

Control Clásico

Roberto Cadena Vega

7 de septiembre de 2014

1. Criterio de Estabilidad de Routh-Hurwitz

$$\frac{\hat{y}(s)}{\hat{R}(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} = \frac{B(s)}{A(s)} \quad (1.0.1)$$

$$\frac{\hat{y}(s)}{\hat{R}(s)} = \sum \frac{k_{1,i}}{s + \alpha_i} + \sum \frac{k_{2,j} + k_{3,j} \cdot s}{(s + \beta_i)^2 + \gamma_i^2}; m \leq n \quad (1.0.2)$$

El criterio de Routh-Hurwitz determina si existen raíces en el semiplano complejo derecho cerrado.

1.1. Tabla de Routh

La tabla de Routh es un método para obtener el número de raíces con parte real positiva que se encontraran en el polinomio característico del sistema (Ecuación 1.1.1) sin tener que calcular las raíces en cuestión. Se puede dividir en cuatro pasos que se enumeran a continuación.

$$A(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n = 0 \quad (1.1.1)$$

1. Hipótesis Si $a_0 = 0 \Rightarrow$ el polinomio es de orden menor a n .
Si $a_n = 0 \Rightarrow \exists$ una raíz que es 0 $\Rightarrow A(s) = (\bar{n}_0 s^{\bar{n}} + \bar{a}_n s^{n-1} + \dots) s^k$.
2. Si existen coeficientes nulos o de diferente (cambio de) signo, entonces existen raíces con parte real positiva.

3. Construir la tabla de Routh (Ver Cuadro 1).

s^n	a_0	a_2	a_4	a_6	\dots
s^{n-1}	a_1	a_3	a_5	a_7	\dots
s^{n-2}	b_1	b_3	b_5	b_7	\dots
s^{n-3}	c_1	c_3	c_5	c_7	\dots
s^{n-4}	d_1	d_3	d_5	d_7	\dots
\vdots					
s^2	e_1	e_2			
s^1	f_1				
s^0	g_1				

Cuadro 1: Ejemplo de tabla de Routh.

Donde:

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}, b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}, \dots$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}, c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1}, \dots$$

$$d_1 = \frac{c_1 b_2 - b_1 c_2}{c_1}, d_2 = \frac{c_1 b_3 - b_1 c_3}{c_1}, \dots$$

\vdots

4. El número de raíces con parte real positiva es igual al numero de cambios de signo en la primera columna(Ver Cuadro 2).

s^n	a_0
s^{n-1}	a_1
s^{n-2}	b_1
s^{n-3}	c_1
s^{n-4}	d_1
\vdots	\vdots
s^2	e_1
s^1	f_1
s^0	g_1

Cuadro 2: Números en los que hay que revisar el cambio de signo.

1.2. Casos Especiales

1. En los casos en los que un coeficiente es 0 se puede intercambiar por un ϵ lo suficientemente pequeño para aproximar a 0 (Véase el Cuadro 3).

$$A(s) = s^3 + 2s^2 + s + 2 = 0$$

```
>> A = [1 2 1 2];
>> r = roots(A)
r =
-2.00000 + 0.00000i
-0.00000 + 1.00000i
-0.00000 - 1.00000i
```

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 1 \\ s^2 & 2 & 2 \\ s^1 & 0 \approx \epsilon & \\ s^0 & 2 & \end{array}$$

Cuadro 3: Caso Especial 1.

2. Cuando existen cambios en los coeficientes del polinomio característico se sabe que existirán raíces con parte real positiva (Véase el cuadro 4).

$$A(s) = s^3 - 3s + 2 = 0$$

```
>> A = [1 0 -3 2];
>> r = roots(A)
r =
-2.00000
1.00000
1.00000
```

3. Cuando todos los coeficientes en una línea se eliminan se puede crear un nuevo polinomio auxiliar con la línea anterior, obtener su derivada e insertar en la siguiente línea para continuar calculando la tabla (Véase el Cuadro 5 y 6).

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & -3 \\ s^2 & 0 \approx \epsilon & 2 \\ s^1 & -\frac{2}{\epsilon} & 0 \\ s^0 & 2 & \end{array}$$

Cuadro 4: Caso Especial 2.

$$A(s) = s^5 + 2s^4 + 24s^3 + 48s^2 - 25s - 50 = 0$$

$$p_{aux}(s) = 2s^4 + 48s^2 - 50$$

$$\frac{d}{dx}p_{aux}(s) = 8s^3 + 96s$$

```
>> A = [1 2 24 48 -25 -50];
>> r = roots(A)
r =
-0.00000 + 5.00000i
-0.00000 - 5.00000i
 1.00000 + 0.00000i
-2.00000 + 0.00000i
-1.00000 + 0.00000i
```

$$\begin{array}{c|ccc} s^5 & 1 & 24 & -25 \\ s^4 & 2 & 48 & -50 \\ s^3 & 0 & 0 & 0 \\ s^2 & & & \\ s^1 & & & \\ s^0 & & & \end{array}$$

Cuadro 5: Caso Especial 3a.

1.3. Aplicación del criterio de Routh

Si bien los sistemas numéricos actuales permiten el calculo de las raíces de un sistema de manera mas rápida y sencilla que con la aplicación de este método, aun existen aplicaciones practicas en las que es de suma importancia el determinar el numero de raíces positivas. Por ejemplo podemos tener ganancias en un sistema para las que queremos determinar de primera instancia, un rango de valores para los cuales el sistema no se volverá inestable.

s^5	1	24	-25
s^4	2	48	-50
s^3	8	96	0
s^2	24	-50	0
s^1	112,6	0	
s^0	-50		

Cuadro 6: Caso Especial 3b.

Para ello calculamos la tabla de Routh de la misma manera en que lo hicimos anteriormente, pero teniendo en cuenta las ganancias a incluir en el calculo de las raíces (Por ejemplo con una ganancia proporcional véase Cuadro 7).

s^n	a_0	a_2	a_4	a_6	...
s^{n-1}	a_1	a_3	a_5	a_7	k
s^{n-2}	b_1	b_3	b_5	b_7	...
s^{n-3}	c_1	c_3	c_5	c_7	...
s^{n-4}	d_1	d_3	d_5	d_7	...
\vdots					
s^2	e_1	e_2			
s^1	f_1				
s^0	g_1				

Cuadro 7: Aplicación del criterio de Routh.

1.3.1. Ejemplo:

Se toma el sistema $\frac{\hat{y}(s)}{\hat{R}(s)} = \frac{k}{s^4+3s^3+3s^2+2s+k}$, entonces el polinomio característico del sistema será $F(s) = s^4 + 3s^3 + 3s^2 + 2s + k$.

Construimos su tabla de Routh (Cuadro 8):

De lo anterior podemos concluir que, para que no existan cambios de signos, toda la primera columna tiene que ser positiva, por lo que $k > 0$ y $2 -^9 /_7 k > 0$, por lo que el rango de valores que puede ocupar la ganancia k es $0 < k <^{14} /_9$

Si bien esto no nos aporta una ganancia especifica para un comportamiento deseado, si nos da la pauta a los valores a tomar en cuenta, si no se desea que el sistema sea inestable.

$$\begin{array}{c|ccc}
s^4 & 1 & 3 & k \\
s^3 & 3 & 2 & 0 \\
s^2 & \frac{7}{3} & k & 0 \\
s^1 & 2 - \frac{9}{7}k & 0 & \\
s^0 & k & &
\end{array}$$

Cuadro 8: Ejemplo de Aplicación del criterio de Routh.

1.4. Acción Proporcional

Tenemos un sistema de primer orden, al que le agregaremos un controlador de ganancia proporcional y una retroalimentación negativa, por lo que las ecuaciones que describen la salida y el error del sistema quedan:

$$\frac{\hat{y}(s)}{\hat{R}(s)} = \frac{k}{Ts + 1 + k} \quad (1.4.1)$$

$$\frac{\hat{e}(s)}{\hat{R}(s)} = \frac{R(s) - Y(s)}{R(s)} = \frac{Ts + 1}{Ts + 1 + k} \quad (1.4.2)$$

1.4.1. Estabilidad

El problema reside en encontrar un conjunto de ganancias k para las cuales el sistema es estable.

$$F(s) = s + \frac{1 + k}{T} \quad (1.4.3)$$

Aplicamos una tabla de Routh a este polinomio característico (Cuadro 9).

$$\begin{array}{c|c}
s^1 & 1 \\
s^0 & \frac{1+k}{T}
\end{array}$$

Cuadro 9: Tabla de Routh para acción proporcional.

Por lo que concluimos que la ganancia k debe de seguir: $k > -1$

1.4.2. Error en el estado permanente al escalón unitario

También es importante investigar el error que causara el controlador al introducirse. Si ponemos como señal de referencia al escalón unitario ($R(s) = \frac{1}{s}$), podemos ver lo siguiente:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} se(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{Ts + 1}{Ts + 1 + k} = \frac{1}{1 + k}$$

1.5. Acción Integral

Tenemos un sistema de primer orden, al que le agregaremos un controlador de ganancia integral y una retroalimentación negativa, por lo que las ecuaciones que describen la salida y el error del sistema quedan:

$$\frac{\hat{y}(s)}{\hat{R}(s)} = \frac{k}{s(Ts + 1) + k} \quad (1.5.1)$$

$$\frac{\hat{e}(s)}{\hat{R}(s)} = \frac{R(s) - Y(s)}{R(s)} = \frac{s(Ts + 1)}{s(Ts + 1) + k} \quad (1.5.2)$$

1.5.1. Estabilidad

El problema reside en encontrar un conjunto de ganancias k para las cuales el sistema es estable.

$$F(s) = s^2 + \frac{1}{T}s + \frac{k}{T} \quad (1.5.3)$$

Aplicamos una tabla de Routh a este polinomio característico (Cuadro 10).

$$\begin{array}{c|cc} s^2 & 1 & \frac{k}{T} \\ s^1 & \frac{1}{T} & 0 \\ s^0 & \frac{k}{T} & \end{array}$$

Cuadro 10: Tabla de Routh para acción integral.

Por lo que concluimos que la ganancia k debe de seguir: $k > 0$

1.5.2. Error en el estado permanente al escalón unitario

También es importante investigar el error que causara el controlador al introducirse. Si ponemos como señal de referencia al escalón unitario ($R(s) = \frac{1}{s}$), podemos ver lo siguiente:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} se(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left(\frac{s(Ts + 1)}{s(Ts + 1) + k} \frac{1}{s} \right) = 0$$

1.6. Acción Proporcional Integral

1.6.1. Estabilidad

1.6.2. Error en el estado permanente al escalón unitario