Tarea 7 - Sistemas con retardos en la entrada

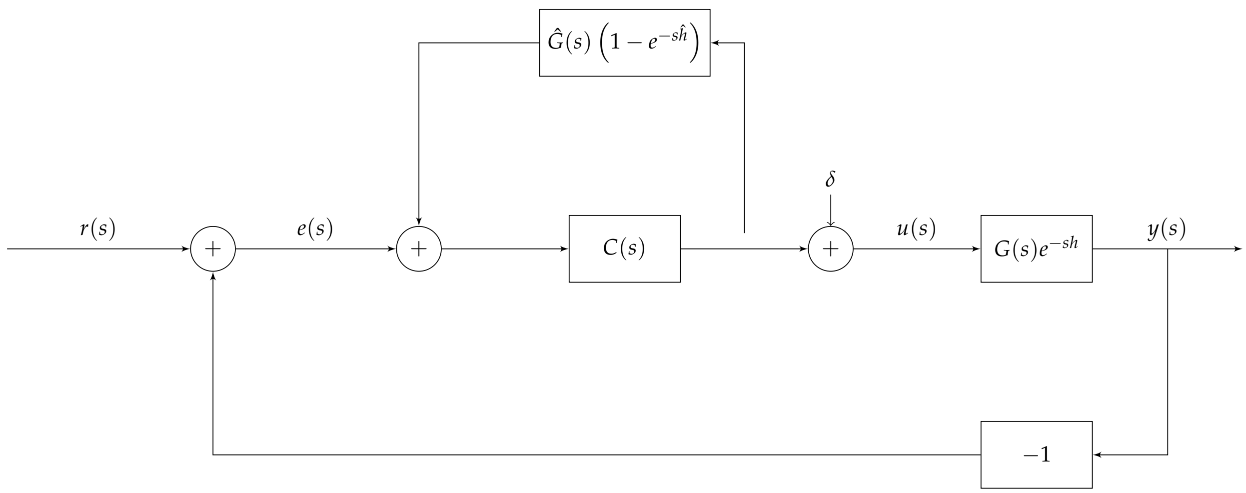
Roberto Cadena Vega

15 de febrero de 2015

Tarea 7 - Desarrollo de resultados clásicos en sistemas con retardo en la entrada.

Función de transferencia de predictor de Smith[1].

Dado un sistema con retardo $G(s)e^{-sh}$, en donde $G(s)$ es la parte del sistema sin el retardo h, tenemos el siguiente esquema de control:



en donde $\hat{G}(s)$ es una aproximación de $G(s)$, y $\hat{h}$ es una aproximación del retardo h.
Podemos obtener la función de transferencia de este sistema bajo el predictor de Smith:

$$
\begin{aligned}
\frac{y(s)}{r(s)} &= \frac{\frac{C(s)}{1+C(s)\hat{G}(s)\left(1-e^{-s\hat{h}}\right)} G(s)e^{-sh}}{1 + \frac{C(s)}{1+C(s)\hat{G}(s)\left(1-e^{-s\hat{h}}\right)} G(s)e^{-sh}} \\
&= \frac{\frac{C(s)G(s)e^{-sh}}{1+C(s)\hat{G}(s)\left(1-e^{-s\hat{h}}\right)}}{1 + \frac{C(s)G(s)e^{-sh}}{1+C(s)\hat{G}(s)\left(1-e^{-s\hat{h}}\right)}} \\
&= \frac{C(s)G(s)e^{-sh}}{1 + C(s)\hat{G}(s)\left(1 - e^{-s\hat{h}}\right) + C(s)G(s)e^{-sh}} \\
&= \frac{C(s)G(s)e^{-sh}}{1 + C(s)\left[\hat{G}(s) - \hat{G}(s)e^{-s\hat{h}} + G(s)e^{-sh}\right]}
\end{aligned}
$$

Si ahora asumimos que la aproximación $\hat{G}(s)$ es precisa:

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{C(s)G(s)e^{-sh}}{1 + C(s)G(s)\left(1 + e^{-sh} - e^{-s\hat{h}}\right)} \tag{1}$$

Cabe notar que si tambien asumimos una aproximación precisa de $\hat{h}$ tendremos la ecuación que ya teniamos:

$$\frac{C(s)G(s)e^{-sh}}{1 + C(s)G(s)} \tag{2}$$

Desarrollo de señal de control para asignación de espectro finíto[2].

Dado el sistema:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t-h) \tag{3}$$

podemos premultiplicar por e^{-At} esta ecuación y desarrollar para obtener:

$$\begin{aligned} e^{-At}\dot{x}(t) &= e^{-At}Ax(t) + e^{-At}Bu(t-h) \\ e^{-At}\dot{x}(t) - e^{-At}Ax(t) &= e^{-At}Bu(t-h) \\ \frac{d}{dt}\left(e^{-At}x(t)\right) &= e^{-At}Bu(t-h) \end{aligned}$$

integrando desde t hasta $t+h$, tenemos:

$$\begin{aligned} \int_t^{t+h} \frac{d}{d\theta}\left(e^{-A\theta}x(\theta)\right) d\theta &= \int_t^{t+h} e^{-A\theta}Bu(\theta-h)d\theta \\ e^{-A\theta}x(\theta)\Big|_t^{t+h} &= \int_t^{t+h} e^{-A\theta}Bu(\theta-h)d\theta \\ e^{-A(t+h)}x(t+h) - e^{-At}x(t) &= \int_t^{t+h} e^{-A\theta}Bu(\theta-h)d\theta \\ e^{-A(t+h)}x(t+h) &= e^{-At}x(t) + \int_t^{t+h} e^{-A\theta}Bu(\theta-h)d\theta \\ x(t+h) &= e^{Ah}x(t) + e^{A(t+h)}\int_t^{t+h} e^{-A\theta}Bu(\theta-h)d\theta \\ x(t+h) &= e^{Ah}x(t) + \int_t^{t+h} e^{A(t+h-\theta)}Bu(\theta-h)d\theta \end{aligned} \tag{4}$$

Si ahora hacemos el cambio de variable $\delta = \theta - h$, el diferencial $d\delta$ será $d\delta = d\theta$ y los limites de integración cambiaran de $t \to t+h$ a $t-h \to t$, y la ecuación quedará:

$$x(t+h) = e^{Ah}x(t) + \int_{t-h}^{t} e^{A(t+\delta)}Bu(\delta)d\delta \tag{5}$$

lo cual nos indica que podemos obtener un estado futuro de nuestro sistema, a partir del pasado, es decir, un predictor.

Por otro lado, si en lugar de hacer el ultimo cambio de variable, sustituimos $t = 0$ y $h = t$ en 4 para obtener el estado del sistema en los tiempos en $[0, h]$, tendremos:

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^{t} e^{A(t-\theta)}Bu(\theta-t)d\theta \tag{6}$$

Referencias

[1] N. Abe and K. Yamanaka, “Smith predictor control and internal model control - a tutorial,” in *SICE 2003 Annual Conference*, vol. 2, pp. 1383–1387 Vol.2, Aug 2003.

[2] A. Manitius and A. Olbrot, “Finite spectrum assignment problem for systems with delays,” *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol. 24, pp. 541–552, Aug 1979.