

Sesión 2

Contenido

- 2.0 Lo que se supone que ya se sabe.
- 2.1 Introducción.
- 2.2 Crecimiento logístico.
- 2.3 Sistema presa-depredador.
- 2.4 El quimiostato.

2.0 Lo que se supone que ya se sabe

- Álgebra y análisis (*resolución de sistemas de ecuaciones lineales, cálculo matricial, series de Taylor, diferenciabilidad, ...*).
- Resolver ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales.
- Familiaridad con las ecuaciones en derivadas parciales (*ecuación de onda, ...*).

- Métodos numéricos (*integración, cálculo de puntos fijos, ...*).
- Familiaridad con el manejo de conceptos teóricos relacionados con la estabilidad de sistemas dinámicos (*Teorema de Hartman-Grobman, estabilidad asintótica, ...*).
- Cálculo Vectorial (*integración, diferenciación, ...*).
- Familiaridad con los conceptos del enfoque de estado de la teoría matemática del control.

- Ánalisis de sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales en el plano de fase (*nullclines, bifurcaciones, ...*).
- Utilizar Matlab (cómputo numérico, programación de algoritmos, diseñar interfaces gráficas de usuario, generación de gráficos, ...).
- Manejar una plataforma computacional de álgebra computacional (Mathematica o Maple de preferencia).
- Elaborar reportes técnicos escritos en LaTeX.

2.1 Introducción

Los temas de estudio de la Teoría Matemática del Control Automático están determinados por la naturaleza de los sistemas físicos descritos por medio de modelos matemáticos.

En lo que sigue se presenta una serie de modelos matemáticos con la finalidad de ilustrar algunos problemas típicos de la teoría.

NOTA 13 *El tratamiento conceptual seguido a lo largo de esta sesión corresponde al enfoque analítico del modelado.*

Los modelos considerados en esta sesión corresponden a sistemas biológicos relacionados con la dinámica de poblaciones.

Se elige este tema para adentrarnos en el proceso de modelado por su simplicidad.

NOTA 14 *En cada caso se presentarán las técnicas estándar de modelado, privilegiando en la exposición la emergencia de las problemáticas ligadas al control automático. Se iniciará con el modelo logístico de crecimiento, el cual posteriormente será modificado para introducir acciones de control. Se concluirá lo relativo a la dinámica de poblaciones con el caso clásico de la interacción depredadores-presas.*

2.2 Crecimiento logístico

Para predecir o estimar el crecimiento de una población dada es necesario contar con modelos dinámicos.

Tales modelos son útiles en el contexto del desarrollo de estrategias de control que regulen el proceso de desarrollo de una población.

NOTA 15 *Un ejemplo clásico es el vinculado a la gestión de pescaderías. En este caso se desea mantener un nivel sustentable de pesca, maximizando el promedio de pesca en un período muy largo. Otro ejemplo concierne el control de poblaciones de insectos dañinos para la agricultura.*

Ejemplos de otros sistemas que involucran el crecimiento de poblaciones y que son de interés para la teoría de control:

1. Crecimiento de ataques de denegación de servicio; saturación de servidor bajo ataque en Internet (control de la congestión).
2. Crecimiento de la población de “rebeldes” en una población dada (control político).
3. Crecimiento de la población de autos contaminantes en una ciudad (control de la contaminación ambiental por emisión vehicular de gases contaminantes).
4. Crecimiento de territorios dañados por la actividad de extracción minera (control de daños al medio ambiente).
5. Crecimiento de decisiones equivocadas en procesos de inversión financiera (control de pérdidas).

En lo que sigue se consideran dos ejemplos clásicos de dinámica de poblaciones:

- el modelo logístico de crecimiento y
- el sistema presa-depredador.

NOTA 16 Aunque simples estos sistemas presentan muchas de las características propias de los sistemas dinámicos deterministas: evolución dependiente de la memoria, interdependencia entre variables, necesidad de conocer los valores de los parámetros, abstracción del espacio, . . .

Contexto histórico

Triunfo del mecanicismo newtoniano: Ley de la gravitación universal (publicación de *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* por Isaac Newton en Inglaterra en 1687).

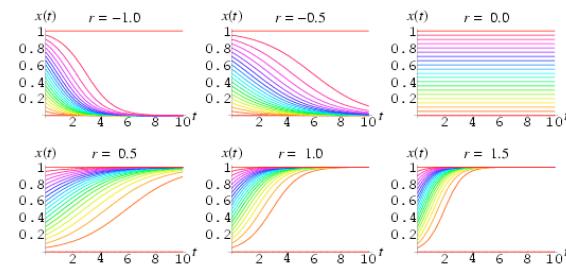
Institucionalización de la ciencia: Resultado de las Guerras Napoleónicas (1803-1815).

Revolución industrial: Siglos XVIII y XIX (iniciada en Inglaterra y después propagada a toda Europa - instauración de la competencia por el control de mercados).

COMENTARIO CIENCIA E HISTORIA: No se pueden separar la ciencia y la tecnología de su contexto histórico. Ambas son hijas de su tiempo. Además la ciencia y la tecnología de una cierta sociedad son un producto social, por lo que sólo pueden ser comprendidas en términos de su relación con la sociedad en la cual evolucionan. No es para nada accidental que la matematización del conocimiento sea un producto de la cultura europea occidental y que aún ahora la civilización occidental domine la ciencia y la tecnología.

Clasificación mundial de universidades 2014 (Quacquarelli Symonds, UK; factores: calidad de la enseñanza y de la investigación, infraestructura, acceso de graduados al mercado de trabajo, . . .):

Lugar	Universidad	País
1	MIT	EUA
2	University of Cambridge	UK
2	Imperial College London	UK
4	Harvard University	EUA
5	University of Oxford	UK
5	University College London	UK
7	Stanford University	EUA
8	Caltech	EUA
9	Princeton University	EUA
10	Yale University	EUA
11	University of Chicago	EUA
12	ETH Zurich	Suiza
:	:	:
132	Universidad de Sao Paulo	Brasil
:	:	:
166	Universidad de Barcelona	Cataluña
167	Pontificia Universidad Católica de Chile	Chile
:	:	:
175	UNAM	México
:	:	:
253	ITESM	México
:	:	:
551-560	IPN, UIA, UP	México
:	:	:
601-650	Anahuac, UDG	México



Modelo Logístico de Crecimiento

Recherches Mathématiques sur La Loi
D'Accroissement de la Population,
*Nouveaux Mémoires de l'Academie Royale des
Sciences et Belles-Lettres de Bruxelles*,
18, Art. 1, 1-45, 1845

Para empezar:

Considere una población $N(t)$ (de animales, de microorganismos, de rumores, de grietas en una pared, ...) en un entorno alimenticio en el tiempo t .

Sea entonces la definición siguiente (h denota un intervalo de tiempo):

$$g(N(t), h) := N(t+h) - N(t), \text{ (el crecimiento en el intervalo } h).$$

Suponemos ahora que la función $g(N(t), h)$ es suficientemente suave en $N(t)$ y en h .

En consecuencia, al ser expandida $g(N(t), h)$ resulta en^{*}:

$$g(N, h) = a + bN + ch + dN^2 + eh^2 + KNh + \text{términos de alto orden}.$$

^{*}Utilizando series de Taylor:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(a, b) + (x - a) f_x(a, b) + (y - b) f_y(a, b) \\ &= \frac{1}{2!} \left[(x - a)^2 f_{xx}(a, b) + 2(x - a)(y - b) f_{xy}(a, b) + (y - b)^2 f_{yy}(a, b) \right] + \dots \end{aligned}$$

Dado que $g(0, h) \equiv 0$ y $g(N, 0) \equiv 0$:

$$g(0, h) = a + ch + eh^2 = 0.$$

$$g(N, 0) = a + bN + dN^2 = 0.$$

En consecuencia:

$$g(N, h) = KNh + \text{términos de alto orden.}$$

NOTA 17 *Esto no es cierto para valores grandes de h y podría o no ser verdad para valores grandes de N .*

Como puede verse:

$$KN(t)h = N(t+h) - N(t) \Rightarrow KN(t) = \frac{1}{h}(N(t+h) - N(t))$$

y tomando $h \rightarrow 0$:

$$\boxed{\frac{dN(t)}{dt} = KN(t),}$$

que se puede resolver por separación de variables:

$$\frac{dN(t)}{N(t)} = Kdt \Rightarrow \int \frac{dN(t)}{N(t)} = \int Kdt \Rightarrow \ln N(t) = Kt + c.$$

Por lo tanto:

$$N(t) = N_0 e^{Kt},$$

donde $N_0 = e^c$.

NOTA 18 La ecuación precedente es conocida como *Ecuación de Crecimiento Exponencial* (debida a Malthus, 1798), y se aplica, por ejemplo, a poblaciones de bacterias, siempre y cuando tengan disponible suficiente nutriente).

Como puede verse el sistema descrito no posee entradas y su evolución (una vez fijado el valor del parámetro K) sólo depende de la condición inicial, esto es el modelo describe un sistema autónomo *lineal* y *estacionario* (su parámetro K no cambia en el tiempo).

El resultado obtenido es poco realista (lo cual resulta de las suposiciones iniciales sobre el sistema).

Limitación del crecimiento:

La ecuación puede ser modificada con facilidad para tomar en cuenta situaciones que se presentan en la realidad.

Por ejemplo, si se supone que para $N > B > 0$ el proceso de crecimiento no es sostenible, esto es $dN/dt < 0$ siempre que $N = N(t) > B$, se puede introducir una curva parabólica al modelo para tomar en cuenta esta situación:

$$\boxed{\frac{dN(t)}{dt} = rN(t) - \frac{rN^2(t)}{B} = rN(t) \left(1 - \frac{N(t)}{B}\right),}$$

para alguna constante $r > 0$.

Resolviendo entonces:

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t) \left(1 - \frac{N(t)}{B}\right) = r\frac{N(t)(B-N(t))}{B}$$

por separación de variables:

$$\int \frac{BdN(t)}{N(t)(B-N(t))} = \int rdt$$

y computando la integral de la izquierda utilizando fracciones parciales:

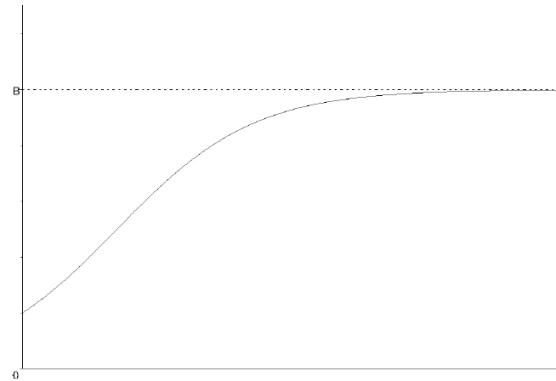
$$\int \left(\frac{1}{N(t)} + \frac{1}{B-N(t)} \right) dN(t) = \int rdt \Rightarrow \ln \left(\frac{N(t)}{B-N(t)} \right) = rt + c$$

y así:

$$\frac{N(t)}{B-N(t)} = \tilde{c}e^{rt} \Rightarrow N(t) = \frac{\tilde{c}B}{\tilde{c}+e^{-rt}} \Rightarrow \tilde{c} = \frac{N_0}{B-N_0}.$$

Finalmente:

$$N(t) = \frac{N_0 B}{N_0 + (B - N_0)e^{-rt}}.$$



NOTA 19 Como puede ver el sistema tiene como puntos de equilibrio a $\bar{N} = 0$ y $\bar{N} = B$, ya que satisfacen $\frac{dN(t)}{dt} = 0$.

COMENTARIO **MULTIESTABILIDAD:** Como puede verse en el modelo precedente, al agregar la restricción impuesta por la capacidad de soporte el sistema resultante es bi-estable. Esto se debe a la naturaleza no lineal del sistema que resulta de la adición de la parábola. En general, la consideración de restricciones suele dar lugar a la multiestabilidad, que es la principal propiedad de los sistemas dinámicos no lineales.

Alternativamente, si la tasa de crecimiento “ K ” depende de la disponibilidad de nutriente:

$$K = K(C) = K(0) + \kappa C + o(C) \approx \kappa C \text{ (utilizando el hecho de que } K(0) = 0\text{).}$$

En esta ecuación $C = C(t)$ denota la cantidad de nutriente, que disminuye conforme la población crece, esto es:

$$\frac{dC(t)}{dt} = -\alpha \frac{dN(t)}{dt} = -\alpha KN,$$

que no toma en cuenta la caída de la cantidad del nutriente que depende del crecimiento individual de los organismos; por esto es mejor considerar a $N(t)$ como cantidad de biomasa).

Como puede verse: $\frac{d}{dt}(C + \alpha N) = \frac{dC}{dt} + \alpha \frac{dN}{dt} = -\alpha KN + \alpha KN = 0$, lo cual implica que:

$$C(t) + \alpha N(t) \equiv C_0$$

(que corresponde a una “ley de conservación”).

Tomando en cuenta los argumentos precedentes:

$$K = \kappa C = \kappa(C_0 - \alpha N),$$

que implica:

$$\boxed{\frac{dN(t)}{dt} = \kappa(C_0 - \alpha N(t))N(t).}$$

Comportamiento cualitativo:

Una pregunta se impone al observar la ecuación precedente:

¿El comportamiento cualitativo depende de los valores numéricos de C_0 , κ y α ?

Esto es:

¿Qué tanto condicionan los valores de los parámetros la evolución del sistema?

Para dar respuesta al cuestionamiento precedente se pueden seguir en esencia dos procedimientos diferentes:

Método gráfico. Se resuelve la ecuación diferencial y se grafica su comportamiento para diferentes valores de C_0 , κ y α (se puede empezar recolectando términos, esto es: $\frac{dN}{dt} = ((\kappa C_0) - (\kappa \alpha) N)N = (\tilde{C}_0 - \tilde{\alpha} N)N$, suponer que κ es igual a 1 y cambiar los valores de α y de C_0).

Eliminación de parámetros por escalamiento. Por ejemplo, se pueden remplazar las variables N y t por $N = N^* \hat{N}$ y $t = t^* \hat{t}$, donde * representa las nuevas variables y $\hat{}$ representa escalas.

Siguiendo el procedimiento de escalamiento:

$$\frac{d(N^* \hat{N})}{d(t^* \hat{t})} = \kappa (C_0 - \alpha N^* \hat{N}) N^* \hat{N}$$

y en consecuencia:

$$\frac{dN^*}{dt^*} = \kappa \hat{t} \alpha \hat{N} \left(\frac{C_0}{\alpha \hat{N}} - N^* \right) N^*$$

$(\frac{dN}{dt} = \frac{d(N^* \hat{N})}{d(t^* \hat{t})} = \frac{\hat{N}}{\hat{t}} \frac{dN^*}{dt^*})$, justificada por la regla de la cadena:

$$N^*(t^*) = \frac{1}{\hat{N}} N(t^* \hat{t}) \Rightarrow \frac{dN^*}{dt^*}(t^*) = \frac{1}{\hat{N}} \hat{t} \frac{dN}{dt}(t^* \hat{t}).$$

Se quiere hacer $\frac{C_0}{\alpha \hat{N}} = 1$ y $\kappa \hat{t} \alpha \hat{N} = 1$, lo cual puede hacerse tomando:

$$\hat{N} := \frac{C_0}{\alpha} \text{ y } \hat{t} = \frac{1}{\kappa \alpha \hat{N}},$$

esto es $\hat{t} := \frac{1}{\kappa} C_0$. Así:

$$\frac{dN^*}{dt} = (1 - N^*) N^*$$

o eliminando las estrellas:

$$\boxed{\frac{dN}{dt} = (1 - N) N.}$$

COMENTARIO ESCALAMIENTO Y SIMPLIFICACIÓN: Como puede verse en el ejemplo anterior el proceso de escalamiento permite evidenciar (en este caso) que el comportamiento cualitativo del modelo depende de su memoria, esto es de su estado. Este procedimiento es particularmente útil cuando se elaboran modelos de juguete de sistemas dinámicos y elimina la necesidad de conocer con precisión los parámetros del sistema descrito.

NOTA 20 *Hasta ahora a los sistemas expuestos se les ha considerado como aislados de su entorno, lo cual implica la imposibilidad de controlar la evolución de la variable de estado. En lo que sigue introducimos el control en el proceso de modelado del crecimiento poblacional. Esto para ilustrar el proceso de reciclamiento del modelo de crecimiento exponencial, agregando una entrada de control para asegurar un objetivo de control específico.*

Ejemplo 2 Modelo Logístico de Crecimiento. *El modelo de crecimiento más simple es el siguiente:*

$$\dot{x}(t) = ax(t),$$

donde $x(t)$ es el tamaño, densidad o biomasa de un población en el tiempo t y el parámetro de crecimiento a es la tasa intrínseca de crecimiento (esto es, la diferencia entre la tasa de nacimientos y la tasa de muertes) de la población.

Si la talla inicial de la población es $x(0) = x_0 > 0$ el desarrollo obedece a la ley exponencial $x(t) = e^{at}x_0$. Se tiene entonces crecimiento exponencial si $a > 0$ (esto es, la tasa de nacimientos supera a la de muertes) y decrecimiento exponencial si $a < 0$.

En el texto “Essay on Population”(1798), Thomas Malthus (graduado en Cambridge, sacerdote anglicano, Profesor de Historia y Economía Política, miembro de la Royal Society) postuló que la especie humana posee una tasa natural de crecimiento positiva (siempre y cuando no se tomen en cuenta las dificultades de la subsistencia).

NOTA 21 *La comparación que hizo Malthus entre el crecimiento natural de naturaleza geométrica de la humanidad y el crecimiento lineal de los recursos de subsistencia tuvo un efecto muy profundo en la política económica (catástrofe maltusiana...).*

El modelo de crecimiento exponencial, adecuado en aplicaciones cuando el rango de tiempo es limitado, resulta poco realista ya que a la larga $e^{at}x_0 \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$.

La tasa de crecimiento $\dot{x}(t) / x(t)$ no puede ser constante para períodos de tiempo arbitrarios, dado que los recursos son limitados.

Conforme la población crece, se imponen factores restrictivos que tendrán un efecto negativo sobre el crecimiento.

NOTA 22 *El perfeccionamiento del conocimiento del fenómeno natural se traducen en incrementos de la complejidad del modelo.*

En 1838 Verhulst propuso otro modelo de crecimiento que incorpora los factores limitantes y que toma en cuenta el hecho de que los individuos compiten por la comida, el habitat y otros recursos limitados. El modelo corresponde a:

$$\dot{x}(t) = r(K - x(t))x(t).$$

De acuerdo con este modelo una población pequeña iniciará su crecimiento a una tasa exponencial rK , pero conforme la población crezca la tasa de crecimiento disminuirá.

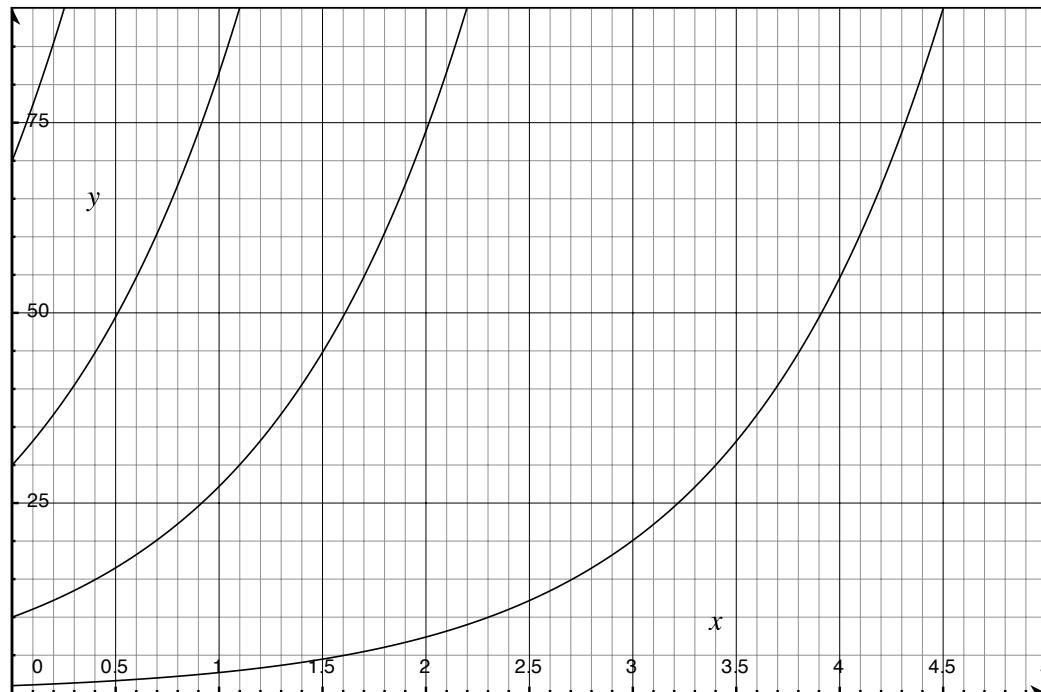
Utilizando el método de separación de variables se tiene que la solución de la ecuación diferencial está dada por:

$$x(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{x_0} - 1\right) e^{-rt}}$$

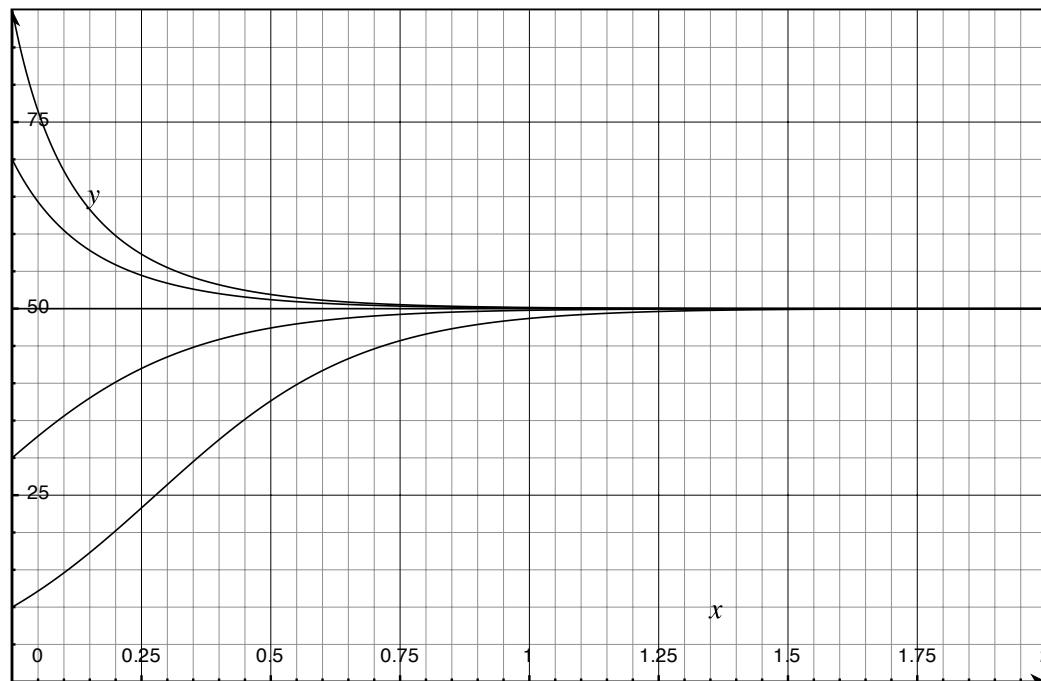
Si inicialmente $x_0 = K$ entonces $x(t) = K$ para todo tiempo t . La población está entonces en un punto de equilibrio.

Si $0 < x_0 < K$ la población $x(t)$ crecerá continuamente y se aproximará a K conforme $t \rightarrow \infty$. Si $x_0 > K$, la talla de la población converge hacia K . Las gráficas de estas soluciones son conocidas como *curvas logísticas*. El modelo de Verhulst es conocido como el modelo logístico de crecimiento.

La figura siguiente muestra el comportamiento típico de un modelo de crecimiento exponencial.



La figura siguiente muestra el comportamiento típico de un modelo de crecimiento logístico.



Como puede verse en la gráfica precedente, $x(t) = K$ corresponde a un punto de equilibrio estable, esto es todas las trayectorias que inician en $x_0 > 0$ convergen hacia su equilibrio conforme $t \rightarrow \infty$.

El nivel de saturación K se interpreta como **la capacidad ambiental de soporte** del ecosistema correspondiente.

Población de peces sometidos a la presión de la pesca

Suponga ahora que se desea describir el comportamiento dinámico de una población de peces sometida a la influencia de la pesca.

Si $u(t) \geq 0$ es la tasa de captura y si se supone un modelo logístico para la población no perturbada de peces, se obtiene el modelo de Schaefer:

$$\dot{x}(t) = r(K - x(t))x(t) - u(t).$$

En este caso sólo tienen sentido las soluciones $x(t, u) \geq 0$.

Dada una condición inicial x_0 y un período fijo $[t_0, t_1]$, una política de pesca:

$$u(t) : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}_+$$

será denominada:

- “admissible” si da lugar a una solución no negativa $x(t, u)$ y
- “óptima” si maximiza la captura total durante ese período.

Sin embargo, tal solución “óptima” dará lugar a una reducción de la población de peces en el tiempo t_1 .

Para prevenir esta situación uno podría imponer una “restricción terminal”:

$$x(t_1) \geq x_1,$$

donde $x_1 > 0$ es una cota inferior para una población de peces al final del período.

En consecuencia se finaliza con el siguiente problema de control óptimo:

$$\text{Maximice } \int_{t_0}^{t_1} u(t) dt$$

sujeta a:

$$u(t) \geq 0, \quad x(t, u) \geq 0, \quad t \in [t_0, t_1], \quad x(t_1) \geq x_1.$$

Si se requiere que $u(t)$ sea constante el problema es fácil de resolver.

NOTA 23 *Este es un problema típico de Control Óptimo bajo Restricciones.*

Cosechando con esfuerzo constante óptimo

En este problema la tasa de cosecha $u(t)$ es por definición proporcional a $x(t)$, esto es $u(t) = cx(t)$.

Este es un ejemplo simple del **control por retroalimentación**, donde la variable de control $u(t)$ se determina como una función dada del estado instantáneo $x(t)$ del sistema.

Siguiendo esta estrategia de control se obtiene un modelo de Verhulst en el que los parámetros han cambiado:

$$\dot{x}(t) = r \left(K - \frac{c}{r} - x(t) \right) x(t).$$

Si en el modelo precedente $c < rK$, existe una solución de equilibrio:

$$x(t) = \bar{x} = K - \frac{c}{r}, \quad t \geq 0$$

correspondiente a la política de cosechar con esfuerzo constante óptimo:

$$u(t) = c\bar{x}(t), \quad t \geq 0.$$

Se puede para este caso determinar la política de cosechar con esfuerzo constante óptimo que da lugar a la más elevada tasa de cosecha sostenible.

Las suposiciones que llevan a la simplificación del problema...

Aunque el modelo logístico es ampliamente utilizado (además de ser muy exitoso), ya que predice muy bien el crecimiento de varias poblaciones en ambientes de laboratorio, es un modelo muy simplificado.

El modelo está basado en un cierto número de suposiciones, que no son satisfechas al considerar el crecimiento de especies en un ecosistema real, por ejemplo:

- (i) Se supone que la influencia de factores ambientales sobre el crecimiento de las especies es constante en el tiempo. Pero estos factores, así (al igual que el comportamiento de una cierta especie) varían con el tiempo del año.

También es común hallar variaciones aleatorias en el ambiente.

- (ii) Se supone que los efectos causados por la limitación en los recursos afectan a todos los individuos de una especie de la misma manera.

Un modelo más realista debería tomar en cuenta la distribución espacial de las especies y de sus recursos (ecuaciones en derivadas parciales).

- (iii) Se supone que las tasas de nacimientos y de muertes responden instantáneamente a la talla de la población. Sin embargo en la realidad existe un retardo entre nacer y poseer la habilidad de dar lugar a nacimientos.
- (iv) Se supone además constante la distribución de edades de la población o que si ésta cambia no afecta el crecimiento de las especies.

Aunque las suposiciones no son realistas, los modelos altamente simplificados (como el de Verhulst) son frecuentemente de gran valor científico.

Su propósito no es dar un retrato fiel de un proceso real, sino aumentar la comprensión de algunos de sus mecanismos internos.

NOTA 24 *Los modelos simplificados pueden ser motores más importantes para el progreso científico que modelos de simulación realista. A esta clase de modelos se les suele denominar en la literatura anglosajona como modelos de juguete.*

COMENTARIO MODELAR PARA PROBAR HIPÓTESIS: Uno de los objetivos fundamentales de la elaboración de modelos en el contexto de la investigación científica es de probar hipótesis. Los modelos se conciben entonces como medios para calificar la certeza de pronósticos en torno a los comportamientos del sistema descrito ante condiciones codificadas por el proceso de simulación; esto provee de un mecanismo para valuar la descripción codificada por el modelo en cuestión.

Agregando complejidad a la descripción...

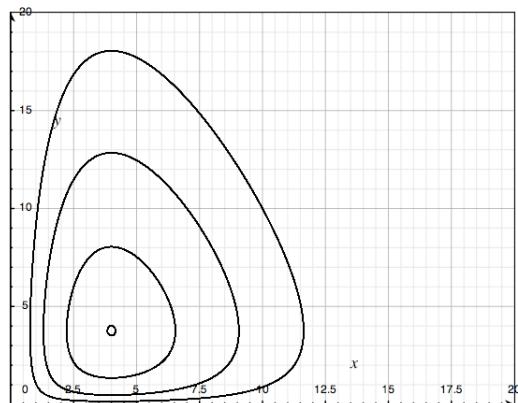
Frecuentemente la dinámica de una población es fuertemente influenciada por las interacciones con otras poblaciones que habitan en el mismo ecosistema.

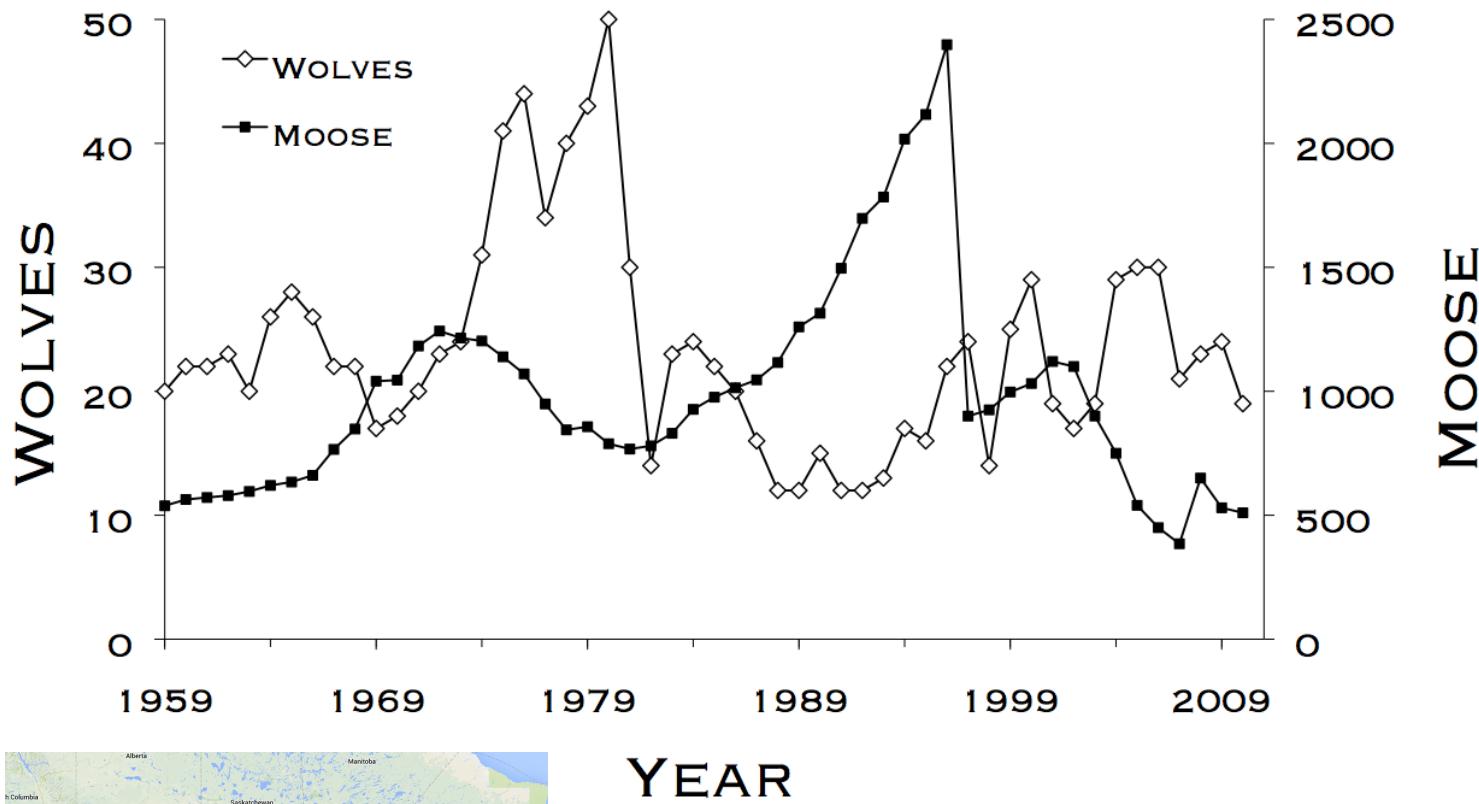
Varias especies pueden competir por los mismos recursos naturales o una especie puede estar depredando a otras y al mismo tiempo ser presa para otras especies.

En el siguiente ejemplo se describe el modelo clásico depredadores–presas de Lotka y Volterra (propuestas de forma independiente por Alfred J. Lotka en 1925 y Vito Volterra en 1926).



Modelo Lotka-Volterra





Los lobos y los alces de Isla Royale

2.3 Sistema presa-depredador

Ejemplo 3 (Sistema presa-depredador). Suponga que una isla está habitada por cabras y lobos. Las cabras sobreviven alimentándose de la vegetación de la isla y los lobos sobreviven comiéndose a las cabras.

Frecuentemente se observan oscilaciones en el desarrollo de tales poblaciones depredador-presa.

Si, inicialmente, hay unos cuantos lobos y muchas cabras, los lobos tendrán mucho que comer y el número de cabras disminuirá mientras que el número de lobos crecerá, hasta que ya no haya suficientes cabras para alimentarlos. Entonces el número de lobos disminuirá y en consecuencia la población de cabras se recuperará, lo cual cierra el ciclo.

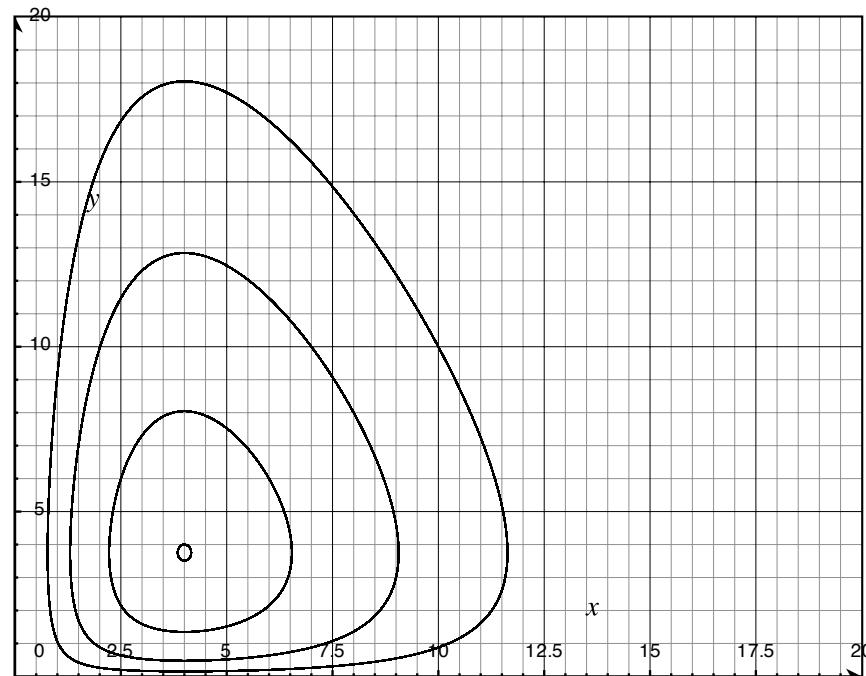
El modelo clásico de Lotka–Volterra para un sistema presa-depredador es el siguiente:

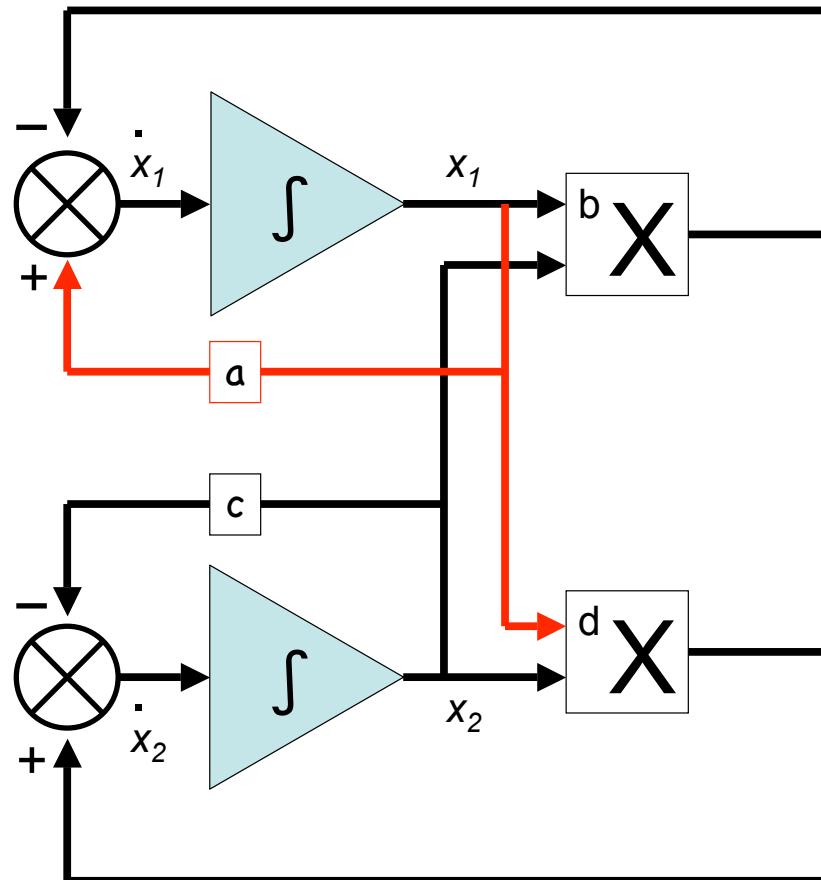
$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = ax_1(t) - bx_1(t)x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = -cx_2(t) + dx_1(t)x_2(t), \end{cases}$$

donde x_1 y x_2 son densidades (número por unidad de área) de las presas y de los depredadores, respectivamente. También, a , b , c y d son constantes positivas.

NOTA 25 *El modelo refleja una característica que ha sido observada en muchos sistemas depredadores–presas, la persistencia de fluctuaciones periódicas.*

La figura siguiente muestra la persistencia de fluctuaciones periódicas en un sistema presa-depredador.





ESTRUCTURA DEL MODELO LOTKA-VOLTERRA.

En el modelo precedente:

$$\bar{x} = \left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b} \right)$$

es un punto de equilibrio y cualquier condición inicial $x^0 \neq \bar{x}$, que satisface $x_1^0 > 0$ y $x_2^0 > 0$ da lugar a una trayectoria periódica alrededor del punto de equilibrio en el cuadrante positivo.

¡Verifique lo anterior!

NOTA 26 *Es obvio que el modelo precedente es muy simple y no tiene como finalidad simular o predecir el comportamiento de un proceso real.*

El modelo está basado en las siguientes suposiciones:

- (i) En ausencia de depredadores la población de presas aumenta exponencialmente con tasa a .
- (ii) En la ausencia de presas la población de depredadores disminuye exponencialmente con tasa c .

- (iii) El crecimiento de la población de depredadores depende fundamentalmente de la depredación.
- (iv) La depredación depende de que una víctima sea hallada por un depredador y de que la probabilidad de que esto suceda sea proporcional al producto x_1x_2 de las densidades de ambas poblaciones.

NOTA 27 Una suposición similar a la (iv) es hecha en cinética química, donde, de acuerdo con la así llamada ley de acción de masa, la tasa de colisiones moleculares de dos substancias en una solución dada se supone proporcional al producto de sus concentraciones.

Agregando un poco más de realidad...

A partir del modelo:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = ax_1(t) - bx_1(t)x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = -cx_2(t) + dx_1(t)x_2(t), \end{cases}$$

se obtienen modelos “más realistas”:

- al modificar el término de crecimiento libre de depredadores ax_1 , para incluir efectos de abarrotamiento
- o bien permitiendo efectos de saturación y de rezago en la respuesta de los depredadores al incremento en la densidad poblacional de presas.

Por ejemplo:

para eliminar la suposición de que la densidad de presas crece exponencialmente en ausencia de depredadores, se puede introducir un término $-ex_1^2$ en la primera ecuación, la cual describe los efectos del abarrotamiento en el crecimiento de la densidad de presas. El modelo modificado resultante está dado ahora como sigue:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = ax_1(t) - bx_1(t)x_2(t) - ex_1^2 = e\left(\frac{a}{e} - x_1\right)x_1 - bx_1x_2, \\ \dot{x}_2(t) = -cx_2(t) + dx_1(t)x_2(t), \end{cases}$$

Esto cambia drásticamente el comportamiento cualitativo del sistema depredadores–presas. En ausencia de depredadores las presas evolucionan de acuerdo con un modelo logístico de crecimiento con capacidad de soporte a/e .

Además:

El nuevo sistema no siempre tiene un punto de equilibrio con coordenadas positivas. De hecho las ecuaciones de equilibrio son:

$$(a - bx_2 - ex_1)x_1 = 0, \quad (-c + dx_1)x_2 = 0$$

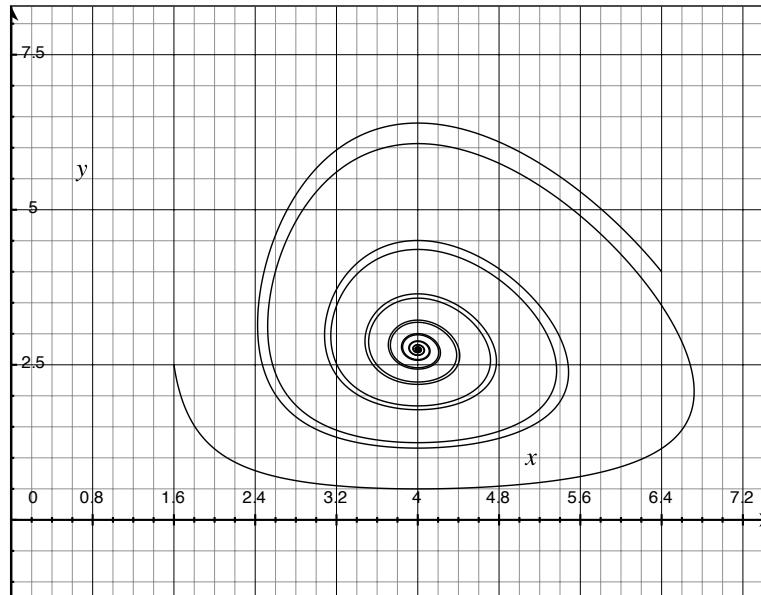
y estas ecuaciones tienen una solución positiva única:

$$\bar{x} = \left(\frac{c}{d}, \frac{da - ec}{bd} \right)$$

si y sólo si:

$$\frac{a}{e} > \frac{c}{d}.$$

La siguiente figura muestra el cambio en el desempeño del sistema depredadores–presas. El sistema no posee ahora soluciones periódicas no constantes y su único punto de equilibrio $\bar{x} = \left(\frac{c}{d}, \frac{ad - ec}{bd} \right)$ es ahora asintóticamente estable.



$$a = 1,5, b = 0,4, c = 4, d = 1, e = 0,1$$

Pregunta:

¿Cómo se determinaron las propiedades de equilibrio de estos puntos fijos?

Los cambios cualitativos entre:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = ax_1(t) - bx_1(t)x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = -cx_2(t) + dx_1(t)x_2(t) \end{cases}$$

y:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = ax_1(t) - bx_1(t)x_2(t) - ex_1^2, \\ \dot{x}_2(t) = -cx_2(t) + dx_1(t)x_2(t) \end{cases}$$

no dependen del tamaño de $e > 0$, que puede ser arbitrariamente pequeño.

NOTA 28 *Esto muestra que el sistema clásico depredadores–presas no es estructuralmente estable, en el sentido de que una perturbación del modelo, por pequeña que sea, podría dar lugar a un comportamiento cualitativamente diferente.*

No obstante la simplicidad de los modelos depredadores–presas (y otros modelos de dos especies), estos son utilizados en un número importante de aplicaciones de control, *e.g.*:

- en la gestión de recursos renovables o:

- en el control de plagas basado en la introducción de depredadores, para reducir plagas que se alimentan de cereales.

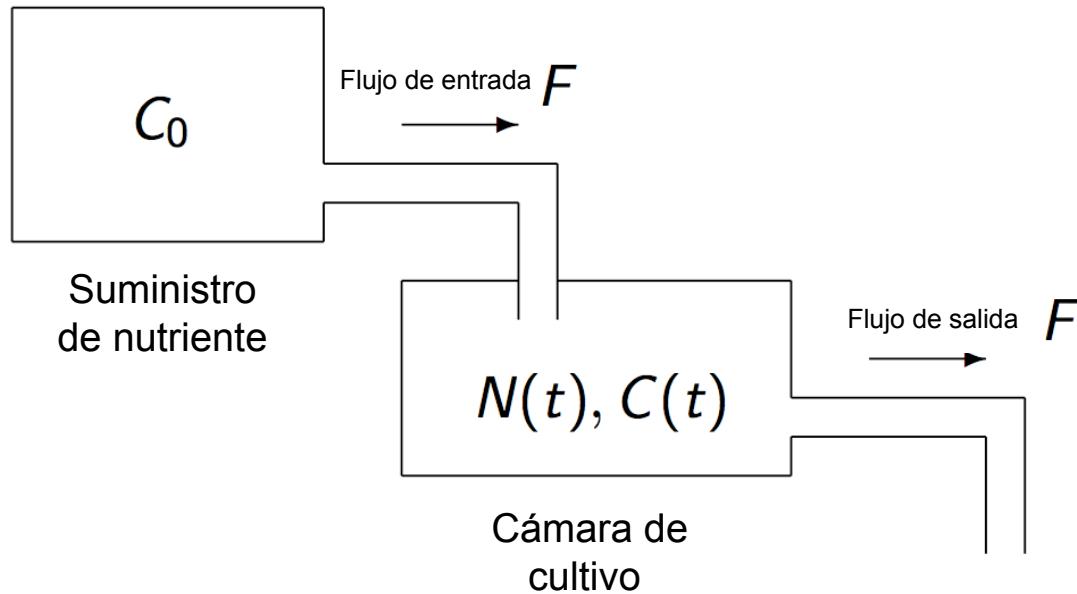
COMENTARIO UN PROBLEMA DE CONTROLABILIDAD: Considere un sistema depredadores-presas de salmones y de arenques en pesca marina. Escogiendo un modelo conveniente depredadores-presas y agregando términos de control a ambas ecuaciones (tasas de captura) uno podría preguntar cuáles son las estrategias de captura sostenible óptimas, en función de los precios de salmones y de arenques y cuál es el punto de equilibrio correspondiente del sistema, esto es las reservas de salmones y de arenques que permiten alcanzar las tasas óptimas. Si tal punto óptimo es hallado. El problema que surge entonces es el de establecer cómo puede ser alcanzada la solución de equilibrio óptimo a partir de poblaciones iniciales dadas, aplicando estrategias convenientes de captura de salmones y de arenques.

Continuando con el ejemplo:

Este es un problema de estabilización asintótica Para que la solución de equilibrio óptimo sea de valor práctico se requiere que el equilibrio óptimo sea asintóticamente estable, dado que si este no es el caso la aparición de pequeñas perturbaciones inevitables de las poblaciones de sus tallas óptimas dará lugar a grandes desviaciones del punto de equilibrio.

Este es un problema de estabilización robusta Sin embargo la estabilidad asintótica no es suficiente, ya que se requiere que dicha propiedad sea preservada ante perturbaciones que reflejen incertidumbres en el modelo y en sus parámetros.

Un ejemplo más complejo...



El quimiostato

2.4 El quimiostato

Ejemplo 4 (Modelado de un Quimiostato) *El Quimiostato es un sistema de cultivo en continuo de micro-organismos. Su operación esquemática se muestra en la figura de la transparencia precedente.*

En relación con este sistema se tienen las siguientes definiciones:

- V = volumen constante de solución en la cámara de cultivo
 F = flujos (contantes e iguales) en vol/sec (e.g. m^3/s)
 $N(t)$ = concentración bacteriana en mass/vol (e.g. g/m^3)
 $C_0, C(t)$ = concentraciones del nutriente en mass/vol (C_0 es constante)

La cámara de cultura es un bioreactor continuamente agitado (CSTR por sus siglas en inglés).

Se toman en cuenta las siguientes consideraciones:

- ★ *El crecimiento de la biomasa en cada unidad de volumen es proporcional a la población (y a la longitud del intervalo) y depende de la cantidad de nutriente en el volumen:*

$$N(t + \Delta t) - N(t) \text{ debido al crecimiento} = K(C(t))N(t)\Delta t$$

(el significado de la función $K(C)$ se discute posteriormente).

- ★ *El consumo de nutriente por unidad de volumen es proporcional al incremento en la población de bacterias:*

$$C(t + \Delta t) - C(t) = -\alpha [N(t + \Delta t) - N(t)]$$

Se tienen las siguientes cantidades:

★ *Biomasa total: $N(t)V$.*

★ *Nutriente total en la cámara de cultivo: $C(t)V$.*

Se toman estas dos variables, esto es $N(t)V$ y $C(t)V$. El vector de estado está entonces dado por:

$$\begin{bmatrix} N(t)V \\ C(t)V \end{bmatrix}$$

Procedemos entonces a describir como cambian estas variables:

★ *Cambio en la biomasa en el intervalo Δt debido al crecimiento:*

$$N(t + \Delta t)V - N(t)V = [N(t + \Delta t) - N(t)]V = K(C(t))N(t)\Delta t V.$$

★ *Masa bacterial en el flujo de salida: en un intervalo pequeño Δt , el volumen de salida es $F \cdot \Delta t$ (cuyas unidades son $\frac{m^3}{s} \cdot s = m^3$).*

Por lo tanto, dado que la concentración es $N(t)$ (g/m^3), la masa de salida es $N(t) \cdot F \cdot \Delta t$ (g). En consecuencia la contribución a $d(NV)/dt$ es $-N(t)F$.

Resumiendo, $d(NV)/dt$ está constituida por los términos:

$$K(C)N(t)V$$

$$-N(t)F$$

En lo que respecta a la ecuación para $d(CV)/dt$, esta posee tres términos:

$-\alpha K(C)N$ (depleción),

$-C(t)F$ (flujo de salida),

$+C_0F$ (flujo de entrada).

Por lo anterior se llega entonces al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} \frac{d(NV)}{dt} = K(C)NV - NF, \\ \frac{d(CV)}{dt} = -\alpha K(C)NV - CF + C_0F. \end{cases}$$

o bien, dividiendo entre V:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = K(C)N - \frac{NF}{V}, \\ \frac{dC}{dt} = -\alpha K(C)N - \frac{CF}{V} + \frac{C_0F}{V}. \end{cases}$$

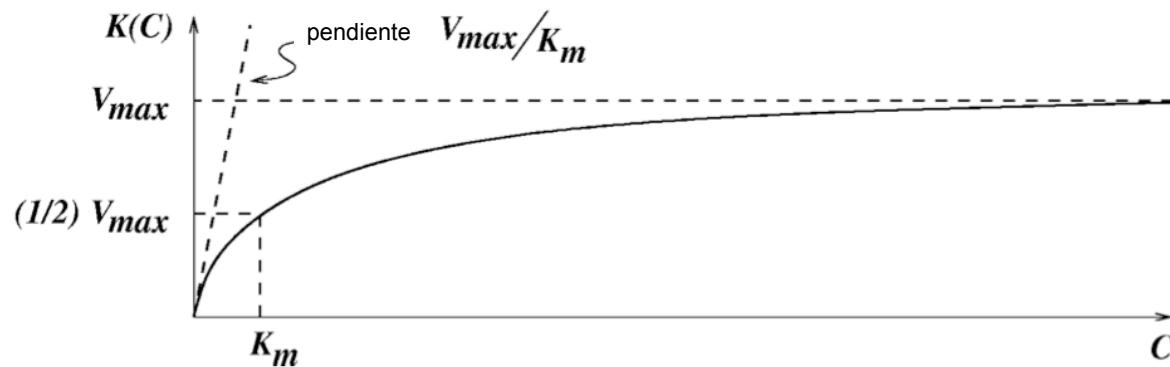
En cuanto a la función de crecimiento una de las formas más comunes es la siguiente (Forma de Michaelis-Menten):

$$K(C) = \frac{k_{max}C}{k_n + C}$$

o en otra notación también muy común:

$$K(C) = \frac{V_{max}C}{k_m + C}.$$

La función precedente tiene el siguiente comportamiento:



Para pequeñas concentraciones de nutriente se puede aproximar la función por una lineal:

$$K(C) \approx K(0) + K'(0)C = \frac{V_{max}C}{K_m},$$

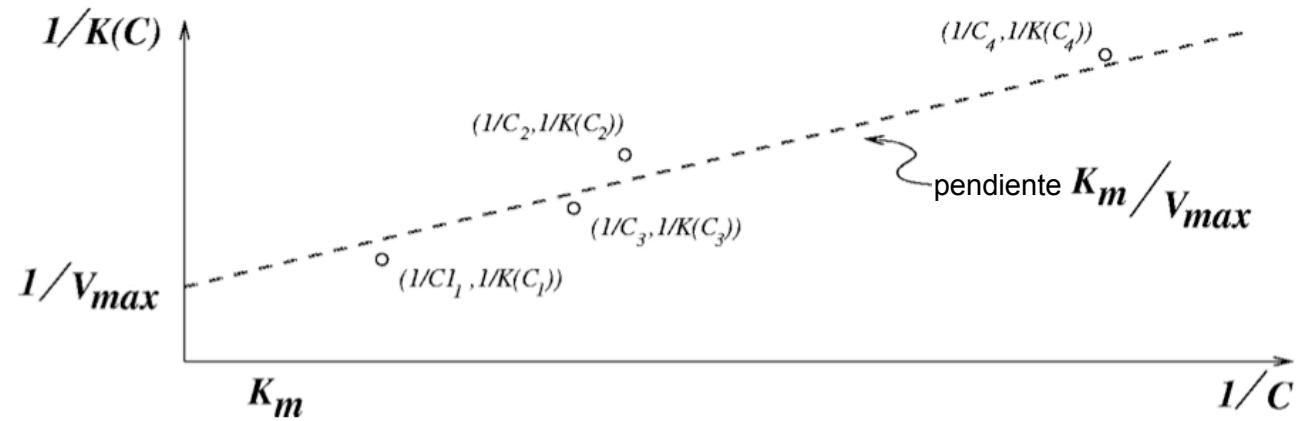
pero esta función se satura a V_{max} cuando $C \rightarrow \infty$.

Los valores de K_m y de V_{max} pueden estimarse a partir de mediciones experimentales de $K(C_i)$'s. En efecto, como puede verse:

$$\frac{1}{K(C)} = \frac{K_m + C}{V_{max}C} = \frac{1}{V_{max}} + \frac{K_m}{V_{max}} \cdot \frac{1}{C},$$

esto es $1/K(C)$ es una función lineal de $1/C$.

Por lo tanto, se gráfica $1/K(C)$ contra $1/C$ y se obtiene la línea correspondiente por medio de regresión lineal, tal y como se muestra en la siguiente figura.



Obtención de los parámetros de la función de Michaelis-Menten.

Análisis:

Para analizar el comportamiento cualitativo del sistema se procede entonces a la realización de cambios de variables y escalamiento, para minimizar el número de parámetros implicados.

Así:

Tomando $C = C^* \hat{C}$, $N = N^* \hat{N}$, $t = t^* \hat{t}$ y substituyendo:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{d(N^* \hat{N})}{d(t^* \hat{t})} & = & \frac{k_{max}((C^* \hat{C}))}{k_n + (C^* \hat{C})} (N^* \hat{N}) - (F/V) (N^* \hat{N}) \\ \frac{d(C^* \hat{C})}{d(t^* \hat{t})} & = & -\alpha \frac{k_{max}((C^* \hat{C}))}{k_n + (C^* \hat{C})} (N^* \hat{N}) - (F/V) C_0 \end{array} \right.$$

Lo anterior da lugar a:

$$\begin{cases} \frac{dN^*}{dt^*} = \frac{\hat{t}k_{max}C^*\hat{C}}{k_n+C^*\hat{C}}N^* - \frac{\hat{t}F}{V}N^* \\ \frac{dC^*}{dt^*} = -\alpha \frac{\hat{t}k_{max}C^*}{k_n+C^*\hat{C}}N^*\hat{N} - \frac{\hat{t}F}{V}C^* + \frac{\hat{t}F}{\hat{C}V}C_0 \end{cases}$$

O:

$$\begin{cases} \frac{dN^*}{dt^*} = (\hat{t}k_{max}) \frac{C^*}{k_n/\hat{C}+C^*}N^* - \frac{\hat{t}F}{V}N^* \\ \frac{dC^*}{dt^*} = -\left(\frac{\alpha\hat{t}k_{max}\hat{N}}{\hat{C}}\right) \frac{C^*}{k_n/\hat{C}+C^*}N^* - \frac{\hat{t}F}{V}C^* + \frac{\hat{t}F}{\hat{C}V}C_0. \end{cases}$$

Se intenta ahora tener:

$$\frac{k_n}{\hat{C}} = 1,$$

$$\frac{\hat{t}F}{V} = 1,$$

y:

$$\frac{\alpha \hat{t} k_{max} \hat{N}}{\hat{C}} = 1,$$

lo cual de hecho se obtiene definiendo:

$$\hat{C} := k_n, \quad \hat{t} := \frac{V}{F}, \quad \text{y} \quad \hat{N} := \frac{\hat{C}}{\alpha \hat{t} k_{max}} = \frac{k_n}{\alpha \hat{t} k_{max}} = \frac{k_n F}{\alpha V k_{max}}.$$

En consecuencia:

$$\begin{cases} \frac{dN^*}{dt^*} = \left(\frac{V k_{max}}{F}\right) \frac{C^*}{1+C^*} N^* - N^* \\ \frac{dC^*}{dt^*} = -\frac{C^*}{1+C^*} N^* - C^* + \frac{C_0}{k_n}. \end{cases}$$

Eliminando las estrellas e introduciendo las nuevas constantes $\alpha_1 := \frac{V k_{max}}{F}$ y $\alpha_2 := \frac{C_0}{k_n}$:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = \alpha_1 \frac{C}{1+C} N - N, \\ \frac{dC}{dt} = -\frac{C}{1+C} N - C + \alpha_2. \end{cases}$$

Para ejercitarse...

Ejercicio 11 En el Ejemplo 4 considere $\hat{t} := \frac{1}{k_{max}}$, $\hat{C} = \frac{\hat{t}FC_0}{V}$ y la misma \hat{N} . Reduzca el sistema original, esto es:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = K(C)N - \frac{NF}{V}, \\ \frac{dC}{dt} = -\alpha K(C)N - \frac{CF}{V} + \frac{C_0F}{V}, \end{cases}$$

a un sistema con dos parámetros.

Ejercicio 12 Obtenga los puntos de equilibrio del sistema $\bar{X} := (\bar{N}, \bar{C})$:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = \alpha_1 \frac{C}{1+C} N - N, \\ \frac{dC}{dt} = -\frac{C}{1+C} N - C + \alpha_2. \end{cases}$$

Clarifique las condiciones que deben satisfacer α_1 y α_2 para que el sistema se encuentre en un punto de equilibrio que satisfaga $\bar{N} \geq 0$ y $\bar{C} \geq 0$.

Unos cuantos ejercicios más...

Ejercicio 13 *Diseñe un simulador en Mathematica para el sistema del ejercicio precedente, que permita ver el comportamiento del sistema en torno al punto de equilibrio en el plano de fase, eligiendo los valores de los parámetros y la condición inicial por medio de controles deslizables en una interface gráfica de usuario. Alternativamente desarrolle el simulador como un applet en Java que utilice Maple.*

Ejercicio 14 *En el problema en el que se abordó el control por retroalimentación (esto es cuando se especificó como tasa de cosecha a $u(t) = cx(t)$), ¿cómo se mediría $x(t)$ de manera instantánea?*

Ejercicio 15 ¿Cómo introduciría el papel de la vegetación de la que se alimentan las cabras en el modelo de Lotka-Volterra?

Ejercicio 16 Suponga que a la isla de las cabras y de los lobos llega a vivir un tigre (que podría alimentarse tanto de cabras como de lobos), ¿cómo lo incluiría en el modelo de Lotka-Volterra? Suponga además la presencia de conejos (que no son comidos ni por lobos ni por el tigre), pero que se alimentan de las mismas plantas que las cabras.

Ejercicio 17 *En un ámbito urbano como el de la Ciudad de México, ¿podría modelarse la interacción entre asaltantes y víctimas de asaltantes por medio de un modelo de tipo Lotka-Volterra?, ¿cómo se obtendrían los parámetros del modelo?, ¿cómo incluiría en su modelo el papel de la corrupción de los agentes de la policía encargados de evitar los asaltos?*

Ejercicio 18 *El impacto mediático de un gobierno se mide por la credibilidad positiva que tienen sus acciones al ser publicitadas entre sus posibles votantes. El impacto mediático positivo de las acciones de los opositores tiende a reducir el impacto mediático de las acciones de gobierno. El número de electores susceptibles de votar por los candidatos oficialistas está acotado por el voto duro de los opositores. ¿Cómo plantearía la dinámica de este sistema utilizando el modelo logístico?, ¿a qué situación óptima quisiera llegar el gobierno?*

Ejercicio 19 Consideré el modelo de Schaefer:

$$\dot{x}(t) = r(K - x(t))x(t) - u(t).$$

Resuelve el problema de control óptimo siguiente, suponiendo que $u(t)$ es constante:

$$\text{Maximice } \int_{t_0}^{t_1} u(t) dt$$

sujeta a:

$$u(t) \geq 0, x(t, u) \geq 0, t \in [t_0, t_1], x(t_1) \geq x_1.$$

Ejercicio 20 Para el modelo de Lotka-Volterra:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = ax_1(t) - bx_1(t)x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = -cx_2(t) + dx_1(t)x_2(t) \end{cases}$$

(recuerde que a, b, c y d son constantes positivas), obtenga el plano de fase correspondiente, para al menos cuatro vectores de condiciones iniciales (positivas) diferentes (recomendación: utilizar Matlab y Mathematica).

COMENTARIO LAS POSIBILIDADES Y LAS LIMITACIONES: En los diversos modelos que hemos presentado se han empleado una serie de herramientas matemáticas bien adaptadas para nuestros propósitos (el poderoso cálculo). Sin embargo las herramientas poseen sus limitaciones propias (suavidad de las curvas involucradas, existencia de límites, . . .). Por otra parte muchas simplificaciones son debidas a nuestra ignorancia en torno a los fenómenos estudiados y conforme aumenta el conocimiento se imponen mayores restricciones al herramiental matemático. El modelado acontece en la interacción entre la complejidad de lo real y el alcance de las herramientas para la descripción.