$  می‌تواند تابع بهینه‌ی  $Q$  یا همان  $Q^*$  را بدون اجرای سیاست بهینه یا همان  $\pi^*$  یاد بگیرد.
  - الگوریتم Value iteration تضمین به همگرایی می‌دهد در صورتی که ضریب تخفیف  $\gamma$  در نابرابری  $0 < \gamma < 1$  قرار گیرد.
  - در یک MDP  $^3$  که دارای مدل انتقال  $T$  است که به هر سه تایی  $T(s, a, s')$  احتمالی غیرصفر اختصاص می‌دهد، الگوریتم یادگیری  $Q$  شکست خواهد خورد.
  - در الگوریتم approximate  $Q$ -learning اگر نرخ یادگیری  $(\alpha)$  و ضریب تخفیف  $(\gamma)$  هر دو کاهش یابند مقادیر  $Q$  به پاداش اخیر حساس‌تر می‌شوند.
- (ب) (۲ نمره) در هنگام استفاده از یک مدل Naive Bayes به همراه Laplace Smoothing، با افزایش مقدار  $K$  کدام یک از موارد زیر می‌تواند رخ دهد؟ دلیل خود را برای هر کدام ذکر کنید.
- افزایش مقدار خطای آموزشی
  - کاهش مقدار خطای آموزشی
  - افزایش مقدار خطای تست
  - کاهش مقدار خطای تست
- (ج) (۳ نمره) با ذکر دلیل مشخص کنید که کدام یک از موارد زیر روشی مناسب برای جلوگیری کردن از overfit شدن مدل می‌باشد؟ (می‌توانید بیشتر از یک مورد را انتخاب کنید.)
- کاهش تعداد epoch ها به هنگام آموزش مدل با داده‌های آموزشی و استفاده از SGD
  - محدود کردن نرم بردار وزن  $(\|W\| \leq 1)$
  - کاهش داده‌های آموزش
- (د) (۳ نمره) با ذکر دلیل مشخص کنید که کدام یک از موارد زیر در رابطه با تابع فعال‌سازی Sigmoid و ReLU درست هستند؟ (می‌توانید بیشتر از یک مورد را انتخاب کنید.)
- هر دو تابع فعال‌سازی به طور پیوسته غیرکاهشی هستند.
  - در مقایسه با تابع Sigmoid، تابع ReLU از لحاظ محاسباتی پرهزینه‌تر است.
  - هر دو تابع دارای مشتق اول یکنوا هستند.

پرسش ۲ (۱۰ نمره) با توجه به داده‌های آموزشی زیر می‌خواهیم یک درخت تصمیم جهت دسته‌بندی داده‌ها طراحی کنیم.

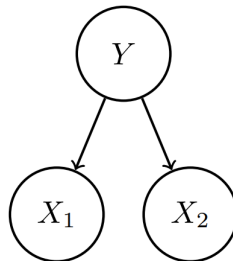
$X_1$	$X_2$	$X_3$	$y$
F	F	T	-
F	T	F	+
F	T	T	-
F	T	F	-
T	F	F	+
T	T	T	+

(آ) (۸ نمره) درخت تصمیم را برای این مجموعه داده رسم کنید. توجه کنید در گره‌هایی که تعداد داده‌ها با لیبیل مثبت و منفی برابر است، لیبیل آن گره را مثبت در نظر می‌گیریم. همچنین مقدار بهره‌وری اطلاعات<sup>۴</sup> را برای هر سه ویژگی در ریشه حساب کنید. (الزامی به محاسبه‌ی بهره‌وری اطلاعات در سایر گره‌ها نیست.) برای محاسبه‌ی لگاریتم‌ها می‌توانید از مقادیر تقریبی زیر استفاده کنید.

$$\log_2\left(\frac{1}{4}\right) = -2, \log_2\left(\frac{3}{4}\right) = -0.4, \log_2\left(\frac{2}{3}\right) = -0.6, \log_2\left(\frac{1}{3}\right) = -1.6$$

(ب) (۲ نمره) دقت آموزش درخت تصمیم را بدست آورید. دلیل وجود خطا چیست؟

پرسش ۳ (۱۰ نمره) مدلی naive bayes مطابق شبکه زیر داریم که دارای دو ویژگی  $x_1$  و  $x_2$  است. همچنین جداول احتمالاتی زیر که بر حسب پارامترهای  $p_1, p_2, p_3$  هستند را در اختیار داریم.



شکل ۱: naive bayes

$y$	$p(y)$
۰	$1 - p_3$
۱	$p_3$

$X_2$	$y$	$p(x_2 y)$
۰	۰	$p_2$
۱	۰	$1 - p_2$
۰	۱	$1 - p_2$
۱	۱	$p_2$

$X_1$	$y$	$p(x_1 y)$
۰	۰	$p_1$
۱	۰	$1 - p_1$
۰	۱	$1 - p_1$
۱	۱	$p_1$

(آ) (۹ نمره) با استفاده از داده‌های آموزشی زیر، پارامترهای  $p_1, p_2, p_3$  را با استفاده از maximum likelihood تخمین بزنید.

$X_1$	$X_2$	$y$
۱	۰	۱
۰	۱	۱
۱	۰	۱
۰	۰	۰
۰	۰	۰

(ب) (۱ نمره) داده‌ای با  $x_1 = 1$  و  $x_2 = 1$  به کدام کلاس تعلق دارد؟

پرسش ۴ (۲۲ نمره) قصد داریم با استفاده از لاجستیک رگرشن داده‌های آموزشی  $\{(x_i, y_i), i = 1, \dots, n\}$  را به طوری که  $x_i \in \mathbb{R}^d$  یک بردار ویژگی<sup>۵</sup> و  $y_i \in \{0, 1\}$  یک برچسب<sup>۶</sup> دودویی است، طبقه‌بندی کنیم. به همین منظور به سوالات زیر در رابطه با این الگوریتم پاسخ دهید.

(آ) (۲ نمره) لاجستیک رگرشن سعی در پیش‌بینی چه چیزی دارد؟ به صورتی احتمالی بررسی کنید.

(ب) (۸ نمره) نشان دهید بیشینه کردن log likelihood بر روی داده‌های آموزشی معادل کمینه کردن تابع هزینه‌ی زیر است. ( $w \in \mathbb{R}^d$  بردار وزن‌های مدل است که سعی در تخمین آن داریم)

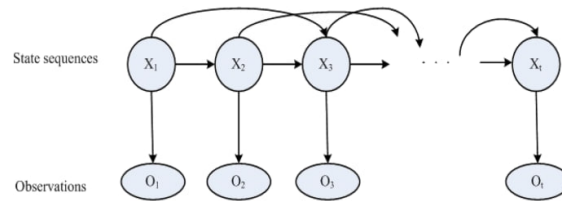
$$J(w) = - \sum_{i=1}^n y_i \log(p(y_i|x_i; w)) + (1 - y_i) \log(1 - p(y_i|x_i; w))$$

<sup>۴</sup>Information gain  
<sup>۵</sup>Feature vector  
<sup>۶</sup>Label

(ج) (۸ نمره) با استفاده از بخش قبل، مشتق تابع log likelihood را نسبت به  $w$  بدست آورید. همچنین توجه کنید که این مساله بهینه‌سازی دارای جواب به فرم بسته نمی‌باشد. با توجه به این موضوع روشی را برای بدست آوردن جواب برای این الگوریتم پیشنهاد دهید.

(د) (۴ نمره) نشان دهید مرز تصمیم‌گیری (منحنی که در فضای ویژگی، داده‌های دو کلاس را از هم تفکیک می‌کند)  $\gamma$  در این الگوریتم یک تابع خطی است.

پرسش ۵ (۱۰ نمره) مدل مارکوف پنهان  $^8$  زیر را در نظر بگیرید که دامنه‌ی متغیرهای آن دودویی  $^9$  است. در این مدل مطابق شکل ۲ هر متغیر حالت به دو متغیر حالت پیشین خود وابسته است.



شکل ۲

همچنین جدول توزیع احتمالات شرطی این مدل نیز به شکل زیر است:

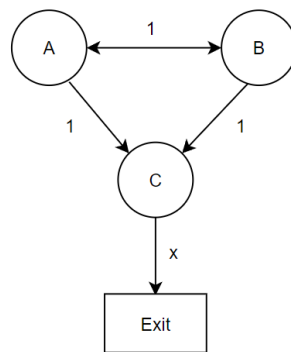
$x_t$	$p(o_t = 1   x_t)$
۰	۰/۲
۱	۰/۴

$x_{t-2}$	$x_{t-1}$	$p(x_t = 1   x_{t-1}, x_{t-2})$
۰	۰	۰/۸
۱	۰	۰/۳
۰	۱	۰/۶
۱	۱	۰/۱

یک مدل مارکوف پنهان مرتبه اول  $^{10}$  (عادی) معادل با مدل مارکوف مطرح شده طراحی نمایید.

پرسش ۶ (۳۰ نمره)

(آ) (۱۰ نمره) به MDP کشیده شده در شکل ۳ توجه کنید. در این MDP کنش‌های قابل انجام در هر حالت با توجه به جهت یال‌ها مشخص می‌شود. بنابراین به عنوان مثال از وضعیت A می‌توان به وضعیت B یا C رفت. همچنین میزان پاداش هر کنش بر روی یال آن نوشته شده است. تنها کنشی که در وضعیت C می‌توان انجام داد، خروج است که معادل ورود به وضعیت ترمینال است و پاداش x را به همراه دارد.



شکل ۳

اکنون فرض کنید هر کنشی غیر از کنش خروج با احتمال ۰/۵ موفقیت آمیز باشد و در صورت شکست، عامل در سر جای خود بماند و پاداش ۰ را دریافت کند. توجه شود کنش خروج همچنان به صورت قطعی انجام می‌شود. همچنین  $\gamma = ۰/۵$  است.

در صورتی که حرکت از وضعیت ۱ به وضعیت ۲ را با  $۲ \rightarrow ۱$  نمایش دهیم، به ازای چه مقداری از x،  $Q^*(A, A \rightarrow B) = Q^*(A, A \rightarrow C)$  خواهد بود؟

راهنمایی: به رابطه بلمن برای استیت A و کنش‌هایش توجه کنید.

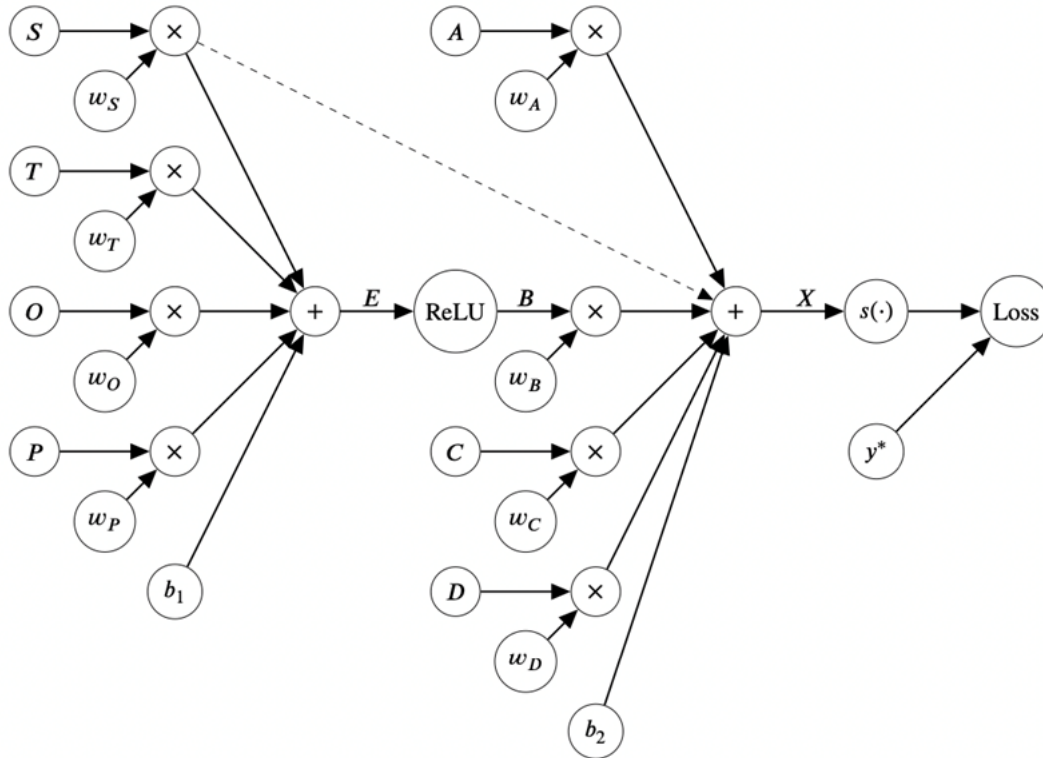
(ب) (۱۲ نمره) یک MDP محدود با پاداش‌های دارای کران مشخص را در نظر بگیرید و فرض کنید این MDP یک سیاست بهینه قطعی دارد. حال از روی این MDP یک MDP جدید می‌سازیم به این صورت که اگر کنش a در یک وضعیت s بهینه نباشد،  $r(s, a)$  را از مقدار ثابت و مثبت c کم می‌کنیم و در صورتی که a کنش بهینه باشد مقدار پاداش آن تغییری نمی‌کند. آیا سیاست بهینه در MDP جدید با سیاست بهینه در MDP اولیه برابر است؟ اگر پاسخ شما مثبت است آن را اثبات کرده و در غیر این صورت مثال نقض بیاورید.

<sup>۸</sup>boundary Decision  
<sup>۹</sup>Hidden Markov Model  
<sup>۹</sup>Binary  
<sup>۱۰</sup>first order

(ج) (۸ نمره) معادله‌ی بلمن را معکوس کرده‌ایم به گونه‌ای که مقدار یک حالت را بر اساس حالت‌های قبلی به شکل زیر محاسبه می‌کنیم. با ارائه‌ی یک مثال نقض نشان دهید که این رابطه در حالت کلی صحیح نمی‌باشد.

$$V^{\pi}(s') = \sum_s \sum_a P(s'|s, a) \left( \frac{V^{\pi}(s) - R(s, a)}{\gamma} \right)$$

پرسش ۷ (۱۶ نمره) شبکه عصبی زیر را در نظر بگیرید:



در این شبکه S، T، O، P، A، C و D ورودی‌ها،  $w_S$ ،  $w_T$ ،  $w_O$ ،  $w_P$ ،  $w_A$ ،  $w_C$ ،  $w_D$  و  $w_B$  وزن‌ها و  $b_1$  و  $b_2$  مقادیر بایاس هستند. همچنین تابع  $s(\cdot)$  به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$s(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$$

فرض کنید یال مشخص شده با خط چین وجود ندارد. عبارات زیر را برحسب ورودی‌ها و متغیرهای  $E$  و  $\frac{\partial Loss}{\partial s(X)}$  و  $s(X)$  و وزن‌های شبکه بدست آورید:

الف)  $\frac{\partial Loss}{\partial w_A}$

ب)  $\frac{\partial Loss}{\partial w_S}$

حال فرض کنید یال مشخص شده با خط چین مانند یک یال عادی در شبکه عصبی وجود دارد. عبارات زیر را برحسب ورودی‌ها و متغیرهای  $E$  و  $\frac{\partial Loss}{\partial s(X)}$  و  $s(X)$  و وزن‌های شبکه بدست آورید:

ج)  $\frac{\partial Loss}{\partial w_A}$

د)  $\frac{\partial Loss}{\partial w_S}$