

Matemáticas

Roberto Cadena Vega

22 de diciembre de 2014

Índice general

1. Álgebra abstracta	7
1.1. Grupos	7
Definiciones	7
Reglas de cancelación	9
Subgrupos	10
Subgrupo Normal	12
Homomorfismos de grupo	12
1.2. Anillos	13
Definiciones	13
Homomorfismos de anillo	13
Ideales	13
1.3. Dominios Enteros	14
Definiciones	14
Máximo Común Divisor	14
mínimo común múltiplo	14
Algoritmo de la división de Euclides	14
2. Álgebra lineal	15
3. Ecuaciones diferenciales	17

Todo list

Falta escribir ejemplo	8
Falta escribir apunte	12
Falta escribir apunte	12
Falta escribir apunte	13
Falta escribir apunte	13
Falta escribir apunte	13
Falta escribir apunte	14
Falta escribir apunte	14
Falta escribir apunte	14
Falta escribir apunte	14

Capítulo 1

Álgebra abstracta

1.1. Grupos

Definiciones

Definición 1.1.1. Un grupo es un conjunto no vacío G en el que está definida la operación \star , tal que:

$$\begin{aligned}\star: G, G &\rightarrow G \\ (a, b) &\rightarrow (a \star b)\end{aligned}\tag{1.1.1}$$

Existen definiciones parciales de grupo dependiendo de las propiedades que cumple su operación:

Cerradura $a \star b \in G \quad \forall a, b \in G$

Asociatividad $a \star (b \star c) = (a \star b) \star c \quad \forall a, b, c, \in G$

Identidad $\exists e \in G \ni a \star e = e \star a = a \quad \forall a \in G$

Inverso $\exists b \in G \ni a \star b = b \star a = e \quad \forall a \in G$

Cuando se cumplen las propiedades de *cerradura* y *asociatividad* se le llama *semigrupo*; si adicionalmente se cumple la propiedad de *existencia de identidad* se le llama *monoide*; si adicionalmente se cumple la propiedad de *existencia de inverso* se le llama *grupo*.

Ejercicio 1.1.1. Demostrar que el grupo compuesto por las matrices de la forma:

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$$

es un grupo.

Definición 1.1.2. Se dice que un grupo G es abeliano si:

$$a \star b = b \star a \tag{1.1.2}$$

Ejemplo 1.1.1. El conjunto $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Ejercicio 1.1.2. Consideremos a \mathbb{Z} con el producto usual ¿Es este un grupo?

Ejercicio 1.1.3. Consideremos a \mathbb{Z}^+ con el producto usual ¿Es este un grupo?

Ejercicio 1.1.4. Sea $G = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Si definimos $a \star b = a^2b$ ¿ G es un grupo?

Definición 1.1.3. Orden de un grupo es el numero de elementos que tiene dicho grupo y se denota por $|G|$.
Un grupo G será finito si tiene orden finito, de lo contrario será infinito.

Ejemplo 1.1.2. Si $G = \{e\}$, su orden será $|G| = 1$

Ejemplo 1.1.3. El orden del conjunto de numeros reales es infinito $|\mathbb{R}| = \infty$.

Proposición 1.1.1. Si G es un grupo, entonces:

1. El elemento identidad es único.
2. El elemento inverso $a^{-1} \quad \forall a \in G$ es único.
3. El elemento inverso del inverso de un elemento del grupo es el mismo elemento $(a^{-1})^{-1} = a \quad \forall a \in G$.
4. El elemento inverso de la operación de dos elementos del grupo es la operacion de los inversos de los elementos en orden inverso $(a \star b)^{-1} = b^{-1} \star a^{-1}$
5. En general lo anterior se cumple para cualquier numero de elementos $(a_1 \star a_2 \star \dots \star a_n)^{-1} = a_n^{-1} \star \dots \star a_2^{-1} \star a_1^{-1}$.

Demostración.

1. Dados e_1 y e_2 identidades del grupo, son identicos. Si aplicamos la identidad e_2 a e_1 , tenemos como resultado e_1 , y si aplicamos la identidad e_1 a e_2 obtenemos como resultado e_2 :

$$e_1 = e_2 \star e_1 = e_1 \star e_2 = e_2$$

por lo que podemos ver que ambas identidades son la misma.

2. Sean b, c inversos de a , entonces:

$$\begin{aligned}b \star a &= e \\ a \star c &= e\end{aligned}$$

por lo que podemos ver que:

$$b = b \star e = b \star (a \star c) = (b \star a) \star c = e \star c = c$$

3. Sabemos que existe un inverso a^{-1} tal que:

$$a \star a^{-1} = a^{-1} \star a = e \quad \forall a \in G$$

asi pues, se sigue que:

$$(a^{-1})^{-1} \star a^{-1} = e$$

y como sabemos que el elemento que operado con el inverso sea la identidad es el elemento mismo tenemos que:

$$(a^{-1})^{-1} = a$$

4. Si operamos por la izquierda el termino $b^{-1} \star a^{-1}$ con $a \star b$:

$$(b^{-1} \star a^{-1}) \star (a \star b) = b^{-1} \star (a^{-1} \star a) b = b^{-1} \star e \star b = b^{-1} \star b = e$$

de la misma manera si operamos por la derecha:

$$(a \star b) \star (b^{-1} \star a^{-1}) = a^{-1} \star (b^{-1} \star b) a = a^{-1} \star e \star a = a^{-1} \star a = e$$

por lo tanto:

$$b^{-1} \star a^{-1} = (a \star b)^{-1}$$

□

Reglas de cancelación

Proposición 1.1.2. Sea G un grupo y $a, b, c \in G$, tendremos que:

$$\begin{aligned}a \star b = a \star c &\implies b = c \\ b \star a = c \star a &\implies b = c\end{aligned}\tag{1.1.3}$$

Demostración. Si tomamos en cuenta que $a \star b = a \star c$:

$$b = e \star b = \left(a^{-1} \star a\right) \star b = a^{-1} \star (a \star b) = a^{-1} \star (a \star c) = \left(a^{-1} \star a\right) \star c = e \star c = c$$

de la misma manera para $b \star a = c \star a$:

$$b = b \star e = b \star \left(a \star a^{-1}\right) = (b \star a) \star a^{-1} = (c \star a) \star a^{-1} = c \star \left(a \star a^{-1}\right) = c \star e = c$$

□

Subgrupos

Definición 1.1.4. Un subconjunto no vacío H de un grupo G se llama subgrupo si H mismo forma un grupo respecto a la operación de G . Cuando H es subgrupo de G se denota $H < G$ o $G > H$.

Observación 1.1.1. Todo grupo G tiene automáticamente dos subconjuntos triviales, el mismo G y la identidad $\{e\}$.

Proposición 1.1.3. Un subconjunto no vacío $H \subset G$ es un subgrupo de G si y solo si H es cerrado respecto a la operación de G y $a \in H \implies a^{-1} \in H$.

Demostración. Teniendo que H es un subgrupo de G tenemos que H es un grupo, por lo que automáticamente se cumple la cerradura y la existencia del inverso dentro del subgrupo. Teniendo que H es cerrado, no vacío y $a^{-1} \in H \quad \forall a \in H$. Sabemos que $a^{-1} \star a = e \in H$ debido a que H es cerrado. Además para $a, b, c \in H$ sabemos que $a \star (b \star c) = (a \star b) \star c$ debido a que se cumple en G y H hereda esta propiedad. Por lo que H es un grupo, y por lo tanto subgrupo de G . □

Ejemplo 1.1.4. Sea $G = \mathbb{Z}$ con la suma usual y sea H el conjunto de los enteros pares, es decir:

$$H = \{2n | n \in \mathbb{Z}\}$$

¿Es H un subgrupo de G ?

Empecemos con dos elementos $a, b \in H$, por lo que tenemos que:

$$\begin{aligned} a &= 2q \quad q \in \mathbb{Z} \\ b &= 2q' \quad q' \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

y al sumarlos tenemos que:

$$a + b = 2q + 2q' = 2(q + q') = 2q'' \quad q'' \in \mathbb{Z}$$

por lo que $a + b \in H$.

Por otro lado, para $a \in H$ existe un $q \in \mathbb{Z}$ tal que $a = 2q$. Su inverso será:

$$-a = -2q = 2(-q)$$

por lo que existe $q' = -q \in \mathbb{Z}$ tal que:

$$2q' = -a \in H$$

y por lo tanto $H < \mathbb{Z}$.

Ejemplo 1.1.5. Consideremos $G = \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ con el producto usual, y un subconjunto \mathcal{U}

$$\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C}^* \mid |z| = 1\}$$

¿Es \mathcal{U} un subgrupo de G ?

Dados dos elementos $z_1, z_2 \in \mathcal{U}$ sabemos que $|z_1| = |z_2| = 1$, por lo tanto:

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2| = 1$$

por lo que $z_1 z_2 \in \mathcal{U}$.

Por otro lado, para $z \in \mathcal{U}$ tenemos que $|z| = 1$, y por lo tanto:

$$|z^{-1}| = |z|^{-1} = \frac{1}{|z|} = 1$$

por lo que $z^{-1} \in \mathcal{U}$ y $\mathcal{U} < \mathbb{C}^*$

Ejemplo 1.1.6. Sea G un grupo, a un elemento del grupo y $C(a) = \{g \in G \mid g \star a = a \star g\}$ ¿Es $C(a)$ subgrupo de G ?

Primero notamos que $C(a)$ es no vacío debido a que al menos tiene a la identidad.

$$e \star a = a \star e \implies e \in C(a)$$

Ahora tomemos dos elementos $g_1, g_2 \in C(a)$, para los cuales:

$$g_1 \star a = a \star g_1$$

$$g_2 \star a = a \star g_2$$

Ahora, si operamos estos dos elementos tendremos:

$$(g_1 \star g_2) \star a = g_1 \star (g_2 \star a) = g_1 \star (a \star g_2) = (g_1 \star a) \star g_2 = (a \star g_1) \star g_2 = a \star (g_1 \star g_2)$$

por lo que $g_1 \star g_2 \in C(a)$.

Por último, podemos ver que:

$$a = a \star e = a \star (g \star g^{-1}) = (g \star a) \star g^{-1}$$

En donde para que el elemento inverso exista en $C(a)$, se debe de cumplir que $g^{-1} \star a = a \star g^{-1}$:

$$g^{-1} \star a = g^{-1} \star ((g \star a) \star g^{-1}) = g^{-1} \star (g \star a) \star g^{-1} = g^{-1} \star g \star a \star g^{-1} = e \star a \star g^{-1} = a \star g^{-1}$$

Por lo que $C(a) < G$.

Ejercicio 1.1.5. Sea X un conjunto no vacío. Consideremos $G = \delta X$. Sea $a \in X$, $H(a) = \{f \in \delta X \mid f(a) = a\}$. Verificar que $H \subset G$ es un subgrupo bajo la composición de funciones. Note que $H(a)$ es no vacío, debido a que $\text{id}_X \in H(a)$.

Definición 1.1.5. Sea G un grupo y $a \in G$. El conjunto

$$A = \langle a \rangle = \left\{ a^i \mid i \in \mathbb{Z} \right\} \tag{1.1.4}$$

es un subgrupo de G .

A es no vacío, puesto que $a^0 = e \in A$.

Por otro lado, para dos elementos $a^i, a^j \in A$ tenemos que:

$$a^i a^j = a^{i+j} \in A$$

y para un elemento $a^i \in A$, tenemos que:

$$a^{-i} = \left(a^i\right)^{-1} = \left(a^{-1}\right)^i \in A$$

por lo que $\langle a \rangle$ es un subgrupo. A este se le llama subgrupo cíclico de G generado por a .

Subgrupo Normal

Homomorfismos de grupo

1.2. Anillos

Definiciones

Homomorfismos de anillo

Ideales

1.3. Dominios Enteros

Definiciones

Máximo Común Divisor

mínimo común multiplo

Algoritmo de la división de Euclides

Capítulo 2

Álgebra lineal

Capítulo 3

Ecuaciones diferenciales