Capítulos 1 y 2
CURSO PROPEDEUTICO DE ANÁLISIS REAL
Depto. de Control Automático, CINVESTAV-IPN, Mayo-Junio 2013
Ejemplar de material completo, solo falta completar dibujos.

****

1. Preliminarios y recordatorios

1.1. Mapeos

Mapeo = función = aplicación, f

Definición: Un *mapeo* f es un conjunto de pares ordenados (a, b), donde A, B son conjuntos, $a \in A, b \in B$; el mapeo f asocia a ciertos elementos de A elementos **únicamente** determinados de B (es decir: si $(a, b) \in f$ y $(a, b') \in f$ entonces $b = b'$); notación: $f: A \to B$

- $D_f = \{x \in A : \exists y \in B$ tal que $y = f(x)\}$ *dominio de definición* de f, $D_f \subset A$;
- $V_f = \{y \in B : \exists x \in A$ tal que $f(x) = y\}$ *dominio de valores* de f (o *codominio*), $V_f \subset B$;
- f se llama *sobre* (o *suryectivo*) $\iff V_f = B \iff$ para todo $y \in B$ existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$.
- f se llama *1-1* o *inyectivo* $\iff$ para todo $x, y \in D_f$, $f(x) = f(y)$ implica $x = y$ ($\iff$ para todo $x, y \in D_f$, $x \neq y$ implica $f(x) \neq f(y)$.
- f se llama *biyección* $\iff$ f es sobre y 1-1.
- Si $f: A \to B$, $f': A \to B$ son mapeos, f' se llama *restricción* de f si $D_{f'} \subset D_f$ y $f'(x) = f(x)\ \forall\ x \in D_{f'}$.
- Si $f: A \to B$, $g: B \to C$ son mapeos tales que $V_f \subset D_g$, el mapeo $g \circ f$ de A en C definido para todo $x \in D_f$ por $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ se llama *concatenación* (o *composición*) de f y g.
- Si $f: A \to B$ es una biyección, entonces el mapeo f^{-1} de B en A definido para todo $y \in B$ por $f^{-1}(y) = x \iff$ (por definición !) $f(x) = y$ se llama *mapeo inverso* de f; resulta que $D_{f^{-1}} = V_f, V_{f^{-1}} = D_f$.
- Si $f: A \to B$ es un mapeo y $X \subset D_f$, entonces $f(X) = \{f(x) : x \in X\} = \{y \in B : \exists\ x \in X$ tal que $f(x) = y\} \subset V_f \subset B$ se llama la *imagen (directa o completa)* del conjunto X.
- Si $f: A \to B$ es un mapeo y $Y \subset V_f$, entonces $f^{-1}(Y) = \{x \in D_f : f(x) \in Y\} \subset D_f \subset A$ se llama la *imagen inversa* del conjunto Y. (de entrada no tiene nada que ver con el mapeo inverso !)

Recordamos por ejemplo:
– Si $f: A \to B$, $g: B \to C$ son biyecciones, entonces $g \circ f$ es biyección y $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ (mapeos inversos !).
– Si $f: A \to B$, $X_1, X_2 \subset D_f, Y_1, Y_2 \subset V_f$, entonces
$f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2)$;
$f(X_1 \cap X_2) \subseteq f(X_1) \cap f(X_2)$ (en general $\neq$);
$f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$ (imagen inversa);
$f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2)$ (imagen inversa);

1.2. Producto cartesiano

Sean $E_1, E_2, E_3, \cdots, E_n$ conjuntos, el producto cartesiano de ellos se define como un conjunto de n-uplas:

$$E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n = \{(e_1, e_2, \cdots, e_n) :\ e_i \in E_i, i = 1, 2, \cdots, n\}.$$

Caso especial: $E_1 = E_2 = \cdots = E_n = E$, entonces se escribe

$$E^n = E \times E \times \cdots \times E = \{(e_1, e_2, \cdots, e_n) :\ e_i \in E, i = 1, 2, \cdots, n\};$$

por ejemplo conocemos $I\!R^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) :\ x_i \in I\!R, i = 1, 2, \cdots, n\}$.

Mapeos importantes:
– *proyección*: es un mapeo p_j de $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ en E_j para cualquier $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, definido para cada $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n), x_i \in E_i$ por $p_j(x) = x_j$. (proyecta la n-upla x sobre su "coordenada" j-esima)
– *composición*: Sean $E, F_1, F_2, \cdots, F_n$ conjuntos y $f_i : E \to F_i$ mapeos tales que $D_{f_1} = D_{f_2} = \cdots = D_{f_n} = D \subset E$. El nuevo mapeo f de E en $F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_n$ definido para cada $x \in D$ por

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x))$$

se llama *composición* de los mapeos $f_1, f_2, \cdots, f_n$. Claro que $D_f = D$.
Observamos:

$$E \qquad f \qquad F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_n \qquad p_j \qquad F_j$$

Si $V_f \subset D_{p_j} \subset F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_n$, entonces podemos concatenar estos mapeos:

$$(p_j \circ f)(x) = p_j(f(x)) = p_j(f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)) = f_j(x),\ \ x \in D_f,$$

es decir, $p_j \circ f = f_j$, recuperamos cada f_j, en este sentido la proyección es lo contrario de la composición.

1.3. Relaciones

Una *relación n-aria* R sobre el conjunto E es un subconjunto de E^n.

$$R \subset E^n = E \times E \times \cdots \times E = \{(e_1, e_2, \cdots, e_n) :\ e_i \in E, i = 1, 2, \cdots, n\}.$$

Caso más importante: n=2 *relación binaria* sobre E, aqui $R \subset E \times E$ es un conjunto de parejas ordenadas, se escribe $(x, y) \in R$ o xRy o se representa R por un simbolo, por ejemplo $x \sim y$.

Una relación binaria R sobre E se llama

reflexiva si $(x, x) \in R$, para todo $x \in E$;
simétrica si $(x, y) \in R$ implica $(y, x) \in R$, para todo $x, y \in E$;
antisimétrica si $(x, y) \in R$ y $(y, x) \in R$ implica $x = y$, para todo $x, y \in E$;
transitiva si $(x, y) \in R$ y $(y, z) \in R$ implica $(x, z) \in R$, para todo $x, y, z \in E$;
relación de equivalencia si R es reflexiva, simétrica y transitiva.

Ejemplos:

- $E = \mathbb{R}$, la relación R definida por $(x, y) \in R \iff x = y$ es una relación de equivalencia sobre E.
- $E = \mathbb{Z}$, la relación R definida por $(x, y) \in R \iff x \leq y$ es una relación reflexiva y transitiva, pero no es simétrica, es antisimétrica, no es de equivalencia.
- Sea E un conjunto de personas mexicanas. Definiendo la relación por $(x, y) \in R$ si y sólo si x y y son casados, se obtiene una relación no reflexiva, simétrica, no transitiva.
- Sea $E = \mathbb{Z}$, k un número natural ($k \geq 1$). Definamos una relación R mediante las siguientes condiciones (equivalentes entre sí):

  $(x, y) \in R \iff (x - y)$ es dividible (sin residuo) entre k.

  $(x, y) \in R \iff (x - y)$ es un múltiplo de k.

  $(x, y) \in R \iff x$ y y dejan el mismo residuo cuando son divididos entre k.

  Notaciones comúnes para esta relación son: $x \equiv y \; mod \; k$ o $x \equiv y(k)$.

  Por ejemplo: $3 \equiv 6 \equiv 9 \equiv -12 \equiv 0 \equiv -300(3)$,

  $4 \equiv 7 \equiv 10 \equiv -11 \equiv 1 \equiv -299(3)$,

  $5 \equiv 8 \equiv 11 \equiv -10 \equiv 2 \equiv -198(3)$.

  Es evidente que la relación $\equiv$ es reflexiva y simétrica.

  Para convencernos de la transitividad, supongamos $x \equiv y$ y $y \equiv z$. Entonces existen $n, m \in \mathbb{Z}$ tales que $x - y = nk, y - z = mk$ Eso implica que $(x - z) = x - y + y - z = (x - y) + (y - z) = nk + mk = (n + m)k$ lo cual nuevamente es un múltiplo de k. En consecuencia, $x \equiv z$, y por lo tanto $\equiv$ es transitiva.

  En resumen, la relación $\equiv$ es de equivalencia.

Una relación de equivalencia genera una descomposición de E en clases:

Proposición: *Si $\sim$ es una relación de equivalencia sobre E, y para cada $x \in E$, $[x]$ denota la "clase de equivalencia generada por x" definida por $[x] = \{y \in E : x \sim y\}$, entonces*

i) $x \in [x]$, para todo $x \in E$,
ii) $x \sim y$ implica $[x] = [y]$, para todo $x, y \in E$,
iii) si $[x] \neq [y]$ entonces $[x] \cap [y] = \emptyset$, para todo $x, y \in E$;

es decir, $E/\sim = \{[x] : \ x \in E\}$ es una descomposición de E en clases ajenas cuya unión cubre a E.

$E/\sim$ se llama *conjunto cociente* de E generado por la relación de equivalencia $\sim$.

Ejemplo: $E = \mathbb{Z}$, con la relación $\equiv$ modulo 3, es decir: $x \sim y \iff x \equiv y(3)$. Vimos arriba que por ejemplo las siguientes clases de equivalencia coinciden: $[3] = [6] = [9] = [-12] = \cdots = [0]$. De hecho:
$[0] = \{n \cdot 3, n \in \mathbb{Z}\}$, es la clase de todos los múltiplos de 3.
$[1] = [4] = [7] = [10] = [-11] = \cdots = \{n \cdot 3 + 1, n \in \mathbb{Z}\}$,
$[2] = [5] = [8] = [11] = [-10] = \cdots = \{n \cdot 3 + 2, n \in \mathbb{Z}\}$.
Hay solamente tres clases distintas; el resultante conjunto cociente proporciona una descomposión de los números enteros, y se denota como sigue:

$$\mathbb{Z}_3 \ = \ \mathbb{Z}/\!\equiv(3) \ = \ \{[0], [1], [2]\}$$

1.4. Operaciones

Sea E un conjunto. Una *operación binaria sobre* E es un mapeo ϕ de $E \times E$ en E con $D_\phi = E$. Este mapeo se denota por simbolos, en lugar de $\phi(x, y) = z$ se escribe por ejemplo $x + y = z$ o $x \cdot y = z$ o $x - y = z$ o $x * y = z$.

Supongamos que una operación binaria sobre E sea simbolizada por "+", entonces la operación se llama
asociativa si $(x + y) + z = x + (y + z)$, para $x, y, z \in E$;
conmutativa si $x + y = y + x$, para $x, y \in E$;
con elemento neutro si existe $e \in E$ (e es el elemento neutro) tal que para todo $x \in E$ vale que $x + e = e + x = x$;
con (elementos) inversos si tiene un (elemento) neutro e y además, para todo $x \in E$ existe un elemento $y \in E$ tal que $x + y = y + x = e$ (y también es denotado por $-x$).

Ejemplos:

- La suma común es una operación asociativa y conmutativa sobre cualquier conjunto de números. Sobre $\mathbb{N}$, $+$ no tiene neutro ni tiene inversos. Sobre $\mathbb{Z}$ y sobre $\mathbb{R}$ la suma tiene el neutro cero, y tiene inversos (los negativos).

- El producto común es una operación asociativa y conmutativa sobre cualquier conjunto de números. Sobre $\mathbb{N}$ y sobre $\mathbb{Z}$, $\cdot$ tiene neutro (el 1), pero no tiene inversos. Sobre $\mathbb{Q}$ y sobre $\mathbb{R}$, el producto $\cdot$ tiene el neutro 1, y tiene inversos (los recíprocos).

2. Estructuras sobre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^n$

2.1. El campo ordenado $\mathbb{R}$

Aquí recordamos las propiedades algebráicas de los números naturales $\mathbb{N}$, enteros $\mathbb{Z}$, racionales $\mathbb{Q}$ y reales $\mathbb{R}$. Cada uno de los conjuntos $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$, forma un grupo conmutativo con la suma común, mientras que $(\mathbb{N}, +)$ solamente es una estructura con operación asociativa conmutativa con elemento neutro, pero no es grupo. Observamos también que el elemento 0 (cero) no tiene inverso multiplicativo, y que $(\mathbb{Q} \setminus 0, \cdot)$ y $(\mathbb{R} \setminus 0, \cdot)$ son grupos ("multiplicativos").

Analizamos también brevemente la estructura de **campo** de $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ y de $(\mathbb{R}, +, \cdot)$:

Ambos conjuntos con $+$ forman un grupo Abeliano (es decir, conmutativo) con el neutro 0, también con $\cdot$ cada uno forma un grupo Abeliano con el neutro 1 siempre cuando excluimos al cero. Los inversos aditivos son los negativos, los inversos multiplicativos son los recíprocos. Además, ambas operaciones juntas cumplen leyes de distributividad ($a \cdot (b + c) = ab + ac$; $(a + b) \cdot c = ac + bc$). Un campo tiene una propiedad adicional importante y peculiar: "el cero no se divide por números distintos al cero", es decir: Si a y b son números ambos distintos del cero, entonces su producto también es distinto del cero. Logicamente equivalente es lo siguiente: Si un producto ab coincide con el número cero ($ab = 0$), entonces al menos uno de los factores a y b debe ser el cero ($a = 0$ o $b = 0$). En otras palabras, no es posible representar al cero como producto de dos números los cuales ambos son distintos del cero. También se dice en la literatura que "un campo no tiene divisores del cero".

Los números naturales, enteros, racionales, y reales, con su orden parcial $\leq$ (en $\mathbb{R}$ definido por $x \leq y \iff \exists\, k \in \mathbb{R}, k \geq 0$ tal que $x + k = y$), todos los números están relacionados entre sí, es decir, para cualesquiera dos números x, y, o vale $x \leq y$ o bien $y \leq$.

Def.: Un orden parcial sobre A se llama *orden (lineal)* si para todo $a, b \in A$ se sigue $a \leq b$ o $b \leq a$.

Ejemplos:

- El orden parcial $\leq$ es un orden (orden lineal) sobre $\mathbb{N}$, sobre int, sobre $\mathbb{Q}$ y sobre $\mathbb{R}$.

- $(\mathbb{R}^n, \leq)$, donde $\leq$ es definido para $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ "por coordenadas":

$$x \leq y \iff x_i \leq y_i \ \forall i = 1, 2, \cdots n$$

(en cada coordenada se usa el orden parcial $\leq$ común entre números reales). La relación $\leq$ sobre $I\!R^n$ es un orden parcial, pero no es un orden lineal. Para ver eso, consideremos al caso $n = 2$, entonces para $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in I\!R^2$ tenemos que

$$x \leq y \iff x_1 \leq y_1 \text{ y } x_2 \leq y_2.$$

Simplemente sean $p = (p_1, p_2), q = (q_1, q_2)$ dos puntos del plano con la propiedad que $p_1 < q_1$ y $p_2 > q_2$. Entonces estos puntos no son comparables, es decir, ni $p \leq q$ ni $q \leq p$ es verdad.

- Sea A un conjunto y $\mathcal{P}(A)$ el conjunto de todos los subconjuntos de A (el "conjunto potencia de A"). La relación $\subseteq$ de "ser subconjunto" es un orden parcial sobre $\mathcal{P}(A)$.

Calculando en el campo ordenado $(I\!R, +, \cdot, \leq)$, se denota:
$x < y \iff x \leq y, x \neq y$.
$I\!R^+ = \{x \in I\!R : x > 0\}$, $I\!R^- = \{x \in I\!R : x < 0\}$.

$I\!R^+ \cup I\!R^- \cup \{0\}$ es una descomposición de $I\!R$, y $I\!N \subset I\!R^+$. $I\!R^+$ es cerrado bajo las dos operaciones del campo $(I\!R, +, \cdot)$.

Lema: *Para todo $a, b, c \in I\!R$, $a \leq b$ implica $a + c \leq b + c$, y $a \leq b$ y $c \geq 0$ implica que $a \cdot c \leq b \cdot c$.* ("Monotonía" de $+$ y $\cdot$; por eso $(I\!R, +, \cdot, \leq)$ se llama *campo ordenado*.)

Def.: (min/max) Sea $a \in A$, $A \subset (I\!R, \leq)$. Se define el *mínimo* y el *maximo* de A como
$a = \min A \iff a \leq b$ para todo $b \in A$,
$a = \max A \iff b \leq a$ para todo $b \in A$.

Ejemplos:
Para $A_1 = I\!R^+$, $min(A)$ y $max(A)$ no existen.
Para $A_2 = I\!R^+ \cup \{0\}$, $min(A) = 0$, $max(A)$ no existe.
Para $A_3 = \{4, 5, 6, 7, 8, \cdots, 23\}$, $min(A) = 4$, $max(A) = 23$.

Lema: *Para cualquier $A \subset I\!R$, si $\min A$ [$\max A$] existe, entonces es único.*
Dem.: Supongamos que $min(A) = a$, y que a' también sea un mínimo de A. Entonces vale $a \leq b$ para todo $b \in A$, pero también vale $a' \leq b$ para todo $b \in A$. En particular podemos tomar a o a' mismo como elemento b, es decir, en particular vale tanto $a \leq a'$ como también $a' \leq a$. Eso implica por la antisimetría de $\leq$ que $a = a'$. En consecuencia, el mínimo es único. $\square$

Recordamos la notación de intervalos en $I\!R$: si $a, b \in I\!R$, entonces
$[a, b] = \{x \in I\!R : a \leq x \leq b\}$,
$(a, b) = \{x \in I\!R : a < x < b\}$,
$[a, b) = \{x \in I\!R : a \leq x < b\}$,
$(a, b] = \{x \in I\!R : a < x \leq b\}$.

Además se define usualmente
$[a, \infty) = \{x \in I\!R: \ a \leq x\}$,
$(a, \infty) = \{x \in I\!R: \ a < x\}$,
$(-\infty, b) = \{x \in I\!R: \ x < b\}$,
$(-\infty, b] = \{x \in I\!R: \ x \leq b\}$.

Definición: (Cotas, Inf/Sup en $I\!R$) Sea $S \subset I\!R, S \neq \emptyset$ y $x \in I\!R$.
x se llama *cota superior* de S si $y \leq x \ \forall y \in S$.
x se llama *cota inferior* de S si $y \geq x \ \forall y \in S$.
S se llama acotado por arriba [por abajo] si S tiene cota superior [inferior]; y se llama acotado si tiene cota superior o cota inferior.
Denotamos $O_S = \{x \in I\!R : x \text{ es cota superior de } S\}, U_S = \{x \in I\!R : x \text{ es cota inferior de } S\}$, entonces se define el *supremo de S:* y el *infimo de S:* como sigue:

$$sup(S) = \min O_S, \text{ si } O_S \neq \emptyset \infty, \text{ si } O_S = \emptyset, \ inf(S) = \max U_S, \text{ si } U_S \neq \emptyset - \infty, \text{ si } U_S = \emptyset.$$

(dibujo: vea clase)
.
.
.

Recordando la definición de min/max, tenemos:

$x = sup(S) \iff x \in I\!R$ tal que $y \leq x \ \forall y \in S$, y además, para todo $z \in O_S$ (es decir, $z \in I\!R$ tal que $s \leq z \ \forall s \in S$) se sigue $x \leq z$.
$x = inf(S) \iff x \in I\!R$ tal que $y \geq x \ \forall y \in S$, y además, para todo $z \in U_S$ (es decir, $z \in I\!R$ tal que $s \geq z \ \forall s \in S$) se sigue $x \geq z$.

Observaciones:
- En varios libros de texto, cuando $inf(S)$ [o ($sup(S)$] no son nuḿeros reales, se dice que el infimo [o el supremo] "no existe".
- Cotas superiores y inferiores siempre son números reales, pero pueden no existir para cierto conjunto S.
- Aunque $sup(S)$ o $inf(S)$ existen, pueden no pertenecer a S.
- Si $max(S)$ [$min(S)$] existe, entonces $sup(S)$ [$inf(S)$] existe, y $sup(S) = max(S) \in S$ [$inf(S) = min(S) \in S$].

Ejemplos:

- Sea $M = \{m_1, m_2, \cdots, m_k\}$ un subconjunto finito de $I\!R$. Entonces $min(M) = inf(M)$ existe y simplemente es el número más pequeño de M. Analogamente $max(M) = sup(M)$ existe y es el número más grande de M.
- $M = \{x \in I\!R : 0 \leq x \leq 1\} = [0, 1]$ (intervalo cerrado). Cotas inferiores de M son por ejemplo: $-100, -25, -\sqrt{2}, \cdots, 0$; cotas superiores de M son por ejemplo: $2000, \sqrt{3}, 20, 1$. El cero es lo cota inferior más grande, puesto que, si v fuera cualquier otra cota inferior de M, entonces $v \leq x$ para todo $x \in [0, 1]$. En particular, $v \leq 0$. En consecuencia, 0 es una cota (inferior)

igual o más grande que v. Como resultado, $inf(M) = 0$. Aquí $inf(M)$ es un número real y además pertenece a M, de hecho, $0 = min(M)$! Analogamente, $max(M) = sup(M) = 1$.

- $M = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\} = (0, 1)$ (intervalo abierto). Cotas inferiores de M son todos los números negativos y el cero, el cual es la cota inferior más grande, por lo cual $inf(M) = 0$. Cualquier número igual o mayor a 1 es cota superior de M, implicando que $sup(M) = 1$. Ahora $inf(M) = 0$ y $sup(M) = 1$ no pertenecen a M. El conjunto M es acotado (por arriba y por abajo), sin embargo, $min(M)$ y $max(M)$ no existen.

- Considerando a $\mathbb{N} = \{1, 2, 3 \cdots\}$ como subconjunto de $\mathbb{R}$. Obviamente todo número (real) menor o igual a 1 es cota inferior de ($\mathbb{N}$), entonces $min(\mathbb{N}) = inf(\mathbb{N}) = 1$. No existen cotas superiores, entonces $sup(\mathbb{N}) = \infty$, y $max(\mathbb{N})$ no existe. $\mathbb{N}$ es acotado por abajo, pero no es acotado por arriba. Es evidente que el conjunto $\mathbb{R}$ mismo tampoco no es acotado por arriba, puesto que no tiene cota superior en $\mathbb{R}$. Sin embargo, los números naturales se encuentran tan "bien distribuidos" dentro de los números reales, que cualquier real puede ser superado por un natural. Esta propiedad es de suma importancia, es llamada el "principio de Archimedes", y es usada en muchas demostraciones.

Proposicón (Principio de Archimedes): *Para cualquier número real r, existe un número natural n mayor, es decir, tal que $n > r$.*

2.2. El espacio vectorial $\mathbb{R}^n$

Qué es un espacio vectorial ?? — una nueva estructura algebráica, definida sobre un campo (completar el siguiente dibujo en clase !):

$(V, +, \times)$ sobre $(K, \oplus, \cdot)$

grupo Abeliano,
neutro 0_V,

campo:
con $\oplus$ es grupo Abeliano, neutro 0_K,
distributividad entre $\oplus$ y $\cdot$
$(K \setminus \{0_K\}, \cdot)$ es grupo, neutro 1_K,
sin divis. del cero: $a \neq 0_k, b \neq 0_k \Rightarrow a \cdot b \neq 0_k$

$\times$ es un mapeo de $K \times V$ en V
(es un nuevo tipo de "multiplicación")
$\times$ cumple con $+$ y con $\oplus$ distributividad,
y cumple con $\cdot$ una "asociatividad":
$a \times (\alpha + \beta) = (a \times \alpha) + (a \times \beta)$
$(a \oplus b) \times \alpha = (a \times \alpha) \oplus (b \times \alpha)$
$(a \cdot b) \times \alpha = a \times (b \times \alpha)$
$(a, b \in K, \alpha, \beta \in V)$

además: $\times$ tiene un "neutro" - el 1_K,
puesto que $1_K \times \alpha = \alpha \; \forall \; \alpha \in V$.

Ejemplo más importante para nosotros:

$(\mathbb{R}^n, +, \times)$ es un espacio vectorial sobre el campo $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, donde para $x, y \in \mathbb{R}^n$ $(x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$,
$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n)$,
$0_{\mathbb{R}^n} = (0, 0, \cdots, 0)$,
-(x$_1, x_2, \cdots, x_n) = (-x_1, -x_2, \cdots, -x_n)$,
$\times$ es la "multiplicación de escalares con vectores", para $k \in \mathbb{R}$,
$k \times (x_1, x_2, \cdots, x_n) = (k \cdot x_1, k \cdot x_2, \cdots, k \cdot x_n)$.

Conceptos importantes a recordar de espacios vectoriales (vea curso propedeutico Algebra):
— *subespacio vectorial*
— interpretación geométrica (vector de traslación)
— homomorfismos (= mapeos lineales) entre espacios vectoriales
— independencia lineal, base, dimensión

2.3. El valor absoluto sobre $\mathbb{R}$ y la norma Euclideana sobre $\mathbb{R}^n$

Def.: Para $x \in \mathbb{R}$ se define el valor absoluto de x como $\mid x \mid = max\{x, -x\}$.

Vemos que $\mid x \mid$ es un número real no-negativo, obviamente

$$\mid x \mid = x \text{ para } x \geq 0, \qquad \mid x \mid = -x \text{ para } x < 0,$$

así, $\mid \cdot \mid$ es un mapeo de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^+ \cup 0$.

Propiedades del valor absoluto son, para $x, y \in \mathbb{R}$:
$\mid x \mid = 0 \iff x = 0$
$\mid x \mid = \mid -x \mid$
$\mid xy \mid = \mid x \mid \cdot \mid y \mid$
$\mid x + y \mid \leq \mid x \mid + \mid y \mid$ (desigualdad del triangulo)

La generalización natural del valor absoluto sobre (el espacio vectorial !) $\mathbb{R}$ es la "norma" sobre el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$, la "norma" se aplica a vectores, dando su "longitud":

Def.: Si V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, un mapeo $\parallel \cdot \parallel$ de V en $\mathbb{R}$ se llama *norma sobre* V si
i) $\parallel x \parallel \geq 0 \; \forall x \in V$, y $\parallel x \parallel = 0 \iff x = 0_V$;
ii) $\parallel \alpha x \parallel = \mid \alpha \mid \parallel x \parallel \;\; \forall x \in V, \alpha \in \mathbb{R}$;
iii) $\parallel x + y \parallel \leq \parallel x \parallel + \parallel y \parallel \;\; \forall x, y \in V$.
$(V, \parallel \cdot \parallel)$ se llama entonces un *espacio vectorial normado*

Ejemplos:

- $(\mathbb{R}, |\cdot|)$

  .(dibujo - vea clase)

  .

- $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$, donde $\| x \| = \sum_{i=1}^n | x_i |,\ x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

  Para $n = 2$: $\| x \| = | x_1 | + | x_2 |$

  .(dibujo - vea clase)

  .

  .

  .

  .

- $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$, con $\| x \| = \max\{| x_i |,\ i = 1, 2, \cdots, n\},\ x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

  Para $n = 2$: $\| x \| = \max\{| x_1 |, | x_2 |\}$

  .(dibujo - vea clase)

  .

  .

  .

  .

- $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$, con $\| x \| = \sqrt{\sum_{i-1}^n x_i^2},\ x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *(norma Euclideana / norma de Pythagoras).*

  Para $n = 2$: $\| x \| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$

  .(dibujo - vea clase)

  .

  .

  .

  .

  .

2.4. El espacio métrico Euclideano $\mathbb{R}^n$

Observamos $\mathbb{R}$, definimos para $x, y \in \mathbb{R}$: $d_{\mathbb{R}}(x, y) = | x - y |\ (= \sqrt{(x-y)^2})$.
.(dibujo - vea clase)
.

.

.

Eso mide la distancia entre x y y, y cumple las siguientes propiedades para cualesquiera $x, y, z \in I\!R$:

– $d_{I\!R}(x,y) \geq 0$, y $d_{I\!R}(x,y) = 0 \iff (x-y)^2 = 0 \iff x - y = 0 \iff x = y$;
– $d_{I\!R}(x,y) = d_{I\!R}(y,x)$;
– $d_{I\!R}(x,y) + d_{I\!R}(y,z) \geq d_{I\!R}(x,z)$.

Observamos al plano $I\!R^2$: $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in I\!R^2$, y la función $d_{I\!R^2}(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}$.
Eso es la distancia entre los puntos x y y según el teorema de Pythagoras !!

.(dibujo - vea clase)

.

.

.

.

$d_{I\!R^2}$ tiene las mismas propiedades como $d_{I\!R}$ definido arriba, abstrayendo se obtiene:

Def.: Si E es un conjunto no vacío y $d : E \times E \longrightarrow I\!R^+ \cup \{0\}$, tal que para todo $x, y, z \in E$ vale que

i) $d(x,y) = 0 \iff x = y$,
ii) $d(x,y) = d(y,x)$,
iii) $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$ (desigualdad del triangulo),

entonces d se llama *métrica* o distancia sobre E, y (E,d) se llama *espacio métrico.*

Comentarios y ejemplos:

- $(I\!R, d_{I\!R})$ con $d_{I\!R} = \sqrt{(x-y)^2} = \mid x - y \mid$ (valor absoluto de la diferencia), es un espacio métrico.

  .(dibujo - vea clase)

  .

  .

- Más generalmente, $(I\!R^n, d)$ y $(Z\!\!\!Z, d)$ son espacios métricos con la métrica d definida para $x = (x_1, \cdots, x_n)$, $y = (y_1, \cdots, y_n)$ por

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} d^2_{I\!R}(x_i, y_i)}$$

  (*métrica Euclideana o de Pythagoras*). Esa mide siempre (en $I\!R^n$ para cualquier n) la longitud del segmento de línea recta entre los puntos (vectores) x, y.

  Para $n = 2$: $d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}$

.(dibujo - vea clase)

.

.

.

.

- $(I\!R^n, d_1)$ y $(Z\!\!\!Z, d_1)$ son espacios métricos con la métrica d_1 definida por

$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \mid x_i - y_i \mid$$

Para $n = 2$: $d_1(x,y) = \mid x_1 - y_1 \mid + \mid x_2 - y_2 \mid$.

.(dibujo - vea clase)

.

.

.

.

.

- $(I\!R^n, d_{max})$ y $(Z\!\!\!Z, d_{max})$ son espacios métricos con la métrica d_{max} definida por

$$d_{max}(x,y) = \max\{\mid x_i - y_i \mid,\ i = 1, 2, \cdots, n\}$$

Para $n = 2$: $d_{max}(x,y) = \max\{\mid x_1 - y_1 \mid, \mid x_2 - y_2 \mid\}$.

.(dibujo - vea clase)

.

.

.

.

.

En un espacio métrico (E, d) (aunque tal vez no sabemos "calcular" en E), podemos "hacer geometría", por ejemplo definir figuras: sea $\epsilon \in I\!R^+, x \in E$,

$U_\epsilon(x) = \{y \in E:\ d(x,y) < \epsilon\}$ – *disco abierto de radio* ϵ *centrado en* x,
$D_\epsilon(x) = \{y \in E:\ d(x,y) \leq \epsilon\}$ – *disco cerrado de radio* ϵ *centrado en* x,
$C_\epsilon(x) = \{y \in E:\ d(x,y) = \epsilon\}$ $(= D_\epsilon(x) \setminus U_\epsilon(x))$ – *circunferencia de radio* ϵ *alrededor de* x.

Ejemplos:

- $(\mathbb{R}^2, d_{Euclid})$:

  .(dibujo - vea clase)

  .

  .

  .

- $(\mathbb{Z}^2, d_1)$:

  .(dibujo - vea clase)

  .

  .

  .

- $(\mathbb{Z}^2, d_{max})$:

  .(dibujo - vea clase)

  .

  .

  .

Sobre la relación entre espacios métricos y espacios vectoriales normados:

Proposición: *Si* $(V, \| \cdot \|)$ *es un espacio vectorial normado, entonces* $d(x,y) = \| x - y \|$ *define una métrica sobre* V*, y además vale* $\| x \| = d(x, 0_V)$*, para todo* $x \in V$ (la norma es "recuperable" desde la métrica).

Ya sabemos: $\mathbb{R}^n$ es espacio vectorial, normado y por lo tanto métrico, su norma y métrica Euclideanas son

$$\| x \|_{Euclid.} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}, \quad d_{Euclid.}(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2},$$

$$d(x,y) = \| x - y \| \ , \ \| x \| = d(x, 0).$$

$\mathbb{R}^n$ tiene aún más estructura ! — hay un "producto interno" o "producto escalar", dado por $(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, que es un producto de dos vectores dando como resultado un numero real , es decir, $(\cdot, \cdot)$ es un mapeo de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$. Este mapeo cumple las siguientes propiedades:

i) $(\cdot, \cdot)$ es bilineal (lineal en cada coordenada), es decir que para $x, y, z \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}$ vale $(x+y, z) = (x,z) + (y,z), (\alpha x, z) = \alpha(x,z)$, y también $(x, y+z) = (x,y) + (x,z), (x, \alpha z) = \alpha(x,z)$.

ii) $(x,y) = (y,x)$
iii) $(x,x) \geq 0$, y $(x,x) = 0 \iff x = 0$.

(Ejercicio: Demuestra que el producto escalar en $I\!R^n$ satisface estas propiedades *i), ii), iii)*.

Considerando a $I\!R^n$ con este producto escalar, observese que $(x,x) = \parallel x \parallel^2_{Euclid.}$, es decir, la norma se construye desde el producto escalar por
$\parallel x \parallel_{Euclid.} = \sqrt{(x,x)}$.

****