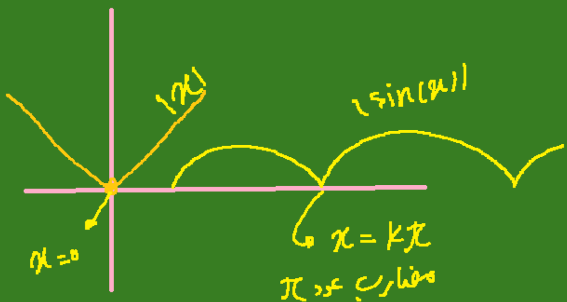
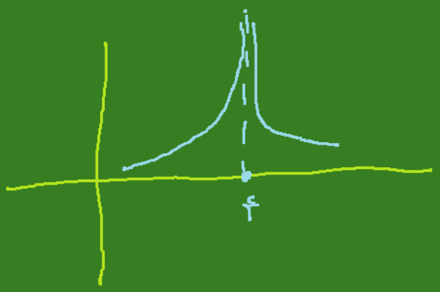
به نام خدا



• مشتق یک تابع است.

دامنه تابع (f') : مشتق پذیر بودن (f) = وجود مشتق



$\frac{1}{(x-4)^2}$

در قواعد مشتق ؛ دامنهٔ نهایی حداقل اشتراک دو دامنه است.

$$h' = (f.g)' \qquad D_{h'} \supseteq (D_{f'} \cap D_{g'})$$

به جز قاعده تقسیم که مخرج نباید صفر باشد.

$$g \neq 0 \;;\; (f/g)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

تعریف ریاضی مشتق:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

نماد های مشتق:

$$f(x) : f'(x) \;;\; \frac{df(x)}{dx} \longrightarrow \frac{d}{dx}(\sin(x))$$

نماد d : تغییرات خیلی کوچک ؛ $(\Delta \equiv$ تغییرات$)$

$\frac{dy}{dx} =$ آهنگ تغییرات y

نسبت به x

تعریف قاعده زنجیره (مهم):

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

مثال:

$$h(x) = \sqrt{\underbrace{1+e^x}_{u(x)}} \qquad h'(x) = f'(u(x)) \cdot u'(x)$$

$$f(u) = \sqrt{u} \longrightarrow f' = \frac{1}{2} u^{1/2 - 1} = \frac{1}{2} u^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{u}}$$

$$u(x) = 1 + e^x \longrightarrow u'(x) = e^x$$

$$h = f \circ u(x) \longrightarrow h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\underbrace{1+e^x}_{u}}} \cdot e^x$$

مثال: مشتق ۲^x :

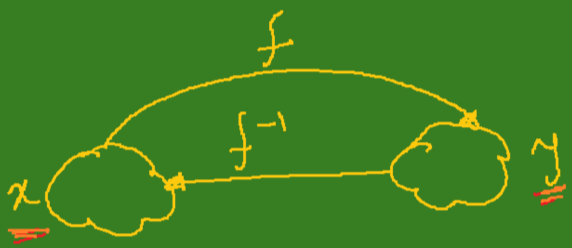
$$f(x) = ۲^x = \left(e^{\ln(۲)}\right)^x = e^{\overbrace{\ln(۲)\,x}^{u}}$$

$$f'(x) = e^u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = e^{\ln(۲)x} \ln(۲) = \boxed{\ln(۲) \cdot ۲^x}$$

$$u = x \cdot \ln(۲)$$

$$\frac{d}{dx}(a^x) = \ln(a) \cdot a^x$$

مشتق تابع وارون :



$$f'(x) \checkmark \overset{??}{\Longrightarrow} (f^{-1})'(x)$$

ریاضی

$x = a$ ⟵ $y = b$

$\Delta x \qquad \Delta y$

$$m_f = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \cdot \quad m_{f^{-1}} = \frac{\Delta x}{\Delta y}$$

$$\frac{d}{dx}(f(x))\Big|_{x=a} = \frac{1}{\frac{d}{dy} f^{-1}(y)\Big|_{y=b}}$$

شهودی

$$y = f(f^{-1}(y))$$

$$1 = f'(f^{-1}(y)) \cdot (f^{-1})'(y)$$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

مثال: مشتق $\sqrt{x}$:

محدود کردن دامنه به $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

$$f(x) = x^۲ \qquad f^{-1}(y) = \sqrt{y}$$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{۲x\Big|_{x=\sqrt{y}}} = \boxed{\frac{1}{۲\sqrt{y}}}$$

$$\rightsquigarrow \frac{d}{dy}\sqrt{y} = \frac{1}{۲\sqrt{y}}$$

$$f(x)\Big|_{x=a} = f(a) \;/\; f(x)\Big|_{x=a}^{x=b} = f(b) - f(a)$$

مثال: تابع $\ln(x)$:

$f(x) = e^x \qquad f^{-1}(y) = \ln(y)$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(\underbrace{f^{-1}(y)}_{\ln(y)})} = \frac{1}{e^{\ln(y)}} = \frac{1}{y}$$

$f'(x) = e^x$

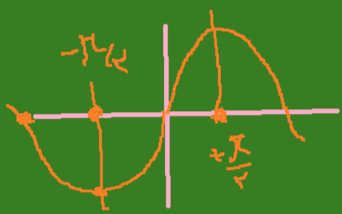
$$\Rightarrow \frac{d}{dy}\ln(y) = \frac{1}{y}$$

تابع $\sin^{-1}(x)$:

$f(x) = \sin(x) \qquad f^{-1}(y) = \sin^{-1}(y)$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{\cos(\underbrace{\sin^{-1}(y)}_{\theta})} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$f'(x) = \cos(x)$



$\sin\theta = y$

$\cos\theta = \sqrt{1-y^2}$

$$\left(\cos(\underbrace{\sin^{-1} y}_{\theta}) = \sqrt{1-y^2}\right)$$

$$\frac{d}{dy}\sin^{-1}(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$\begin{cases} \cos(\theta) = ? \\ \sin(\theta) = y \\ \theta \in [-\pi/2, +\pi/2] \end{cases}$$

$$\cos^2\theta + \underbrace{\sin^2\theta}_{y^2} = 1 \rightsquigarrow \cos\theta = \sqrt{1-y^2} \qquad \theta \in [-90, 90]$$

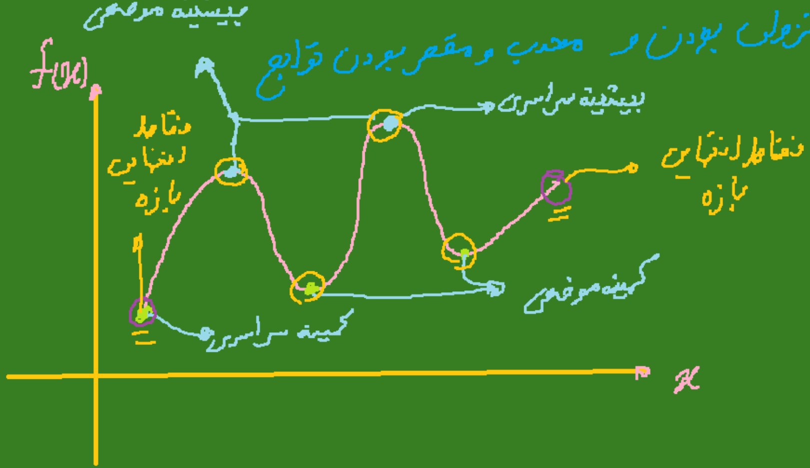
$$\cos(\sin^{-1}(y)) = \sqrt{1-(\underbrace{\sin(\sin^{-1}(y))}_{y})^2} = \sqrt{1-y^2}$$

کاربرد مشتق

کاربرد مشتق

۱- بهینه سازی: پیدا کردن بیشینه و کمینه های موضعی و سراسری توابع

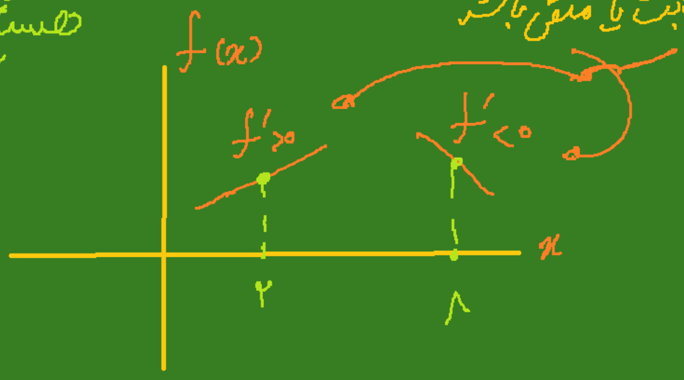
۲- رفتارشناسی توابع: صعودی و نزولی بودن و محدب و مقعر بودن توابع



قضیه ۱: هر تابع کراندار در بازه بسته $[a,b]$ حتماً کمینه یا بیشینه سراسری دارد.
اکستریم

قضیه ۲: در نقاط اکستریم مشتق یا صفر است یا تعریف نشده است یا در نقاط انتهایی هستیم.

〃 〃 〃 〃 مشتق نمی‌توانند مثبت یا منفی باشد



نقاط اکستریم یکی از سه حالت زیرند.

برای تابع f روی $[a,b]$

۱- $f'(x)=0$

۲- $f'(x)$ تعریف نشده

۳- $x=a$ یا $x=b$