به نام خدا

می‌خواهیم نقاط کمینه یا بیشینه سراسری تابع f را روی بازه $[a,b]$ بیابیم.

اگر x_0 یک نقطه کمینه یا بیشینه باشد، آنگاه:

۱- $f'(x_0)=0$ یا ۲- f' در x_0 تعریف نشده است یا ۳- x_0 نقطه مرزی است.

$(|x|)' = x$ علامت $= sgn(x)$

$(|\sin(x)|)' = sgn(\sin(x))\cos(x)$

$$sgn(x) = \begin{cases} 1 & x>0 \\ -1 & x<0 \\ \text{تعریف نشده} & x=0 \end{cases}$$

$f(x) = |1+2\sin x|$

روی بازه $[-\pi,\pi]$

$f'(x) = \underbrace{sgn(1+2\sin x)}\, 2\cos x$

1) $\{f'(x_0)=0\}$ نقاطی که $\Rightarrow 2\cos x = 0 \Rightarrow \boxed{x=\frac{\pi}{2}, -\pi/2}$

2) $\{f'(x_0)$ تعریف نشده$\}$ نقاطی که $\Rightarrow 1+2\sin x = 0 \Rightarrow \sin x = -1/2 \Rightarrow \boxed{x = -\pi/6 \text{ یا } \frac{7\pi}{6}}$

3) $x=\pi$ یا $-\pi$

$f(\pi/2) = |1+2| = 3$

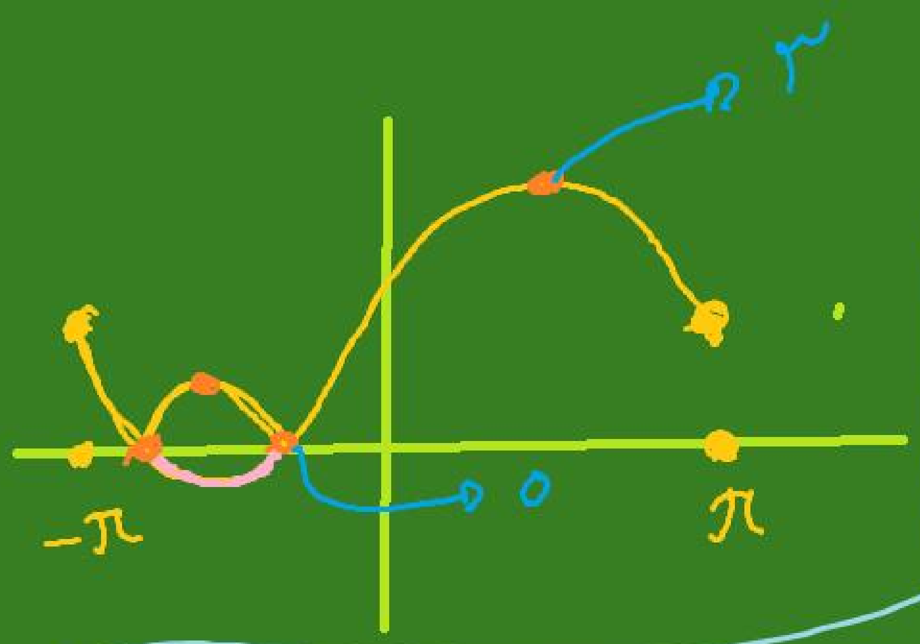
$f(-\pi/2) = |1-2| = 1$

$f(-\pi/6) = |1-1| = 0$

$f(-\frac{7\pi}{6}) = |1-1| = 0$

$f(\pi) = |1| = 1$

$f(-\pi) = |1| = 1$



رفتار تابع:

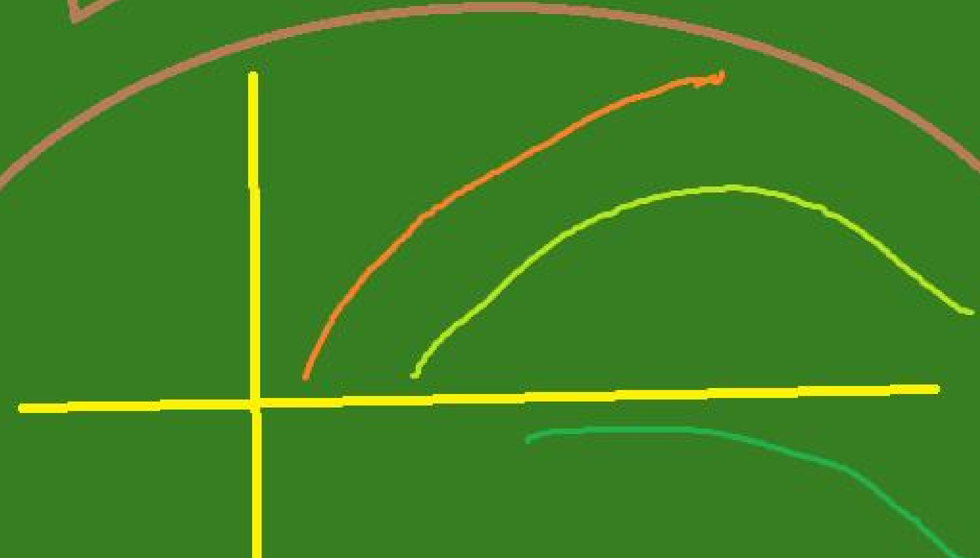
صعودی: در تمام نقاط: $f' \geq 0$ (یا f' تعریف نشده)

نزولی: $''$ $''$ $''$ $f' \leq 0$ (یا $''$ $''$)

مثال: $\{(\ln(x))' = \frac{1}{x} > 0$ به ازای R^+ $\Rightarrow$ $\ln(x)$ صعودی در تمام بازه $R^+\}$

محدب: مشتق آن صعودی است $\cup$

مقعر: $''$ $''$ نزولی است $\cap$



مثال:

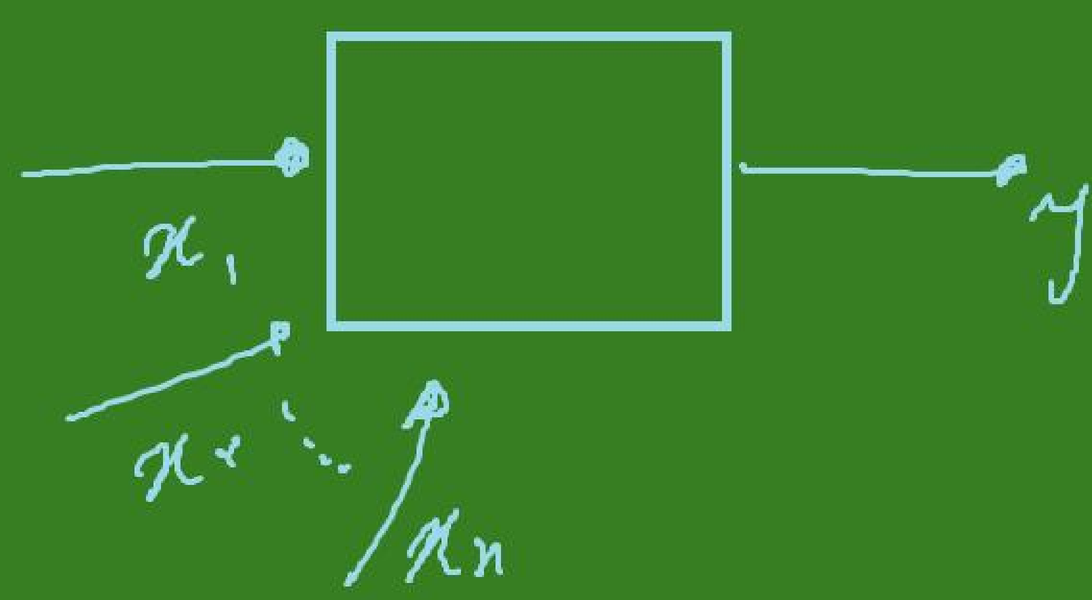
	صعودی/نزولی	محدب/مقعر
e^x	✓	✓
$\frac{1}{1+x}$ ، R^+	✓	✓
$1-\frac{1}{x}$ ، R^+	✓	✓
$\ln(x)$ ، R^+	✓	✓

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

$$(f^{-1})''(x) = \frac{-1}{\left(f'(f^{-1}(x))\right)^2} * f''\left(f^{-1}(x)\right) * \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$$

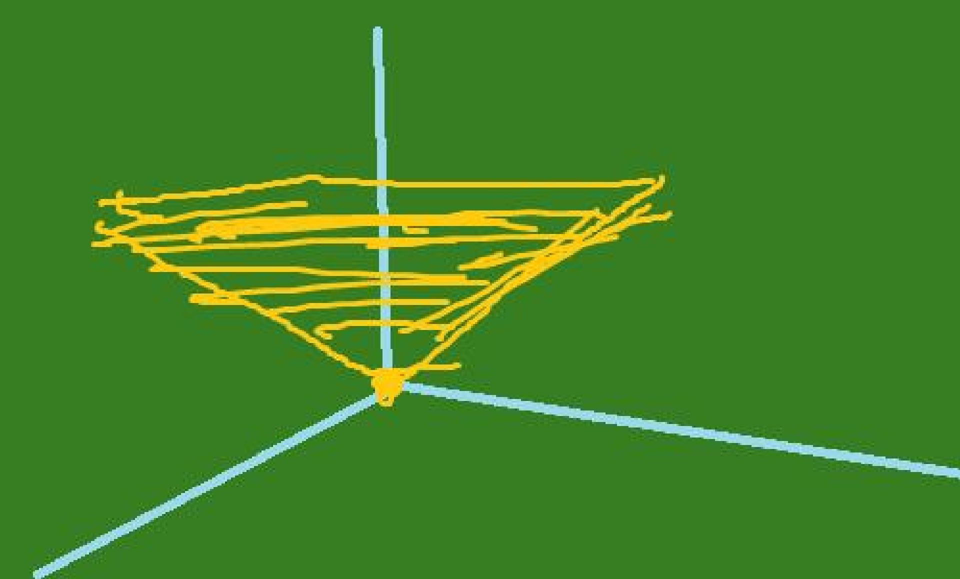
یک تابع و وارون آن در صعودی / نزولی بودن مانند هم اند.
یک تابع و وارون آن در محدب / مقعر بودن دو حالت دارد. اگر تابع نزولی باشد مانند همدیگر و اگر صعودی باشد برعکس یکدیگر اند.

توابع چندین (هزار!) متغیره



$f(x) = \{(x, y) \in A_x \times A_y \mid$ شرط تابع $\}$

$f(x_1, x_2) = \{(x_1, x_2, y) \in \dots \mid \dots\}$ شرط تابع



$$y = f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$$

مشتق: (جزئی) : نرخ تغییرات خروجی نسبت یکی از ورودی ها (وقتی باقی ورودی ها ثابت باشند)

$$y = x_1^2 \cdot x_2 + x_1 + x_2$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = 2x_1 \cdot x_2 + 1$$ انگار x_2 عدد ثابت است.

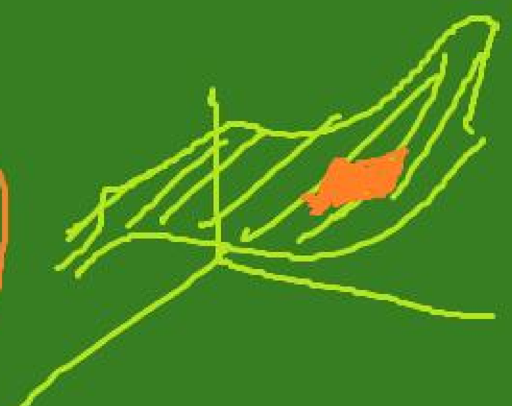
گرادیان

بهینه‌سازی

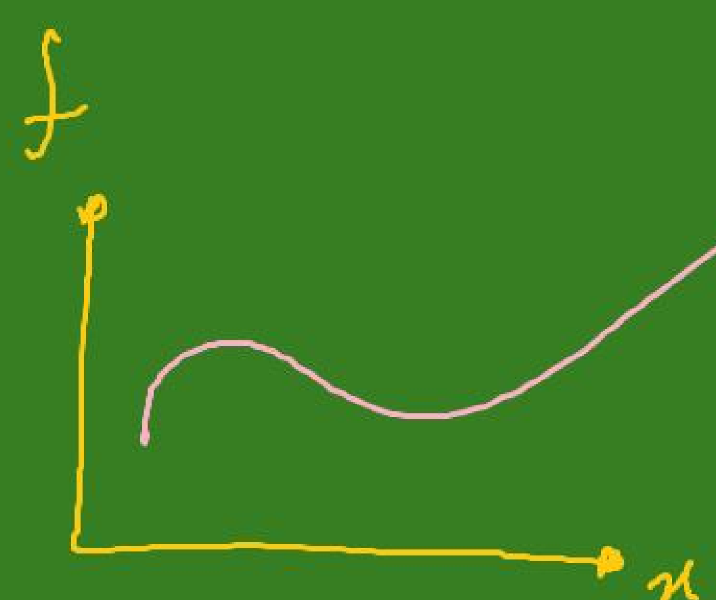
تغییرات:

$$y = f(x) \longrightarrow \begin{cases} \Delta y \simeq f'(x)\,\Delta x \\ dy = f'(x)\,dx \end{cases}$$

$$y = f(x_1, x_2) \Rightarrow \Delta y \simeq \frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2$$



$$dy = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2$$



گرادیان:

در یک بعد صرفاً روی خط جابه جا می‌شدیم:

$|f'(x)|$: اندازه تغییرات را می‌دهد.

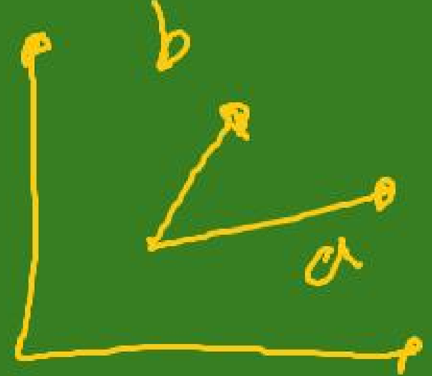
$\mathrm{sgn}(f'(x))$: جهت افزایش تغییرات را می‌دهد.

در دو بعد روی صفحه می‌توانیم حرکت کنیم.

جهت حرکت

اندازه شیب تغییرات

$$\Delta y = \frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2 = \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}\right)}_{\text{بردار گرادیان}} \cdot \underbrace{(\Delta x_1, \Delta x_2)}_{\text{بردار جابه‌جایی (تغییرات)}}$$



$b = (b_1, b_2)$

$a = (a_1, a_2)$

$b.a = a_1b_1 + a_2b_2$

$b.a = 0 \longleftrightarrow$ عمود بودن

$$\Delta y = \underbrace{\nabla f}_{\text{گرادیان}} \cdot \underbrace{\overrightarrow{\Delta x}}_{\text{بردار جابه‌جایی}}$$

بیشترین تغییرات y وقتی است
که در جهت بردار گرادیان حرکت کنیم

بیشترین نرخ تغییرات برابر با اندازه گرادیان است.

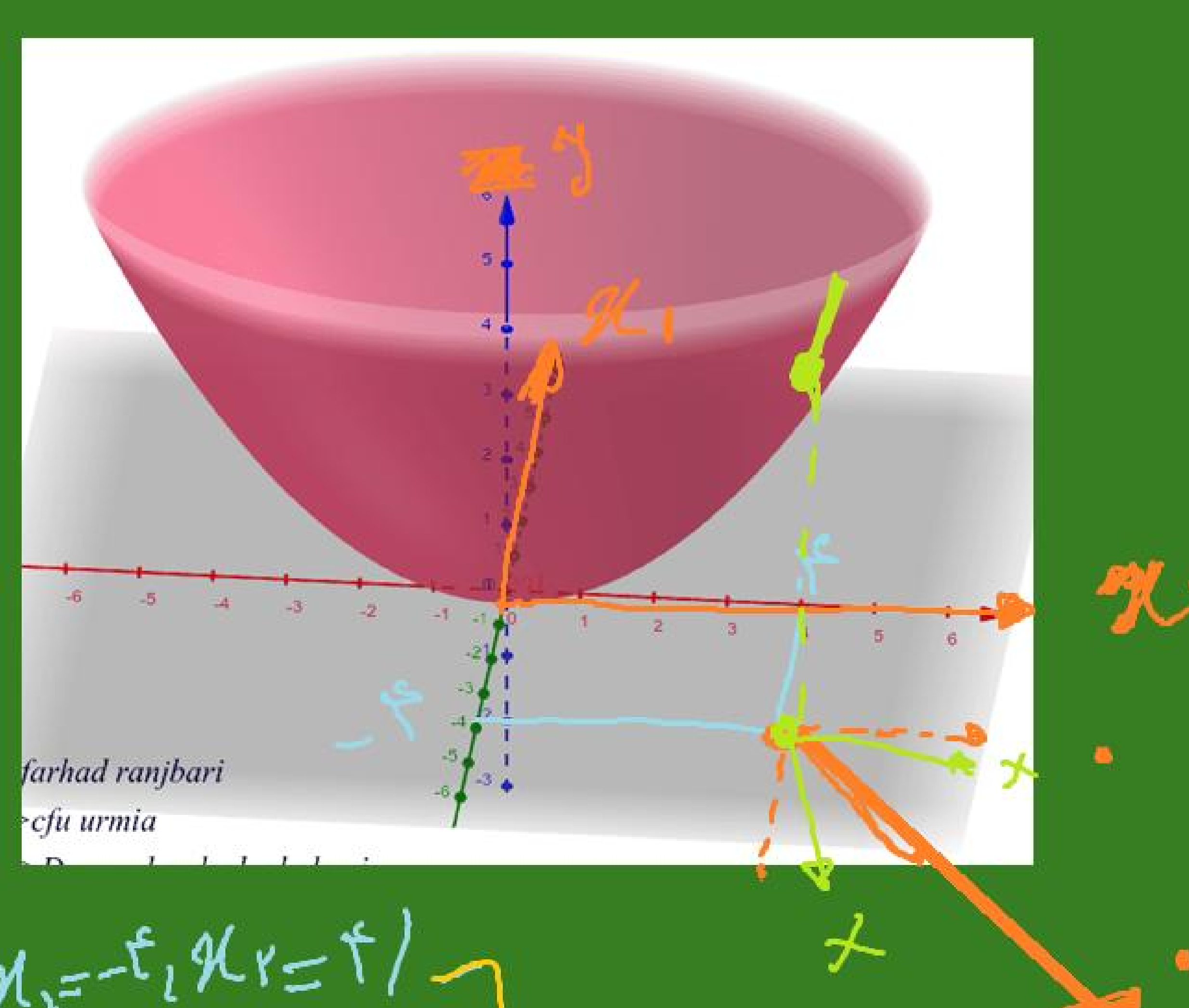
مثال:

$y = x_1^2 + x_2^2$

$y = f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \partial f / \partial x_1 \\ \partial f / \partial x_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$$



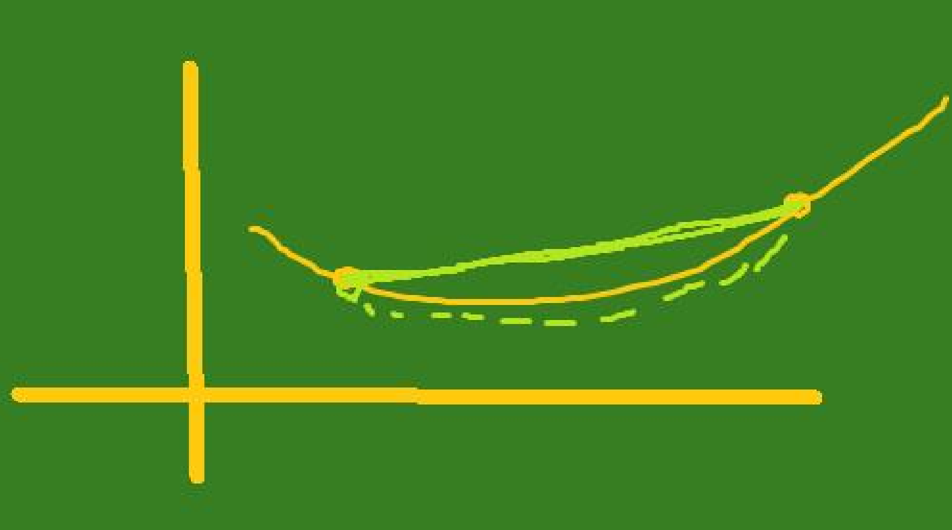
$(x_1 = -4, x_2 = 4)$

$$\nabla f \Big|_{(-4,4)} = \begin{pmatrix} -8 \\ +8 \end{pmatrix}$$

$$\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

$|\nabla f| = 8\sqrt{2}$

$$\hat{\nabla f} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



تحدب و تقعر تابع دو متغیره