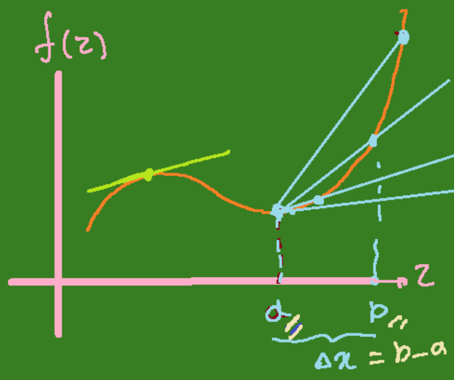
به نام خدا

المپیاد هوش مصنوعی
مبحث حسابان



$$\overline{m}_{ab} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

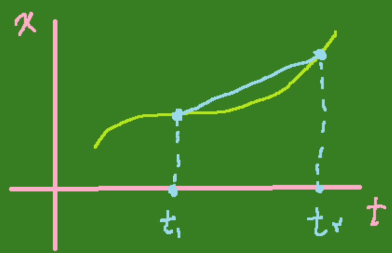
حساب دیفرانسیل ← تغییر کمیت ها

مشتق ← آهنگ تغییر کمیت ها

شیب خط مماس

سرعت لحظه‌ای متحرک

آهنگ تغییرات مکان



$$\overline{v}_{t_1, t_2} = \frac{x(t_2)-x(t_1)}{t_2-t_1}$$

مثال: $f(x) = x^2$ ؛ شیب تابع f را در نقطه $x=2$ بیابید.

$$\overline{m}_{a, a+\Delta x} = \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x} = \frac{\cancel{a^2}+(\Delta x)^2+2a(\Delta x)-\cancel{(a^2)}}{\Delta x} = 2a+\Delta x = 4+\Delta x$$

$a=2$

$$\Delta x \to 0 \Rightarrow \overline{m}_{a, a+\Delta x} \to 4 \Rightarrow m = 4$$

تعریف صوری مشتق:

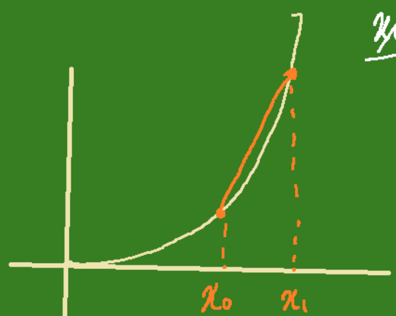
$f(x)$: $$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

مثال: مشتق $f(x) = x^{10}$ را بیابید:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0+\Delta x)^{10} - x_0^{10}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 10x_0^9 + \underbrace{\Delta x}_{\to 0}(\dots) = 10x_0^9$$

$$\frac{\cancel{x_0^{10}} + 10x_0^9\Delta x + \Delta x^2(\dots) - \cancel{x_0^{10}}}{\Delta x}$$

$$f(x) = x^n \to f'(x) = nx^{n-1}$$



$\Delta x = x_1 - x_0$

$\Delta x \to 0$ (معادل) x_1 را به x_0 نزدیک کنیم

قواعد مشتق گیری (مشتق تابع f، f' و مشتق تابع g، g' باشد.) $\left(f(x) = \frac{x^2 \cdot \sin(x)}{2x^2 + x + 1}\right)$

۱) جمع $(f+g)' = f' + g'$

۲) ضرب $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

۲+) ضرب عدد ثابت $(cf)' = c f'$

۳) تقسیم $(f/g) = \frac{1}{g^2}(f' \cdot g - f \cdot g')$

$f(x)$ ، $g(x)$

$$h(x) = f(x) + g(x) \qquad h'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x_0+\Delta x) - h(x_0)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) + g(x_0+\Delta x) - f(x_0) - g(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} + \frac{g(x_0+\Delta x) - g(x_0)}{\Delta x}\right) =$$

$$= \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}}_{f'} + \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{g(x_0+\Delta x) - g(x_0)}{\Delta x}\right)}_{g'} = f'(x_0) + g'(x_0)$$

مثال از تقسیم:

$$h(x) = x^2 = \frac{x^5}{x^3}$$

$$f(x) = x^5 \rightsquigarrow f'(x) = 5x^4$$

$$g(x) = x^3 \rightsquigarrow g'(x) = 3x^2$$

$h'(x) = 2x$

$f(x) = x^n$ $f'(x) = nx^{n-1}$

$$h'(x) = \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{5x^4 \cdot x^3 - 3x^2 \cdot x^5}{x^6} = \frac{2x^7}{x^6} = 2x$$

مشتق توابع مهم:

: $\sin(x)$

$$\sin(x)\cos(\Delta x) + \cos(x)\sin(\Delta x)$$

$$(\sin(x))' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left\{\underbrace{\sin(x)}_{\text{ثابت}}(\cos(\Delta x) - 1) + \underbrace{\cos(x)}_{\text{ثابت}}\sin(\Delta x)\right\} =$$

$$= \sin(x)\underbrace{\left\{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(\Delta x) - 1}{\Delta x}\right\}}_{0} + \cos(x)\underbrace{\left\{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x}\right\}}_{1} =$$

$$= \cos(x)$$

$:\cos(x)$

$$\cos(x)' = -\sin(x)$$

$:\tan(x)$

$$\tan(x)' = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{\overbrace{\sin(x)'}^{\cos(x)}\cos(x) - \sin(x)\overbrace{\cos(x)'}^{-\sin(x)}}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)} =$$

$$= \frac{1}{\cos^2(x)}$$

$: e^x$

$$(e^x)' = e^x$$

مثال:

$$f(x) = \frac{x^2 \cdot \sin(x)}{2x^2 + x + 1}$$

$$\bullet\ (x^2\sin(x)) = 2x \cdot \sin(x) + x^2 \cdot \cos(x)$$

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

$$\bullet\ (2x^2 + x + 1) = 4x + 1$$

$$(f+g)' = f' + g'$$

$$(cf)' = c\, f'$$

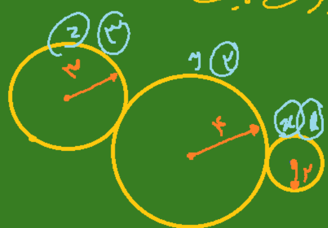
$$\bullet\ f'(x) = \frac{(2x\sin(x) + x^2\cos x)(2x^2+x+1) - x^2\sin(x)(4x+1)}{(2x^2+x+1)^2}$$

$$(f/g)' = \frac{f'g - f \cdot g'}{g^2}$$

مشتق زنجیره‌ای = مشتق ترکیب توابع:

آهنگ تغییرات کمیت

$$\sin\left(\frac{1}{1+e^{\cos(x)}}\right)$$



• یک دور ① را بچرخانم: ② ← ($\frac{1}{2}$ دور)

$$y = \frac{x}{2}$$

$$\Delta y = \frac{\Delta x}{2} \rightsquigarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{2}\ ?$$

• یک دور ② را بچرخانم: ③ ← $\frac{4}{3}$ دور)

$$z = \frac{4}{3}y \rightsquigarrow \Delta z = \frac{4}{3}\Delta y \rightsquigarrow \frac{\Delta z}{\Delta y} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\Delta z}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} \left(= \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3}\right)$$

$$x \rightsquigarrow y \rightsquigarrow z \qquad \frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\Delta z}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$z = g(y) \qquad z = g(f(x))$$

$$y = f(x)$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dg}{dy} \cdot \frac{df}{dx}$$