Análisis de Estabilidad

Roberto Cadena Vega

1 de octubre de 2014

Mapeos no lineales (representando sistemas dinámicos autónomos).

Sea un sistema dinámico no lineal, representado por la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \tag{1}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ y $f \in C^1$, es decir, f es continuamente diferenciable.

Dado $p \in \mathbb{R}^n$ un punto en donde se quiere analizar la estabilidad del sistema, tenemos que:

$$f(x) = f(p) + J_f(p)(x-p) + \mathcal{O}(||x-p||) \tag{2}$$

donde $J_f(p)$ es el Jacobiano de f en p, es decir la pendiente generalizada de la función, $(x-p)$ es la distancia entre el punto de análisis y el punto de equilibrio del sistema, y $\mathcal{O}(||x-p||)$ son terminos de orden mayor de esta distancia.

Estabilidad

Para un sistema dinámico que tenga puntos de equilibro de la forma

$$f(\bar{x}) = 0 \implies \frac{dx}{dt} = 0 \quad \text{en } \bar{x} \tag{3}$$

diremos que $\bar{x}$ es un punto hiperbólico si:

$$\det\left(\lambda I - J_f\right) \neq bi \quad b \in \mathbb{R} \tag{4}$$

es decir, que este determinante no tenga raices puramente imaginarias.

Por otro lado, una vez determinado que $\bar{x}$ es hiperbolico, podemos definir los siguientes comportamientos del sistema:

$\bar{x}$ es estable, si las partes reales de todas las raices de $\det\left(\lambda I - J_f(\bar{x})\right)$ son negativas.

$\bar{x}$ es inestable, si al menos una raiz de $\det\left(\lambda I - J_f(\bar{x})\right)$ tiene parte real positiva.