

Modelado de robots manipuladores

Roberto Cadena Vega

15 de marzo de 2015

1. Introducción

2. Movimientos rígidos y transformaciones homogéneas

Existen dos tipos básicos de movimientos rígidos que utilizaremos para describir el movimiento de un robot manipulador, las rotaciones y las traslaciones. Empezaremos describiendo las rotaciones básicas y generalizando a un método para obtener una rotación arbitraria a partir de estas.

2.1. Matrices básicas de rotación

Las matrices básicas de rotación se definen con respecto al eje que rotan, y su inversa siempre es su transpuesta $R^{-1} = R^T$.

$$R_{x,\theta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$R_{y,\theta} = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$R_{z,\theta} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

2.2. Composición de rotaciones

Una rotación compuesta de un marco de referencia $o_0x_0y_0z_0$ a un marco de referencia $o_1x_1y_1z_1$ denotada por R_0^1 y de una del marco de referencia $o_1x_1y_1z_1$ al marco $o_2x_2y_2z_2$ denotada por R_1^2 y se compone:

$$R_0^2 = R_0^1 R_1^2 \quad (4)$$

Cabe notar que estas rotaciones son con respecto a marcos de referencia actuales, es decir, estas rotaciones son dadas con respecto al marco de referencia anterior, si además quisieramos dar una rotación extra, R_f , con respecto al marco de referencia fijo $o_0x_0y_0z_0$, tendríamos que:

$$R = R_f R_0^1 R_1^2 \quad (5)$$

es decir, la matriz de rotación con respecto al marco de referencia fijo se premultiplica, mientras que las matrices de rotación con respecto a marcos de referencia actuales se postmultiplican.

2.3. Angulos de Euler

Dado el formalismo de angulos de Euler, podemos definir una matriz de rotación compuesta que utilice estos angulos para su definición:

$$R = R_{z,\phi} R_{y,\theta} R_{z,\psi} = \begin{pmatrix} c_\phi c_\theta c_\psi - s_\phi s_\psi & -c_\phi c_\theta s_\psi - s_\phi c_\psi & c_\phi s_\theta \\ s_\phi c_\theta c_\psi + c_\phi s_\psi & -s_\phi c_\theta s_\psi + c_\phi c_\psi & s_\phi s_\theta \\ -s_\theta c_\psi & s_\theta s_\psi & c_\theta \end{pmatrix} \quad (6)$$

De esta notación podemos derivar una manera de obtener ϕ , θ y ψ dada una matriz de rotación arbitraria, utilizando propiedades de las matrices de rotación, de manera que:

$$\theta = \begin{cases} \text{atan2} \left(r_{33}, \sqrt{1 - r_{33}^2} \right) \\ \text{atan2} \left(r_{33}, -\sqrt{1 - r_{33}^2} \right) \end{cases} \quad (7)$$

y ϕ y ψ estarán dadas, dependiendo de como se escoja θ :

$$\phi = \begin{cases} \text{atan2} (r_{13}, r_{23}) \\ \text{atan2} (-r_{13}, -r_{23}) \end{cases} \quad (8)$$

$$\psi = \begin{cases} \text{atan2} (-r_{31}, r_{32}) \\ \text{atan2} (r_{31}, -r_{32}) \end{cases} \quad (9)$$

Cabe mencionar que existen casos degenerados, en los que no existe solución única para ϕ y ψ , específicamente cuando $s_\theta = 0 \implies \theta = 0^\circ, 180^\circ, \dots$, por lo que la matriz de rotación tiene la forma:

$$R = \begin{pmatrix} c_\phi c_\psi - s_\phi s_\psi & -c_\phi s_\psi - s_\phi c_\psi & 0 \\ s_\phi c_\psi + c_\phi s_\psi & -s_\phi s_\psi + c_\phi c_\psi & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

por lo que:

$$\phi - \psi = \text{atan2} (-r_{11}, -r_{12}) \quad (10)$$

2.4. Angulos de roll, pitch y yaw

Si por otro lado, queremos describir rotaciones con respecto a cada eje del marco de referencia fijo, podemos definir una matriz de rotación de la siguiente manera:

$$R = R_{z,\phi} R_{y,\theta} R_{x,\psi} = \begin{pmatrix} c_\phi c_\theta & -s_\phi c_\theta + c_\phi s_\theta s_\psi & s_\phi s_\theta + c_\phi s_\theta c_\psi \\ s_\phi c_\theta & c_\phi c_\theta + s_\phi s_\theta s_\psi & -c_\phi s_\theta + s_\phi s_\theta c_\psi \\ -s_\theta & c_\theta s_\psi & c_\theta c_\psi \end{pmatrix} \quad (11)$$

2.5. Rotación alrededor de un eje arbitrario

Podemos representar la rotación al rededor de un eje arbitrario conociendo las rotaciones necesarias para obtener este marco de referencia. Sea la rotación a transformar $R_{z,\theta}$, la cual esta expresada como una rotación al rededor del eje z de nuestro nuevo marco de referencia, por lo que podemos aplicar una transformación de similitud para obtener esta rotación expresada en el marco de referencia actual:

$$\begin{aligned} R_{k,\theta} &= R_0^1 R_{z,\theta} R_0^{1^{-1}} = R_0^1 R_{z,\theta} R_0^1{}^T \\ &= R_{z,\alpha} R_{y,\beta} R_{z,\theta} R_{y,-\beta} R_{z,-\alpha} \end{aligned} \quad (12)$$

en donde α es el angulo medido entre el eje x actual y la proyección del eje de rotación en el plano xy actual y β es el angulo entre el eje de rotación y el eje z actual.

2.6. Movimientos rígidos

Un movimiento rigido lo definimos como un par ordenado (d, R) , en donde $d \in \mathbb{R}^3$ es un vector de traslación en x , y y z y $R \in SO(3)$ es una rotación con respecto al marco de referencia actual, de tal manera que si la rotación que relaciona a dos marcos de referencia $o_0x_0y_0z_0$ y $o_1x_1y_1z_1$ es R_0^1 y la distancia que separa los origenes de estos dos marcos de referencia es d_0^1 ; un punto p^1 que esta definido con respecto a $o_1x_1y_1z_1$ se puede representar con respecto a $o_0x_0y_0z_0$ al hacer:

$$p^0 = R_0^1 p^1 + d_0^1 \quad (13)$$

De manera similar, para un tercer marco de referencia $o_2x_2y_2z_2$ relacionado con $o_1x_1y_1z_1$ de tal manera que:

$$p^1 = R_1^2 p^2 + d_1^2$$

podemos decir que $o_0x_0y_0z_0$ esta relacionado con $o_2x_2y_2z_2$ y podemos escribir a p^2 como:

$$\begin{aligned} p^0 &= R_0^1 p^1 + d_0^1 \\ &= R_0^1 R_1^2 p^2 + R_0^1 d_1^2 + d_0^1 \\ &= R_0^2 p^2 + d_0^2 \end{aligned}$$

2.7. Transformaciones homogéneas

Una matriz de transformación homogénea es una representación de estos movimientos rígidos que es mucho mas facil de operar en largas cadenas cinemáticas. Sea H una matriz de transformación homogénea, compuesta por la rotación $R \in SO(3)$ y $d \in \mathbb{R}$ de tal manera que:

$$H = \begin{pmatrix} R & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (14)$$

y la inversa de esta matriz H es:

$$H^{-1} = \begin{pmatrix} R^T & -R^T d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (15)$$

y en donde el punto p^1 ahora lo representamos como:

$$p^1 = \begin{pmatrix} p^1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (16)$$

de tal manera que con respecto al marco de referencia $o_0x_0y_0z_0$ se escribe:

$$p^0 = H_0^1 p^1 \quad (17)$$

Cabe hacer notar que H_0^1 puede ser visto como:

$$H_0^1 = \begin{pmatrix} n & s & a & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (18)$$

en donde n es un vector columna unitario, en la dirección de x_1 expresado en el marco de referencia $o_0x_0y_0z_0$, s en la dirección de y_1 y a en la dirección de z_1 , y d , como es de esperarse, es la distancia entre los dos marcos de referencia expresado con respecto a $o_0x_0y_0z_0$.

3. Cinemática directa e inversa

3.1. Cadenas cinemáticas

En este punto empezaremos a hablar de variables articulares las cuales se denotan por q_i y se refieren a θ_i si la articulación i es rotacional o a d_i si la articulación es prismática, de tal manera que para cada matriz de transformación homogénea asignaremos una variable q_i de la cual depende, es decir $A_i = A_i(q_i)$. En este sentido, una cadena cinemática será el conjunto de transformaciones homogéneas que describan el punto de estudio con respecto al marco de referencia fijo:

$$H = T_0^n = A_1(q_1) \dots A_n(q_n) \quad (19)$$

en donde cada transformación homogénea es de la forma:

$$A_i = \begin{pmatrix} R_{i-1}^i & o_{i-1}^i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (20)$$

3.2. Convención Denavit-Hartenberg

La convención Denavit-Hartenberg se basa en hacer cada transformación homogénea compuesta de las siguientes transformaciones básicas, de tal manera que:

$$\begin{aligned} A_i &= Rot_{z,\theta_i} Trans_{z,d_i} Trans_{x,a_i} Rot_{x,\alpha_i} \\ &= \begin{pmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i}c_{\alpha_i} & s_{\theta_i}s_{\alpha_i} & a_i c_{\theta_i} \\ s_{\theta_i} & c_{\theta_i}c_{\alpha_i} & -c_{\theta_i}s_{\alpha_i} & a_i s_{\theta_i} \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (21)$$

tomando un conjunto de reglas para que esta transformación compuesta pueda caracterizar perfectamente cualquier transformación arbitraria:

1. El eje x_i es perpendicular a z_{i-1}
2. El eje x_i intersecta al eje z_{i-1}

por lo que queda por hacer es definir la metodología para asignar los marcos de referencia de cada articulación, de tal manera que estas reglas se cumplan:

1. Localizar los ejes z_{i-1} de tal manera que coincidan con el eje de rotación o traslación de la articulación i .
2. Establecer el referencial fijo en un punto a lo largo del eje z_0 , colocando los ejes x_0 y y_0 convenientemente.
3. Para las articulaciones $i = 1, 2, \dots, n-1$:
 - a) Asignar o_i al punto donde la normal común entre z_i y z_{i-1} intersectan a z_i . Notar que o_i corresponde a la articulación $i+1$. En caso que z_i y z_{i-1} sean paralelas, se deberá localizar o_i arbitrariamente en z_i .
 - b) Establecer x_i a lo largo de la normal común entre z_i y z_{i-1} que pasa por o_i , o bien en la dirección normal al plano z_i - z_{i-1} en el caso que z_i y z_{i-1} se intersecten.
 - c) Establecer y_i de manera que este complete un marco de referencia derecho.
4. Suponiendo que la ultima articulación es rotacional, hacer $z_n = a$, a lo largo de la dirección z_{n-1} . Establecer el referencial $o_n x_n y_n z_n$ convenientemente sobre z_n , preferentemente en el punto de interes de la herramienta final. Colocar y_n en la dirección de cierre de la pinza.
5. Crear una tabla de parametros a_i , d_i , α_i y θ_i , en donde estos corresponden a:
 - a) a_i es la distancia medida a lo largo del eje x_i desde o_i a la intersección de los ejes z_{i-1} y x_i .
 - b) d_i es la distancia medida a lo largo del eje z_{i-1} desde o_{i-1} a la intersección de los ejes z_{i-1} y x_i .
 - c) α_i es el angulo entre los ejes z_i y z_{i-1} , medido alrededor del eje x_i .
 - d) θ_i es el angulo entre los ejes x_i y x_{i-1} , medido alrededor del eje z_{i-1} .
6. Calcular las transformaciones homogéneas A_i .
7. Calcular $T_0^n = A_1 \dots A_n$

$$T_{n-3}^n = \begin{pmatrix} c_\phi c_\theta c_\psi - s_\phi s_\psi & -c_\phi c_\theta s_\psi - s_\phi c_\psi & c_\phi s_\theta & c_\phi s_\theta d_n \\ s_\phi c_\theta c_\psi + c_\phi s_\psi & -s_\phi c_\theta s_\psi + c_\phi c_\psi & s_\phi s_\theta & s_\phi s_\theta d_n \\ -s_\theta c_\psi & s_\theta s_\psi & c_\theta & c_\theta d_n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (22)$$

en donde $q_{n-2} = \phi$, $q_{n-1} = \theta$, $q_n = \psi$, ya que la configuración de la muñeca esférica corresponde perfectamente con los angulos de Euler.

4. Cinemática de velocidad

5. Dinámica

3.3. Cinemática inversa

El problema de la cinemática inversa es no trivial, ya que involucra la obtención de n parametros, para un manipulador de n grados de libertad, a partir de 6 coordenadas de posición y orientación, y que en general estan distribuidas en 12 ecuaciones no lineales. Para manipuladores con pocos grados de libertad, es posible reducir este problema a uno soluble, utilizando una muñeca esférica en los ultmos grados de libertad del manipulador y aprovechar el desacoplamiento cinemático que ocurre.

3.4. Desacoplamiento cinemático

La muñeca esférica que queremos utilizar tiene como transformación homogénea: