

ROBERTO CADENA VEGA

# TEORÍA DE CONTROL



## *Índice general*

<i>1</i>	<i>Criterio de Estabilidad de Routh-Hurwitz</i>	<i>7</i>
<i>2</i>	<i>Lugar de las Raíces</i>	<i>19</i>
<i>3</i>	<i>Compensador Adelanto/Atraso (LR)</i>	<i>23</i>
<i>4</i>	<i>Diagramas de Bode</i>	<i>27</i>
<i>5</i>	<i>Diagramas de Nyquist</i>	<i>29</i>
<i>6</i>	<i>Criterio de Estabilidad de Nyquist</i>	<i>31</i>
<i>7</i>	<i>Estabilidad Relativa</i>	<i>33</i>
<i>8</i>	<i>Compensador de adelanto y atrase de fase (Frecuencia)</i>	<i>35</i>
<i>9</i>	<i>Controladores PID</i>	<i>37</i>
<i>10</i>	<i>Representación de estado</i>	<i>39</i>
<i>11</i>	<i>Controlabilidad y asignación de polos</i>	<i>53</i>

12	<i>Inobservabilidad y observador de estado</i>	67
13	<i>Principio de Separación</i>	75
14	<i>Estabilidad de Lyapunov</i>	77
15	<i>Introducción a la optimización de funcionales</i>	83
16	<i>Introducción al control óptimo</i>	93

*Todo list*



# 1

## *Criterio de Estabilidad de Routh-Hurwitz*

$$\frac{\hat{y}(s)}{\hat{R}(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} = \frac{B(s)}{A(s)} \quad (1.1)$$

$$\frac{\hat{y}(s)}{\hat{R}(s)} = \sum \frac{k_{1,i}}{s + \alpha_i} + \sum \frac{k_{2,j} + k_{3,j} \cdot s}{(s + \beta_i)^2 + \gamma_i^2}; m \leq n \quad (1.2)$$

El criterio de Routh-Hurwitz determina si existen raíces en el semiplano complejo derecho cerrado.

*Tabla de Routh*

La tabla de Routh es un método para obtener el número de raíces con parte real positiva que se encontraran en el polinomio característico del sistema (Ecuación 1.3) sin tener que calcular las raíces en cuestión. Se puede dividir en cuatro pasos que se enumeran a continuación.

$$A(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n = 0 \quad (1.3)$$

1. Hipótesis Si  $a_0 = 0 \Rightarrow$  el polinomio es de orden menor a  $n$ .  
Si  $a_n = 0 \Rightarrow \exists$  una raíz que es 0  $\Rightarrow A(s) = (\bar{n}_0 s^{\bar{n}} + \bar{a}_n s^{\bar{n}-1} + \dots) s^k$ .
2. Si existen coeficientes nulos o de diferente (cambio de) signo, entonces existen raíces con parte real positiva.



3. Construir la tabla de Routh (Ver Cuadro 1.1).

$s^n$	$a_0$	$a_2$	$a_4$	$a_6$	...
$s^{n-1}$	$a_1$	$a_3$	$a_5$	$a_7$	...
$s^{n-2}$	$b_1$	$b_3$	$b_5$	$b_7$	...
$s^{n-3}$	$c_1$	$c_3$	$c_5$	$c_7$	...
$s^{n-4}$	$d_1$	$d_3$	$d_5$	$d_7$	...
$\vdots$					
$s^2$	$e_1$	$e_2$			
$s^1$	$f_1$				
$s^0$	$g_1$				

Cuadro 1.1: Ejemplo de tabla de Routh.

Donde:

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}, b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}, \dots$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}, c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1}, \dots$$

$$d_1 = \frac{c_1 b_2 - b_1 c_2}{c_1}, d_2 = \frac{c_1 b_3 - b_1 c_3}{c_1}, \dots$$

$\vdots$

4. El número de raíces con parte real positiva es igual al numero de cambios de signo en la primera columna(Ver Cuadro 1.2).

$s^n$	$a_0$
$s^{n-1}$	$a_1$
$s^{n-2}$	$b_1$
$s^{n-3}$	$c_1$
$s^{n-4}$	$d_1$
$\vdots$	$\vdots$
$s^2$	$e_1$
$s^1$	$f_1$
$s^0$	$g_1$

Cuadro 1.2: Números en los que hay que revisar el cambio de signo.

### Casos Especiales

1. En los casos en los que un coeficiente es 0 se puede intercambiar por un  $\epsilon$  lo suficientemente pequeño para aproximar a 0 (Véase el Cuadro 1.3).

$$A(s) = s^3 + 2s^2 + s + 2 = 0$$

```
>> A = [1 2 1 2];
>> r = roots(A)
r =
-2.00000 + 0.00000i
-0.00000 + 1.00000i
-0.00000 - 1.00000i
```

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 1 \\ s^2 & 2 & 2 \\ s^1 & 0 \approx \epsilon & \\ s^0 & 2 & \end{array}$$

Cuadro 1.3: Caso Especial 1.

2. Cuando existen cambios en los coeficientes del polinomio característico se sabe que existirán raíces con parte real positiva (Véase el Cuadro 1.4).

$$A(s) = s^3 - 3s + 2 = 0$$

```
>> A = [1 0 -3 2];
>> r = roots(A)
r =
-2.00000
1.00000
1.00000
```

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & -3 \\ s^2 & 0 \approx \epsilon & 2 \\ s^1 & -\frac{2}{\epsilon} & 0 \\ s^0 & 2 & \end{array}$$

Cuadro 1.4: Caso Especial 2.

3. Cuando todos los coeficientes en una línea se eliminan se puede crear un nuevo polinomio auxiliar con la línea anterior, obtener su derivada e insertar en la siguiente línea para continuar calculando la tabla (Véase el Cuadro 1.5 y 1.6).

$$A(s) = s^5 + 2s^4 + 24s^3 + 48s^2 - 25s - 50 = 0$$

$$p_{aux}(s) = 2s^4 + 48s^2 - 50$$

$$\frac{d}{dx}p_{aux}(s) = 8s^3 + 96s$$

```
>> A = [1 2 24 48 -25 -50];
>> r = roots(A)
r =
-0.00000 + 5.00000i
-0.00000 - 5.00000i
 1.00000 + 0.00000i
-2.00000 + 0.00000i
-1.00000 + 0.00000i
```

$$\begin{array}{c|ccc} s^5 & 1 & 24 & -25 \\ s^4 & 2 & 48 & -50 \\ s^3 & 0 & 0 & 0 \\ s^2 & & & \\ s^1 & & & \\ s^0 & & & \end{array}$$

Cuadro 1.5: Caso Especial 3a.

$$\begin{array}{c|ccc} s^5 & 1 & 24 & -25 \\ s^4 & 2 & 48 & -50 \\ s^3 & 8 & 96 & 0 \\ s^2 & 24 & -50 & 0 \\ s^1 & 112,6 & 0 & \\ s^0 & -50 & & \end{array}$$

Cuadro 1.6: Caso Especial 3b.

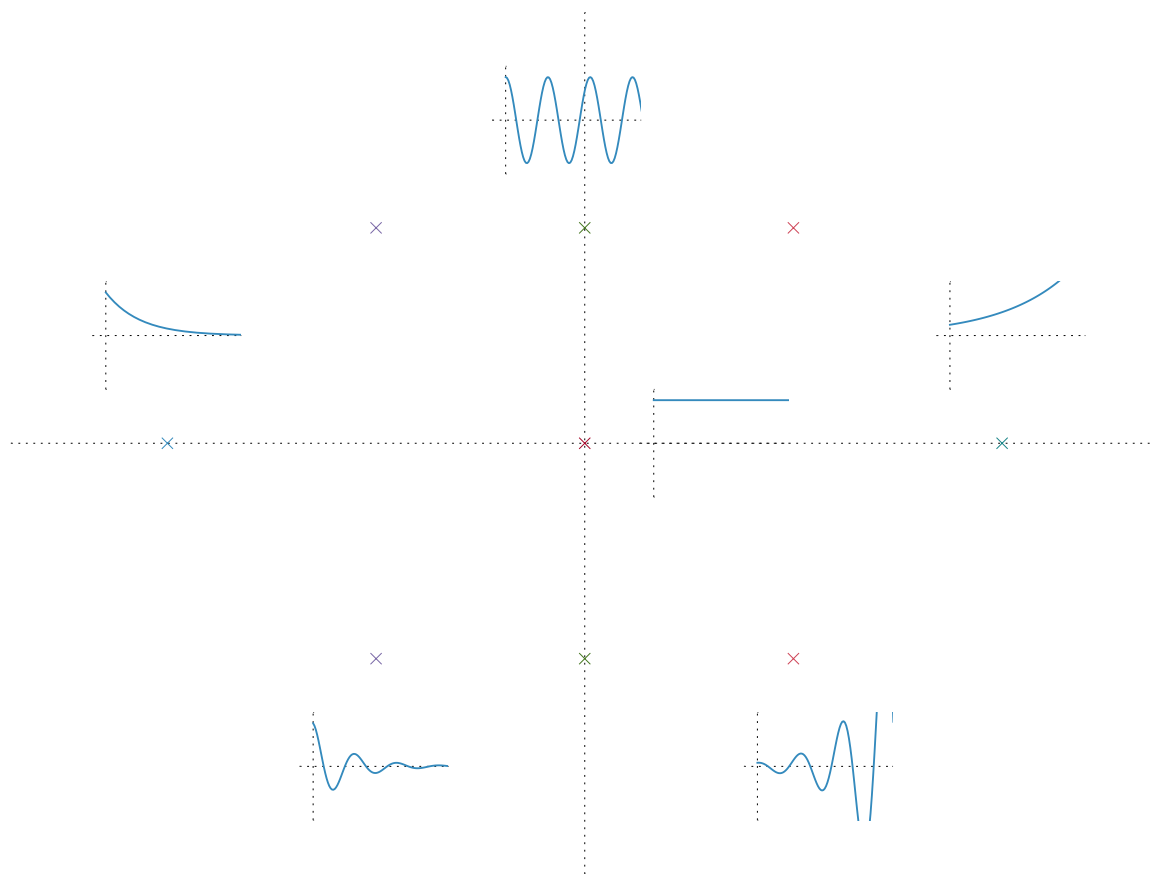


Figura 1.1: Polos en el plano complejo.

### Aplicación del criterio de Routh

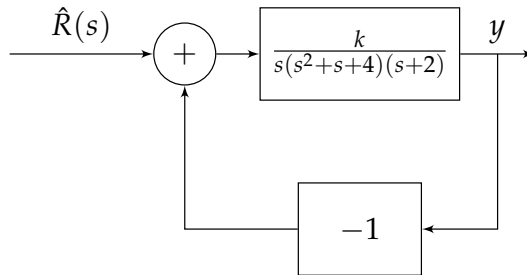
Si bien los sistemas numéricos actuales permiten el cálculo de las raíces de un sistema de manera más rápida y sencilla que con la aplicación de este método, aun existen aplicaciones prácticas en las que es de suma importancia el determinar el número de raíces positivas. Por ejemplo podemos tener ganancias en un sistema para las que queremos determinar de primera instancia, un rango de valores para los cuales el sistema no se volverá inestable.

Para ello calculamos la tabla de Routh de la misma manera en que lo hicimos anteriormente, pero teniendo en cuenta las ganancias a incluir en el cálculo de las raíces (Por ejemplo con una ganancia proporcional véase Cuadro 1.7).

$s^n$	$a_0$	$a_2$	$a_4$	$a_6$	...
$s^{n-1}$	$a_1$	$a_3$	$a_5$	$a_7$	$k$
$s^{n-2}$	$b_1$	$b_3$	$b_5$	$b_7$	...
$s^{n-3}$	$c_1$	$c_3$	$c_5$	$c_7$	...
$s^{n-4}$	$d_1$	$d_3$	$d_5$	$d_7$	...
$\vdots$					
$s^2$	$e_1$	$e_2$			
$s^1$	$f_1$				
$s^0$	$g_1$				

Cuadro 1.7: Aplicación del criterio de Routh.

### Ejemplo



Se toma el sistema  $\frac{\hat{y}(s)}{\hat{R}(s)} = \frac{k}{s^4 + 3s^3 + 3s^2 + 2s + k}$ , entonces el polinomio característico del sistema será  $F(s) = s^4 + 3s^3 + 3s^2 + 2s + k$ .

Construimos su tabla de Routh (Cuadro 1.8):

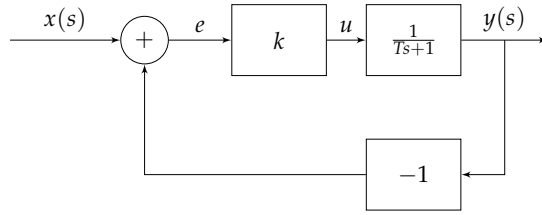
De lo anterior podemos concluir que, para que no existan cambios de signos, toda la primera columna tiene que ser positiva, por lo que  $k > 0$  y  $2 - 9/7k > 0$ , por lo que el rango de valores que puede ocupar la ganancia  $k$  es  $0 < k <^{14} 9$ .

$s^4$	1	3	$k$
$s^3$	3	2	0
$s^2$	$\frac{7}{3}$	$k$	0
$s^1$	$2 - \frac{9}{7}k$	0	
$s^0$	$k$		

Cuadro 1.8: Ejemplo de Aplicación del criterio de Routh.

Si bien esto no nos aporta una ganancia específica para un comportamiento deseado, si nos da la pauta a los valores a tomar en cuenta, si no se desea que el sistema sea inestable.

### Acción Proporcional



Tenemos un sistema de primer orden, al que le agregaremos un controlador de ganancia proporcional y una retroalimentación negativa, por lo que las ecuaciones que describen la salida y el error del sistema quedan:

$$\frac{\hat{y}(s)}{\hat{R}(s)} = \frac{k}{Ts + 1 + k} \quad (1.4)$$

$$\frac{\hat{e}(s)}{\hat{R}(s)} = \frac{R(s) - Y(s)}{R(s)} = \frac{Ts + 1}{Ts + 1 + k} \quad (1.5)$$

### Estabilidad

El problema reside en encontrar un conjunto de ganancias  $k$  para las cuales el sistema es estable.

$$F(s) = s + \frac{1 + k}{T} \quad (1.6)$$

Aplicamos una tabla de Routh a este polinomio característico (Cuadro 1.9).

$$\begin{array}{c|c} s^1 & 1 \\ s^0 & \frac{1+k}{T} \end{array}$$

Cuadro 1.9: Tabla de Routh para acción proporcional.

Por lo que concluimos que la ganancia  $k$  debe de seguir:  $k > -1$

### Error en el estado permanente al escalón unitario

También es importante investigar el error que causara el controlador al introducirse. Si ponemos como señal de referencia al escalón unitario ( $R(s) = \frac{1}{s}$ ), podemos ver lo siguiente:

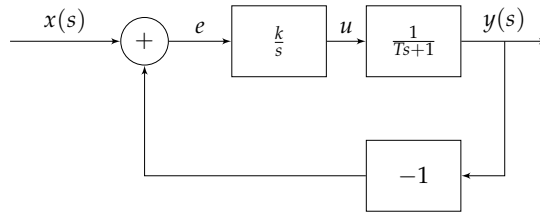
$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} se(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{Ts + 1}{Ts + 1 + k} = \frac{1}{1 + k}$$



Gráfica de respuesta sobreamortiguada  
y con error en estado estacionario.



### Acción Integral



Tenemos un sistema de primer orden, al que le agregaremos un controlador de ganancia integral y una retroalimentación negativa, por lo que las ecuaciones que describen la salida y el error del sistema quedan:

$$\frac{\hat{y}(s)}{\hat{R}(s)} = \frac{k}{s(Ts + 1) + k} \quad (1.7)$$

$$\frac{\hat{e}(s)}{\hat{R}(s)} = \frac{R(s) - Y(s)}{R(s)} = \frac{s(Ts + 1)}{s(Ts + 1) + k} \quad (1.8)$$

### Estabilidad

El problema reside en encontrar un conjunto de ganancias  $k$  para las cuales el sistema es estable.

$$F(s) = s^2 + \frac{1}{T}s + \frac{k}{T} \quad (1.9)$$

Aplicamos una tabla de Routh a este polinomio característico (Cuadro 1.10).

$$\begin{array}{c|cc} s^2 & 1 & \frac{k}{T} \\ s^1 & \frac{1}{T} & 0 \\ s^0 & \frac{k}{T} & \end{array}$$

Cuadro 1.10: Tabla de Routh para acción integral.

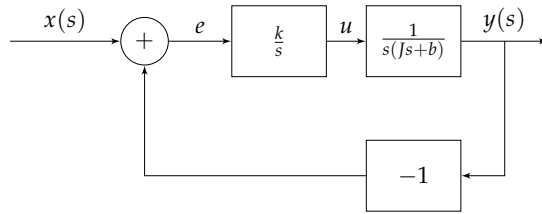
Por lo que concluimos que la ganancia  $k$  debe de seguir:  $k > 0$

### Error en el estado permanente al escalón unitario

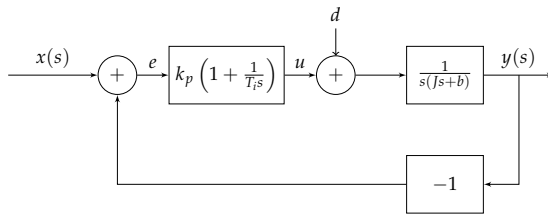
También es importante investigar el error que causara el controlador al introducirse. Si ponemos como señal de referencia al escalón unitario ( $R(s) = \frac{1}{s}$ ), podemos ver lo siguiente:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} se(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left( \frac{s(Ts + 1)}{s(Ts + 1) + k} \frac{1}{s} \right) = 0$$

Falta escribir apunte



### *Acción Proporcional Integral*



Falta escribir apunte

### *Estabilidad*

Falta escribir apunte

### *Error en el estado permanente al escalón unitario*

Falta escribir apunte

## 2

### *Lugar de las Raíces*

Si tenemos un sistema con retroalimentación, su polinomio característico es el siguiente:

$$F(s) = 1 + H(s)G(s) = 0 \quad (2.1)$$

Donde  $G(s)$  es la planta y  $H(s)$  es el elemento de retroalimentación. Las condiciones de ángulo y magnitud son las siguientes:

$$\angle H(s)G(s) = \pm 180^\circ (2R + 1) \mid R \in \mathbb{Z}^+ \quad (2.2)$$

$$|H(s)G(s)| = 1 \quad (2.3)$$

De aquí notamos que la condición de ángulo, nos da la forma del lugar de las raíces, y la condición de magnitud nos da su posición.

Pues bien, para trazar el lugar geométrico de las raíces seguimos una serie de pasos enumerados a continuación:

1. Determinar el lugar de las raíces en el eje real.

Ejemplo:  $H(s) = 1$ ,  $G(s) = \frac{k}{s(s+1)(s+2)}$

Sabemos, por una inspección visual, que los polos del sistema son 0, -1, y -2, y que este sistema no tiene ceros. Lo cual nos indica, por la condición de ángulo, que la suma de las interacciones de estas raíces, nos dará la interacción total del sistema:

$$\angle G(s) = -\angle s - \angle s + 1 - \angle s + 2 = \pm 180^\circ (2R + 1)$$

Notemos que cualquier lugar de las raíces en el semiplano derecho complejo (inestable), viene con un ángulo de  $0^\circ$ , por lo que las interacciones de cada polo serían:

$$\angle G(s) = -0^\circ - 0^\circ - 0^\circ = 0^\circ$$

lo cual obviamente no cumple con la condición de ángulo del sistema.

Si pasamos a la siguiente sección del eje real (creada por los mismos polos del sistema), tenemos que los ángulos de interacción de cada polo son:

$$\angle G(s) = -180^\circ - 0^\circ - 0^\circ = -180^\circ$$

lo cual cumple con la condición de ángulo del sistema.

En la siguiente sección (entre  $-1$  y  $-2$ ), tenemos lo siguiente:

$$\angle G(s) = -180^\circ - 180^\circ - 0^\circ = -360^\circ = 0^\circ$$

y esto no cumple con la condición de ángulo del sistema.

En la última sección (entre  $-2$  y  $-\infty$ ) tenemos:

$$\angle G(s) = -180^\circ - 180^\circ - 180^\circ = -540^\circ = -180^\circ$$

por lo que esta última sección también es parte del lugar geométrico de las raíces.

## 2. Determinar las asíntotas del lugar de las raíces.

El lugar de las raíces se aproxima a sus asíntotas, mientras  $s \rightarrow \infty$ , por lo que podemos hacer una simplificación:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{k}{s(s+1)(s+2)} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{K}{s^3}$$

por lo que la condición de ángulo queda:

$$\angle G(s) = -3\angle s = \pm 180^\circ (2R+1) \implies \angle s = \pm 60^\circ (2R+1)$$

lo cual nos da que los ángulos de las asíntotas son  $60^\circ$ ,  $-60^\circ$  y  $120^\circ$ .

Por otro lado, si hacemos un proceso similar, pero con el polinomio característico desarrollado, podremos ver que hay términos más importantes que otros, en especial cuando hacemos  $s \rightarrow \infty$ , por lo que:

$$G(s) = \frac{k}{s(s+1)(s+2)} = \frac{k}{s^3 + 3s^2 + 2s} \approx \frac{k}{(s+1)^3}$$

por lo que podemos ver que las asíntotas tienen esa forma, y que podemos asegurar que parten del punto  $-1 + 0i$ .

3. Determinar el punto de ruptura o partida de las asintotas en el eje real.

Para determinar el punto de ruptura del lugar de las raíces, tenemos que pensar en el polinomio característico como la suma de 2 polinomios diferentes  $A(s)$  y  $B(s)$ , de tal manera que ninguno contenga a la ganancia  $k$ , entonces tendremos:

$$F(s) = B(s) + kA(s) = 0 \implies k = -\frac{B(s)}{A(s)}$$

implicando que estamos obteniendo las ganancias, para las cuales se tienen polos en el plano complejo.

De aquí podemos pensar en el punto máximo de esta función de ganancias, como el punto de ruptura buscado, es decir:

$$\frac{dk}{ds} = 0 \quad (2.4)$$

En nuestro ejemplo, esto nos da como resultado:

$$k = -s^3 - 3s^2 - 2s \implies \frac{dk}{ds} = -3s^2 + 6s + 2 = 0$$

de donde obtenemos un par de respuestas  $s_1 = -0,423$  y  $s_2 = -1,577$ , con ganancias asociadas  $k_1 = 0,385$  y  $k_2 = -0,385$ .

De aquí podemos descartar  $s_2$  ya que no se encuentra en el lugar de las raíces del eje real, y obviamente no puede partir de ahí, si no existe en ese lugar en específico.

4. Determinar los puntos donde el lugar de las raíces atraviesa el eje imaginario.

Ya hemos visto que los polos sobre el eje real no cruzan el eje imaginario, ahora solo tenemos que encontrar las ganancias críticas, es decir, cuando los polos están sobre el eje imaginario.

$$F(s) = s^3 + 3s^2 + 2s + k$$

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 2 \\ s^2 & 3 & k \\ s^1 & 2 - k/3 & 0 \\ s^0 & k & \end{array}$$

De donde obtenemos que  $k > 0$ , lo cual ocurre en el polo del origen y  $k < 6$ , que es justo cuando cruza por el eje imaginario.

Ahora, tan solo tenemos que obtener las raíces del polinomio característico con la ganancia adecuada y obtendremos el punto de

cruce, alternatively, podemos usar el polinomio auxiliar de la tabla de Routh, usaremos el correspondiente a  $s^2$ .

$$P_{aux} = 3s^2 + k = 3s^2 + 6 = 0 \implies s = \pm\sqrt{2}j$$

### 3

## *Compensador Adelanto/Atraso (LR)*

El concepto de fase surge del análisis del lugar de las raíces, al pensar que el ángulo que tiene un conjunto de raíces complejas conjugadas con respecto al eje real positivo es la fase, es decir, el ángulo del fasor. De esta manera, podemos modificar el comportamiento de un sistema agregando dinámicas al sistema ayudándolo a mover el lugar geométrico de las raíces hacia donde lo necesitamos.

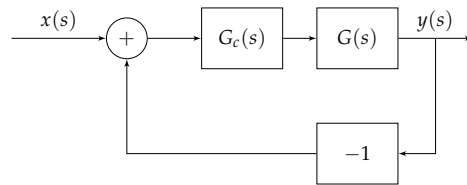
El adelanto de fase pues, será un comportamiento demasiado rápido y subamortiguado y el atraso de fase demasiado lento y sobreamortiguado, por lo que agregaremos polos que atraigan el lugar de las raíces y que modifiquen la fase para adelantarla (si es un comportamiento demasiado lento o sobreamortiguado) o atrasarla (si es un comportamiento demasiado rápido o subamortiguado).

Empezaremos considerando el siguiente sistema como base para nuestros cálculos:



### Compensador de adelanto de fase

Dado el siguiente sistema realimentado:



Tenemos que el controlador es de la forma:

$$G_c(s) = k_c \alpha \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1} = \hat{k}_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}} \quad (3.1)$$

con  $k_c > 0$  y  $0 < \alpha < 1$ .

Dadas estas condiciones, el lugar de las raíces de los polos y ceros<sup>1</sup> agregados se verán como en la figura.

<sup>1</sup> El cero atrae el lugar de las raíces hacia la izquierda.



Figura 3.1: Polo y cero introducidos por el compensador de adelanto de fase.

Dado este controlador se pueden modificar el comportamiento del sistema para hacerlo tan rápido como sea necesario. El cálculo de los parámetros  $T$  y  $\alpha$  será explicado con un ejemplo.

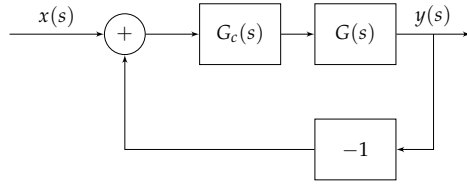
### Ejemplo

Falta escribir apunte



### Compensador de atraso de fase

Dado el siguiente sistema realimentado:



Tenemos que el controlador es de la forma:

$$G_c(s) = k_c \beta \frac{Ts + 1}{\beta Ts + 1} = \hat{k}_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\beta T}} \quad (3.2)$$

con  $k_c > 0$  y  $\beta > 1$ .

Dadas estas condiciones, el lugar de las raíces de los polos y ceros agregados se verán como en la figura.



Figura 3.2: Polo y cero introducidos por el compensador de atraso de fase.

Si el cero y el polo están muy cercanos, entonces para  $s = s_1$  un polo dominante en lazo cerrado, se tiene que la magnitud del sistema:

$$|G_c(s_1)| = \left| \hat{k}_c \frac{s_1 + \frac{1}{T}}{s_1 + \frac{1}{\beta T}} \right| \approx |\hat{k}_c|$$

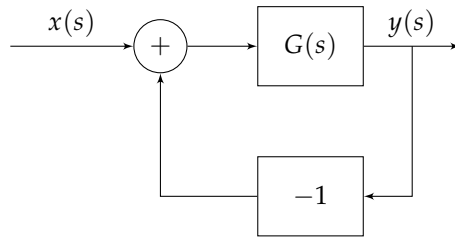
y en específico para la fase:

$$-5^\circ < \angle \frac{s_1 + \frac{1}{T}}{s_1 + \frac{1}{\beta T}} < 0^\circ$$

Por lo que se puede aumentar la ganancia en el polo del sistema, sin sufrir un corrimiento considerable en el lugar de las raíces.

*Error estático de posición  $k_p$* 

Para el sistema dado:



con una entrada de tipo escalón:

$$x(s) = \frac{1}{s}$$

y un sistema  $G(s)$ :

$$G(s) = k_p \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\beta T}}$$

El error en estado permanente a una entrada escalón unitario es:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \left( \frac{1}{1 + G(s)} \frac{1}{s} \right) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + G(s)} = \frac{1}{1 + G(0)} = \frac{1}{1 + k_p}$$

*Error estático de velocidad  $k_v$* 

Falta escribir apunte

*Ejemplo*

Falta escribir apunte

4

## *Diagramas de Bode*

*Factor integral*

\_\_\_\_\_ Falta escribir apunte

*Factor derivativo*

\_\_\_\_\_ Falta escribir apunte

*Factores de primer orden*

\_\_\_\_\_ Falta escribir apunte

*Factores de segundo orden*

\_\_\_\_\_ Falta escribir apunte

*Frecuencia de resonancia  $\omega_n$  y valor par de resonancia  $M_R$*

\_\_\_\_\_ Falta escribir apunte



5

## *Diagramas de Nyquist*

*Factor integral*

\_\_\_\_\_ Falta escribir apunte

*Factor derivativo*

\_\_\_\_\_ Falta escribir apunte

*Factores de primer orden*

\_\_\_\_\_ Falta escribir apunte

*Factores de segundo orden*

\_\_\_\_\_ Falta escribir apunte



6

## *Criterio de Estabilidad de Nyquist*

*Ejemplos*

Falta escribir apunte





7

## *Estabilidad Relativa*

*Margen de Fase*

\_\_\_\_\_ Falta escribir apunte

*Estable*

\_\_\_\_\_ Falta escribir apunte

*Inestable*

\_\_\_\_\_ Falta escribir apunte

*Margen de Ganancia*

\_\_\_\_\_ Falta escribir apunte

*Estable*

\_\_\_\_\_ Falta escribir apunte

*Inestable*

\_\_\_\_\_ Falta escribir apunte



8

## *Compensador de adelanto y atrase de fase (Frecuencia)*

*Compensador de adelanto de fase*

\_\_\_\_\_ Falta escribir apunte

*Compensador de atraso de fase*

\_\_\_\_\_ Falta escribir apunte

*Ejemplos*

\_\_\_\_\_ Falta escribir apunte



## 9

# Controladores PID

*Sintonización: Reglas de Ziegler-Nichols*

Falta escribir apunte

*Respuesta al escalón*

Falta escribir apunte

*Respuesta a oscilaciones sostenidas*

Falta escribir apunte

*Esquemas modificados*

Falta escribir apunte

*Controlador PID*

Falta escribir apunte

*Controlador PI-D*

Falta escribir apunte

*Controlador I-PD*

Falta escribir apunte



## Representación de estado

La siguiente funcion de transferencia es la Transformada de Laplace de la ecuacion diferencial ordinaria de orden  $n$  que describe al sistema.

$$\frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} = \frac{B(s)}{A(s)}, m \leq n \quad (10.1)$$

$$\begin{aligned} & \frac{d^n}{dt^n} y(t) + a_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} y(t) + \dots + a_{n-1} \frac{d}{dt} y(t) + a_n y(t) \\ &= b_0 \frac{d^m}{dt^m} u(t) + b_1 \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} u(t) + \dots + b_{m-1} \frac{d}{dt} u(t) + b_m u(t) \end{aligned} \quad (10.2)$$

Haciendo la siguiente asignacion de variables:

$$\begin{aligned} x_1 &= z \\ x_2 &= \frac{d}{dt} x_1 = \frac{d}{dt} z \\ x_3 &= \frac{d}{dt} x_2 = \frac{d^2}{dt^2} z \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= \frac{d}{dt} x_{n-2} = \frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}} z \\ x_n &= \frac{d}{dt} x_{n-1} = \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} z \end{aligned}$$

Donde:

$$\frac{d}{dt} x_n = -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \dots - a_2 x_{n-1} - a_1 x_n + u(t) \quad (10.3)$$

$$y = b_m x_1 + b_{m-1} x_2 + \dots + b_1 x_{m-1} + b_0 x_m \quad (10.4)$$

Por lo que se obtiene:

$$\left( \frac{d^n}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{d}{dt} + a_n \right) z(t) = u(t)$$

$$y(t) = \left( b_m + b_{m-1} \frac{d}{dt} + \cdots + b_1 \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} + b_0 \frac{d^m}{dt^m} \right) z(t)$$

es decir:

$$M \left( \frac{d}{dt} \right) z(t) = u(t) \quad (10.5)$$

$$y(t) = N \left( \frac{d}{dt} \right) z(t) \quad (10.6)$$

Lo cual implica  $M \left( \frac{d}{dt} \right) y(t) = N \left( \frac{d}{dt} \right) u(t)$ . Donde:

$$M \left( \frac{d}{dt} \right) = \left( \frac{d^n}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{d}{dt} + a_n \right)$$

$$N \left( \frac{d}{dt} \right) = \left( b_m + b_{m-1} \frac{d}{dt} + \cdots + b_1 \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} + b_0 \frac{d^m}{dt^m} \right)$$

Esta es la misma ecuación diferencial con la que empezamos. Note que la escritura matricial de esta Ecuación Diferencial Ordinaria<sup>1</sup> es:

$$\frac{d}{dt} \vec{x} = A \vec{x}(t) + \vec{b} u(t) \quad (10.7)$$

$$\vec{y}(t) = \vec{c}^T \cdot \vec{x}(t) \quad (10.8)$$

Donde:

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \quad (10.9)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix} \quad (10.10)$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad (10.11)$$

<sup>1</sup> Si bien la notación correcta es la que se utiliza justo ahora, al final del capítulo se dejará a un lado, para obviar el hecho de que son vectores y matrices, sin que por eso se entienda que ya no lo son.



$$\vec{c} = \begin{pmatrix} b_m \\ b_{m-1} \\ \vdots \\ b_1 \\ b_0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (10.12)$$



### Solución temporal de la ecuación de estado

1. Para el caso en que  $A$  es un escalar y la solución es homogénea se considera la siguiente Ecuación Diferencial Ordinaria:

$$\frac{d}{dt}x(t) = ax(t) \mid x(0) = x_0 \quad (10.13)$$

Suponga una solución de la forma:

$$x(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \dots + \alpha_k t^k + \dots \quad (10.14)$$

Entonces se tiene:

$$\begin{aligned} \alpha_1 + 2\alpha_2 t + 3\alpha_3 t^2 + \dots + k\alpha_k t^{k-1} + \dots \\ = a\alpha_0 + a\alpha_1 t + a\alpha_2 t^2 + \dots + a\alpha_k t^k + \dots \end{aligned}$$

Por lo que las  $\alpha_i$  deben satisfacer:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= a\alpha_0 = \frac{1}{1!}a^1\alpha_0 \\ \alpha_2 &= a\alpha_1 = \frac{1}{2!}a^2\alpha_0 \\ \alpha_3 &= a\alpha_2 = \frac{1}{3!}a^3\alpha_0 \quad ; \quad \alpha_0 = x_0 \\ \vdots &= \vdots = \vdots \\ \alpha_k &= a\alpha_{k-1} = \frac{1}{k!}a^k\alpha_0 \end{aligned} \quad (10.15)$$

Esto es:

$$\begin{aligned} x(t) &= \left( \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} (at)^i \right) x_0 \\ x(t) &= e^{at} x_0 \end{aligned} \quad (10.16)$$

$$\begin{aligned} \text{Notese que: } \frac{d}{dt}x(t) &= \left( \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \frac{d}{dt}(at)^i \right) x_0 = \left( \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(i-1)!} (at)^{i-1} \right) ax_0 = \\ &= \left( \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} (at)^j \right) ax_0 \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt}x(t) = ae^{at}x_0 = ax(t) \quad x(0) = x_0$$

2. Para el caso en que  $A$  es una matriz y la solución es homogénea se considera la siguiente Ecuación Diferencial Ordinaria:

$$\frac{d}{dt}\vec{x}(t) = A\vec{x}(t) \mid \vec{x}(0) = \vec{x}_0 \quad (10.17)$$

De la misma manera que en el caso escalar, se supone una solución de la forma:

$$\vec{x}(t) = \vec{\alpha}_0 + \vec{\alpha}_1 t + \vec{\alpha}_2 t^2 + \cdots + \vec{\alpha}_k t^k + \dots \quad (10.18)$$

Entonces se tiene:

$$\begin{aligned} \vec{\alpha}_1 + 2\vec{\alpha}_2 t + 3\vec{\alpha}_3 t^2 + \cdots + k\vec{\alpha}_k t^{k-1} + \dots \\ = A\vec{\alpha}_0 + A\vec{\alpha}_1 t + A\vec{\alpha}_2 t^2 + \cdots + A\vec{\alpha}_k t^k + \dots \end{aligned}$$

Por lo que las  $\vec{\alpha}_i$  deben satisfacer:

$$\begin{aligned} \vec{\alpha}_1 &= A\vec{\alpha}_0 = \frac{1}{1!} A^1 \vec{\alpha}_0 \\ \vec{\alpha}_2 &= A\vec{\alpha}_1 = \frac{1}{2!} A^2 \vec{\alpha}_0 \\ \vec{\alpha}_3 &= A\vec{\alpha}_2 = \frac{1}{3!} A^3 \vec{\alpha}_0 \quad ; \quad \vec{\alpha}_0 = \vec{x}_0 \\ \vdots &= \vdots = \vdots \\ \vec{\alpha}_k &= A\vec{\alpha}_{k-1} = \frac{1}{k!} A^k \vec{\alpha}_0 \end{aligned} \quad (10.19)$$

Esto es:

$$\vec{x}(t) = \left( \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} (At)^i \right) \vec{x}_0$$

En análisis real, se demuestra que esta serie es absolutamente convergente y se define como:

$$\exp(At) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} (At)^i \quad (10.20)$$

Notese que:

$$\frac{d}{dt} \exp(At) = \frac{d}{dt} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} (At)^i = \left( \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(i-1)!} (At)^{i-1} \right) A = A \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} (At)^j = A \exp(At)$$

Por lo que:

$$\vec{x}(t) = \exp(At) \vec{x}_0$$

$$\frac{d}{dt} \vec{x}(t) = A \exp(At) \vec{x}_0 = A \vec{x}(t) \quad \vec{x}(0) = \vec{x}_0$$

3. Para el caso en que  $A$  es escalar y la solución es forzada:

$$\frac{d}{dt}x(t) = ax(t) + bu(t) \mid x(0) = 0 \quad (10.21)$$

La solución a esta ecuación es:

$$x(t) = \int_0^t e^{a(t-\tau)} bu(\tau) d\tau \quad (10.22)$$

$$\frac{d}{dt}x(t) = e^{a(t-t)} bu(t) + \int_0^t \frac{d}{dt} e^{a(t-\tau)} bu(\tau) d\tau = bu(t) + a \int_0^t e^{a(t-\tau)} bu(\tau) d\tau$$

$$\frac{d}{dt}x(t) = bu(t) + ax(t) \quad (10.23)$$

Por lo que la solución general (con  $x(0) = x_0$ ):

$$x(t) = e^{at} x_0 + \int_0^t e^{a(t-\tau)} bu(\tau) d\tau \quad (10.24)$$

4. Para el caso en que  $A$  es una matriz y la solución es forzada:

$$\frac{d}{dt}\vec{x}(t) = A\vec{x}(t) + \vec{b}u(t) \mid \vec{x}(0) = 0 \quad (10.25)$$

La solución de esta ecuación es:

$$\vec{x}(t) = \int_0^t \exp(A(t-\tau)) \vec{b}u(\tau) d\tau \quad (10.26)$$

En efecto, derivando tenemos:

$$\frac{d}{dt}\vec{x}(t) = \exp(A(t-t)) \vec{b}u(t) + \int_0^t \frac{d}{dt} \exp(A(t-\tau)) \vec{b}u(\tau) d\tau = \vec{b}u(t) + A \int_0^t \exp(A(t-\tau)) \vec{b}u(\tau) d\tau$$

$$\frac{d}{dt}\vec{x}(t) = \vec{b}u(t) + A\vec{x}(t) \quad (10.27)$$

Por lo que la solución general (con  $x(0) = x_0$ ):

$$\vec{x}(t) = \exp(At) \vec{x}_0 + \int_0^t \exp(A(t-\tau)) \vec{b}u(\tau) d\tau \quad (10.28)$$

*Función (Matriz) de transferencia de la ecuación de estado*

1. Para el caso escalar, se tiene que la transformada de Laplace con coeficientes independientes nulos es:

$$\begin{aligned}sx(s) &= ax(s) + bu(s) \\(s - a)x(s) &= bu(s) \\x(s) &= (s - a)^{-1}bu(s) \\x(s) &= \frac{b}{s - a}u(s)\end{aligned}$$

Por lo que:

$$e^{at} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ (s - a)^{-1} \right\} \quad (10.29)$$

2. Para el caso matricial, tenemos que la transformada de Laplace con coeficientes independientes nulos es:

$$\begin{aligned}s\vec{x}(s) &= A\vec{x}(s) + \vec{b}u(s) \\(sI - A)\vec{x}(s) &= \vec{b}u(s) \\x(s) &= (sI - A)^{-1}\vec{b}u(s)\end{aligned}$$

Por lo que:

$$\exp(At) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ (sI - A)^{-1} \right\} \quad (10.30)$$

### Función de transferencia de la representación de estado

Sea la siguiente Ecuación Diferencial Ordinaria:

$$M\left(\frac{d}{dt}\right)y(t) = N\left(\frac{d}{dt}\right)u(t)$$

donde:

$$M\left(\frac{d}{dt}\right) = \frac{d^n}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{d}{dt} + a_n$$

$$N\left(\frac{d}{dt}\right) = b_m + b_{m-1} \frac{d}{dt} + \cdots + b_1 \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} + b_0 \frac{d^m}{dt^m}$$

La función de transferencia con coeficientes independientes nulos de las ecuaciones es:

$$F(s) = \frac{N(s)}{M(s)} = \frac{\frac{d^n}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{d}{dt} + a_n}{b_m + b_{m-1} \frac{d}{dt} + \cdots + b_1 \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} + b_0 \frac{d^m}{dt^m}} \quad (10.31)$$

*Ceros.* Las raíces del polinomio  $N(s)$ .

*Polos.* Las raíces del polinomio  $M(s)$ .

Sea la siguiente representación de estado de la Ecuación Diferencial Ordinaria:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x &= Ax + bu \\ y &= c^T x + du \end{aligned}$$

La función de transferencia con coeficientes independientes nulos en esta representación es:

$$\begin{aligned} sx(s) &= Ax(s) + bu(s) \\ y(s) &= c^T x(s) + du(s) \end{aligned}$$

$\vdots$

$$\begin{aligned} (sI - A)x(s) &= bu(s) \\ y(s) &= c^T x(s) + du(s) \end{aligned}$$

$\vdots$

$$\begin{aligned}x(s) &= (sI - A)^{-1}bu(s) \\y(s) &= c^Tx(s) + du(s)\end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$y(s) = c^T[(sI - A)^{-1}bu(s)] + du(s) = [c^T(sI - A)^{-1}b + d]u(s)$$

$$\vdots$$

$$F(s) = c^T(sI - A)^{-1}b + d \quad (10.32)$$

*Matriz sistema*

$$\Sigma(s) = \begin{pmatrix} sI - A & b \\ -c^T & d \end{pmatrix} \quad (10.33)$$

Note que:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} (sI - A)^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} sI - A & b \\ -c^T & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -(sI - A)b \\ 0 & I \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I & (sI - A)^{-1}b \\ -c^T & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -(sI - A)b \\ 0 & I \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ -c^T & (c^T(sI - A)^{-1}b + d) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por lo que:

$$\det((sI - A)^{-1}) \cdot \det(\Sigma(s)) \cdot I = c^T(sI - A)^{-1}b + d$$

$$F(s) = \frac{\det(\Sigma(s))}{\det(sI - A)} \quad (10.34)$$

Por lo que los polos coinciden con los valores propios de  $A$  y los ceros son los números complejos que hacen perder rango a la matriz sistema.

$$\text{Polos: } F(s) = \{s \in \mathbb{C} \mid \det(sI - A) = 0\} \quad (10.35)$$

$$\text{Ceros: } F(s) = \{s \in \mathbb{C} \mid \det(\Sigma(s)) = 0\} \quad (10.36)$$



### Propiedades de la Matriz $A$

i) Definición de la matriz exponencial.

$$\exp(At) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} (At)^i \quad (10.37)$$

ii) Derivada de la matriz exponencial.

$$\frac{d}{dt} \exp(At) = A \exp(At) = (\exp(At))A \quad (10.38)$$

iii) Linealidad del operador matriz exponencial bajo escalar.

$$\begin{aligned} \exp(At) \exp(A\tau) &= \left( \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} (At)^i \right) \left( \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} (A\tau)^j \right) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} A^{i+j} \frac{t^i \tau^j}{i!j!} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \sum_{i=0}^k \frac{t^i \tau^{k-i}}{i!(k-i)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} A^k \frac{(t+\tau)^k}{k!} = \exp(A(t+\tau)) \quad (10.39) \end{aligned}$$

iv) Linealidad del operador matriz exponencial bajo matriz.

$$\exp((A+B)t) = \exp(At) \exp(Bt) \iff AB = BA \quad (10.40)$$

v) Cambio de base.

Sean dos matrices similares  $A$  y  $\bar{A}$ , esto es, dos matrices relacionadas por un cambio de base,  $T$  matriz invertible, esto es  $\bar{A} = T^{-1}AT$ .

a) Las matrices exponenciales asociadas a las matrices  $A$  y  $\bar{A}$  también son similares. En efecto:

$$\begin{aligned} T^{-1} \exp(At) T &= T^{-1} \left( \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} (At)^i \right) T = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} T^{-1} A^i T t^i \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} (T^{-1} A T)^i t^i = \exp \bar{A} t \end{aligned}$$

b) Los valores propios son invariantes bajo cambio de base. En efecto:

$$\begin{aligned} \det(sI - \bar{A}) &= \det(sI - T^{-1}AT) = \det(sT^{-1}T - T^{-1}AT) \\ &= \det(T^{-1}(sI - A)T) = \det(T^{-1}) \det(sI - A) \det(T) \\ &= \frac{1}{\det(T)} \det(sI - A) \det(T) = \det(sI - A) \end{aligned}$$

- c) Las raíces de la matriz sistema son invariantes bajo cambio de base. En efecto, sea el sistema representado por:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x &= Ax + bu \\ y &= c^T x + du\end{aligned}$$

Sea el cambio de variable  $x = T\bar{x}$ ,  $T$  invertible. Entonces:

$$\begin{aligned}T \frac{d}{dt}\bar{x} &= AT\bar{x} + bu \\ y &= c^T T\bar{x} + du\end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\bar{x} &= T^{-1}AT\bar{x} + T^{-1}bu \\ y &= c^T T\bar{x} + du\end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\bar{x} &= \bar{A}\bar{x} + \bar{b}u \\ y &= \bar{c}^T \bar{x} + du\end{aligned} \tag{10.41}$$

donde  $\bar{A} = T^{-1}AT$ ,  $\bar{b} = T^{-1}b$ ,  $\bar{c}^T = c^T T$ . La matriz sistema se puede escribir de la siguiente manera:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} sI - A & b \\ -c^T & d \end{pmatrix} \implies \bar{\Sigma} = \begin{pmatrix} sI - \bar{A} & \bar{b} \\ -\bar{c}^T & d \end{pmatrix} \tag{10.42}$$

Notese que:

$$\bar{\Sigma} = \begin{pmatrix} sI - \bar{A} & \bar{b} \\ -\bar{c}^T & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} sI - A & b \\ -c^T & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo que:

$$\det \bar{\Sigma} = \det T^{-1} \det \Sigma \det T = \det \Sigma$$

## vi) Forma de Jordan

Dada una matriz  $A$ , existe una matriz de cambio de base  $T$ , tal que:

$$T^{-1}AT = J = D + N \quad (10.43)$$

donde  $D$  es una matriz diagonal (conteniendo los valores propios) y  $N$  es una matriz nilpotente ( $\exists \gamma \in \mathbb{N} \mid N^\gamma = 0$ ) de la forma:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Note que  $DN = ND$ , por lo que:

$$\exp((D + N)t) = \exp(Dt) \exp(Nt) \quad (10.44)$$

donde:

$$\exp(Dt) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

$$\exp(Nt) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} (Nt)^i = \sum_{i=0}^{\gamma-1} \frac{1}{i!} (Nt)^i$$

## vii) Teorema de Cayley-Hamilton

Toda transformación lineal  $A$  satisface su polinomio característico.

$$\Pi(s) = \det(sI - A) = s^n + \pi_1 s^{n-1} + \dots + \pi_{n-1} s + \pi_n \quad (10.45)$$

$$\Pi(A) = A^n + \pi_1 A^{n-1} + \dots + \pi_{n-1} A + \pi_n I = 0 \quad (10.46)$$

Una implicación directa es que la  $n$ -ésima potencia de una transformación lineal  $A$ , es una combinación lineal de sus potencias predecesoras.

$$A^n = -\pi_n I - \pi_{n-1}A - \dots - \pi_1 A^{n-1}$$

A su vez, esto implica:

$$\exp(At) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} A^i t^i = \sum_{i=0}^{n-1} \varphi_i(t) A^i \quad (10.47)$$

donde:

$$\varphi_i(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_{ij} t^j$$

# 11

## Controlabilidad y asignación de polos

Sea un sistema para la Ecuación Diferencial Ordinaria:

$$M \left( \frac{d}{dt} \right) y(t) = N \left( \frac{d}{dt} \right) u(t) \quad (11.1)$$

Sea la siguiente representación de estado de esta Ecuación Diferencial Ordinaria:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x &= Ax + bu \\ y &= c^T x + du \end{aligned}$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$  y  $u, y \in \mathbb{R}$ .



Problema. Se desea encontrar una ley de control  $u = f(x)$ , que nos permita asignar los polos a voluntad.

Sabemos que:

$$\text{Polos. } \{s \in \mathbb{C} \mid M(s) = 0\} = \{s \in \mathbb{C} \mid \det(sI - A)\}$$

Para resolver este problema hay que investigar el concepto estructural de la alcanzabilidad.

### Alcanzabilidad y Controlabilidad

- Una representación de estado se dice controlable, si para cualquier condición inicial,  $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ , existe una trayectoria,  $x(\cdot)$ , solución de la ecuación de estado, tal que en tiempo finito  $t_f \in \mathbb{R}$  se llega al origen ( $x(t_f) = 0$ ).
- Una representación de estado se dice alcanzable, si para cualquier punto  $x \in \mathbb{R}$ , existe una trayectoria,  $x(\cdot)$ , solución de la ecuación de estado, tal que en tiempo finito  $t_f \in \mathbb{R}$  se llega a un punto cualquiera ( $x(t_f) = x_f$ ) desde el origen.

En los sistemas lineales estas dos propiedades están mutuamente implicadas, por lo que se les trata indistinguiblemente. Pero en general:

$$\text{Alcanzabilidad} \implies \text{Controlabilidad} \quad (11.2)$$

La solución temporal de  $\frac{dx}{dt} = Ax + bu$  con  $x(0) = 0$  es:

$$x(t) = \int_0^t \exp(A(t-\tau))bu(\tau)d\tau \quad (11.3)$$

del teorema de Cayley-Hamilton se tiene:

$$\exp(At) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} A^i t^i = \sum_{i=0}^{n-1} \varphi_i(t) A^i \quad (11.4)$$

donde  $\varphi_i(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_{ij} t^j$ ,  $\varphi_{ij} \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $j \in \mathbb{Z}^+$ . Por lo anterior, tenemos:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{i=0}^{n-1} \psi_i(t) A^i b \\ x(t) &= \begin{pmatrix} b & Ab & \dots & A^{n-1}b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_0(t) \\ \psi_1(t) \\ \vdots \\ \psi_{n-1}(t) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (11.5)$$

donde  $\psi_i(t) = \int_0^t \varphi_i(t-\tau)u(\tau)d\tau$ .

Entonces una condición necesaria para que  $x(t_f) = x_f \quad \forall x \in \mathbb{R}$ ,  $\forall t_f \in \mathbb{R}$ ,  $t_f > 0$ , es que la matriz de controlabilidad

$$C_{(A,b)} = \begin{pmatrix} b & Ab & \dots & A^{n-1}b \end{pmatrix} \quad (11.6)$$

sea de rango pleno por filas, de lo contrario existen componentes de  $x(t)$  que siempre serán nulos. En nuestro caso particular  $(y, u \in \mathbb{R}^n)$ :

$$\det C_{(A,b)} \neq 0 \quad (11.7)$$

Si la matriz de controlabilidad  $C_{(A,b)}$  es de rango pleno por filas, entonces el gramiano de controlabilidad es invertible.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Aquí se está abusando de la notación, ya que el gramiano de controlabilidad corresponde al caso en que  $t \rightarrow \infty$

$$W = \int_0^t \exp(A\sigma)bb^t \exp(A^t\sigma)d\sigma \quad t > 0, \sigma = t - \tau \quad (11.8)$$

Entonces, con la siguiente ley de control se tiene:

$$u(t) = b^t \exp(A^t(t_f - t))W_{t_f}^{-1}x_f \quad (11.9)$$

Por lo que si sustituimos  $t_f$  en la solución para  $x(t)$ :

$$\begin{aligned} x(t_f) &= \int_0^{t_f} \exp(A(t - \tau))bu(\tau)d\tau \\ &= \int_0^{t_f} \exp(A(t - \tau))bb^t \exp(A^t(t_f - \tau))W_{t_f}^{-1}x_f d\tau \\ &= \int_{t_f}^0 \exp(A\sigma)bb^t \exp(A^t\sigma)d\sigma W_{t_f}^{-1}x_f \\ &= W_{t_f}W_{t_f}^{-1}x_f = x_f \quad (11.10) \end{aligned}$$

- Por lo que una condición suficiente y necesaria para que la ecuación de estado sea alcanzable (y por lo tanto controlable), es que su matriz de controlabilidad,  $C_{(A,b)}$ , sea de rango pleno por filas.
- Cuando la matriz de controlabilidad es de rango pleno por filas, se dice que el par  $(A, b)$  es controlable.

*Asignación de polos*

Sea la ecuación de estado controlable, es decir  $\frac{dx}{dt} = Ax + bu$  con  $b \neq 0$ ,  $\det(C_{(A,b)}) \neq 0$ ,  $\Pi(s)$  y  $\alpha(s)$  los polinomios característico y mínimo de  $A$  respectivamente.

$$\Pi(s) = \det(sI - A) \quad \text{grado } \Pi(s) = n$$

$\alpha(s)$  es el polinomio de menor grado tal que  $\alpha(A) = 0$

Sea  $\kappa = \text{grado } \alpha(s)$ , donde obviamente  $1 \leq \kappa \leq n$ .

$$\alpha(s) = s^\kappa + (a_\kappa + a_{\kappa-1}s + \cdots + a_1s^{\kappa-1})$$

$$\alpha(A) = A^\kappa + (a_\kappa + a_{\kappa-1}A + \cdots + a_1A^{\kappa-1})$$

Sean  $\alpha_i$  con  $i \in \{0, 1, \dots, \kappa\}$ , los polinomios mónicos auxiliares tales que:

$$\begin{aligned} \alpha_0(s) &= \alpha(s) \\ \alpha_1(s) &= s^{\kappa-1} + (a_{\kappa-1} + a_{\kappa-2}s + \cdots + a_1s^{\kappa-2}) \\ &\vdots \\ \alpha_{\kappa-1}(s) &= s + a_1 \\ \alpha_\kappa(s) &= 1 \end{aligned}$$

en donde, por definición,  $\alpha_1(A) \neq 0$  y  $\alpha_0(A) = 0$ .

Sea  $b \neq 0$ , un vector en  $\mathbb{R}^n$  tal que su polinomio mínimo coincide con  $\alpha(s)$ .

$$\alpha_i(A)b \neq 0 \quad i \in \{1, 2, \dots, \kappa\}$$

$$\alpha_0(A)b = 0$$

$$\vdots$$

$$(A^{\kappa-1} + (a_{\kappa-1} + a_{\kappa-2}A + \cdots + a_1A^{\kappa-2}))b \neq 0$$

$$\alpha_0(A)b = 0$$

$$\vdots$$



$$\begin{pmatrix} b & Ab & \dots & A^{\kappa-1}b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{\kappa-1} \\ a_{\kappa-2} \\ \vdots \\ a_1 \end{pmatrix} \neq 0$$

$$\alpha_0(A)b = 0$$

Suponga que el par  $(A, b)$  es controlable, por lo tanto  $\det C_{(A,b)} \neq 0$ , entonces:

$$\begin{pmatrix} b & Ab & \dots & A^{n-1}b \end{pmatrix} v \neq 0 \quad \forall v \neq 0 \quad \therefore \kappa = n \quad (11.11)$$

Por lo que el polinomio mínimo y el polinomio característico coinciden cuando el par  $(A, b)$  es controlable. Definimos la base:

$$\begin{aligned} e_n &= \alpha_n(A)b = b \\ e_{n-1} &= \alpha_{n-1}(A)b = (A + a_1 I)b = Ae_n + a_1 e_n \\ e_{n-2} &= \alpha_{n-2}(A)b = (A^2 + (a_2 I + a_1 A))b = A(A + a_1 I)b + a_2 b = Ae_{n-1} + a_2 e_n \\ &\vdots = \vdots \\ e_1 &= \alpha_1(A)b = Ae_2 + a_{n-1} e_n \end{aligned} \quad (11.12)$$

Note que sustituyendo  $A$ , tenemos:

$$\alpha(A)b = (A^n + (a_n I + a_{n-1} A + \dots + a_1 A^{n-1}))b = Ae_1 + a_n e_n = 0 \quad (11.13)$$

Por lo que:

$$\begin{aligned} e_n &= b \\ Ae_n &= e_{n-1} - a_1 e_n \\ Ae_{n-1} &= e_{n-2} - a_2 e_n \\ &\vdots = \vdots \\ Ae_2 &= e_1 - a_{n-1} e_n \\ Ae_1 &= -a_n e_n \end{aligned} \quad (11.14)$$

Entonces, bajo la base definida, las transformaciones lineales tie-

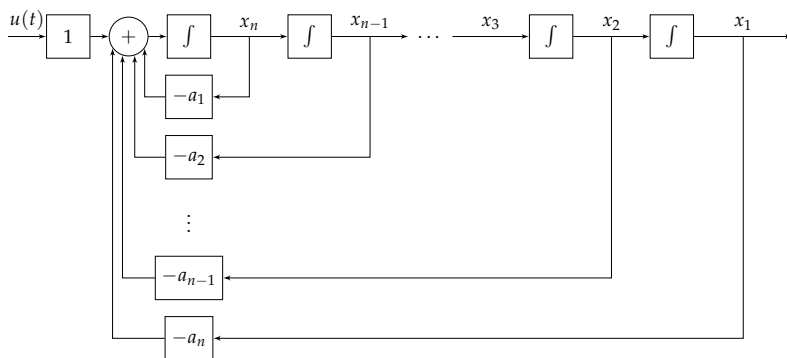
nen la siguiente forma:

$$A_c = [A]_{\{e_1, e_2, \dots, e_n\}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix} \quad (11.15)$$

$$b_c = [b]_{\{e_1, e_2, \dots, e_n\}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (11.16)$$

Por lo tanto:

$$\frac{d}{dt}x_c = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix} x_c + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \quad (11.17)$$



*Observaciones.*

## 1. Polinomio Característico

$$\det(sI - A_c) = s^n + a_1s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n = \Pi(s)$$

## 2. Retroalimentación de Estado

Sea  $u = f_c x_c + v$ , donde  $f_c = (a_n - \bar{a}_n)(a_{n-1} - \bar{a}_{n-1}) \cdots (a_1 - \bar{a}_1)$ .  
Entonces el sistema de lazo cerrado es:

$$\frac{d}{dt}x_c = A_{f_c}x_c + b_cv \quad (11.18)$$

donde  $A_{f_c} = A_c + b_cf_c$ , es decir:

$$A_{f_c} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ -\bar{a}_n & -\bar{a}_{n-1} & -\bar{a}_{n-2} & \cdots & -\bar{a}_3 & -\bar{a}_2 & -\bar{a}_1 \end{pmatrix} \quad (11.19)$$

y su polinomio característico es  $\det(sI - A_{f_c}) = s^n + \bar{a}_1s^{n-1} + \cdots + \bar{a}_{n-1}s + \bar{a}_n$ .

### Propiedades de la matriz de controlabilidad

1. Matriz de controlabilidad del par  $(A_c, b_c)$ .

$$C_{(A_c, b_c)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \dots & * \\ 0 & 1 & * & \dots & * \\ 1 & * & * & \dots & * \end{pmatrix} \quad (11.20)$$

lo que implica:

$$\det C_{(A_c, b_c)} = \pm 1 \quad (11.21)$$

2. Invarianza de la matriz de controlabilidad bajo cambio de base.

Sea el par  $(A, b)$  controlable, sea  $T$  una matriz de cambio de base y sean  $A_1 = T^{-1}AT$  y  $b_1 = T^{-1}b$  las matrices de nuestra nueva base.

$$\begin{aligned} C_{(A_1, b_1)} &= \begin{pmatrix} b_1 & A_1 b_1 & \dots & A_1^{n-1} b_1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} T^{-1}b & T^{-1}AT T^{-1}b & \dots & (T^{-1}AT \dots T^{-1}AT) T^{-1}b \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} T^{-1}b & T^{-1}Ab & \dots & T^{-1}A^{n-1}b \end{pmatrix} = \\ &= T^{-1} \begin{pmatrix} b & Ab & \dots & A^{n-1}b \end{pmatrix} = T^{-1}C_{(A, b)} \end{aligned}$$

por lo que, podemos notar la siguiente correspondencia:

$$C_{(A_1, b_1)} = \frac{C_{(A, b)}}{T}$$

Mas notablemente podemos notar una manera de calcular la transformación lineal a una forma controlable.

$$T = C_{(A, b)} C_{(A_1, b_1)}^{-1} \quad (11.22)$$

3. Invarianza de la matriz de controlabilidad bajo retroalimentación de estado,  $u = f^T x + v$ .

Sea  $A_f = A + bf^T$  la matriz  $A$  del sistema bajo la retroalimentación de estado  $u = f^T x + v$ . Tendremos que la matriz de controlabilidad de este sistema retroalimentado será:

$$\begin{aligned} C_{(A_f, b)} &= \begin{pmatrix} b & A_f b & \dots & A_f^{n-1} b \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} b & (A + bf^T) b & \dots & (A + bf^T)^{n-1} b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

en donde podemos notar que los terminos van obteniendo la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 (A + bf^T)b &= Ab + b(f^Tb) = Ab + k_1b \\
 (A + bf^T)^2b &= A^2b + k_1Ab + b(f^TAb + k_1(f^Tb)) \\
 &= A^2b + k_1Ab + k_2b \\
 &\vdots \\
 (A + bf^T)^{n-1}b &= A^{n-1}b + k_1A^{n-2}b + \dots + k_{n-2}Ab + k_{n-1}b
 \end{aligned}$$

en donde los terminos  $k_i$  estan relacionados unicamente con  $f^T$  y  $b$ , y dejan de fuera a un termino  $b$ , por lo que es inmediato ver que lo podemos reescribir de la siguiente manera:

$$C_{(A_f,b)} = \begin{pmatrix} b & Ab & \dots & A^{n-1}b \end{pmatrix} \mathbb{X}$$

$$C_{(A_f,b)} = C_{(A,b)} \mathbb{X} \quad (11.23)$$

donde  $\mathbb{X}$  toma la forma:

$$\mathbb{X} = \begin{pmatrix} 1 & k_1 & k_2 & \dots & k_{n-1} \\ 0 & 1 & k_1 & \dots & k_{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & k_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

lo cual implica que  $\det \mathbb{X} = \pm 1$ , es decir:

$$\det C_{(A,b)} \neq 0 \implies \det C_{(A_f,b)} \neq 0$$

en particular nosotros tenemos que:

$$\det C_{(A,b)} = \det C_{(A_f,b)} \quad (11.24)$$

Dada la invarianza de la matriz de controlabilidad ( $C_{(A,b)}$ ) bajo cambio de base y retroalimentación de estado, Brunovskii estudió la controlabilidad de los sistemas lineales con todos sus valores propios (polos) en el origen<sup>2</sup>:

<sup>2</sup> El teorema de Brunovskii en realidad esta redactado para sistemas multientradas, y se expresa en matrices diagonales por bloques de tamaño  $k_i \times (k_i + 1)$ , con  $\sum_{i=0}^n k_i = n$ , donde  $k_i$  son los indices de controlabilidad

$$\left( \begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad (11.25)$$

A los índices  $k_i$  de los polinomios mínimos se les denomina índices de controlabilidad. En nuestro caso particular, existe solamente un índice de controlabilidad;  $k_i = n$ .

4. Invarianza de los ceros del sistema bajo retroalimentación de estado.

Sea la matriz sistema del sistema en lazo abierto la siguiente:

$$\Sigma(s) = \begin{pmatrix} sI - A & b \\ -c^T & d \end{pmatrix}$$

entonces, la matriz sistema bajo la retroalimentación será:

$$\Sigma_{lc}(s) = \begin{pmatrix} sI - (A + bf^T) & b \\ -(c^T + df^T) & d \end{pmatrix}$$

notando que:

$$\begin{pmatrix} sI - A & b \\ -c^T & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -f^T & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sI - (A + bf^T) & b \\ -(c^T + df^T) & d \end{pmatrix}$$

por lo que:

$$\det \Sigma(s) = \det \Sigma_{lc}(s) \quad (11.26)$$

Se concluye que la retroalimentación de estado no afecta a los ceros del sistema; solo puede modificar a los polos controlables.

### Formas canónicas

Sea un sistema lineal invariante en el tiempo, una entrada, una salida (SISO), descrito por la siguiente Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO):

$$\left( \frac{d^n}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{d}{dt} + a_n \right) y(t) = \left( b_n + b_{n-1} \frac{d}{dt} + \cdots + b_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} \right) u(t) \quad (11.27)$$

### Forma canónica controlador

$$\frac{d}{dt} x_c = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix} x_c + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \quad (11.28)$$

$$y = \begin{pmatrix} b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & b_2 & b_1 \end{pmatrix} x_c \quad (11.29)$$

Polos.

$$\det(sI - A_c) = s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_{n-1} s + a_n \quad (11.30)$$

Ceros.

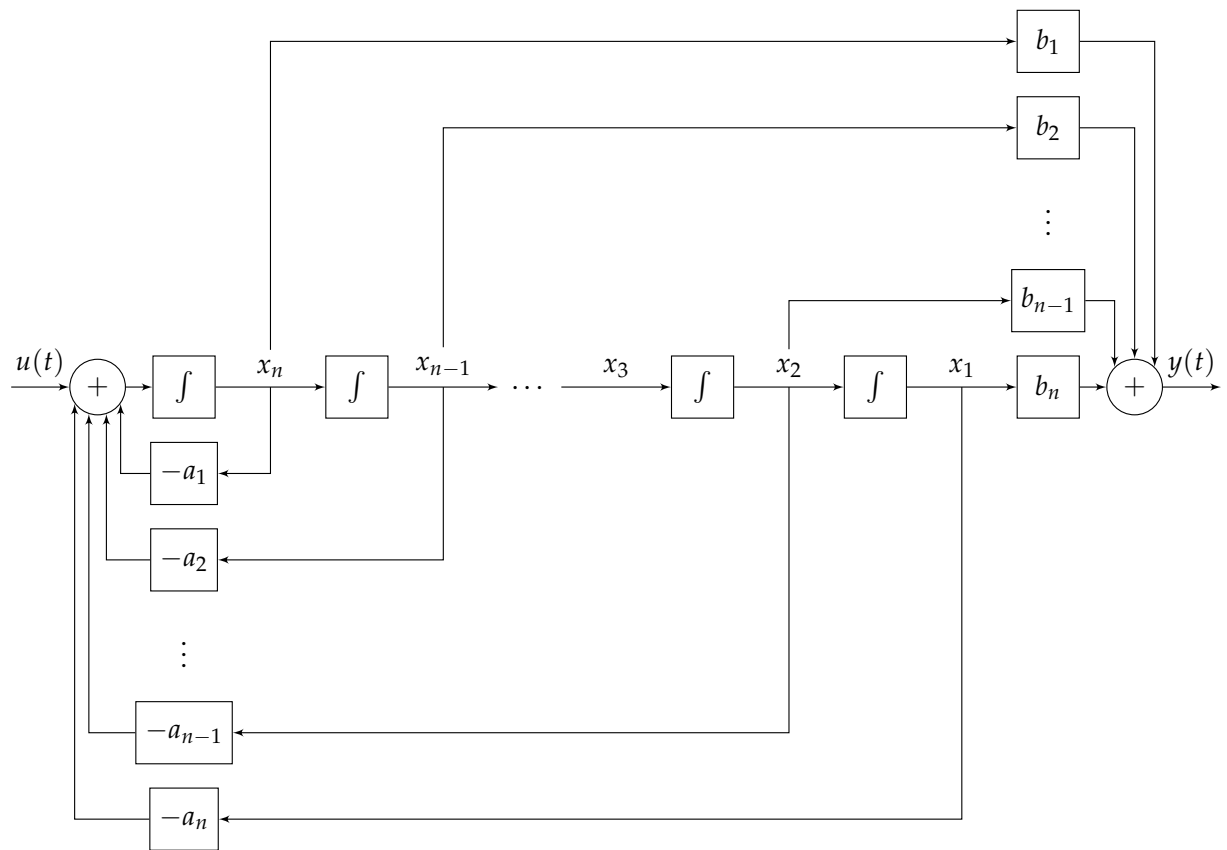
$$\det \Sigma(s) = b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1} s + b_n \quad (11.31)$$

Matriz de Controlabilidad.

$$C_{(A_c, b_c)} = \begin{pmatrix} b_c & A_c b_c & \cdots & A_c^{n-1} b_c \end{pmatrix} \implies \det C_{(A_c, b_c)} = 1 \quad (11.32)$$

### Forma canónica controlabilidad

$$\frac{d}{dt} x_c = \begin{pmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -a_3 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{n-2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ -a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ -a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x_c + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \quad (11.33)$$





$$y = \begin{pmatrix} \beta_n & \beta_{n-1} & \beta_{n-2} & \dots & \beta_2 & \beta_1 \end{pmatrix} x_c \quad (11.34)$$

donde:

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -a_2 & -a_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -a_{n-3} & -a_{n-4} & -a_{n-5} & \dots & 0 & 0 \\ -a_{n-2} & -a_{n-3} & -a_{n-4} & \dots & 1 & 0 \\ -a_{n-1} & -a_{n-2} & -a_{n-3} & \dots & -a_1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_{n-2} \\ b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix} \quad (11.35)$$

*Polos.*

$$\det(sI - A_{co}) = s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_{n-1} s + a_n \quad (11.36)$$

*Ceros.*

$$\det \Sigma(s) = b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n \quad (11.37)$$

*Matriz de Controlabilidad.*

$$C_{(A_{co}, b_{co})} = \begin{pmatrix} b_{co} & A_{co} b_{co} & \dots & A_{co}^{n-1} b_{co} \end{pmatrix} \implies \det C_{(A_{co}, b_{co})} = \pm 1 \quad (11.38)$$



## 12

### Inobservabilidad y observador de estado

Sea la siguiente representación de estado:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x &= Ax + bu \\ y &= c^T x + du\end{aligned}\quad (12.1)$$

para el siguiente sistema:



donde  $x \in \mathbb{R}^n$  es el estado,  $u(t) \in \mathbb{R}^n$  y  $y(t) \in \mathbb{R}^n$  sean la entrada y salida respectivamente; siendo la condición inicial del estado  $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ . La solución está descrita por:

$$x(t) = \exp(At)x_0 + \int_0^t \exp(A(t-\tau))bu(\tau)d\tau$$

*Problema.* Sea la representación de estado 12.1, donde el estado  $x$  no está disponible. Se desea reconstruir el estado  $x$ , para poder aplicar una retroalimentación de estado.

$$u = f^T x + v \quad (12.2)$$

Para resolver este problema, hay que investigar el concepto estructural de la inobservabilidad.

### Observabilidad e inobservabilidad

Una representación de estado se dice observable si dadas las trayectorias de salida,  $y(t)$ , y entrada,  $u(t)$ , en un horizonte de tiempo finito,  $t_1 \in \mathbb{R}$ ,  $t_1 > 0$ , existe una función  $\mathbb{F}(t, u, y)$ , tal que:

$$\mathbb{F}(t_1, u(t), y(t)) = x(0) \quad t \in [0, t_1] \quad (12.3)$$

Una representación de estado se dice inobservable, si no es observable.

$$\begin{aligned} x(t) &= \exp(At)x_0 + \int_0^t \exp(A(t-\tau))bu(\tau)d\tau \\ y(t) &= c^T \exp(At)x_0 + \int_0^t c^T \exp(A(t-\tau))bu(\tau)d\tau + du(t) \end{aligned} \quad (12.4)$$

Sabemos del teorema de Caley-Hamilton que:

$$\exp(At) = \sum_{i=0}^{n-1} \varphi_i(t) A^i \quad (12.5)$$

donde:

$$\varphi_i(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_{ij} t^j, \quad \varphi_{ij} \in \mathbb{R}, \quad i \in \{0, 1, \dots, n-1\}, \quad j \in \mathbb{Z}^+$$

Si juntamos las ecuaciones 12.4 y 12.5 obtendremos:

$$\begin{aligned} y(t_1) &= \sum_{i=0}^{n-1} \varphi_i(t_1) c^T A^i x_0 + \\ &\quad \int_0^{t_1} c^T \exp(A(t-\tau))bu(\tau)d\tau + du(t_1) = \\ &\quad \begin{pmatrix} \varphi_0(t_1) & \varphi_1(t_1) & \dots & \varphi_{n-1}(t_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c^T \\ c^T A \\ \vdots \\ c^T A^{n-1} \end{pmatrix} x_0 + \\ &\quad \int_0^{t_1} c^T \exp(A(t-\tau))bu(\tau)d\tau + du(t_1) \end{aligned}$$

$$\varphi^T(t_1) \mathcal{O}_{(c^T, A)} x(0) = y(t_1) - \int_0^{t_1} c^T \exp(A(t-\tau))bu(\tau)d\tau + du(t_1) \quad (12.6)$$

siendo el lado derecho, la función  $\mathbb{F}$ . Entonces, una condición necesaria para que se pueda inferir cualquier condición inicial del estado

$x(0) = x_0$ , a partir de las trayectorias de salida,  $y(t)$ , y de entrada  $u(t)$ , en el horizonte de tiempo, es que la matriz de observabilidad:

$$\mathcal{O}_{(c^T, A)} = \begin{pmatrix} c^T \\ c^T A \\ \vdots \\ c^T A^{n-1} \end{pmatrix} \quad (12.7)$$

sea de rango pleno por columnas.

En nuestro caso particular, como la entrada y la salida estan en  $\mathbb{R}$ , esta condición es:

$$\det \mathcal{O}_{(c^T, A)} \neq 0$$

En efecto, si  $\mathcal{O}_{(c^T, A)}$ , no es de rango pleno por columna, existe una transformación  $T$ , invertible, tal que:

$$\mathcal{O}_{(c^T, A)} T^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbb{X} & 0 \end{pmatrix}$$

siendo  $\mathbb{X}$  una matriz de rango plano por columnas.

Haciendo el cambio de base,  $\bar{x} = Tx$ , se obtiene de la ecuación 12.6:

$$\begin{aligned} \varphi^T(t_1) \mathcal{O}_{(c^T, A)} T^{-1} \bar{x}(0) &= \bar{\mathbb{F}}(t_1, u, y) \\ \varphi^T(t_1) \begin{pmatrix} \mathbb{X} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_1(0) \\ \bar{x}_2(0) \end{pmatrix} &= \bar{\mathbb{F}}(t_1, u, y) \\ \varphi^T(t_1) \mathbb{X} \bar{x}_1(0) &= \bar{\mathbb{F}}(t_1, u, y) \end{aligned}$$

por lo que no es posible determinar la segunda parte de componentes,  $\bar{x}_2(0)$ , a partir de  $\bar{\mathbb{F}}(t_1, u, y)$ .

Si la matriz de observabilidad es de rango pleno por columnas, entonces:

$$\ker \mathcal{O}_{(c^T, A)} = 0$$

y para nuestro caso particular,  $u, y \in \mathbb{R}$ :

$$\det \mathcal{O}_{(c^T, A)} \neq 0$$

es decir,  $\mathcal{O}_{(c^T, A)}$  es invertible.

De la representación de estado en la ecuación 12.1 se tiene:

$$y = c^T x + du$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= c^T \frac{dx}{dt} + d \frac{du}{dt} \\ &= c^T Ax + c^T bu + d \frac{du}{dt} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2 y}{dt^2} &= c^T A \frac{dx}{dt} + c^T b \frac{du}{dt} + d \frac{d^2 u}{dt^2} \\ &= c^T A^2 x + c^T A b u + c^T b \frac{du}{dt} + d \frac{d^2 u}{dt^2}\end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} = c^T A^{n-1} x + \sum_{i=0}^{n-2} c^T A^i b \frac{d^{n-2-i} u}{dt^{n-2-i}}$$

por lo que tendremos que:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{d}{dt} \\ \vdots \\ \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} c^T \\ c^T A \\ \vdots \\ c^T A^{n-1} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 + d \\ b + d \frac{d}{dt} \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{n-2} c^T A^i b \frac{d^{n-2-i}}{dt^{n-2-i}} + d \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} \end{pmatrix} u$$

o escrito de otra manera:

$$\Delta \left( \frac{d}{dt} \right) y = \mathcal{O}_{(c^T, A)} x + \Gamma \left( \frac{d}{dt} \right) u$$

lo cual implica:

$$x = \mathcal{O}_{(c^T, A)}^{-1} \left[ \Delta \left( \frac{d}{dt} \right) y - \Gamma \left( \frac{d}{dt} \right) u \right] \quad (12.8)$$

Por lo que es una condición necesaria y suficiente, para que la representación de estado sea observable que su matriz de observabilidad,  $\mathcal{O}_{(c^T, A)}$ , sea de rango pleno por columnas.

Cuando la matriz de observabilidad es de rango pleno por columnas, se dice que el par  $(c^T, A)$  es observable.

### Dualidad

La operación matricial "transpuesta", establece una dualidad entre la observabilidad y la controlabilidad. En efecto,

$$\mathcal{O}_{(c^T, A)} = \begin{pmatrix} c^T \\ c^T A \\ \vdots \\ c^T A^{n-1} \end{pmatrix} \quad (12.9)$$

$$\mathcal{O}_{(c^T, A)}^T = \begin{pmatrix} c^T \\ c^T A \\ \vdots \\ c^T A^{n-1} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} c & A^T c & \dots & (A^T)^{n-1} c \end{pmatrix} = C_{(A^T, c)} \quad (12.10)$$

$$C_{(A, b)}^T = \begin{pmatrix} b & Ab & \dots & A^{n-1}b \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} b^T \\ b^T A^T \\ \vdots \\ b^T (A^T)^{n-1} \end{pmatrix} = \mathcal{O}_{(b^T, A^T)} \quad (12.11)$$

note tambien que la función de transferencia es una funcion continua en  $\mathbb{R}^1$ , por lo que:

$$FT = FT^T$$

$$b^T (sI - A^T)^{-1} c + d = c^T (sI - A)^{-1} b + d \quad (12.12)$$

ademas, el polinomio caracteristico es el mismo:

$$\det(sI - A) = \det(sI - A^T) \implies \sigma(A) = \sigma(A^T) \quad (12.13)$$

Por lo que obtenemos la siguiente dualidad:

$$A \leftrightarrow A^T$$

$$b \leftrightarrow c$$

$$c^T \leftrightarrow b^T$$

$$d \leftrightarrow b$$

$$f^T \leftrightarrow k^T$$

### *Propiedades de la matriz de observabilidad*

Dada la dualidad entre observabilidad y controlabilidad, todos los resultados de controlabilidad del par  $(A, b)$  son extrapolables a la observabilidad del par  $(c^T, A)$ .

1. Asignación de los valores propios (polos), mediante la inyección de salida.
  - a) Si  $\det C_{(A,b)} \neq 0$ , entonces dado un conjunto simétrico con respecto al eje real de  $n$  números complejos,  $\Lambda$ , existe un vector  $f \in \mathbb{R}^n$ , tal que:

$$\sigma(A + bf^T) = \Lambda$$

- b) Si  $\det \mathcal{O}_{(c^T, A)} \neq 0$ , entonces dado un conjunto simétrico con respecto al eje real de  $n$  números complejos,  $\Lambda$ , existe un vector  $k \in \mathbb{R}^n$ , tal que:

$$\sigma(A + kc^T) = \Lambda$$

$$\sigma(A^T + ck^T) = \Lambda$$

2. Invarianza de la matriz de observabilidad bajo cambio de base  
Sea el siguiente cambio de base:

$$A_1 = T^{-1}AT \quad (12.14)$$

$$c_1^T = c^T T \quad (12.15)$$

dado un cambio de base  $T$  invertible; entonces tendremos lo siguiente:

$$\mathcal{O}_{(c_1^T, A_1)} = \mathcal{O}_{(c^T, A)} T^{-1} \quad (12.16)$$

de donde podemos notar que:

$$T = \mathcal{O}_{(c_1^T, A_1)}^{-1} \mathcal{O}_{(c^T, A)} \quad (12.17)$$

siempre que el par  $(c^T, A)$  sea observable.

3. Invarianza de la matriz de observabilidad bajo inyección de salida
4. Invarianza de los ceros del sistema bajo inyección de salida



*Formas canónicas*

Falta escribir apunte

*Forma canónica observador*

Falta escribir apunte

*Forma canónica observabilidad*

Falta escribir apunte

## *Observador de estado*

Falta escribir apunte

13

## *Principio de Separación*

---

Falta escribir apunte



# 14

## Estabilidad de Lyapunov

Dada la siguiente representación de estado:

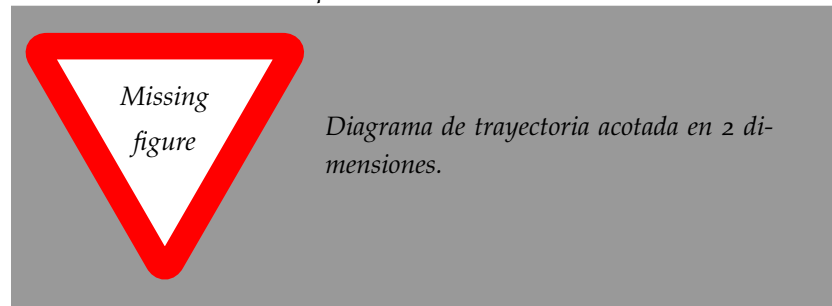
$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + bu(t) \quad (14.1)$$

con  $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ .

**Definición 14.1.** El sistema representado por la ecuación 14.1 es estable si para cada  $\epsilon > 0$ , existe un  $\delta = \delta(\epsilon)$  tal que:

$$\|x_0\| < \delta(\epsilon) \implies \|x(t)\| < \epsilon \quad \forall t \geq 0$$

Si no es estable, decimos que es inestable.



**Teorema 14.1.** Una matriz  $A$  es Hurwitz estable, es decir  $\Re\{\lambda(A)\} < 0$ , si y solo si para cualquier matriz simétrica definida positiva dada,  $Q$ , existe una matriz simétrica definida positiva,  $P$ , que satisface:

$$A^T P + PA = -Q \quad (14.2)$$

**Nota 14.1.** Una matriz  $H \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , se dice Hermitiana si su transpuesta conjugada es ella misma,  $H^* = H$ . Si  $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , se dice simétrica si su transpuesta es ella misma,  $H^T = H$ .

De estas matrices, podemos notar ciertas propiedades:

1. Todos sus valores propios son reales.

Resumen de matrices Hermitianas de Introduction to Matrix Computations - G.W. Stewart Cap. 4 y 6

2. Cuando los valores propios de  $H$  son todos positivos o negativos, se dice que  $H$  es definida positiva o negativa, y se escribe  $H > 0$  o  $H < 0$  respectivamente.
3. Cuando los valores propios de  $H$  son todos no negativos o no positivos, se dice que  $H$  es semidefinida positiva o semidefinida negativa y se escribe  $H \geq 0$  o  $H \leq 0$  respectivamente.
4. Desigualdad de Raleigh

Dada  $H$  Hermitiana:

$$\lambda_{\min}(H)x^*x \leq x^*Hx \leq \lambda_{\max}(H)x^*x \quad \forall x \in \mathbb{C}^n$$

Dada  $H$  simétrica:

$$\lambda_{\min}(H)x^T x \leq x^T H x \leq \lambda_{\max}(H)x^T x \quad \forall x \in \mathbb{C}^n$$

5.  $H$  es semidefinida positiva, si y solo si, puede escribirse de la forma factorizada:

$$H = G^* G$$

para alguna matriz  $G$ , conocida como raíz cuadrada de  $H$ , también denotada por  $H_{1/2}$ ,  $\sqrt{H}$ ,  $H^{1/2}$ , por lo que la factorización queda como sigue:

$$H = H_{1/2}^* H_{1/2}$$

Cuando  $H$  es definida positiva,  $H_{1/2}$  es una matriz de rango pleno.

*Demostración.* Sea la función de Lyapunov:

$$V(x(t)) = x^T P x(t) \quad \forall t \geq 0 \quad (14.3)$$

con  $P = P^T > 0$ .

Derivando a la ecuación 14.3 con respecto del tiempo, a lo largo de las trayectorias solución de la ecuación 14.1, con  $u = 0$ , se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{dx(t)}{dt}^T P x(t) + x^T(t) P \frac{dx(t)}{dt} \\ &= x^T(t) A^T P x(t) + x^T(t) P A x(t) \\ &= x^T(t) (A^T P + P A) x(t) \\ &= -x^T(t) Q x(t) \end{aligned} \quad (14.4)$$

Por otro lado, de la ecuación 14.3 se tiene:

Resumen de estabilidad de  
Lyapunov de Linear Systems  
- Thomas Kailath Cap. 2.6

$$\lambda_{\min}(P)x^T(t)x(t) \leq V(x(t)) \leq \lambda_{\max}(P)x^T(t)x(t)$$

por lo que:

$$0 \leq \frac{V(x(t))}{\lambda_{\min}(P)} \leq x^T(t)x(t) \leq \frac{V(x(t))}{\lambda_{\max}(P)} \quad (14.5)$$

Entonces, de las ecuaciones 14.4 y 14.5 se obtiene:

$$\frac{dV(x(t))}{dt} \leq -\frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)}V(x(t)) \quad (14.6)$$

De manera análoga

$$\lambda_{\min}(Q)x^T(t)x(t) \leq x^T(t)Qx(t) \leq \lambda_{\max}(Q)x^T(t)x(t)$$

Si integramos la ecuación 14.6 tendremos:

$$\int_0^t \frac{dV(x(\tau))}{d\tau} d\tau \leq -\frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)} \int_0^t V(x(\tau)) d\tau$$

para lo cual necesitamos el lema de Bellman - Grönwall.

Feedback Systems - Input/Output Properties - Desoer, Vidyasagar Ap. E

**Nota 14.2.**

$$u(t) \leq c + \int_0^t K(\tau)u(\tau)d\tau \implies u(t) \leq c \exp\left(\int_0^t K(\tau)d\tau\right) \quad \forall t \geq 0$$

por lo tanto, podemos ver que:

$$V(x(t)) \leq V(x(0)) - \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)} \int_0^t V(x(\tau))d\tau \quad (14.7)$$

y aplicando el lema de Bellman - Grönwall aquí:

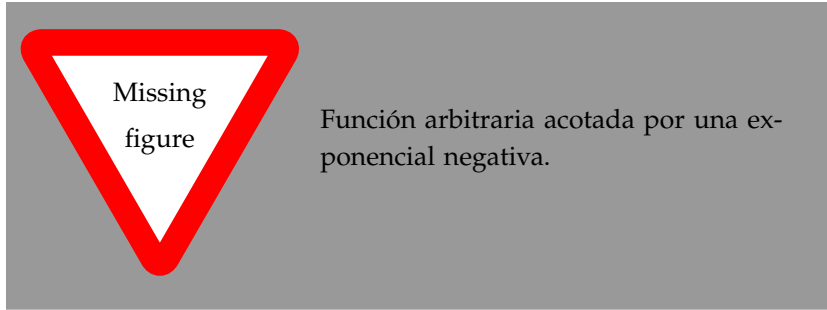
$$V(x(t)) \leq V(x(0)) \exp\left(-\frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)}t\right) \quad \forall t \geq 0 \quad (14.8)$$

de la ecuación 14.5 y 14.8, obtenemos finalmente:

$$0 \leq x^T(t)x(t) \leq \frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}x^T(0)x(0) \exp\left(-\frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)}t\right)$$

es decir:

$$\|x(t)\|^2 \leq \frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}\|x(0)\|^2 \exp\left(-\frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)}t\right)$$



Dado que  $A$  es Hurwitz estable tenemos que  $\Re \lambda(A) < 0$ , sea la siguiente matriz definida positiva:

$$P = \int_0^\infty \exp(A^T t) Q \exp(At) dt$$

con  $Q = Q^T > 0$ . Entonces tendremos:

$$\begin{aligned} A^T P + P A &= \int_0^\infty \left( A^T \exp(A^T t) Q \exp(At) + \exp(A^T t) Q \exp(At) A \right) dt \\ &= \int_0^\infty \frac{d}{dt} \left( \exp(A^T t) Q \exp(At) \right) dt \\ &= \exp(A^T t) Q \exp(At) \Big|_0^\infty \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \exp(A^T t) Q \exp(At) - \exp(A^T \cdot 0) Q \exp(A \cdot 0) \\ &= 0 - Q = -Q \end{aligned}$$

□

**Lema 14.1.** La ecuación matricial  $AX = XB$ , tiene unicamente la solución trivial,  $X = 0$ , si y solo si,  $A$  y  $B$  no tienen valores propios en común, es decir:

$$\sigma(A) \cap \sigma(B) \neq \emptyset$$

Demostración.

□

**Corolario 14.1.** En el teorema 14.1 se puede elegir a  $Q$  como una matriz semidefinida positiva,  $Q \geq 0$ , bajo la condición inicial de que  $x^T(t) Q x(t)$  no sea idénticamente nula a lo largo de cualquier trayectoria no nula, solución de:

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t)$$

El requerimiento de este corolario se reduce a la condición de que el par  $(Q_{1/2}, A)$  sea observable:

$$Q \geq 0 \exists Q_{1/2} \text{ tal que } Q = Q_{1/2}^T Q_{1/2}$$

Buscar demostración en The Theory of Matrices - F.R. Gantmacher, Vol 1, Cap. 8



**Corolario 14.2.** Si  $A$  es una matriz Hurwitz estable entonces la ecuación de Lyapunov,  $A^T P + PA = -Q$ , tiene una única solución para cada  $Q$ .

*Demostración.* Suponga que existen dos soluciones,  $P_1$  y  $P_2$ , de la ecuación de Lyapunov, es decir:

$$\begin{aligned} A^T P_1 + P_1 A &= -Q \\ A^T P_2 + P_2 A &= -Q \end{aligned}$$

lo cual implica:

$$\begin{aligned} A^T(P_2 - P_1) + (P_2 - P_1)A &= 0 \\ A^T(P_2 - P_1) - (P_2 - P_1)(-A) &= 0 \end{aligned}$$

pero sabemos que el espectro de una matriz, no cambia debido a la transposición,  $\sigma(A^T) = \sigma(A)$ , y por otro lado tenemos que la matriz  $A$  es Hurwitz estable, es decir  $\Re\{\lambda(A)\} < 0$ , lo cual implica que:

$$\Re\{\lambda(-A)\} > 0$$

por lo que podemos concluir que:

$$\sigma(A^T) \cap \sigma(-A) = \emptyset$$

por lo tanto, solo hay una solución y es la trivial. □



## Introducción a la optimización de funcionales

El problema que tratamos de resolver es el siguiente; determinar  $v(t)$ , tal que la siguiente ecuación:

$$J(v(t), v'(t)) = \int_{t_1}^{t_2} f_1(v(t), v'(t), t) dt \quad (15.1)$$

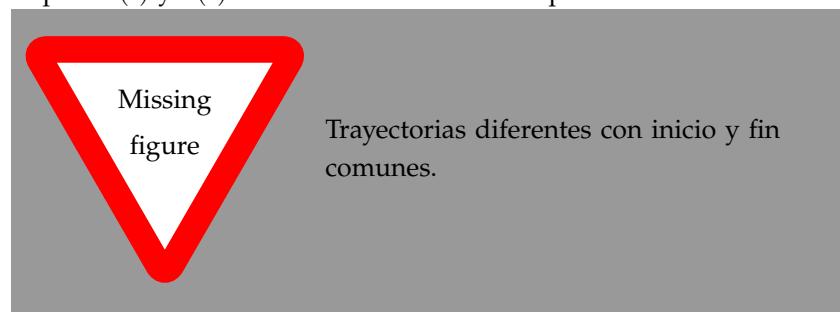
sea un extremo.

Primero definamos una función de vecindad  $v(t) \rightarrow v(\alpha, t)$  tal que si  $\alpha = 0 \implies v^* = v(0, t) = v(t)$ , es decir,  $v^*$  es la función que extremiza a  $J(v(t), v'(t))$ .

Proponemos una solución en forma lineal:

$$v(\alpha, t) = v(0, t) + \alpha \eta(t) \quad (15.2)$$

pero  $v(t)$  y  $u(t)$  deben ser idénticos en los puntos extremos.



es decir  $\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$ , pero además  $\eta(t) \in e^1$ .<sup>1</sup>

Con esta parametrización en  $\alpha$ :

$$v(t) \rightarrow v(\alpha, t) = v(0, t) + \alpha \eta(t)$$

tenemos que la ecuación 15.1 nos queda:

$$J(\alpha) = \int_{t_1}^{t_2} f_1(v(\alpha, t), v'(\alpha, t), t) dt$$

donde tenemos que  $\alpha = 0$  implica que  $J$  es un extremo y  $\alpha \neq 0$  implica que  $J$  no es un extremo.

<sup>1</sup> Si  $f \in e^1$ ,  $f$  es una función diferenciable al menos una vez.

Debido a esto, podemos concluir que  $J$  también está parametrizada de esta manera:

$$J \rightarrow J(\alpha)$$

La condición necesaria para que  $J$  tenga un valor estacionario (extremo), es que  $J$  sea independiente de  $\alpha$  en primer orden (que este relacionado linealmente), a lo largo de la trayectoria que otorga el extremo ( $\alpha = 0$ ), es decir:

$$\left. \frac{\partial J}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = 0 \quad \forall \eta \in e^1 \quad (15.3)$$

**Nota 15.1.** Observe que solo es una condición necesaria, es decir:

$$J \text{ es extremo} \implies \left. \frac{\partial J}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = 0$$

### Ecuación de Euler

La condición necesaria es:

$$\left. \frac{\partial J}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = 0$$

entonces hay que seguir los siguientes pasos:

1. Calcular  $\frac{\partial J}{\partial \alpha}$ .
2. Hacer  $\alpha = 0$ .

Empecemos calculando la derivada parcial de  $J$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \alpha} &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{t_1}^{t_2} f_1(v(\alpha, t), v'(\alpha, t), t) dt = \\ &\int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial f_1(\dots)}{\partial v(\alpha, t)} \frac{\partial v(\alpha, t)}{\partial \alpha} + \frac{\partial f_1(\dots)}{\partial v'(\alpha, t)} \frac{\partial v'(\alpha, t)}{\partial \alpha} \right) dt \end{aligned}$$

en este punto aparecen términos reducibles:

$$\frac{\partial v(\alpha, t)}{\partial \alpha} = \frac{\partial v(t)}{\partial \alpha} + \frac{\partial (\alpha \eta(t))}{\partial \alpha} = \eta(t)$$

$$\frac{dv'(\alpha, t)}{d\alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{dv(\alpha, t)}{dt} \right) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( v'(t) + \alpha \frac{d\eta(t)}{dt} \right) = \frac{d\eta(t)}{dt}$$

lo que nos deja:

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial f_1(\dots)}{\partial v(\alpha, t)} \eta(t) + \frac{\partial f_1(\dots)}{\partial v'(\alpha, t)} \frac{d\eta(t)}{dt} \right) dt$$

la segunda parte de esta integral es integrable por partes, si hacemos  $u = \frac{\partial f_1(\dots)}{\partial v'(\alpha, t)}$ ,  $dv = \frac{d\eta(t)}{dt} dt$ ,  $du = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f_1(\dots)}{\partial v'(\alpha, t)} \right)$  y  $v = \eta(t)$ :

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial f_1(\dots)}{\partial v(\alpha, t)} \eta(t) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f_1(\dots)}{\partial v'(\alpha, t)} \right) \eta(t) \right) dt + \left. \frac{\partial f_1(\dots)}{\partial v'(\alpha, t)} \eta(t) \right|_{t_1}^{t_2}$$

pero recordemos que  $\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$ , por lo que el ultimo termino se elimina y nos queda:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \alpha} &= \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial f_1(\dots)}{\partial v(\alpha, t)} \eta(t) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f_1(\dots)}{\partial v'(\alpha, t)} \right) \eta(t) \right) dt = \\ &\int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial f_1(v(\alpha, t), v'(\alpha, t), t)}{\partial v(\alpha, t)} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f_1(v(\alpha, t), v'(\alpha, t), t)}{\partial v'(\alpha, t)} \right) \right) \eta(t) dt \end{aligned} \quad (15.4)$$

Si ahora, en la ecuación 15.4 sustituimos  $\alpha = 0$ , obtendremos:

$$\left. \frac{\partial J}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial f_1(v(t), v'(t), t)}{\partial v(t)} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f_1(v(t), v'(t), t)}{\partial v'(t)} \right) \right) \eta(t) dt$$

Por lo que la condición necesaria es:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial f_1(v(t), v'(t), t)}{\partial v(t)} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f_1(v(t), v'(t), t)}{\partial v'(t)} \right) \right) \eta(t) dt = 0 \quad \forall \eta(t) \in e^1$$

lo cual implica que:

$$\frac{\partial f_1(v(t), v'(t), t)}{\partial v(t)} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f_1(v(t), v'(t), t)}{\partial v'(t)} \right) = 0 \quad (15.5)$$

esta es la que conocemos como ecuación de Euler.

## Multiplicadores de Lagrange

Deseamos resolver el siguiente problema:

Minimizar la función  $f(v) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  sujeta a la restricción  $\mathcal{G}(v) = 0$ , donde  $\mathcal{G}(v) = \begin{pmatrix} \mathcal{G}_1(v) & \mathcal{G}_2(v) & \dots & \mathcal{G}_m(v) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$  y  $\mathcal{G}_i(v) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  con  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ .

Para resolver este problema haremos uso de los multiplicadores de Lagrange, los cuales estan basados en el concepto de la derivada direccional<sup>2</sup>

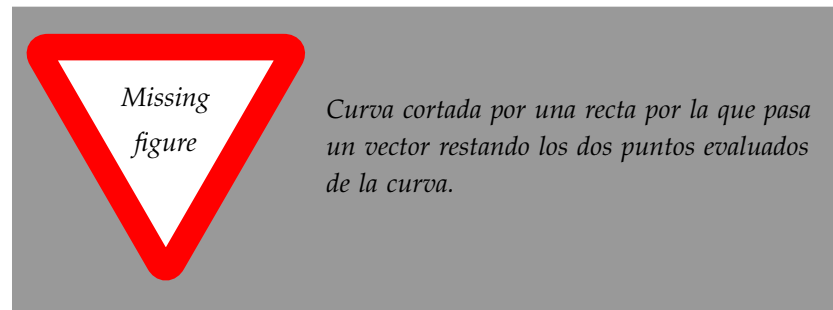
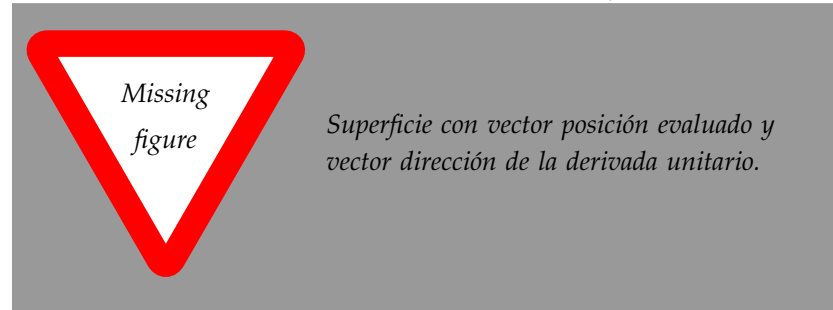
<sup>2</sup> Esta derivada es formalmente conocida como la derivada de Fréchet, la cual se relaciona linealmente con la diferencial de Fréchet.

## Derivada direccional y vector gradiente

**Definición 15.1.** La derivada direccional de  $f_1$  en  $v_0 \in \mathbb{R}^n$  en la dirección del vector unitario  $\eta \in \mathbb{R}^n$  es:

$$D_\eta f_1(v_0) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{f_1(v_0 + \alpha \eta) - f_1(v_0)}{\alpha} \quad (15.6)$$

donde  $\alpha$  es un escalar, es decir,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , en el caso de que este limite exista.



Esta derivada nos da la razon de cambio de  $f_1$  en el punto  $v_0$  y en la dirección  $\eta$ , siempre y cuando  $\alpha \rightarrow 0$ .

**Teorema 15.1.** Si  $f_1$  es una función diferenciable de  $v \in \mathbb{R}^n$ , entonces  $f_1$  tiene una derivada direccional en la dirección de cualquier vector unitario  $\eta \in \mathbb{R}^n$  y por lo tanto:

$$D_\eta f_1(v) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_1(v_i)}{\partial v_i} \eta_i \quad (15.7)$$

$$\text{donde } v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \text{ con } \|\eta\| = 1.$$

**Definición 15.2.** Dada una base ortonormal de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ , entonces el gradiente de  $t_1$  es la función vectorial,  $\nabla f_1$ , definida por:

$$\nabla_v f_1(v) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_1}{\partial v_i} e_i \quad (15.8)$$

$$\text{donde } v_i = \sum_{i=1}^n v_i e_i.$$

Con esta notación gradiente, la ecuación 15.19 de la derivada direccional se escribe:

$$D_\eta f_1(v) = (\nabla f_1(v), \eta) \quad (15.9)$$

donde  $(R, S) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es el producto punto, es decir, la proyección escalar del vector  $R$  sobre la dirección del vector  $S$ .

**Teorema 15.2.** Suponga que  $f_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es una funcional diferenciable. El máximo valor de la derivada  $D_\eta f_1(v)$  es  $\|D_\eta f_1(v)\|$  y se obtiene cuando la dirección de  $\eta$  coincide con el vector gradiente  $\nabla_v f_1(v)$ .

Sea la superficie,  $\mathcal{S}$ , definida por la funcional  $\mathcal{G} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de la siguiente manera:

$$\mathcal{S} = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \mathcal{G}(v) = k\} \quad (15.10)$$

Sea  $\mathcal{C}$  una curva contenida en  $\mathcal{S}$  y que pase por el punto  $v_0 \in \mathbb{R}$ , la cual está definida por la función vectorial  $R : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , esto es:

$$\mathcal{C} = \{v \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R} \mid v = R(t)\} \quad (15.11)$$

Sea  $t_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $R(t_0) = v_0$ .

Como  $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}$ , entonces cualquier punto,  $v \in \mathcal{C}$ , satisface:

$$\mathcal{G}(v) = k$$

lo cual implica (asumiendo que  $v$  es una función diferenciable y que también  $\mathcal{G}$  lo es):

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial v_i} \frac{dv_i}{dt} = 0$$

es decir:

$$(\nabla_i \mathcal{G}, R'(t)) = 0$$



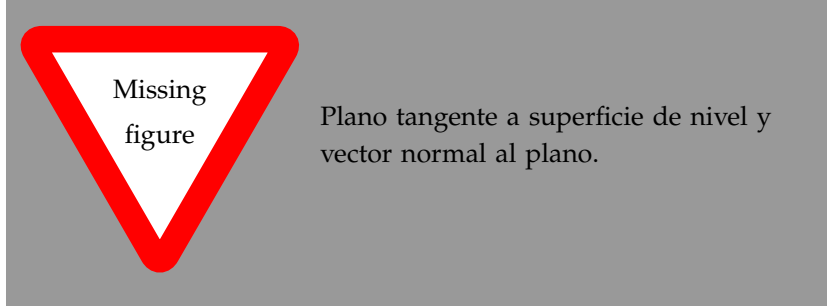
donde  $R'(t) = \frac{dR(t)}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dv_1(t)}{dt} \\ \frac{dv_2(t)}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dv_n(t)}{dt} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$

En particular, cuando  $t = t_0$ , se tiene:

$$R(t_0) = v_0$$

$$\left( \nabla_v \mathcal{G}(v_0), \frac{dR(t_0)}{dt} \right) = 0$$

Esta ecuación indica que el vector gradiente en  $v_0$ ,  $\nabla_v \mathcal{G}(v_0)$ , es perpendicular al vector tangente  $\frac{dR(t_0)}{dt}$  a cualquier  $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}$  que pase por  $v_0$ .



Si  $\nabla_v \mathcal{G}(v_0) \neq 0$ , entonces se define el plano tangente a la superficie de nivel  $\mathcal{S}$ , en el punto  $\mathcal{G}(v_0)$  y tiene un vector normal  $\nabla_v \mathcal{G}(v_0)$ , esto es, el plano tangente  $\tau$  que esta definido por:

$$\tau = \{v \in \mathbb{R}^n \mid (\nabla_v \mathcal{G}(v_0), v - v_0) = 0\} \quad (15.12)$$

### Multiplicadores de Lagrange

Procederemos ahora a resolver el problema original. Suponga que la funcional  $f_1$  tiene un extremo en el punto  $v_0$  en la superficie:

$$\mathcal{S}_m \{v \in \mathbb{R}^n, i \in \{1, 2, \dots, m\} \mid \mathcal{G}(v) = 0\} \quad (15.13)$$

donde  $\mathcal{G}(v) = \begin{pmatrix} \mathcal{G}_1(v) \\ \mathcal{G}_2(v) \\ \vdots \\ \mathcal{G}_m(v) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$  y  $\mathcal{G}_i(v) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  con  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ .

Sea una curva:

$$\mathcal{C} = \{v \in \mathbb{R}^n \mid v = R(t)\} \subset \mathcal{S}_m \quad (15.14)$$

tal que  $v_0 \in \mathcal{C}$ .

Sea  $t_0 \in \mathbb{R}$  el parámetro correspondiente a  $v_0$ , es decir  $v_0 = R(t_0)$ .

La funcional compuesta:

$$\mathcal{H} = f_1(R(t)) \quad (15.15)$$

representa a los valores de  $f$  que también está en  $\mathcal{C}$ .

Como  $f_1$  tiene un extremo en  $v_0$ , entonces  $\mathcal{H}$  tiene un extremo en  $t_0$ , por lo que:

$$\left. \frac{d\mathcal{H}(t)}{dt} \right|_{t=t_0} = 0 \quad (15.16)$$

Pero si  $f$  es diferenciable, se deduce por la regla de la cadena:

$$0 = \left. \frac{d}{dt} \mathcal{H} \right|_{t=t_0} = \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial f_1}{\partial v_i} \frac{v_i(t)}{dt} \right|_{t=t_0, v=v_0} = \left( \nabla_v f_1(v_0), \frac{d}{dt} R(t_0) \right) \quad (15.17)$$

esto nos indica que el vector gradiente  $\nabla_v f_1(v_0)$ , es ortogonal al vector tangente,  $\frac{dR(t_0)}{dt}$ , para cada una de estas curvas.

Pero sabemos que los vectores gradientes de las coordenadas,  $(\mathcal{G}_i, \mathcal{G}_i(v_0))$ , son también ortogonales a  $\frac{dR(t_0)}{dt}$ , por lo que los vectores gradiente  $\nabla_v f_1(v_0)$  y  $\nabla_v \mathcal{G}_i(v_0)$  con  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  necesariamente son paralelos.

Entonces, si  $\nabla_v \mathcal{G}_i(v_0)$  con  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ , existen  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ , tales que:

$$\nabla_v f_1(v_0) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla_v \mathcal{G}_i(v_0) \quad (15.18)$$

y al vector  $\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$  se le conoce como multiplicadores de

Lagrange.

Entonces para resolver el problema original se procede como sigue:

1. Se construye la siguiente funcional aumentada:

$$f_a(v, \lambda) = f_1(v) - (\lambda, \mathcal{G}(v)) \quad (15.19)$$

2. Se encuentran los puntos estacionarios de la ecuación 15.19:

$$\begin{aligned} \nabla_v f_a(v, \lambda) &= 0 \\ \nabla_\lambda f_a(v, \lambda) &= 0 \end{aligned} \quad (15.20)$$

El par  $(v_0, \lambda_0)$  que satisface la ecuación 15.20 es la solución del problema original.

Observe que con este método, se está transformando un problema de optimización con restricciones, en uno sin restricciones.



## Introducción al control óptimo

Sea el sistema descrito por la representación de estado:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + bu \quad (16.1)$$

donde  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ , con condiciones iniciales  $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ ; se desea minimizar el índice de desempeño:

$$J(x, u) = \frac{1}{2} \int_0^\infty (x^T Q x + \rho u^2) dt \quad (16.2)$$

donde  $\rho > 0$  y  $Q = Q^T \geq 0$ , a lo largo de las trayectorias solución de la ecuación 16.1. Es decir se desea minimizar la ecuación 16.2 con las restricciones de la ecuación 16.1.

Este problema de minimización con restricciones se va a resolver usando los multiplicadores de Lagrange.

El índice de desempeño aumentado es:

$$Ja(x, u, \lambda) = \int_0^\infty \left( \frac{1}{2} (x^T Q x + \rho u^2) + \lambda^T \left( Ax + bu - \frac{dx}{dt} \right) \right) dt$$

Definiendo los siguientes funcionales:

*Lagrangiano*

$$\mathcal{L}(x, u, \lambda, t) = \frac{1}{2} (x^T Q x + \rho u^2) \quad (16.3)$$

*Hamiltoniano*

$$\mathcal{H}(x, u, \lambda, t) = \mathcal{L}(x, u, \lambda, t) + \lambda^T (Ax + bu) \quad (16.4)$$

se obtiene:

$$Ja(x, u, \lambda) = \int_0^\infty (\mathcal{H}(x, u, \lambda, t) - \lambda^T \dot{x}) dt \quad (16.5)$$

si tenemos que  $v = \begin{pmatrix} x \\ u \\ \lambda \end{pmatrix}$ , podemos ver al índice de desempeño

aumentado como una función:

$$Ja(x, u, \lambda) = \int_0^\infty f(v, \dot{v}, t) dt$$

Sabemos que la ecuación de Euler es:

$$\frac{\partial f(v, \dot{v}, t)}{\partial v} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f(v, \dot{v}, t)}{\partial \dot{v}} \right) = 0 \quad (16.6)$$

pero sabemos que  $v$  es un vector con 3 funciones, por lo que al derivar con respecto a cada una tendremos:

1. Con respecto a  $x$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right) &= 0 \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} - \frac{d}{dt} (-\lambda) &= 0 \\ Qx + A^T \lambda + \frac{d\lambda}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

lo cual implica:

$$-\frac{d\lambda}{dt} = Qx + A^T \lambda \quad (16.7)$$

2. Con respecto a  $u$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{u}} \right) &= 0 \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} - \frac{d}{dt} (0) &= 0 \\ \rho u + \lambda^T b &= 0 \end{aligned}$$

lo cual implica:

$$u = -\rho^{-1} b^T \lambda \quad (16.8)$$

3. Con respecto a  $\lambda$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \lambda} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{\lambda}} \right) &= 0 \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda} - \frac{dx}{dt} - \frac{d}{dt} (0) &= 0 \\ Ax + bu - \frac{dx}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

lo cual implica:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + bu \quad (16.9)$$

De las ecuaciones 16.7, 16.8 y 16.9 podemos obtener el siguiente resultado:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -b\rho^{-1}b^T \\ -Q & -A^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} \quad (16.10)$$

de donde  $M = \begin{pmatrix} A & -b\rho^{-1}b^T \\ -Q & -A^T \end{pmatrix}$  es la matriz de Hamilton, y las condiciones de frontera del sistema son  $x(0) = x_0$  y  $\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) = 0$ .

Si bien hemos usado a  $\lambda$ , aun no hemos mencionado que esta variable representa el coestado del sistema y si bien las condiciones de frontera del sistema son correctas, cabe mencionar que lo que realmente queremos es que  $x(0) = x_0$  y  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ , por lo que hace falta relacionar al estado del sistema,  $x(t)$ , con el coestado,  $\lambda(t)$ .

En base a la ecuación 16.8 se propone que la solución sea una realimentación de estado, para esto se propone que el estado  $x$  y el coestado  $\lambda$  esten relacionados por una matriz  $P$ , esto es:

$$\lambda = Px \quad (16.11)$$

Por lo que de las ecuaciones 16.10 y 16.11, podemos obtener que:

$$\begin{pmatrix} I \\ P \end{pmatrix} \dot{x} = \begin{pmatrix} A & -b\rho^{-1}b^T \\ -Q & -A^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ P \end{pmatrix} x$$

si premultiplicamos esta expresión con  $\begin{pmatrix} P & -I \end{pmatrix}$ , obtendremos:

$$0 = \begin{pmatrix} PA + Q & -Pb\rho^{-1}b^T + A^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ P \end{pmatrix} x$$

$$0 = \begin{pmatrix} A^T P + PA - Pb\rho^{-1}b^T P + Q \end{pmatrix} x \quad \forall x \text{ solución del sistema 16.1}$$

Por lo que hemos llegado a la ecuación algebraica de Riccati:

$$A^T P + PA - Pb\rho^{-1}b^T P + Q = 0 \quad (16.12)$$

siendo la ley de control óptimo (de las ecuaciones 16.8 y 16.11):

$$u = -f_*^T \quad (16.13)$$

donde  $f_*^T = \rho^{-1}b^T P$ .

Note que de las ecuaciones 16.12 y 16.13, se obtiene la ecuación de Lyapunov del sistema en lazo cerrado:

$$\begin{aligned}
A^T P + PA - P b f_*^T &= -Q \\
A^T P + P (A - b f_*^T) &= -Q \\
(A - b f_*^T)^T P + P (A - b f_*^T) &= -(Q + f_* b^T P) \\
(A - b f_*^T)^T P + P (A - b f_*^T) &= -(Q + f_* \rho f_*^T) \quad (16.14)
\end{aligned}$$

En donde la expresión del lado derecho debe ser  $(Q + f_* b^T P) = (Q + f_* \rho f_*^T)^T \geq 0$ , por lo que también pediremos que  $P$  sea simétrica y semidefinida positiva ( $P = P^T \geq 0$ ).

Como nota final, tan solo hacemos notar que el sistema realimentado queda:

$$\frac{dx}{dt} = (A - b f_*^T) x \quad (16.15)$$

Y que una manera gráfica de interpretar la minimización del índice de desempeño es de manera gráfica.

