EJERCICIOS correspondientes a los Capítulos 1 y 2
CURSO PROPEDEUTICO DE ANÁLISIS REAL
DCA - CINVESTAV, Mayo-Junio 2013

****

1. Para cada una de las siguientes funciones f, determina: su dominio de definición D_f, su dominio de valores V_f, y si la función es sobre / 1-1 / biyección:

a) $f(x) = ln(x)$, $x \in \mathbb{R}$
b) $f(x) = cos(x)$, $x \in \mathbb{R}$
c) $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$
d) $f(x) = x^3 + 2x - 3$, $x \in \mathbb{R}$
e) $f(x) = sen(\frac{1}{x})$, $x \in \mathbb{R}$

2. Demuestra que para cualquier funcón $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, y $M, N \subset \mathbb{R}$, la imagen inversa cumple lo siguiente:

$f^{-1}(M \cup N) = f^{-1}(M) \cup f^{-1}(N)$;
$f^{-1}(M \cap N) = f^{-1}(M) \cap f^{-1}(N)$.

3. Aplicando las propiedades básicas del campo ordenado $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$, y el lema de la monotonía de las operaciones $+, \cdot$ (vea clase), demuestra para $a, b, c \in \mathbb{R}$:

a) $a \leq b, c \leq d$ implica $a + c \leq b + d$ (adición de desigualdades);
b) $0 \leq a \leq b, 0 \leq c \leq d$ implica $a \cdot c \leq b \cdot d$ (multiplicación de desigualdades);
c) $a \leq b$ implica $-b \leq -a$;
d) $a \neq 0$ implica $a^2 > 0$.

4. Determina min, max (si existen), inf, sup de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$ (recordando denotación de intervalos !):

a) $A = [-5, 0] \cup \{10\}$
b) $A = (-\infty, 0)$
c) $A = (-\infty, 5) \cup [5, 7] \cup (7, 9)$
d) $A = \{2 + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$

5. Aplicando la definición del valor absoluto, demuestra las siguientes propiedades, para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$:

a) $\mid xy \mid = \mid x \mid \cdot \mid y \mid$
b) $\mid x + y \mid \leq \mid x \mid + \mid y \mid$ (desigualdad del triangulo)
c) $\mid x \mid = \mid -x \mid$
d) $\mid xy \mid = \mid x \mid \cdot \mid y \mid$
e) Suponiendo que ya sabemos (!) que $\mid x + y \mid \leq \mid x \mid + \mid y \mid$, demuestra por inducción que para $x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$ vale que $\mid x_1 + x_2 + \cdots + x_n \mid \leq \mid x_1 \mid + \mid x_2 \mid + \cdots + \mid x_n \mid$.

6. Demuestra que la función $\| \cdot \|$: $I\!\!R \to I\!\!R$, dada para todo $x = (x_1, x_2) \in I\!\!R^2$ por $\| x \| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, cumple los axiomas de una norma sobre $I\!\!R^2$. Qué significa aquí la norma ("longitud") de un vector de $I\!\!R^2$ geométricamente ?

7. Demuestra que la función $\| \cdot \|$ $I\!\!R \to I\!\!R$, dada para cualesquiera $x = (x_1, x_2) \in I\!\!R^2$ por $\| x \| = \max\{| x_1 |, | x_2 |\}$, cumple los axiomas de una norma sobre $I\!\!R^2$. Qué significa aquí la norma ("longitud") de un vector de $I\!\!R^2$ geométricamente ?

8. Demuestra que la función $d(x, y)$, dada para cualesquiera $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in Z\!\!\!Z^2$ por $d(x, y) = | x_1 - y_1 | + | x_2 - y_2 |$, cumple los axiomas de una métrica sobre $Z\!\!\!Z^2$. Qué significa aquí la distancia entre dos vectores de $Z\!\!\!Z^2$ geométricamente ?

****