Teoría de Control I
Práctica No. 2

Control Proporcional Derivativo (PD)

y

Control Proporcional Integral Derivativo (PID).

Plan de la práctica

- Introducción.
- Simulación numérica de un sistema de segundo orden en lazo abierto: sistema estable, sistema inestable.
- Control en lazo cerrado de un sistema de segundo orden. Algoritmos PD y PID. Simulaciones numéricas.
- Caso de estudio: Control en posición de un motor de corriente directa. Algoritmos PD y PID. Experimentos en tiempo real.

Introducción.

Modelo de un sistema de segundo orden.

Sistema de segundo orden.

Función de Transferencia

$$\frac{y(s)}{u(s)} = G(s) = \frac{b}{s^2 + a_1 s + a_2}$$

b :ganancia

$a_1; a_2$:coeficientes

y :Salida

u : Entrada

Ecuación diferencial

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_2 y = bu$$

o alternativamente

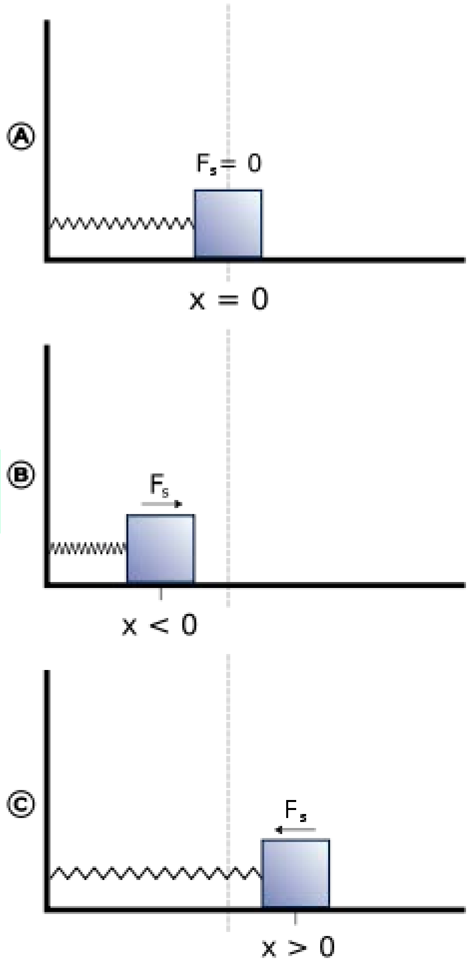
$$\ddot{y} = -a_1\dot{y} - a_2 y + bu$$

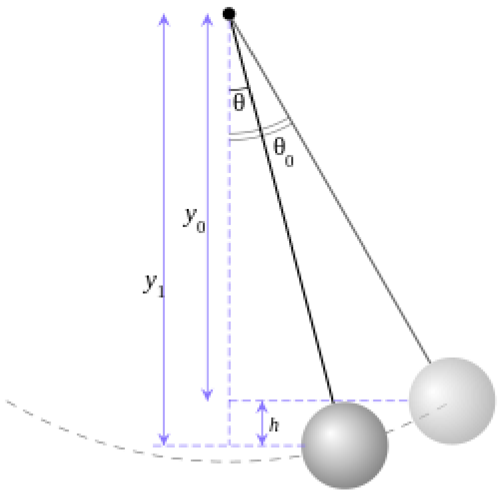
Modelo de un sistema de segundo orden.

Ejemplos de sistemas que se pueden modelar utilizando una función de transferencia de segundo orden:

Sistemas mecánicos

Sistema Masa-Resorte



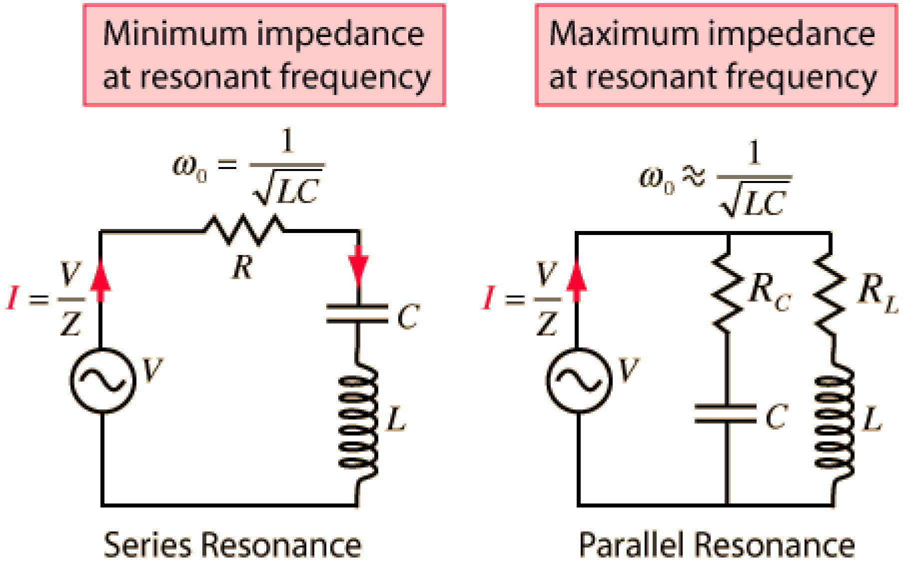


Péndulo

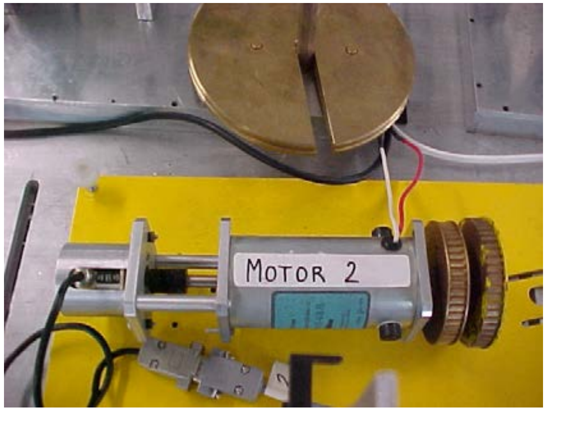
Modelo de un sistema de segundo orden.

Ejemplos:

Circuito Resistencia Inductancia Capacitancia



Motor de Corriente Directa con salida en posición



Estabilidad de un sistema de segundo orden

Ecuación característica

$$G(s) = \frac{b}{s^2 + a_1 s + a_2}$$

$$P(s) = s^2 + a_1 s + a_2 : \text{Ecuación característica}$$

Criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz

$$a_1 > 0; a_2 > 0$$

La estabilidad **NO** depende del tipo de entrada

Características de un sistema de segundo orden estable

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b}{s^2 + a_1 s + a_2}$$

$$U(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow y_\infty = \frac{b}{a_2}$$

y_∞ : Respuesta en estado estacionario a una entrada escalón unitario.

El sistema en lazo abierto PUEDE OSCILAR

Características de un sistema de segundo orden estable

$$G(s) = \frac{b}{s^2 + a_1 s + a_2}$$

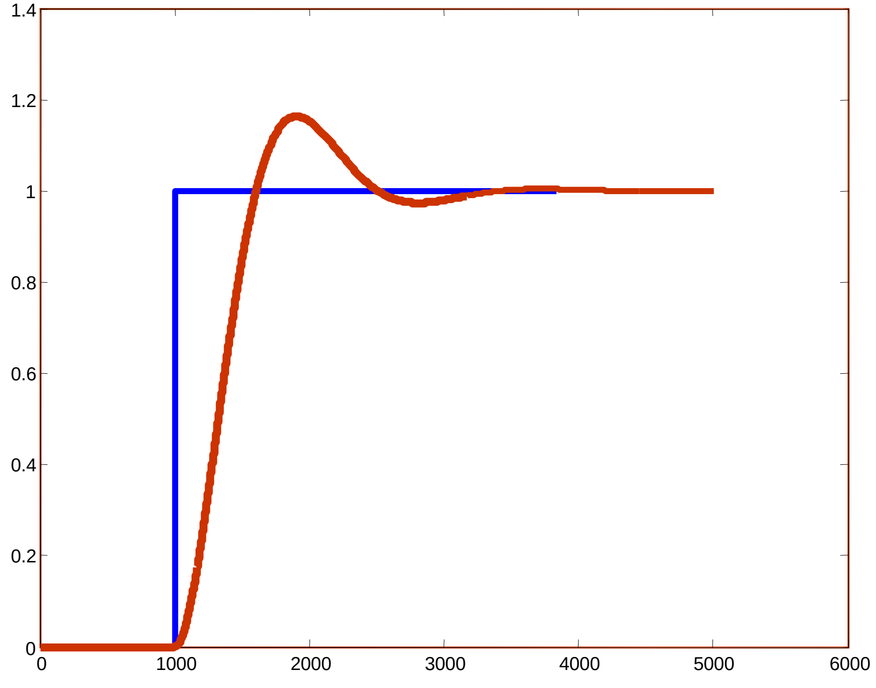
$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

ζ : Coeficiente de amortiguamiento

ω_n : Frecuencia natural no amortiguada

Respuesta subamortiguada:

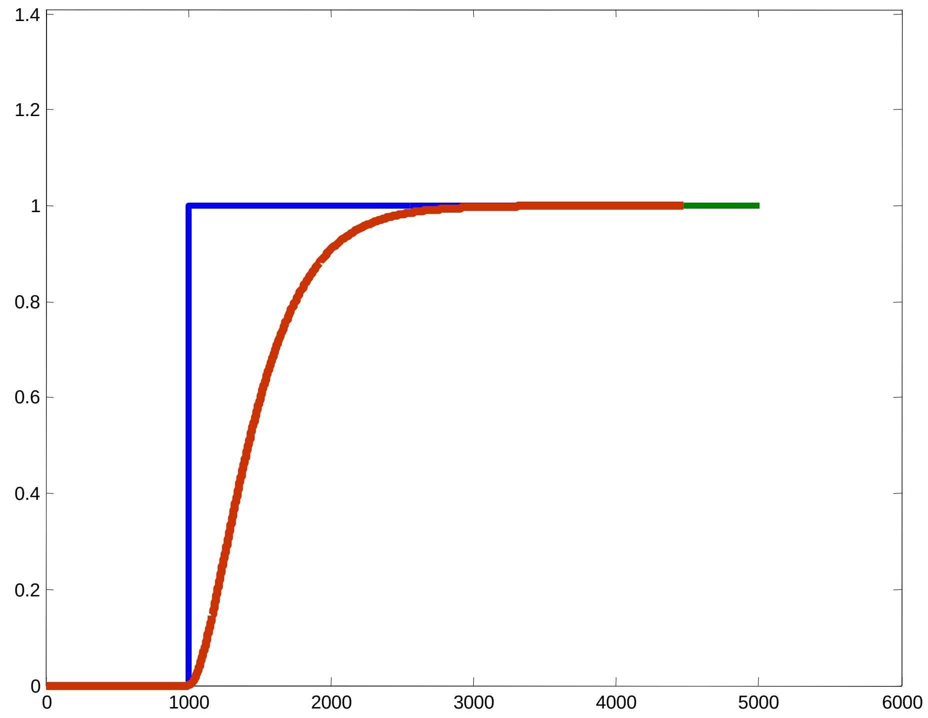
$$0 < \xi < 1$$



Respuesta subamortiguada: $0 < \xi < 1$

$$\xi = 1$$

Respuesta críticamente amortiguada:

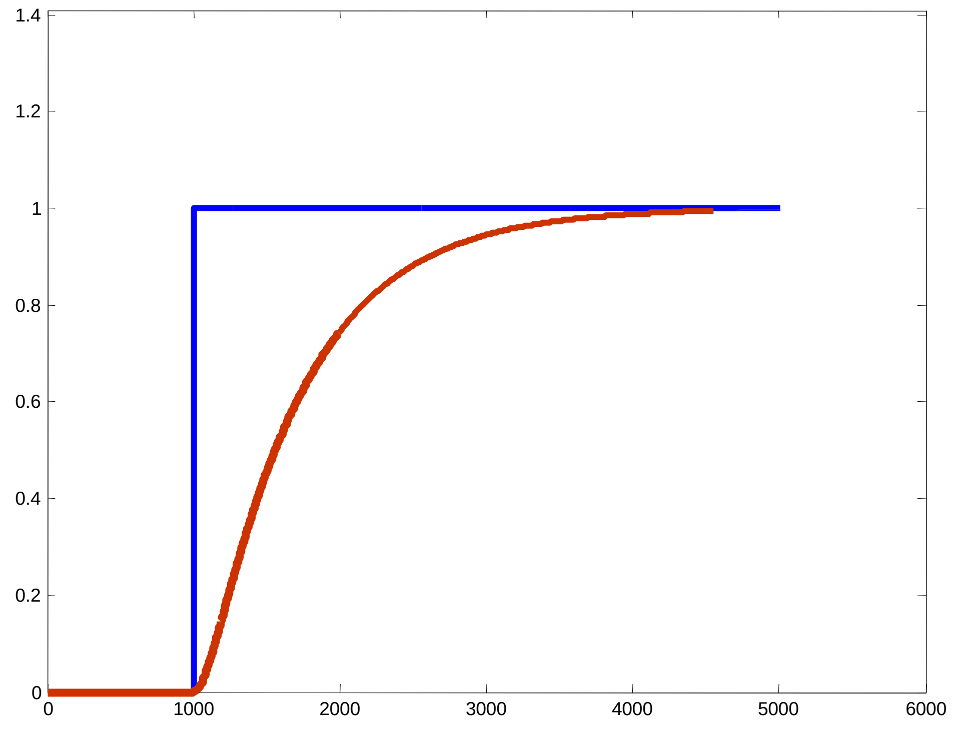


$$\xi = 1$$

Respuesta críticamente amortiguada:

Respuesta sobreamortiguada:

$$\xi > 1$$



Respuesta sobreamortiguada:

$$\xi > 1$$

Modelo general de un sistema de segundo orden.

$$\frac{y(s)}{u(s)} = G(s) = \frac{b_0 s^2 + b_1 s + b_2}{s^2 + a_1 s + a_2} = \frac{N(s)}{P(s)}$$

$N(s)$: Numerador

$P(s)$: Denominador, Polinomio Característico

Raices del numerador: Ceros del sistema

Raices del denominador: Polos del sistema

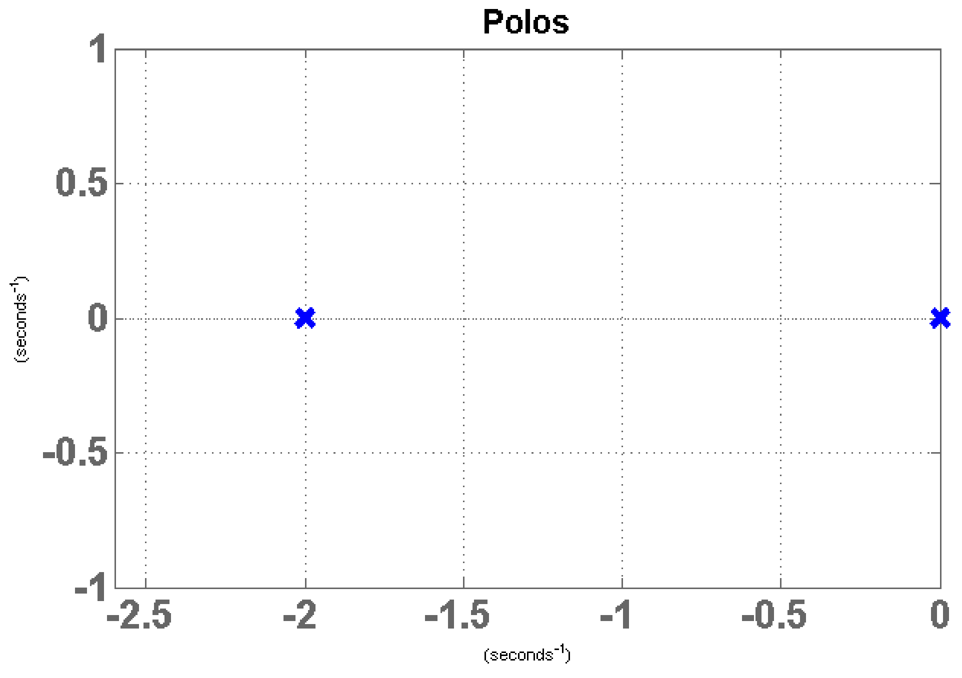
Caso particular de un sistema de segundo orden.

$$G(s)=\frac{b}{s^2+as}$$

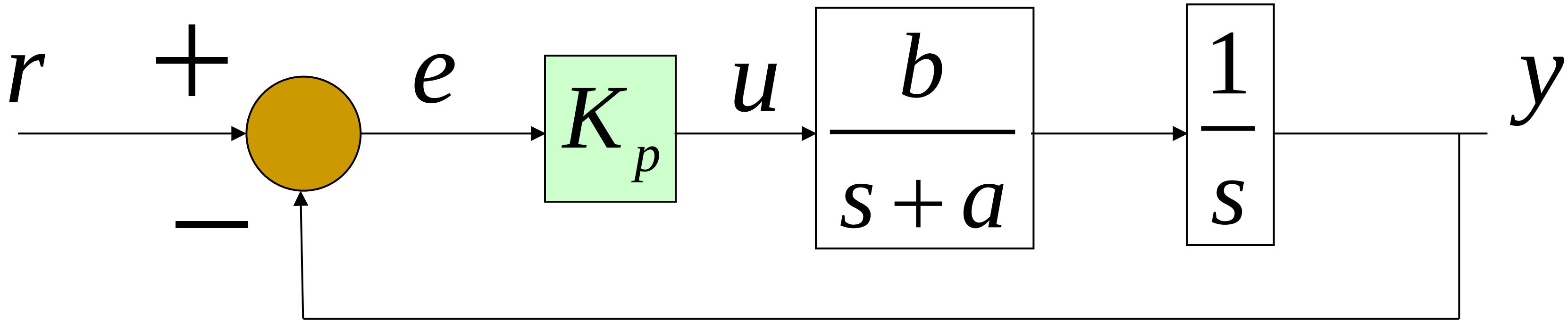
$$=\frac{b}{s(s+a)}$$

Sistema marginalmente estable

Polos: $s=0; s=-a$



Control Proporcional de un sistema de segundo orden



r : Referencia escalón

$e = r - y$: error

y : Salida

K_p : Ganancia Proporcional

$u = K_p e$: Señal de control

Control Proporcional de un sistema de segundo orden

- Función de transferencia en lazo cerrado

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = F(s) = \frac{K_p b}{s^2 + as + K_p b} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

- Amortiguamiento y frecuencia natural no amortiguada en lazo cerrado

$$\omega_n = \sqrt{K_p b} \qquad \xi = \frac{a}{2\sqrt{K_p b}}$$

Ambos términos dependen de la ganancia proporcional

18

Control Proporcional de un sistema de segundo orden

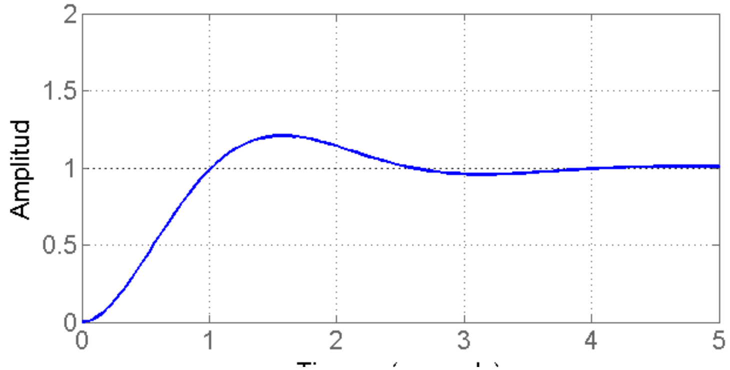
- Error y señal de control en estado estacionario:

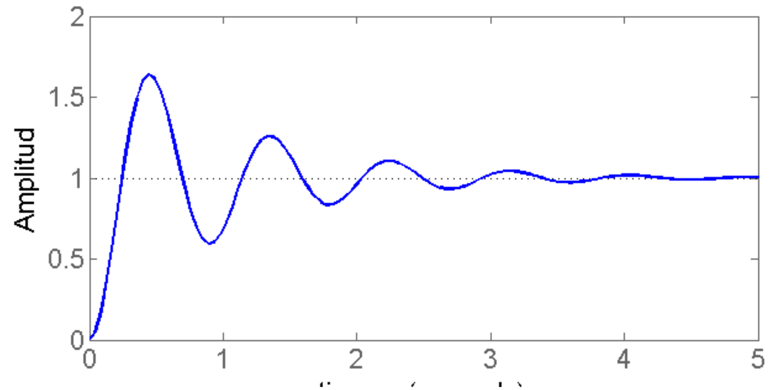
$$e_{ss} = 0 \qquad\qquad u_{ss} = 0$$

Valores elevados de la ganancia proporcional pueden producir oscilaciones

19

$$G(s) = \frac{50}{s(s+2)}$$





$$K_P = 0.1$$

$$\omega_n = \sqrt{5} = 2.2361$$

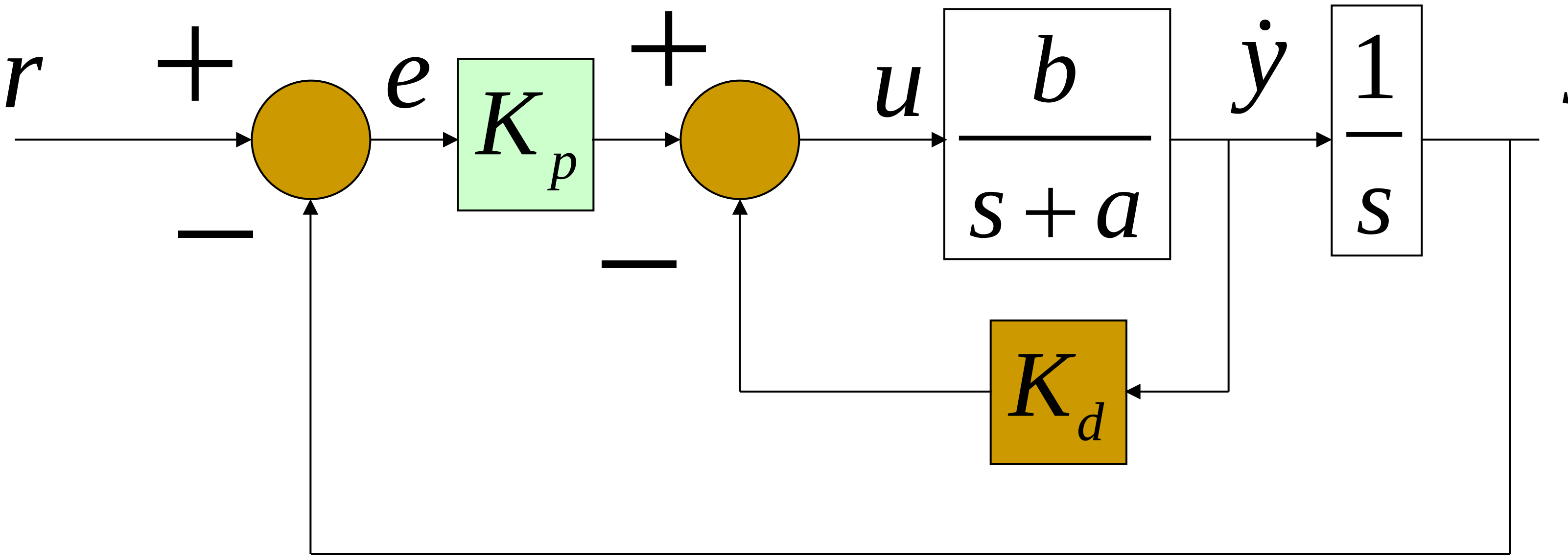
$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{5}} = 0.4472$$

$$K_P = 1$$

$$\omega_n = \sqrt{50} = 7.0711$$

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{50}} = 0.1414$$

Control Proporcional Derivativo de un sistema de segundo orden



r : Referencia escalón

$e = r - y$: error

y : Salida

K_p : Ganancia Proporcional

u : Señal de control

K_d : Ganancia Derivativa

21

Control Proporcional Derivativo de un sistema de segundo orden

Función de transferencia en lazo cerrado

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = F(s) = \frac{K_p b}{s^2 + as + K_d bs + K_p b} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

Amortiguamiento y frecuencia natural no amortiguada en lazo cerrado

$$\omega_n = \sqrt{K_p b} \qquad \xi = \frac{a + K_d b}{2\sqrt{K_p b}}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$K_p = \frac{\omega_n^2}{b}$$

$$K_d = \frac{2\xi\omega_n - a}{b}$$

22

Observaciones

- El amortiguamiento y la frecuencia natural no amortiguada dependen de dos parámetros: *Las ganancias proporcional y derivativa*.
- Entonces, es posible regular estas cantidades independientemente mediante el ajuste de las ganancias
- El sistema en lazo cerrado es estable si las ganancias proporcional y derivativa son positivas

23

Control Proporcional Derivativo de un sistema de segundo orden

- Error y señal de control en estado estacionario:

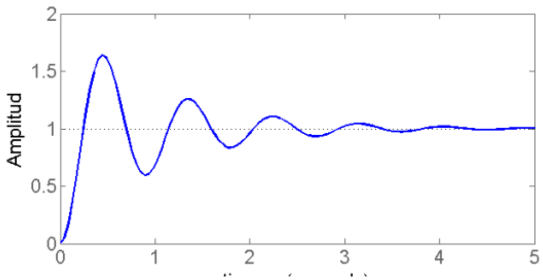
$$e_{ss} = 0 \qquad\qquad u_{ss} = 0$$

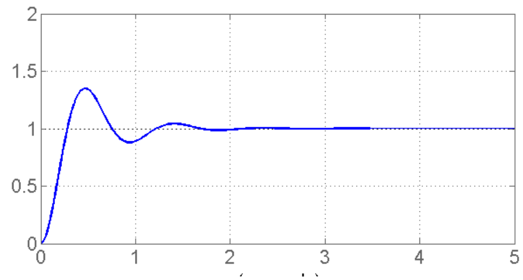
Valores elevados de la ganancia proporcional pueden producir oscilaciones

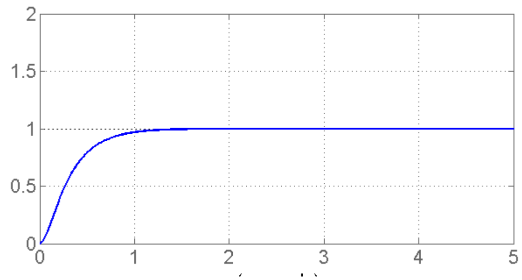
Las oscilaciones se pueden amortiguar mediante la acción derivativa, es decir, incrementando la ganancia derivativa.

24

$$G(s) = \frac{50}{s(s+2)}$$







$$K_P = 1$$
$$K_D = 0$$

$$K_P = 1$$
$$K_D = 0.05$$

$$K_P = 1$$
$$K_D = 0.3$$

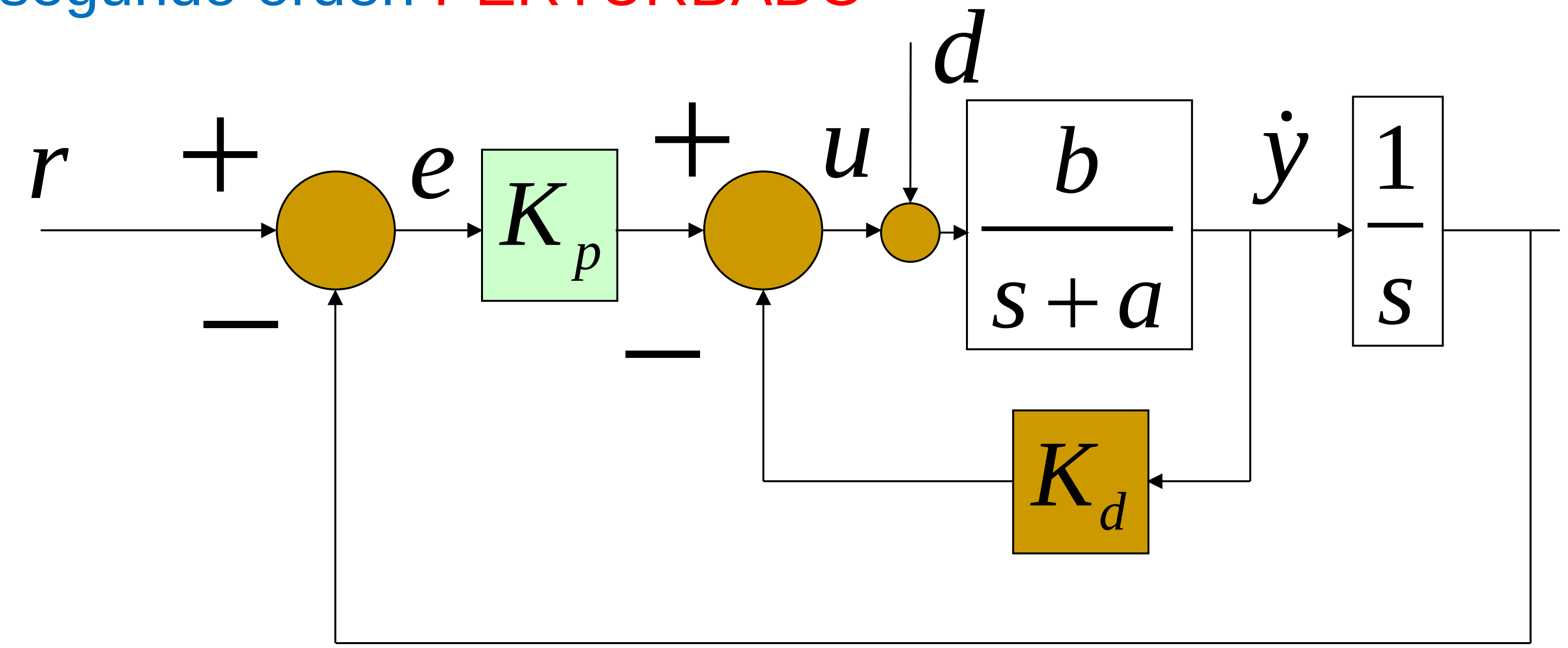
Control Proporcional Derivativo de un sistema de segundo orden

¿Qué sucede si existe una perturbación?

Respuesta: El error de posicionamiento en estado estacionario no es cero.

26

Control Proporcional Derivativo de un sistema de segundo orden PERTURBADO



r : Referencia escalón e : error d : perturbación

y : Salida K_p : Ganancia Proporcional

u : Señal de control K_d : Ganancia Derivativa

27

Control Proporcional Derivativo de un sistema de segundo orden PERTURBADO

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{K_p b}{s^2 + as + K_d bs + K_p b}$$

$$\frac{y(s)}{d(s)} = \frac{b}{s^2 + as + K_d bs + K_p b}$$

$$y(s) = \frac{b[K_p r(s) + d(s)]}{s^2 + as + K_d bs + K_p b}$$

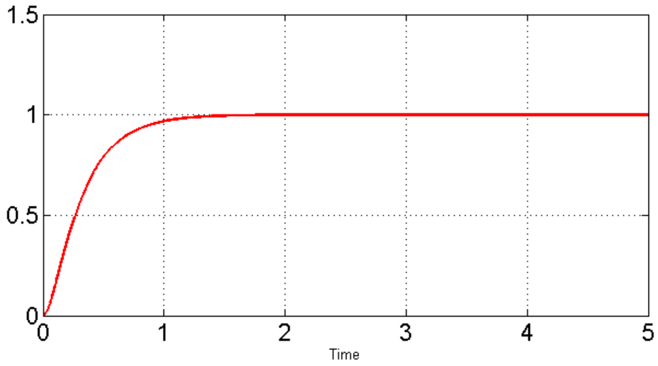
Control Proporcional Derivativo de un sistema de segundo orden PERTURBADO

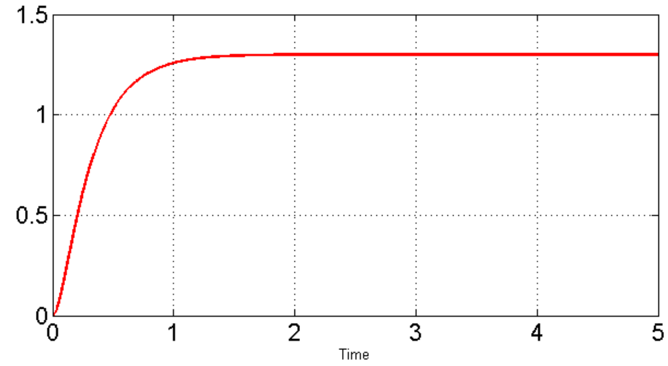
$$e_{ss} = -\frac{d}{K_p} \quad d(s) = \frac{d}{s} \quad r(s) = \frac{r}{s}$$

Error en estado estacionario cuando la entrada y la perturbación son constantes y no cero.

29

$$G(s) = \frac{50}{s(s+2)}$$





$$K_P = 1$$
$$K_D = 0.3$$
$$d = 0$$

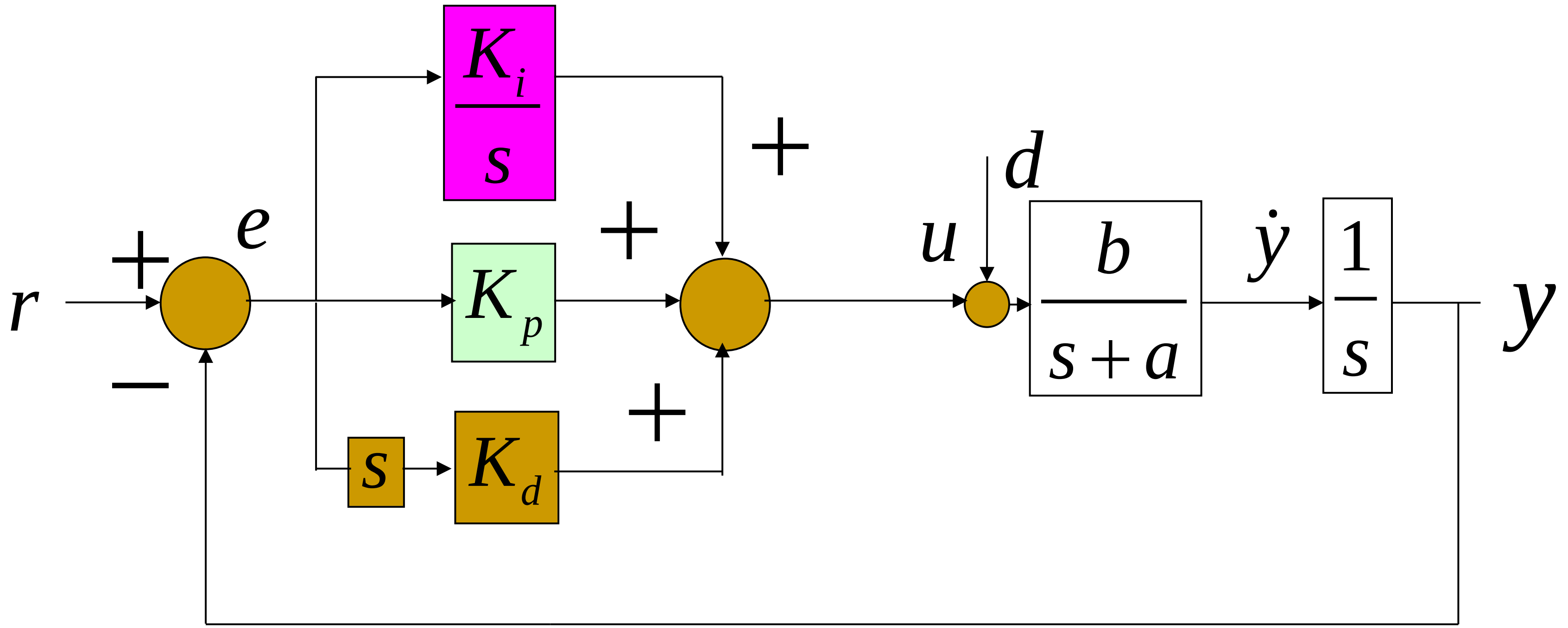
$$K_P = 1$$
$$K_D = 0.3$$
$$d = 0.3$$

¿Cómo se contrarresta el efecto de una perturbación constante?

Respuesta: Mediante la acción integral.

31

Control Proporcional Integral Derivativo de un sistema de segundo orden PERTURBADO: Topología estándar

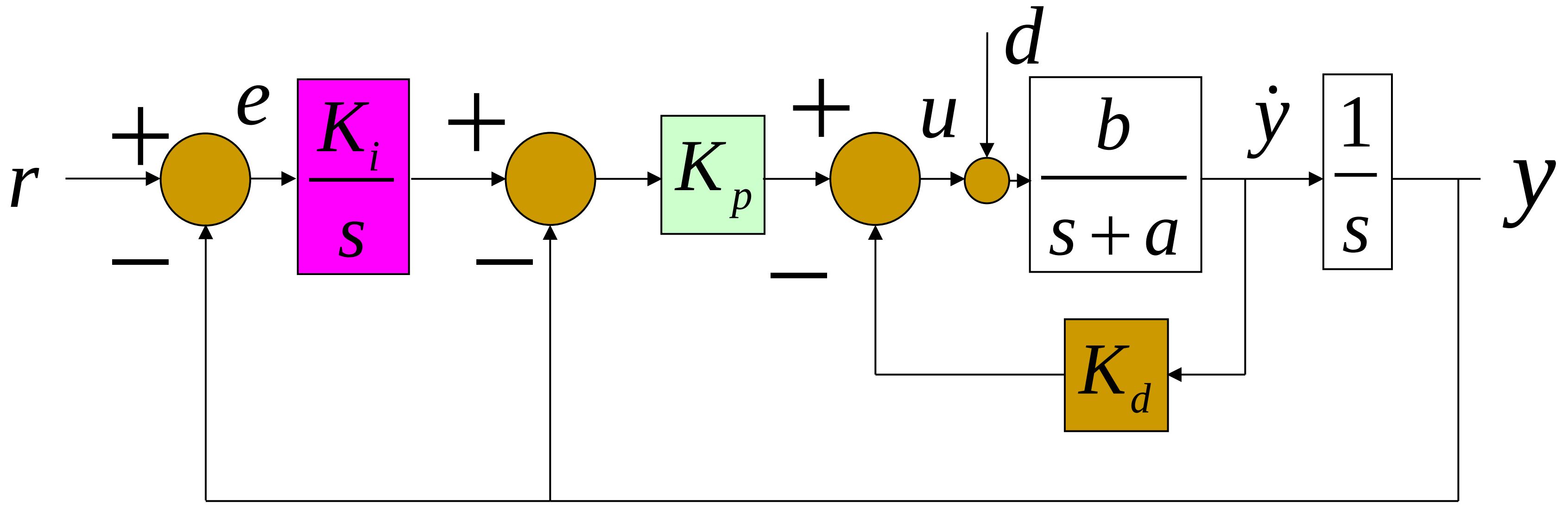


r : Referencia escalón; e : error; d : perturbación

y : Salida; u : Señal de control; K_p : Ganancia Proporcional

; K_i : Ganancia Integral; K_d : Ganancia Derivativa

Control Integral Proporcional Derivativo de un sistema de segundo orden PERTURBADO.



r :Referencia escalón; e :error; d :perturbación

y :Salida; u :Señal de control; K_p :Ganancia Proporcional

; K_i :Ganancia Integral; K_d :Ganancia Derivativa

Control Integral Proporcional Derivativo de un sistema de segundo orden PERTURBADO.

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{K_i b}{s^3 + (a + K_d b)s^2 + K_p bs + K_i b}$$

$$\frac{y(s)}{d(s)} = \frac{bs}{s^3 + (a + K_d b)s^2 + K_p bs + K_i b}$$

$$y(s) = \frac{b(K_i r(s) + sd(s))}{s^3 + (a + K_d b)s^2 + K_p bs + K_i b}$$

Control Integral Proporcional Derivativo de un sistema de segundo orden PERTURBADO.

$$e_{ss} = 0 \quad d(s) = \frac{d}{s} \quad r(s) = \frac{r}{s}$$

Error en estado estacionario cero cuando la entrada y la perturbación son constantes.

Polinomio Característico

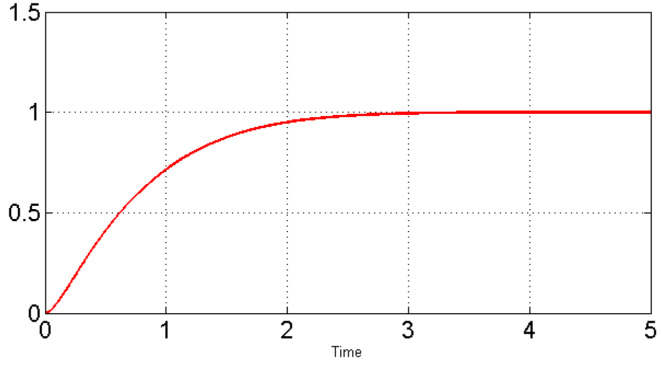
$$s^3 + (a + K_d b)s^2 + K_p bs + K_i b$$

Condiciones de estabilidad

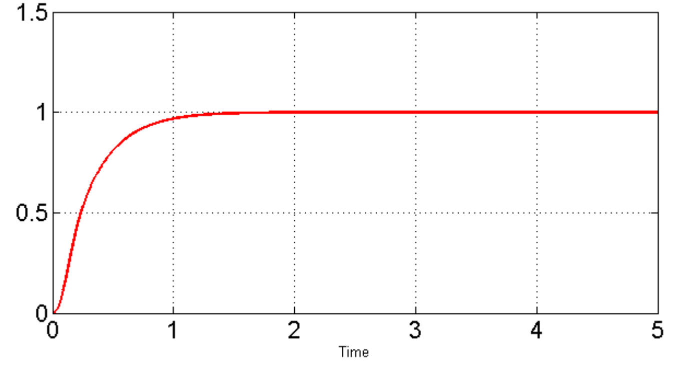
$$a + K_d b > 0; \quad K_p b > 0; \quad K_i b > 0$$

$$(a + K_d b)K_p > K_i$$

$$G(s) = \frac{50}{s(s+2)}$$



$$K_P = 1$$
$$K_D = 0.3$$
$$K_i = 0.9$$
$$d = 0.3$$

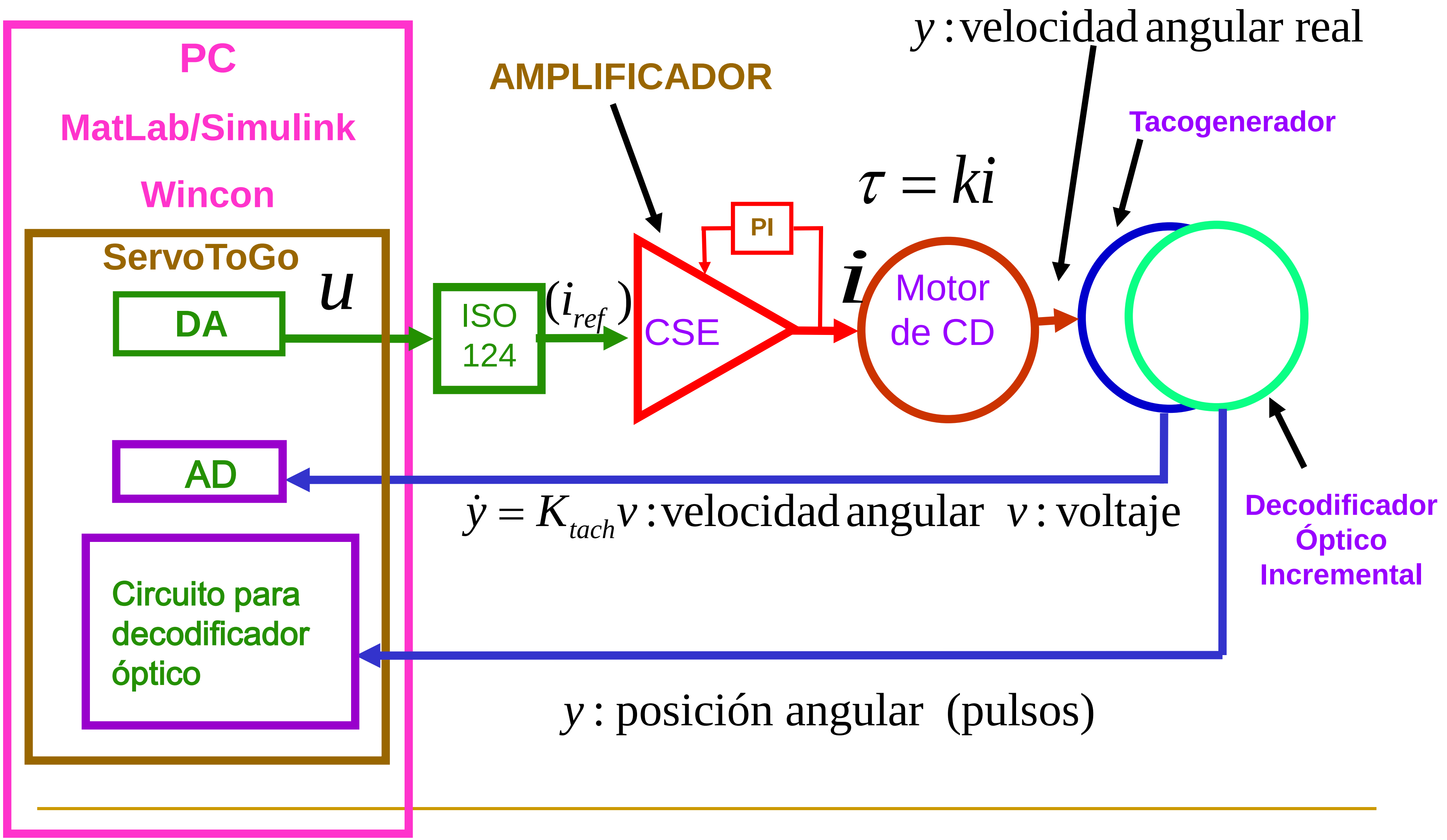


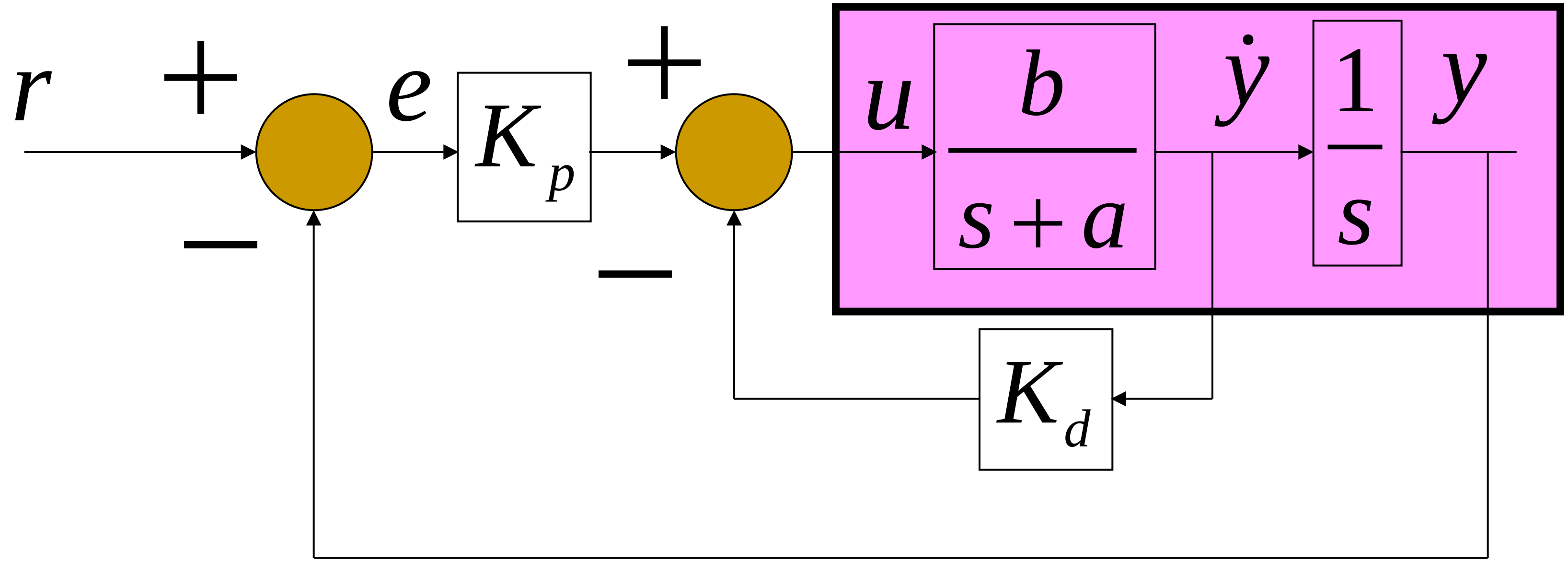
$$K_P = 10$$
$$K_D = 0.5$$
$$K_i = 3$$
$$d = 0.3$$

CASO DE ESTUDIO

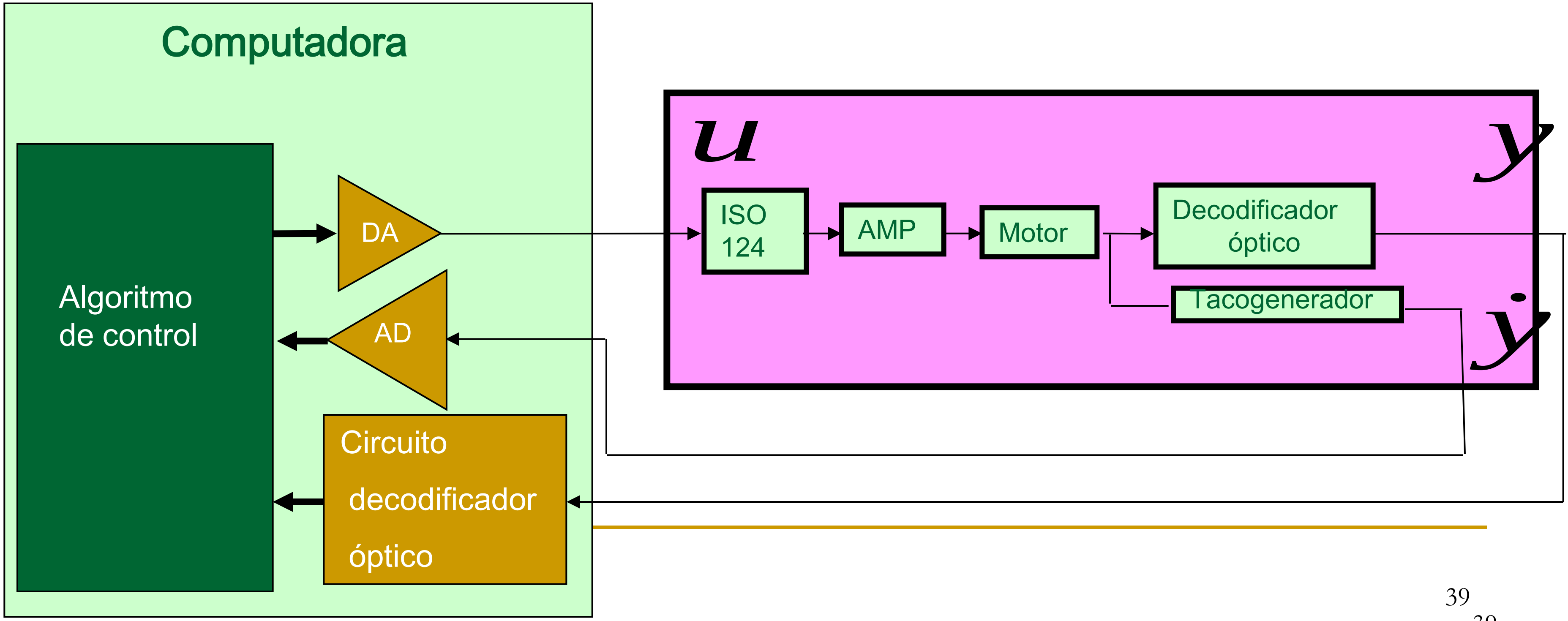
Control en posición de un motor de corriente directa.

Arquitectura de la plataforma de experimentación para el control en posición





r
+
−
e
K_p
+
−
u
$\frac{b}{s+a}$
$\dot{y}$
$\frac{1}{s}$
y
K_d



Computadora
Algoritmo de control
DA
AD
Circuito decodificador óptico
u
y
ISO 124
AMP
Motor
Decodificador óptico
Tacogenerador
$\dot{y}$

39

Simulación de un sistema de segundo orden: sistema marginalmente estable.

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{b}{s(s+a)}$$

- Sistema de segundo orden.
- Sistema marginalmente estable:
- Simulación Matlab.

$$a > 0$$

$$s = -a$$

$$s = 0$$

Simulación de un sistema de segundo orden en lazo abierto.

Condiciones para la simulación

$$\text{Parámetros}: a = 2; b = 50.$$

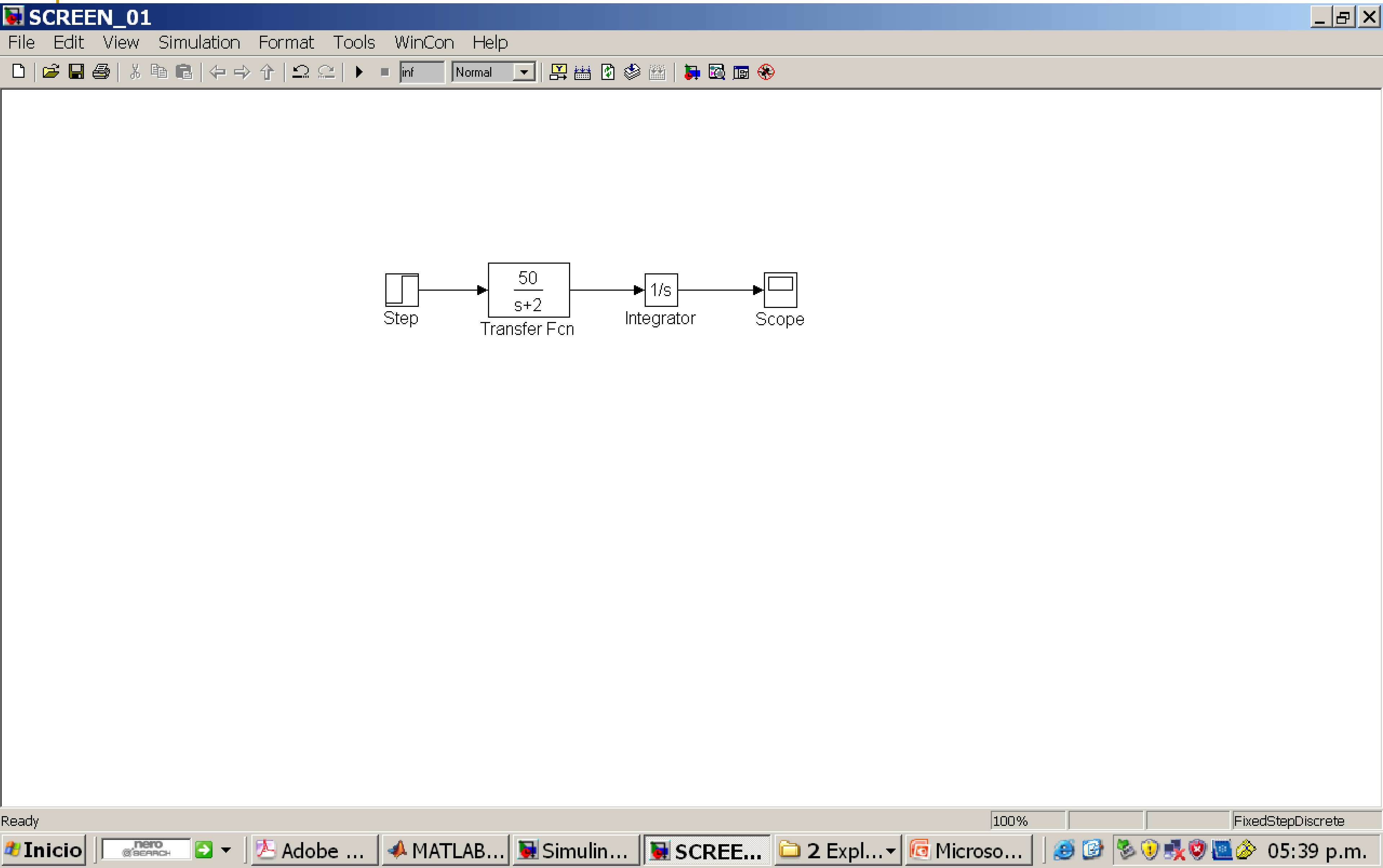
$$\text{Periodo de integración}: 0.001 s$$

$$\text{Método de integración: Runge-Kutta}$$

$$\text{Señal de entrada: Escalón unitario.}$$

$$\text{Tiempo de simulación}: 5 s$$

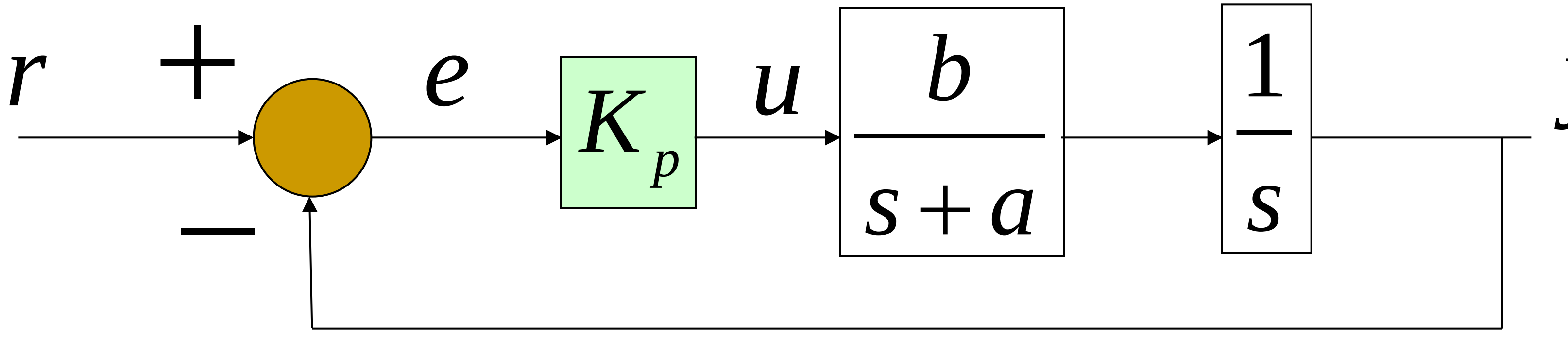
Construir el siguiente diagrama



Simulación de un sistema de segundo orden en lazo abierto.

- Comparar la salida del integrador con la salida del sistema de primer orden. Explicar las diferencias.
- Aplicar un escalón unitario negativo. Comparar nuevamente las salidas.

Control Proporcional de un sistema de segundo orden en simulación



r : Referencia constante

e : error

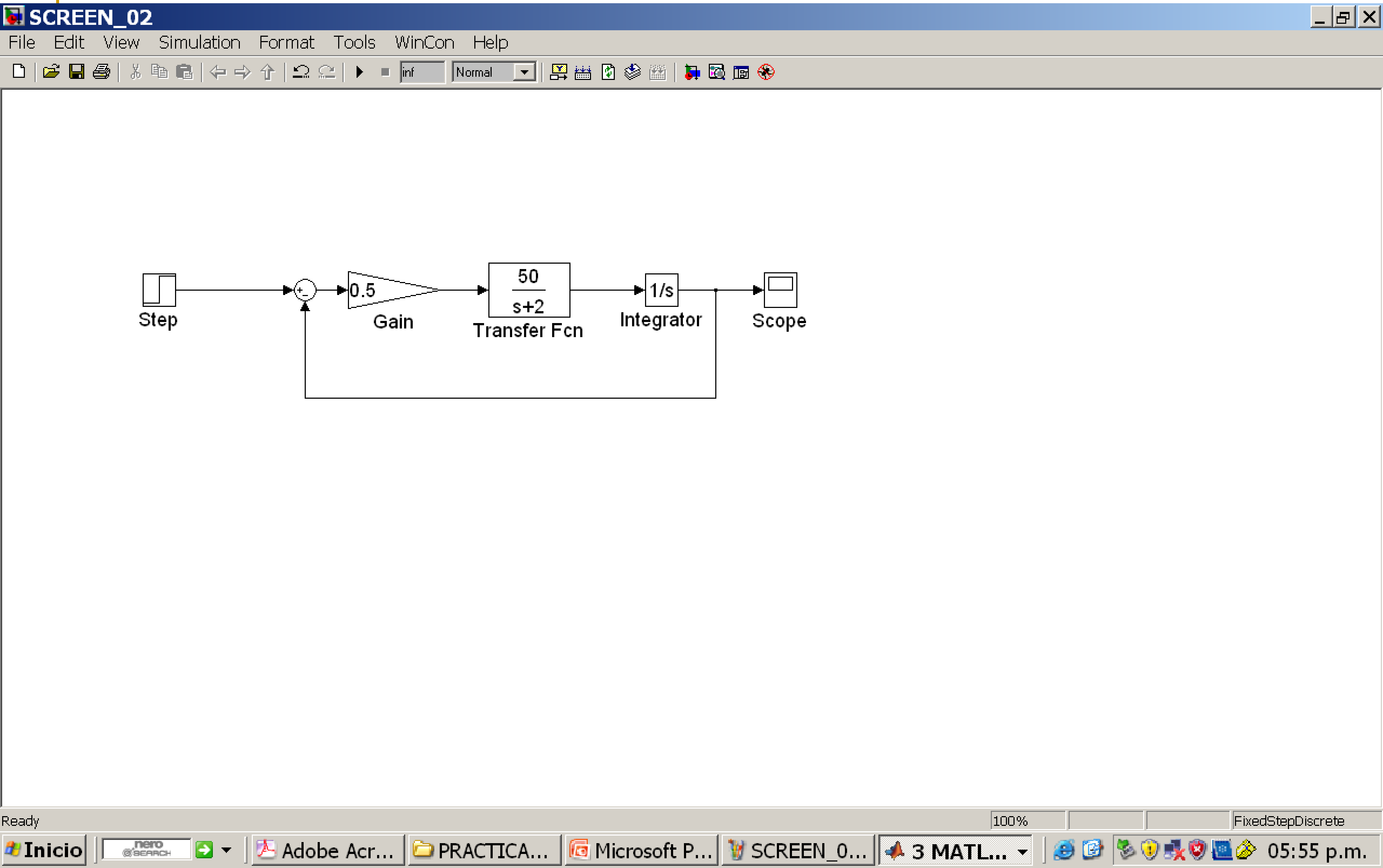
y : Salida

K_p : Ganancia Proporcional

u : Señal de control

44

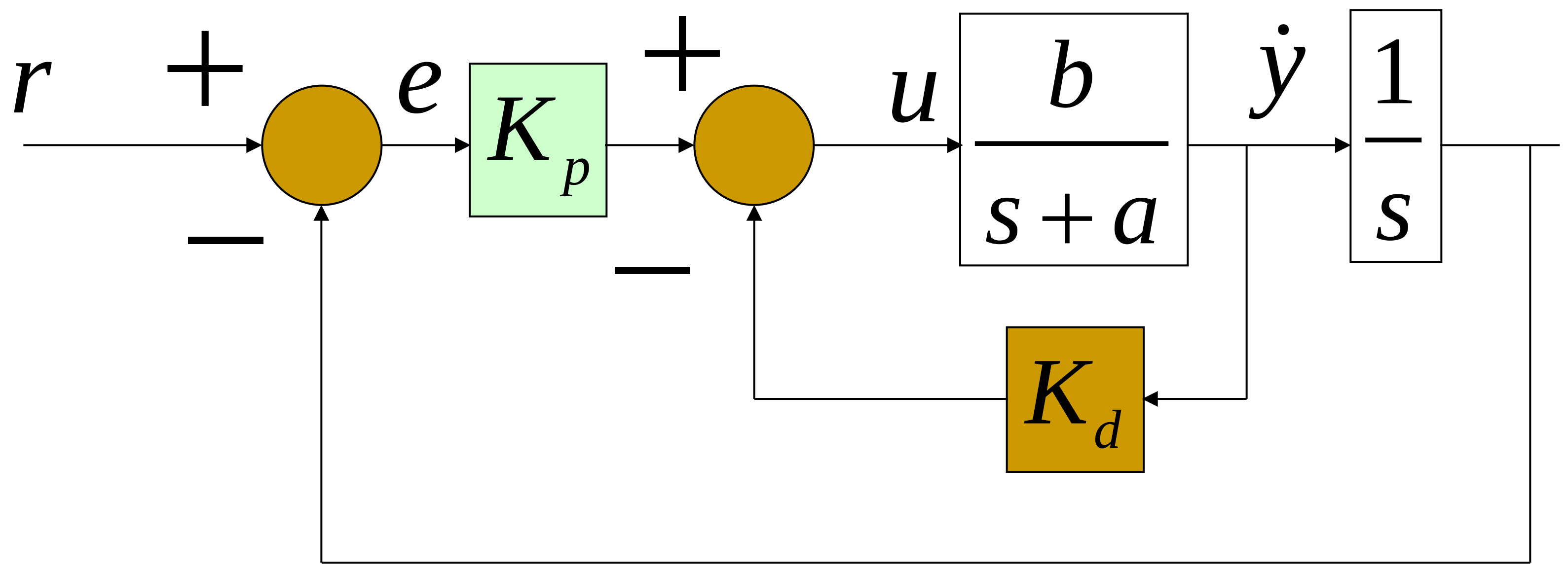
Construir el siguiente diagrama



Control Proporcional de un sistema de segundo orden en simulación

- ¿Existe error en estado estacionario?
- ¿El sistema en lazo cerrado oscila? Explicar este comportamiento

Control Proporcional Derivativo de un sistema de segundo orden



r : Referencia constante

e : error

y : Salida

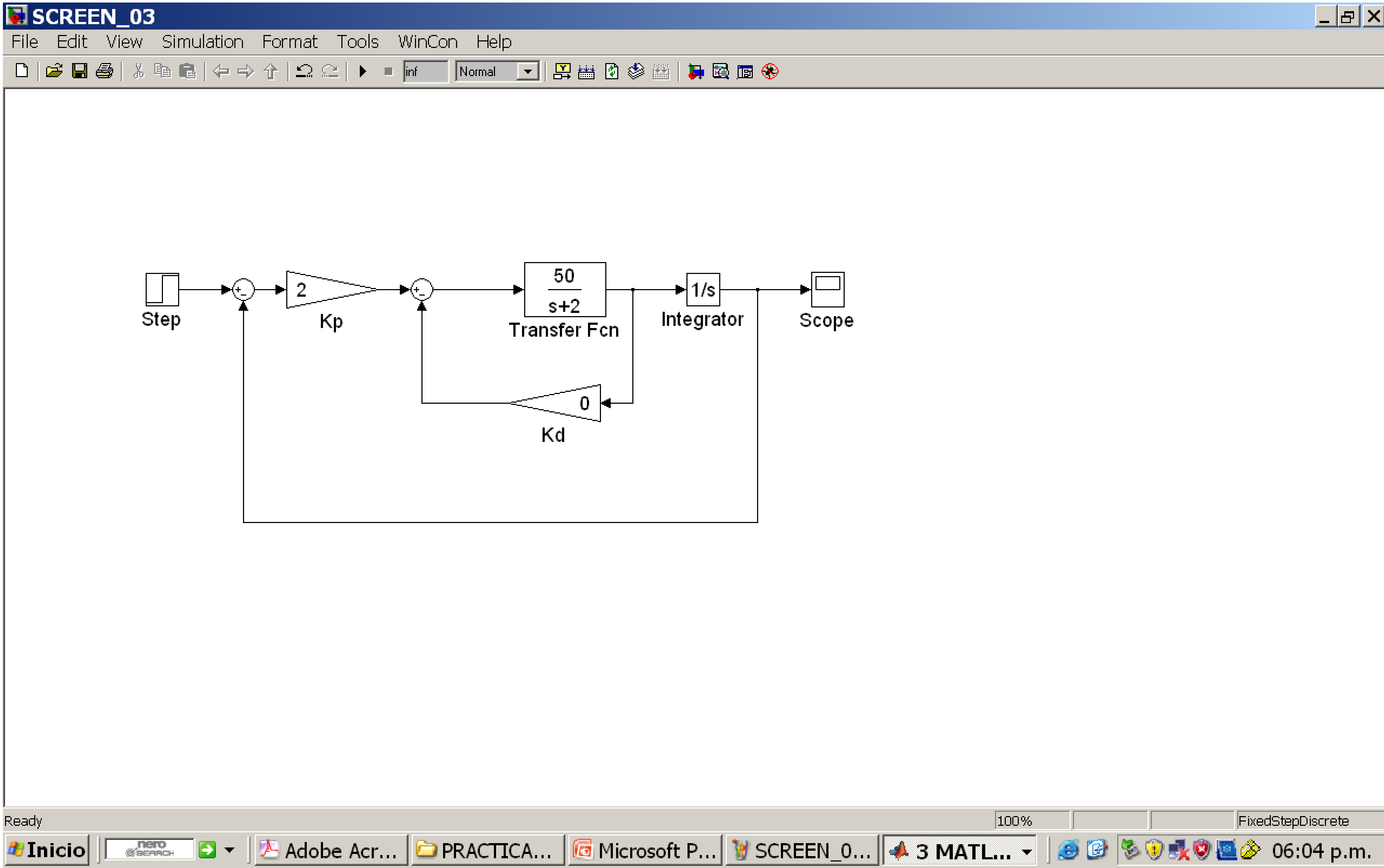
K_p : Ganancia Proporcional

u : Señal de control

K_d : Ganancia Derivativa

47

Construir el siguiente diagrama



Control Proporcional Derivativo de un sistema de segundo orden

SINTONIZACION DEL CONTROLADOR

Comenzar con un valor pequeño de ganancia proporcional y con un valor cero de la ganancia derivativa.

Incrementar la ganancia proporcional hasta obtener una respuesta oscilatoria.

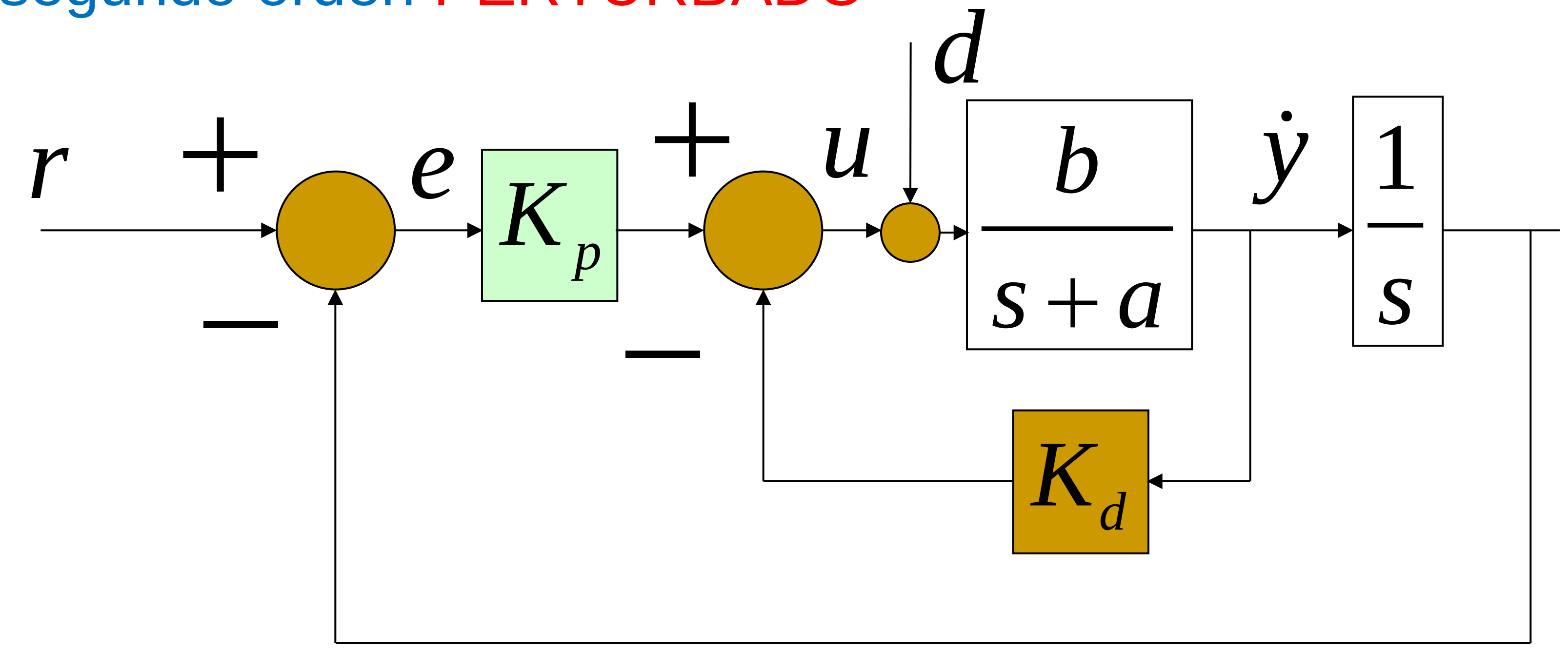
Incrementar la ganancia derivativa hasta que se elimine la oscilación.

Si se desea una velocidad de respuesta mayor, incrementar la ganancia proporcional.

Si nuevamente se observan oscilaciones, incrementar la ganancia derivativa hasta eliminarlas.

- ¿Qué valor tiene el error en estado estacionario?
- ¿Qué sucede con la señal de control cuando se incrementa la ganancia proporcional?

Control Proporcional Derivativo de un sistema de segundo orden PERTURBADO



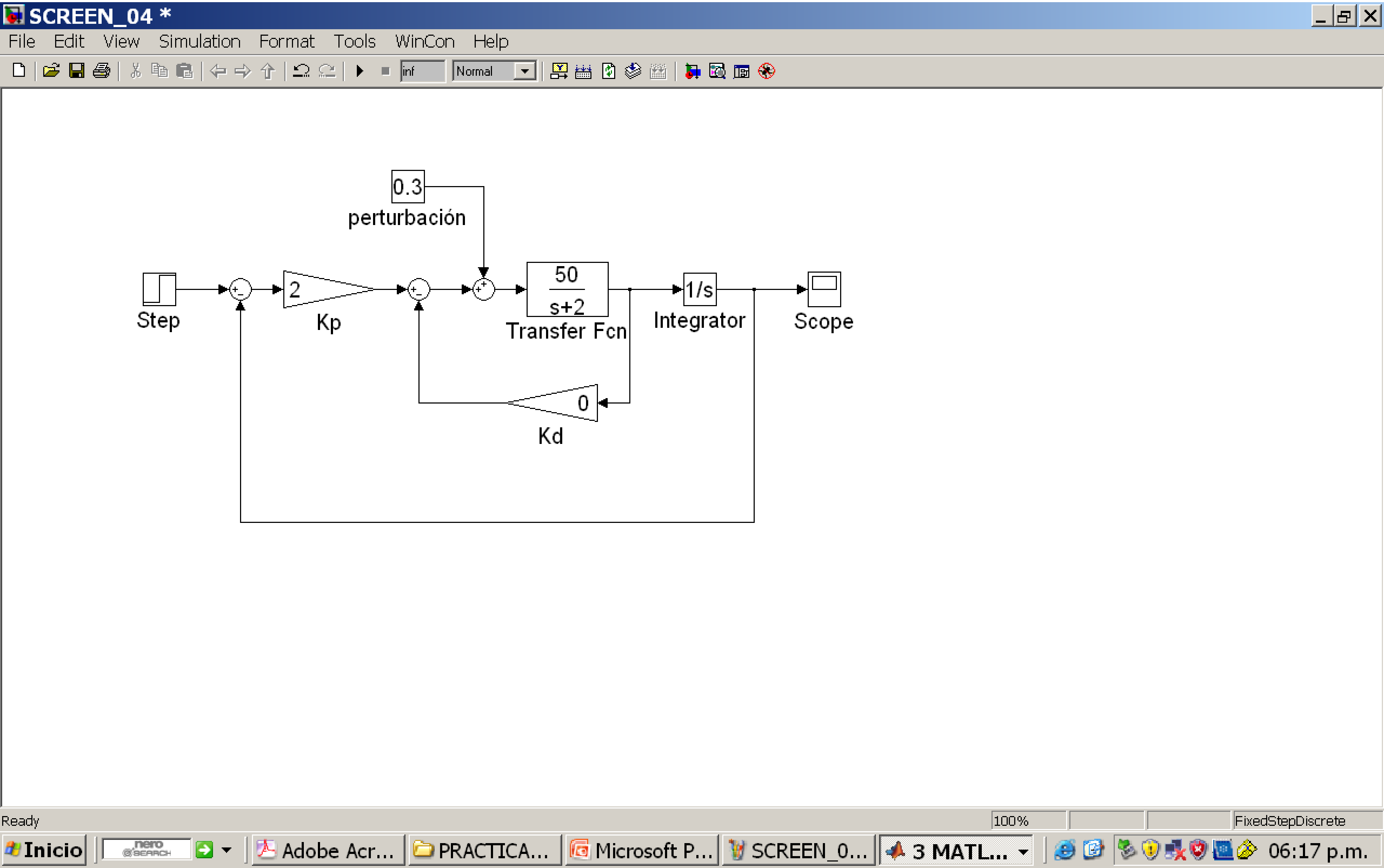
r :Referencia constante e :error d :perturbación

y :Salida K_p :Ganancia Proporcional

u :Señal de control K_d :Ganancia Derivativa

50

Construir el siguiente diagrama



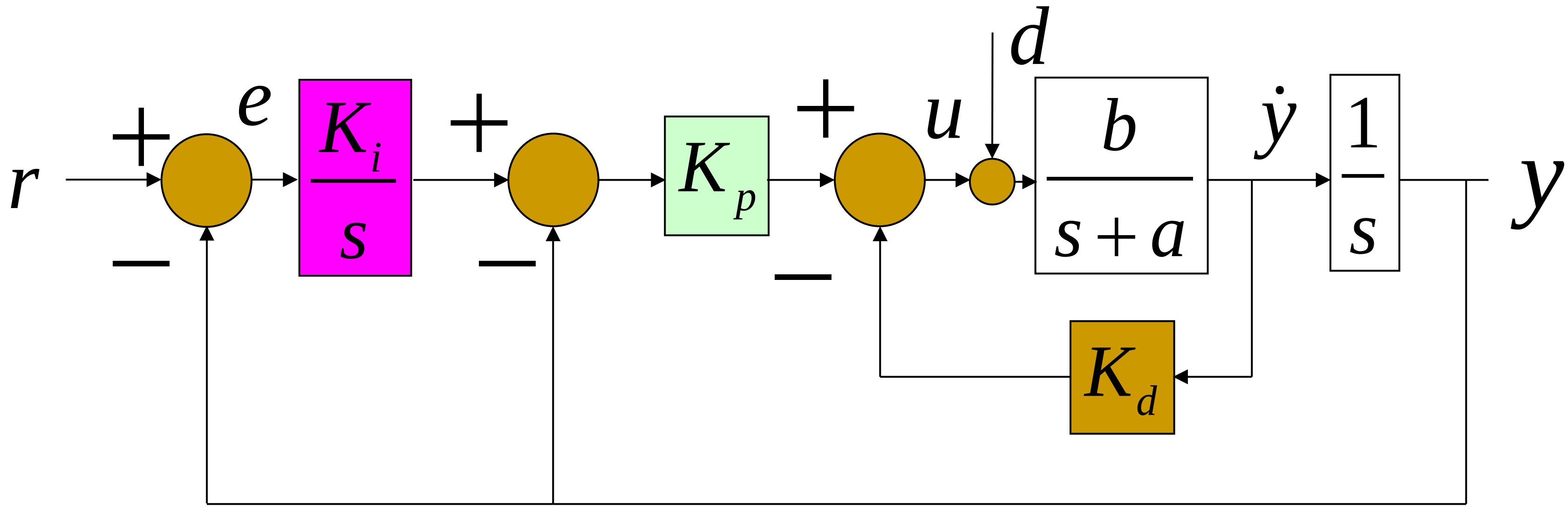
Control Proporcional Derivativo de un sistema de segundo orden perturbado

SINTONIZACION DEL CONTROLADOR

1. Ejecutar el diagrama con la perturbación igual a cero y emplear las ganancias utilizadas en la simulación anterior que ofrecieron la mejor respuesta.
2. Utilizar un valor de perturbación como el indicado en el diagrama y ejecutar nuevamente la simulación.

- ¿Qué valor tiene el error en estado estacionario?
- ¿Qué sucede con el error cuando se incrementa la ganancia proporcional? ¿Se elimina?

Control Integral Proporcional Derivativo de un sistema de segundo orden PERTURBADO.



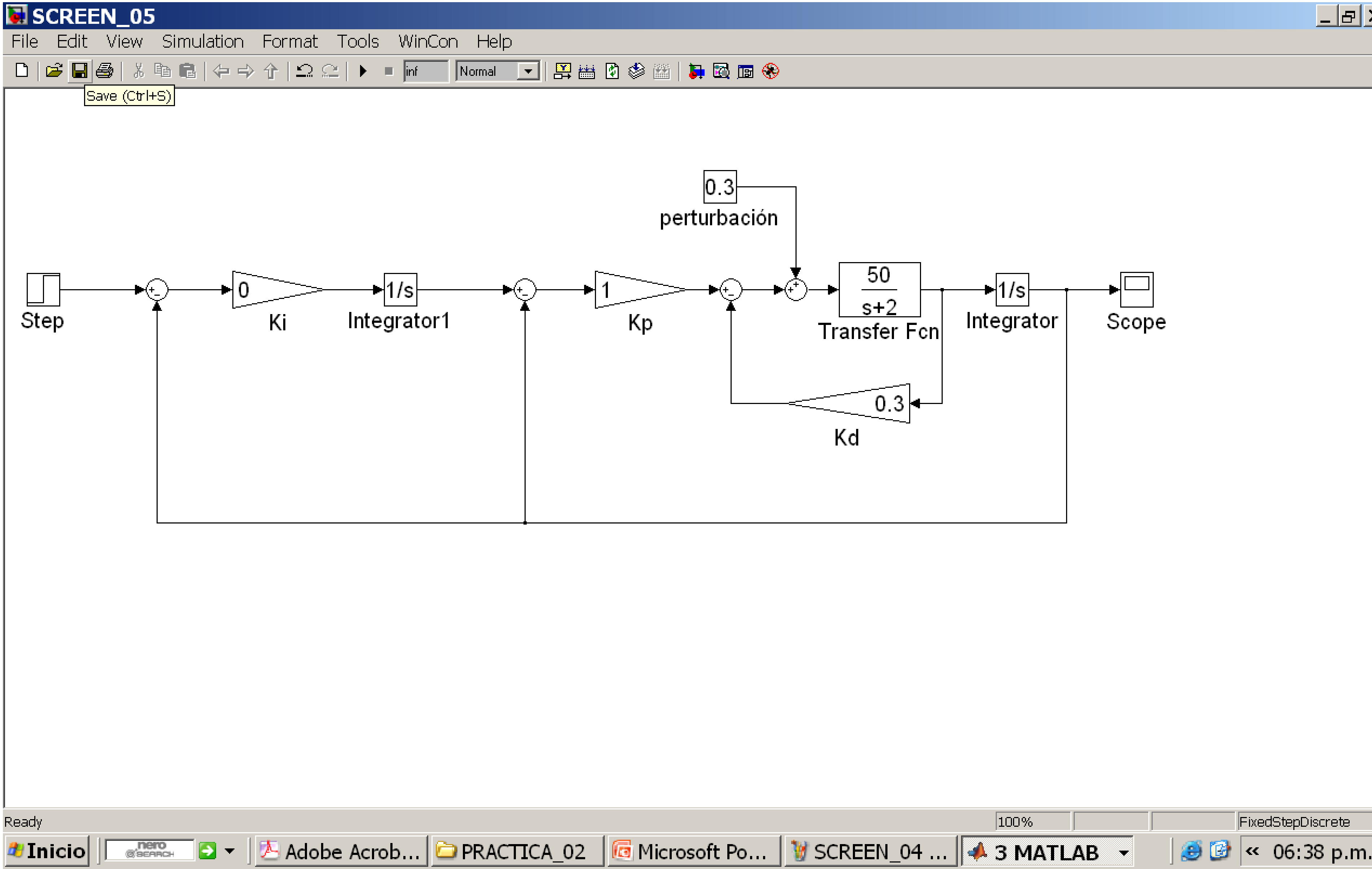
r :Referencia constante; e :error; d :perturbación

y :Salida; u :Señal de control; K_p :Ganancia Proporcional

; K_i :Ganancia Integral; K_d :Ganancia Derivativa

53

Construir el siguiente diagrama



Control Integral Proporcional Derivativo de un sistema de segundo orden PERTURBADO.

SINTONIZACION DEL CONTROLADOR

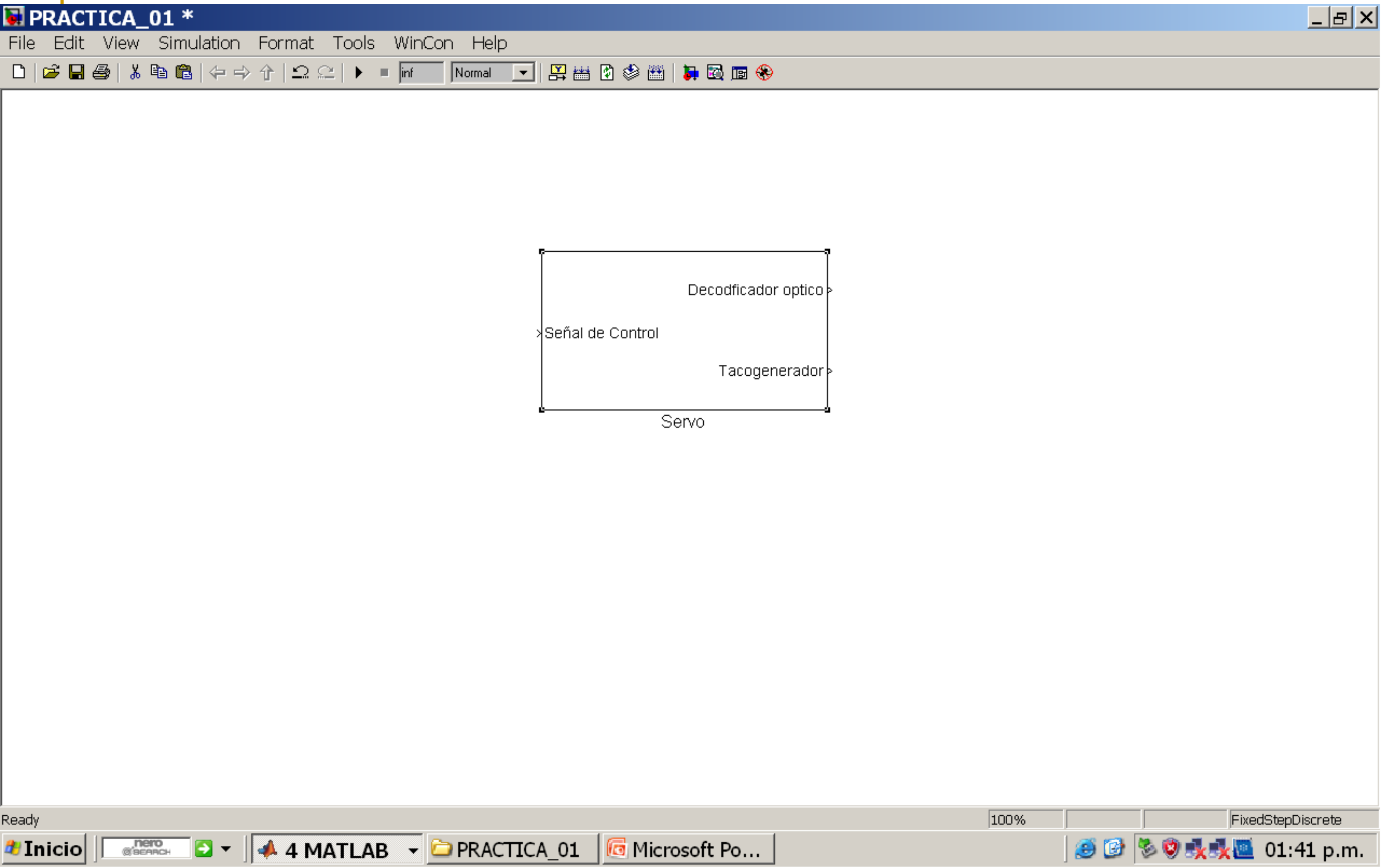
1. Ejecutar el diagrama y emplear las ganancias indicadas en el mismo. Incrementar la ganancia integral hasta eliminar el error en estado estacionario y sin producir sobretiros.
2. Reemplazar las ganancias proporcional y derivativa por aquellas empleadas en la simulación anterior. Si es necesario incrementar la ganancia integral hasta obtener una respuesta rápida y sin sobretiros.

- ¿Qué valor tiene la señal de control en estado estacionario?
- ¿Qué sucede con el comportamiento del sistema si se incrementa demasiado la ganancia integral?

Caso de estudio: Control en posición de un motor de corriente directa. Experimentos en tiempo real.

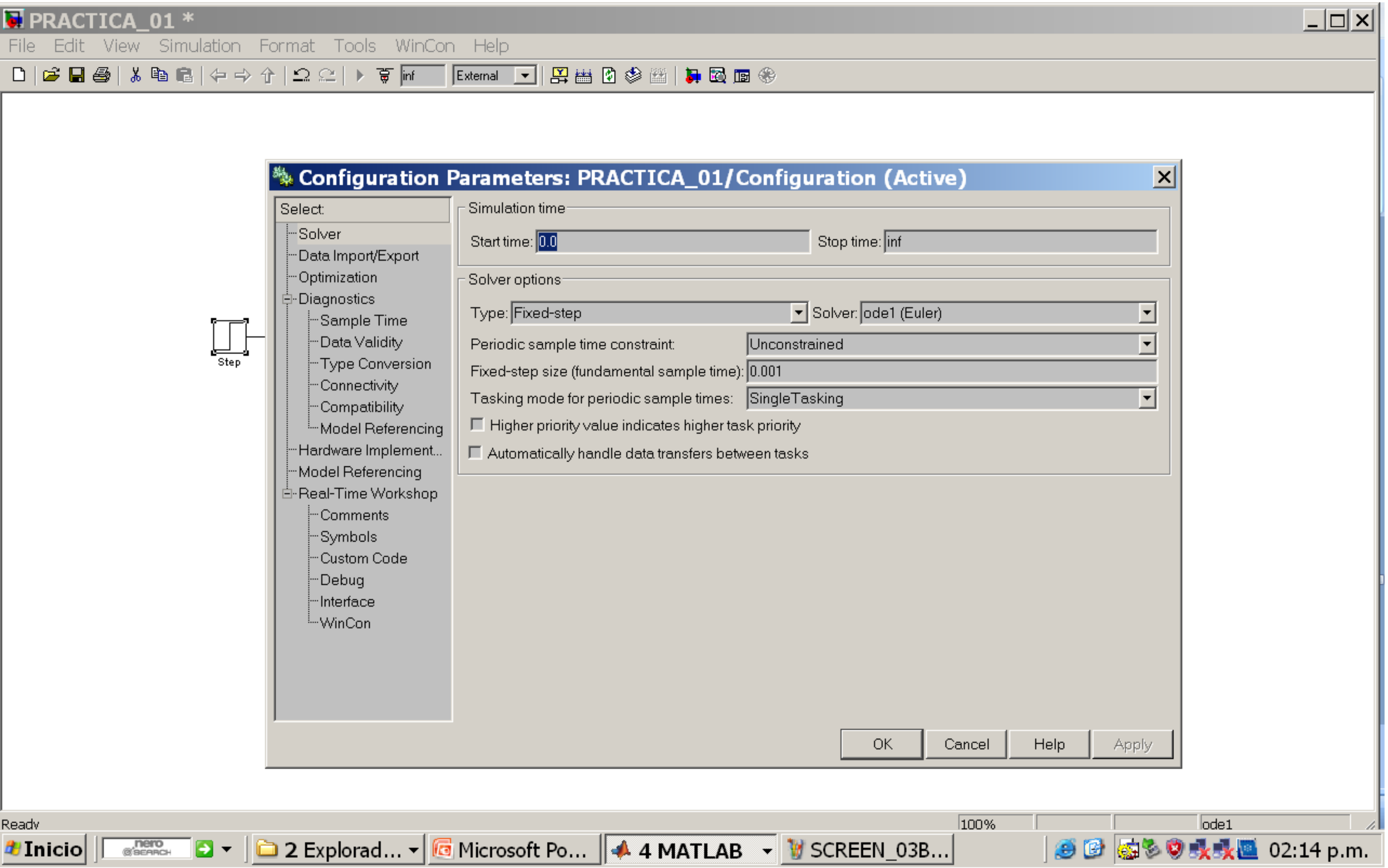
- Abrir la Carpeta taller experimental localizada en el escritorio.
- Abrir la carpeta 2014.
- Abrir el archivo Plantilla_Servo_2014.
- Crear un modelo nuevo en SIMULINK y guardarlo en la carpeta 2014 con un nombre que permita diferenciarlo de los archivos de otros estudiantes.
- Copiar el bloque Servo que aparece en el archivo Plantilla_Servo_2014 en el archivo correspondiente al nuevo modelo.
- Mantener abierto el archivo Plantilla_Servo_2014 durante toda la práctica.
- Guardar los archivos de prácticas únicamente en la carpeta 2014.

Archivo con el bloque Servo



Configurar la simulación.

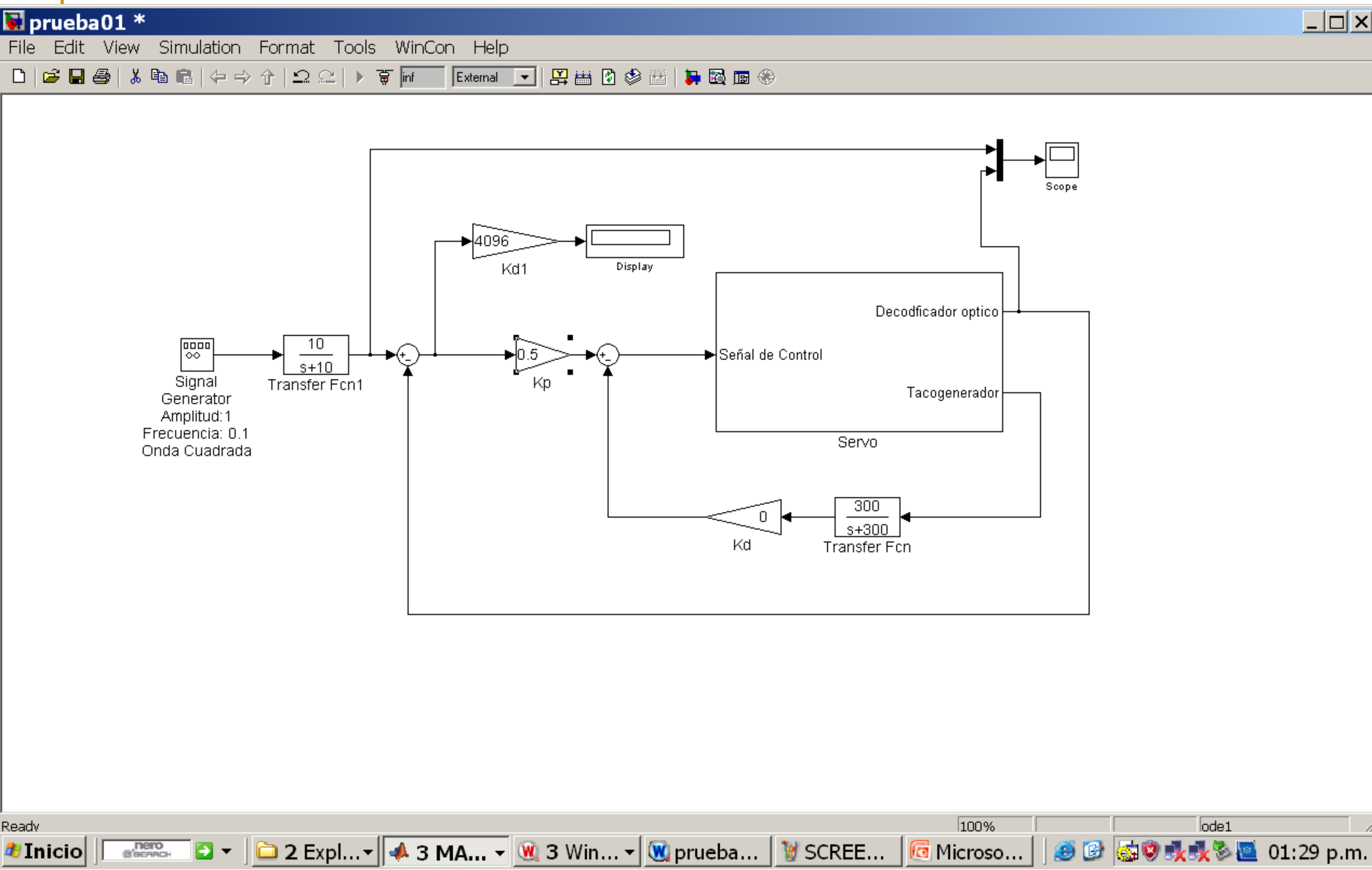
Solver (Método de Integración): ode1 (Euler)



Caso de estudio: Control en posición de un motor de corriente directa.

Control Proporcional Derivativo

Construir , compilar y ejecutar el diagrama siguiente



Control Proporcional Derivativo

SINTONIZACION DEL CONTROLADOR

Comenzar con un valor pequeño de ganancia proporcional y con un valor cero de la ganancia derivativa.

Incrementar la ganancia proporcional hasta obtener una respuesta oscilatoria.

Incrementar la ganancia derivativa hasta que se elimine la oscilación.

Si se desea una velocidad de respuesta mayor, incrementar la ganancia proporcional.

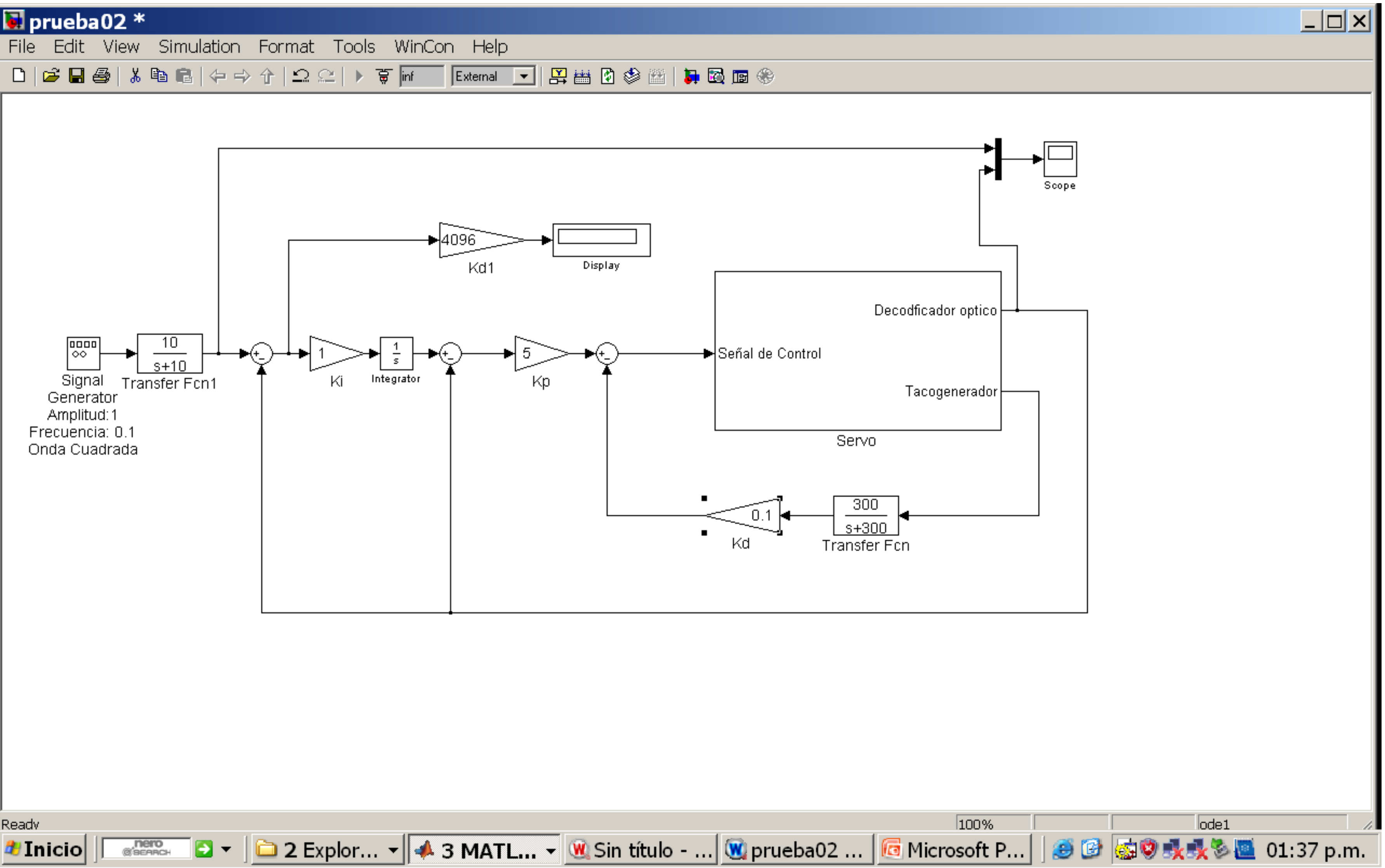
Si nuevamente se observan oscilaciones, incrementar la ganancia derivativa hasta eliminarlas.

- ¿Qué valor tiene el error en estado estacionario?
- ¿Qué sucede con la señal de control cuando se incrementa la ganancia proporcional?
- ¿Qué sucede si no se emplea el filtro aplicado a la salida del taco-generador?

Caso de estudio: Control en posición de un motor de corriente directa.

Control Integral Proporcional Derivativo

Construir, compilar y ejecutar el diagrama siguiente



Control Integral Proporcional Derivativo

SINTONIZACION DEL CONTROLADOR

1. Utilizar las ganancias mostradas en el diagrama.
2. Incrementar la ganancia integral.
3. Manteniendo las ganancias proporcional y derivativa sin cambio, ¿Qué sucede si se incrementa demasiado la ganancia integral?
4. ¿Qué valor tiene el error en estado estacionario?
5. Si se desea una velocidad de respuesta mayor, incrementar las ganancias. Primero la ganancia proporcional y posteriormente la ganancia integral.