Álgebra Lineal

Roberto Cadena Vega

26 de agosto de 2013

1. Conjuntos

2. Relaciones de Equivalencia

3. Funciones

4. Espacios Vectoriales

Definición. Un *campo* o *cuerpo* es un conjunto k con dos operaciones; adición $+ : k \times k \to k$ y multiplicación $\cdot : k \times k' \to k$ tales que:

i) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma) \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in k$
ii) $\alpha + \beta = \beta + \alpha \quad \forall \alpha, \beta \in k$
iii) $\exists 0 \in k \mid \alpha + 0 = \alpha \quad \forall \alpha \in k$
iv) $\forall \alpha \in k, \exists \beta \in k \mid \alpha + \beta = 0, \therefore \beta = -\alpha$
v) $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in k$
vi) $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha \quad \forall \alpha, \beta \in k$
vii) $\exists 1 \in k \mid \alpha \cdot 1 = \alpha \quad \forall \alpha \in k$
viii) $\forall \alpha \in k, \alpha \neq 0, \exists \beta \in k \mid \alpha \cdot \beta = 1, \therefore \beta = \alpha^{-1}$
ix) $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in k$

Definición. Un espacio vectorial sobre el campo k es un conjunto V con una adición $+ : V \times V \to V$ y multiplicación $\cdot : k \times V \to V$ tales que:

i) $(u + v) + w = u + (v + w) \quad \forall u, v, w \in V$
ii) $u + v = v + u \quad \forall u, v \in V$
iii) $\exists 0 \in V \mid u + 0 = u \forall u \in V$
iv) $\forall u \in V, \exists v \in V \mid u + v = 0, \therefore v = -u$
v) $(\alpha \cdot \beta) \cdot v = \alpha \cdot (\beta \cdot v) \quad \forall v \in V, \forall \alpha, \beta \in k$
vi) $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v \quad \forall v \in V, \forall \alpha, \beta \in k$
vii) $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v \quad \forall u, v \in V, \forall \alpha \in k$
viii) $1 \cdot v = v \quad \forall v \in V$

A los elementos de V se les llama *vectores* y a los elementos de k escalares.

Proposición. Sea V un espacio vectorial sobre k, tenemos lo siguiente:

i) $u + v = u + w \Rightarrow v = w$
ii) $\alpha \cdot \vec{0} = \vec{0}$

III) $0 \cdot v = \vec{0}$

IV) $\alpha \cdot v = \vec{0} \Rightarrow \alpha = 0 \quad o \quad v = \vec{0}$

V) $-1 \cdot v = -v$

4.1. Subespacios

Definición. Sea V un espacio vectorial sobre un campo k. Un subespacio de V es un subconjunto no vacío W de V, es un espacio vectorial con la adición y multiplicación por escalares de k, heredadas de V, es decir, si W es cerrado bajo la adición y multiplicación por escalares definidas originalmente en V.

Observación. Para demostrar que un subconjunto W de V es un subespacio de V basta probar que es no vacío, y que $w_1, w_2 \in W, \alpha, \beta \in k \Rightarrow \alpha w_1 + \beta w_2 \in W$

Observación. La unión de subespacios no necesariamente es un subespacio.

Definición. Sean W_1 y W_2 subespacios de V. Definimos la suma de subespacios:

$$W_1 + W_2 = \{w_1 + w_2 \mid w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\} \tag{1}$$

Proposición. Si W_1 y W_2 son subespacios de V, entonces:

I) $W_1 \cap W_2$ es subespacio de V

II) $W_1 + W_2$ es subespacio de V

Definición. Sea V un espacio vectorial y W_1, W_2 subespacios de V. Diremos que la suma de los subespacios es la suma directa y escribimos $W_1 \oplus W_2$ para denotar la suma $W_1 + W_2$ de W_1 y W_2 si $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

Definición. Sea V un espacio vectorial y sea $s \subseteq V$. El subespacio de V generado por s, denotado por $L(s)$ es el único subespacio de V que contiene a s, esto es:

$$L(s) = \cap W \tag{2}$$

Definición. Decimos que los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ generan a V o que $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ generan a V, si para cualquier $v \in V$ existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tales que:

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n \quad \forall v \in V \tag{3}$$

Definición. Decimos que los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ son linealmente independientes sobre k (li) o que $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es linealmente independiente sobre k (li), si dados $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0 \tag{4}$$

Definición. Decimos que los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ son linealmente dependientes sobre k (ld) o que $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es linealmente dependiente sobre k (ld) si existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \neq 0$ tales que:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = 0 \tag{5}$$

Definición. Sea V un espacio vectorial. Un conjunto de vectores $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \in V$ es una base de V, si es li y genera a V.

Proposición. Supongamos que $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ genera a V y $\{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ es li y $m \leq n$.

Corolario. Si $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ y $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$, entonces $m = n$.

Corolario. Sea V un espacio vectorial que puede ser generado por un numero finito de vectores. Entonces:

i) De todo conjunto de generadores $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ se puede extraer una base.

ii) Todo conjunto li $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\} \in V$ lo podemos completar a una base.

Definición. Si el espacio vectorial V puede ser generado por un numero finito de vectores, diremos que V es de dimensión finita. Si V es de dimensión finita, al numero de elementos de una base se le llama la dimensión de V y se le denota $\dim V$, o bien $\dim_k V$.

Observación. No todos los espacios vectoriales son de dimensión finita, por ejemplo $\mathbb{R}$, no es de dimensión finita, sobre el campo $\mathbb{Q}$.

También se puede definir independencia lineal de un conjunto infinito, bases infinitas y espacios vectoriales de dimensión infinita.

Proposición. Sea $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base de V. Si $v \in V$ entonces existen únicos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in k$ tal que:

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n \tag{6}$$

Definición. Sean V un espacio vectorial, $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base de V y $v \in V$. Por la proposición, existen únicos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in k$ tal que $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$. el vector coordenado de v respecto a la base $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es:

$$[v]_{(v_i)} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \tag{7}$$

Proposición. $\left.\begin{array}{r} V \text{ de dimensión finita} \\ W \text{ es subespacio de } V \end{array}\right\} \begin{array}{l} W \text{ es de dimensión finita.} \\ \dim W \leq \dim V \end{array}$

$$V = W \Leftrightarrow \dim V = \dim W \tag{8}$$

Teorema. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y sean W_1, W_2 subespacios de V. Se tiene:

$$\dim (W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim (W_1 \cap W_2) \tag{9}$$

Corolario. Si V es de dimensión finita y W_1, W_2 son subespacios tales que $W_1 \cap W_2 = \{0\}$, entonces:

$$\dim (W_1 \oplus W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 \tag{10}$$

4.2. Espacio Cociente

Sea V un espacio vectorial sobre el campo k y W un subespacio de V. Definimos una relación en V.

Para $u, v \in V$, decimos que están relacionados (o mas precisamente, que están relacionados modulo W) y escribimos $u \sim v$ si $u - v \in W$.

Esta relación es una relación de equivalencia en V, en efecto:

I) Sea $v \in V$. Como $v - u = 0 \in W$, $v \sim u$.

II) Supongamos $u \sim v$. Entonces $u - v \in W$. Luego $v - u = -(u - v) \in W$. Por tanto $v \sim u$.

III) Supongamos $v_1 \sim v_2$ y $v_2 \sim v_3$. Entonces $v_1 - v_2 \in W$ y $v_2 - v_3 \in W$. Luego $v_1 - v_3 = v_1 - v_2 + v_2 - v_3 \in W$. Por tanto $v_1 \sim v_3$.

Concluyamos que $\sim$ es una relación de equivalencia en V.

Denotamos al conjunto cociente por ${}^{V}/_{W}$. Los elementos de ${}^{V}/_{W}$ son las dependencias de equivalencia de los elementos de V.

Sea $v \in V$. Tenemos que:

$$\begin{aligned}
[v] &= \{u \in V \mid u \sim v\} \\
[v] &= \{u \in V \mid u - v \in W\} \\
[v] &= \{u \in V \mid u - v = w \in W\} \\
[v] &= \{u + w \mid w \in W\} \\
[v] &= u + W \qquad (11)
\end{aligned}$$

Recordemos que estas clases forman una partición de V. Definimos en ${}^{V}/_{W}$ una suma y multiplicación por escalares ($\in k$)

I) $(u + W) + (v + W) = (u + v) + W \quad \forall u, v \in V$

II) $\alpha(v + W) = \alpha v + W \quad \forall v \in V, \forall \alpha \in k$

La suma y la multiplicación por escalares están bien definidas, esto es, no dependen de los representantes.

Con esta suma y multiplicación por escalares, ${}^{V}/_{W}$ es un espacio vectorial sobre k, llamado espacio cociente. Sus elementos son de la forma:

$$v + W \quad \forall v \in V \qquad (12)$$

El neutro aditivo es la clase de 0:

$$0 + W \tag{13}$$

El inverso aditivo de $v + W$ es:

$$-v + W \tag{14}$$

Proposición. Sea V espacio vectorial de dimensión finita sobre k y sea W un subespacio de V. Tenemos:

$$\dim V = \dim W + \dim {}^{V}\!/_{W} \tag{15}$$

Ejemplo. Sean $V = \mathbb{R}^3$ y $W = \{(y_1, y_2, 0) \mid y_1, y_2 \in \mathbb{R}\}$. Tenemos:

$$\begin{aligned} {}^{V}\!/_{W} &= \{(x_1, x_2, x_3) + W \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\} \\ {}^{V}\!/_{W} &= \{(0, 0, x_3) + W \mid x_3 \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

$(x_1, x_2, x_3) \sim (0, 0, x_3)$ porque $(x_1, x_2, x_3) - (0, 0, x_3) = (x_1, x_2, 0) \in W$

Luego, una base para ${}^{V}\!/_{W}$ es $\{(0, 0, 1) + W\}$, por lo tanto $\dim {}^{V}\!/_{W} = 1$

5. Sistemas de Ecuaciones Lineales

Sea $k \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

Definición. Una ecuación lineal sobre k es una expresión de la forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b \tag{16}$$

donde $a_1, a_2, ..., a_n \in k$ y $x_1, x_2, ..., x_n$ son variables independientes.

Una solución de la ecuación lineal es una n-ada $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ de manera que:

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + ... + a_n\alpha_n = b \tag{17}$$

Ejemplos.

1. Consideramos la ecuación $2x_1 - 3x_2 + x_3 = 8$. Tenemos que $(4, 0, 0)$ y $(0, 0, 8)$ son soluciones de la ecuación. Si damos valores arbitrarios $x_2 = \alpha_2$ y $x_3 = \alpha_3$ y despejamos, tenemos que:
   $x_1 = \frac{8+3\alpha_2-\alpha_3}{2}$
   Por lo que obtenemos:
   $\left\{\frac{8+3\alpha_2-\alpha_3}{2}, \alpha_2, \alpha_3 \mid \alpha_2, \alpha_3 \in k\right\}$
   Son todas las soluciones en k^3 de la ecuación.
2. Para la ecuación $0x_1 + 0x_2 = 0$. Cualquier $(\alpha_1, \alpha_2) \in k^2$ es solución. Luego:
   $\{(\alpha_1, \alpha_2) \mid \alpha_1, \alpha_2 \in k\}$
   Son todas las soluciones en k^2 de la ecuación.
3. La ecuación $0x_1 + 0x_2 = 1$ no tiene solución.
4. La ecuación $5x_1 = 6$ tiene una única solución $\frac{6}{5}$ en k.

Consideremos un sistema de m ecuaciones con n incógnitas.

$$
\begin{aligned}
a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n &= b_1 \\
a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n &= b_m
\end{aligned} \tag{18}
$$

donde $a_{i,j}, b_i \in k$ para $i \in \{1, 2, ..., m\}$, $j \in \{1, 2, ..., n\}$ y $x_1, x_2, ..., x_n$ son variables independientes.

El sistema se dice homogéneo si $b_1 = b_2 = ... = b_n = 0$.

Una solución del sistema de ecuaciones lineales es una n-ada $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ de manera que:

$$
\begin{aligned}
a_{1,1}\alpha_1 + a_{1,2}\alpha_2 + \cdots + a_{1,n}\alpha_n = b_1 \\
a_{2,1}\alpha_1 + a_{2,2}\alpha_2 + \cdots + a_{2,n}\alpha_n = b_2 \\
\vdots \\
a_{m,1}\alpha_1 + a_{m,2}\alpha_2 + \cdots + a_{m,n}\alpha_n = b_m
\end{aligned} \tag{19}
$$

La solución o solución general del sistema consiste de todas las posibles soluciones en k^n.

Si el sistema de ecuaciones es homogéneo tenemos dos posibilidades, que haya solamente la solución trivial, o bien, que haya mas soluciones.

Si el sistema no es homogéneo tenemos dos posibilidades, que el sistema sea inconsistente, es decir que no tenga soluciones, o bien que sea consistente.

En este ultimo caso hay dos posibilidades, que haya solamente una solución, o bien que haya mas.

Ejemplos.

1. Consideremos el sistema homogéneo:

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 0 \\ x + 3y + z &= 0 \\ 2x + 5y - 4z &= 0 \\ 2x + 6y + 2z &= 0 \end{aligned}$$

Vaciamos los coeficientes en una matriz y realizamos operaciones elementales.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & -4 \\ 2 & 6 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-R_1 + R_2 \to R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & -4 \\ 2 & 6 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2R_1 + R_3 \to R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-2R_1 + R_4 \to R_4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2R_2 + R_1 \to R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-R_2 + R_3 \to R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2R_2 + R_4 \to R_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-{}^1/_2 R_3 \to R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{11R_3 + R_1 \to R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-4R_3 + R_2 \to R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned}$$

El sistema original es equivalente al de arriba, por lo que la única solución es la trivial.

2. Consideremos ahora el sistema no homogéneo:

$$\begin{aligned}
x + 2y - 3z &= 4\\
x + 3y + z &= 11\\
2x + 5y - 4z &= 13\\
2x + 6y + 2z &= 22
\end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4\\ 1 & 3 & 1 & 11\\ 2 & 5 & -4 & 13\\ 2 & 6 & 2 & 22 \end{array}\right) \xrightarrow{-R_1+R_2\to R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4\\ 0 & 1 & 4 & 7\\ 2 & 5 & -4 & 13\\ 2 & 6 & 2 & 22 \end{array}\right) \xrightarrow{-2R_1+R_3\to R_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4\\ 0 & 1 & 4 & 7\\ 0 & 1 & 2 & 5\\ 2 & 6 & 2 & 22 \end{array}\right) \xrightarrow{-2R_1+R_4\to R_4} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4\\ 0 & 1 & 4 & 7\\ 0 & 1 & 2 & 5\\ 0 & 2 & 8 & 14 \end{array}\right) \xrightarrow{-2R_2+R_1\to R_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -11 & -10\\ 0 & 1 & 4 & 7\\ 0 & 1 & 2 & 5\\ 0 & 2 & 8 & 14 \end{array}\right) \xrightarrow{-R_2+R_3\to R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -11 & -10\\ 0 & 1 & 4 & 7\\ 0 & 0 & -2 & -2\\ 0 & 2 & 8 & 14 \end{array}\right) \xrightarrow{-2R_2+R_4\to R_4}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -11 & -10\\ 0 & 1 & 4 & 7\\ 0 & 0 & -2 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{-{}^1/_2R_3\to R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -11 & -10\\ 0 & 1 & 4 & 7\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{11R_3+R_1\to R_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 4 & 7\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{-4R_3+R_2\to R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned}
x &= 1\\
y &= 3\\
z &= 1
\end{aligned}$$

El sistema original es equivalente al de arriba por lo que concluimos que la única solución al sistema es $(1, 3, 1)$.

3. Se considera el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} x + y &= 0 \\ 2x + 2y &= 1 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-2R_1 + R_2 \to R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} x + y &= 0 \\ 0x + 0y &= 1 \end{aligned}$$

Se crea una contradicción $(0 = 1)$ por lo que el sistema es inconsistente (no tiene solución).

4. Se toma el siguiente sistema homogéneo:

$$\begin{aligned} x + y &= 0 \\ 2x + 2y &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2R_1 + R_2 \to R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x + y = 0$$

Si damos cualquier valor a a x tenemos $x = a$ y $y = -a$; $\{(a, -a) \mid a \in \mathbb{R}\}$ nos proporciona todas las soluciones del sistema original.

5. El siguiente sistema no homogéneo:

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ 2x + 2y &= 2 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{-2R_1 + R_2 \to R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Si damos cualquier valor b a y, tenemos $y = b$ y $x = 1 - b$. Así, $\{(1 - b, b) \mid b \in \mathbb{R}\}$ nos proporciona todas las soluciones del sistema original.

Teorema. En un sistema de ecuaciones lineales homogéneas de m ecuaciones con n incógnitas, si $n > m$ entonces el sistema tiene una solución no trivial en k.

Ejemplo. Sea $k = \mathbb{R}$. En el sistema homogéneo:

$$
\begin{aligned}
x - 3y + 4z - 2w &= 0 \\
0 + 2y + 5z + w &= 0 \\
0 + y - 3z + 0 &= 0
\end{aligned}
$$

Damos un valor arbitrario a z, digamos $z = a$ y obtenemos $y = 3a$, $2(3a)+5a+w$, luego $w = -11a$ y finalmente, $x = 3(3a)-4a+2(-11a) = -17a$.

La solución general del sistema es:

$$\{(-17a, 3a, a, -11a) \mid a \in \mathbb{R}\}$$

Una solución no trivial es $(-17, 3, 1, -11)$, y la solución trivial es $(0, 0, 0, 0)$

6. Matrices

Definición. Sea $k \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, sean $m, n \in \mathbb{N}$. Una matriz $m \times n$ con entradas en k es un arreglo rectangular con m renglones (filas) y n columnas de elementos de k.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{20}$$

Escribimos también $A = (a_{ij})_{ij}$.

Denotaremos por $\mathcal{M}_{m\times n}(k)$ al conjunto de matrices $m \times n$ con entradas en k.

Podemos definir la suma de matrices y la multiplicación de un escalar por una matriz. Sean $A = (a_{ij})_{ij}$ y $B = (b_{ij})_{ij} \in \mathcal{M}_{m\times n}(k)$ y $c \in k$.

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{ij} \tag{21}$$

$$c \cdot A = (c \cdot a_{ij})_{ij} \tag{22}$$

Ejemplos.

1. $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$
2. $c \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \cdot a_{11} & c \cdot a_{12} \\ c \cdot a_{21} & c \cdot a_{22} \end{pmatrix}$
3. Sean $k = \mathbb{C}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \\ -5 & -6 \end{pmatrix}$

   Tenemos:

   $A + B = \begin{pmatrix} 1+i & 2 \\ 3 & 4+i \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ $\sqrt{2} \cdot A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 3\sqrt{2} & 4\sqrt{2} \\ 5\sqrt{2} & 6\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Con esta suma y multiplicación por escalares $\mathcal{M}_{m\times n}(k)$ es un espacio vectorial de dimensión $m \cdot n$. Se puede probar que es asociativa y conmutativa.

El neutro aditivo es la matriz $0 = 0_{m\times n} = (0)_{ij}$. El inverso aditivo de la matriz $A = (a_{ij})_{ij}$ es $-A = (-a_{ij})_{ij}$.

Una base para $\mathcal{M}_{m\times n}(k)$ es: $\{E_{ij} \mid 1 \leq i \leq m, i \leq j \leq n\}$ donde todas las entradas son 0, excepto por la i que es 1.

Ejemplo. Una base para $\mathcal{M}_{3\times 2}(k)$ es:

$$\left\{ \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \right\}$$

Si $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathcal{M}_{m\times n}(k)$ y $B = (b_{jk})_{jk} \in \mathcal{M}_{n\times p}(k)$ podemos definir el producto de las matrices A y B como la matriz $m \times p$ $C = AB$ donde $C = (c_{ik})_{ik}$.

$$C_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} \tag{23}$$

Observación. El orden del producto es importante.

Cuando AB esta definido, no necesariamente BA esta definido. Para que AB y BA esten definidas es necesario y suficiente que $m = p$. Aun en este caso podria suceder que AB y BA no sean del mismo tamaño.

Para que AB y BA esten definidos y sean del mismo tamaño es necesario y suficiente que $m = n = p$. Aun asi, no necesariamente se tiene $AB = BA$.

Ejemplos.

1. Sean $A = \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix}-7 & 2 & 3\end{pmatrix}$.

   $AB = \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}-7 & 2 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-7 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, y BA no puede definirse.

2. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   $$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

   $$BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   $$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   $$BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   $AB \neq BA$

4. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

   $$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

   $$BA = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Proposición. Sean A, B, C matrices con entradas en k y $c \in k$. Siempre que las operaciones se puedan realizar se tiene:

i) $A(BC) = (AB)C$

ii) $A(B + C) = AB + AC$

iii) $(A + B)C = AC + BC$

iv) $c(AB) = (cA)B = A(cB)$

Introducimos el simbolo δ_{ij} llamado delta de Kronecker, deifinido por:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases} \tag{24}$$

La matriz identidad $I_n \in \mathcal{M}_{n\times n}(k)$ es:

$$I_n = (\delta_{ij})_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \tag{25}$$

Proposición. Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(k)$ y $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(k)$. Entonces $AI_n = A$ y $I_nB = B$.

Definición. Una matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(k)$ es invertible si existe una matriz $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(k)$ tal que:

$$AB = BA = I_n \tag{26}$$

Observación. Si tal matriz existe, es única. Se llama la inversa de A y se denota por A^{-1}

$AB = BA = I_n$

$AC = CA = I_n$

$B = BI_n = B(AC) = (BA)C = I_nC = C$

Observación. Si A es una matriz cuadrada $n \times n$, basta con que $AB = I_n$ (o con que $BA = I_n$) para alguna matriz B para que A sea invertible y su inversa sea B.

Proposición. Si A es una matriz cuadrada ($A \in \mathcal{M}_{n\times n}(k)$) y es invertible, entonces A^{-1} tambien es invertible y es:

$$(A^{-1})^{-1} = A \tag{27}$$

Demostración. Puesto que $AA^{-1} = I_n$ y $A^{-1}A = I_n$ se sigue que A^{-1} es invertible y $(A^{-1})^{-1} = A$.

Proposición. Si $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(k)$ son matrices invertibles, entonces AB es invertible y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Demostración. Tenemos $ABB^{-1}A^{-1}$

$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$

Luego AB es invertible y $(AB)^{-1} = B^{-1}A{-}1$

Proposición. Si $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(k)$ es una matriz invertible y $c \in k, c \neq 0$, entonces cA es invertible y $(cA)^{-1} = c^{-1}A^{-1}$.

Demostración. Tenemos $cAc^{-1}A^{-1}$

$cAc^{-1}A^{-1} = cc^{-1}AA^{-1} = 1 \cdot I_n = I_n$

Luego cA es invertible y $(cA)^{-1} = c^{-1}A^{-1}$.

Observación. Puede suceder que $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(k)$ sean matrices invertibles, pero $A + B$ no lo sea.

Ejemplos.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ son invertibles y $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ no lo es.
2. $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ no es invertible.
3. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Tenemos $A \neq= 0$ y A no es invertible.
4. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, entonces:
   $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$
   En efecto:
   $AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
   $BB^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
   Observamos que:
   $AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$B^{-1}A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$
Entonces $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
$ABB^{-1}A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = I_n$
Finalmente observamos
$A^{-1}B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \neq B^{-1}A^{-1}$

Definición. Sea $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathcal{M}_{n\times n}(k)$. La traspuesta de A, A^t es la matrix $n \times n$ obtenida al cambiar los renglones de A por columnas.

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, entonces:

$$A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{28}$$

En la entrada ij de A^t esta a_{ji}, es decir $A^t = (a_{ji})_{ij}$.

Ejemplo. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, entonces $A^t = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

Proposición. Sean A, B matrices y $c \in k$. Siempre que las operaciones se puedan realizar, se tiene:

i) $(A + B)^t = A^t + B^t$
ii) $(cA)^t = cA^t$
iii) $(AB)^t = B^t A^t$
iv) Si A es invertible, entonces A^t es invertible y $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

Demostraciones.

I)

II)

III) Sean $A = (a_{ij})_{i=1,n|j=1,m}$ y $B = (b_{jk})_{j=1,m|k=1,p}$. Entonces $AB = (\sum_{j=1}^{m} a_{ij}b_{jk})_{i=1,n|k=1,p}$

Observemos que AB es matriz $m \times p$ por lo que $(AB)^t$ es matriz $p \times m$. Por otro lado, B^t es $p \times n$ y A^t es $n \times m$, luego B^tA^t es $p \times m$.

En la entrada ik de $(AB)^t$ esta el elemento $\sum_{j=1}^{n} a_{kj}b_{ji}$. El i-esimo renglon de B^t es $(b_{1i}, b_{2i}, \ldots, b_{ni})$ y la k-esima coulmna de A^t es $(a_{k1}, a_{k2}, \ldots, a_{kn})$. Luego la entrada es $\sum_{j=1}^{n} b_{ji}a_{kj}$. Asi pues $(AB)^t = B^tA^t$.

IV) Supongamos que A es una matriz invertible $n \times n$. Tenemos $A^t(A^{-1})^t = (A^{-1}A)^t = I_n^t = I_n$. Entonces $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

6.1. Matriz de cambio de base

Sea V un espacio vectorial de dimensión n sobre k, sean $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ y $\{v'_1, v'_2, \ldots, v'_n\}$ bases de V. A $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ la consideramos como la base antigua de V y a $\{v'_1, v'_2, \ldots, v'_n\}$ como la base nueva. Tenemos $v_i = \sum_{k=1}^{n} c_{hi}v_k$, $1 \leq i \leq n$, para algunos $c_{hi} \in k$. Entonces la matriz $P = (c_{hi})_{ki}$ es la matriz de cambio de base de la base antigua a la base nueva.

Ejemplo. Sean $V = \mathbb{R}^2$, $\{(e_1 = (1,0), e_2 = (0,1))\}$ la base antigua, y $\{(v_1 = (1,1), v_2 = (2,-1))\}$ la base nueva.

$$v_1 = (1,1) = 1(1,0) + 1(0,1) = 1e_1 + 1e_2$$
$$v_2 = (2,-1) = 2(1,0) - 1(0,1) = 2e_1 - 1e_2$$

Entonces la matriz de cambio de base es:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Consideremos ahora $\{v'_1, v'_2, \ldots, v'_n\}$ como base antigua y a $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ como base nueva. Tenemos entonces de manera analoga una matriz $Q = (d_{ih})_{ih}$ de cambio de base de la nueva a la antigua.

Ejemplo. Con relación al ejemplo anterior.

$$\begin{aligned} e_1 = (1,0) &= \frac{1}{3}(1,0) + \frac{1}{3}(0,1) = (1,0) \\ e_2 = (0,1) &= \frac{2}{3}(1,0) - \frac{1}{3}(0,1) = (0,1) \end{aligned}$$

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Observemos que para $1 \leq h \leq n$, $v_h = \sum_{i=1}^{n} d_{ih} v'_i = \sum_{i=1}^{n} d_{ih} \sum_{l=1}^{n} c_{li} v_i$. Por lo tanto $v_h = \sum_{l=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} c_{li} d_{ih} \right) v_i$; luego entonces:

$$\sum_{i=1}^{n} c_{li} d_{ih} = \delta_{lh} \tag{29}$$

Por lo tanto, $PQ = I_n$ y $Q = P^{-1}$, en particular, P es invertible.

Por otro lado observamos que si $v \in V$, entonces $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$ para algunos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in k$ y $v = \alpha'_1 v'_1 + \alpha'_2 v'_2 + \cdots + \alpha'_n v'_n$ para algunos $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_n \in k$. Luego entonces:

$$\begin{gathered} v = \sum_{i=1}^{n} \alpha'_i v'_i = \sum_{i=1} n \alpha'_i \sum_{h=1}^{n} c_{hi} v_i \\ v = \sum_{h=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} c_{hi} \alpha'_i \right) v_h = \sum_{h=1}^{n} \alpha_h v_h \end{gathered}$$

En terminos de producto de matrices tenemos:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \\ \vdots \\ \alpha'_n \end{pmatrix} \tag{30}$$

Esto es $[v]_{\{v_i\}} = P\,[v]_{\{v_i'\}}$. Tambien tenemos que $[v]_{\{v_i'\}} = P^{-1}\,[v]_{\{v_i\}} = Q\,[v]_{\{v_i\}}$.

Ejemplo. Con relación a los ejemplos anteriores.

Teniendo el vector $v = (3,4) \in k$ observamos que

$$v = \frac{11}{3}(1,1) - \frac{1}{3}(2,-1) = (3,4)$$

Por lo que:

$$[v]_{\{v_i\}} = \begin{pmatrix} \frac{11}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto:

$$[v]_{\{e_i\}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Comprobando:

$$P\,[v]_{\{v_i\}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{11}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = [v]_{\{e_i\}}$$

$$Q\,[v]_{\{e_i\}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = [v]_{\{v_i\}}$$

6.2. Método de eliminación de Gauss-Jordan

7. Transformaciones lineales

7.1. Matriz asociada

8. Grupos de permutaciones

Sea X un conjunto no vacío. El grupo de permutaciones en X, denotado por S_X, es el conjunto de las funciones biyectivas de X en si mismo. Los elementos de S_X se llaman permutaciones (de los elementos de X).

Ejemplos.

1. Sea $X = \{x\}$ conjunto con un elemento.
   $S_X = \{id_X\}$
2. Sea $X = \{x, y\}$ conjunto con dos elementos.
   $S_X = \{id_X, \sigma\}$
   donde $\sigma : X \to X$, $x \mapsto y$, $y \mapsto x$.
3. Sea $X = \{x, y, z\}$ conjunto con tres elementos.
   $S_X = \{id_X, \rho, \rho^2, \sigma, \tau, \lambda\}$

Proposición. Sea X conjunto no vacío. Tenemos:

i) $\sigma, \tau \in S_X \implies \sigma \circ \tau \in S_X$

ii) $\forall \sigma, \tau, \rho \in S_X$, tenemos que $(\sigma \circ \tau) \circ \rho = \sigma \circ (\tau \circ \rho)$

iii) $\exists id_X \in S_X$ tal que $\sigma \circ id_X = id_X \circ \sigma = \sigma \quad \forall \sigma \in S_X$

iv) Dado $\sigma \in S_X$, $\exists \tau \in S_X$ tal que $\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma = id_X \therefore \tau = \sigma^{-1}$

Corolario. Sean $\sigma, \tau, \rho \in S_X$, Tenemos:

i) $\sigma \circ \tau = \sigma \circ \rho \implies \tau = \rho$

ii) $\sigma \circ \rho = \tau \circ \rho \implies \sigma = \tau$

Corolario. Si X es un conjunto con n elementos S_X se denotará por S_n.

Observación. De igual manera nos referiremos a la composición de permutaciones como producto y denotaremos la composición de permutaciones simplemente por yuxtaposición.

$$\varphi\tau = \varphi \circ \tau \tag{31}$$

9. Determinantes

10. Espacios Euclidianos