

Sesión 1

Parte I: Modelado en Teoría del Control

Sesión	Temas
1	Teoría matemática del control; sistemas, modelos y simulación; modelos matemáticos; el problema de control.
2	Sistemas biológicos (dinámica de poblaciones); crecimiento logístico; cosecha con esfuerzo óptimo; sistema presa-depredador (Lotka-Volterra); el quimiostato.
3	Transcripción génica; modelos sociales.
4	Sistemas económicos (discretos); modelo de cobweb; modelo de Samuelson-Hicks.
5	Sistemas mecánicos traslacionales en 2D y en 3D.
6	Sistemas mecánicos con elementos rotacionales.
7	Electromagnetismo (ecuaciones de Maxwell).
8	Elementos de los circuitos eléctricos.
9	Redes eléctricas (teoría de grafos).
10	Sistemas digitales combinacionales y secuenciales.
11	Transferencia de calor.

Algunas preguntas:

- ¿Qué es un modelo?
- ¿Para qué se modela?
- ¿Qué restringe el proceso de modelado?
- ¿Qué es un modelo matemático?
- ¿Cómo se elaboran los modelos matemáticos?



¿QUÉ ES ESTO?

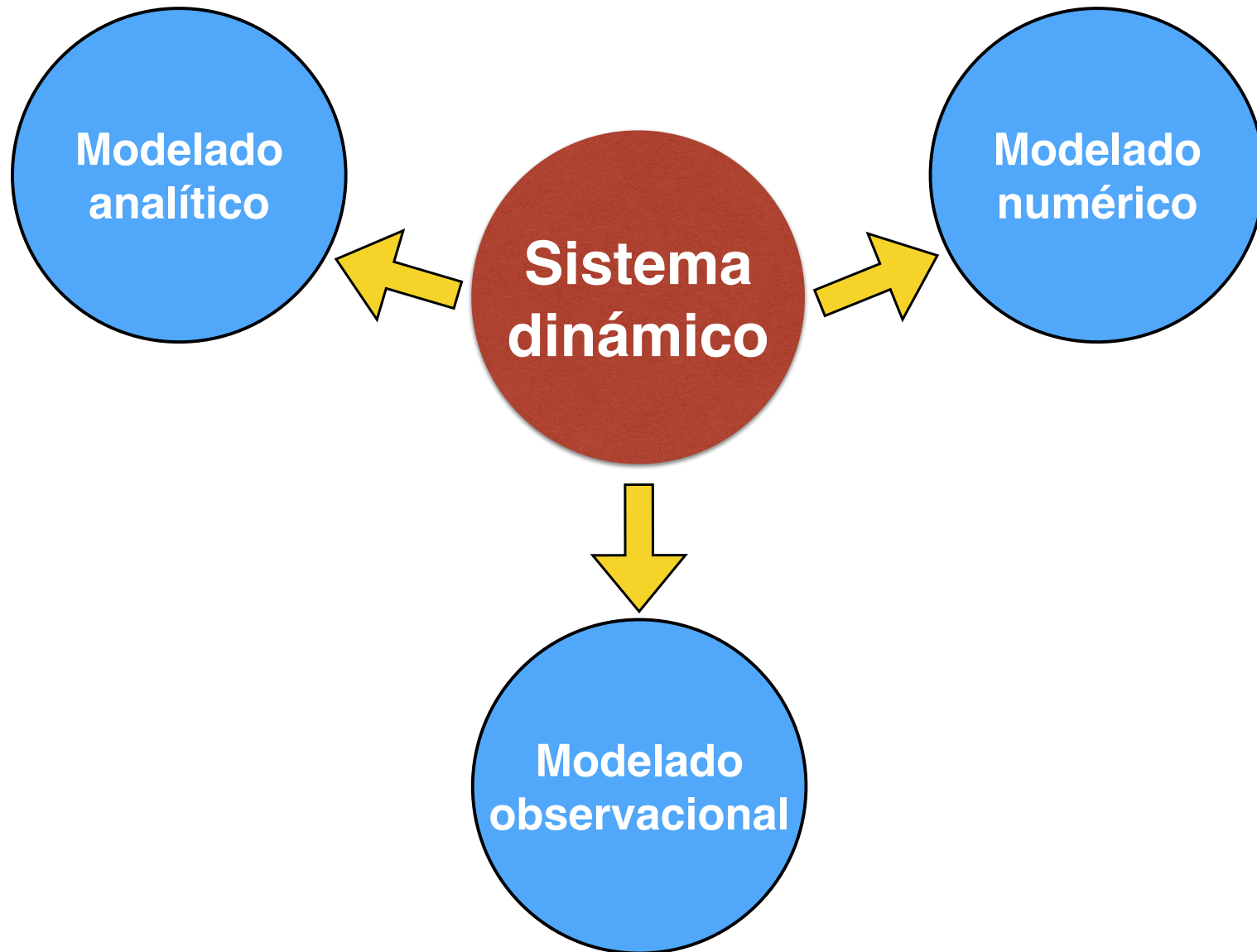
- La fotografía de un violín.
- Es un violín.
- Tiene cuatro cuerdas.
- Es un instrumento de cuerda frotada.
- Las cuerdas se hacían de tripa.
- Se toca con un arco.
- Es de madera.
- La cinta del arco es de crines de caballo.
- Surgió en el siglo XVI.
- A Albert Einstein le gustaba tocarlo.
- No es una guitarra.
- No me gusta.
- Algunos se fabrican en Michoacan.
- Tiene una caja acústica.
- Sus partituras se escriben en clave de sol.
- Se parece al cello.
- No se puede tocar en el vacío.
- Los indígenas mayas lo tocan de oído.
- Me recuerda a Vivaldi.
- Es de color rojizo.
- Un burro no podría tocarlo.
- Itzhak Perlman es su mejor exponente

- Un conjunto ordenado de pixeles.
- Es un instrumento musical.
- Lo inventaron en Italia.
- Sus cuerdas se afinan por intervalos de quintas.
- La cuerda de *la* se afina a 440Hz o a 442Hz.
- En un buen violín el arco es de palo de Brasil.
- Los más costosos son los Stradivarius y los Guarnerius.
- Los hay de varios tamaños.
- Es difícil de tocar.
- Es bonito.
- No está vivo.
- Los gitanos y los judíos lo adoran.
- No es un instrumento de viento.
- Su sonido cambia en función de la humedad ambiental.
- El comportamiento de sus cuerdas es no lineal.
- Está hecho de varios componentes.
- Es un instrumento occidental.
- Su música suele ser triste.
- Lo usan los punks gitanos de Gogol Bordello.
- Algunos tratan de modelarlo matemáticamente.
- Toyota hizo un robot capaz de tocarlo.
- Vanessa Mae también lo toca (o lo tocaba).

También...

- No proviene de Africa.
- Se han hecho varias películas en torno a él.
- Pesa menos de 2 kilos.
- **Es un apuntador a conocimiento almacenado.**

Se modela siempre con un objetivo en mente...



Empecemos con un ejemplo...

Ejemplo 1 *Suponga que se quiere elaborar el modelo matemático de un violín.*

Primer enfoque - Modelo analítico: *Se obtiene una ecuación gobernante y se encuentra una solución analítica.*

Esto requiere de muchas aproximaciones para obtener una solución explícita útil.

Se simplifica para facilitar la elaboración del modelo.

Problema:

El violín resultante no se oiría muy bien, ya que la solución correspondería a una aproximación al instrumento. Se tendría entonces un pseudo-violín.

Segundo enfoque - Modelo numérico basado en principios básicos: *Se obtiene un conjunto de ecuaciones que describen lo que se sabe del violín (acústica, mecánica, termodinámica, . . .).*

Se necesita acoplar los parámetros del modelo con mediciones realizadas sobre un instrumento real (esto permitiría cambiar parámetros entre un Stradivarius y un Guarnerius, por ejemplo).

Problema:

Para ejecutar el modelo en tiempo real se requeriría una supercomputadora. . . o quizás ni siquiera exista un método computacional capaz de simular el modelo resultante.

Tercer enfoque - No ecuaciones: *descripción efectiva de cómo las acciones del músico se relacionan con los sonidos emitidos por el instrumento, sin que se requiera realmente conocer la dinámica fina del instrumento.*

El modelo resultante mapea elementos del conjunto de acciones (del músico) en el conjunto de sonidos emitidos por el instrumento.

Problema:

El modelo resultante no incrementa el conocimiento en torno al sistema modelado, sino en torno a su interacción con el entorno con el cual interactúa.

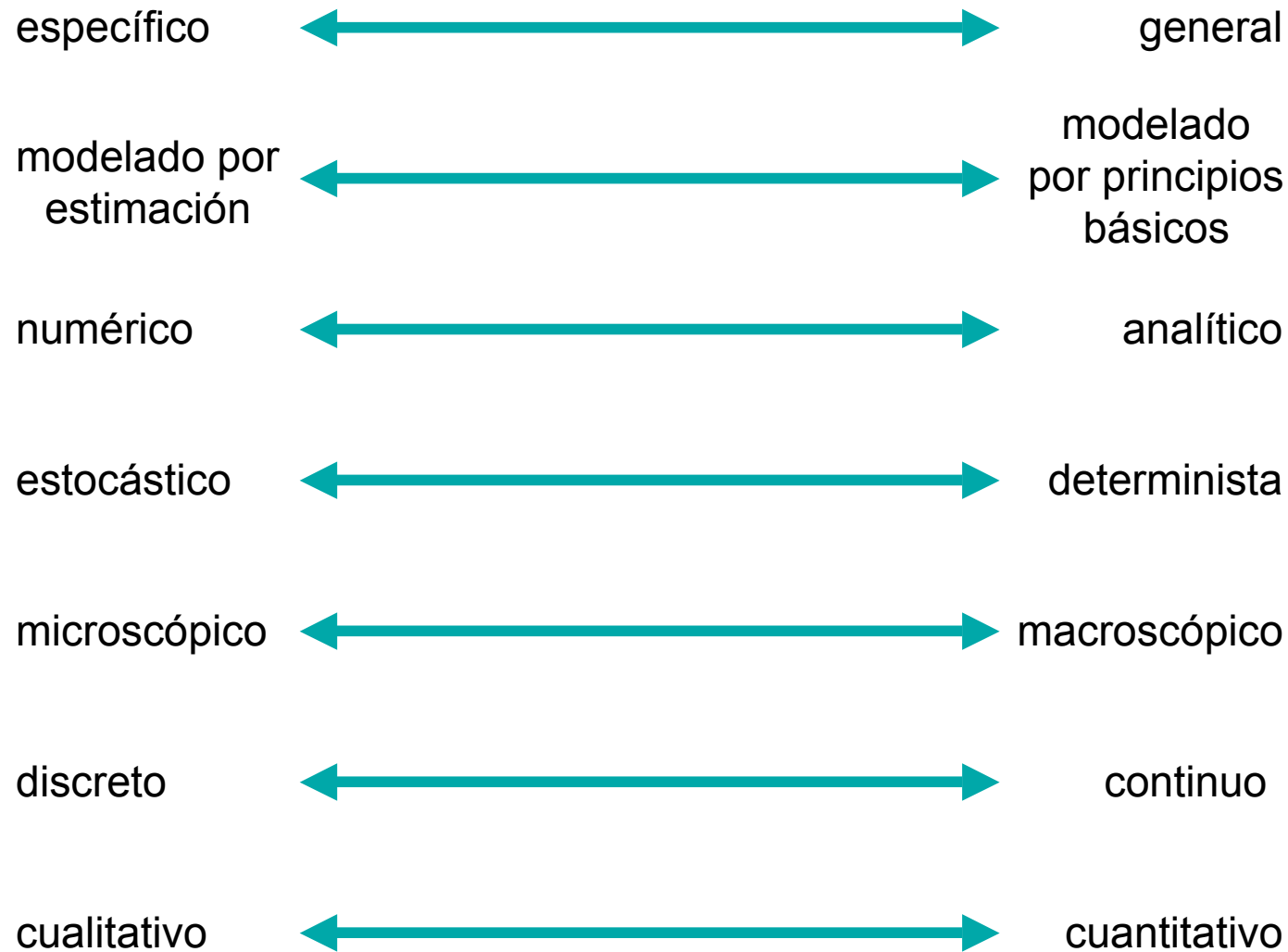
COMENTARIO STRADIVARIUS NO HACÍA MODELOS... FABRICABA VIO-LINES: La única manera en la que un modelo describe perfectamente al sistema que le corresponde, es cuando el uno y el otro son exactamente lo mismo.

Analizando lo tratado en el ejemplo se concluye que existen tres enfoques básicos para el modelado matemático:

- ANALÍTICO.
- NUMÉRICO.
- OBSERVACIONAL.

NOTA 1 *En la práctica del modelado matemático de sistemas dinámicos estos enfoques suelen convivir. En este curso nos centramos fundamentalmente en los enfoques analítico y numérico.*

En cuanto a los niveles de descripción...



NIVELES DE DESCRIPCIÓN (GRANULARIDAD)

1.1 Introducción

Finalidad:

Esta primera sesión tiene como finalidad motivar el estudio de los modelos matemáticos de los sistemas dinámicos desde la perspectiva del control automático.

NOTA 2 *El enfoque de la exposición está condicionado por el hecho de que el público pertenece a una comunidad en la que se cultiva el control automático. Se privilegia entonces una visión en la que lo importante es hacer algo con los sistemas y no sólo describirlos (como sería el caso desde una perspectiva netamente científica). En consecuencia a lo largo de la exposición se abordarán diversas problemáticas que vinculan al control automático con el proceso de modelado.*

NOTA 3 *En esta primera sesión se abordarán esencialmente aspectos relativos a la relación entre sistemas (parcelas del universo que se reconocen como bien delimitadas) y modelos matemáticos (conocimiento estructurado en términos lógicos en torno a los sistemas modelados).*

En primera instancia se abordará la definición de teoría matemática de control, así como lo relativo a los conceptos fundamentales asociados:

- sistemas,
- modelos y
- simulación.

Además:

Se hará una revisión breve de diferentes clases de modelos matemáticos de uso frecuente en control automático:

- modelos en tiempo continuo,
- modelos en tiempo discreto,
- modelos cualitativos y
- modelos a eventos discretos)

y se especificará aquello a lo que se entiende por problema de control.

1.2 Teoría Matemática de Control

¿Qué estudia la Teoría Matemática del Control Automático?

Estudia con base en modelos matemáticos los mecanismos que dotan a los sistemas dinámicos de la capacidad de comportarse de manera autónoma.

¿Sistemas dinámicos?

Desde el punto de vista de la teoría de la información:

Definición SISTEMA: Fuente potencial de datos.

Definición SISTEMA DINÁMICO: Es aquel que genera datos que cambian con el paso del tiempo, esto es que poseen cierta dinámica.

Clases de sistemas dinámicos

AISLADOS: No interactúan con su entorno.

NO AISLADOS: Interactúan con su entorno.

NATURALES: Ajenos a la intervención humana consciente.

ARTIFICIALES: Creados por el hombre.

FÍSICOS: Involucran a la materia y a la energía.

No FÍSICOS: Pensamientos.

Sistemas cómo procesadores de información

Siendo en esencia un procesador de información, un sistema dinámico se comunica con su entorno a través de señales.

Definición INFORMACIÓN: Conjunto organizado de datos, que constituyen un mensaje sobre un determinado ente o fenómeno.

Las señales, esto es variaciones de una cierta cantidad utilizadas para transmitir información, circulan entre los sistemas a través de canales.

Canales

En general un sistema puede poseer dos clases de canales, através de los cuales fluye la información (en forma de señales):

LOS DE ENTRADA. Estos canales existen a su vez en dos tipos diferentes: los accesibles a la manipulación y los innacesibles a esta. Por medio de los canales de entrada accesibles a la manipulación se le puede proveer información al sistema.

LOS DE SALIDA: Estos canales existen en dos tipos, los que proveen información medible y los que son inaccesibles a la medición (la cual en ciertas circunstancias puede ser observada, esto es medida de manera indirecta).

COMENTARIO SOBRE LA TEORÍA DE LA INFORMACIÓN: En lo que sigue se privilegia la visión que comprende a los sistemas como procesadores de información. Dicha perspectiva no es única, pues se puede también comprender a un sistema en términos del procesamiento de energía (este enfoque será seguido al abordar el modelado de sistemas electromecánicos por medio de técnicas variacionales (Euler-Lagrange)). El considerar a los sistemas como procesadores de información permite heredar numerosos conceptos útiles desarrollados por la teoría de la información. Como se verá posteriormente esta visión permite describir a los controladores, en tanto que sistemas, como dispositivos que procesan información, esto es como “computadoras”.

Regresando a los modos de cómo la información fluye entre el entorno y un sistema:

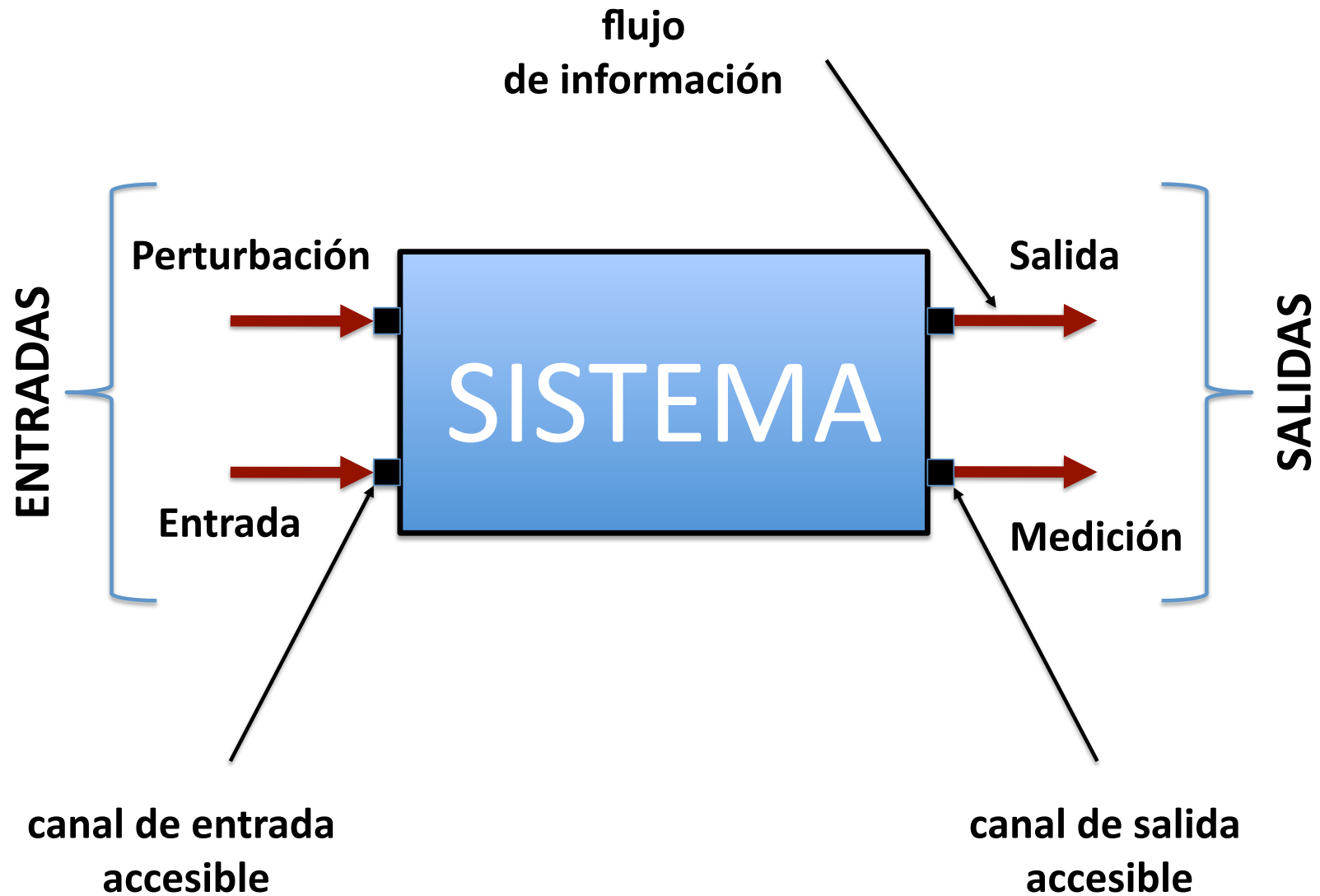
En el caso de los canales de entrada, las señales que circulan a través de los que son inaccesibles a la manipulación suelen denominarse *perturbaciones* (o disturbios).

NOTA 4 *Existen circunstancias en las que las perturbaciones pueden ser medidas y a veces se les puede manipular para que no afecten el comportamiento del sistema (en términos coloquiales se podría decir que las perturbaciones proveen de información al sistema afectado, que podrían llevarlo a modificar su comportamiento).*

NOTA 5 *Los canales de circulación de señales con los que cuentan los sistemas proveen el medio que permite (cuando es posible) la manipulación del sistema (experimentación, control) y su monitoreo (observación, medición).*

Cabe mencionar que muchas veces no es evidente la caracterización de los canales de circulación de información con los que cuenta un sistema, aunque en el caso de los sistemas contruidos por el ser humano (*a los que se les suele denominar procesos tecnológicos*), la especificación de los canales es parte importante del proceso de diseño el sistema.

En lo que sigue se abordará lo relativo a los modelos de sistemas y a la simulación.



1.3 Sistemas, Modelos y Simulación

¿Modelos?

El comportamiento de los sistemas se estudia por medio de descripciones de estos.

Toda descripción del comportamiento de un sistema constituye un modelo de éste, esto es modelar significa organizar el conocimiento que se posee de un sistema.

NOTA 6 *La descripción de un sistema no puede estar separada del contexto experimental que da lugar a la construcción del modelo.*

Así:

Definición MODELO: Un modelo (\mathbb{M}) para un sistema (\mathbb{S}) y un experimento (\mathbb{E}) es cualquier cosa a la cual se le pueda aplicar \mathbb{E} , para obtener respuesta a preguntas acerca de \mathbb{S} .

Modelar es la tarea esencial que une a las ciencias y a las ingenierías.

Así:

Los científicos se contentan usualmente con la observación y la comprensión del mundo (modelado)

Los ingenieros quieren modificar la realidad (con un cierto objetivo).

NOTA 7 *La ciencia es esencialmente análisis; la ingeniería es esencialmente diseño. En la actualidad la tecnociencia, esto es la solución de problemáticas sociales con base en la aplicación tecnológica del conocimiento científico, se encuentra en auge.*

Toda aplicación científica conlleva: Riesgos y Beneficios.

Preguntas:

- ¿Qué riesgos y beneficios conlleva el uso de la ingeniería genética de plantas?
- ¿Qué se puede decir con respecto al auge global de la comunicación basada en Internet?

¿Qué se hace con los modelos?

Se les hace preguntas en torno a los sistemas a los que describen...

Respetando el marco experimental subyacente.

¿Y la Simulación?

Definición SIMULACIÓN: Al proceso de formular cuestionamientos a una descripción se le denomina simulación (con los modelos se simula, con los sistemas físicos se experimenta).

NOTA 8 *Olvidarse del marco experimental en base al cual se construye un modelo es catastrófico, pues las simulaciones informarán sobre el modelo pero no sobre el sistema al que este describe.*

ALGUNOS COMENTARIOS SOBRE LOS MODELOS

- Un modelo puede describir perfectamente a un sistema dado (esto es puede responder a cualquier cuestionamiento sobre el sistema), únicamente si es el sistema mismo o si es una copia exacta de éste.
- Un modelo cualquiera puede describir a todos los sistemas, si no se le pregunta nada sobre estos.
- Los modelos son también sistemas.

- La visión sistémica de la realidad (esto es su estudio a través del análisis de las interacciones que se dan entre los sistemas), impone una estructura jerárquica del conocimiento.
- Hay sistemas formados por sistemas, esto es existe ímplicita una noción de complejidad asociada a un modelo de un sistema.

Complejidad

Definición COMPLEJIDAD DE UN MODELO: Cantidad de información estructurada que le da forma.

Un sistema formado por otros sistemas (subsistemas) es más complejo que cualquiera de estos, esto es cualquier descripción del sistema requerirá más información que la que se requiere para describir a cualquiera de los subsistemas que posee.

COMENTARIO SOBRE LA COMPLEJIDAD: La noción de complejidad precedente es una variante de la definición utilizada en la teoría del cómputo. En dicha teoría se utiliza el concepto de complejidad para referirse a los recursos requeridos durante el cálculo para resolver un problema computacional. Los recursos comúnmente estudiados son el tiempo (mediante una aproximación al número y tipo de pasos de ejecución de un algoritmo para resolver un problema) y el espacio (mediante una aproximación a la cantidad de memoria, de computadora, utilizada para resolver un problema). En el caso de los modelos la definición exigiría elegir una medida concreta de la información contenida en la descripción del sistema, lo que lleva necesariamente a los conceptos de entropía acuñados por Claude Elwood Shannon a fines de los años cuarenta del siglo pasado.

COMENTARIO COMPLEJIDAD VERSUS UTILIDAD: La utilidad de un modelo está acotada por su complejidad. La complejidad disminuye la generalidad de la descripción. Por otro lado los modelos demasiado simples pueden ser de poca utilidad. Llegar a un compromiso entre complejidad y utilidad de un modelo no es una tarea simple. Muchas veces los modelos simples (también denominados modelos de juguete) proveen información cualitativa muy útil sobre el sistema descrito. En control se prefieren modelos no demasiado complejos.

1.4 Modelos matemáticos

¿Modelos matemáticos?

Definición MODELO MATEMÁTICO: Un modelo matemático es aquel que puede ser codificado en términos de un programa de cómputo.

Por *programa de cómputo* se entiende:

“Un conjunto de reglas lógicas que fijan los modos de procesamiento de cierta información cuantitativa”.

Modelos como programas de cómputo

Como programa de cómputo un modelo matemático dado suele ser leído por una “computadora” (entendida esta en términos abstractos), para extraer información sobre el sistema descrito.

NOTA 9 *No sólo los modelos matemáticos se pueden entender como programas de cómputo, los sistemas mismos pueden verse también como tales. En el caso de los sistemas físicos el universo mismo puede ser concebido como una computadora en la que todos los programas de cómputo (sistemas) son ejecutados y darles así existencia. El universo mismo correspondería a una clase particular de sistemas que son también programas de cómputo que se ejecutan sobre sí mismos.*

¿Qué clases de modelos matemáticos existen?

Antes que nada la noción de *estado* de un sistema dinámico:

Definición ESTADO DEL SISTEMA DINÁMICO: Conjunto de variables descriptivas que almacenan la memoria de la evolución temporal del sistema.

NOTA 10 *Se dice que un modelo de un sistema dinámico es mínimo cuando su estado no incluye variables redundantes.*

MODELOS EN TIEMPO CONTINUO. Se caracterizan por el hecho de que, en un rango de tiempo finito, las variables de estado cambian sus valores infinitamente seguido. La codificación del modelo suele utilizar ecuaciones diferenciales. Esta es la clase de modelos matemáticos más comúnmente empleados por los teóricos del control automático.

MODELOS EN TIEMPO DISCRETO. En esta clase de modelos la variable temporal está discretizada. La codificación del modelo suele utilizar ecuaciones en diferencias (*e.g.* modelos de sistemas continuos controlados por medio de computadoras digitales).

MODELOS CUALITATIVOS. Son por naturaleza modelos en tiempo discreto y sus variables dependientes están discretizadas. Se codifican usualmente por medio de representaciones de estado finito.

MODELOS A EVENTOS DISCRETOS. Tanto la variable temporal, como las variables de estado, son esencialmente continuas. Se diferencian de los modelos en tiempo continuo por el hecho de que en un rango temporal finito sólo puede ocurrir un número finito de cambios en el estado.

MODELOS DE PARÁMETROS CONCENTRADOS. Estos modelos poseen variables (generalmente dependientes del tiempo) que no están ligadas al estado y que describen propiedades que se consideran concentradas espacialmente.

MODELOS DE PARÁMETROS DISTRIBUIDOS. Los parámetros describen interacciones del sistema dinámico descrito con campos distribuidos espacialmente.

MODELOS DETERMINISTAS. En la evolución en el tiempo del sistema dinámico el azar no juega ningún rol.

MODELOS ESTOCÁSTICOS. La evolución en el tiempo del sistema dinámico depende del azar.

NOTA 11 *Existen modelos en los que se mezclan más de una clase de los modelos descritos, tal y como es el caso de los modelos híbridos, que combinan características propias de los sistemas en tiempo continuo y de los sistemas en tiempo discreto.*

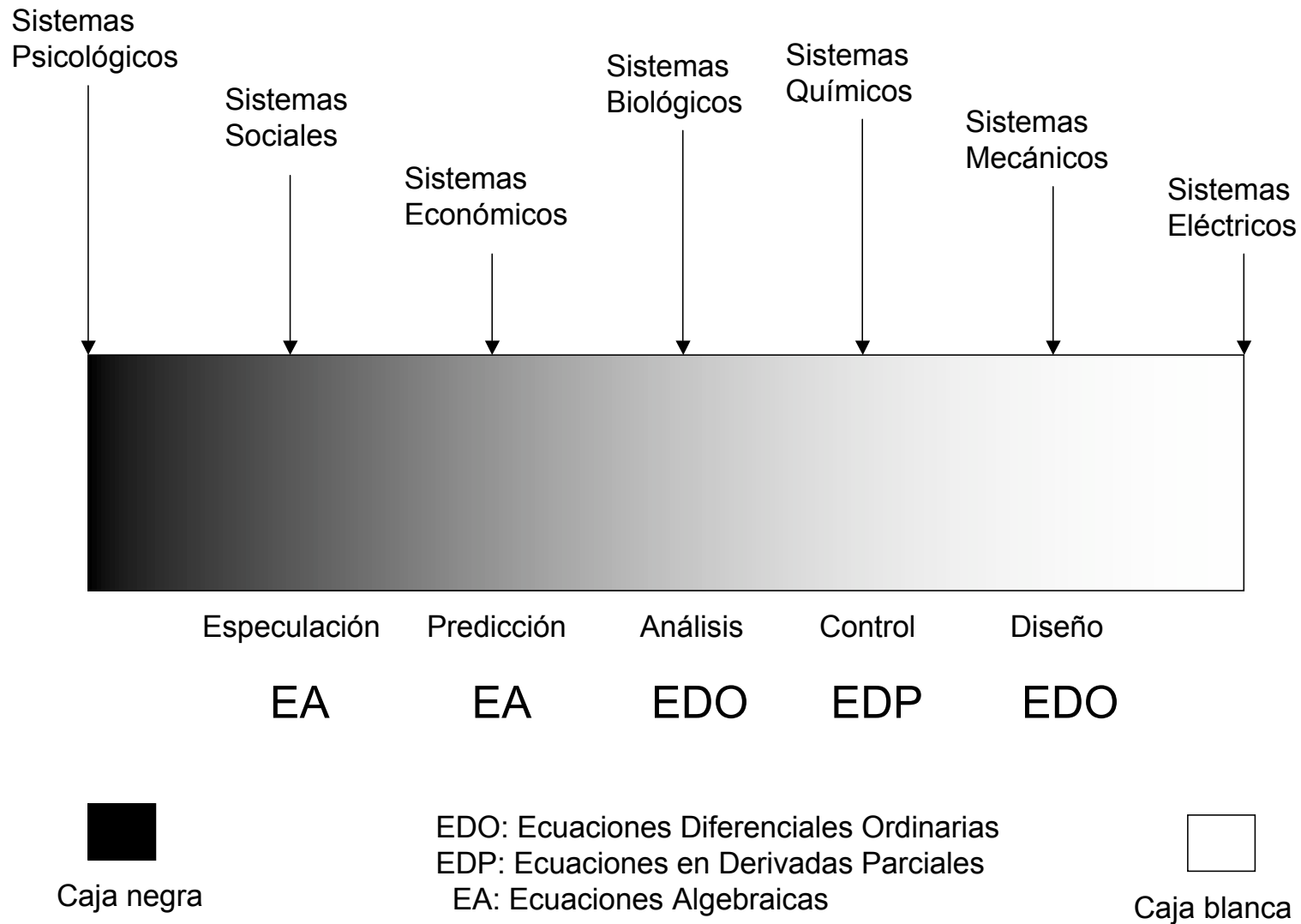
COMENTARIO SOBRE LA CAUSALIDAD: En el tratamiento matemático de los sistemas dinámicos se establece que la información asociada es procesada en términos causales, esto es que las causas siempre preceden a los efectos.

¿Cómo se elige la clase de modelos?

Para dar respuesta a esta pregunta en la figura siguiente se muestra, de manera esquemática, la relación existente entre el modelado y la naturaleza del sistema concernido.

En la figura también se muestra el uso típico que se le da a los modelos matemáticos.

Se privilegia lo relativo a los modelos correspondientes al tiempo continuo.

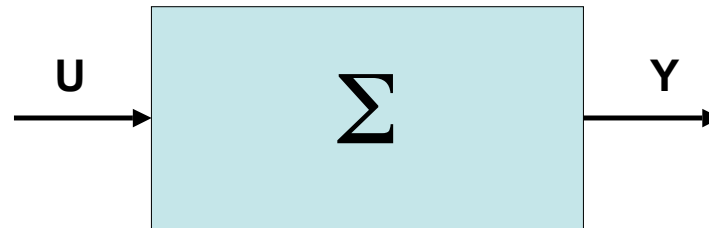


COMENTARIO SOBRE LA ELECCIÓN DE MODELOS: Como se desprende del análisis de la figura precedente, es el nivel de ignorancia lo que determina en última instancia la elección de la clase de modelos para describir a un sistema dado. Los sistemas a los que se denomina cajas blancas son tan bien conocidos que es posible utilizar el proceso de modelado para construir los sistemas (esto es se puede llevar un modelo a una realización física), este es el caso de los sistemas eléctricos y electrónicos, para los cuales se ha incluso automatizado el proceso que lleva de la concepción en computadora a la puesta a punto del sistema real. El caso es diferente con los sistemas muy oscuros (e.g. los psicológicos, que presentan un nivel de complejidad muy elevado), para los cuales las técnicas de modelado son en general muy burdas (o inexistentes).

1.5 El Problema de Control

¿En qué consiste el Problema de Control?

Considere un sistema representado de manera esquemática por la figura siguiente:



El sistema está caracterizado por un conjunto de entradas (\mathbf{U}), un conjunto de salidas (\mathbf{Y}) y un conjunto de variables internas (Σ), que incluyen las variables de estado y cualesquiera otras variables algebraicas auxiliares.

PROBLEMAS DIRECTOS VS PROBLEMAS INVERSOS

La situación “normal” para un problema de simulación está dada cuando todas las entradas están dadas y cuando la estructura del sistema y las condiciones iniciales de todas las variables de estado están especificadas. La tarea de la simulación es determinar el comportamiento de las trayectorias de todas las variables de salida, esto es:

\mathbf{U} , Σ conocidos; \mathbf{Y} desconocido (simulación).

Este problema es denominado el **PROBLEMA DIRECTO**.

En lo que respecta a los **PROBLEMAS INVERSOS**, existen tres tipos. A saber:

Si el sistema es una caja negra, se tienen los problemas de **IDENTIFICACIÓN DE ESTRUCTURA** y de **ESTIMACIÓN DEL ESTADO**, respectivamente. En este caso:

U, **Y** conocidos; Σ desconocido.

El tercer tipo de problema inverso es aquel en el que se tiene la situación siguiente (**PROBLEMA DE CONTROL**.):

Σ , **Y** conocidos; **U** desconocido,

COMENTARIO SOBRE EL MODELADO Y LA IDENTIFICACIÓN: En el caso de los sistemas tecnológicos es común utilizar la identificación como medio principal para la construcción de modelos, utilizando información proveniente de mediciones entrada-salida para dar valor a los parámetros de un sistema de ecuaciones preespecificado (elegido en base a consideraciones basadas en la experiencia). El proceso de identificación es de naturaleza eminentemente estadística y suele resolverse a través de algoritmos basados en aplicaciones de la optimización matemática. Los métodos de identificación tienen como principal defecto la consideración en exclusiva del comportamiento entrada-salida del sistema en cuestión, aunque se les utiliza al no haber alternativas de modelado disponibles.

1.6 Comentarios Finales

En lo que sigue se presentan algunos comentarios relativos a las definiciones presentadas, los sistemas dinámicos y la simulación:

SOBRE LAS DEFINICIONES. Las definiciones que se han dado en esta sesión (en particular la correspondiente a sistema), tienen como característica principal su naturaleza utilitaria.

Existen definiciones más formales que las presentadas, pero se ha decidido seguir un enfoque utilitarista en esta sesión, para resaltar el hecho de que con los sistemas se quiere hacer algo.

Posteriormente se seguira un enfoque más formal.

SOBRE LOS SISTEMAS DINÁMICOS. En lo que respecta a la definición de sistema dinámico se debe tener cuidado.

Para la teoría matemática de sistemas, la noción de sistema dinámico se da en términos de operadores que permiten la interacción entre espacios de funciones. Tales funciones caracterizan a las señales asociadas con el comportamiento del sistema.

Las definiciones presentadas privilegian la visión de los sistemas como procesadores de información. Esta visión no pretende ser única. Una visión alternativa (para ciertas clases de sistemas), comprende a los sistemas como entidades que procesan energía (el enfoque variacional, por ejemplo).

SOBRE LA SIMULACIÓN. Con respecto a la simulación, es importante mencionar que la naturaleza de las herramientas de simulación condiciona en gran medida la utilización de las herramientas de modelado.

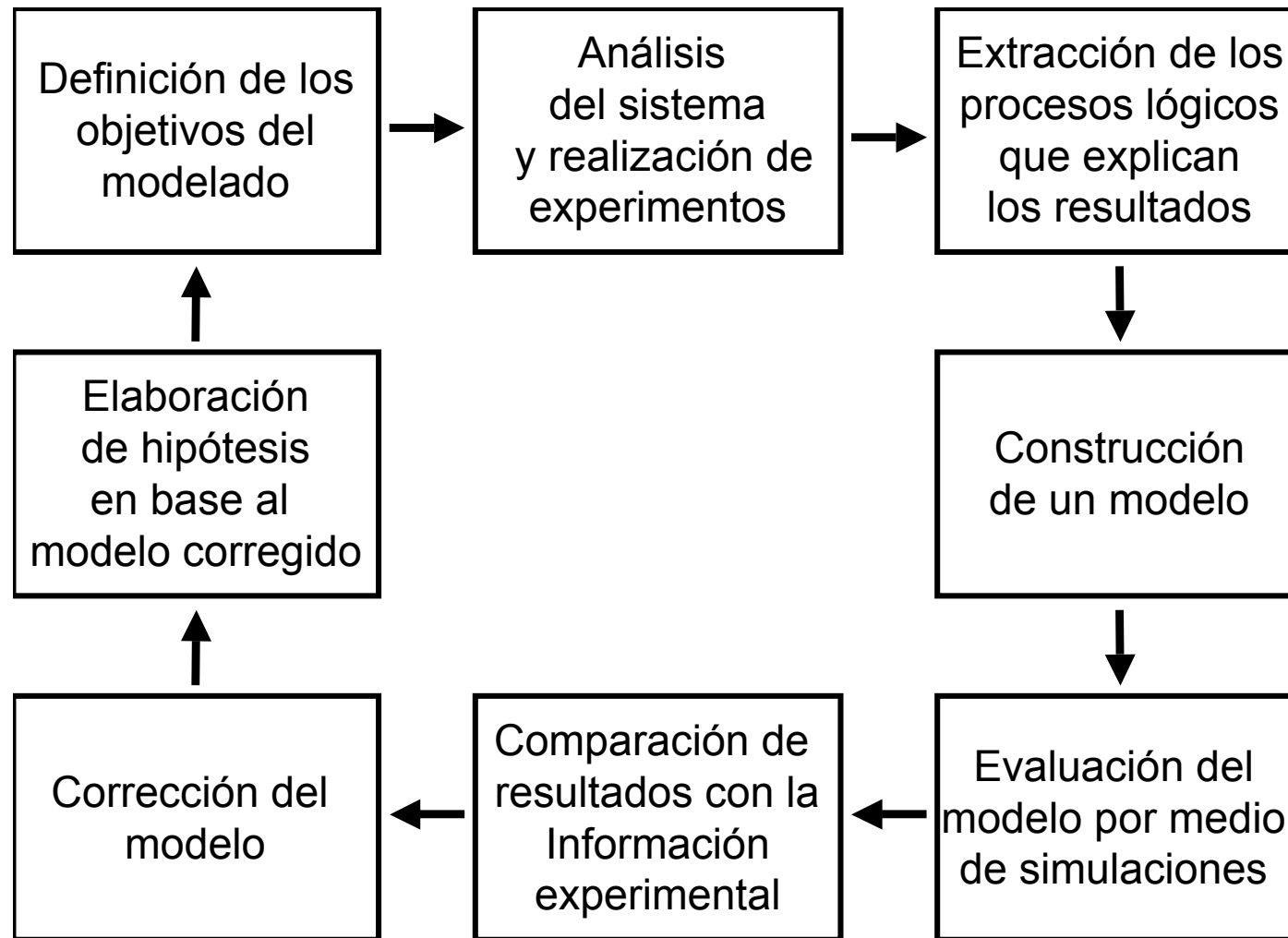
Por ejemplo: la utilización de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias para modelar sistemas electromecánicos (y otras clases de sistemas) debe mucho a las computadoras analógicas que se utilizaron intensivamente antes de la proliferación de las computadoras digitales (esto es en la primera mitad del siglo XX).

La naturaleza de las herramientas de simulación condiciona en gran medida la evolución de las técnicas de modelado.

LOS CONJUNTOS ADMISIBLES. Las señales involucradas en la descripción cuantitativa de un sistema dinámico toman sus valores en conjuntos caracterizados por las limitaciones intrínsecas que posee el sistema. A tales conjuntos se les denomina conjuntos admisibles.

EL COSTO DE LA SIMULACIÓN. Dado un modelo matemático de un sistema dinámico el costo de realizar una simulación depende de la información necesaria para caracterizar el estado inicial y los parámetros.

NOTA 12 *No se puede modelar sin saber cómo se extraerá información del sistema a partir del modelo.*



EL CICLO DE MODELADO

Adicionalmente:

La construcción de un modelo matemático requiere:

1. Elegir la clase de modelo.
2. Ubicar los canales de entrada y de salida.
3. Determinar las variables de estado.
4. Determinar los parámetros.

COMENTARIO SOBRE LOS PARÁMETROS: Los parámetros de un sistema dinámico establecen la fortaleza de las interacciones entre las estradas, las salidas y el estado. Los modelos que involucran una gran cantidad de parámetros requieren de numerosos experimentos para ser calibrados.

5. Determinar la condición inicial del sistema.
6. Caracterizar los conjuntos admisibles de las variables descriptivas.
7. Escribir convenientemente el programa de cómputo respectivo.
8. Validar la descripción.

COMENTARIO SOBRE LA INCERTIDUMBRE: Debido a la imposibilidad de saberlo todo sobre un sistema dinámico es inevitable la presencia de incertidumbre en el proceso de modelado. La incertidumbre acota la descripción. En muchos casos es posible agregar al modelo matemático de un sistema dinámico dado un modelo de la incertidumbre presente, la cual se expresa al describir al sistema por medio de una familia de modelos estructurados alrededor de un modelo nominal.

Una de los retos principales del control es tratar con sistemas afectados por incertidumbre.

Ejercicios

Ejercicio 1 *Provea un ejemplo de un sistema dinámico aislado.*

Ejercicio 2 *¿Se puede conceptualizar al Universo como una computadora?, ¿de qué clase?*

Ejercicio 3 *Considere el sistema dinámico constituido por el sistema político mexicano. Identifique los diversos subsistemas que lo constituyen e identifique canales de entrada y de salida.*

Ejercicio 4 *¿Qué clase de modelo es la fotografía de una familia?*

Ejercicio 5 *¿Cuál es la diferencia fundamental entre los sistemas dinámicos naturales vivos y los artificiales?*

Ejercicio 6 *¿Porqué se suelen utilizar modelos discretos para describir los sistemas económicos?*

Ejercicio 7 *Si se modelara matemáticamente el clima planetario, ¿qué fuentes de incertidumbre habría que tomar en cuenta?*

Ejercicio 8 *¿Qué riesgos se pueden presentar al utilizar la simulación para comprender a los sistemas dinámicos?*

Ejercicio 9 *¿Un pollo puede ser el modelo de un automóvil?*

Ejercicio 10 *¿Existen sistemas dinámicos no causales?*