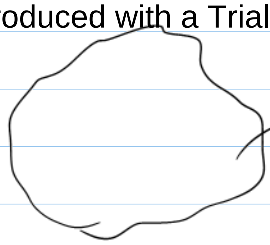
بسم الله الرحمن الرحیم




$X : \omega \to R$

$R_x \Rightarrow \{x \mid$ مقادیری که $X$ می‌تواند به خود بگیرد $\}$

⇒ دو تاس $\{(2,1)\ (1,2)\}$

$R_x = \{2, 3, \dots, 12\}$

۳۴ ۴۳ ۲۵ ۵۲ ۱۶ ۶۱

PMF $\Rightarrow P_X(X = x) =$

$Y \to R_Y \quad P_Y(Y = y) : y \in R_y$

$X \to R_X$

$Z \to R_Z$

$$\text{PMF}_X = \begin{cases} \frac{1}{36} & 2 \\ \frac{2}{36} & 3 \\ \frac{6}{36} & 7 \\ & 12 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

تابعی در مقادیر متغیر تصادفی به احتمال وقوعشان

$P_X(X = 2) = \frac{1}{36}$

$P_X(X = 3) = \frac{2}{36}$

$\vdots$

$P_X(X = 12) = \frac{1}{36}$

شرط PMF

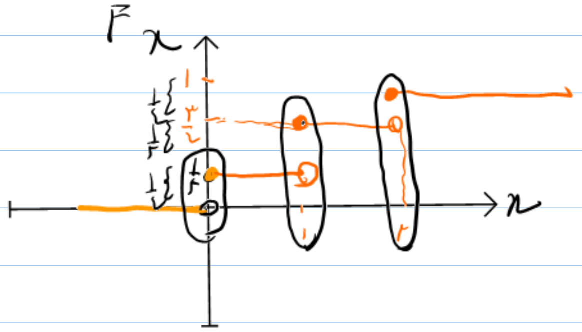
$$\sum_{x \in R_x} p(X = x) = 1$$

CDF : $F_X(x) = p(X \le x)$, $x \in R$

برای یک متغیر تصادفی

$X \sim$ تعداد خط‌های دو سکه

$$p(X = x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{4} & 2 \end{cases}$$



$F_X(0) = P_X(X \le 0) = \frac{1}{4}$

$F_X(\text{یک عدد منفی}) = P_X(X \le \text{یک عدد منفی}) = 0$

$F_X(x) = p(X \le x) = \frac{1}{4} \quad 0 < x < 1$

$F_X(x) = p(X \le 1) = \frac{3}{4} \quad x = 1$

$F_X(x) = p(X \le x) = \quad 1 < x < 2$

$F_X(x) = p(X \le 2) = 1$

1- $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$

2- $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$

3- $R_x = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$

$F_X(x_k) - F_X(x_k - \epsilon) = p(X = x_k) \to$ مقدار پرش

$F_X(x_k) = F_X(x_k + \epsilon)$

For all $a \le b$, $a, b \in R$ $\quad \boxed{p(a < X \le b) = F_X(b) - F_X(a)}$

توابعی از یک متغیر تصادفی

فرض کنید X یک متغیر تصادفی است با برد $R_X$

$$Y = g(X) \qquad R_Y = \{g(x) \mid x \in R_X\}$$

$$Y = 2X \text{ یا } X^2 \qquad P_Y(Y=y) = \sum_{x:\, y=g(x)} p(X=x)$$

$$R_Y = \{0, 1, 4\}$$

مثال :

$$R_X = \{0, 1, -1, 2, 3\}$$

$$P_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} & x \in R_X \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

حل

$$P(Y=y) = \begin{cases} \frac{1}{5} & y = 0 \text{ یا } 4 \text{ یا } 6 \\ \frac{2}{5} & y = 2 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$Y = 2|X| \Rightarrow PMF_Y = ?$$

$$p(Y=2) = p(X=1) + p(X=-1) = \frac{2}{5}$$

$$2|X| = 2 \Rightarrow |X| = 1$$

متغیر تصادفی های معروف گسسته :

① برنولی :

$$X \sim Bernoli(p) \Rightarrow PMF_X = \begin{cases} 1-p & 0 \\ p & 1 \end{cases}$$

② دوجمله ای :

$$Y \sim Binomial(n, p)$$

$$PMF_Y = p(Y=y) = \binom{n}{y} p^y (1-p)^{n-y}$$

$$R_Y = \{0, \ldots, n\} \qquad p(Y \leq y) = \sum_{k=0}^{y} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

بررسی شرط PMF :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (p + (1-p))^n = 1^n = 1 \checkmark \text{ درسته!}$$

فرمول بسط دوجمله ای یادآوری :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = (p+q)^n$$

③ هندسی :

$$X \sim geometric(p) :$$

$$P_X(X=x) = (1-p)^{x-1} p$$

یادآوری :

$$1, q, q^2, \ldots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

بشرطی که $|x|<1$

الف

$$\sum_{n=1}^{\infty} p q^{n-1} = p \sum_{n=0} q^{n} = p \times \frac{1}{1-q} = 1 \qquad \sum_{n=1} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$p \sum_{n=1} q^{n-1} = p(1 + q + q^2 + q^3 + q^4 - - - -) =$$

۴) پواسن

$X \sim possian(\lambda)$

$$p(X=x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^{x}}{x!} \quad \frac{e^{-\lambda} \lambda^{k}}{k!}$$ ??

۱= و ۰ قرارداد

$R_X = \{0, ——— \infty\}$

شرطی

امید ریاضی:

mean value ...

$X$ یک متغیر تصادفی هست با $R_X$:

$$EX = E(X) = \sum_{x \in R_X} x\, p(X=x)$$

شهود نیست:

$$p(X=x_1) = \lim_{N \to \infty} = \frac{N_1}{N} \Rightarrow p(X=x_1) N \simeq N_1$$

$R_X = \{x_1, x_2, \ldots x_K\}$

$N$ بار آزمایش انجام دادیم

$X = x_1$ ، $N_1$ بار

$X = x_2$ ، $N_2$ بار

$X = x_K$ ، $N_K$ بار

$$\text{میانگین} = \frac{N_1 x_1 + N_2 x_2 + \ldots + N_K x_K}{N}$$

$$\Rightarrow \frac{N p(X=x_1) x_1 + N p(X=x_2) x_2 + \ldots N p(X=x_K) x_K}{N} \Rightarrow EX = \sum_{x_K \in R_X} x_K\, p(X=x_K)$$

امید ریاضی متغیرهای معروف

$X \sim Bernoli(p)$: $EX = p \times 1 + (1-p) \times 0 = p$

$$X \sim geometric(p) \Rightarrow EX = \sum_{n=1}^{\infty} n p q^{n-1} = p \sum_{n=1}^{\infty} n q^{n-1} = p(\underbrace{1 + 2q + 3q^2 + \ldots}_{})$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}}$$

$$= p \times \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$$

$X \sim \text{poisson}(\lambda)$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x}$$

$$EX = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} n = \lambda e^{-\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!}$$

$$= \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$$

$X \sim \text{Binomial}(n, p)$

$$EX = \sum_{n=0}^{n} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} x$$

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

$$x\binom{n}{x} = n\binom{n-1}{x-1}$$

$$\Rightarrow \sum_{x=1}^{n} n\binom{n-1}{x-1} p^x q^{n-x} = n \sum_{x=1}^{n-1} \binom{n-1}{x-1} p^x q^{n-x}$$

شیفت

$$= np \sum_{x=1}^{n-1} \binom{n-1}{x-1} p^{x-1} q^{n-x}$$

یادآوری $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = (p+q)^n$

$$np(p+q)^{n-1} = np$$

$$np \sum_{x=1}^{n-1} \binom{n-1}{x-1} p^{x-1} q^{n-x} = np \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

$$\binom{n}{0} = 1$$

امید ریاضی تابعی از متغیر تصادفی

$X$ متغیر تصادفی $\Rightarrow Y = g(X)$ ; $p(Y=y) = \sum_{x: g(x)=y} p(X=x)$

$$E[Y] = E[g(X)] = \sum_{y \in R_Y} y\, p(Y=y) = \sum_{y \in R_Y} \overset{g(x)}{y} \sum_{x: g(x)=y} p(X=x) = \sum_{x \in R_X} g(x) p(X=x)$$

$$R_Y = \{g(x) \mid x \in R_X\}$$

$$E[g(X)] = \sum_{x \in R_X} g(x) p(X=x) \longrightarrow \boxed{\text{LOTUS}}$$

مثال: $X$ یک متغیر تصادفی دلخواه و $Y = aX + b$ . $E[b]$

$E[Y] = ?$ ، $b$ عدد ثابت $E[b] = b \Rightarrow E[Y] = E[aX + b]$

$$= \sum_{x \in R_x} (ax+b)p(X=x) = \sum_{x \in R_x} axp(X=x) + \sum_{x \in R_x} b\,p(X=x)$$

$\Downarrow$

① خطی بودن امیدریاضی $\quad aE[X] + b \times 1 \Rightarrow E[aX+b] = aE[X] + b$

استقلال دو متغیر تصادفی

$p(X = x_1) = ?$

$p(X = x_1 \text{ و } Y = y_1) = ?$ ($\cap$, and)

$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$

دو متغیر تصادفی $X$ و $Y$ مستقلند اگر

$\forall x_i, y_i \in R_X \times R_Y$ به ازای $p(X = x_i \text{ و } Y = y_i) = p(X = x_i)\, p(Y = y_i)$

$X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. ؛ نمونه توزیع یکسان و مستقل باشند

ویژگی دیگری از امید ریاضی:

$X_1, \ldots, X_n$ ، $n$ تا متغیر تصادفی $\Rightarrow$ ⚠ لازم نیست این $n$ تا مستقل باشند

$$Z = X_1 + \cdots + X_n \Rightarrow E[Z] = E[X_1 + \cdots X_n] = E[X_1] + \cdots + E[X_n]$$

مثال ۱. امید ریاضی دو جمله‌ای را به روش دیگر

نتیجه آزمایش اول، نتیجه آزمایش دوم

۱ ← موفق ، ۰ ← ناموفق

$X \sim Binomial(n, p) \Rightarrow X = X_1 + X_2 + \cdots X_n$ (نتیجه آزمایش $n$ ام)

$$EX = EX_1 + EX_2 + \cdots EX_n = np$$

مثال ۲. در کلاس سؤال حل شد.

واریانس :

$$P_X(x) = \begin{cases} 0/5 & x=-100 \\ 0/5 & x=100 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \qquad P_Y(y) = \begin{cases} 1 & y=0 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$EX = ?\ 0$

$EY = ?\ 0$

تعریف :

$$E[X - \underbrace{EX}^{\text{ثابت}}] = 0$$

$$\Downarrow\ EX - E[EX] = EX - EX = 0$$

واریانس :=

$$E[(X-EX)^2] \overset{\text{LOTUS ثابت}}{=} \sum_{x \in R_X} (x - EX)^2 p(X=x)$$

$Y = g(X)$

$Y = (X-a)^2$ —— $\sum_{x \in R_X} x^2 p(X=x)$

راهی ساده‌تر برای محاسبه واریانس :

$$E[X^2 - 2X\,EX + E^2X] = EX^2 - 2E[X\,\overset{\text{عدد}}{EX}] + E[E^2X]$$

$$= EX^2 - 2EX\,EX + E^2X = EX^2 - E^2X$$

$Y = X^2$

$$\Rightarrow \boxed{var(X) = EX^2 - E^2X}$$

$\overset{\text{LOTUS}}{\longrightarrow} \sum_{x \in R_X} x^2 p(X=x)$ , $\left(\sum_{x \in R_X} x\, p(X=x)\right)^2$

واریانس برنولی :

$X \sim Bernoli \qquad p(X=x) = \begin{cases} 1 & p \\ 0 & 1-p \end{cases}$

$$var(X) = (1^2 p + 0^2(1-p)) - (1p + 0(1-p))^2 = p - p^2 = p(1-p)$$

۲ ویژگی واریانس :

$E[aX+b] = aE[X]+b$ یادآوری

1- $var(aX+b) = a^2 var(X)$ → برای اثبات $E\left(\left(aX+b-E(aX+b)\right)^2\right) = ?$

۳- $var(x) \geq 0$ همیشه

$X_1 \ldots X_n$

۲- $E[X_1 + \ldots X_n] = EX_1 + \ldots EX_n$

$X_1$ و ... $X_n$ مستقل بودند $\Rightarrow var(X_1 + \ldots + X_n) = var(X_1) + \ldots var(X_n)$

انحراف معیار: $SD(X) = \sqrt{var(X)}$