Capítulo 4
CURSO PROPEDEUTICO DE ANÁLISIS REAL
Depto. de Control Automático, CINVESTAV-IPN, Mayo-Junio 2013
Ejemplar de material completo, solo falta completar dibujos.

****

4. Funciones reales de una variable

4.1. Representación gráfica

Def.: *Función real de una variable*: es un mapeo f de A en B, donde $A, B \subseteq I\!R$.

El conjunto $\{(x, f(x) : \ x \in D_f\} \subset I\!R^2$ se llama *gráfica* o *curva* o *representación gráfica* de f.

Ejemplos:

- $y = f(x) =\mid x \mid$: forma explícita, $D_f = I\!R$, $V_f = I\!R^+ \cup \{0\}$, tabla de función / gráfica - vea clase.
- $y \cdot x - sen(x) = 0$: forma implícita, forma explícita es $y = f(x) = \frac{sen(x)}{x}$, $D_f = I\!R \setminus \{0\}$.

4.2. Estructura algebráica del conjunto de las funciones reales

Denotamos $F_{I\!R}(I\!R) = \{f : I\!R \longrightarrow I\!R\}$, y sean $f, g \in F_{I\!R}(I\!R)$. Entre funciones pueden ser definidas operaciones “por puntos”:

$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $x \in D_{f+g} = D_f \cap D_g$
$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$, $x \in D_{f-g} = D_f \cap D_g$
$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$, $x \in D_{f\cdot g} = D_f \cap D_g$
$(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $x \in D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap (D_g \setminus \{x \in I\!R : g(x) = 0\})$
$(a \times f)(x) = a \times f(x)$ (multipl. con “escalares”), $x \in D_{a\times f} = D_f$, $a \in I\!R$

(lado izquierdo: nuevas funciones son definidas; lado derecho: calculando en el campo $I\!R$)

Claro que $f + g, f - g, f \cdot g, \frac{f}{g}, a \times f \in F_{I\!R}(I\!R)$.

Lema: $(F_{I\!R}(I\!R), +, \times)$ *es un espacio vectorial sobre el campo* $I\!R$*.*

4.3. Tipos especiales de funciones

Def.: Funciones acotadas.
$f : I\!R \longrightarrow I\!R$ se llama *acotada (sobre D_f)* si V_f es un conjunto acotado (notese que $V_f \subset I\!R$!), es decir, si existen $c_1, c_2 \in I\!R$ tales que $c_1 \leq f(x) \leq c_2 \ \forall \ x \in D_f$ (c_1, c_2 son cotas de V_f). También son definidos $\sup f(x) = \sup V_f, \inf f(x) = \inf V_f, \max f(x) = \max V_f, \min f(x) = \min V_f$.

Ejemplos:

- $f(x) = sen(x), g(x) = cos(x)$ son funciones acotadas sobre $I\!R$ (lo cual es su dominio de definición), puesto que $\mid sen(x) \mid \leq 1$, $\mid cos(x) \mid \leq 1$ para todo $x \in I\!R$; claro que $sup f(x) = inf f(x) = max f(x) = min f(x) = 1$.
- $f(x) = x^2$ es una función acotada por abajo ($inf f(x) = min f(x) = 0$), pero no es acotada por arriba, en consecuencia, $f(x)$ no es acotada. Sin embargo, cuando $f(x)$ es restringuida sobre cualquier subconjunto acotado A de $I\!R$, entonces esta restricción f_A es una función acotada.

Lema: *Sea* $B_{I\!R}(I\!R) = \{f : I\!R \longrightarrow I\!R, f \ \textit{acotado}\}$. $(B_{I\!R}(I\!R), +, \times)$ *es un subespacio vectorial de* $(F_{I\!R}(I\!R)$. *Además,*
$\parallel f \parallel = \sup(\{\mid f(x) \mid : \ x \in D_f\}$,
para cualquier $f \in B_{I\!R}(I\!R)$, *define una norma sobre* $B_{I\!R}(I\!R)$.

En consecuencia tenemos un espacio métrico $(B_{I\!R}(I\!R), d_{sup})$, donde
$d_{sup}(f,g) = \parallel f - g \parallel = \sup(\{\mid f(x) - g(x) \mid : \ x \in D_{f-g}\}, \ f, g \in B_{I\!R}(I\!R)$

($f - g$ es una nueva función definida como substracción "por puntos").

Dos dibujos (qué significan esta norma y métrica ??): ... vea clase ...

Def.: Funciones monótonas.

$f : I\!R \longrightarrow I\!R$ se llama
creciente (sobre D_f) si para todo $x, y \in D_f$, $x \leq y$ implica $f(x) \leq f(y)$;
estrictamente creciente (sobre D_f) si para todo $x, y \in D_f$, $x < y$ implica $f(x) < f(y)$;
decreciente (sobre D_f) si para todo $x, y \in D_f$, $x \leq y$ implica $f(x) \geq f(y)$;

estrictamente decreciente (sobre D_f) si para todo $x, y \in D_f$, $x < y$ implica $f(x) > f(y)$;
monótona (sobre D_f) si es creciente o es decreciente (sobre D_f).
estrictamente monótona (sobre D_f) si es estrictamente creciente o es estrictamente decreciente (sobre D_f).

Ejemplos:

- La función idéntica $f(x) = x$ es (estrictamente) creciente y (estrictamente) decreciente sobre $I\!R$.
- La función escalón $f(x) = 0$ para $x \leq 0$, $f(x) = 1$ para $x > 0$, es creciente sobre $I\!R$ pero no estrictamente, puesto que por ejemplo $f(-3) = f(-1) = 0$.
- Las funciones $f(x) = ln(x)$, $f(x) = exp(x)$, $f(x) = x^2$, son estrictamente crecientes sobre $I\!R^+$.
- La función $f(x) = \frac{1}{x}$ es estrictamente decreciente sobre $I\!R^+$.

Lema: *Toda función estrictamente monótona es inyectiva (1-1). En consecuencia, si $f : A \longrightarrow B$ es una función estrictamente monótona de A sobre B entonces f es una bijección.*

4.4. Límites de funciones

4.4.1. Concepto del límite de funciones

Trabajamos en el espacio métrico $(I\!R, |\cdot|)$.

Def.: Sea $A \subset I\!R, c \in I\!R$. c se llama *punto de acumulación de* A si cada intervalo abierto centrado en c contiene al menos un punto de A diferente a c ; es decir: para todo $\delta > 0$ existe $a \in A, a \neq c$ tal que $c - \delta < a < c + \delta$.
(Significa: puede ser que $c \notin A$ pero c "está muy cerca" de A.)

Ejemplos y hechos:

- Para un intervalo cerrado arbitrario $A = [a, b]$, cualquier punto de A es punto de acumulación de A.
- Para un intervalo abierto arbitrario $A = (a, b)$, cualquier punto de A es punto de acumulación de A, pero además los puntos a y b lo son.
- Para un intervalo de la forma $A = [a, b)$, el conjunto de los puntos de acumulación es $[a, b]$. Para un intervalo de la forma $A = (a, \infty)$, el conjunto de los puntos de acumulación es $[a, \infty)$. Un intervalo de la forma $A = [a, \infty)$ coincide con el conjunto de sus puntos de acumulación.

- El conjunto finito $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y el conjunto $\mathbb{Z}$ no tienen puntos de acumulación, puesto que para cualquier elemento x de A (o de $\mathbb{Z}$), podemos encontrar un intervalo abierto (en $\mathbb{R}$) el cual contiene ningún otro punto (distinto de x) de A (o de $\mathbb{Z}$). Se dice entonces que todo punto de A (o de $\mathbb{Z}$) "es aislado" o "puede ser aislado".

- Sea $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\}$. Ya sabemos que A es un subconjunto acotado de $\mathbb{R}$, 1 es cota superior, 0 es cota inferior, $1 \in a$ pero $0 \notin A$, además $inf(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

  Vamos a demostrar que 0 es un punto de acumulación de A: Aplicando la definición, sea δ arbitrario, $\delta > 0$. Necesitamos encontrar un $a \in A$ tal que a está en el intervalo abierto $(0 - \delta, 0 + \delta) = (-\delta, \delta)$. Observando que todo elemento de A es positivo, basta con que a cumple $a < \delta$.

  Manera 1: Por la convergencia $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, existe $n_\delta \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_\delta$ implica que $-\delta < \frac{1}{n} < \delta$. Así que, simplemente podemos tomar un n cumpliendo $n \geq n_\delta$ y luego $a = \frac{1}{n}$ es un elemento de A como lo necesitabamos.

  Manera 2 (no usamos como argumento que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$): tenemos el número real $\delta > 0$ arbitrariamente supuesto. Claro que también $\frac{1}{\delta}$ es un número real. Por el principio de Archimedes existe un $n^* \in \mathbb{N}$ tal que $n^* > \frac{1}{\delta}$, lo cual es equivalente a $\frac{1}{n^*} < \delta$. Pero entonces $a = \frac{1}{n}$ es un elemento de A como lo necesitabamos.

  Cualquiera de las dos maneras completa demostrar que 0 es un punto de acumulación de A.

- **Lema:** *Si c es punto de acumulación de A, entonces cada intervalo centrado en (c) contiene un número infinto de puntos de A.*

- **Corolario:** *Si A es un conjunto finito, entonces A no tiene puntos de acumulación.*

- **Proposición de Boltzano/Weierstrass:** *Todo subconjunto infinito acotado de $\mathbb{R}$ tiene al menos un punto de acumulación.*

Def.: Sea $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ (es decir, $A = D_f$), c un punto de acumulación de A, y $l \in \mathbb{R}$. l se llama *límite de f en c* si, dado cualquier intervalo abierto $(l - \epsilon, l + \epsilon)$, existe un intervalo abierto $(c - \delta, c + \delta)$ tal que $x \neq c, x \in (c - \delta, c + \delta) \cap A$ implica que $f(x) \in (l - \epsilon, l + \epsilon)$.

Notación: $l = \lim_{x\to c} f(x)$, "f converge a l en c", f tiene en c el límite l.

Def.: Si no existe ningún $l \in \mathbb{R}$ tal que l es límite de f en c, se dice que f *diverge en c*.

La definición significa lo siguiente:

Si $A \subset \mathbb{R}, f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, *c un punto de acumulación de* A, $l \in \mathbb{R}$, *entonces* $l = \lim_{x \to c} f(x)$ *si y solo si, para todo* $\epsilon > 0$, *existe un* $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ *tal que, si* $x \in A$ *con* $\mid x - c \mid < \delta$, *entonces* $\mid f(x) - l \mid < \epsilon$.

Dibujo: vea clase

Ejemplos:

- $\lim_{x \to c} b = b$, es decir, el límite de la función constante $f(x) = b$, en cualquier punto $c \in \mathbb{R}$, es igual a b.

  Para demostrar eso, sea $c \in \mathbb{R}$, y $\epsilon > 0$ arbitrario. Tomamos simplemente $\delta = 1$. Trivialmente, suponiendo que $0 < \mid x - c \mid < \epsilon$ se sigue $\mid f(x) - b \mid = \mid b - b \mid = 0 < \epsilon$.

- $\lim_{x \to c} x = c$, es decir, el límite de la función identica $f(x) = x$, en cualquier punto $c \in \mathbb{R}$, es igual a c.

  Para demostrar eso, sea $c \in \mathbb{R}$, y $\epsilon > 0$ arbitrario. Tomamos $\delta = \epsilon$. Claramente, suponiendo que $0 < \mid x - c \mid < \epsilon$ se sigue $\mid f(x) - c \mid = \mid x - c \mid < \epsilon$.

- $\lim_{x \to c} x^2 = c^2$, es decir, el límite de la función cuadrática $f(x) = x^2$, en cualquier punto $c \in \mathbb{R}$, es igual a c^2.

  El objetivo de la demostración es mostrar que $\mid f(x) - c^2 \mid = \mid x^2 - c^2 \mid$ resulta ser estrictamente menor que ϵ siempre cuando x se encuentra suficientemente cerca de c.

  Los siguientes pasos son fáciles de verificar:

  (a) $x^2 - c^2 = (x + c)(x - c)$.

  (b) $\mid x - c \mid < 1$ implica que $\mid x \mid \leq \mid c \mid + 1$, lo cual implica lo siguiente:

(c) $| x + c | \leq | x | + | c | \leq | c | +1+ | c | = 2\cdot | c | +1$,

En consecuencia,

(d) $| x - c | < 1$ implica que
$| x^2 - c^2 | = | x + c | \cdot | x - c | \leq (2\cdot | c | +1)\cdot | x - c |$.

(e)
$$(2\cdot | c | +1)\cdot | x - c | < \epsilon \iff | x - c | < \frac{\epsilon}{(2\cdot | c | +1)}$$

Ahora podemos escribir la demostración: Sea $\epsilon > 0$ arbitrario dado. Construimos δ como sigue:

$$\delta = \delta(\epsilon) = min\{1, \frac{\epsilon}{(2\cdot | c | +1)}\}$$

Ahora, si suponemos que $0 < | x-c | < \delta$, entonces en particular $| x-c | < 1$, por lo cual la desigualdad en (d) se cumple, pero además $| x-c | < \frac{\epsilon}{(2\cdot|c|+1)}$. Por eso se obtiene

$$| f(x) - c^2 | = | x^2 - c^2 | < \frac{2\cdot | c | +1}{2\cdot | c | +1} \cdot \epsilon = \epsilon,$$

lo cual completa demostrar que $\lim_{x\to c} f(x) = c^2$.

Lema: *Toda función $I\!R \longrightarrow I\!R$, en cualquier punto de acumulación c de D_f, puede tener a lo más* **un** *límite; es decir: si el límite de f en c existe, entonces es único.*

Demostracion: Supongamos que l_1 y l_2 sean ambos límite(s) de $f(x)$ en el punto $c \in I\!R$. Sea $\epsilon > 0$ arbitrario. Por la definición del límite,
existe $\delta_1 > 0$ tal que $| x - c | < \delta_1$ implica que $| f(x) - l_1 | < \epsilon$, y
existe $\delta_2 > 0$ tal que $| x - c | < \delta_2$ implica que $| f(x) - l_2 | < \epsilon$.

Sea $\delta := min\{\delta_1, \delta_2\}$.

Entonces, siempre cuando $| x - c | < \delta$, se sigue que
$| l_1 - l_2 | = | l_1 - f(x) + f(x) - l_2 | \leq | l_1 - f(x) | + | f(x) - l_2 | < 2\epsilon$.

Nótese que δ existe para **cualquier** $\epsilon > 0$ dado , y $| x - c | < \delta$ siempre puede ser supuesto. Es decir, para cualquier $\epsilon > 0$ dado, se obtiene que $| l_1 - l_2 | < 2\epsilon$. En consecuencia $l_2 = l_1$, lo que completa demostrar la unicidad del límite.

(El último argumento con más detalle: si fuera $l_2 \neq l_1$, entonces $| l_1 - l_2 | = d > 0$. Si ahora tomamos un ϵ particular: $\epsilon = \frac{d}{3}$, obtenemos que $d = | l_1 - l_2 | = \frac{2}{3}d$ lo cual es una contradicción.)

4.4.2. Límite de funciones y sucesiones

Criterio de sucesiones para la convergencia de funciones:
Si $A \subset I\!R, f : A \longrightarrow I\!R$, c un punto de acumulación de A, $l \in I\!R$, entonces $l = \lim_{x \to c} f(x)$ si y solo si, para toda sucesión $(x_n)_{n \geq 1}$ en A, con las propiedades que $\lim_{n \to \infty} x_n = c$ y $x_n \neq c \; \forall n \in I\!N$, la sucesión $(f(x_n))_{n \geq 1}$ converge a l.

Criterio de divergencia de funciones:
Sea $A \subset I\!R, f : A \longrightarrow I\!R$, c un punto de acumulación de A, $l \in I\!R$,

i) f **no** *tiene el límite l en $c \iff$ existe una sucesión $(x_n)_{n \geq 1}$ en A con $\lim_{n \to \infty} x_n = c$ y $x_n \neq c \; \forall n \in I\!N$, pero $(f(x_n))_{n \geq 1}$* **no** *converge a l.*

ii) f **no** *tiene límite en el punto $c \iff$ existe una sucesión $(x_n)_{n \geq 1}$ en A con $\lim_{n \to \infty} x_n = c$ y $x_n \neq c \; \forall n \in I\!N$, pero $(f(x_n))_{n \geq 1}$* **no** *converge.*

Ejemplos:

- $f(x) = x$, cada $c \in I\!R$ es punto de acumulación de $D_f = I\!R$. Sea $c \in I\!R$.

  Si (x_n) es cualquier sucesión en $I\!R$ con $\lim_{n \to \infty} x_n = c$, entonces debido a que $f(x_n) = x_n$, $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} x_n = c$. En consecuencia, $\lim_{x \to c} x = c$.

- La función escalón dada por $f(x) = 1$ para $x \geq 0$ y $f(x) = 0$ para $x < 0$, **no** tiene límite en $c = 0$, por las siguientes razones:

  Consideremos las sucesiones $x_n = \frac{1}{n}$ y $y_n = -\frac{1}{n}$, $n \in I\!N$. Ambas sucesiones convergen a 0. Sin embargo, las sucesiones de los valores correspondientes son dos sucesiones constantes distintas las cuales no convergen al mismo número:

  $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} 1 = 1$, $\lim_{n \to \infty} f(y_n) = \lim_{n \to \infty} 0 = 0$.

- La función $f(x) = \frac{1}{x}$ con $D_f = I\!R \backslash \{0\}$ puede ser estudiada en el punto $c = 0$ con respecto a su límite, puesto que $c = 0$ es un punto de acumulación de D_f. La función **no** tiene límite en $c = 0$, puesto que existe una sucesión (x_n) que converge a $c = 0$ pero cuya sucesión de valores $(f(x_n))$ no es convergente:

$$x_n = \frac{1}{n}, \; n \in I\!N, \quad \lim_{n \to \infty} x_n = 0, \qquad f(x_n) = \frac{1}{\frac{1}{n}} = n \; .$$

- Para demostrar que la función signo, $f(x) = 1$ para $x > 0$, $f(x) = -1$ para $x < 0$, $f(0) = 0$, no tiene límite en $c = 0$, es suficiente encontrar una sucesión (x_n) con $\lim_{n \to \infty} x_n = 0$, $x_n \neq 0$ para todo $n \in I\!N$ tal que la sucesión de los valores $(f(x_n))$ no converge (es decir, es divergente). Un ejemplo de una tal sucesión es la siguiente:

  $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $n \in I\!N$. Claro que $\lim_{n \to \infty} x_n = 0$, pero $(f(x_n)) = ((-1)^n)_{n \geq 1}$.

- La función $f(x) = sen\frac{1}{x}$ ($D_f = I\!R \setminus \{0\}$, pero $c = 0$ es punto de acumulación de D_f) no tiene límite en $c = 0$.

  Para demostrar eso, es por ejemplo suficiente construir sucesiones (x_n), (y_n) para todo $n \in I\!N$, tales que $x_n \neq 0$, $y_n \neq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$, pero con la propiedad que $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq \lim\limits_{n\to\infty} f(y_n)$. Eso haremos a continuación.

  Sabemos que para todo $n \in Z\!\!\!Z$, $sen(\pi n) = 0$ y $sen(\frac{1}{2}\pi + 2\pi n) = 1$. Definimos

  $$x_n = \frac{1}{\pi n},\ y_n = \frac{1}{(\frac{1}{2}\pi + 2\pi n)},\quad n \in I\!N\ .$$

  Claro que $x_n \neq 0$, $y_n \neq 0$ para todo $n \in I\!N$, y

  $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{\pi} \cdot \left(\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\right) = 0,\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\pi + 2\pi n\right)} = 0\ ,$

  pero

  $f(x_n) = sen(\pi n) = 0,\ f(y_n) = sen\left(\frac{1}{2}\pi + 2\pi n\right) = 1\ ,\ n \in I\!N$

  son sucesiones constantes y

  $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0\ \neq\ 1 = \lim\limits_{n\to\infty} f(y_n)\ .$

- De manera muy similar como en el ejemplo anterior, se puede demostrar que la función $f(x) = cos\frac{1}{x}$ no tiene límite en $c = 0$:

  Aprovechando que para todo $n \in Z\!\!\!Z$, $cos(2\pi n) = 1$ y $sen(\frac{\pi}{2} + \pi n) = 0$, se define

  $$x_n = \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)},\ y_n = \frac{1}{2\pi n},\quad n \in I\!N\ .$$

  Claro que $x_n \neq 0$, $y_n \neq 0$ para todo $n \in I\!N$, y $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$, pero

  $f(x_n) = cos\left(\frac{1}{x_n}\right) = 0,\ f(y_n) = cos\left(\frac{1}{x_n}\right) = 1\ \ \forall\ n \in I\!N$, implicando que

  $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0\ \neq\ 1 = \lim\limits_{n\to\infty} f(y_n)$.

- Contrariamente al ejemplo anterior, la función $f(x) = x \cdot cos\frac{1}{x}$ tiene un límite en $c = 0$: $\lim\limits_{x\to 0}\left(x \cdot cos\frac{1}{x}\right) = 0$.

  Eso se puede demostrar fácilmente aplicando la definición del límite: sea $\epsilon > 0$. Buscamos $\delta > 0$ tal que $\mid x \mid < \delta$ implica que $\mid f(x) \mid < \epsilon$. Tenemos $\mid f(x) \mid = \mid x \cdot cos\frac{1}{x} \mid = \mid x \mid \cdot \mid cos\frac{1}{x} \mid \leq \mid x \mid$ puesto que $|cos\frac{1}{x}|$ pertenece siempre al intervalo $[0, 1]$. Con eso podemos tomar $\delta = \epsilon$, puesto que $\mid x \mid < \delta = \epsilon$ implica de inmediato que $\mid f(x) \mid \leq \mid x \mid < \epsilon$.

4.4.3. Propiedades del límite de funciones

Recordamos las operaciones entre funciones "por puntos", por ejemplo $f+g$ es una nueva función definida por $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$!
Qué pasa con los limites ???

Lema: *Si $A \subset I\!R$, $f, g : A \longrightarrow I\!R$, c un punto de acumulación de A, $k, l, a \in I\!R$, entonces: $\lim\limits_{x\to c} f(x) = k$, $\lim\limits_{x\to c} g(x) = l$ implica*

$\lim\limits_{x\to c}(f+g)(x) = k+l, \quad \lim\limits_{x\to c}(f-g)(x) = k-l, \quad \lim\limits_{x\to c}(f\cdot g)(x) = k\cdot l,$

$\lim\limits_{x\to c}(a\times f)(x) = a\times k.$

Si además $g(x) \neq 0\ \forall\ x\in A$, y $l \neq 0$, entonces $\lim\limits_{x\to c}(\frac{f}{g})(x) = \frac{k}{l}$.

Ejemplos:

- Para calcular $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{x^2+1}{x^4+4}\right)$, primero se observa que $x^4+4 \neq 0$ para todo $x \in I\!R$, pues $x = \sqrt[4]{-4} \notin I\!R$. Así que, $c=2$ es punto de acumulación de $D_f = I\!R$. Aplicando las reglas de cálculo obtenemos

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2+1}{x^4+4}\right) = \frac{\lim\limits_{x\to 2}(x^2+1)}{\lim\limits_{x\to 2}(x^4+4)} = \frac{(\lim\limits_{x\to 2}x)(\lim\limits_{x\to 2}x) + \lim\limits_{x\to 2}1}{(\lim\limits_{x\to 2}x)^4+4} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

- Para calcular $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{x^2-4}{3x-6}\right)$, primero se observa que $c=2$ es punto de acumulación de $D_f = I\!R\setminus\{0\}$. Considerando la función dada como cociente, vemos que $h(x) = 3x-6 \neq 0$ para todo $x\neq 2$; sin embargo, $\lim\limits_{x\to 2}h(x) = 3\cdot\left(\lim\limits_{x\to 2}x\right) - 6 = 0$ por lo cual la regla de cálculo del cociente no es aplicable. Hay que buscar otra expresión de la función:
  Para $x \neq 0$ (!!!) vale que $\frac{x^2-4}{3x-6} = \frac{(x+2)(x-2)}{3(x-2)} = \frac{1}{3}(x+2)$, lo cual implica
  $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{x^2-4}{3x-6}\right) = \lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{3}(x+2) = \frac{1}{3}\left(\lim\limits_{x\to 2}x+2\right) = \frac{4}{3}$.

Lema sobre funciones acotadas: *Sea $A\subset I\!R$, $f : A \longrightarrow I\!R$, c un punto de acumulación de A. Siempre cuando se sabe que $\lim\limits_{x\to c}f(x)$ existe y además f es acotada sobre $A\setminus\{c\}$, es decir, existen $a, b\in I\!R$ tales que $a \le f(x) \le b\ \forall\ x \in A, x\neq c$, entonces $a \le \lim\limits_{x\to c}f(x) \le b$.*

Lema sobre funciones acotadas por otras funciones: *Sean $A\subset I\!R$ y funciones $f, g, h : A \longrightarrow I\!R$, c un punto de acumulación de A. Si $f(x) \le g(x) \le h(x)\ \forall\ x\in A$ (no se exige eso para $x = c$), entonces $\lim\limits_{x\to c}f(x) = l = \lim\limits_{x\to c}h(x)$ implica que $\lim\limits_{x\to c}g(x) = l$.*

Ejemplos:

- $\lim\limits_{x\to 0}\left(x sen(\frac{1}{x})\right) = 0$, puesto que $f(x) = x sen(\frac{1}{x})$, $D_f = I\!R \setminus \{0\}$, $c = 0$ es punto de acumulación de D_f, y vale que $-1 \leq sen(z) \leq 1$ para todo $z \in I\!R$. Claro que $\lim\limits_{x\to 0}(|x|) = \lim\limits_{x\to 0}(-|x|) = 0$. En consecuencia $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

  Nota: Este cálculo en verdad no muestra que este límite existe. La aplicación de la regla exige *de antemano* saber que este límite existe. Para estar seguro que todo está bien, se puede *demostrar* ahora que 0 es el límite $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, lo cual es fácil, *aplicando la definición del límite.*

- Similarmente como en el ejemplo anterior,

$$f(x) = x^{\frac{3}{2}} \text{ considerada para } x > 0 \ : \quad \lim_{x\to 0} f(x) = 0 \ .$$

  Tomando en cuenta la suposicón $x > 0$ y considerando $f(x)$ solamente en la cercanía de $c = 0$, podemos asumir $0 < x \leq 1$. Bajo esta suposión vale que

  $x < x^{\frac{1}{2}} \leq 1$, que implica $x^2 \leq f(x) = x^{\frac{3}{2}} \leq x$. En consecuencia

  $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = \lim\limits_{x\to 0} x = 0$, y entonces $\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{3}{2}} = 0$.

4.4.4. Límites infinitos:

Def.: Sea $A \subset I\!R, f : A \longrightarrow I\!R$, c un punto de acumulación de A.

Se dice que f *tiende a* ∞ *cuando* x *tiende a* c ($\lim\limits_{x\to c} f(x) = \infty$) si para todo $a \in I\!R$ existe $\delta = \delta(a) > 0$ tal que $x \in A, 0 <| x - c |< \delta$ implica $f(x) > a$.

Se dice que f *tiende a* $-\infty$ *cuando* x *tiende a* c ($\lim\limits_{x\to c} f(x) = -\infty$) si para todo $b \in I\!R$ existe $\delta = \delta(b) > 0$ tal que $x \in A, 0 <| x - c |< \delta$ implica $f(x) < b$.

Se dice que f *tiene una infinidad en* c cuando $\lim\limits_{x\to c} |f(x)| = \infty$.

Ejemplos:

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$: Observemos primero que $f(x) = \frac{1}{x^2} > 0$ para todo $x \in D_f = I\!R \setminus \{0\}$.

  Para demostrar el hecho del límite infinito, sea $\alpha > 0$ dado arbitrariamente (α positivo es suficiente puesto que la función tiene puros valores positivos). Definimos $\delta = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$.

  Suponiendo ahora $0 <|x|< \alpha$, se sigue $x^2 < \delta^2 = \frac{1}{\alpha}$ y luego $f(x) = \frac{1}{x^2} > \alpha$ lo cual completa la demostración.

- $f(x) = \frac{1}{x}$: $D_f = I\!R \setminus \{0\}$, estudiemos el límite de la función en el punto de acumulación $c = 0$. Es claro que $f(x)$ no tiene límite en este punto (dibujo !).

Veamos la posibilidad de un límite infinito:

Si α es un número real positivo, entonces resulta que $f(x) < \alpha$ para todo $x < 0$. Eso implica que $f(x)$ **no tiende a** ∞ cuando x tiende a 0.

Si β es un número real negativo, entonces resulta que $f(x) > \beta$ para todo $x > 0$. Eso implica que $f(x)$ **no tiende a** $-\infty$ cuando x tiende a 0.

Por otro lado es claro que $f(x)$ **tiene una infinidad** en c, puesto que la función $f(x) = \frac{1}{|x|}$ solo tiene valores positivos y $\lim_{x \to c} | f(x) | = \lim_{x \to c} \frac{1}{|x|} = \infty$.

Nota: Recomiendo también estudiar al capítulo 2 de las Notas de Clase del Dr. Gabriel Villa !!!

****