

امید ریاضی و معاریاسی

۱- با توجه به دستگیری اخیر پاول دورف (مدیر تلگرام)، او تصمیم گرفته تا نظارت را بر تلگرام بیشتر کند تا فعالیت ها مجرمانه در این بستر کاهش یابد. برای این کار او n نفر را به طور تصادفی از بین افراد یک کشور انتخاب می کند و میخواهد تعداد گروه های ۳ تایی از افراد که دو به دو با هم در ارتباط اند را محاسبه کند. چون بنابر امار، احتمال وقوع فعالیت مجرمانه در گروه های سه نفره از بقیه گروه ها بیشتر است. اگر احتمال ارتباط داشتن دو شخص با هم p باشد. میانگین و واریانس تعداد گروه های سه نفره در بین این n نفر چقدر است ؟ (در مساله p و n ثابت اند.)

حل:

وحید به کارت‌های فوتبالی علاقه‌ی زیادی دارد. در بین کارت‌های فوتبالی، کارت‌های نادری از بازیکنان برتر به نام کارت‌های طلایی وجود دارند. هر بسته کارت به احتمال p دارای یک کارت طلایی است و به احتمال $1 - p$ فاقد کارت طلایی است. در کل برای n بازیکن، کارت طلایی داریم و در صورت ظاهر شدن در بسته، هر کدام با احتمال برابر ظاهر می‌شوند. وحید می‌خواهد تمام انواع کارت‌های طلایی موجود را جمع‌آوری کند! به طور میانگین وحید نیاز دارد تا چند بسته کارت فوتبالی بخرد تا به خواسته‌ی خود برسد؟ نتیجه را برای n به اندازه‌ی کافی بزرگ با یک تابع صریح تخمین بزنید.

حل:

در طول شبانه روز تعداد درخواست های ارسالی به سرور سامانه درس افزار از توزیع پواسن با پارامتر λ پیروی می کند. با توجه به قدرت بالای پاسخ دهی سرور (!) هر درخواست به احتمال p پاسخ داده می شود و در غیر این صورت یک خطای دلخواه XXX ارسال می شود. توزیع متغیر تصادفی تعداد درخواست هایی را که به درستی پاسخ خود را گرفته اند، بیابید. مساله را از طریق تقریب دو جمله ای و پواسن حل نمایید.

حل:

Let $X, Y \sim \text{Geometric}(p)$ be independent, and let $Z = \frac{X}{Y}$.

(a) Find the range of Z .

5.1. TWO DISCRETE RANDOM VARIABLES

(b) Find the PMF of Z .

(c) Find EZ .

1

یک سکه سالم n بار پرتاب می‌شود. فرض کنید X تعداد شیرهایی باشد که در این پرتاب‌ها مشاهده می‌شود. با توجه به اینکه $X = x$ ، متغیر Y به صورت یک توزیع پواسون با میانگین x تولید می‌شود.

۱. واریانس غیرشرطی Y را بیابید.

حلی

