Capítulo 6
CURSO PROPEDEUTICO DE ANÁLISIS REAL
Depto. de Control Automático, CINVESTAV-IPN, Mayo-Junio 2013
Ejemplar de material completo, solo falta completar dibujos.

****

6. Diferenciación de funciones reales de una variable

6.1. Revisión de límites de funciones y continuidad

Sea $A \subset I\!R, f : A \longrightarrow I\!R, A = D_f$.

Si c es un punto de acumulación de A, y $l \in I\!R$,

$\lim\limits_{x\to c} f(x) = l \iff \forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que $x \in A$ y $0 <\mid x - c \mid< \delta$ implican $\mid f(x) - l \mid< \epsilon$;
$\iff$ para toda sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ en A con $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$ y $x_n \neq c\ \forall n \in I\!N$, se sigue que $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = l$.

Si $c \in A$,
f es continua en $c \iff \forall\,\epsilon > 0\ \exists\ \delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que $(x \in A, \mid x - c \mid< \delta)$ implica $\mid f(x) - f(c) \mid< \epsilon$.
$\iff$ para toda sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ en A con $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$, se sigue que $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(c)$.

Si $c \in A$ es un punto de acumulación de A,
f es continua en $c \iff \overset{lim}{x\to c}\ f(x) = f(c) \in I\!R$.

Nota: En la definición de continuidad no se exige $x \neq c$. Sin embargo, en la definición del límite, para $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$, la definición dice "suponiendo $0 <\mid x - c \mid< \delta$, ..." - eso significa $x \neq c$; también en el criterio de sucesiones se exige que $(x_n)_{n\geq 1}$ cumple $x_n \neq x\ \forall n \in I\!N$. — *Porqué ???*
Consideremos una función donde el límite en $x = c$ existe pero $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L \neq f(c)$. Dibujo: vea clase.

Entonces $f(x)$ **no es continua** en $x = c$. Si en la definición del límite se permitería el acercamiento hacia c mediante la sucesión constante $(x_n)_{n\geq 1} = (c)_{n\geq 1}$, entonces obtendríamos por el criterio de sucesiones que $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c) \neq L$ lo cual es una contradicción a la unicidad del límite. Es claro que

"$\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$" (aquí con $L \neq f(c)$) representa más correctamente el comportamiento de $f(x)$ "en la cercanía del punto c".

6.2. Derivada y diferenciabilidad

Def.: (Diferenciabilidad en un punto) Sea $f : A \longrightarrow I\!R, A = D_f \subset I\!R$, y $x_0 \in (a, b) \subset A$ (intervalo **abierto** con $a, b \in I\!R$). f se llama *diferenciable en* x_0 si $\overset{lim}{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l$ existe en $I\!R$. En este caso, l se llama la *derivada de* f *en* x_0, y se denota por $f'(x_0)$ o por $\frac{df}{dx}(x_0)$.

Recordando la def. del límite de funciones, eso significa:

f es diferenciable en $x_0 \iff$ existe un número real l con la siguiente propiedad: $\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, \delta = \delta(\epsilon)$ tal que $(x \in A,\ 0 <\mid x - x_0 \mid < \delta)$ implica que $\mid \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - l \mid < \epsilon$.

Interpretación geométrica de la derivada: Dibujo con comentarios: vea clase.

Ejemplos:

- Función identica: $f(x) = x$, $D_f = I\!R$, es diferenciable en cualquier $x_0 \in I\!R$. La derivada es $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{x-x_0}{x-x_0} = 1$.

- Función constante: $f(x) = a,\ \forall x \in I\!R$, es diferenciable en cualquier $x_0 \in I\!R$, y $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{a-a}{x-x_0} = 0$.

- La función del valor absoluto $f(x) =\mid x \mid$, definida para todo $x \in I\!R$, no es diferenciable en $x_0 = 0$. Para ver eso, observamos que para $x \neq 0$ vale que

$$g(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\mid x \mid}{x} = \left\{ \begin{array}{rl} 1, & \text{si } \ x > 0 \\ -1, & \text{si } \ x < 0 \end{array} \right.$$

  En consecuencia, en $c = 0$, $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ no existe, por lo cual la derivada $f'(0)$ no existe.

Nota: En el último ejemplo de la función $f(x) = \mid x \mid$, no diferenciable en $c = 0$, vale que

$$\lim_{x \to c+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1 \neq -1 = \lim_{x \to c-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \ .$$

Eso da lugar a definir diferenciabilidad y derivadas por el lado derecho y por el lado izquierdo:
Para $f : A \longrightarrow I\!R, A = D_f \subset I\!R$, f es *diferenciable por la derecha en* $c \in A$ si la *derivada por la derecha* dada por

$$f'_+(c) = \lim_{x \to c+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \quad \text{existe en } I\!R.$$

f es *diferenciable por la izquierda en* $c \in A$ si la *derivada por la izquierda* dada por

$$f'_-(c) = \lim_{x \to c-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \quad \text{existe en } I\!R.$$

En el ejemplo de $f(x) = \mid x \mid$, se obtiene que $f'_+(0) = 1$ y $f'_-(0) = -1$.

Def.: (Diferenciabilidad en un conjunto) Sea $f : A \longrightarrow I\!R, A \subseteq D_f \subseteq I\!R$. f se llama *diferenciable en* A si es diferenciable en todos los puntos interiores* de A. En el caso $A = D_f$, f se llama *diferenciable*, y la función f' que asocia a cada $x \in D_{f'} = D_f$ el valor $f'(x)$, se llama la *derivada de* f.

(* Para $A \subset I\!R$, $x \in A$ se llama *punto interior de* A si existen $a, b \in I\!R$ tales que x pertenece al intervalo abierto $(a, b) \subset A$.)

Def.: (Derivadas superiores) Sea f' la derivada de una función f, y sea f' diferenciable en $x_0 \in D_{f'}$. $(f')'(x_0)$ se llama *segunda derivada de* f *en* x_0, y se denota por $f''(x_0)$ o $\frac{d^2 f}{dx^2}(x_0)$.

Siguiendo este proceso inductivamente, se definen $f'''(x_0), f^{(4)}(x_0), \cdots$, es decir, se obtiene

$f^{(n)}(x_0) = \frac{d^n f}{dx^n}(x_0)$ la *derivada* n*-esima de* f *en* x_0. Si $f^{(n)}(x_0)$ existe, f se llama *diferenciable* n *veces en* x_0.

Ejemplo: $f(x) = x$ es diferenciable cualquier número $n \in I\!N$ de veces. Claro que para cualquier $c \in I\!R$, $f'(c) = 1$. Luego derivando la función $f'(x) = 1, x \in I\!R$, se obtiene

$$f''(c) = (f')'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} = \lim_{x \to c} \frac{1 - 1}{x - c} = 0$$

lo cual implica para las derivadas superiores $(n \geq 2)$ que $f^{(n)}(x) = 0 \ \forall x \in I\!R$.

La continuidad es una condición necesaria (pero no suficiente) de la diferenciabilidad:

Lema: *Sea* $f : A \longrightarrow \mathbb{R}, A = D_f \subseteq \mathbb{R}$, *y* c *un punto interior de* A. *Si* f *es diferenciable en* c, *entonces* f *también es continuo en* c.

Dem.: Si f es diferenciable en c, eso significa que $\lim\limits_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'(c) \in \mathbb{R}$. Para demostrar que $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$, demostramos que $\lim\limits_{x\to c} f(x) - f(c) = 0$:

$$\lim_{x\to c}(f(x)-f(c)) = \lim_{x\to c}\left(\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\cdot(x-c)\right) = \lim_{x\to c}\left(\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\right)\cdot\lim_{x\to c}(x-c)$$

Ambos límites existen en $\mathbb{R}$, el primero es igual a $f'(c)$, es segundo es igual a 0. Por eso, aplicando la regla de cálculo del producto, se obtiene

$$\lim_{x\to c}(f(x)-f(c)) = f'(c)\cdot 0 = 0 \ .$$

$\square$

El lema no es invertible (es decir, la condición no es suficiente). Por ejemplo, $f(x) = \mid x \mid$ es continuo en $x_0 = 0$ pero no es diferenciable en este punto.

6.3. Reglas de cálculo

Estas reglas ayudan a calcular derivadas ! Recordando las operaciones entre funciones por puntos, se obtiene como consecuencia de propiedades de límites de funciones:

Lema: *Sean* $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}, A = D_f = D_g \subseteq \mathbb{R}$, x_0 *un punto interior de* A, *y* $a \in \mathbb{R}$. *Si* f *y* g *son diferenciables en* x_0, *entonces*

i) $(f+g)$ *es diferenciable en* x_0, *y* $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$;

ii) $(a\cdot f)$ *es diferenciable en* x_0, *y* $(a\cdot f)'(x_0) = a\cdot f'(x_0)$;

iii) $(f\cdot g)$ *es diferenciable en* x_0, *y* $(f\cdot g)'(x_0) = f'(x_0)\cdot g(x_0) + f(x_0)\cdot g'(x_0)$;

iv) Si $g(x_0) \neq 0$, *entonces* $(\frac{f}{g})$ *es diferenciable en* x_0, *y*

$(\frac{f}{g})'(x_0) = \frac{f'(x_0)\cdot g(x_0) - f(x_0)\cdot g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$.

Las demostraciones utilizan la definición de la derivada, se recomienda tratarlas como ejercicios. Como ejemplo, demostramos a continuación la regla del producto:

Dem. de *iii)*: Supongamos que $f, g : A \longrightarrow I\!R, A = D_f = D_g \subseteq I\!R$, sean diferenciables en c un punto interior de A.

$$\lim_{x\to c} \frac{(f\cdot g)(x) - (f\cdot g)(c)}{x-c} = \lim_{x\to c}\left(\frac{f(x)g(x) - f(c)g(c) - f(c)g(x) + f(c)g(x)}{x-c}\right)$$

$$= \lim_{x\to c}\left(\tfrac{f(x)-f(c)}{x-c}\cdot g(x)\right) + \lim_{x\to c}\left(f(c)\cdot \tfrac{g(x)-g(c)}{x-c}\right)$$

$$= \underbrace{\left(\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\right)}_{\substack{= f'(c)\in I\!R \\ \textit{(por suposición)}}} \cdot \underbrace{\left(\lim_{x\to c} g(x)\right)}_{\substack{= g(c)\in I\!R \\ \textit{(g es dif'le, por eso continua)}}} + \underbrace{f(c)}_{\in I\!R} \cdot \underbrace{\left(\lim_{x\to c}\frac{g(x)-g(c)}{x-c}\right)}_{\substack{= g'(c)\in I\!R \\ \textit{(g es dif'le)}}}$$

$$= f'(c)\cdot g(c) + f(c)\cdot g'(c).$$

En consecuencia, $(f\cdot g)$ es diferenciable en c, y $(f\cdot g)'(c) = f'(c)\cdot g(c) + f(c)\cdot g'(c)$.

□

Ejemplos de aplicación de las reglas de cálculo:

- Sabiendo que $(e^x)' = e^x$, $(sen(x))' = cos(x)$, se obtiene la derivada del producto $f(x) = e^x sen(x)$ para cualquier $x \in I\!R$ como $f'(x) = e^x sen(x) + e^x cos(x) = e^x(sen(x) + cos(x))$.
- $f(x) = x^n$ para $n \in I\!N$, sea $c \in I\!R$ arbitrario. Podemos demostrar por inducción lo siguiente:

  $n = 1 : f(x) = x \implies f'(x) = 1$

  $n = 2 : f(x) = x \cdot x = x^2 \implies f'(x) = 1\cdot x + x \cdot 1 = 2x$

  $n = 3 : f(x) = x^2 \cdot x = x^3 \implies f'(x) = 2x\cdot x + x^2\cdot 1 = 3x^2$

  Supongamos para $n = k$ (entonces $f(x) = x^k$) que $f'(x) = kx^{k-1}$. Asumimos ahora $n = k+1$, entonces tenemos $f(x) = x^k \cdot x$, y obtenemos por la regla del producto

  $$f'(x) = k\cdot x^{k-1}\cdot x + x^k \cdot 1 = (k+1)\cdot x^k \ .$$

Otra operación entre funciones es la concatenación $\circ$:

Lema: (Regla de la cadena) *Sean $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow I\!R$, $A, B \subset I\!R$. Si f es diferenciable en $x_0 \in A$, y g es diferenciable en $y_0 = f(x_0) \in B$, entonces $g\circ f$ es diferenciable en x_0, y $(g\circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)$, es decir, $(g\circ f)' = (g'\circ f)\cdot f$.*

Ejemplos:

- Sabiendo que $(e^x)' = e^x$, $(sen(x))' = cos(x)$, se obtiene la derivada de la función $f(x) = e^{sen(x)}$ para cualquier $x \in I\!R$ como $f'(x) = e^{sen(x)} \cdot cos(x)$.
- $f(x) = a^x$ (para $a > 0$) es diferenciable para cualquier $c \in I\!R$. La expresión $a^x = exp(x \cdot ln(a))$ implica por la regla de la cadena que $f'(c) = exp(c \cdot ln(a)) \cdot g'(c)$ donde $g(x) = x \cdot ln(a)$ (pero $ln(a)$ es una constante que no depende de x), así que $g'(c) = ln(a) \cdot 1 = ln(a)$. En consecuencia $f'(c) = ln(a) \cdot e^{(c \cdot ln(a))}$.

Lema: (Función inversa) *Sea $f : A \longrightarrow I\!R$ una función estrictamente monótona* (entonces f es 1-1 !!!) *y diferenciable en el intervalo abierto $(a, b) \subset A$. Si $x_0 \in (a, b)$ y $f'(x_0) \neq 0$, entonces la función inversa f^{-1} es diferenciable en $y_0 = f(x_0)$, y $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.*

Ejemplo: $f(x) = e^x$ satisface la condición del lema. Sea $x_0 \in I\!R$ arbitrario. Entonces $f^{-1}(y) = ln(y)$ es diferenciable en $y_0 = f(x_0)$, y para la derivada vale que

$$(f^{-1})'(y_0) = ln'(y_0) = \frac{1}{e^{x_0}} = \frac{1}{y_0} \ .$$

6.4. Extremos

Def.: Sea $f : A \longrightarrow I\!R, c \in A = D_f$. *$f$ tiene en c un mínimo [máximo] local (o "relativo")* si existe un disco (=intervalo) abierto $V = V_\delta(c) = (c - \delta, c + \delta)$ tal que para todo $x \in V \cap A$ se sigue que $f(x) \geq f(c)$ $[f(x) \leq f(c)]$. *f tiene en c un extremo local (o "relativo")* si tiene en c un mínimo local o un máximo local.

También se definen *extremos absolutos (o "globales")* de f en forma obvia: f tiene un mínimo [máximo] absoluto en c si $f(x) \geq f(c)$ $[f(x) \leq f(c)]$ para todo $x \in A$.

Una **condición necesaria** (pero no suficiente) **para la existencia de un extremo local** en c es que la derivada tiene una raiz en c, eso proporciona un método para encontrar extremos:

Lema de Fermat: *Sea $f : A \longrightarrow I\!R, x_0 \in A = D_f$. Si f tiene un extremo local en x_0 y $f'(x_0)$ existe, entonces $f'(x_0) = 0$.*
Interpretación geométrica: Si $f(x_0)$ es un extremo local de f, entonces la tangente a la curva f en el punto $(x_0, f(x_0))$ es paralela al eje x.
Dibujo: vea clase.

Ejemplos:

- La función $f(x) = x^2$ tiene en el punto $x = 0$ un mínimo relativo (el cual de hecho es el mínimo global) y definitivamente $f'(x) = 2x$, $f'(0) = 2 \cdot 0 = 0$.
- La función $f(x) = x^3$ muestra que la condición del lema no es suficiente, pues aquí tenemos que $f'(x) = 3x^2$, por lo tanto $f'(0) = 3 \cdot 0 = 0$, pero la función **no tiene un extremo** en el punto $x = 0$ (basta ver el dibujo de la función).

Para funciones **dos veces diferenciables** hay una **condición suficiente para que existen extremos :**

Lema: *Sea $f : A \longrightarrow I\!R$. Si f es dos veces diferenciable en x_0, f'' es continua, $f'(x_0) = 0$, y además $f''(x_0) > 0$ [$f''(x_0) < 0$], entonces f tiene en x_0 un mínimo local [máximo local].*

Ejemplos:

- $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$, claro que $D_f = I\!R$.

  La derivada $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$ tiene sus raices en los puntos x_1, x_2 determinados por la ecuación

  $x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} = 0$. Así que, $x_{1,2} = -\frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{3}{9}} = -\frac{1}{3} \pm \frac{2}{3}$. Se obtiene $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = -1$, los cuales son **candidatos de extremos** locales de la función. Analizando la segunda derivada se obtiene lo siguiente:

  $f''(x) = 6x + 2$

  $f''(x_1) = f''(\frac{1}{3}) = 2 + 2 = 4 > 0$, por lo cual f tiene un mínimo local en $x_1 = \frac{1}{3}$.

  $f''(x_2) = f''(-1) = -6 + 2 = -4 < 0$, por lo cual f tiene un máximo local en $x_2 = -1$.

  Dibujo: vea clase.

- Determina en el conjunto de todos los rectángulos con el mismo perímetro p el cual que tiene el área más grande.

  Sean a, b las longitudes de los lados de los rectángulos, entonces el área es $f = f(a, b) = a \cdot b$. Para resolver el problema, la suposición es que el perímetro $p(a, b) = 2(a + b)$ es una constante $p > 0$, así que, tenemos $b = \frac{p}{2} - a$. Entonces el área es una función de solo una variable:

$f(a) = a(\frac{p}{2} - a) = \frac{p}{2}a - a^2$, cuyo dominio de definición a considerar solamente es $D_f = [0, \frac{p}{2}]$ (intervalo cerrado). El problema se resuelve determinando al máximo (absoluto) de $f(a)$. Para eso, podemos usar las derivadas:

$f'(a) = -2a + \frac{p}{2}$ tiene su única raíz en $a_0 = \frac{p}{4}$, siendo el candidato de un extremo local.

$f''(a) = -2 < 0$ para todo a, por lo cual $f(a)$ definitivamente tiene en $a_0 = \frac{p}{4}$ un máximo local, el cual coincide con su máximo global.

Resultado: El rectángulo buscado, dentro de rectángulos de perímetro fijado p, de máxima área, es el que tiene los lados $a_0 = \frac{p}{4}$ y $b_0 = \frac{p}{2} - a_0 = \frac{p}{4}$, es decir, es un cuadrado con longitud de lado $\frac{p}{4}$.

Nota: Si f **no** cumple las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de extremos, f puede sin embargo tener extremos (locales o globales !). Para encontrar ellos, se aplica la definición de extremos, o se aprovecha por ejemplo la monotonía de f. Por ejemplo, $f(x) = \mid x \mid$ no es diferenciable en $x_0 = 0$, pero $f(0) = 0$, y f es estrictamente decreciente para $x < 0$ y estrictamente creciente para $x > 0$, por lo tanto $f(0) = 0$ es el mínimo local y absoluto de f.

6.5. Otras propiedades de funciones (monotonía y convexidad, puntos de inflección)

Def.: (Punto de inflección) Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable en $x_0 \in A$. *f tiene en x_0 un punto de inflección* si la función f' tiene en x_0 un extremo local.

Interpretación geométrica: la curva de f en un punto de inflección x_0 es "cortada" por su tangente, tal que para $x < x_0$ la tangente pasa por debajo de la curva, y para $x > x_0$ la tangente pasa por arriba de la curva, o al revés.

Condición necesaria para la existencia de un punto de inflección: *Si f es dos veces diferenciable en su punto de inflección x_0, entonces $f''(x_0) = 0$.*

Condición suficiente para la existencia de un punto de inflección: *Si f es k veces diferenciable en x_0 para k impar y $k \geq 3$, y $f^{(v)}(x_0) = 0$ para todo $v = 2, 3, \cdots, k-1$, y además $f^{(k)}(x_0) \neq 0$, entonces f tiene un punto de inflección en x_0.*

Ejemplos:

- $f(x) = x^3$ tiene en $x_0 = 0$ un punto de inflección, puesto que

  $f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$, $f'''(x) = 6$, así que

  $f'(0) = f''(0) = 0$, pero $f'''(0) = 6 \neq 0$.

- $f(x) = sen(x)$ tiene en $x_0 = 0$ un punto de inflección, puesto que

  $f'(x) = cos(x)$, $f''(x) = -sen(x)$, $f'''(x) = -cos(x)$, así que

  $f''(0) = -sen(0) = 0$, pero $f'''(0) = -cos(0) = -1 \neq 0$.

Monotonía y convexidad:

Lema: (Monotonía) Sea $f : I\!R \longrightarrow I\!R$ diferenciable en el intervalo (a, b). f es creciente [decreciente] en (a, b) si y sólo si para todo $x \in (a, b)$ vale que $f'(x) \geq 0$ $[f'(x) \leq 0]$. f es estrictamente creciente [decreciente] en (a, b) si y sólo si
(i) para todo $x \in (a, b)$ vale que $f'(x) \geq 0$ $[f'(x) \leq 0]$,
(ii) no existe subintervalo $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$ tal que $f'(x) = 0$ $\forall x \in (\alpha, \beta)$.

Ejemplos:

- $f(x) = e^x$ es estrictamente creciente sobre $I\!R$ puesto que $f'(x) = f(x) > 0$ $\forall x \in I\!R$.

- $f(x) = x - sen(x)$ es estrictamente creciente sobre el intervalo $I = (0, 2\pi)$ puesto que para todo $x \in I$ vale que $f'(x) = 1 - cos(x) > 0$. Eso implica en particular que $f(x) > 0$ sobre I debido a que $f(0) = 0$.

- $f(x) = e^{-x} + x - 1$ es estrictamente creciente sobre el intervalo $J = [0, \infty)$ puesto que para $x > 0$ vale que $f'(x) = -e^{-x} + 1 > 0$. Debido a que $f(0) = 0$, Eso implica en particular, que $f(x) > 0$ siempre cuando $x > 0$, es decir, entonces $e^{-x} > 1 - x$ (lo cual es una interesante comparación).

Def.: (Convexidad, Concavidad) Sea $f : A \longrightarrow I\!R$ diferenciable en el intervalo $(a, b) \subset D_f = A$. f se llama *convexa [concava]* en (a, b) si para todo $x_1, x_2 \in (a, b)$ vale que $f(x_2) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1)$ $[f(x_2) \leq f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1)]$.

Interpretación geométrica: f es convexa [concava] si la curva de f está arriba [debajo] de todas las tangentes en los puntos cuya primera coordenada pertenece a (a, b). Dibujo: vea clase.

Ejemplo: $f(x) = x^2$ es en $D_f = I\!R$ convexo, puesto que para arbitrarios $x_1, x_2 \in I\!R$, $x_1 \neq x_2$, vale lo siguiente
$(x_1 - x_2)^2 > 0 \iff x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 > 0 \iff 2x_1x_2 - x_1^2 < x_2^2$
$\iff x_2^2 > (-x_1^2 + x_2^2) + 2x_1x_2 - x_1^2 \iff x_2^2 > x_1^2 + 2x_1(x_2 - x_1)$
$\iff f(x_2) > f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1)$.

Lema: *Sea f diferenciable en (a,b).*

i) f es convexo [concavo] $\iff$ f' es creciente [decreciente] en (a,b).

ii) Si f es dos veces diferenciable en (a,b), entonces f es convexo [concavo] $\iff$ para todo $x \in (a,b)$ vale que $f''(x) \geq 0$ [$f''(x) \leq 0$].

Nota: Recordando que $f''(x) = 0$ en un punto de inflección de f, en este punto puede "cambiar la convexidad a concavidad" o al revés.

Ejemplos:

- Para $f(x) = x^3$ tenemos $f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$, así que $f''(x) \geq 0$ para $x \geq 0$ y $f''(x) \leq 0$ para $x \leq 0$. En consecuencia, $f(x) = x^3$ es cóncava para $x \leq 0$, y la función es convexa para $x \geq 0$.
- $f(x) = e^x$ es convexa en $I\!R$ puesto que $f''(x) = e^x > 0 \; \forall x \in I\!R$.
- $f(x) = cos(x)$ es cóncava en el intervalo $I = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ puesto que $f''(x) = -cos(x) < 0 \; \forall x \in I$.

6.6. Discusión de curvas

Objetivo: obtener una idea sobre la forma de la curva de una función f, la cual está dada mediante una fórmula.
Método: aplicación de definiciones y propiedades de continuidad y diferenciabilidad.

Una **discusión elemental de la curva de** f contiene los siguientes aspectos:

1.) Determinación del dominio de definición de f, y de las raices de f (soluciones de $f(x) = 0$).

2.) Determinación de discontinuidades (puntos $c \in I\!R$ donde f no es continua) y de los intervalos de continuidad.

3.) Estudio de cada discontinuidad c de f: la determinación de los límites (eventualmente unilaterales) de f cuando x tiende a c.

4.) Investigación del comportamiento de f cuando x tiende a ∞ y a $-\infty$ (comportamiento asintótico de f).

5.) Determinación de los intervalos de diferenciabilidad.

6.) Determinación de las primeras derivadas f', f''.

7.) Determinación de extremos locales (y absolutos, si existen) y de puntos de inflección.
En caso de contar con candidatos para puntos de inflección (f"(c)=0), se tiene que determinar la tercer derivada $f'''(x)$ para poder verificar si se trata de puntos de inflección.

8.) Determinación de los intervalos de monotonía y de convexidad/concavidad.

9.) Cálculo de algunos (pocos) valores adicionales $f(x)$ para x apropiados, la determinación del dominio de valores de f (és f acotada ?), y la elaboración de un dibujo aproximado de la curva de f, mostrando todo lo que se ha investigado.

Ejemplo:

$$f(x) = \frac{5}{3},\ x > 2\frac{x^2+1}{x^2-1},\ x \leq 2$$

1.) f es definida por partes. Se observa inmediatamente que f no es definida para $x = 1$ y $x = -1$ puesto que estos puntos pertenecen al intervalo $(-\infty, 2]$ y cumplen que $x^2 - 1 = 0$. En consecuencia $f : I\!R \longrightarrow I\!R$ con $D_f = I\!R \setminus \{1, -1\}$.

El punto $c = 2$ es de particular interés debido a que la fórmula de f aquí cambia, y es posible que en este punto f sea no continua o no diferenciable !

f no tiene raices puesto que la ecuación $f(x) = 0$ es equivalente a $(x^2 + 1) = 0$ $\Longleftrightarrow x^2 = -1$ la cual no tiene soluciones reales.

2.) Discontinuidades, intervalos de continuidad:
f no es continua en los puntos 1 y -1 puesto que f no es definida en estos puntos.

Hay que estudiar al punto $c = 2$ donde la fórmula de f cambia: Claro que $\lim\limits_{x\to c+} f(x) = \frac{5}{3}$. Tenemos $\lim\limits_{x\to c-} f(x) = \lim\limits_{x\to c-} \frac{x^2+1}{x^2-1} = \frac{5}{3}$, implicando que el límite de f en $c = 2$ existe y es igual a $f(2)$, por lo cual $f(x)$ es continua en el punto $x = 2$.

Resultados: discontinuidades son 1 y -1; intervalos de continuidad son $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, \infty)$.

3.) Límites en discontinuidades:
Para $c = 1$: $\lim\limits_{x\to c+} f(x) = \lim\limits_{x\to c+} \frac{x^2+1}{x^2-1} = \infty$, $\lim\limits_{x\to c-} f(x) = \lim\limits_{x\to c-} \frac{x^2+1}{x^2-1} = -\infty$.

Para $c = -1$: $\lim\limits_{x\to c+} f(x) = \lim\limits_{x\to c+} \frac{x^2+1}{x^2-1} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to c-} f(x) = \lim\limits_{x\to c-} \frac{x^2+1}{x^2-1} = \infty$.

En consecuencia, f tiene en 1 y -1 infinidades.

4.) Comportamiento asintótico:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{5}{3} = \frac{5}{3}, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+1}{x^2-1} = 1.$$

5.) Intervalos de diferenciabilidad:
Claro que f no es diferenciable en cada discontinuidad, es decir, en 1 y -1.

Hay que estudiar al punto $c = 2$ donde la fórmula de f cambia (aúnque ya sabemos que $f(x)$ es continua en $c = 2$). Eso hacemos simplemente sacando las derivadas f' de cada parte de la función, y comparándolas en este punto:

Para $x > 0$, $f'(x)$ es la derivada de una función constante con valor $\frac{5}{3}$, entonces $f'(x) = f''(x) = f'''(x) = 0$. En particular, $f'(x)$ tiene en el punto $c = 2$ el valor 0.

Para $x \leq 0$, $f'(x) = \left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)' = \frac{-4x}{(x^2-1)^2}$. Esta derivada tiene en el punto $c = 2$ el valor $\frac{-8}{9}$ que es distinto al cero. Como resultado, $f'_-(2) = \frac{-8}{9} \neq 0 = f'_+(2)$, por lo cual $f'(2)$ no existe.

Resultados: f **no** es diferenciable en 1, -1 y 2; intervalos de diferenciabilidad son $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, \infty)$.

6.) Derivadas: Como resultado del punto 5.) y del cálculo de $f''(x)$ obtenemos

$$f'(x) = 0, \qquad x > 2 \frac{-4x}{(x^2-1)^2}, \ x < 2 \ , \quad f''(x) = 0, \qquad x > 2 \frac{4(3x^2+1)}{(x^2-1)^3}, \ x < 2$$

Nótese que las derivadas son definidas solo para $x \neq 2$, $x \neq 1$, $x \neq -1$.

7.) Extremos y puntos de inflección:
Claro que la parte donde $x > 2$ no es interesante para el estudio de extremos y de puntos de inflección (ni de monotonía y convexidad etc.), pues la función entonces es constante.

Para $x < 2$, $f'(x) = 0 \iff -4x = 0 \iff x = 0$. Por eso, $x = 0$ es un candidato de un extremo local.
Debido a que $f''(0) = \frac{4(3 \cdot 0^2+1)}{(0^2-1)^3} = \frac{4}{-1} = -4 < 0$, $f(x)$ tiene en $x = 0$ un máximo local.

$f(x)$ no tiene máximos o mínimos globales debido a sus infinidades determinadas arriba.

Para determinar candidatos de puntos de inflección, se calculan las raices de la derivada $f''(x)$ para $x < 2$: $f''(x) = 0 \iff 4(3x^2+1) = 0 \iff x^2 = -\frac{1}{3}$, lo cual no tiene soluciones reales. En consecuencia, f no tiene puntos de inflección para $x < 2$.

La tercera derivada entonces no es necesario calcular; para ser completo el presente ejercicio la ponemos:

$$f'''(x) = 0, \qquad x > 2 \frac{24x(3x^2+1)[(x^2-1)-1]}{(x^2-1)^5}, \ x < 2$$

8.) Intervalos de monotonía y de convexidad/concavidad:

Para $x \in (-\infty, -1)$ y $x \in (-1, 0)$ se sigue $f'(x) > 0$ por lo cual f entonces es creciente. Para $x \in (0, 1)$ y $x \in (1, 2)$ se sigue $f'(x) < 0$ por lo cual f entonces es decreciente.

Para $x \in (-1, 1)$ se sigue $f''(x) < 0$ por lo cual f entonces es cóncavo. En cambio, para $x \in (-\infty, -1)$ y $x \in (1, 2)$ se sigue $f''(x) > 0$ por lo cual f entonces es convexo.

9.) Tenemos $V_f = I\!R$, f no es acotada debido a sus infinidades.

Dibujo aproximado de la curva de f: vea clase.

Nota: Si el tiempo lo permite, se discuten en detalle uno o dos más ejemplos de discusión de curva en clase.

6.8. Teoremas del valor medio

Proposición de Rolle: *Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ continuo sobre $[a, b]$ y diferenciable sobre $(a, b) \subset D_f = A$. Si $f(a) = f(b)$ entonces existe $x_0 \in (a, b)$ tal que $f'(x_0) = 0$.*

Eso significa: f tiene en x_0 una tangente paralela al eje x. Dibujo: vea clase.

Para qué sirve ? —
Un **corolario** es por ejemplo: *Entre dos raices de un polinomio hay por lo menos una raiz de su derivada.* Pues si: Un polinomio $p(x)$ siempre es continuo y diferenciable, $p(a) = p(b) = 0$ (a, b son raices de p) implica según Rolle la existencia de x_0 tal que $p'(x_0) = 0$. Eso significa: *Entre cada dos raices de p se encuentra un punto candidato para un extremo local !*

Teorema del valor medio (de Lagrange): *Sea $f : A \longrightarrow I\!R$ continuo sobre $[a,b]$ y diferenciable sobre $(a,b) \subset D_f = A$. Entonces existe $x_0 \in (a,b)$ tal que $f'(x_0) = \frac{f_a) - f(b)}{b-a}$.*

Eso es una generalización de la proposición de Rolle, geométricamente significa: Existe x_0 tal que la tangente a f en x_0 es paralela a la secante entre a y b. Dibujo: vea clase.

Para qué sirve ? —
Algunos **Corolarios** :

Sea $f : A \longrightarrow I\!R$ continuo sobre $[a,b]$ y diferenciable sobre $(a,b) \subset D_f = A$.

i) Si $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a,b)$, entonces f es constante en $[a,b]$; es decir $f(a) = f(b) = f(x), x \in (a,b)$.

ii) Si también $g : A \longrightarrow I\!R$ es continuo sobre $[a,b]$ y diferenciable sobre (a,b), y $f'(x) = g'(x)\ \forall\, x \in (a,b)$, entonces existe $r \in I\!R$ tal que $f(x) = g(x) + c\ \forall\, x \in [a,b]$.

iii) f es creciente [decreciente] sobre $[a,b]$ si y solo si $f'(x) \geq 0$ [$f'(x) \leq 0$] para todo $x \in (a,b)$.

Demostración de *i)*: Sea $x \in I = (a,b)$ arbitrario. Demostramos que $f(x) = f(a)$. Tenemos $x > a$, aplicamos el teorema del valor medio al intervalo $I_x = [a,x]$: entonces existe $c \in I_x$ tal que $f(x) - f(a) = f'(c) \cdot (x-a) = 0 \cdot (x-a) = 0$, implicando $f(x) = f(a)$.

Demostración de *ii)*: es una consecuencia de (i); claro que $f'(x) - g'(x) = (f-g)'(x) = 0$ para todo $x \in (a,b)$ implica que $(f-g)$ es una función constante con valor $r \in I\!R$, por lo cual $f = g + r$.

Demostración de *iii)* Esta propiedad conocimos en la pagina 9 (lema), sin embargo, aquí vemos una manera de cómo demostrarla. Consideremos solamente al caso de la función f creciente (el caso decreciente se demuestra analogamente).

Supongamos primero que f sea diferenciable y creciente en el intervalo I, y sea $c \in I$ arbitrario.
Entonces $x \geq c$ implica $f(x) \geq f(c)$, lo cual significa que $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$.

Además, $x \leq c$ implica $f(x) \leq f(c)$, lo cual significa que $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$.
En consecuencia, para todo x se sigue que $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$. Pero entonces es seguro que $f'(c) = \lim\limits_{x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$.

Ahora suponemos que $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in I$. Sean $x_1, x_2 \in I$ tales que $x_1 < x_2$. Tenemos que demostrar que $f(x_1) \leq f(x_2)$. Aplicamos el teorema del valor medio para el intervalo $J = [x-1, x_2]$: entonces existe $c \in J$ tal que $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$. Debido a que $f'(c) \geq 0$ y $(x_2 - x_1) > 0$, resulta que $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$, lo cual significa $f(x_2) \geq f(x_1)$, completando la demostración.

Ejemplo de aplicación:
Obtener cálculos aproximados / estimaciones de error, por ejemplo:
Cuánto vale aproximadamente $\sqrt{105}$?

La función $\sqrt{x}$, aplicando el teorema anterior para $a = 100, b = 105$, proporciona que

$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$ para $c \in (100, 105)$.

Tenemos $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Entonces

$\sqrt{105} - \sqrt{100} = \frac{1}{2\sqrt{c}}(105 - 100)$, es decir

$\sqrt{105} - 10 = \frac{5}{2\sqrt{c}}$.

Entonces, $c \in (100, 105)$ implica lo siguiente:

$10 < \sqrt{c} < \sqrt{105} < \sqrt{121} = 11 \Longrightarrow \frac{1}{11} < \frac{1}{\sqrt{c}} < \frac{1}{10} \Longrightarrow \frac{5}{2 \cdot 11} < \frac{5}{2\sqrt{c}} < \frac{5}{2 \cdot 10}$.

Ahora substituyendo $\frac{5}{2\sqrt{c}}$ por $\sqrt{105} - 10$, se obtiene

$\frac{5}{22} + 10 < \sqrt{105} < \frac{5}{20} + 10 \Longrightarrow 10.2273 < \sqrt{105} < 10.25$.

6.7. Derivadas superiores y el teorema de Taylor

Teorema de Taylor: *Una función $f : I\!R \longrightarrow I\!R$ sea $(n+1)$ veces diferenciable en el intervalo (x_0-a, x_0+a) con $a \in R^+$. Entonces para todo $x \in (x_0-a, x_0+a)$ vale que*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_k(x) \quad \textit{(desarrollo de Taylor)}$$

con $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(x_0 + \delta(x - x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \;\; 0 < \delta < 1$ *(residuo de Lagrange)*

Para el caso particular $x_0 = 0$, se obtiene la "formula de MacLaurin":

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \frac{f^{(n+1)}(\delta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

Caso $n = 0$: es el teorema del valor medio !!!

Si f es diferenciable en $(x_0 - a, x_0 + a)$ cualquier numero de veces y si para todo $x \in (x_0 - a, x_0 + a)$ vale que $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, entonces $f(x)$ puede expresarse como

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \quad \textit{(serie de Taylor)}$$

Ejemplo: $f(x) = e^x$ es diferenciable en $I\!R$ cuantas veces como queremos, y $f^{(n)} = f, n \in I\!N$. Además $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{exp(\delta x)}{(n+1)!} x^{n+1} = 0 \; \forall \; x \in I\!R$. Por lo tanto podemos escribir la serie de Taylor

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \; x \in I\!R,$$

y para $x = 1$ se obtiene la serie del numero de Euler $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$.

****