# Examen del Curso Propedéutico: **Control Clásico**

Departamento de Control Automático, CINVESTAV-IPN

Miércoles, 26 de junio

Sea un sistema lineal invariante en el tiempo descrito por la siguiente EDO:

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)y(t)=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}-1\right)u(t), \tag{1}$$

donde $y(t)$ es la salida y $u(t)$ la entrada.

1. **Función se transferencia.** Encuentre su función de transferencia, $y(\mathrm{s})/u(\mathrm{s})$. ¿Cuáles son los polos y los ceros?

2. **Routh-Hurwitz.** Como primer intento para controlar a (1), se propone una ley de control, con la siguiente función de transferencia:

$$\frac{u(\mathrm{s})}{v(\mathrm{s})}=K\frac{(\mathrm{s}-a)}{(\mathrm{s}+b)}, \tag{2}$$

donde: $K>0$, $a>0$ y $b>0$.

   (a) Utilizando el criterio de Routh-Hurwitz, determine las relaciones que debe guardar la ganacia $K$ con los parámetros $a$ y $b$, para que el sistema en lazo cerrado sea Hurwitz estable.

   (b) Proponga valores numéricos para los parámetros $a$ y $b$, y determine el rango de ganancias $K$ para que el sistema en lazo cerrado sea Hurwitz estable. ¿Cuál es la ganancia crítica, $K_c$, para la cual, el sistema en lazo cerrado presenta una respuesta oscilatoria?

3. **Lugar de las raices.**

   (a) Compruebe el rango encontrado en el inciso 2.(b) utilizando el lugar de las raices.

   (b) Determine una ganancia $K$, para que los polos dominantes tengan un coeficiente de amortiguamiento de 0.5. ¿Cuál será el porcentaje de sobre paso $M_p$? ¿Donde se localizan los polos dominantes? ¿Cuáles son los valores de sus frecuencias naturales no amortiguada, $\omega_n$, y amortiguada, $\omega_d$?

   (c) Con el valor de ganancia, $K$, encontrado en el inciso 3.(b), trace la respuesta al escalón del sistema en lazo cerrado. Comente la gráfica.

4. **Nyquist.**

   (a) Con los valores numéricos de $a$ y $b$, propuestos en el inciso 2.(b), trace el diagrama de Nyquist de la función de transferencia en lazo abierto:

$$G(\mathrm{s})=\left(\frac{(\mathrm{s}-a)}{(\mathrm{s}+b)}\right)\left(\frac{(\mathrm{s}-1)}{\mathrm{s}(\mathrm{s}+1)}\right) \tag{3}$$

(b) Determine graficamente el número de polos no Hurwitz del sistema en lazo cerrado:

$$G_{\ell c}(\mathrm{s}) = \frac{KG(\mathrm{s})}{1+KG(\mathrm{s})}, \tag{4}$$

para los casos: $(i)$ $K = K_c/2$ y $(ii)$ $K = 2K_c$.

5. **Bode.**

(a) Con los valores numéricos de $a$ y $b$, propuestos en el inciso 2.(b), trace el diagrama de Bode de (3).

(b) Determine graficamente la frecuencia y la ganancia, del sistema en lazo abierto $KG(\mathrm{s})$, para las cuales se tenga una fase de 180°, en los casos: $(i)$ $K = K_c/2$ y $(ii)$ $K = 2K_c$.

6. **Controlador PID.** ¿El sistema descrito por la EDO (1) puede ser controlado por un controlador del tipo PID? En caso negativo justifique su respuesta. En caso positivo diseñelo.

7. **Representación de estado.**

(a) Dar una representación de estado,

$$\mathrm{d}x(t)/\mathrm{d}t = Ax(t) + bu(t)\ , \quad y(t) = c^T x(t), \tag{5}$$

del sistema descrito por la EDO (1), tal que su matriz de controlabilidad sea de rango pleno por filas.

(b) De la representación de estado propuesta (5), calcule: $(i)$ su función de transferencia, $(ii)$ su espectro (los valores propios), $(iii)$ los ceros del sistema (las raíces del determinante de la matriz sistema), $(iv)$ el determinante de su matriz de controlabilidad y $(iv)$ el determinante de su matriz de observabilidad.

8. **Retroalimentación de estado.** Diseñe una retroalimentación de estado,

$$u(t) = f^T x(t) + v(t), \tag{6}$$

tal que:

(a) la función de transferencia en lazo cerrado sea: $(\mathrm{s}-1)/(\mathrm{s}+1)^2$

(b) ¿Es factible la función de transferencia en lazo cerrado: $1/(\mathrm{s}+1)$?

9. **Observador de estado.** Diseñe un observador de estado,

$$\mathrm{d}\hat{x}(t)/\mathrm{d}t = (A + kc^T)\hat{x}(t) + \begin{bmatrix} b & -k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \tag{7}$$

tal que: $\det\left(\mathrm{s}I - (A + kc^T)\right) = (\mathrm{s}+10)^2$.

10. **Simulación numérica.** Realice la simulación numérica de la representación de estado (5), controlado por la ley de control:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathrm{d}\hat{x}(t)/\mathrm{d}t & = & (A + kc^T)\hat{x}(t) + \begin{bmatrix} b & -k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \\ u(t) & = & f^T \hat{x}(t) \end{array} \right. , \tag{8}$$

con las condiciones iniciales: $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $\hat{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Grafique: $(i)$ la ley de control, $u$, $(ii)$ la salida, $y$, $(iii)$ el error de estimación, $\sqrt{(x-\hat{x})^T(x-\hat{x})}$ y $(iv)$ las cuatro componentes del estado, de la representación de estado en lazo cerrado, expresada en su forma de Jordan.