Tarea 5 - Sistemas con retardos en la entrada

Roberto Cadena Vega

4 de febrero de 2015

Tarea 5 - Integrales con criterios cuadraticos

Integral $\int_{-h}^{0} x^T(t+\theta)e^{2\beta\theta}x(t+\theta)d\theta$

Dada la integral

$$I_1 = \int_{-h}^{0} x^T(t+\theta)e^{2\beta\theta}x(t+\theta)d\theta \tag{1}$$

obtener un cambio de variable para simplificar la obtención de la derivada y el calculo de la cota superior de esta integral.

Primero realizamos el cambio de variable $s = t + \theta$, el cual nos implica $ds = d\theta$ y notamos que s variará desde $t - h$ hasta t, por lo que nuestra integral puede ser escrita de la siguiente manera:

$$I_1 = \int_{t-h}^{t} x^T(s)e^{2\beta(s-t)}x(s)ds$$

Ahora, para obtener la derivada de esta integral, utilizamos la regla de Leibnitz:

$$\frac{dI_1}{dt} = x^T(t)e^{2\beta(t-t)}x(t)\frac{dt}{dt} - x^T(t-h)e^{2\beta(t-h-t)}x(t-h)\frac{d(t-h)}{dt}$$

Si ahora eliminamos los terminos irrelevantes, tendremos que:

$$\frac{dI_1}{dt} = ||x(t)||^2 - x^T(t-h)e^{2\beta(h)}x(t-h)$$

De aqui podemos notar que si $\beta > 0$, tenemos que el termino $e^{-2\beta h}$ estara acotado por:

$$1 > e^{-2\beta h} > 0$$

por lo que en general, podemos decir que esta expresión tiene ua cota superior:

$$||x(t)||^2 - ||x^T(t-h)||^2 e^{2\beta(h)} < ||x(t)||^2 \tag{2}$$