Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I.P.N.
Departamento de Control Automático

Curso Propedéutico

Álgebra Lineal

Lista 2

15 de mayo de 2013

1).- Demuestre que en un espacio vectorial el neutro aditivo es único. También demuestre que cada elemento del espacio tiene un único inverso aditivo.

2).- Sea K un campo. Demuestre que K^4 con la suma y la multiplicación por escalares de K definidas en clase satisface todas las condiciones de espacio vectorial.

3).- Exprese al vector $(1,1)$ de $\mathbb{R}^2$ como combinación lineal de $(2,1)$ y $(2,-1)$.

4).- Demuestre que el conjunto de vectores $\{(2,1),(2,3),(2,8)\}$ en $\mathbb{R}^2$ es linealmente dependiente.

5).- Determine en cada caso si los siguientes elementos de $\mathbb{R}^3$ son linealmente independientes.

(a) $(1,2,3),(4,5,6),(7,8,9)$.

(b) $(1,0,1),(0,1,2),(0,0,1)$.

(c) $(1,2,3),(0,4,5),(\frac{1}{2},3,\frac{21}{4})$.

6).- Demuestre que el conjunto de vectores $\{(1,3),(-2,3)\}$ es una base para $\mathbb{R}^2$.

7).- Sea $V = \mathbb{R}[x]$, el conjunto de polinomios en una variable con coeficientes en $\mathbb{R}$. Considerando a V como un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, pruebe que V no es de dimensión finita. Sample 8 211 Stanley 4

8).- Si V es un espacio vectorial de dimensión finita sobre K y W es un subespacio de V, pruebe que:

(a) W es de dimensión finita y $\dim(W) \leq \dim(V)$.

(b) $\dim(V) = \dim(W)$ si y solamente si $V = W$.

9).- Si V es espacio vectorial de dimensión finita y W es un subespacio de V, pruebe que existe un subespacio W' tal que $V = W \oplus W'$.

10).- Sea W un subespacio del espacio vectorial V. Supongamos que el conjunto de clases $\{v_1 + W, \ldots, v_n + W\}$ en V/W es linealmente independiente. Muestre que el conjunto de vectores $\{v_1, \ldots, v_n\}$ también es linealmente independiente.

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I.P.N.
Departamento de Control Automático

Curso Propedéutico

Álgebra Lineal

Lista 3

23 de mayo de 2013

1).- Resuelva el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 3x_3 &= 5 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 5 \\ 5x_1 - 3x_2 - x_3 &= 16 \end{aligned}$$

2).- Determine si cada sistema de ecuaciones lineales tiene una solución diferente de la trivial:

$$\text{(i)}\quad \begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 0 \\ x_1 - 8x_2 + 8x_3 &= 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{(ii)}\quad \begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{(iii)}\quad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 4x_4 &= 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 0 \\ 4x_1 - 7x_2 + x_3 - 6x_4 &= 0 \end{aligned}$$

3).- Determine todas las matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tales que:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

4).- Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$, encuentre un vector columna $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ distinto de cero tal que $Au = 3u$.

5).- Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Lleve a la matriz A, a través de operaciones elementales de renglón, a una matriz reducida por renglones. Indique cada una de las operaciones realizadas.

6).- Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$. Determine (i) A^t, (ii) AA^t y (iii) A^tA.

7).- Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$.

Determine (i) A^t, (ii) A^{-1}, (iii) $(A^t)^{-1}$ y (iv) $(A^{-1})^t$.

8).- Sea $V = \mathbb{R}^3$. Considere la base canónica $\{e_1, e_2, e_3\}$ y la base $v_1 = (1,1,1), v_2 = (0,1,1), v_3 = (0,0,1)$. Sea $v = (1,5,6)$.

a) Determine la matriz de cambio de base P de la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ a la base $\{v_1, v_2, v_3\}$.

b) Determine la matriz de cambio de base Q de la base $\{v_1, v_2, v_3\}$ a la base $\{e_1, e_2, e_3\}$.

c) Calcule P^{-1}.

d) Verifique $Q = P^{-1}$.

e) Determine $[v]_{\{e_i\}}$, el vector coordenado de v relativo a la base $\{e_1, e_2, e_3\}$.

f) Determine $[v]_{\{v_i\}}$, el vector coordenado de v relativo a la base $\{v_1, v_2, v_3\}$.

g) ¿Qué relación hay entre $[v]_{\{e_i\}}$, P y $[v]_{\{v_i\}}$?

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I.P.N.
Departamento de Control Automático

Curso Propedéutico

Álgebra Lineal

Lista 4

30 de mayo de 2013

1).- Sean $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$definidos por $T_1(x, y) = (2y, 3x - y)$ y $T_2(x, y) = (3x - 4y, x + 5y)$.

(i) Demuestre que T_1 y T_2 son operadores lineales en $\mathbb{R}^2$.

(ii) Encuentre la matriz A_1 asociada a T_1 respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

(iii) Encuentre la matriz A_2 asociada a T_2 respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

(iv) Sean $T = T_1 + T_2$ y $S = T_1 \circ T_2$. Determine $T(x, y)$ y $S(x, y)$para $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(v) Encuentre la matriz A asociada a T respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

(vi) Encuentre la matriz B asociada a S respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

(vii) Verifique que $A = A_1 + A_2$ y $B = A_1A_2$.

2).- Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por $T(x, y, z) = (x + y, 2y, -z)$.

(i) Demuestre que T es un operador lineal en $\mathbb{R}^3$.

(ii) Determine $\ker T$.

(iii) Demuestre que T es inyectivo.

(iv) Demuestre que T es suprayectivo.

(v) Demuestre que T es biyectivo.

(vi) Encuentre la matriz A asociada a T respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

(vii) Demuestre que A es invertible y determine su inversa A^{-1}.

(viii) Determine $T^{-1}(x, y, z)$ para $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

(ix) Encuentre la matriz B asociada a T^{-1} respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

(x) Verifique que $B = A^{-1}$.

3).- Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{pmatrix}$ sobre $\mathbb{R}$. Demuestre que $A^3 - 6A^2 + 11A - 6I = 0$.

4).- Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por $T(x, y, z) = (2x + y, y - z, 2y + 4z)$. Sean $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (1, 1, -2)$ y $v_3 = (0, 0, 1)$.

(i) Demuestre que $\{v_1, v_2, v_3\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.

(ii) Encuentre la matriz A asociada a T respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

(iii) Encuentre la matriz de cambio de base P de la base canónica a la base $\{v_1, v_2, v_3\}$ de $\mathbb{R}^3$.

(iv) Determine la inversa P^{-1} de P.

(v) Encuentre la matriz B asociada a T respecto a la base $\{v_1, v_2, v_3\}$ de $\mathbb{R}^3$.

(vi) Verifique que $P^{-1}AP = B$ y concluya que A y B son semejantes.

5).- Sean $V = L(\{\operatorname{sen} x, \cos x\})$ el espacio vectorial generado por $\{\operatorname{sen} x, \cos x\}$ sobre $\mathbb{R}$ y D el operador derivada. Encuentre la matriz A asociada a D respecto a la base $\{\operatorname{sen} x, \cos x\}$.

6).- Sea $V = \mathbb{R}^3$ y supongamos que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

es la matriz asociada a $T \in \mathcal{L}(V)$ con respecto a la base canónica $\{e_1, e_2, e_3\}$.

(i) Determine $T(x, y, z)$ para $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

(ii) Determine la matriz B asociada al operador T con respecto a la base $\{v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (0, 1, 1), v_3 = (0, 0, 1)\}$.

(iii) Determine la matriz de cambio de base P de la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ a la base $\{v_1, v_2, v_3\}$.

(iv) Calcule P^{-1}.

(v) Determine la matriz de cambio de base Q de la base $\{v_1, v_2, v_3\}$ a la base $\{e_1, e_2, e_3\}$.

(vi) Verifique que $Q = P^{-1}$.

(vii) Verifique que $B = P^{-1}AP$ y concluya que A y B son semejantes.

7).- Sean $V = \mathbb{R}^4$ y $W = \mathbb{R}^2$. Sea $T : V \to W$ definido por $T(x, y, s, t) = (3x - 4y + 2s - 5t, 5x + 7y - s - 2t)$.

(i) Determine la matriz A asociada a la transformación lineal T con respecto a las bases canónicas de V y W.

(ii) Encuentre la matriz de cambio de base P de la base canónica a la base $\{v_1 = (1, 1, 1, 1), v_2 = (1, 1, 1, 0), v_3 = (1, 1, 0, 0), v_4 = (1, 0, 0, 0)\}$ de V.

(iii) Encuentre la matriz de cambio de base Q de la base canónica a la base $\{w_1 = (1, 3), w_2 = (0, 4)\}$ de W.

(iv) Determine la inversa Q^{-1} de Q.

(v) Encuentre la matriz B asociada a T respecto a las bases $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ de V y $\{w_1, w_2\}$ de W.

(vi) Verifique que $Q^{-1}AP = B$.

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I.P.N.
Departamento de Control Automático

Curso Propedéutico

Álgebra Lineal

Lista 5

12 de junio de 2013

1).- Determine los productos de permutaciones:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

2).- Obtenga todas las potencias (es decir, σ^k para todo $k \in \mathbb{Z}$) de la permutación

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

3).- Exprese como producto de ciclos ajenos:

(a) $(\,1\ 2\ 3\ 5\ 7\,)(\,2\ 4\ 7\ 6\,)$.

(b) $(\,1\ 2\,)(\,1\ 3\,)(\,1\ 4\,)$.

4).- Determine la paridad de la permutación:

(a) $(\,1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\,)(\,7\ 8\ 9\,)$.

(b) $(\,1\ 2\,)(\,1\ 2\ 3\,)(\,4\ 5\,)(\,5\ 6\ 8\,)(\,1\ 7\ 9\,)$.

5).- Justifique

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 9 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & -11 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -16 & -18 \\ 0 & 0 & -32 & -26 \end{vmatrix}.$$

6).- Resuelva, usando determinantes, el sistema:

$$\begin{aligned} 3y + 2x &= z + 1 \\ 3x + 2z &= 8 - 5y \\ 3z - 1 &= x - 2y. \end{aligned}$$

7).- Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Encuentre:

(i) los cofactores de A,

(ii) la adjunta de A,

(iii) $A\mathrm{adj}(A)$,

(iv) $\det(A)$,

(v) A^{-1}.

8).- Considere el espacio euclidiano $\mathbb{R}^3$ con el producto interno usual. Sea $u = (-1, 3, 2)$. Encuentre:

(i) un vector $v \in \mathbb{R}^3$, $v \neq 0$ que sea ortogonal a u.

(ii) un vector unitario $w \in \mathbb{R}^3$ que sea ortogonal a u.

9).- Considere el espacio euclidiano $\mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{R})$ con el producto interno dado por $< A, B >= \mathrm{tr}(\mathrm{B^t A})$. Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(i) Encuentre $< A, B >$.

(ii) Encuentre $||A||$ y $||B||$.

(iii) Calcule $\cos(\theta) := \frac{<A,B>}{||A||||B||}$.

10).- Considere $\mathbb{R}^3$ con el producto interno usual. Utilizando el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt, transforme la base $\{v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (-1, 1, 0), v_3 = (1, 2, 1)\}$ en una base ortonormal.