Modelado de robots manipuladores

Roberto Cadena Vega

23 de marzo de 2015

1. Introducción

2. Movimientos rigidos y transformaciones homogéneas

Existen dos tipos básicos de movimientos rigidos que utilizaremos para describir el movimiento de un robot manipulador, las rotaciones y las traslaciones. Empezaremos describiendo las rotaciones básicas y generalizando a un método para obtener una rotación arbitraria a partir de estas.

2.1. Matrices básicas de rotación

Las matrices básicas de rotación se definen con respecto al eje que rotan, y su inversa siempre es su transpuesta $R^{-1} = R^T$.

$$R_{x,\theta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$R_{y,\theta} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$R_{z,\theta} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

2.2. Composición de rotaciones

Una rotación compuesta de un marco de referencia $o_0x_0y_0z_0$ a un marco de referencia $o_1x_1y_1z_1$ denotada por R_0^1 y de una del marco de referencia $o_1x_1y_1z_1$ al marco $o_2x_2y_2z_2$ denotada por R_1^2 y se compone:

$$R_0^2 = R_0^1 R_1^2 \tag{4}$$

Cabe notar que estas rotaciones son con respecto a marcos de referencia actuales, es decir, estas rotaciones son dadas con respecto al marco de referencia anterior, si ademas quisieramos dar una rotación extra, R_f, con respecto al marco de referencia fijo $o_0x_0y_0z_0$, tendriamos que:

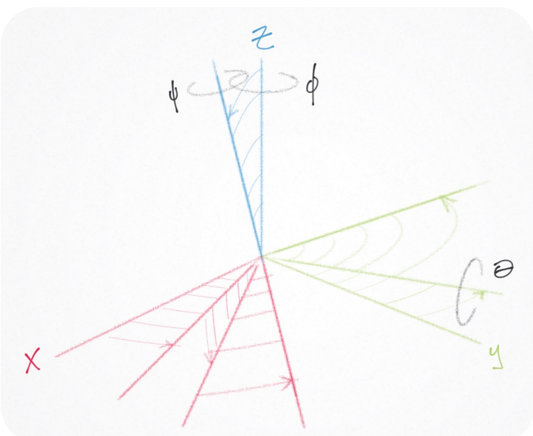
$$R = R_f R_0^1 R_1^2 \tag{5}$$

es decir, la matriz de rotación con respecto al marco de referencia fijo se premultiplica, mientras que las matrices de rotación con respecto a marcos de referencia actuales se postmultiplican.

2.3. Angulos de Euler

Dado el formalismo de angulos de Euler, podemos definir una matriz de rotación compuesta que utilice estos angulos para su definición:

$$\begin{aligned} R &= R_{z,\phi} R_{y,\theta} R_{z,\psi} \\ &= \begin{pmatrix} c_\phi c_\theta c_\psi - s_\phi s_\psi & -c_\phi c_\theta s_\psi - s_\phi c_\psi & c_\phi s_\theta \\ s_\phi c_\theta c_\psi + c_\phi s_\psi & -s_\phi c_\theta s_\psi + c_\phi c_\psi & s_\phi s_\theta \\ -s_\theta c_\psi & s_\theta s_\psi & c_\theta \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{6}$$



De esta notación podemos derivar una manera de obtener ϕ, θ y ψ dada una matriz de rotación arbitraria, utilizando propiedades de las matrices de rotación, de manera que:

$$\theta = \begin{cases} \text{atan2}\left(r_{33}, \sqrt{1 - r_{33}^2}\right) \\ \text{atan2}\left(r_{33}, -\sqrt{1 - r_{33}^2}\right) \end{cases} \tag{7}$$

y ϕ y ψ estarán dadas, dependiendo de como se escoja θ:

$$\phi = \begin{cases} \text{atan2}\left(r_{13}, r_{23}\right) \\ \text{atan2}\left(-r_{13}, -r_{23}\right) \end{cases} \tag{8}$$

$$\phi = \begin{cases} \text{atan2}\left(-r_{31}, r_{32}\right) \\ \text{atan2}\left(r_{31}, -r_{32}\right) \end{cases} \tag{9}$$

Cabe mencionar que existen casos degenerados, en los que no existe solución única para ϕ y ψ, especificamente cuando $s_\theta = 0 \implies \theta = 0^o, 180^o, \ldots$, por lo que la matriz de rotación tiene la forma:

$$R = \begin{pmatrix} c_\phi c_\psi - s_\phi s_\psi & -c_\phi s_\psi - s_\phi c_\psi & 0 \\ s_\phi c_\psi + c_\phi s_\psi & -s_\phi s_\psi + c_\phi c_\psi & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

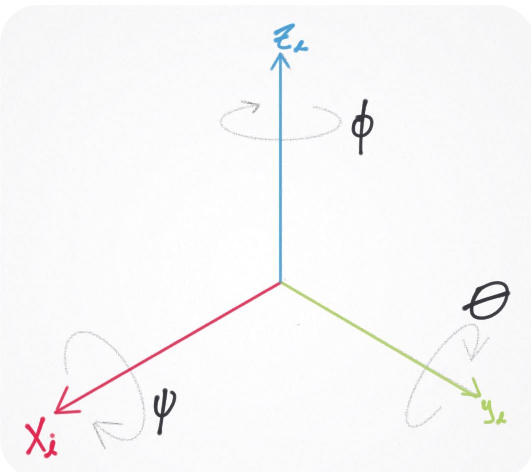
por lo que:

$$\phi - \psi = \text{atan2}\left(-r_{11}, -r_{12}\right) \tag{10}$$

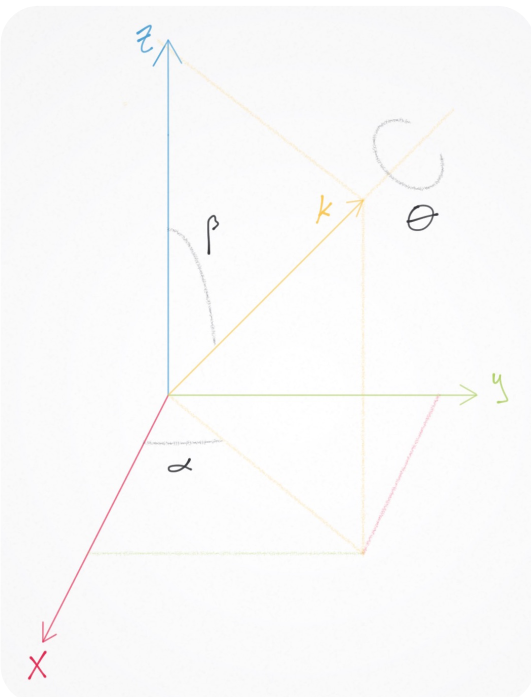
2.4. Angulos de roll, pitch y yaw

Si por otro lado, queremos describir rotaciones con respecto a cada eje del marco de referencia fijo, podemos definir una matriz de rotación de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} R &= R_{z,\phi} R_{y,\theta} R_{x,\psi} \\ &= \begin{pmatrix} c_\phi c_\theta & -s_\phi c_\psi + c_\phi s_\theta s_\psi & s_\phi s_\psi + c_\phi s_\theta c_\psi \\ s_\phi c_\theta & c_\phi c_\psi + s_\phi s_\theta s_\psi & -c_\phi s_\psi + s_\phi s_\theta c_\psi \\ -s_\theta & c_\theta s_\psi & c_\theta c_\psi \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{11}$$



2.5. Rotación alrededor de un eje arbitrario



Podemos representar la rotación al rededor de un eje arbitrario conociendo las rotaciones necesarias para obtener este marco de referencia. Sea la rotación a transformar $R_{z,\theta}$, la cual esta expresada como una rotación al rededor del eje z de nuestro nuevo marco de referencia, por lo que podemos aplicar una transformación de similitud para obtener esta rotación expresada en el marco de referencia actual:

$$\begin{aligned} R_{k,\theta} &= R_0^1 R_{z,\theta} {R_0^1}^{-1} = R_0^1 R_{z,\theta} {R_0^1}^T \\ &= R_{z,\alpha} R_{y,\beta} R_{z,\theta} R_{y,-\beta} R_{z,-\alpha} \end{aligned} \tag{12}$$

en donde α es el angulo medido entre el eje x actual y la proyección del eje de rotación en el plano xy actual y β es el angulo entre el eje de rotación y el eje z actual.

2.6. Movimientos rígidos

Un movimiento rigido lo definimos como un par ordenado (d, R), en donde $d \in \mathbb{R}^3$ es un vector de traslación en x, y y z y $R \in SO(3)$ es una rotación con respecto al marco de referencia actual, de tal manera que si la rotación que relaciona a dos marcos de referencia $o_0x_0y_0z_0$ y $o_1x_1y_1z_1$ es R_0^1 y la distancia que separa los origenes de estos dos marcos de referencia es d_0^1; un punto p^1 que esta definido con respecto a $o_1x_1y_1z_1$ se puede representar con respecto a $o_0x_0y_0z_0$ al hacer:

$$p^0 = R_0^1 p^1 + d_0^1 \tag{13}$$

De manera similar, para un tercer marco de referencia $o_2x_2y_2z_2$ relacionado con $o_1x_1y_1z_1$ de tal manera que:

$$p^1 = R_1^2 p^2 + d_1^2$$

podemos decir que $o_0x_0y_0z_0$ esta relacionado con $o_2x_2y_2z_2$ y podemos escribir a p^2 como:

$$\begin{aligned} p^0 &= R_0^1 p^1 + d_0^1 \\ &= R_0^1 R_1^2 p^2 + R_0^1 d_1^2 + d_0^1 \\ &= R_0^2 p^2 + d_0^2 \end{aligned}$$

2.7. Transformaciones homogéneas

Una matriz de transformación homogénea es una representación de estos movimientos rígidos que es mucho mas facil de operar en largas cadenas cinemáticas. Sea H una matriz de transformación homogenea, compuesta por la rotación $R \in SO(3)$ y $d \in \mathbb{R}$ de tal manera que:

$$H = \begin{pmatrix} R & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{14}$$

y la inversa de esta matriz H es:

$$H^{-1} = \begin{pmatrix} R^T & -R^T d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{15}$$

y en donde el punto p^1 ahora lo representamos como:

$$P^1 = \begin{pmatrix} p^1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{16}$$

de tal manera que con respecto al marco de referencia $o_0x_0y_0z_0$ se escribe:

$$P^0 = H_0^1 P^1 \tag{17}$$

Cabe hacer notar que H_0^1 puede ser visto como:

$$H_0^1 = \begin{pmatrix} n & s & a & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{18}$$

en donde n es un vector columna unitario, en la dirección de x_1 expresado en el marco de referencia $o_0x_0y_0z_0$, s en la dirección de y_1 y a en la dirección de z_1 y d, como es de esperarse, es la distancia entre los dos marcos de referencia expresado con respecto a $o_0x_0y_0z_0$.

3. Cinemática directa e inversa

3.1. Cadenas cinemáticas

En este punto empezaremos a hablar de variables articulares las cuales se denotan por q_i y se refieren a θ_i si la articulación i es rotacional o a d_i si la articulación es prismática, de tal manera que para cada matriz de transformación homogénea asignaremos una variable q_i de la cual depende, es decir $A_i = A_i(q_i)$. En este sentido, una cadena cinemática será el conjunto de transformaciones homogéneas que describan el punto de estudio con respecto al marco de referencia fijo:

$$H = T_0^n = A_1(q_1) \dots A_n(q_n) \tag{19}$$

en donde cada transformación homogénea es de la forma:

$$A_i = \begin{pmatrix} R_{i-1}^i & o_{i-1}^i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{20}$$

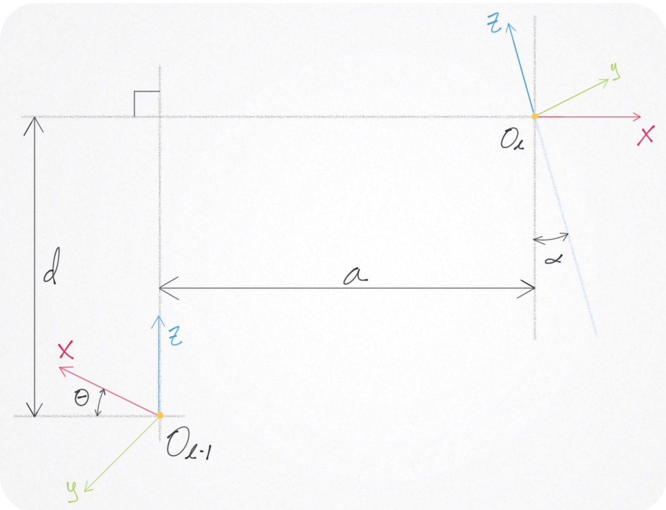
3.2. Convención Denavit-Hartenberg

La convención Denavit-Hartenberg se basa en hacer cada transformación homogénea compuesta de las siguientes transformaciones básicas, de tal manera que:

$$\begin{aligned} A_i &= Rot_{z,\theta_i} Trans_{z,d_i} Trans_{x,a_i} Rot_{x,\alpha_i} \\ &= \begin{pmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i} c_{\alpha_i} & s_{\theta_i} s_{\alpha_i} & a_i c_{\theta_i} \\ s_{\theta_i} & c_{\theta_i} c_{\alpha_i} & -c_{\theta_i} s_{\alpha_i} & a_i s_{\theta_i} \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{21}$$

tomando un conjunto de reglas para que esta transformación compuesta pueda caracterizar perfectamente cualquier transformación arbitraria:

1. El eje x_i es perpendicular a z_{i-1}
2. El eje x_i intersecta al eje z_{i-1}



Por lo que queda por hacer es definir la metodología para asignar los marcos de referencia de cada articulación, de tal manera que estas reglas se cumplan:

1. Localizar los ejes z_{i-1} de tal manera que coincidan con el eje de rotación o traslación de la articulación i.
2. Establecer el referencial fijo en un punto a lo largo del eje z_0, colocando los ejes x_0 y y_0 convenientemente.
3. Para las articulaciones $i = 1, 2, \dots, n-1$:
   a) Asignar o_i al punto donde la normal común entre z_i y z_{i-1} intersectan a z_i. Notar que o_i corresponde a la articulación $i+1$. En caso que z_i y z_{i-1} sean paralelas, se deberá localizar o_i arbitrariamente en z_i.
   b) Establecer x_i a lo largo de la normal común entre z_i y z_{i-1} que pasa por o_i, o bien en la dirección normal al plano z_i-z_{i-1} en el caso que z_i y z_{i-1} se intersecten.
   c) Establecer y_i de manera que este complete un marco de referencia derecho.
4. Suponiendo que la ultima articulación es rotacional, hacer $z_n = a$, a lo largo de la dirección z_{n-1}. Establecer el referencial $o_n x_n y_n z_n$ convenientemente sobre z_n, preferentemente en el punto de interes de la herramienta final. Colocar y_n en la dirección de cierre de la pinza.
5. Crear una tabla de parametros a_i, d_i, α_i y θ_i, en donde estos corresponden a:
   a) a_i es la distancia medida a lo largo del eje x_i desde o_i a la intersección de los ejes z_{i-1} y x_i.
   b) d_i es la distancia medida a lo largo del eje z_{i-1} desde o_{i-1} a la intersección de los ejes z_{i-1} y x_i.
   c) α_i es el angulo entre los ejes z_{i-1} y z_i, medido alrededor del eje x_i.
   d) θ_i es el angulo entre los ejes x_{i-1} y x_i, medido alrededor del eje z_{i-1}.
6. Calcular las transformaciones homogéneas A_i.
7. Calcular $T_0^n = A_1 \dots A_n$

3.3. Cinemática inversa

El problema de la cinemática inversa es no trivial, ya que involucra la obtención de n parametros, para un manipulador de n grados de libertad, a partir de 6 coordenadas de posición y orientación, y que en general estan distribuidas en 12 ecuaciones no lineales. Para manipuladores con pocos grados de libertad, es posible reducir este problema a uno soluble, utilizando una muñeca esférica en los ultmos grados de libertad del manipulador y aprovechar el desacoplamiento cinemático que ocurre.

3.4. Desacoplamiento cinemático

La muñeca esférica que queremos utilizar tiene como transformación homogénea:

$$T_{n-3}^n = \begin{pmatrix} c_\phi c_\theta c_\psi - s_\phi s_\psi & -c_\phi c_\theta s_\psi - s_\phi c_\psi & c_\phi s_\theta & c_\phi s_\theta d_n \\ s_\phi c_\theta c_\psi + c_\phi s_\psi & -s_\phi c_\theta s_\psi + c_\phi c_\psi & s_\phi s_\theta & s_\phi s_\theta d_n \\ -s_\theta c_\psi & s_\theta s_\psi & c_\theta & c_\theta d_n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{22}$$

en donde $q_{n-2} = \phi$, $q_{n-1} = \theta$, $q_n = \psi$, ya que la configuración de la muñeca esférica corresponde perfectamente con los angulos de Euler.

Una vez que consideramos que la orientación final puede estar dada por una rotación arbitraria, tan solo tenemos que concentrarnos en la cinemática inversa de posición, tomando en cuenta que la posición debido al resto del robot manipulador será:

$$P_{me} = P_f - d_n R_0^n \hat{k} \tag{23}$$

En donde P_f se refiere a la posición final deseada, R_0^n es la matriz de rotación asociada a la orientación final deseada, y d_n es la distancia desde el centro de la muñeca esferica hasta el punto de estudio. Cabe notar que $R_0^n \hat{k}$ es tan solo la ultima columna de R_0^n, por lo que no hace falta ningún calculo extra de productos matriciales.

Ya que tenemos una posición para alcanzar con el robot manipulador antes de la muñeca esferica, tan solo queda calcular la orientación que esta debe tener para que al final tengamos la orientación deseada:

$$R_{n-3}^n = \left(R_0^{n-3}\right)^{-1} R_0^n = \left(R_0^{n-3}\right)^T R_0^n \tag{24}$$

Por lo que solo queda calcular los angulos de Euler asociados a esta ultima rotación compuesta, lo cual puede hacerse con las formulas mencionadas anteriormente.

4. Cinemática de velocidad

Hasta el momento hemos estudiado la relación entre las variables en el espacio de trabajo $\mathbb{X}$, es decir las posiciones de las articulaciones, y las variables en el espacio articular q, es decir las rotaciones y traslaciones ocurridas en el marco del robot manipulador; sin embargo ahora queremos estudiar la relación entre la velocidad de las articulaciones del robot y las velocidades en los actuadores del robot.

$$\mathbb{X} = F(q) \implies \frac{d\mathbb{X}}{dt} = \frac{\partial F(q)}{\partial q} \dot{q} \tag{25}$$

Al termino que relaciona estos dos conjuntos de variables le conocemos como Jacobiano analítico, sin embargo calcular la derivada parcial con respecto a cada variable articular resultaría inmensamente complicado (asumiendo que hemos podido encontrar una expresión analítica para cada una), por lo que utlizaremos un concepto intermedio llamado Jacobiano geométrico.

4.1. Jacobiano geométrico

El jacobiano geométrico resulta de estudiar la relación:

$$\begin{pmatrix} V_0^n \\ \omega_0^n \end{pmatrix} = J_g(q) \dot{q} \tag{26}$$

Y este Jacobiano geométrico tendrá la forma:

$$J_g = \begin{pmatrix} J_1 & \dots & J_n \end{pmatrix} \tag{27}$$

en donde los terminos J_i estan dados por:

$$J_i = \begin{cases} \begin{pmatrix} z_{i-1} \\ 0 \end{pmatrix} & \text{junta prismática} \\ \begin{pmatrix} z_{i-1} \times (o_n - o_{i-1}) \\ z_{i-1} \end{pmatrix} & \text{junta rotacional} \end{cases} \tag{28}$$

Cabe notar que ya tenemos toda la información necesaria, inspeccionando la matriz de transformación homogénea T_0^{i-1}, podemos notar que las ultimas dos columnas corresponden a z_{i-1} y a o_{i-1}.

4.2. Jacobiano analítico

El jacobiano analítico correspondiente a la relación:

$$\dot{\mathbb{X}} = J(q) \dot{q} \tag{29}$$

es obtenido de derivar la rotación debida a los angulos de Euler, y obtener la siguiente relación entre este y el Jacobiano geométrico:

$$J = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & B(\alpha)^{-1} \end{pmatrix} J_g \tag{30}$$

en donde $B(\alpha)$ es:

$$B(\alpha) = \begin{pmatrix} c_\psi s_\theta & -s_\psi & 0 \\ s_\psi s_\theta & c_\psi & 0 \\ c_\theta & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{31}$$

5. Dinámica

La obtención de la dinámica de un manipulador se basa en el formalismo Euler-Lagrange el cual implica el calculo de la ecuación:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = -\tau_i \tag{32}$$

para cada grado de libertad, en donde L le denominamos Lagrangiano y se obtiene al restar las energias cinéticas y potenciales del sistema:

$$L = K - U \tag{33}$$

Al hacer estos calculos, llegamos a una forma matricial para la dinámica del manipulador:

$$D(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau \tag{34}$$

en donde $D(q)$ es la matriz de inercia generalizada, definida como:

$$D(q) = \sum_{i=1}^n \left[m_i J_{v_i}(q)^T J_{v_i}(q) + J_{\omega_i}^T \bar{I}_i J_{\omega_i} \right] \tag{35}$$

con J_{v_i} y J_{ω_i} partes traslacional y rotacional del Jacobiano geométrico y $\bar{I}_i$ la matriz de inercia del eslabon.

$C(q, \dot{q})$ es la matriz de Coriolis, con elementos c_{kj}, que se obtienen con:

$$c_{kj} = \sum_{i=1}^n c_{ijk}(q) \dot{q}_i \tag{36}$$

a los elementos c_{ijk} les llamamos simbolos de Christoffel y se obtienen haciendo:

$$c_{ijk} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial d_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial d_{ij}}{\partial q_k} \right\} \tag{37}$$

y el vector $g(q)$ es la derivada de U con respecto a cada grado de libertad.

http://bit.ly/1CTvpuf