سوال اول :

حل

این مساله معادل یافتن امید ریاضی و واریانس تعداد مثلث‌ها در یک گراف است که احتمال وقوع هر یال آن p است. فرض کنید که برچسب هر یک از رئوس این گراف عددی از ۱ تا n باشد. برای هر سه‌تایی از رئوس، متغیر $Y_{i,j,k}$ را به عنوان یک متغیر $Bern(p^3)$ تعریف می‌کنیم که با احتمال p^3 برابر ۱ است (یعنی هرگاه هر ۳ یال مثلث به رئوس i، j و k وجود داشته باشند، آنگاه $Y_{i,j,k} = 1$ می‌شود). پس اگر X را به عنوان متغیر تصادفی‌ای تعریف کنیم که تعداد مثلث‌ها در گراف اخیر را نشان می‌دهد، داریم:

$$X = \sum Y_{i,j,k}$$

پس

$$E(X) = E\left(\sum Y_{i,j,k}\right) = \sum E(Y_{i,j,k}) = C(n,3) \cdot E(Y_{i,j,k}) = C(n,3) \cdot p^3$$

حال به محاسبه واریانس X می‌پردازیم: تنها کافیست $E(X^2)$ را حساب کنیم. داریم:

$$X^2 = \sum_{i,j,k} \sum_{i',j',k'} Y_{i,j,k} \cdot Y_{i',j',k'}$$

پس

$$E(X^2) = \sum E(Y_{i,j,k} \cdot Y_{i',j',k'})$$

حال با توجه به اشتراک $\{i,j,k\}$ و $\{i',j',k'\}$، میزان هر جمله $E(Y_{i,j,k} \cdot Y_{i',j',k'})$ را حساب می‌کنیم:

۱. اگر $\{i,j,k\} = \{i',j',k'\}$:

$$E(Y_{i,j,k} \cdot Y_{i',j',k'}) = p^3$$

که $C(n,3)$ تا از این جملات داریم.

۱. اگر $\{i,j,k\} = \{i',j',k'\}$:

$$E(Y_{i,j,k} \cdot Y_{i',j',k'}) = p^3$$

که $C(n,3)$ تا از این جملات داریم.

۲. اگر $\{i,j,k\}$ و $\{i',j',k'\}$ دو عضو مشترک داشته باشند: پس در اجتماع این دو مثلث، ۵ یال و ۴ راس داریم، یعنی:

$$E(Y_{i,j,k} \cdot Y_{i',j',k'}) = p^5$$

همچنین تعداد چنین دوتایی‌ها از مثلث‌ها برابر با $12C(n,4)$ است، زیرا باید ۴ راس را برای این دو مثلث از n راس انتخاب کرده و به $C(4,2)$ حالت یال مشترک دو مثلث را تعیین کنیم و به دو حالت مشخص کنیم که دو راس باقی‌مانده، هر یک به کدام مثلث تعلق دارند.

۳. اگر $\{i,j,k\}$ و $\{i',j',k'\}$ یک عضو مشترک داشته باشند: پس در اجتماع این دو مثلث، ۵ راس و ۶ یال داریم. پس:

$$E(Y_{i,j,k} \cdot Y_{i',j',k'}) = p^6$$

همچنین تعداد چنین دوتایی‌ها از مثلث‌ها برابر است با $30C(n,5)$، چرا که می‌بایست ۵ راس را برای این دو مثلث، به $C(n,5)$ روش انتخاب کنیم و به ۵ حالت، راسی را که بین دو مثلث مشترک است را تعیین کرده و به $C(4,2)$ حالت، دو راس مربوط به مثلث اول را مشخص کنیم.

۴. اگر $\{i,j,k\}$ و $\{i',j',k'\}$ عضو مشترک نداشته باشند: پس در اجتماع این دو مثلث، ۶ راس و ۶ یال داریم. پس:

$$E(Y_{i,j,k} \cdot Y_{i',j',k'}) = p^6$$

همچنین تعداد چنین دوتایی‌ها از مثلث‌ها برابر $20C(n,6)$ است، چرا که به $C(n,6)$ حالت رئوس این دو مثلث را تعیین کرده و به $C(6,3)$ حالت، رئوس مربوط به مثلث‌ها را تفکیک می‌کنیم.

پس در نهایت داریم:

$$E(X^2) = C(n,3)p^3 + 12C(n,4)p^5 + 30C(n,5)p^6 + 20C(n,6)p^6$$

پس:

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = C(n,3)p^3 + 12C(n,4)p^5 + 30C(n,5)p^6 + 20C(n,6)p^6 - \left(C(n,3)p^3\right)^2$$

سوال دوم

هنگامی که وحید در حال جمع‌آوری نوع kـام جدید از کارت‌های طلایی است (در حالی که قبلاً $k-1$ نوع جمع کرده است)، احتمال اینکه کارت طلایی جدید از نوعی باشد که هنوز جمع‌آوری نشده، برابر است با:

$$\frac{n-(k-1)}{n}=\frac{n-k+1}{n}$$

تعداد کارت‌های طلایی مورد انتظار برای دریافت نوع kـام جدید، عکس این احتمال است:

$$\frac{n}{n-k+1}$$

برای اینکه وحید تمام n نوع کارت را جمع‌آوری کند، باید این مقدارها را برای تمام k از ۱ تا n جمع کنیم. مجموع این مقادیر برابر با nH_n خواهد بود، که H_n عدد هارمونیک nـام است:

$$H_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

بنابراین، تعداد کارت‌های طلایی مورد انتظار برای جمع‌آوری همه انواع، برابر با nH_n است. وقتی این مقدار را با احتمال p بسته‌ها تنظیم می‌کنیم، تعداد بسته‌های مورد نیاز به صورت زیر به دست می‌آید:

$$P=\frac{nH_n}{p}$$

برای n بزرگ، چون $H_n \approx \ln n+\gamma$ است، که در آن γ (ثابت اویلر-ماشرونی) تقریباً برابر با 0.5772 است، تعداد بسته‌های مورد نیاز به صورت زیر تقریب زده می‌شود:

$$P \approx \frac{n(\ln n+\gamma)}{p}$$

از آنجا که γ یک مقدار ثابت است، برای n بسیار بزرگ، جمله غالب در این معادله $n\ln n$ است، بنابراین تقریب نهایی به صورت زیر ساده می‌شود:

$$P \approx \frac{n\ln n}{p}$$

سوال سوم:

فرض کنید تعداد کل درخواست‌ها (N) مقدار ثابتی برابر n باشد. در این حالت، تعداد موفقیت‌ها (X) از توزیع دو جمله‌ای پیروی می‌کند:

$$X \sim \text{Binomial}(n, p)$$

توزیع دو جمله‌ای می‌تواند به توزیع پواسون تقریب زده شود اگر:

۱. تعداد کل آزمایش‌ها (n) بسیار بزرگ باشد ($n \to \infty$).

۲. احتمال موفقیت در هر آزمایش (p) بسیار کوچک باشد ($p \to 0$).

۳. حاصلضرب np ثابت بماند ($np = \lambda'$).

در این مسئله، N از توزیع پواسون پیروی می‌کند، اما می‌توان N را تقریباً ثابت فرض کرد. در این صورت:

$$X \sim \text{Binomial}(n, p)$$

و تحت شرایط بالا، این توزیع با توزیع پواسون با پارامتر λp تقریب زده می‌شود:

$$\text{Binomial}(n, p) \approx \text{Poisson}(\lambda p)$$

در نتیجه، برای تعداد زیاد درخواست‌ها (n بزرگ) و احتمال موفقیت کوچک (p کوچک)، تعداد موفقیت‌ها X به خوبی با توزیع $\text{Poisson}(\lambda p)$ مدل می‌شود.

سوال چهارم:

(a) The range of Z is given by

$$R_Z = \left\{\frac{m}{n} | m, n \in \mathbb{N}\right\},$$

which is the set of all positive rational numbers.

(b) To find the PMF of Z, let $m, n \in \mathbb{N}$ such that $(m, n) = 1$, where (m, n) is the largest divisor of m and n. Then

$$\begin{aligned}
P_Z\left(\frac{m}{n}\right) &= \sum_{k=1}^{\infty} P(X = mk, Y = nk) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} P(X = mk)P(Y = nk) \qquad \text{(since } X \text{ and } Y \text{are independent)} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} pq^{mk-1}pq^{nk-1} \qquad \text{(where } q = 1-p) \\
&= p^2q^{-2}\sum_{k=1}^{\infty} q^{(m+n)k} \\
&= \frac{p^2q^{m+n-2}}{1-q^{m+n}} \\
&= \frac{p^2(1-p)^{m+n-2}}{1-(1-p)^{m+n}}.
\end{aligned}$$

second one is a Taylor series. Now, let's apply LOTUS.

$$
\begin{aligned}
E\left[\frac{X}{Y}\right] &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m}{n}P(X=m,Y=n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m}{n}p^2q^{m-1}q^{n-1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}p^2q^{n-1}\sum_{m=1}^{\infty}mq^{m-1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}p^2q^{n-1}\frac{1}{(1-q)^2} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}q^{n-1} \\
&= \frac{1}{q}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n}{n} \\
&= \frac{1}{1-p}\ln\frac{1}{p}.
\end{aligned}
$$

سوال دهم

فرض کنید X تعداد پشت‌ها در n پرتاب سکه‌ی منصفانه باشد. بنابراین:

$$X \sim \text{Binomial}(n, 0.5),$$

که به معنی آن است که:

$$E[X] = \frac{n}{2}, \quad \textbf{Var}(X) = \frac{n}{4}.$$

با توجه به اینکه $X = x$، $Y \sim \text{Poisson}(x)$. بنابراین:

$$E[Y|X] = X, \quad \text{Var}(Y|X) = X.$$

با استفاده از قانون واریانس کل:

$$\text{Var}(Y) = E[\text{Var}(Y|X)] + \text{Var}(E[Y|X]),$$

ما مقادیر را جایگزین می‌کنیم:

$$\text{Var}(Y) = E[X] + \text{Var}(X) = \frac{n}{2} + \frac{n}{4} = \frac{3n}{4}.$$