Capítulo 5
CURSO PROPEDEUTICO DE ANÁLISIS REAL
Depto. de Control Automático, CINVESTAV-IPN, Mayo-Junio 2013
Ejemplar de material completo, solo falta completar dibujos.

****

5. Continuidad de funciones reales de una variable

5.1. Definiciones equivalentes de continuidad y criterios a base de sucesiones

Def.: (Continuidad en un punto) Sea $A \subset I\!R, f : A \longrightarrow I\!R$ $(D_f = A)$, y $c \in A$. f se llama *continua en c* si, dado cualquier intervalo abierto $(f(c) - \epsilon, f(c) + \epsilon)$, existe un intervalo abierto $(c - \delta, c + \delta)$ tal que $x \in (c - \delta, c + \delta) \cap A$ implica $f(x) \in (f(c) - \epsilon, f(c) + \epsilon)$. Si f no es continua en c, entonces f se llama *discontinua* en c, y c se llama *(punto de) discontinuidad de f*.

Observaciones:

- Si c es un punto de acumulación de A, entonces f es continua en c si y solo si $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$, lo cual significa que:

  $f(c) \in I\!R$ existe, $\lim\limits_{x \to c} f(x) = l \in I\!R$ existe, y $f(c) = l$!!!

- Si $c \in A$ **no** es un punto de **acumulación** de A, entonces f es automáticamente continua en c (...vea clase...). Estos puntos c se llaman "puntos aislados" de A, y se consideran **no** interesantes para el estudio de la función.

Def.: (Continuidad sobre un conjunto) Sea $A \subset I\!R, f : A \longrightarrow I\!R$ $(D_f = A)$, y $B \subset A$. f se llama *continua sobre B* si f es continua en todos los puntos de B.

Reformulemos la definición de continuidad en un punto:

Lema: *Sea* $A \subset I\!R, f : A \longrightarrow I\!R, c \in A$. f *es continua en* $c \Longleftrightarrow \forall\, \epsilon > 0\ \exists\, \delta = \delta(\epsilon) > 0$ *tal que* $(x \in A, \mid x - c \mid < \delta)$ *implica que* $\mid f(x) - f(c) \mid < \epsilon$.

Aplicando que f es continua en c si y solo si $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$, obtenemos:

Criterio de continuidad a base de sucesiones:
Sea $A \subset I\!R, f : A \longrightarrow I\!R, c \in A$.
f *continua en* $c \Longleftrightarrow$ *si* $(x_n)_{n \geq 1} \subset A$, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = c$, *entonces* $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(c)$.

Corolario: Criterio de discontinuidad a base de sucesiones:
Sea $A \subset I\!R, f : A \longrightarrow I\!R, c \in A$.
f *es discontinua en* $c \Longleftrightarrow$ *existe una sucesión* $(x_n)_{n \geq 1}$ *en* A *tal que* $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = c$, *pero la sucesión* $(f(x_n))_{n \geq 1}$ *no converge a* $f(c)$.

5.2. Ejemplos de funciones continuas y no continuas

• $f(x) = b, x \in I\!R$ función constante, es continua sobre $D_f = I\!R$, puesto que $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c) = b \; \forall \, c \in I\!R$.

• $f(x) = x$ función identica, es continua sobre $D_f = I\!R$, puesto que $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c) = c$ para todo $c \in I\!R$.

• $f(x) = \frac{1}{x}$ no es continua en $c = 0$, pero es continua sobre $I\!R \setminus \{0\}$

Argumento para que $f(x)$ no es continua en 0: $f(x)$ no es definida en $x = 0$, es decir, $0 \notin D_f$, por lo tanto no es continua en este punto.

Para demostrar que $f(x) = \frac{1}{x}$ es continua sobre $I\!R \setminus \{0\}$, consideramos una sucesión (x_n) arbitraria en $I\!R \setminus \{0\}$ con la propiedad que $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$. Entonces $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n \to \infty} x_n} = \frac{1}{x} = f(x)$, lo cual demuestra la continuidad de $f(x)$ en $x \neq 0$.

• $f(x) = \mid x \mid$ es continua sobre $I\!R$.

Para demostrar eso, consideramos una sucesión (x_n) arbitraria en $I\!R$ tal que $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$.

A demostrar: $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = \lim\limits_{n \to \infty} \mid x_n \mid = \mid x \mid = f(x)$.

Demostramos que la sucesión $(\mid \mid x \mid - \mid x_n \mid \mid)_{n \geq 1}$ tiene límite 0.

Es fácil de demostrar que (ejercicio) $0 \leq \mid \mid x \mid - \mid x_n \mid \mid \leq \mid x - x_n \mid$.

Aplicando el criterio de comparación de sucesiones se obtiene que
$0 \leq \lim\limits_{n \to \infty} \mid \mid x \mid - \mid x_n \mid \mid \leq \lim\limits_{n \to \infty} \mid x - x_n \mid$, pero este último término es igual a cero, puesto que $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$. En consecuencia $\lim\limits_{n \to \infty} \mid \mid x \mid - \mid x_n \mid \mid = 0$, lo cual es equivalente a $\lim\limits_{n \to \infty} \mid x_n \mid = \mid x \mid$, completando la demostración.

• La función escalón $f(x) = 0$ para $x \in (-\infty, 0]$, $f(x) = 1$ para $x \in (0, \infty)$, tiene una discontinuidad en $c = 0$, puesto que en este punto no tiene límite (ya lo sabemos). La función es continua sobre $I\!R \setminus \{0\}$ (ejercicio).

• La función dada como $f(x) = 1$ para $x \in I\!R, x \neq 3$ y $f(3) = 2$, tiene una discontinuidad en $c^* = 3$, y es continua sobre $I\!R \setminus \{c^*\}$; $D_f = I\!R$. Nótese que $\mathop{lim}\limits_{x \to 3} f(x) = l = 1$ (ejercicio), y la función f^* definida por

$f^*(x) = f(x)$ para $x \in D_f \setminus \{c^*\}$ y $f(c^*) = 1$,
es continua sobre todo $I\!R$, en particular es continua en en $c^* = 3$, puesto que $f^*(x) = 1$ es una función constante.

5.3. Operaciones con funciones continuas

Recordemos $+, -, \cdot, :$ entre funciones, y $a \times f$ para $a \in I\!R$ y función f.

Lema: *Sea $A \subset I\!R, f, g : A \longrightarrow I\!R, a \in I\!R, c \in A$. Si tanto f como g son continuas en c, entonces $f + g, f - g, f \cdot g, a \times f$ también son funciones continuas* *en c. Si además $g(x) \neq 0$ para todo $x \in A$, entonces $\frac{f}{g}$ también es continua en c.*

Ejemplos de aplicación:
Sabiendo que $f(x) = x$ es continua sobre $I\!R$, mediante las reglas de cálculo se obtiene por ejemplo que

- $f(x) = \frac{1}{x}$ es continua sobre $I\!R \setminus \{0\}$.
- $f(x) = \frac{x^4 - 2x^2 + 3}{x^3 - 1}$ es continua sobre $I\!R \setminus \{1\}$.
- Cualquier función que es un polinomio de grado n, $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + a_1 x + a_0$ es continuo sobre $I\!R$.
- Cualquier función racional $f(x) = \frac{\text{polinomio } p_1(x)}{\text{polinomio } p_2(x)}$ es continuo en todos los puntos diferentes de las raices de $p_2(x)$.

Recordemos además la concatenación $\circ$ entre funciones:

Lema: *Sea $A, B \subset I\!R, f : A \longrightarrow I\!R,\ g : B \longrightarrow I\!R$ tal que $f(A) \subset B$. Si f es continua en $c \in A$ y g es continua en $b = f(c) \in B$, entonces $g \circ f : A \longrightarrow I\!R$ es continua en c.*

Ejemplo: $f(x) = sen(x)$, $g(x) = exp(x)$ son continuas sobre $I\!R$. Por lo tanto, $exp(sen(x))$ es continua sobre $I\!R$, puesto que $exp(sen(x)) = (g \circ f)(x)$.

5.4. Discontinuidad

5.4.1. Discontinuidad eliminable

Def.: Sea $A \subset I\!R, f : A \longrightarrow I\!R$, c un punto de acumulacion de A. Si f **no** es continua en c pero $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L \in I\!R$ (existe !), entonces c se llama *punto de discontinuidad eliminable*. La funcion definida por

$f^*(x) = f(x)$ para $x \in D_f \setminus \{c\}$ y $f^*(c) = L$
es continua en el punto c.

Ejemplo: $f(x) = 1$ para $x \in I\!R, \neq 0$, $f(0) = 2$ es una función definida sobre $I\!R$ pero no es continua en $c = 0$. Sin embargo, se trata de una discontinuidad eliminable puesto que $\lim\limits_{x \to c} f(x) = 1$ (ejercicio). Claramente la nueva función definida por $f^*(x) = f(x)$ para $x \neq 0$ y por $f^*(x) = 1$ es continua sobre $I\!R$.

5.4.2. Brincos

Introducimos límites de funciones unilaterales:

Def.: Sea $A \subset I\!R, f : A \longrightarrow I\!R$.

Si $c \in I\!R$ es punto de acumulación de $A \cap (c, \infty) = \{x \in A : x > c\}$, L se llama *límite por la derecha* de f en c ($\lim\limits_{x \to c+} f(x) = L$), si, dado cualquier $\epsilon > 0$, existe

$\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que para cualquier $x \in A$ con $0 < x - c < \delta$ se sigue que $\mid f(x) - L \mid < \epsilon$.

Si $c \in I\!R$ es punto de acumulación de $A \cap (-\infty, c) = \{x \in A : x < c\}$, L se llama *límite por la izquierda* de f en c ($\lim\limits_{x \to c-} f(x) = L$), si, dado cualquier $\epsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que para cualquier $x \in A$ con $0 < c - x < \delta$ se sigue que $\mid f(x) - L \mid < \epsilon$.

Aplicando las definiciones, se obtiene inmediatamente:

Lema.: *Sea $A \subset I\!R, f : A \longrightarrow I\!R$, $c \in I\!R$ un punto de acumulación de $A \cap (c, \infty)$ y de $A \cap (-\infty, c)$. Entonces $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L \in I\!R$ si y solo si $\lim\limits_{x \to c+} f(x) = L = \lim\limits_{x \to c-} f(x)$ (es decir, ambos límites existen, y son iguales !).*

Ejemplos:

- Ya sabemos que la función signo dada por

  $f(x) = 1$ para $x > 0$, $f(x) = -1$ para $x < 0$, $f(0) = 0$, no tiene límite en $c = 0$. Pero es obvio que para $c = 0$:

  $\lim\limits_{x \to c+} f(x) = 1, \ \lim\limits_{x \to c-} f(x) = -1.$

- Consideremos la función $f(x) = exp(\frac{1}{x})$ en el punto $c = 0$. Resulta que $D_f = I\!R \setminus \{0\}$, claro que $c = 0$ es punto de acumulación de D_f, dibujo: vea clase.

  Analicemos primero si existe un límite por la derecha:

  Para $t \in I\!R$, $t > 0$ vale que $0 < t < exp(t)$ (vea literatura). Aplicando eso, tenemos para $x > 0$ que $0 < \frac{1}{x} < exp(\frac{1}{x})$.

  Ahora tomamos una sucesión que "converge por la derecha al cero": $x_n = \frac{1}{n}, n \in I\!N$ (claro que $x_n > 0 \ \forall \ n \in I\!N$ y $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$).

  Debido a que $f(x_n) = exp(n) > n \ \forall \ n \in I\!N$ se sigue que la sucesión $(f(x_n))_{n \geq 1}$ es creciente y además no acotada, por lo tanto no es convergente.

  En consecuencia, para $c = 0$, $\lim\limits_{x \to c+} exp(\frac{1}{x})$ no existe (en $I\!R$).

Ejercicio: Demostrar que para $c = 0$, $\lim_{x \to c-} exp(\frac{1}{x}) = 0$.

Ahora podemos definir brincos:

Def.: Si para $A \subset I\!\!R, f : A \longrightarrow I\!\!R$ vale que $L = \lim_{x \to c-} f(x) \neq \lim_{x \to c+} f(x) = M$, entonces se dice que f tiene en el punto c un *brinco* de magnitud $\mid M - L \mid$.

Ejemplo: Vimos arriba que para la función signo dada por
$f(x) = 1$ para $x > 0$, $f(x) = -1$ para $x < 0$, $f(0) = 0$,

$\lim_{x \to c+} f(x) = 1$, $\lim_{x \to c-} f(x) = 0$.

Por eso, la función tiene en $c = 0$ un brinco de la magnitud $|1 - (-1)| = 2$.

5.4.3. Puntos de infinidad

Def.: Si para $A \subset I\!\!R, f : A \longrightarrow I\!\!R$ vale que $\lim_{x \to c} \mid f(x) \mid = \infty$, entonces c se llama punto (o, lugar) de infinidad de f.

Ejemplo: Vimos antes los ejemplos de las funciones $f(x) = \frac{1}{x}$ y $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Ambas tienen en $c = 0$ un punto de infinidad.

****