# Trabajo Final - Sistemas con retardo en la entrada

Roberto Cadena Vega

21 de abril de 2015

## 1. Recapitulación de resultados empleados

### 1.1. Control predictivo

### 1.2. Implementación del retardo distribuido y sus problemas

### 1.3. Solución por medio de estabilización simultanea

### 1.4. Solución por medio de introducción de dinámicas

## 2. Implementación de control predictivo: ejemplo escalar

### 2.1. Resultados del articulo "Some problems arising in the implementation of distributed-delay control laws"

## 3. Implementación del método de estabilización simultanea

### 3.1. Ejemplo 1 - Doble integrador retardado

Para el sistema:

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t-h)$$

con $h = 1$.
El cual, bajo una ley de control de la forma:

$$u(t) = k \left[ x(t) + \int_{-h}^{0} e^{-A(\theta+h)} B u(t+\theta) d\theta \right]$$

tiene un polinomio caracteristico:

$$s^2 + (hk_1 - k_2)\, s - k_1$$

Al cual podemos aplicar el criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz y obtener:

$$k_1 < 0$$
$$k_2 < hk_1$$

Por lo que la gráfica de D-particiones del sistema en lazo cerrado se verá:
Por otro lado, para analizar el comportamiento del controlador, sustituimos los datos en la ecuación del controlador:

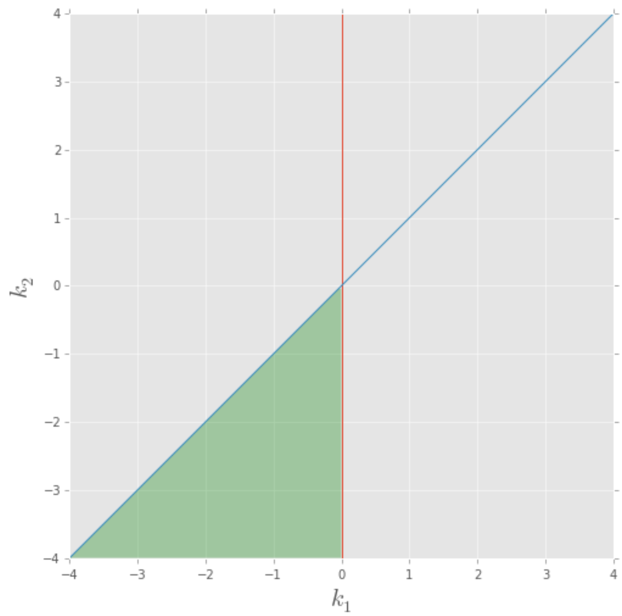


Figura 1: D-particiones de un doble integrador en lazo cerrado

$$
\begin{aligned}
u(t) &= \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \end{pmatrix} \int_{-h}^{0} e^{-A(\theta+h)} B u(t+\theta) d\theta \\
&= \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \end{pmatrix} \int_{-h}^{0} e^{-A(\theta+h)} B u(t+\theta) d\theta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u(t) &= \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \int_{-h}^{0} \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -(\theta+h) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t+\theta) d\theta \\
&= k_1 x_1(t) + k_2 x_2(t) - \int_{-h}^{0} k_1 \theta u(t+\theta) d\theta - \int_{-h}^{0} k_1 h u(t+\theta) d\theta + \int_{-h}^{0} k_2 u(t+\theta) d\theta
\end{aligned}
$$

y al aplicar la transformada de Laplace, tenemos:

$$
u(s) = k_1 x_1(s) + k_2 x_2(s) - h k_1 \frac{e^{-hs}}{s} u(s) + k_1 \frac{1-e^{-hs}}{s^2} u(s) - h k_1 \frac{1-e^{-hs}}{s} u(s) + k_2 \frac{1-e^{-hs}}{s} u(s)
$$

por lo que al pasar a un solo lado todos los terminos de $u(s)$:

$$
\begin{aligned}
\left[ 1 + h k_1 \frac{e^{-hs}}{s} - k_1 \frac{1-e^{-hs}}{s^2} + h k_1 \frac{1-e^{-hs}}{s} - k_2 \frac{1-e^{-hs}}{s} \right] u(s) &= k_1 x_1(s) + k_2 x_2(s) \\
\left[ 1 + \frac{h k_1 e^{-hs}}{s} - \frac{k_1}{s^2} + \frac{k_1 e^{-hs}}{s^2} + \frac{h k_1}{s} - \frac{h k_1 e^{-hs}}{s} - \frac{k_2}{s} + \frac{k_2 e^{-hs}}{s} \right] u(s) &= k_1 x_1(s) + k_2 x_2(s) \\
\left[ 1 - \frac{k_1}{s^2} + \frac{k_1 e^{-hs}}{s^2} + \frac{h k_1}{s} - \frac{k_2}{s} + \frac{k_2 e^{-hs}}{s} \right] u(s) &= k_1 x_1(s) + k_2 x_2(s) \\
\left[ 1 + \frac{k_1 e^{-hs} - k_1}{s^2} + \frac{h k_1 + k_2 e^{-hs} - k_2}{s} \right] u(s) &= k_1 x_1(s) + k_2 x_2(s)
\end{aligned}
$$

obtenemos el polinomio caracteristico de la ecuación de control:

$$1 + \frac{k_1 e^{-hs} - k_1}{s^2} + \frac{hk_1 + k_2 e^{-hs} - k_2}{s}$$

y al sustituir $s = j\omega$, obtendremos dos ecuaciones, correspondientes a la parte real e imaginaria:

$$k_1 \left[\omega h - \sin(\omega h)\right] - k_2 \left[\omega - \cos(\omega h)\right] = 0$$
$$-k_1 \left[1 - \cos(\omega h)\right] + k_2 \left[\omega \sin(\omega h)\right] - \omega^2 = 0$$

por lo que podemos despejar $k_2$ de ambas ecuaciones y obtener:

$$k_2 = \frac{k_1 \left[\omega h - \sin(\omega h)\right]}{\omega - \cos(\omega h)} = \frac{k_1 \left[1 - \cos(\omega h)\right] + \omega^2}{\omega \sin(\omega h)}$$

y haciendo un poco de algebra, podemos obtener:

$$\frac{k_1 \left[\omega h - \sin(\omega h)\right]}{\omega - \cos(\omega h)} = \frac{k_1 \left[1 - \cos(\omega h)\right] + \omega^2}{\omega \sin(\omega h)}$$
$$\frac{k_1 \left[\omega h - \sin(\omega h)\right]\left[\omega \sin(\omega h)\right]}{\omega - \cos(\omega h)} - k_1 \left[1 - \cos(\omega h)\right] = \omega^2$$
$$k_1 \frac{\left[\omega h - \sin(\omega h)\right]\left[\omega \sin(\omega h)\right] - \left[1 - \cos(\omega h)\right]\left[\omega - \cos(\omega h)\right]}{\omega - \cos(\omega h)} = \omega^2$$
$$k_1 = \frac{\omega^2 \left[\omega - \cos(\omega h)\right]}{\left[\omega h - \sin(\omega h)\right]\left[\omega \sin(\omega h)\right] - \left[1 - \cos(\omega h)\right]\left[\omega - \cos(\omega h)\right]}$$

Si sustituimos un punto por debajo de esta curva, $(k_1, k_2) = (0, 0)$, podemos ver que el polinomio caracteristico es trivialmente estable por el criterio de Routh-Hurwitz:

$$P(s) = 1$$

por lo que la gráfica de D-particiones para el controlador queda:

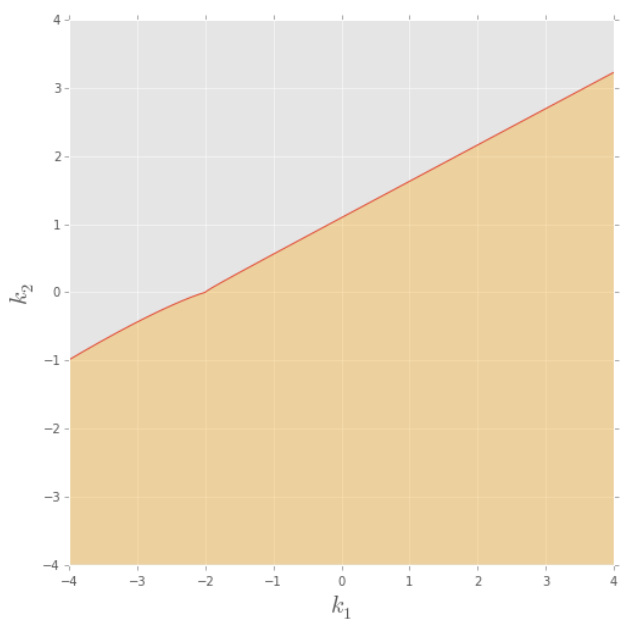


Figura 2: D-particiones de un controlador para doble integrador.

Y el sistema con este controlador será estable para los valores de $k_1$ y $k_2$ escogidos tal que se encuentren en la intersección de estas dos regiones:

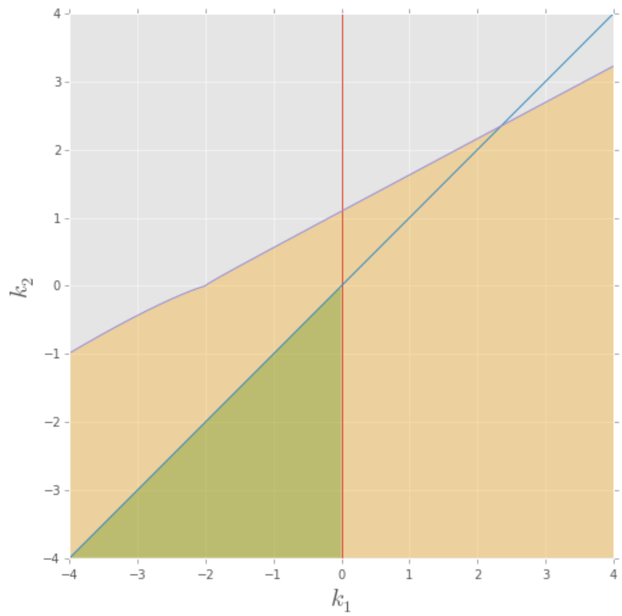


Figura 3: D-particiones de doble integrador.

### 3.2. Ejemplo 2 - Oscilador armónico retardado

Para el sistema:

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t-h)$$

con $h = 1$.
En lazo cerrado tiene un cuasiplolinomio:

$$s^2 + \frac{1}{2}s\left[-jk_1\left(e^{jh} - e^{-jh}\right) - k_2\left(e^{jh} + e^{-jh}\right)\right] + \frac{1}{2}\left[-k_1\left(e^{jh} + e^{-jh}\right) + jk_2\left(e^{jh} - e^{-jh}\right)\right]$$

Con una gráfica de D-particiones:
Para el controlador tenemos un cuasipolinomio caracteristico:

$$s^2 + 1 + k_1 j\left(s\sin(h) - \cos(h) + e^{-sh}\right) + k_2\left(\sin(h) + s\cos(h) - se^{-sh}\right)$$

con una gráfica de D-Particiones:

## 4. Implementación del método de introducción de dinámicas

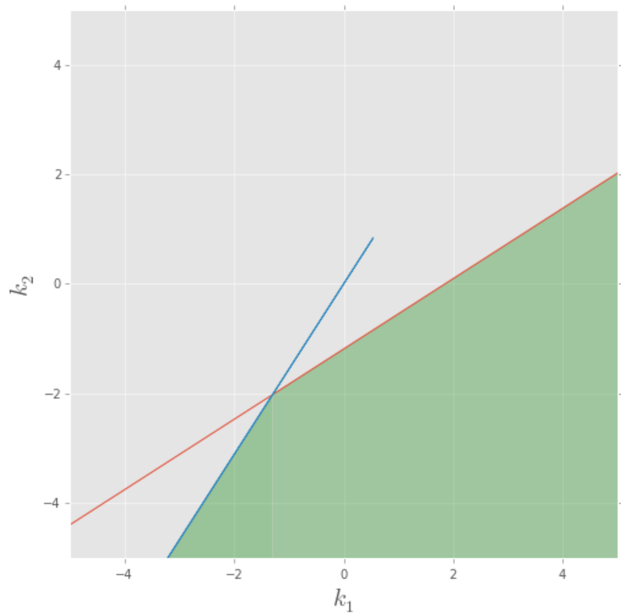


Figura 4: D-particiones oscilador armónico retardado en lazo cerrado

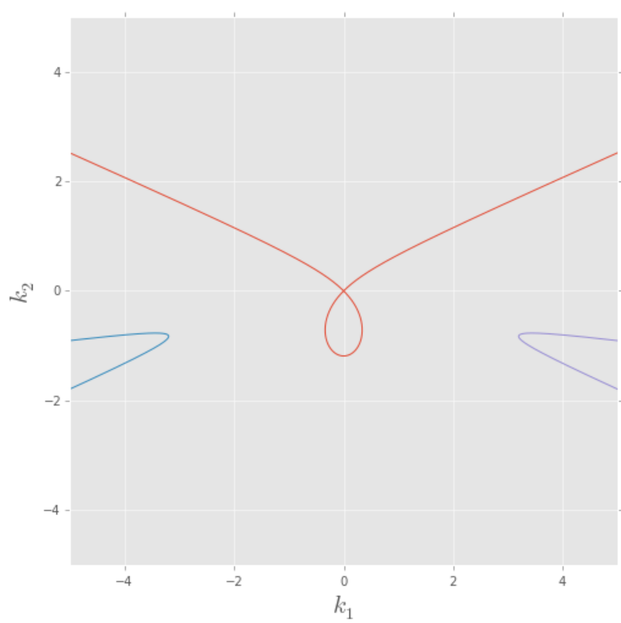


Figura 5: D-particiones de controlador para oscilador armónico retardado.