Capítulo 3
CURSO PROPEDEUTICO DE ANÁLISIS REAL
Depto. de Control Automático, CINVESTAV-IPN, Mayo-Junio 2013
Ejemplar de material completo.

****

3. Convergencia en $I\!R$

3.1. Sucesiones y sus límites

Sea (V, d) un espacio métrico (por ejemplo $(I\!R, d), d(x, y) =\mid x - y \mid$ métrica Euclideana !!!)

Def.: Una *sucesión* de elementos de V es un mapeo $f : I\!N \longrightarrow V$, es decir: Para todo $n \in I\!N$, $f(n) = x_n \in V$, y se denota por $(x_n)_{n\geq 1}$ o (x_n).

Fijamos $x \in V$ — Se acerca (x_n) a x ?, Qué tan lejos están los x_n de x ?

Def.: La sucesión (x_n) *converge* a x ($x \in V$) si para cada $\epsilon > 0$ ($\epsilon \in I\!R$) existe un número natural n_ϵ tal que $d(x_n, x) < \epsilon \ \forall \ n \geq n_\epsilon$; entonces x se llama *límite* de (x_n), y se escribe $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. (x_n) se llama *divergente* si no existe ningún $x \in V$ tal que (x_n) converge a x.

Ejemplo: Demostramos que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, para $x_n = \frac{1}{n}$: Sea $\epsilon > 0$ arbitrariamente dado ($\epsilon \in I\!R$.

Puesto que $1/\epsilon \in I\!R$, por el Principio de Archimedes existe un número natural $n_\epsilon \in I\!N$ tal que $\frac{1}{\epsilon} < n_\epsilon$. Pero eso es equivalente a (multiplicando con ϵ, aprovechando que $\epsilon > 0$) $n_\epsilon \cdot \epsilon > 1$, lo cual implica (dividiendo entre n_ϵ, aprovechando que $n_\epsilon > 0$) que $\epsilon > \frac{1}{n_\epsilon}$.

Tenemos que $d(x_n, 0) = d(\frac{1}{n}, 0) =\mid \frac{1}{n} - 0 \mid= \frac{1}{n}$. Pero entonces la suposición $n \geq n_\epsilon$ implica de inmediato que $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_\epsilon} < \epsilon$. En consecuencia $d(x_n, 0) < \epsilon$ siempre cuando $n \geq n_\epsilon$, lo cual completa la demostración.

$\square$

Qué significa la definición de convergencia ???

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ siempre cuando vale lo siguiente; para cada $\epsilon > 0$ dado, se puede encontrar un $n_\epsilon \in I\!N$ tal que $d(x_n, x) < \epsilon$ siempre cuando $n \geq n_\epsilon$. En nuestro ejemplo $x_n = \frac{1}{n}$, sigamos la construcción de los $n_\epsilon \in I\!N$ como en la demostración de arriba.
Para $\epsilon = 10$, el principio de Archimedes nos asegura la existencia de $n_\epsilon \in I\!N$ tal que $n_\epsilon > \frac{1}{10}$. Claro, eso es fácil, podemos tomar por ejemplo $n_\epsilon = 1$. Entonces se obtiene $d(x_n, 0) = d(\frac{1}{n}, 0) = \frac{1}{n} < 10$ para todo n que cumple $n \geq 1$ — eso es correcto, pues definitivamente $0 < \frac{1}{n} \leq 1$ para todo $n \geq 1$.
Tomemos un ϵ más chico, por ejemplo $\epsilon = 1$. Entonces $1/\epsilon = 1$, así que, n_ϵ debe ser estrictamente mayor a 1; podemos tomar por ejemplo $n_\epsilon = 2$. Suponiendo $n \geq 2$, obtenemos satisfactoriamente que $d(x_n, 0) = \frac{1}{n} < 1$.

Sea ϵ aún más chico: $\epsilon = \frac{1}{2}$. Entonces $1/\epsilon = 2$, así que, n_ϵ debe ser estrictamente mayor a 2; podemos tomar por ejemplo $n_\epsilon = 3$. Suponiendo $n \geq 3$, obtenemos satisfactoriamente que $d(x_n, 0) = \frac{1}{n} < \frac{1}{2}$.
Sea ϵ aún mucho más chico: $\epsilon = \frac{1}{100}$. Entonces $1/\epsilon = 100$, así que, n_ϵ debe ser estrictamente mayor a 100; podemos tomar por ejemplo $n_\epsilon = 101$. Suponiendo $n \geq 101$, obtenemos satisfactoriamente que $d(x_n, 0) = \frac{1}{n} < \frac{1}{100}$.
El ejemplo nos enseña que en general es mucho más difícil encontrar un n_ϵ concreto útil para un ϵ dado muy pequeño.

De aquí aprendemos: aplicando la definición se puede **demostrar** que el límite de (x_n) es x, pero la def. no proporciona herramientas para **calcular** el límite de (x_n).

Otro ejemplo: Sucesión constante $x_n = a \ \forall n$; claro que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, lo cual es muy fácil de demostrar.

Proposición: *Si (x_n) es una sucesión en un espacio métrico (V, d), entonces $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \iff$ Para cada $\epsilon > 0$, el número de números n que satisfacen que $x_n \notin U_\epsilon(x)$, es finito.*
($U_\epsilon(x) = \{y \in V : \ d(x, y) < \epsilon\}$ es el disco abierto alrededor de x con radio ϵ).

Para el espacio métrico $(I\!R, d(x, y) =| x - y |)$ tenemos entonces:

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$
si y sólo si $(\forall\ \epsilon > 0,\ \exists n_\epsilon \in I\!N$ tal que $| x_n - x |< \epsilon\ \forall n \geq n_\epsilon)$
si y sólo si $(\forall\ \epsilon > 0,\ \exists n_\epsilon \in I\!N$ tal que $x - \epsilon < x_n < x + \epsilon\ \forall n \geq n_\epsilon)$
si y sólo si $(\forall\ \epsilon > 0,\ \{n \in I\!N : \ x_n \notin (x - \epsilon, x + \epsilon)\}$ es finito).

Comentarios:
— en **cualquier** disco abierto alrededor del punto límite se encuentran infinitamente muchos elementos de la sucesión (no importa qué tan pequeño sea el radio !)
— la convergencia (o no ...) de una sucesión se determina por lo que pasa en la "cola" de la sucesión, no por lo que puede pasar en su "cabeza" (es decir, en sus "primeros" elementos, aúnque estos sean milliones de muchos, son solo finitamente muchos, por lo cual el número de ellos es despreciable en comparación de los infinitamente muchos en la "cola").

3.2. Propiedades de sucesiones

Tipos especiales de sucesiones en $I\!R$:

- Sucesión *acotada*: (x_n) tal que existe $m \in I\!R^+$ tal que $| x_n |\leq m$ para todo $n \in I\!N$ (es decir, $x_n \in [-m, m]\ \forall n$)

  Recordamos que un subconjunto de $I\!R$ es acotado si tiene cotas inferiores y superiores. Una sucesión (x_n) es acotada si el conjunto de sus valores $\{x_1, x_2, x_3, \cdots\}$ es acotado en $I\!R$.

Ejemplo: La sucesión $x_n = \frac{1}{n}$ es acotada; para hacer cumplr la definición, podemos tomar $m = 1$. De hecho, toda la sucesión se encuentra entre las cotas 0 y 1.

- Sucesiones *monótonas*: $(x_n)_{n\geq 1}$ se llama

  [estrictamente] creciente si $x_n \leq x_{n+1}$ $[x_n < x_{n+1}]$ $\forall\, n \in I\!N$;

  [estrictamente] decreciente si $x_n \geq x_{n+1}$ $[x_n > x_{n+1}]$ $\forall\, n \in I\!N$;

  [estrictamente] monótona si es [estrictamente] creciente o decreciente;

  Ejemplos:

  $(x_n) = (n)$, $(x_n) = (a^n)$ para $a > 1$, $(x_n) = \{1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, \cdots\}$ son sucesiones crecientes.

  $x_n = \frac{1}{n}$ y $x_n = b^n$ para $0 < b < 1$ definen sucesiones decrecientes.

  Las sucesiones dadas por $x_n = (-1)^{n+1}$ y por $x_n = (-1)^n \cdot n$ no son monótonas.

Propiedades de la convergencia en un esp. métrico (V, d):

- Para toda sucesión, si tiene un límite, este es únicamente determinado.
- $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ (en V !) $\iff$ $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$ (en $I\!R$!).

Otras **propiedades de la convergencia en $I\!R$** (estas proporcionan herramientas para calcular límites !!!):

- Toda sucesión convergente es acotada.
- Si (x_n) y (y_n) son convergentes con $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$, entonces las sucesiones $(x_n + y_n)_{n\geq 1}$ y $(x_n \cdot y_n)_{n\geq 1}$ son también convergentes, y $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = x + y$, $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = x \cdot y$.
- Si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, y $x \neq 0, x_n \neq 0\ \forall\, n$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{x_n}) = \frac{1}{x}$.
- Si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$, y $y \neq 0, y_n \neq 0\ \forall\, n$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{x_n}{y_n}) = \frac{x}{y}$.
- Si (x_n) y (y_n) son convergentes y $x_n \leq y_n$ para todo n, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

  Corolario: aplicando eso a la sucesión constante $x_n = 0$ obtenemos: Si (y_n) es convergente y $y_n \geq 0\ \forall\, n$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \geq 0$.
- Si (x_n) es convergente y existen $a, b \in I\!R$ tales que $a \leq x_n \leq b\ \forall\, n$, entonces $a \leq \lim\limits_{n\to\infty} x_n \leq b$.

- Si (x_n) es **monótona**, entonces lo siguiente es verdad:

  i) (x_n) es convergente $\iff$ (x_n) es acotada.

  ii) Si (x_n) es creciente y acotada, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup(\{x_n, n \in I\!N\})$.

  iii) Si (x_n) es decreciente y acotada, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \inf(\{x_n, n \in I\!N\})$.

Ejemplos de aplicación de estas propiedades:

1. La sucesión (x_n) dada por $x_n = n$ es divergente.
Para demostrar eso, supongamos que (x_n) es convergente. Eso implica que (x_n) es acotada, entonces existe un número real $m, m > 0$, tal que $\mid x_n \mid = n < m$ para todo $n \in I\!N$. Pero eso contradice al principio de Archimedes (que dice que debe existir un $n' \in I\!N$ tal que $m < n'$), por lo cual es falso. En consecuencia, (x_n) no es convergente.

2.

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+1}{n} \right) = 2 \ ,$$

puesto que (separando la sucesión en dos sucesiones simples y convergentes)

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+1}{n} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n}{n} \right) + \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \right) = 2 + 0 = 2,$$

puesto que la primera sucesión es la sucesión constante $a_n = \frac{2n}{n} = 2$ y la segunda es la sucesión $b_n = \frac{1}{n}$, ambas siendo convergentes con límites 2 y 0, respectivamente.

3. Para calcular el límite de la sucesión

$$x_n = \frac{2n+1}{n+5}$$

observamos de inmediato que una representación como cociente de las sucesiones $c_n = 2n+1$ y $d_n = n+5$ no sirve, pues ambas son divergentes. Por eso hay que buscar otra forma de escribir x_n, por ejemplo ciertamente vale

$$x_n = \frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{5}{n}} = \frac{a_n}{b_n}, \ a_n = 2 + \frac{1}{n}, \ b_n = 1 + 5 \cdot \frac{1}{n}.$$

(a_n) es la suma de una sucesión constante igual a 2 (con límite 2) y la sucesión $(\frac{1}{n})$ con límite 0. De manera parecida (b_n) es la suma de la sucesión constante igual a 1 y el producto de la sucesión constante igual a 5 y la sucesión $(\frac{1}{n})$ con límite 0. Ambas sucesiones (a_n) y (a_n) son convergentes. Además $b_n \neq 0$ para todo $n \in I\!N$, y el límite de (b_n) es distinto de cero. Por eso tenemos

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 2 + 0 = 2, \ \lim_{n\to\infty} b_n = 1 + 5 \cdot 0 = 1, \ \lim_{n\to\infty} x_n = \frac{2}{1} = 2.$$

4. Para calcular el límite de la sucesión

$$x_n = \frac{2n}{n^2+1}$$

hay que expresar x_n como cociente / suma / producto de sucesiones mas sencillas, pero tienen que ser todas convergentes. Las sucesiones $(2n)_{n\geq 1}$ y $(n^2+1)_{n\geq 1}$ no son convergentes (ejercicio a pensar). Aplicando el mismo truco como en el ejemplo anterior, dividiendo entre n, se obtiene

$$x_n = \frac{2}{n+\frac{1}{n}}$$

lo cual tampoco sirve, puesto que $(n+\frac{1}{n})_{n\geq 1}$ no es convergente (ejercicio a pensar). De nuevo dividiendo entre n (se puede puesto que $n \neq 0$!!), se obtiene

$$x_n = \frac{\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n^2}} \ ,$$

lo cual es una representación como cociente de sucesiones convergentes:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n}\right) = 2\cdot 0 = 0, \ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right) = 1+0 = 1 \neq 0, \ \lim_{n\to\infty} x_n = \frac{0}{1} = 0.$$

5. la sucesión dada por

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

es decreciente puesto que $n \leq n+1$ implica que $\sqrt{n} \leq \sqrt{n+1}$ y luego $1/\sqrt{n} \geq 1/\sqrt{n+1}$ lo cual significa $x_n \geq x_{n+1}$.
Analizando al conjunto de valores $M = \{x_1, x_2, \cdots\} = \{1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{4}}, \cdots\}$, encontramos que 1 es una cota superior de M, de hecho, $1 = max(M) = sup(M)$. Claro que $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq 0$ para todo $n \in I\!N$, por lo cual 0 es una cota inferior. En consecuencia, M es acotado y por lo tanto, la sucesión creciente (x_n) es convergente con el límite

$$\lim_{n\to\infty} x_n = inf(M).$$

La sospecha es que $inf(M) = 0$. Para demostrar eso, supongamos que m sea cualquier (otra) cota inferior de M, y debemos demostrar que $m \leq 0$.
Por lo contrario, suponemos que que $m > 0$ (estrictamente). Debido a que m es cota inefrior de M, se sigue que $m \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ para todo $n \in I\!N$. Pero además, m es un número real (estrictamente) positivo, que implica que también $\frac{1}{m^2}$ es un número real positivo.
Por el principio de Archimedes existe $k \in I\!N$ tal que $\frac{1}{m^2} < k$, entonces $\frac{1}{m} < \sqrt{k}$, $1 < \sqrt{k}\cdot m$, $\frac{1}{\sqrt{k}} < m$. Nótese que k es un número natural ("es un n" !). En

otras palabras, hemos encontrado que algún elemento de la sucesión (x_n) es estrictamente menor a m, lo cual contradice la suposición que m es cota inferior de (x_n).
En consecuencia, $m > 0$ es falso, lo cual demuestra que $m \leq 0$.

$\square$

Un caso especial de las sucesiones divergentes son las "sucesiones propiamente divergentes":

Def.: Sea $(x_n)_{n\geq 1} \subset I\!R$.
Se dice que (x_n) *tiende a* ∞ (se escribe $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$) si para todo $a \in I\!R$ existe $n_a \in I\!N$ tal que $n \geq n_a$ implica $x_n > a$.
Se dice que (x_n) *tiende a* $-\infty$ (se escribe $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$) si para todo $b \in I\!R$ existe $n_b \in I\!N$ tal que $n \geq n_b$ implica $x_n < b$.
(x_n) se llama *propiamente divergente* si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ o $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

Ejemplos:
1. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ para $x_n = n$, $n \in I\!N$ (ya sabíamos que (x_n) es divergente).
Para demostrar eso, sea $\alpha \in I\!R$ arbitrario. Podemos tomar $n_\alpha \in I\!N$ de tal manera que $n_\alpha > \alpha$. (Para $\alpha \leq 0$ tomamos $n_\alpha = 1$. Para $\alpha > 0$ el principio de Archimedes nos regala un $n_\alpha > \alpha$).

2. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ para $x_n = n^2$, $n \in I\!N$.
Para demostrar eso, sea $\alpha \in I\!R$ arbitrario. Como arriba, podemos tomar $n_\alpha \in I\!N$ de tal manera que $n_\alpha > \alpha$. Entonces, $n \geq n_\alpha$ implica que $n > \alpha$, pero $n^2 \geq n$, en consecuencia $n^2 > \alpha$, lo cual comprueba que n_α sirve para hacer cumplir la definición.

De la última definición y las propiedades reportadas arriba lo siguiente es claro.

Corolario: Toda sucesión monótona es propiamente divergente si y sólo si no es acotada.
En particular, si (x_n) es creciente [decreciente] no acotada, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ [$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$].

3.3. Sucesiones de Cauchy

Def.: La sucesión (x_n) en un espacio métrico (V, d) se llama *sucesión de Cauchy* si para todo $\epsilon > 0$ existe $h_\epsilon \in I\!N$ tal que $d(x_n, x_m) < \epsilon$ siempre cuando $n, m \geq h_\epsilon$.

Analizando el caso $V = I\!R$: Sea (x_n) una sucesión convergente, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in$ ($I\!R$!!). Por la definición de convergencia tenemos: Para $\frac{\epsilon}{2} > 0$ existe $n_{\frac{\epsilon}{2}} \in I\!N$ tal que $n \geq n_{\frac{\epsilon}{2}}$ implica $\mid x_n - x \mid < \frac{\epsilon}{2}$. Ahora, suponiendo $n, m \geq h_{\frac{\epsilon}{2}}$ para $h_{\frac{\epsilon}{2}} = n_{\frac{\epsilon}{2}}$, obtenemos

$$\mid x_n - x_m \mid = \mid (x_n - x) + (x - x_m) \mid \leq \mid x_n - x \mid + \mid x_m - x \mid < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

en consecuencia, (x_n) es un sucesión de Cauchy ! Esta demostración es generalizable facilmente par cualquier espacio métrico !! Eso implica:

Lema: *En cualquier espacio métrico, toda sucesión convergente es de Cauchy.*

Al revés ??? en general: NO.

Ejemplo: Hay sucesiones de números racionales que convergen a un número real irracional. Un ejemplo es

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, n \in \mathbb{N} \ .$$

Esa es una sucesión famosa, la cual es estrictamente creciente y acotada: $2 \leq x_n \leq 3$. Ambas propiedades son no muy fáciles de demostrar. Como consecuencia, la sucesión es convergente. Su límite es un número irracional (es decir, no expresable como cociente de dos números enteros) el cual recibe el nombre e - **número de Euler**, vale aprox. $e = 2.718$.

Sea (x_n) una sucesión de números racionales con su límite real irracional x. (x_n) puede ser vista también como sucesión en $\mathbb{R}$, donde es convergente y por lo tanto de Cauchy. Pero entonces, (x_n) es una sucesión de Cauchy también en el espacio métrico $(\mathbb{Q}, d_{Euclid})$, debido a que se trata de la misma métrica como en $\mathbb{R}$. Sin embargo, (x_n) NO es convergente en $\mathbb{Q}$, porque el único límite (sólo existe uno !) de la sucesión no pertenece a este espacio. El hecho que una sucesión de Cauchy no es convergente, expresa una propiedad del espacio (y no tanto de la sucesión misma); nos podemos imaginar que este espacio "tiene huecos".

Sin embargo, en $\mathbb{R}$ el hecho que una sucesión es de Cauchy, es suficiente para la convergencia:

Lema: *(Criterio de Cauchy de convergencia en $\mathbb{R}$) Una sucesión de números reales es convergente si y sólo si es de Cauchy.*

3.3. Series infinitas como sucesiones especiales

Trabajamos en el espacio vectorial normado $(\mathbb{R} \mid \cdot \mid)$, donde $(x_n)_{n\geq 1}$ sea una sucesión.

Definimos inductivamente una sucesión nueva
$(s_n)_{n\geq 1}$: $s_1 = x_1$, $s_{n+1} = s_n + x_{n+1}$.

$s_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$ se llama *suma parcial n-esima de* $(x_n)_{n\geq 1}$. Si $(s_n)_{n\geq 1}$ es convergente, entonces $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$ ($s \in \mathbb{R}$!) se llama *serie infinita de* $(x_n)_{n\geq 1}$, y se denota por $s = \sum_{i=1}^{\infty} x_i$.

Si $(s_n)_{n\geq 1}$ no es convergente, se consideran dos casos:

i) $(s_n)_{n\geq 1}$ es propiamente divergente, es decir, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$ o $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = -\infty$ — se dice que la serie $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ *diverge propiamente* a ∞ o $-\infty$;

ii) en otro caso, tenemos una *divergencia indeterminada* de $(s_n)_{n\geq 1}$ — se dice que la serie $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ "oscila".

Nota: en ocasiones es útil iniciar la enumeración de (s_n) con $n = 0$ o con algún otro número entero.

Ejemplos:
1. La serie $\sum_{s=0}^{\infty} aq^s = a + aq + aq^2 + \cdots$ es convergente para $\mid q \mid < 1$ y tiene la suma $\frac{a}{1-q}$.
Para demostrar eso, consideramos la sucesión $s_n = \sum_{s=0}^{n} aq^s = a \sum_{s=0}^{n} q^s = a\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ (vea literatura, la última formula se demuestra por inducción matemática).
Entonces

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a}{1-q} \cdot \lim_{n\to\infty} \left(1 - q^{n+1}\right) = \frac{a}{1-q} \cdot (1-0) = \frac{a}{1-q},$$

debido a que $\lim\limits_{n\to\infty} q^{n+1} = 0$ siempre cuando $\mid q \mid < 1$.

2. Si $x_s = 1$ es la sucesión constante igual a 1, la serie $\sum_{s=1}^{\infty} x_s = \infty$. La serie es propiamente divergente puesto que $s_n = \sum_{s=1}^{n} x_s = n$ define una sucesión (s_n) monótona creciente no acotada por arriba.

3. La serie $\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^s = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ es divergente puesto que la sucesión (s_n), $s_n = \sum_{s=1}^{n}(-1)^s$ de las sumas parciales oscila entre -1 y 0.

Lema: (Criterio necesario de convergencia de series)

Si $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ es convergente, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Demostración: $s = \sum_{i=1}^{\infty} x_i = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} s_{n+1}$, con $s_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$. Entonces podemos escribir $0 = s - s = \lim\limits_{n\to\infty} (s_{n+1} - s_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, y terminamos. $\square$

El criterio no es suficiente !

Ejemplo: La sucesión (x_k) dada por $x_k = ln(1 + \frac{1}{k}), k \in I\!N$ es convergente y tiene el límite 0. Para ver eso, observamos primero que

$$\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \leq e \text{ (número de Euler) } , k \in I\!N,$$

puesto que el número de Euler e es el límite de la sucesión creciente $((1 + \frac{1}{k})^k)$. Aplicando la función logaritmo con base e (es una función creciente !), se obtiene

$$ln\left[\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k\right] \leq ln(e) = 1,$$

que implica $k \cdot ln(1 + \frac{1}{k}) \leq 1$, y luego $0 \leq ln(1 + \frac{1}{k}) \leq \frac{1}{k}$. Aplicando el criterio de comparación de sucesiones y el hecho que $\lim\limits_{n\to\infty} (1/k) = 0$, recibimos

$$\lim_{n\to\infty} x_k = \lim_{n\to\infty}\left(ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right) = 0.$$

Considermos ahora la serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$: La suma parcial es $s_n = \sum_{k=1}^{n} ln(1+\frac{1}{k}) = \sum_{k=1}^{n} ln(\frac{k+1}{k}) = \sum_{k=1}^{n}(ln(k+1)-ln(k)) = ln(2)-ln(1)+ln(3)-ln(2)+ln(4)-ln(3)+\cdots+ln(n+1)-ln(n) = ln(n+1)-ln(1) = ln(n+1)-0 = ln(n+1)$ (casi todos los términos de la suma se cancelan !).
La sucesión $(n+1)_{n\geq 1}$ es creciente, ln es una función estrictamente creciente. Por lo tanto, $(s_n)_{n\geq 1}$ es creciente, pero claro que no es acotada por arriba. En consecuencia,

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{k=1}^{\infty} ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \infty.$$

Hay muchos criterios que ayudan a determinar si una serie es convergente o no, y proprocionan herramientas de calcular el limite de una serie, bajo ciertas condiciones a la serie, por ejemplo:

- Criterio de Cauchy para series: Si $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ es convergente, entonces la sucesión (s_n) definida por $s_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$ es de Cauchy.
- Si quitamos o agregamos un numero finito de términos de una serie, eso no afecta la convergencia o divergencia de la serie.
- $\sum_{i=1}^{\infty} x_i = \sum_{j=1}^{\infty} x_j$ (renombramiento del index),
- $\sum_{i=k}^{\infty} x_i = \sum_{i=0}^{\infty} x_{k+i}$ (traslación del index),
- Si $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ y $\sum_{i=1}^{\infty} y_i$ son convergentes, entonces

  $\sum_{i=1}^{\infty}(x_i+y_i) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i + \sum_{i=1}^{\infty} y_i$, $\sum_{i=1}^{\infty}(x_i-y_i) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i - \sum_{i=1}^{\infty} y_i$.

  Para $a \in I\!R$, $\sum_{i=1}^{\infty} a\cdot x_i = a\cdot\sum_{i=1}^{\infty} x_i$.
- Hay varios criterios para series con elementos no negativos (por ej. criterio de comparación, criterio de cocientes, criterio de la raiz).

****