Capítulo 7
CURSO PROPEDEUTICO DE ANÁLISIS REAL
Depto. de Control Automático, CINVESTAV-IPN, Mayo-Junio 2013
Ejemplar de material completo, solo falta completar dibujos.

****

7. Integración de funciones reales de una variable

Denotamos $F_{I\!R}(A) = \{f : A \longrightarrow I\!R\}, A \subseteq I\!R$.

7.1. Suma e integral determinado de Riemann

Sea $f \in F_{I\!R}([a,b])$, es decir $D_f = [a,b] \subset I\!R$, una función **continua** sobre $[a,b]$.

La idea del integral de Riemann es la siguiente: suponemos $f(x) \geq 0$, entonces $\int_a^b f(x)dx$ debe ser el "área" bajo la curva (dibujo vea clase):

??? Cómo calcular esta área ???, Cómo definir $\int_a^b f(x)dx$???

Una aproximación es por ejemplo: descomponer $[a,b] = [a,a_1] \cup [a_1,a_2] \cup [a_2,a_3] \cup [a_3,b]$ y sumar las áreas de los rectangulos (dibujo vea clase):

$D = \{a_0, a_1, a_2, a_3, a_4\}$ llamamos "descomposición de $[a,b]$", y

$A = (a_1 - a) \cdot f(x_1) + (a_2 - a_1) \cdot f(x_2) + (a_3 - a_2) \cdot f(x_3) + (b - a_3) \cdot f(x_4)$

es una aproximación del área bajo la curva de f. Claro: entre más “fina” sea la descomposición, más se aproxima A al verdadero área. Qué quiere decir “fina” ??? Por ejemplo: $\Delta D = max\{a_i - a_{i-1};\ 1 \leq i \leq 4\}$ es una medida de “finidad” de la descomposición, así que la descomposición D' es “más fina” que D si $\Delta D' \leq \Delta D$.

Programa de cálculo:

1. calcular la suma $A_1 = A$ con la primera descomposición $D_1 = D$;
2. calcular una suma A_2 como A con una segunda descomposición D_2 más fina que D_1; D_2 se genera introduciendo en D más puntos a_j, es decir, tal que $D_1 \subset D_2$ (eso implica $\Delta D_2 \leq \Delta D_1$!!)
3. calcular una suma A_3 como A con una descomposición $D_3 \supset D_2$ ($\Delta D_3 \leq \Delta D_2$)

$\cdots$

seguir este proceso !!!, suponiendo que $\lim\limits_{n\to\infty} \Delta D_n = 0$, esperamos que la sucesión $(A_n)n \geq 1$ converge a “algo” — este “algo” debe ser $\int_a^b f(x)dx$!!!

Ahora formalmente:

Def.: Sea $f \in F_{I\!R}([a,b])$. Una sucesión **finita** $D = (a_k)_{0\leq k\leq n}$ se llama *descomposición de* $[a,b]$, si todos los a_i son numeros reales y $a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n = b$. Denotamos $\Delta D = max\{(a_k - a_{k-1}) :\ 1 \leq k \leq n\}$. Para cada k, se escoge (arbitrariamente) un $x_k \in (a_{k-1}, a_k)$ (intervalo abierto !), obteniendo una otra sucesión finita de números reales $(x_k)_{1\leq k\leq n}$.

(dibujo vea clase)

$$S((a_k)_{0\leq k\leq n}, (x_k)_{1\leq k\leq n}) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)(a_k - a_{k-1}) \quad \text{se llama } \textit{suma de Riemann.}$$

Proposición y definición: *Sea $f \in F_{I\!R}([a,b])$, y $(D_m)_{m\geq 1}$ una sucesión de descomposiciones del intervalo $[a,b]$ tal que $\lim\limits_{m\to\infty} \Delta D_m = 0$. Para cada descomposición $D_m = \{a_0^m, a_1^m, a_2^m, \cdots, a_{n_m}^m\}$ sea escogida una sucesión finita de puntos $\{x_1^m, x_2^m, \cdots, x_{n_m}^m\}$ tal que $x_k^m \in (a_{k-1}^m, a_k^m)$. Si f es continua sobre $[a,b]$, entonces la sucesión $(S_m)_{m\geq 1}$ de las sumas de Riemann, $S_m = S(D_m, (x_k^m)_{1\leq k\leq n_m})$, converge en $I\!R$ a un número $r \in I\!R$. Esta convergencia no depende de cómo son escogidos los x_k^m en cada descomposición D_m; la única condición es $x_k^m \in (a_{k-1}^m, a_k^m)$.*

Este número r se llama *integral determinado de Riemann* y se denota por $\int_a^b f(x)dx$, en resumen:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{m\to\infty} S_m = \lim_{m\to\infty} \Big(\sum_{k=1}^{n_m} f(x_k^m)(a_k^m - a_{k-1}^m) \Big),$$

suponiendo $\lim\limits_{m\to\infty} \Delta D_m = 0$.

Def.: (Integrabilidad de una función) $f \in F_{I\!R}([a,b])$ se llama *integrable sobre* $[a,b]$ *(según Riemann)* si para toda sucesión $(D_m)_{m\geq 1}$ de descomposiciones de $[a,b]$ con la propiedad $\lim\limits_{m\to\infty} \Delta D_m = 0$ se sigue que $\lim\limits_{m\to\infty} S_m = \lim\limits_{m\to\infty} S(D_m, (x_k^m)_{1\leq k\leq n_m})$ existe en $I\!R$, independientemente de la selección concreta de los $x_k^m \in (a_{k-1}^m, a_k^m)$.

Nota: Esta definición **no** exige de entrada que f sea continua !!!

Corolario de la proposición: *Cada f que es continua sobre $[a,b]$, también es integrable sobre $[a,b]$.*

Ejemplo: $f(x) = c$, la función constante, es integrable puesto que es continua. Sean $a, b \in I\!R, a \leq b$. Supongamos que $(D_m)_{m\geq 1}$ sea una sucesión de descomposiciones de $[a,b]$ con la propiedad $\lim\limits_{m\to\infty} \Delta D_m = 0$. Entonces

$\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{n_m} c \cdot (a_k - a_{k-1}) = c \cdot \lim\limits_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{n_m} (a_k - a_{k-1})$

Pero $\sum_{k=1}^{n_m} (a_k - a_{k-1}) = (a_1 - a) + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_{n_m-1} - a_{n_m-2}) + (a_{n_m} - a_{n_m-1}) = -a + b$, puesto que $a_{n_m} = b$.

En consecuencia, $\int_a^b f(x)dx = c \cdot (b - a)$.

Sumas inferiores y superiores de Darboux

Sea $f \in F_{I\!R}([a,b])$, y $D = (\alpha_k)_{0\leq k\leq n}$ una descomposición de $[a,b]$. En la suma de Riemann, $(\alpha_1 - \alpha_2)$ es multiplicado con $f(x_2)$. Ahora, usemos en cada intervalo el valor de f máximo o mínimo, para formar nuevas sumas que aproximan al integral determinado, acontándolo por arriba, o por abajo (dibujo vea clase).

Las sumas de Darboux son definidas como sigue:

$S_{sup}(D) = \sum_{k=1}^{n}(\sup\{f(x) : x \in [\alpha_{k-1}, \alpha_k]\}) \cdot (\alpha_k - \alpha_{k-1})$,

$S_{inf}(D) = \sum_{k=1}^{n}(\inf\{f(x) : x \in [\alpha_{k-1}, \alpha_k]\}) \cdot (\alpha_k - \alpha_{k-1})$.

Nótese que los suprema e ínfima abajo de las sumas, existen, puesto que f es acotada sobre todo $[a, b]$!

Para toda sucesión $D = (x_k)_{1 \le k \le n}$ arbitrariamente escogida, pero tal que $(x_k) \in (\alpha_{k-1}, \alpha_k)$, tanto las sumas de Darboux $S_{sup}(D)$ y $S_{inf}(D)$ como también la suma de Riemann $S(D, (x_k)_{1 \le k \le n})$ son aproximaciones del integral determinado $\int_a^b f(x)dx$, y tenemos lo siguiente:

$$S_{inf}(D) \le S(D, (x_k)_{1 \le k \le n}) \le S_{sup}(D).$$

Para la integrabilidad de la función se necesita entonces que, para toda sucesión $(D_m)_{m \in I\!N}$ de descomposiciones del intervalo $[a, b]$, con la propiedad

que $\lim\limits_{m \to \infty} \Delta(D_m) = 0$, se sigue que

$\lim\limits_{m \to \infty} S_{inf}(D_m) = \lim\limits_{m \to \infty} S_{sup}(D_m) = \lim\limits_{m \to \infty} S(D_m, (x_k^m)_{1 \le k \le n_m}) = \int_a^b f(x)dx.$

Claro que

$\lim\limits_{m \to \infty} S_{inf}(D_m) = \lim\limits_{m \to \infty} S_{sup}(D_m) \;\Leftrightarrow\; \lim\limits_{m \to \infty}(S_{inf}(D_m) - S_{sup}(D_m) = 0,$

lo cual implica el siguiente

Criterio de integrabilidad a base de sumas de Darboux: Si $f \in F_{I\!R}([a, b])$ es acotada sobre $[a, b]$, entonces f es integrable sobre $[a, b]$ si para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta(\epsilon) > 0$ tal que para **toda** descomposición D con $\Delta(D) < \delta$, se sigue que $S_{sup}(D) - S_{inf}(D) < \epsilon$.

Ejemplo: Función idéntica: $f(x) = x$, para x dentro del intervalo $[a, b]$. Consideremos una descomposición D arbitraria de $[a, b]$: $D = \{a = \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n = b\}$ con la propiedad que $\lim\limits_{m \to \infty} \Delta D = 0$. Debido a que $f(\alpha_k) = \alpha_k$ para todo k, se obtiene

$S_{inf}(D) = \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k - \alpha_{k-1}) \cdot \alpha_{k-1}$,
$S_{sup}(D) = \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k - \alpha_{k-1}) \cdot \alpha_k$.

En consecuencia

$S_{sup}(D) - S_{inf}(D) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(\alpha_k - \alpha_{k-1}) - \alpha_{k-1}(\alpha_k - \alpha_{k-1})$
$= \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k - \alpha_{k-1})^2$.

Claro que $(\alpha_k - \alpha_{k-1})^2$ tiende a cero cuando ΔD tiende a cero, lo cual implica que

$\lim\limits_{m \to \infty}(S_{sup}(D) - S_{inf}(D)) = 0$. En consecuencia , f es integrable sobre $[a, b]$.

Para calcular $\int_a^b f(x)dx$, es suficiente calcular

$\lim\limits_{m\to\infty} S(D_m, (x_k^k)_{1\leq k\leq n_m}) = \lim\limits_{m\to\infty} S_{inf}(D_m) = \lim\limits_{m\to\infty} S_{sup}(D_m)$

(solo hay que calcular uno de estos tres límites) para una sucesión particular de descomposiciones. Así que, una idea simple es partir el intervalo $[a,b]$ en m partes iguales:

$m = 1$: $D_1 = \{a, b\}$
$m = 2$: $D_2 = \{a, \alpha_1, b\}$
$m = 3$: $D_3 = \{a, \alpha_1, \alpha_2, b\}$
$m = 4$: $D_4 = \{a, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, b\}$

$m \geq 1$: $D_m = \{a = \alpha_0, \alpha_1 = a + \frac{1}{m}(b-a), \alpha_2 = a + \frac{2}{m}(b-a), \alpha_3 = a + \frac{3}{m}(b-a), \cdots \alpha_m = a + \frac{m}{m}(b-a) = b\}$

Como resultado, $(D_m)_{m\geq 1}$ es una sucesión de descomposiciones con la propiedad $\lim\limits_{m\to\infty} \Delta D_m = 0$.

Ahora calculamos el integral:

$\int_a^b xdx = \lim\limits_{m\to\infty} S_{inf}(D_m)$

$= \lim\limits_{m\to\infty} \sum_{k=1}^n f(\alpha_{k-1})(\alpha_k - \alpha_{k-1})$ (recordemos que $\alpha_k = a + \frac{k}{m}(b-a)$)

$= \lim\limits_{m\to\infty} \sum_{k=1}^n \left[a + \frac{k-1}{m}(b-a)\right] \cdot \frac{b-a}{m}$

$= \lim\limits_{m\to\infty} \sum_{k=1}^n \left[\frac{a(b-a)}{m} + \frac{k(b-a)^2}{m^2} - \frac{(b-a)^2}{m^2}\right]$

$= \lim\limits_{m\to\infty} \left[\frac{a(b-a)}{m} \sum_{k=1}^n 1 + \frac{(b-a)^2}{m^2} \sum_{k=1}^n k - \frac{(b-a)^2}{m^2} \sum_{k=1}^n 1\right]$

$= \lim\limits_{m\to\infty} \left(\frac{a(b-a)}{m} \cdot m\right) + \lim\limits_{m\to\infty} \frac{(b-a)^2 m(m+1)}{m^2 \cdot 2} - \lim\limits_{m\to\infty} \frac{(b-a)^2 \cdot m}{m^2}$

$= a(b-a) + \lim\limits_{m\to\infty} \frac{(b-a)^2 m}{2m} + \lim\limits_{m\to\infty} \frac{(b-a)^2}{2m} - \lim\limits_{m\to\infty} \frac{(b-a)^2}{m}$

$= a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{2} + 0 - 0 = \frac{2ab-2a^2+b^2-2ab+a^2}{2} = \frac{1}{2}(b^2-a^2)$

7.2. Propiedades del integral determinado

- Si $f, g \in F_{I\!R}([a,b])$ son integrables sobre $[a,b]$, $k \in I\!R$, entonces $f+g$ y $k \times f$ también son integrables sobre $[a,b]$, y

$$\int_a^b (k \times f)(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx, \quad \int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx;$$

- Se define $\int_a^a f(x)dx = 0$;
- Si $\int_a^b f(x)dx$ existe para $a < b$, entonces se define $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$.

• Si $\int_a^b f(x)dx$ y $\int_b^c f(x)dx$ existen, entonces también existe $\int_a^c f(x)dx$, y $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$.

• Si $f, g \in F_{\mathbb{R}}([a,b])$ son integrables sobre $[a,b]$, y $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a,b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

en particular: • Si $m, M \in \mathbb{R}$ tales que $m \leq f(x) \leq M$ $\forall x \in [a,b]$, entonces

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

• Si $f(x) \geq 0$ $\forall x \in [a,b]$, entonces $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

• Si $\int_a^b \mid f(x) \mid dx$ existe, entonces también existe $\int_a^b f(x)dx$, y

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \quad \leq \quad \int_a^b \mid f(x) \mid dx.$$

Nota: La definición y las propiedades aqui reportadas proporcionan pocas herramientas para **calcular** integrales determinadas ! En general, es mucho más efectivo realizar este **calculo integral** determinando **funciones primitivas** y aplicando el teorema principal del calculo diferencial e integral !!! A eso estarán dedicadas las siguientes dos secciones.

7.3. La función primitiva - definición y ejemplos

Def.: Una función $F(x)$ diferenciable en algún intervalo $[a,b]$ se llama *función primitiva* de $f(x) \in F_{\mathbb{R}}([a,b])$ si para todo $x \in [a,b]$ vale que $F'(x) = f(x)$.

Ejemplos:

$$f(x) = cos(x) \implies F(x) = sen(x),\ I = \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \implies F(x) = arcsen(x),\ I = (-1,1)$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad \implies F(x) = ln(x) \quad ,x \in (0,\infty) ln(-x)\ ,x \in (-\infty, 0)$$

Lema: *Si $F_1(x)$ y $F_2(x)$ son funciones primitivas de $f(x)$ en el mismo intervalo I, entonces $F_1(x) = F_2(x) + C$, donde $C \in \mathbb{R}$ es una constante.*

Dem.: es claro, puesto que $F_1'(x) = (F_2 + C)'(x) = F_2'(x) = f(x)$ para $x \in I$.

Ejemplo: $F_1(x) = -arccos(x), F_2(x) = -arcsen(x), I = (-1,1)$. Entonces tenemos que $F_1'(x) = F_2'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, lo cual implica $arcsen(x) = -arccos(x) + C$. La constante C puede ser calculada facilmente del hecho que

$arcsen(0) = 0, arccos(0) = \frac{\pi}{2}$, entonces $C = \frac{\pi}{2}$. Así recibimos la igualdad interesante

$arcsen(x) = -arccos(x) + C$, para todo $x \in (-1, 1)$.

Dibujo y recordatorio sobre estas funciones trigonométricas: vea clase.

Def.: El *integral indeterminado* $\int f(x)dx$ *de la función* $f(x)$ *en el intervalo* I se define como el conjunto de todas las funciones primitivas de $f(x)$ sobre I. Si $F(x)$ es alguna de estas funciones primitivas, entonces

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad C \in I\!R.$$

Ejemplos: Los ejemplos de arriba quedan entonces como sigue:

- $\int cos(x)dx = sen(x) + C, C \in I\!R$, en cualquier $I \subseteq I\!R$;
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = arcsen(x) + C, C \in I\!R$, para $I = (-1, 1)$;
- $\int \frac{1}{x}dx = ln(\mid x \mid + C, C \in I\!R$, para todo $I \subseteq I\!R \setminus \{0\}$;

Ideas principales para realizar el **cálculo integral**:

1. Usar "pocos" integrales básicos (de funciones elementales, estas son contenidos en **tablas de integrales** !), y aplicar **reglas de integración**.

2. Seguidamente no es posible expresar $\int f(x)dx$ por medio de funciones elementales (eso ya pasa por ejemplo con $\int exp(-x^2)dx$, $\int \frac{sen(x)}{x}dx$, $\int \frac{cos(x)}{x}dx$, $\int \frac{1}{ln(x)}dx$), entonces:

— consultar tablas extendidas de integrales;
— desarrollos de las funciones en series, vea literatura;
— métodos de aproximación (métodos numéricos), vea literatura.

Ejemplos de integrales básicos:

$\int 0dx = C, \quad , \int 1dx = x + C,$
$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad a \neq 1, x > 0,$
$\int sen(x)dx = -cos(x) + C, \qquad \int cos(x)dx = sen(x) + C,$
$\int \frac{1}{sen^2(x)} dx = -cot(x) + C, \qquad \int \frac{1}{cos^2(x)} dx = tan(x) + C$

7.4. Propiedades de la función primitiva (Reglas de integración)

Sea C un número real arbitrario.

1. Linealidad del integral:

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx, \quad \int kf(x)dx = k \int f(x)dx \ (k \in I\!R)$$

2. Si $F(x)$ es función primitiva de $f(u)$ en el intervalo I, además $a, b \in I\!R$ con $a \neq 0$, entonces

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C \text{ siempre cuando } x \in I \text{ tal que } u = ax+b \in I.$$

Dem.: Verificando por la derivada: $(\frac{1}{a}F(ax+b) + C)' = \frac{1}{a} \cdot a \cdot f(x) + (F(b))' = f(x) + 0.$

Ejemplo: $\int \frac{1}{2x+3} dx = \frac{1}{2} ln(\mid 2x + 3 \mid) + C$, para $x \neq -\frac{3}{2}$.

3. Si $f(x)$ es diferenciable en $[a, b]$ y $f(x) \neq 0$, entonces

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = ln(\mid f(x) \mid) + C.$$

Dem.: Verificando por la derivada:
$(ln(f(x)) + C)' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x),$
$(ln(-f(x)) + C)' = -\frac{1}{f(x)} \cdot (-1)f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$

Ejemplo: $\int \frac{sen(x)cos(x)}{1+sen^2(x)} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2sen(x)cos(x)}{1+sen^2(x)} dx = \frac{1}{2} ln(1 + sen^2(x)) + C.$

4. Integración parcial: Si $u(x), v(x)$ tienen derivadas continuas en el intervalo I, entonces

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx.$$

Dem.: eso es una consecuencia de la regla del producto para derivadas:

$[u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) - u'(x)v(x) = u(x)v'(x).$

Ejemplos:

$\int x \cdot \overbrace{sen(x)}^{v'(x)} dx = x(\overbrace{-cos(x)}^{v(x)}) - \int 1 \cdot (-cos(x))dx = -x \cdot cos(x) + sen(x) + C;$

$\int ln(x) = \int \underbrace{ln(x)}_{u(x)} \cdot \underbrace{1}_{v'(x)} dx = \underbrace{x}_{v(x)} \cdot \underbrace{ln(x)}_{u(x)} - \int \underbrace{\frac{1}{x}}_{u'(x)} \cdot x dx = x ln(x) - \underbrace{x}_{\int 1dx} + C, x > 0.$

5. Integración por substitución: Si $f(z)$ es continua en $[\alpha, \beta]$, y la función $z = g(x)$ tiene en $[a, b]$ una derivada continua, y además $\alpha \leq g(x) \leq \beta$ (es decir, g es acotada), entonces

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(z)dz = F(z) \ ,$$

donde despues de la integración, se tiene que poner $z = g(x)$!

Dem.: es una consecuencia de la regla de cadena para derivadas: $z = g(x)$, $(F(z))' = \frac{dF(z)}{dx} = \frac{dF(g(x))}{dx} = f(g(x)) \cdot g'(x)$.

Ejemplo: $\int sen^3(x)cos(x) = \int z^3 dz = \frac{1}{4}z^4 + C = \frac{1}{4}sen^4(x) + C$.
(Aquí tenemos $g(x) = sen(x), f(x) = x^3, z = sen(x)$.)

En general, esta formula se aplica "de la derecha a la izquierda": Para calcular $\int f(z)dz$, se introduce la función $z = g(x)$ y se calcula $\int f(g(x))g'(x)dx$; después se resubstituye x por z por medio de $x = g^{-1}(z)$ (esta función inversa existe si en $[a, b]$ vale que $g'(x) \neq 0$).

Ejemplo: Calculamos $\int \frac{1}{(\sqrt{1+z^2})^3}dz$:

Substituimos $z = tan(x)$ para $x \in (-\pi/2, \pi/2)$; es decir, $z = g(x) = tan(x), g'(x) = 1 + tan^2(x) \neq 0$, $x = g^{-1}(z) = arctan(z)$, entonces

$$\int \frac{1}{(\sqrt{1+z^2})^3}dz \ = \ \int \overbrace{\frac{1}{(\sqrt{1+tan^2(x)})^3}}^{f(g(x))} \ \overbrace{(1+tan^2(x))}^{g'(x)} \ dx$$

$= \int \frac{dx}{\sqrt{1+tan^2(x)}}$ (puesto que $a^{-\frac{3}{2}} \cdot a^1 = a^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$)

$= \int cos(x)dx$ (hemos usado de ayuda una tabla de integrales básicos)

$= sen(x) + C$.

Ahora resubstituimos, es decir, expresamos $sen(x)$ en términos de $tan(x)$. Sabemos que $sen^2(x) = \frac{tan^2(x)}{1+tan^2(x)}$, así que $sen(x) = \frac{tan(x)}{\sqrt{1+tan^2(x)}}$. Con eso obtenemos como resultado

$$\int \frac{1}{(\sqrt{1+z^2})^3} dz \quad = \quad \frac{tan(x)}{\sqrt{1+tan^2(x)}} + C \quad \overbrace{=}^{z=tan(x)} \quad \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} + C$$

7.5. El teorema fundamental del cálculo diferencial e integral

Este teorema es uno de los más importantes del cálculo: relaciona los integrales de Riemann con las funciones primitivas, proporciona una herramienta clave para calcular integrales. Para poder deducir (demostrar) este teorema, se necesitan las siguientes dos propiedades (proposición y teorema) de funciones continuas

Proposición: ("La imagen continua de un intervalo cerrado es un intervalo cerrado.")) *Si* $f : I\!R \longrightarrow I\!R$ *es continua sobre el intervalo* $[a, b]$ *entonces* $f([a, b])$ *es un intervalo* $[c, d]$*, para* $c, d \in I\!R$ *apropiados.*

(Vea también en el material del Dr. Villa, sección 3.3 !)
Esta proposición significa (!!) lo siguiente:

• f es acotada sobre $[a, b]$;

• existe $x_{min} \in [a, b]$ tal que $c = f(x_{min}) = \min\{f(x) : x \in [a, b]\}$, y existe $x_{max} \in [a, b]$ tal que $d = f(x_{max}) = \max\{f(x) : x \in [a, b]\}$.

• Para todo $\lambda \in [c, d]$, existe $x \in [a, b]$ tal que $f(x) = \lambda$.
Dibujo: vea clase.

Nota: Lo mismo puede ser falso para una función continua sobre un intervalo I no cerrado, es decir, en este caso puede por ejemplo pasar que $f(I)$ sea no acotado.

Ejemplo: La función $f : I\!R \longrightarrow I\!R$ dada por

$$f(x) = \frac{x}{1 - x^2}$$

es continua sobre el intervalo abierto $I = (-1, 1)$. En los puntos -1 y 1, f tiene discontinuidades, que son puntos de infinidad, más concretamente:

Para $c = -1$: $\lim\limits_{x \to c-} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to c+} f(x) = -\infty$,

y para $c = 1$: $\lim\limits_{x \to c-} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to c+} f(x) = -\infty$.

En particular, para $c = 1$, $\lim\limits_{x \to c-} f(x) = \infty$ significa que para todo $\alpha \in I\!R$ existe $x \in (0, 1) \subset (-1, 1)$ tal que $f(x) > \alpha$. Pero eso significa que el conjunto $\{f(x) : x \in (-1, 1)\}$ no tiene cota superior. Analógamente se puede ver que este mismo conjunto no tiene cota inferior. En consecuencia, $f(x)$ NO es acotada sobre $I = (-1, 1)$.
Dos dibujos (del ejemplo y del teorema siguiente): vea clase.

Teorema del valor medio para integrales: *Sea $f \in F_{I\!R}([a, b])$ una función continua sobre $[a, b]$. Entonces existe $c \in [a, b]$ tal que*

$$\int_a^b f(x)dx = (b - a) \cdot f(c)$$

(el "area bajo la curva" es igual a $(b - a) \cdot f(c)$).

Demostración: Aplicando la proposicón anterior: existen $x_{min}, x_{max} \in [a, b]$ tales que $s = f(x_{min}) \leq f(x) \leq f(x_{max}) = t$, para todo $x \in [a, b]$, $s, t \in I\!R$.

Entonces,

$$\int_a^b f(x_{min})dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b f(x_{max})dx \ .$$

Pero $f(x_{min})$ y $f(x_{max})$ son constantes (números reales no dependientes de x) dentro de estos integrales, implicando

$f(x_{min})(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq f(x_{max})(b-a)$, por lo cual,

$$s = f(x_{min}) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq f(x_{max}) = t.$$

Ahora, f es continua, por lo tanto integrable, es decir, $\int_a^b f(x)dx$ es un número real. Entonces, aplicando la proposición anterior de nuevo, obtenemos que $f([a,b]) = [s,t]$.

Si $x_{min} < x_{max}$ entonces existe $c \in [x_{min}, x_{max}]$ tal que $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

Analogamente, en el caso que $x_{min} > x_{max}$, existe $c \in [x_{max}, x_{min}]$ tal que $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

En resumen, siempre existe $c \in [a,b]$ tal que

$$f(c)\cdot(b-a) = \int_a^b f(x)dx.$$

$\square$

Teorema fundamental del cálculo diferencial e integral: *Sea $f \in F_{\mathbb{R}}([a,b])$ una funcion continua sobre $[a,b]$ (entonces, f es integrable sobre $[a,b]$!), y sea $F(x)$ una función definida por*

$$F(x) = \int_a^x f(\theta)d\theta, \text{ para } x \in [a,b].$$

Entonces $F(x)$ es diferenciable sobre $[a,b]$, y $F'(x) = f(x)$.

Para la demostración de este teorema, recordamos los límites de funciones unilaterales, y extendemos las definiciones de la derivada a derivadas unilaterales:

Def: (Derivadas unilaterales) Sea $f : D_f = A \longrightarrow \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}$, y x_0 un punto interior de A, es decir, x_0 pertenece a un intervalo abierto $(a,b) \subseteq A$.
f se llama en x_0 diferenciable por la derecha si existe

$$f'_+(x_0) = \lim_{x\to x_0+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Entonces $f'_+(x_0)$ se llama la derivada derecha de f en x_0. Analogamente, f se llama en x_0 diferenciable por la izquierda si existe

$$f'_-(x_0) = \lim_{x\to x_0-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Entonces $f'_-(x_0)$ se llama la derivada izquierda de f en x_0.

Ejemplo: La función $f(x) = |x|$ no es diferenciable en el punto $x = 0$; sin embargo, $f'_+(0) = 1$, y $f'_-(0) = -1$ (ejercicio).

Lema: *Si existe $f'(x_0)$, entonces existen $f'_+(x_0)$ y $f'_-(x_0)$ y ambos coinciden: $f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$.*
Si existen $f'_+(x_0)$ y $f'_-(x_0)$ y además ambos son iguales, entonces existe también $f'(x_0)$, y $f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$.

Demostración del teorema fundamental del cálculo diferencial e integral:

Dibujo: vea clase.

$F(x) = \int_a^x f(\theta)d\theta$ es el "área bajo la curva" de $f(x)$ en $[a, x]$.

Sea $x_0 \in [a, b]$ arbitrariamente fijado. Tenemos

$$F'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\int_a^x f(\theta)d\theta - \int_a^{x_0} f(\theta)d\theta}{x - x_0}$$

Considerando la derivada por la derecha (entonces $x - x_0 > 0$),

$$F'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0+} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0+} \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(\theta)d\theta$$

Por el teorema del valor medio,

$$\int_{x_0}^x f(\theta)d\theta = f(\alpha_0) \cdot (x - x_0) \text{ para algún } \alpha_0 \in [x_0, x].$$

En consecuencia,

$$F'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0+} \frac{x - x_0}{x - x_0} \cdot f(\alpha_0) = f(\alpha_0)$$

Analógamente se obtiene

$$F'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0-} \frac{1}{x - x_0} \int_x^{x_0} f(\theta)d\theta = \lim_{x \to x_0-} \frac{x - x_0}{x - x_0} \cdot f(\alpha'_0) = f(\alpha'_0)$$

para algún $\alpha_0' \in [x, x_0]$.

Así que, $x_0 \leq \alpha_0 \leq x \leq \alpha_0' \leq x_0$ implica cuando x tiende a x_0 que $\alpha_0 = \alpha_0' = x_0$. En consecuencia,

$F'(x_0) = f(x_0)$, lo cual significa que $F'(x_0) = f(x_0)$, para todo $x \in [a, b]$.

$\square$

Corolario: *Si $F(x)$ es función primitiva de una función f la cual es continua sobre $[a, b]$, entonces*

$$\int_a^b f(x)dx \;=\; F(b) - F(a)$$

Una notación común para $F(b) - F(a)$ es $[F(x)]_a^b$.

Demostración del corolario: Sea $F(x)$ la función primitiva de $f(x)$, es decir, $F'(x) = f(x)$. Sea

$$G(x) = \int_a^x f(\theta)d\theta,$$

para $x \in [a, b]$. Por el teorema anterior tenemos que $G'(x) = f(x)$, para $x \in [a, b]$. Asi que, $G(x)$ es tambien una función primitiva de $f(x)$ sobre $[a, b]$. Por eso, existe $c \in I\!R$ tal que $G(x) = F(x) + c$, para todo $x \in [a, b]$. Entonces,

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) = F(b) + c.$$

Claro que

$$G(a) = \int_a^a f(\theta)d\theta = 0 = F(a) + c,$$

lo cual implica que $c = -F(a)$. En consecuencia

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

$\square$

Ejemplos de aplicación:

- $\int_0^1 (x^4 - 3x^3 + 4x + 5)dx = \int_0^1 x^4 - 3\int_0^1 x^3dx + 4\int_0^1 xdx + 5\int_0^1 1dx$

  $= [\frac{1}{5}x^5]_0^1 - 3[\frac{1}{4}x^4]_0^1 + 4[\frac{1}{2}x^2]_0^1 + 5[x]_0^1$

  $= (\frac{1}{5} - 0) - \frac{3}{4}(1 - 0) + 2(1 - 0) + 5(1 - 0) = \frac{1}{5} - \frac{3}{4} + 2 + 5 = \frac{129}{20}$.

- Para $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq -1$ y $a < b$,

$$\int_a^b x^n \; dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_a^b = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1} \; ,$$

puesto que vale entonces $(x^{n+1})' = (n+1) \cdot x^n$, es decir, $\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = x^n$.

- Determinamos la derivada $f'(x)$ de la función

$$f(x) = \int_0^{x^4} \frac{1}{2 - cos^3(t)} \; dt \; .$$

Considerando las funciones

$$g(x) = \int_0^{x} \frac{1}{2 - cos^3(t)} \; dt \quad \text{y} \quad h(x) = x^4 \; ,$$

es claro que $f(x) = g \circ h(x)$, lo cual implica que $f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$. Por el teorema fundamental tenemos que $g'(x) = \frac{1}{2 - cos^3(x)} \quad \forall \; x > 0$, implicando

$$f'(x) = \frac{1}{2 - cos^3(x^4)} \cdot 4x^3 = \frac{4x^3}{2 - cos^3(x^4)} \quad \forall \; x > 0 \; .$$

- Determinamos la derivada $f'(x)$ de la función

$$f(x) = \left[\int_0^{\left(\int_3^x (u^4 - u^3 - 3u + 4) du\right)} sen^3 \left(\frac{1}{1+t^2} \right) dt \right]^4 \; .$$

Sean $F(x) = \displaystyle\int_0^x sen^3 \left(\frac{1}{1+t^2} \right) dt$, $H(x) = \displaystyle\int_3^x (u^4 - u^3 - 3u + 4) du$, $G(x) = x^4$

Entonces $f(x) = (G \circ F \circ H)(x) = G(F(H(x)))$, lo cual implica que $f'(x) = G'(F(H(x))) \cdot (F \circ H)'(x) = G'(F(H(x))) \cdot F'(H(x)) \cdot H'(x)$. En consecuencia

$$f'(x) \quad = \quad 4 \cdot \left[\int_0^{\left(\int_3^x (u^4 - u^3 - 3u + 4) du\right)} sen^3 \left(\frac{1}{1+t^2} \right) dt \right]^3 \cdot$$

$$\cdot \; sen^3 \left(\frac{1}{1 + (\int_3^x (u^4 - u^3 - 3u + 4) du)^2} \right) \cdot (x^4 - x^3 - 3x + 4)$$

****