Teoría de Control

Roberto Cadena Vega

13 de noviembre de 2014

Índice general

Todo list

Capítulo 1

Criterio de Estabilidad de Routh-Hurwitz

$$\frac{\hat{y}(s)}{\hat{R}(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + ... + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + ... + a_{n-1} s + a_n} = \frac{B(s)}{A(s)} \tag{1.1}$$

$$\frac{\hat{y}(s)}{\hat{R}(s)} = \sum \frac{k_{1,i}}{s + \alpha_i} + \sum \frac{k_{2,j} + k_{3,j} \cdot s}{(s + \beta_i)^2 + {\gamma_i}^2}; m \leqslant n \tag{1.2}$$

El criterio de Routh-Hurwitz determina si existen raíces en el semiplano complejo derecho cerrado.

Tabla de Routh

La tabla de Routh es un método para obtener el numero de raíces con parte real positiva que se encontraran en el polinomio característico del sistema (Ecuación 1.3) sin tener que calcular las raíces en cuestión. Se puede dividir en cuatro pasos que se enumeran a continuación.

$$A(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + ... + a_{n-1} s + a_n = 0 \tag{1.3}$$

1. Hipótesis Si $a_0 = 0 \Rightarrow$ el polinomio es de orden menor a n.

   Si $a_n = 0 \Rightarrow \exists$ una raíz que es $0 \Rightarrow A(s) = (\bar{n}_0 s^{\bar{n}} + \bar{a}_n s^{n\bar{-}1} + ...)s^k$.

2. Si existen coeficientes nulos o de diferente (cambio de) signo, entonces existen raíces con parte real positiva.

3. Construir la tabla de Routh (Ver Cuadro 1.1).

$$
\begin{array}{c|ccccc}
s^n & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots \\
s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots \\
s^{n-2} & b_1 & b_3 & b_5 & b_7 & \dots \\
s^{n-3} & c_1 & c_3 & c_5 & c_7 & \dots \\
s^{n-4} & d_1 & d_3 & d_5 & d_7 & \dots \\
\vdots & & & & & \\
s^2 & e_1 & e_2 & & & \\
s^1 & f_1 & & & & \\
s^0 & g_1 & & & &
\end{array}
$$

Cuadro 1.1: Ejemplo de tabla de Routh.

Donde:

$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}, b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}, \dots$

$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}, c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1}, \dots$

$d_1 = \frac{c_1 b_2 - b_1 c_2}{c_1}, d_2 = \frac{c_1 b_3 - b_1 c_3}{c_1}, \dots$

$\vdots$

4. El número de raíces con parte real positiva es igual al numero de cambios de signo en la primera columna(Ver Cuadro 1.2).

$$
\begin{array}{c|c|}
s^n & a_0 \\
s^{n-1} & a_1 \\
s^{n-2} & b_1 \\
s^{n-3} & c_1 \\
s^{n-4} & d_1 \\
\vdots & \vdots \\
s^2 & e_1 \\
s^1 & f_1 \\
s^0 & g_1
\end{array}
$$

Cuadro 1.2: Números en los que hay que revisar el cambio de signo.

Casos Especiales

1. En los casos en los que un coeficiente es 0 se puede intercambiar por un ϵ lo suficientemente pequeño para aproximar a 0 (Véase el Cuadro 1.3).
   $A(s) = s^3 + 2s^2 + s + 2 = 0$

```
>> A = [1 2 1 2];
>> r = roots(A)
r =
  -2.00000 + 0.00000i
  -0.00000 + 1.00000i
  -0.00000 - 1.00000i
```

s^3	1	1
s^2	2	2
s^1	$0 \approx \epsilon$	
s^0	2	

Cuadro 1.3: Caso Especial 1.

2. Cuando existen cambios en los coeficientes del polinomio característico se sabe que existirán raíces con parte real positiva (Véase el Cuadro 1.4).
   $A(s) = s^3 - 3s + 2 = 0$

```
>> A = [1 0 -3 2];
>> r = roots(A)
r =
  -2.00000
   1.00000
   1.00000
```

s^3	1	-3
s^2	$0 \approx \epsilon$	2
s^1	$-\frac{2}{\epsilon}$	0
s^0	2	

Cuadro 1.4: Caso Especial 2.

3. Cuando todos los coeficientes en una linea se eliminan se puede crear un nuevo polinomio auxiliar con la linea anterior, obtener su derivada e insertar en la siguiente linea para continuar calculando la tabla (Véase el Cuadro 1.5 y 1.6).
   $A(s) = s^5 + 2s^4 + 24s^3 + 48s^2 - 25s - 50 = 0$
   $p_{aux}(s) = 2s^4 + 48s^2 - 50$
   $\frac{d}{dx} p_{aux}(s) = 8s^3 + 96s$

```
>> A = [1 2 24 48 -25 -50];
>> r = roots(A)
r =
  -0.00000 + 5.00000i
  -0.00000 - 5.00000i
   1.00000 + 0.00000i
  -2.00000 + 0.00000i
  -1.00000 + 0.00000i
```

s^5	1	24	-25
s^4	2	48	-50
s^3	0	0	0
s^2			
s^1			
s^0			

Cuadro 1.5: Caso Especial 3a.

s^5	1	24	-25
s^4	2	48	-50
s^3	8	96	0
s^2	24	-50	0
s^1	112,6	0	
s^0	-50		

Cuadro 1.6: Caso Especial 3b.

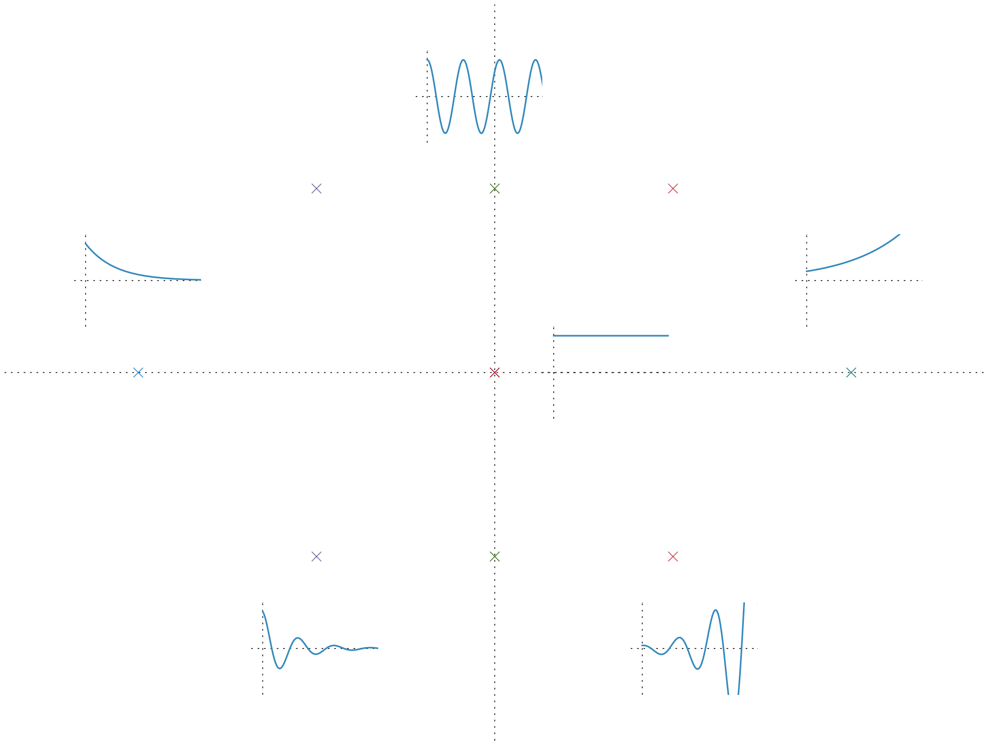
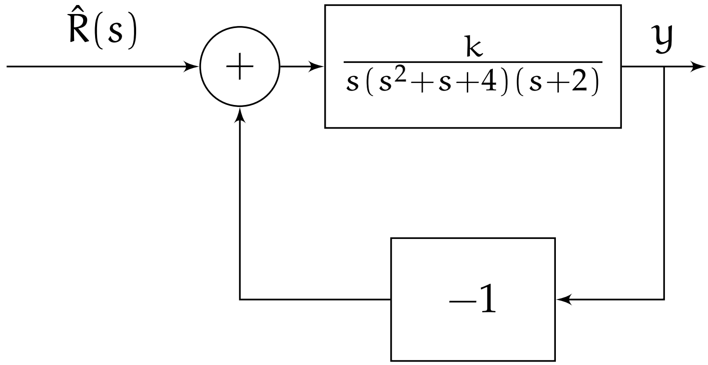


Figura 1.1: Polos en el plano complejo.



Aplicación del criterio de Routh

Si bien los sistemas numéricos actuales permiten el calculo de las raíces de un sistema de manera mas rápida y sencilla que con la aplicación de este método, aun existen aplicaciones practicas en las que es de suma importancia el determinar el numero de raíces positivas. Por ejemplo podemos tener ganancias en un sistema para las que queremos determinar de primera instancia, un rango de valores para los cuales el sistema no se volverá inestable.

Para ello calculamos la tabla de Routh de la misma manera en que lo hicimos anteriormente, pero teniendo en cuenta las ganancias a incluir en el calculo de las raíces (Por ejemplo con una ganancia proporcional véase Cuadro 1.7).

$$
\begin{array}{c|ccccc}
s^n & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \ldots \\
s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & k \\
s^{n-2} & b_1 & b_3 & b_5 & b_7 & \ldots \\
s^{n-3} & c_1 & c_3 & c_5 & c_7 & \ldots \\
s^{n-4} & d_1 & d_3 & d_5 & d_7 & \ldots \\
\vdots & & & & & \\
s^2 & e_1 & e_2 & & & \\
s^1 & f_1 & & & & \\
s^0 & g_1 & & & &
\end{array}
$$

Cuadro 1.7: Aplicación del criterio de Routh.

Ejemplo

Se toma el sistema $\frac{\hat{y}(s)}{\hat{R}(s)} = \frac{k}{s^4+3s^3+3s^2+2s+k}$, entonces el polinomio característico del sistema será $F(s) = s^4 + 3s^3 + 3s^2 + 2s + k$.

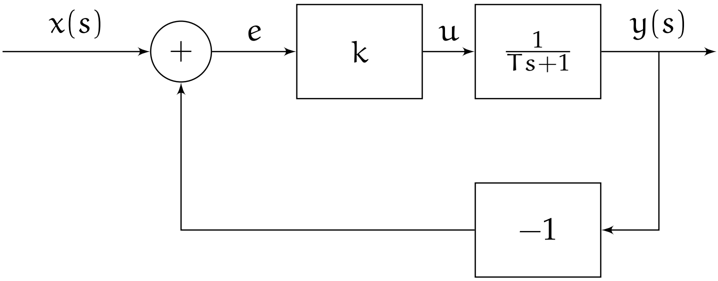
Construimos su tabla de Routh (Cuadro 1.8):

De lo anterior podemos concluir que, para que no existan cambios de signos, toda la primera columna tiene que ser positiva, por lo que $k > 0$ y $2 -^9 /_7 k > 0$, por lo que el rango de valores que puede ocupar la ganancia k es $0 < k <^{14} /_9$

Si bien esto no nos aporta una ganancia especifica para un comportamiento deseado, si nos da la pauta a los valores a tomar en cuenta, si no se desea que el sistema sea inestable.

$$
\begin{array}{c|ccc}
s^4 & 1 & 3 & k \\
s^3 & 3 & 2 & 0 \\
s^2 & \frac{7}{3} & k & 0 \\
s^1 & 2-\frac{9}{7}k & 0 & \\
s^0 & k & &
\end{array}
$$

Cuadro 1.8: Ejemplo de Aplicación del criterio de Routh.



Acción Proporcional

Tenemos un sistema de primer orden, al que le agregaremos un controlador de ganancia proporcional y una retroalimentación negativa, por lo que las ecuaciones que describen la salida y el error del sistema quedan:

$$\frac{\hat{y}(s)}{\hat{R}(s)} = \frac{k}{Ts+1+k} \tag{1.4}$$

$$\frac{\hat{e}(s)}{\hat{R}(s)} = \frac{R(s)-Y(s)}{R(s)} = \frac{Ts+1}{Ts+1+k} \tag{1.5}$$

Estabilidad

El problema reside en encontrar un conjunto de ganancias k para las cuales el sistema es estable.

$$F(s) = s + \frac{1+k}{T} \tag{1.6}$$

Aplicamos una tabla de Routh a este polinomio característico (Cuadro 1.9).

$$
\begin{array}{c|c}
s^1 & 1 \\
s^0 & \frac{1+k}{T}
\end{array}
$$

Cuadro 1.9: Tabla de Routh para acción proporcional.

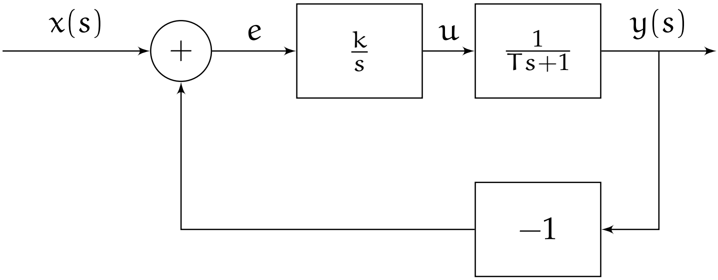
Por lo que concluimos que la ganancia k debe de seguir: $k > -1$

Error en el estado permanente al escalón unitario

También es importante investigar el error que causara el controlador al introducirse. Si ponemos como señal de referencia al escalón unitario($R(s) = \frac{1}{s}$), podemos ver lo siguiente:

$$\lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{s \to 0} se(s) = \lim_{s \to 0} \frac{Ts + 1}{Ts + 1 + k} = \frac{1}{1 + k}$$

Gráfica de respuesta sobreamortiguada y con error en estado estacionario.



Acción Integral

Tenemos un sistema de primer orden, al que le agregaremos un controlador de ganancia integral y una retroalimentación negativa, por lo que las ecuaciones que describen la salida y el error del sistema quedan:

$$\frac{\hat{y}(s)}{\hat{R}(s)} = \frac{k}{s(Ts+1)+k} \tag{1.7}$$

$$\frac{\hat{e}(s)}{\hat{R}(s)} = \frac{R(s)-Y(s)}{R(s)} = \frac{s(Ts+1)}{s(Ts+1)+k} \tag{1.8}$$

Estabilidad

El problema reside en encontrar un conjunto de ganancias k para las cuales el sistema es estable.

$$F(s) = s^2 + \frac{1}{T}s + \frac{k}{T} \tag{1.9}$$

Aplicamos una tabla de Routh a este polinomio característico (Cuadro 1.10).

s^2	1	$\frac{k}{T}$
s^1	$\frac{1}{T}$	0
s^0	$\frac{k}{T}$	

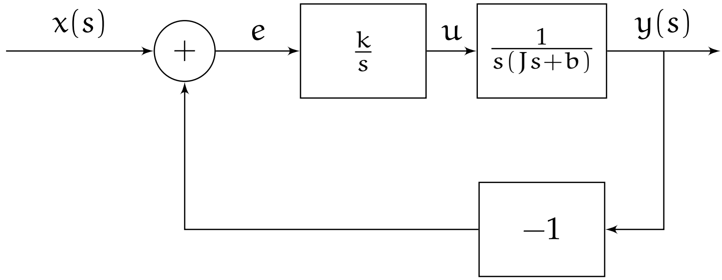
Cuadro 1.10: Tabla de Routh para acción integral.

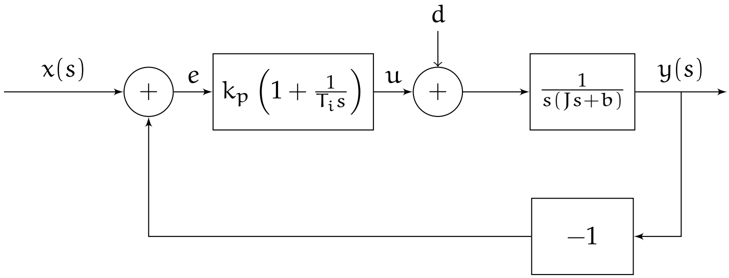
Por lo que concluimos que la ganancia k debe de seguir: $k > 0$

Error en el estado permanente al escalón unitario

También es importante investigar el error que causara el controlador al introducirse. Si ponemos como señal de referencia al escalón unitario($R(s) = \frac{1}{s}$), podemos ver lo siguiente:

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} se(s) = \lim_{s\to 0} s\left(\frac{s(Ts+1)}{s(Ts+1)+k}\frac{1}{s}\right) = 0$$





Acción Proporcional Integral

Estabilidad

Error en el estado permanente al escalón unitario

Capítulo 2

Lugar de las Raíces

Si tenemos un sistema con retroalimentación, su polinomio característico es el siguiente:

$$F(s) = 1 + H(s)G(s) = 0 \tag{2.1}$$

Donde $G(s)$ es la planta y $H(s)$ es el elemento de retroalimentación. Las condiciones de angulo y magnitud son las siguientes:

$$\angle H(s)G(s) = \pm 180^\circ(2R+1) \mid R \in \mathbb{Z}^+ \tag{2.2}$$

$$|H(s)G(s)| = 1 \tag{2.3}$$

De aquí notamos que la condición de angulo, nos da la forma del lugar de las raíces, y la condición de magnitud nos da su posición.

Pues bien, para trazar el lugar geométrico de las raíces seguimos una serie de pasos enumerados a continuación:

1. Determinar el lugar de las raíces en el eje real.

   Ejemplo: $H(s) = 1$, $G(s) = \frac{k}{s(s+1)(s+2)}$

   Sabemos, por una inspección visual, que los polos del sistema son 0, -1, y -2, y que este sistema no tiene ceros. Lo cual nos indica, por la condición de angulo, que la suma de las interacciones de estas raices, nos dará la interacción total del sistema:

   $$\angle G(s) = -\angle s - \angle s+1 - \angle s+2 = \pm 180^\circ(2R+1)$$

   Notemos que cualquier lugar de las raices en el semiplano derecho complejo (inestable), viene con un angulo de 0^o, por lo que las interacciones de cada polo serían:

   $$\angle G(s) = -0^o - 0^o - 0^o = 0^o$$

   lo cual obviamente no cumple con la condición de angulo del sistema.

   Si pasamos a la siguiente sección del eje real (creada por los mismos polos del sistema), tenemos que los angulos de interacción de cada polo son:

$$\angle G(s) = -180^o - 0^o - 0^o = -180^o$$

lo cual cumple con la condición de angulo del sistema.

En la siguiente sección (entre -1 y -2), tenemos lo siguiente:

$$\angle G(s) = -180^o - 180^o - 0^o = -360^o = 0^o$$

y esto no cumple con la condición de angulo del sistema.

En la ultima sección (entre -2 y $-\infty$) tenemos:

$$\angle G(s) = -180^o - 180^o - 180^o = -540^o = -180^o$$

por lo que esta ultima sección tambien es parte del lugar geométrico de las raices.

2. Determinar las asintotas del lugar de las raíces.

   El lugar de las raices se aproxima a sus asintotas, mientras $s \to \infty$, por lo que podemos hacer una simplificación:

$$\lim_{s\to\infty} G(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{k}{s(s+1)(s+2)} = \lim_{s\to\infty} \frac{K}{s^3}$$

   por lo que la condición de angulo queda:

$$\angle G(s) = -3\angle s = \pm 180^\circ(2R+1) \implies \angle s = \pm 60^\circ(2R+1)$$

   lo cual nos da que los angulos de las asintotas son 60^o, -60^o y 120^o.

   Por otro lado, si hacemos un proceso similar, pero con el polinomio caracteristico desarrollado, podremos ver que hay terminos mas importantes que otros, en especial cuando hacemos $s \to \infty$, por lo que:

$$G(s) = \frac{k}{s(s+1)(s+2)} = \frac{k}{s^3+3s^2+2s} \approx \frac{k}{(s+1)^3}$$

   por lo que podemos ver que las asintotas tienen esa forma, y que podemos asegurar que parten del punto $-1+0i$.

3. Determinar el punto de ruptura o partida de las asintotas en el eje real.

   Para determinar el punto de ruptura del lugar de las raices, tenemos que pensar en el polinomio caracteristico como la suma de 2 polinomios diferentes $A(s)$ y $B(s)$, de tal manera que ninguno contenga a la ganancia k, entonces tendremos:

$$F(s) = B(s) + kA(s) = 0 \implies k = -\frac{B(s)}{A(s)}$$

   implicando que estamos obteniendo las ganancias, para las cuales se tienen polos en el plano complejo.

De aqui podemos pensar en el punto maximo de esta función de ganancias, como el punto de ruptura buscado, es decir:

$$\frac{dk}{ds} = 0 \tag{2.4}$$

En nuestro ejemplo, esto nos da como resultado:

$$k = -s^3 - 3s^2 - 2s \implies \frac{dk}{ds} = -3s^2 + 6s + 2 = 0$$

de donde obtenemos un par de respuestas $s_1 = -0{,}423$ y $s_2 = -1{,}577$, con ganancias asociadas $k_1 = 0{,}385$ y $k_2 = -0{,}385$.

De aqui podemos descartar s_2 ya que no se encuentra en el lugar de las raices del eje real, y obviamente no puede partir de ahi, si no existe en ese lugar en especifico.

4. Determinar los puntos donde el lugar de las raíces atraviesa el eje imaginario.

   Ya hemos visto que los polos sobre el eje real no cruzan el eje imaginario, ahora solo tenemos que encontrar las ganancias criticas, es decir, cuando los polos estan sobre el eje imaginario.

$$F(s) = s^3 + 3s^2 + 2s + k$$

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 2 \\ s^2 & 3 & k \\ s^1 & 2 - {}^{k}/_{3} & 0 \\ s^0 & k & \end{array}$$

   De donde obtenemos que $k > 0$, lo cual ocurre en el polo del origen y $k < 6$, que es justo cuando cruza por el eje imaginario.

   Ahora, tan solo tenemos que obtener las raices del polinomio caracteristico con la ganancia adecuada y obtendremos el punto de cruce, alternativamente, podemos usar el polinomio auxiliar de la tabla de Routh, usaremos el correspondiente a s^2.

$$P_{aux} = 3s^2 + k = 3s^2 + 6 = 0 \implies s = \pm\sqrt{2}j$$

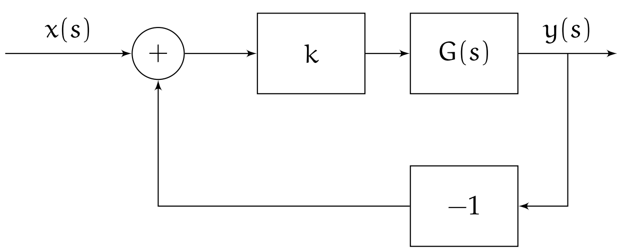
Capítulo 3

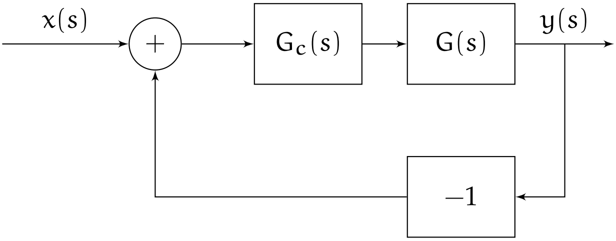
Compensador Adelanto/Atraso (LR)

El concepto de fase surge del análisis del lugar de las raices, al pensar que el angulo que tiene un conjunto de raices complejas conjugadas con respecto al ejereal positivo es la fase, es decir, el angulo del fasor. De esta manera, podemos modificar el comportamiento de un sistema agregando dinámicas al sistema ayudandolo a mover el lugar geométrico de las reaices hacia donde lo necesitemos.

El adelanto de fase pues, será un comportamiento demasiado rápido y subamortiguado y el atraso de fase demasiado lento y sobreamortiguado, por lo que agregaremos polos que atraigan el lugar de las raices y que modifiquen la fase para adelantarla (si es un comportamiento demasiado lento o sobreamortiguado) o atrasarla (si es un comportamiento demasiado rapido o subamortiguado).

Empezaremos considerando el siguiente sistema como base para nuestros calculos:





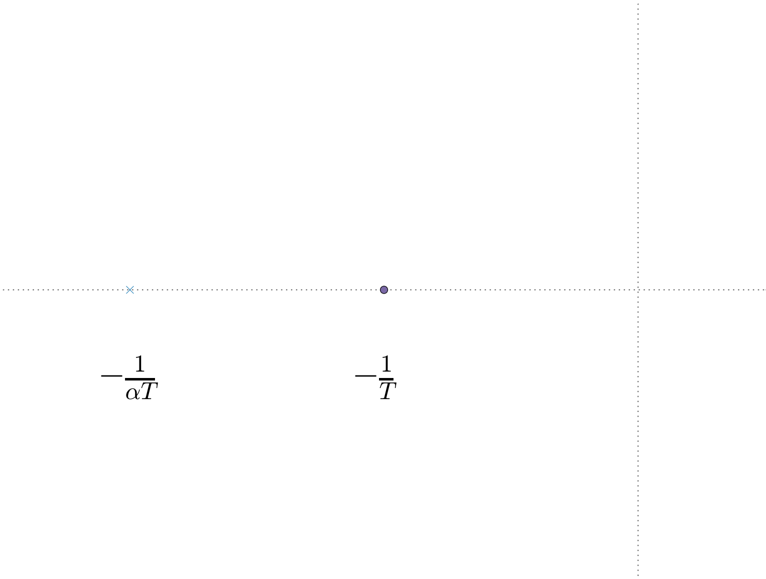


Figura 3.1: Polo y cero introducidos por el compensador de adelanto de fase.

Compensador de adelanto de fase

Dado el siguiente sistema realimentado:

Tenemos que el controlador es de la forma:

$$G_c(s) = k_c \alpha \frac{Ts+1}{\alpha T s + 1} = \hat{k}_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}} \tag{3.1}$$

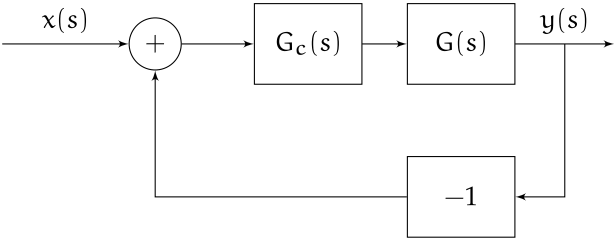
con $k_c > 0$ y $0 < \alpha < 1$.

Dadas estas condiciones, el lugar de las raíces de los polos y ceros[1] agregados se verán como en la figura.

Dado este controlador se pueden modificar el comportamiento del sistema para hacerlo tan rápido como sea necesario. El calculo de los parametros T y α será explicado con un ejemplo.

Ejemplo

[1] El cero atrae el lugar de las raices hacia la izquierda.



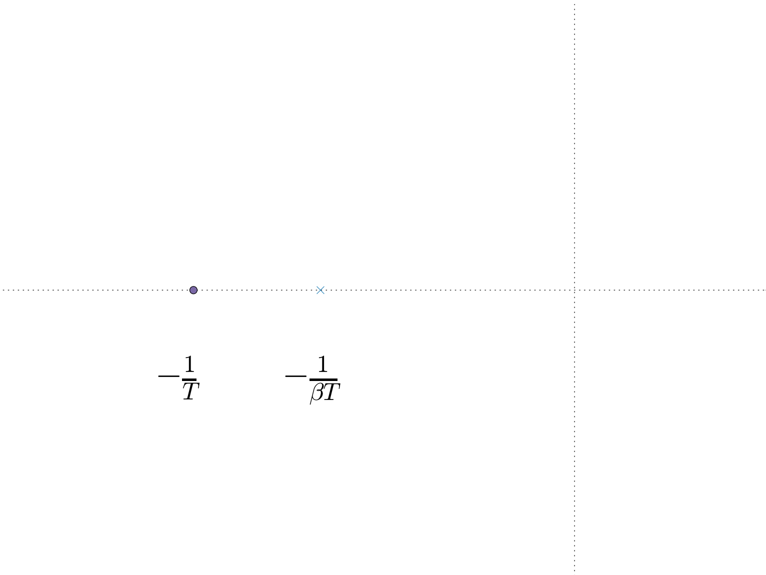


Figura 3.2: Polo y cero introducidos por el compensador de atraso de fase.

Compensador de atraso de fase

Dado el siguiente sistema realimentado:

Tenemos que el controlador es de la forma:

$$G_c(s) = k_c \beta \frac{Ts+1}{\beta Ts+1} = \hat{k}_c \frac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{\beta T}} \tag{3.2}$$

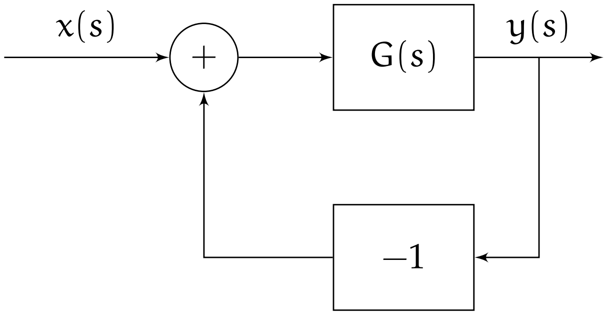
con $k_c > 0$ y $\beta > 1$.

Dadas estas condiciones, el lugar de las raíces de los polos y ceros agregados se verán como en la figura.

Si el cero y el polo están muy cercanos, entonces para $s = s_1$ un polo dominante en lazo cerrado, se tiene que la magnitud del sistema:

$$|G_c(s_1)| = \left| \hat{k}_c \frac{s_1+\frac{1}{T}}{s_1+\frac{1}{\beta T}} \right| \approx \left| \hat{k}_c \right|$$

y en especifico para la fase:



$$-5^o < \angle \frac{s_1+\frac{1}{T}}{s_1+\frac{1}{\beta T}} < 0^o$$

Por lo que se puede aumentar la ganancia en el polo del sistema, sin sufrir un corrimiento considerable en el lugar de las raíces.

Error estático de posición k_p

Para el sistema dado:
con una entrada de tipo escalón:

$$x(s) = \frac{1}{s}$$

y un sistema $G(s)$:

$$G(s) = k_p \frac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{\beta T}}$$

El error en estado permanente a una entrada escalón unitario es:

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} s\left(\frac{1}{1+G(s)}\frac{1}{s}\right) = \lim_{s\to 0}\frac{1}{1+G(s)} = \frac{1}{1+G(0)} = \frac{1}{1+k_p}$$

Gráfica de escalon unitario con error en estado estacionario.

Error estático de velocidad k_v

El error en estado permanente a una entrada rampa unitaria es:

$$x(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} s \left(\frac{1}{a + G(s)} \frac{1}{s^2} \right) = \lim_{s \to 0} \frac{1}{s + sG(s)} = \lim_{s \to 0} \frac{1}{sG(s)} = \frac{1}{k_v}$$

$$k_v = \lim_{s \to 0} sG(s)$$

Gráfica de rampa unitaria con error en estado estacionario.

Ejemplo

Capítulo 4

Diagramas de Bode

Dado el siguiente sistema:
con $G(s)$ Hurwitz estable:

$$y(s) = G(s)x(s)$$

asumimos que la entrada es de la forma:

$$x(s) = X\left(\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right)$$

y la planta es de la forma:

$$G(s) = \frac{p(s)}{q(s)} = \frac{p(s)}{(s+s_1)(s+s_2)\dots(s+s_n)}$$

de donde se asumen polos simples de primero orden, aunque los reslutados por obtener se mantienen si los polos no lo son.

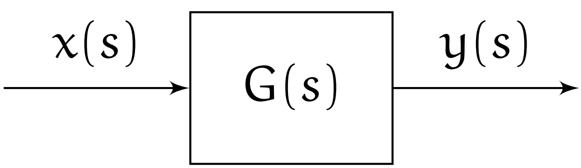
Al sustituir pues en la ecuación del sistema, tendremos:

$$\begin{aligned} y(s) &= X\left(\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right)\frac{p(s)}{(s+s_1)(s+s_2)\dots(s+s_n)} \\ &= \frac{a}{s+j\omega} + \frac{\bar{a}}{s-j\omega} + \frac{b_1}{s+s_1} + \dots + \frac{b_n}{s+s_n} \end{aligned}$$

lo cual podemos resolver obteniendo la transformada inversa de Laplace:

$$y(t) = ae^{-j\omega t} + \bar{a}e^{j\omega t} + b_1 e^{-s_1 t} + \dots + b_n e^{-s_n t}$$

lo cual implica que tendremos una salida en estado estacionario:



$$y_{ss}(t) = \lim_{t\to\infty} y(t) = ae^{-j\omega t} + \bar{a}e^{j\omega t}$$

es decir, cuando t tiende a $infty$ todos los polos del sistema se eliminan y nos queda el comportamiento de la entrada a seguir.

Por otro lado, para obtener los valores de a y $\bar{a}$ aplicamos fracciones parciales y obtenemos:

$$\begin{aligned}
a &= G(s)X\left(\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right) + (s+j\omega)\Big|_{s=-j\omega} = -G(-j\omega)X\frac{1}{2j} \\
\bar{a} &= G(s)X\left(\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right) + (s-j\omega)\Big|_{s=j\omega} = G(j\omega)X\frac{1}{2j}
\end{aligned}$$

de donde sabemos que $G(j\omega)$ lo podemos escribir como su magnitud multiplicado por una exponencial de mangitud unitaria con el angulo deseado:

$$\begin{aligned}
G(j\omega) &= |G(j\omega)|\, e^{j\phi} \\
G(-j\omega) &= |G(j\omega)|\, e^{-j\phi}
\end{aligned}$$

en donde $\phi = \angle G(j\omega) = \arctan\left(\frac{\Im G}{\Re G}\right)$.

Por lo tanto, a y $\bar{a}$ los podemos escribir como:

$$\begin{aligned}
a &= -|G(j\omega)|\, e^{-j\phi} X\frac{1}{2j} \\
\bar{a} &= |G(j\omega)|\, e^{j\phi} X\frac{1}{2j}
\end{aligned}$$

Tomando esto en cuenta, la salida en estado estacionario nos quedará:

$$\begin{aligned}
y_{ss}(t) &= X\,|G(j\omega)|\,\frac{e^{j(\omega t+\phi)} - e^{-j(\omega t+\phi)}}{2j} \\
&= X\,|G(j\omega)|\sin(\omega t+\phi) \\
&= y\sin(\omega t+\phi)
\end{aligned}$$

en donde $y = X\,|G(j\omega)|$ y $\phi = \angle G(j\omega)$.

Factores de primer orden

Para analizar ahora el comportamiento de una planta con factores de primer orden, proponemos el sistema siguiente:

$$G(s) = \frac{1}{Ts+1}$$

el cual tiene magnitud y fase:

$$\begin{aligned} |G(j\omega)| &= \left|\frac{1}{j\omega T+1}\right| = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega T)^2}} \\ |G(j\omega)|_{dB} &= 20\log|G(j\omega)| = -20\log\sqrt{1+(\omega T)^2} \\ \phi &= -\arctan(\omega T) \end{aligned}$$

en donde a la magnitud le hemos sacado el log_{10} y multiplicado por 20 para expresarla en dB.

De estas expresiones podemos ver, que para diferentes valores de ωT obtendremos diferentes valores de magnitud:

$$\begin{aligned} \omega T \ll 1 &\implies |G(j\omega)|_{dB} \approx -20\log\sqrt{1} = 0dB \\ \omega T \gg 1 &\implies |G(j\omega)|_{dB} \approx -20\log\sqrt{(\omega T)^2} = -20\log(\omega T)dB \\ \omega T = 1 &\implies |G(j\omega)|_{dB} = -20\log\sqrt{2} \approx -3dB \end{aligned}$$

y de fase:

$$\begin{aligned} \omega T \ll 1 &\implies -\arctan(\omega T) \approx -\arctan(0) = 0^o \\ \omega T \gg 1 &\implies -\arctan(\omega T) \approx -\arctan(\infty) = -90^o \\ \omega T = 1 &\implies -\arctan(\omega T) = -\arctan(1) = -45^o \end{aligned}$$

Con estas expresiones podemos trazar asintotas, las cuales nos ayudarán a gráficar el diagrama de Bode del sistema $G(s) = \frac{1}{Ts+1}$ en la figura 4.1.

De manera similar podemos gráficar el sistema inverso $G(s) = Ts+1$ en la figura 4.2.

Factor integral

Dado el sistema $G(s) = \frac{1}{s}$ tendremos los siguientes valores para la magnitud y la fase:

$$\begin{aligned} |G(j\omega)|_{dB} &= \left|\frac{1}{j\omega}\right|_{dB} = -20\log(\omega) \\ \underline{/G(j\omega)} &= -90^o \end{aligned}$$

Por lo que el diagrama de Bode queda como en la figura 4.3.

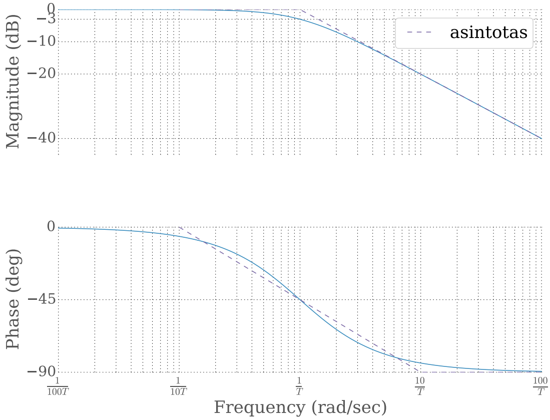


Figura 4.1: Diagrama de Bode del sistema $G(s) = \frac{1}{Ts+1}$.

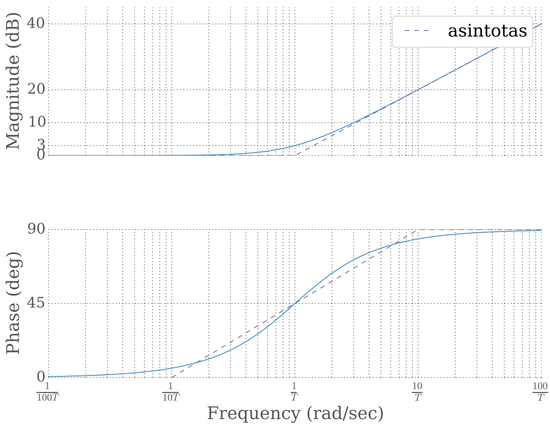


Figura 4.2: Diagrama de Bode del sistema $G(s) = Ts + 1$.

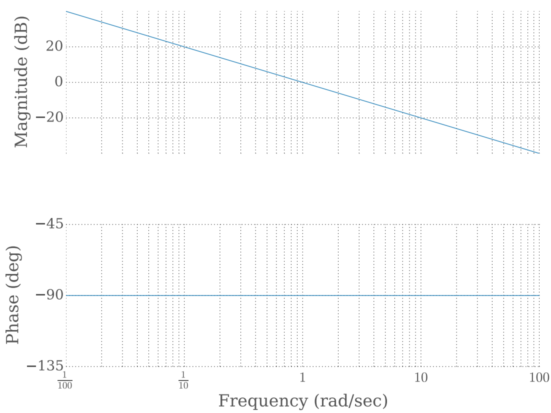


Figura 4.3: Diagrama de Bode del sistema $G(s) = \frac{1}{s}$.

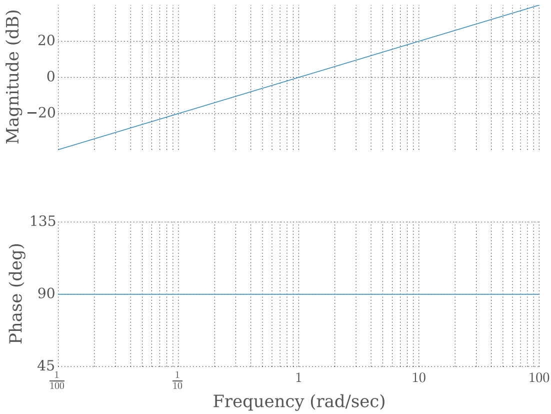


Figura 4.4: Diagrama de Bode del sistema $G(s) = s$.

Factor derivativo

Dado el sistema $G(s) = s$ tendremos los siguientes valores para la magnitud y la fase:

$$\begin{aligned} |G(j\omega)|_{dB} &= |j\omega|_{dB} = 20\log(\omega) \\ \underline{/G(j\omega)} &= 90^{o} \end{aligned}$$

Por lo que el diagrama de Bode queda como en la figura 4.4.

Factores de segundo orden

Frecuencia de resonancia ω_n

Valor pico de resonancia M_R

Factores de orden cero

Capítulo 5

Diagramas de Nyquist

Factor integral

Factor derivativo

Factores de primer orden

Factores de segundo orden

Capítulo 6

Criterio de Estabilidad de Nyquist

Ejemplos

Capítulo 7

Estabilidad Relativa

Margen de Fase

Estable

Inestable

Margen de Ganancia

Estable

Inestable

Capítulo 8

Compensador de adelanto y atrase de fase (Frecuencia)

Compensador de adelanto de fase

Compensador de atraso de fase

Ejemplos

Capítulo 9

Controladores PID

Sintonización: Reglas de Ziegler-Nichols

Respuesta al escalón

Respuesta a oscilaciones sostenidas

Esquemas modificados

Controlador PID

Controlador PI-D

Controlador I-PD

Capítulo 10

Representación de estado

La siguiente funcion de transferencia es la Transformada de Laplace de la ecuacion diferencial ordinaria de orden n que describe al sistema.

$$\frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + ... + b_{m-1} s + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + ... + a_{n-1} s + a_n} = \frac{B(s)}{A(s)}, m \leqslant n \tag{10.1}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^n}{dt^n} y(t) + a_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} y(t) + \cdots + a_{n-1} \frac{d}{dt} y(t) + a_n \frac{d}{dt} y(t) \\ = b_0 \frac{d^m}{dt^m} u(t) + b_1 \frac{d^{m-1} dt^{m-1}}{u}(t) + \cdots + b_{m-1} \frac{d}{dt} u(t) + b_m u(t)\end{aligned} \tag{10.2}$$

Haciendo la siguiente asignacion de variables:

$$\begin{aligned}
x_1 &= z \\
x_2 &= \frac{d}{dt} x_1 = \frac{d}{dt} z \\
x_3 &= \frac{d}{dt} x_2 = \frac{d^2}{dt^2} z \\
\vdots &= \vdots \\
x_{n-1} &= \frac{d}{dt} x_{n-2} = \frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}} z \\
x_n &= \frac{d}{dt} x_{n-1} = \frac{d^{n-1}}{d^{n-1}} z
\end{aligned}$$

Donde:

$$\frac{d}{dt} x_n = -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \cdots - a_2 x_{n-1} - a_1 x_n + u(t) \tag{10.3}$$

$$y = b_m x_1 + b_{m-1} x_2 + \cdots + b_1 x_{m-1} + b_0 x_m \tag{10.4}$$

Por lo que se obtiene:

$$\left(\frac{d^n}{dt^n} + a_1\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{d}{dt} + a_n\right) z(t) = u(t)$$

$$y(t) = \left(b_m + b_{m-1}\frac{d}{dt} + \cdots + b_1\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} + b_0\frac{d^m}{dt^m}\right) z(t)$$

es decir:

$$M\left(\frac{d}{dt}\right) z(t) = u(t) \tag{10.5}$$

$$y(t) = N\left(\frac{d}{dt}\right) z(t) \tag{10.6}$$

Lo cual implica $M\left(\frac{d}{dt}\right) y(t) = N\left(\frac{d}{dt}\right) u(t)$. Donde:

$$M\left(\frac{d}{dt}\right) = \left(\frac{d^n}{dt^n} + a_1\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{d}{dt} + a_n\right)$$

$$N\left(\frac{d}{dt}\right) = \left(b_m + b_{m-1}\frac{d}{dt} + \cdots + b_1\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} + b_0\frac{d^m}{dt^m}\right)$$

Esta es la misma ecuación diferencial con la que empezamos. Note que la escritura matricial de esta Ecuación Diferencial Ordinaria[1] es:

$$\frac{d}{dt}\vec{x} = A\vec{x}(t) + \vec{b}u(t) \tag{10.7}$$

$$\vec{y}(t) = \vec{c}^{T} \cdot \vec{x}(t) \tag{10.8}$$

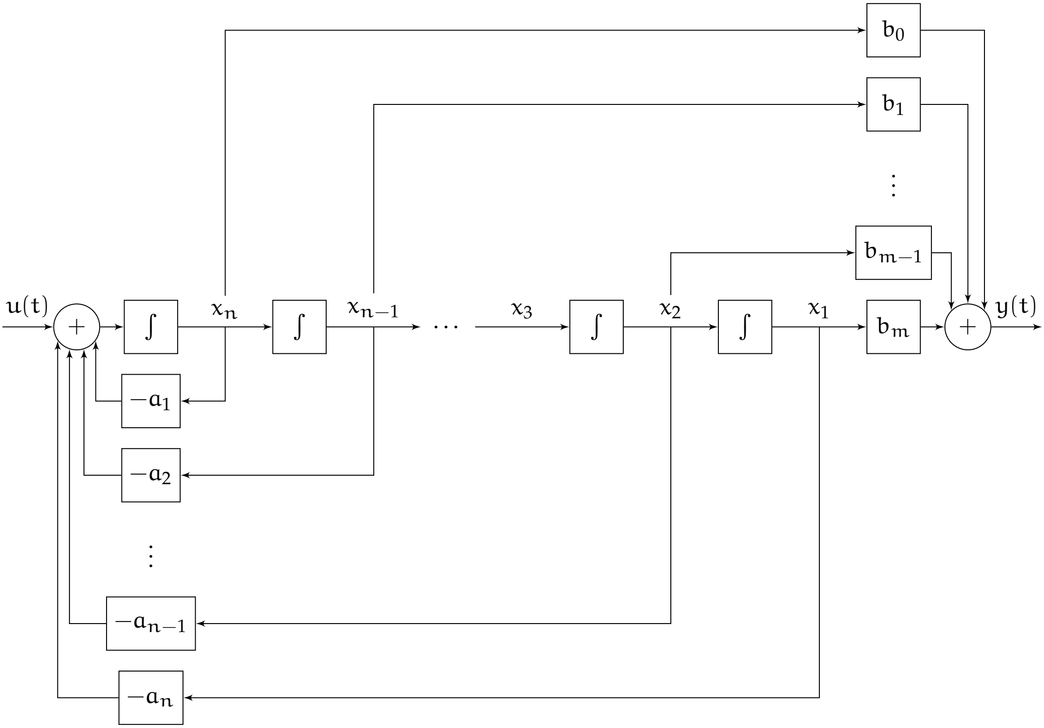
Donde:

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \tag{10.9}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix} \tag{10.10}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \tag{10.11}$$

[1]Si bien la notación correcta es la que se utiliza justo ahora, al final del capitulo se dejará a un lado, para obviar el hecho de que son vectores y matrices, sin que por eso se entienda que ya no lo son.



$$\vec{c} = \begin{pmatrix} b_m \\ b_{m-1} \\ \vdots \\ b_1 \\ b_0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{10.12}$$

Solución temporal de la ecuación de estado

1. Para el caso en que A es un escalar y la solución es homogénea se considera la siguiente Ecuación Diferencial Ordinaria:

$$\frac{d}{dt}x(t) = ax(t) \mid x(0) = x_0 \tag{10.13}$$

Suponga una solución de la forma:

$$x(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \cdots + \alpha_k t^k + \ldots \tag{10.14}$$

Entonces se tiene:

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 t + 3\alpha_3 t^2 + \cdots + k\alpha_k t^{k-1} + \ldots$$
$$= a\alpha_0 + a\alpha_1 t + a\alpha_2 t^2 + \cdots + a\alpha_k t^k + \ldots$$

Por lo que las α_i deben satisfacer:

$$\begin{array}{ccccc} \alpha_1 & = & a\alpha_0 & = & \frac{1}{1!}a^1\alpha_0 \\ \alpha_2 & = & a\alpha_1 & = & \frac{1}{2!}a^2\alpha_0 \\ \alpha_3 & = & a\alpha_2 & = & \frac{1}{3!}a^3\alpha_0 \\ \vdots & = & \vdots & = & \vdots \\ \alpha_k & = & a\alpha_{k-1} & = & \frac{1}{k!}a^k\alpha_0 \end{array} \quad ; \quad \alpha_0 = x_0 \tag{10.15}$$

Esto es:

$$x(t) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}(at)^i \right) x_0$$

$$x(t) = e^{at}x_0 \tag{10.16}$$

Notese que: $\frac{d}{dt}x(t) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}\frac{d}{dt}(at)^i \right) x_0 = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(i-1)!}(at)^{i-1} \right) ax_0 = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}(at)^j \right) ax_0$

$$\frac{d}{dt}x(t) = ae^{at}x_0 = ax(t) \quad x(0) = x_0$$

2. Para el caso en que A es una matriz y la solución es homogénea se considera la siguiente Ecuación Diferencial Ordinaria:

$$\frac{d}{dt}\vec{x}(t) = a\vec{x}(t) \mid \vec{x}(0) = \vec{x}_0 \tag{10.17}$$

De la misma manera que en el caso escalar, se supone una solución de la forma:

$$\vec{x}(t) = \vec{\alpha}_0 + \vec{\alpha}_1 t + \vec{\alpha}_2 t^2 + \cdots + \vec{\alpha}_k t^k + \ldots \tag{10.18}$$

Entonces se tiene:

$$\vec{\alpha}_1 + 2\vec{\alpha}_2 t + 3\vec{\alpha}_3 t^2 + \cdots + k\vec{\alpha}_k t^{k-1} + \ldots$$
$$= A\vec{\alpha}_0 + A\vec{\alpha}_1 t + A\vec{\alpha}_2 t^2 + \cdots + A\vec{\alpha}_k t^k + \ldots$$

Por lo que las $\vec{\alpha}_i$ deben satisfacer:

$$\begin{array}{ccccc} \vec{\alpha}_1 & = & A\vec{\alpha}_0 & = & \frac{1}{1!}A^1\vec{\alpha}_0 \\ \vec{\alpha}_2 & = & A\vec{\alpha}_1 & = & \frac{1}{2!}A^2\vec{\alpha}_0 \\ \vec{\alpha}_3 & = & A\vec{\alpha}_2 & = & \frac{1}{3!}A^3\vec{\alpha}_0 \\ \vdots & = & \vdots & = & \vdots \\ \vec{\alpha}_k & = & A\vec{\alpha}_{k-1} & = & \frac{1}{k!}A^k\vec{\alpha}_0 \end{array} \quad ; \quad \vec{\alpha}_0 = \vec{x}_0 \tag{10.19}$$

Esto es:

$$\vec{x}(t) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}(At)^i \right) \vec{x}_0$$

En análisis real, se demuestra que esta serie es absolutamente convergente y se define como:

$$\exp(At) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}(At)^i \tag{10.20}$$

Notese que:

$$\frac{d}{dt}\exp(At) = \frac{d}{dt}\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}(At)^i = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(i-1)!}(At)^{i-1} \right) A = A\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}(At)^j = A\exp(At)$$

Por lo que:

$$\vec{x}(t) = \exp(At)\vec{x}_0$$

$$\frac{d}{dt}\vec{x}(t) = A\exp(At)\vec{x}_0 = A\vec{x}(t) \quad \vec{x}(0) = \vec{x}_0$$

3. Para el caso en que A es escalar y la solución es forzada:

$$\frac{d}{dt}x(t) = ax(t) + bu(t) \mid x(0) = 0 \tag{10.21}$$

La solución a esta ecuación es:

$$x(t) = \int_0^t e^{a(t-\tau)} bu(\tau)\, d\tau \tag{10.22}$$

$$\frac{d}{dt}x(t) = e^{a(t-t)}bu(t) + \int_0^t \frac{d}{dt}e^{a(t-\tau)}bu(\tau)\, d\tau = bu(t) + a\int_0^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)\, d\tau$$

$$\frac{d}{dt}x(t) = bu(t) + ax(t) \tag{10.23}$$

Por lo que la solución general (con $x(0) = x_0$):

$$x(t) = e^{at}x_0 + \int_0^t e^{a(t-\tau)} bu(\tau)\, d\tau \tag{10.24}$$

4. Para el caso en que A es una matriz y la solución es forzada:

$$\frac{d}{dt}\vec{x}(t) = A\vec{x}(t) + \vec{b}u(t) \mid \vec{x}(0) = 0 \tag{10.25}$$

La solución de esta ecuación es:

$$\vec{x}(t) = \int_0^t \exp\left(A(t-\tau)\right)\vec{b}u(\tau)\, d\tau \tag{10.26}$$

En efecto, derivando tenemos:

$$\frac{d}{dt}\vec{x}(t) = \exp\left(A(t-t)\right)\vec{b}u(t) + \int_0^t \frac{d}{dt}\exp\left(A(t-\tau)\right)\vec{b}u(\tau)\, d\tau = \vec{b}u(t) + A\int_0^t \exp\left(A(t-\tau)\right)$$

$$\frac{d}{dt}\vec{x}(t) = \vec{b}u(t) + a\vec{x}(t) \tag{10.27}$$

Por lo que la solución general (con $x(0) = x_0$):

$$\vec{x}(t) = \exp\left(At\right)\vec{x}_0 + \int_0^t \exp\left(A(t-\tau)\right)\vec{b}u(\tau)\, d\tau \tag{10.28}$$

Función (Matriz) de transferencia de la ecuación de estado

1. Para el caso escalar, se tiene que la transformada de Laplace con coeficientes independientes nulos es:

$$
\begin{aligned}
sx(s) &= ax(s) + bu(s) \\
(s-a)x(s) &= bu(s) \\
x(s) &= (s-a)^{-1}bu(s) \\
x(s) &= \frac{b}{s-a}u(s)
\end{aligned}
$$

Por lo que:

$$e^{at} = \mathcal{L}^{-1}\left\{(s-a)^{-1}\right\} \tag{10.29}$$

2. Para el caso matricial, tenemos que la transformada de Laplace con coeficientes independientes nulos es:

$$
\begin{aligned}
s\vec{x}(s) &= A\vec{x}(s) + \vec{b}u(s) \\
(sI-A)\vec{x}(s) &= \vec{b}u(s) \\
x(s) &= (sI-A)^{-1}\vec{b}u(s)
\end{aligned}
$$

Por lo que:

$$\exp(At) = \mathcal{L}^{-1}\left\{(sI-A)^{-1}\right\} \tag{10.30}$$

Función de transferencia de la representación de estado

Sea la siguiente Ecuación Diferencial Ordinaria:

$$M\left(\frac{d}{dt}\right)y(t) = N\left(\frac{d}{dt}\right)u(t)$$

donde:

$$M\left(\frac{d}{dt}\right) = \frac{d^n}{dt^n} + a_1\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{d}{dt} + a_n$$

$$N\left(\frac{d}{dt}\right) = b_m + b_{m-1}\frac{d}{dt} + \cdots + b_1\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} + b_0\frac{d^m}{dt^m}$$

La función de transferencia con coeficientes independientes nulos de las ecuaciones es:

$$F(s) = \frac{N(s)}{M(s)} = \frac{\frac{d^n}{dt^n} + a_1\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{d}{dt} + a_n}{b_m + b_{m-1}\frac{d}{dt} + \cdots + b_1\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} + b_0\frac{d^m}{dt^m}} \tag{10.31}$$

Ceros. Las raíces del polinomio $N(s)$.

Polos. Las raíces del polinomio $M(s)$.

Sea la siguiente representación de estado de la Ecuación Diferencial Ordinaria:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x &= Ax + bu \\ y &= c^T x + du \end{aligned}$$

La función de transferencia con coeficientes independientes nulos en esta representación es:

$$\begin{aligned} sx(s) &= Ax(s) + bu(s) \\ y(s) &= c^T x(s) + du(s) \end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned} (sI - A)x(s) &= bu(s) \\ y(s) &= c^T x(s) + du(s) \end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned} x(s) &= (sI - A)^{-1}bu(s) \\ y(s) &= c^T x(s) + du(s) \end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$y(s) = c^T[(sI - A)^{-1}bu(s)] + du(s) = [c^T(sI - A)^{-1}b + d]u(s)$$

$$\vdots$$

$$F(s) = c^T(sI - A)^{-1}b + d \tag{10.32}$$

Matriz sistema

$$\Sigma(s) = \begin{pmatrix} sI - A & b \\ -c^T & d \end{pmatrix} \tag{10.33}$$

Note que:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} (sI-A)^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} sI - A & b \\ -c^T & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -(sI-A)b \\ 0 & I \end{pmatrix} \\
= \begin{pmatrix} I & (sI-A)^{-1}b \\ -c^T & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -(sI-A)b \\ 0 & I \end{pmatrix} \\
= \begin{pmatrix} I & 0 \\ -c^T & (c^T(sI-A)^{-1}b + d) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Por lo que:

$$\det\left((sI-A)^{-1}\right) \cdot \det\left(\Sigma(s)\right) \cdot I = c^T(sI-A)^{-1}b + d$$

$$F(s) = \frac{\det\left(\Sigma(s)\right)}{\det\left(sI - A\right)} \tag{10.34}$$

Por lo que los polos coinciden con los valores propios de A y los ceros son los números complejos que hacen perder rango a la matriz sistema.

$$\text{Polos: } F(s) = \{s \in \mathbb{C} \mid \det\left(sI - A\right) = 0\} \tag{10.35}$$

$$\text{Ceros: } F(s) = \{s \in \mathbb{C} \mid \det\left(\Sigma(s)\right) = 0\} \tag{10.36}$$

Propiedades de la Matriz A

I) Defininción de la matriz exponencial.

$$\exp\left(At\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}(At)^{i} \tag{10.37}$$

II) Derivada de la matriz exponencial.

$$\frac{d}{dt}\exp\left(At\right) = A\exp\left(At\right) = (\exp\left(At\right))A \tag{10.38}$$

III) Linealidad del operador matriz exponencial bajo escalar.

$$\begin{aligned}
\exp\left(At\right)\exp\left(A\tau\right) &= \left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}(At)^{i}\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}(A\tau)^{j}\right)\\
&= \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}A^{i+j}\frac{t^{i}\tau^{j}}{i!j!} = \sum_{k=0}^{\infty}A^{k}\sum_{i=0}^{k}\frac{t^{i}\tau^{k-i}}{i!(k-i)!}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}A^{k}\frac{(t+\tau)^{k}}{k!} = \exp\left(A(t+\tau)\right)
\end{aligned} \tag{10.39}$$

IV) Linealidad del operador matriz exponencial bajo matriz.

$$\exp\left((A+B)t\right) = \exp\left(At\right)\exp\left(Bt\right) \iff AB = BA \tag{10.40}$$

V) Cambio de base.

Sean dos matrices similares A y $\bar{A}$, esto es, dos matrices relacionadas por un cambio de base, T matriz invertible, esto es $\bar{A} = T^{-1}AT$.

a) Las matrices exponenciales asociadas a las matrices A y $\bar{A}$ también son similares. En efecto:

$$\begin{aligned}
T^{-1}\exp\left(At\right)T = T^{-1}\left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}(At)^{i}\right)T &= \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}T^{-1}A^{i}Tt^{i}\\
&= \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}(T^{-1}AT)^{i}t^{i} = \exp\bar{A}t
\end{aligned}$$

b) Los valores propios son invariantes bajo cambio de base. En efecto:

$$\begin{aligned}
\det\left(sI-\bar{A}\right) = \det\left(sI-T^{-1}AT\right) &= \det\left(sT^{-1}T-T^{-1}AT\right)\\
&= \det\left(T^{-1}(sI-A)T\right) = \det\left(T^{-1}\right)\det\left(sI-A\right)\det\left(T\right)\\
&= \frac{1}{\det\left(T\right)}\det\left(sI-A\right)\det\left(T\right) = \det\left(sI-A\right)
\end{aligned}$$

c) Las raíces de la matriz sistema son invariantes bajo cambio de base. En efecto, sea el sistema representado por:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x &= Ax + bu \\ y &= c^T x + du\end{aligned}$$

Sea el cambio de variable $x = T\bar{x}$, T invertible. Entonces:

$$\begin{aligned}T\frac{d}{dt}\bar{x} &= AT\bar{x} + bu \\ y &= c^T T\bar{x} + du\end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\bar{x} &= T^{-1}AT\bar{x} + T^{-1}bu \\ y &= c^T T\bar{x} + du\end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\bar{x} &= \bar{A}\bar{x} + \bar{b}u \\ y &= \bar{c}^T\bar{x} + du\end{aligned} \tag{10.41}$$

donde $\bar{A} = T^{-1}AT$, $\bar{b} = T^{-1}b$, $\bar{c}^T = c^T T$. La matriz sistema se puede escribir de la siguiente manera:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} sI - A & b \\ -c^T & d \end{pmatrix} \implies \bar{\Sigma} = \begin{pmatrix} sI - \bar{A} & \bar{b} \\ -\bar{c}^T & d \end{pmatrix} \tag{10.42}$$

Notese que:

$$\bar{\Sigma} = \begin{pmatrix} sI - \bar{A} & \bar{b} \\ -\bar{c}^T & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} sI - A & b \\ -c^T & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo que:

$$\det\bar{\Sigma} = \det T^{-1} \det\Sigma \det T = \det\Sigma$$

VI) Forma de Jordan

Dada una matriz A, existe una matriz de cambio de base T, tal que:

$$T^{-1}AT = J = D + N \tag{10.43}$$

donde D es una matriz diagonal (conteniendo los valores propios) y N es una matriz nilpotente ($\exists\gamma \in \mathbb{N} \mid N^{\gamma} = 0$) de la forma:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Note que $DN = ND$, por lo que:

$$\exp\left((D+N)t\right) = \exp\left(Dt\right)\exp\left(Nt\right) \tag{10.44}$$

donde:

$$\exp\left(Dt\right) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

$$\exp\left(Nt\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}(Nt)^i = \sum_{i=0}^{\gamma-1} \frac{1}{i!}(Nt)^i$$

VII) Teorema de Cayley-Hamilton

Toda transformación lineal A satisface su polinomio característico.

$$\Pi(s) = \det\left(sI - A\right) = s^n + \pi_1 s^{n-1} + \cdots + \pi_{n-1}s + \pi_n \tag{10.45}$$

$$\Pi(A) = A^n + \pi_1 A^{n-1} + \cdots + \pi_{n-1}A + \pi_n I = 0 \tag{10.46}$$

Una implicación directa es que la n-esima potencia de una transformación lineal A, es una combinación lineal de sus potencias predecesoras.

$$A^n = -\pi_n I - \pi_{n-1}A - \cdots - \pi_1 A^{n-1}$$

A su vez, esto implica:

$$\exp\left(At\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} A^i t^i = \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(t) A^n \tag{10.47}$$

donde:

$$\varphi_i(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_{ij} t^j$$

Capítulo 11

Controlabilidad y asignación de polos

Sea un sistema para la Ecuación Diferencial Ordinaria:

$$M\left(\frac{d}{dt}\right)y(t) = N\left(\frac{d}{dt}\right)u(t) \tag{11.1}$$

Sea la siguiente representación de estado de esta Ecuación Diferencial Ordinaria:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x &= Ax + bu \\ y &= c^T x + du \end{aligned}$$

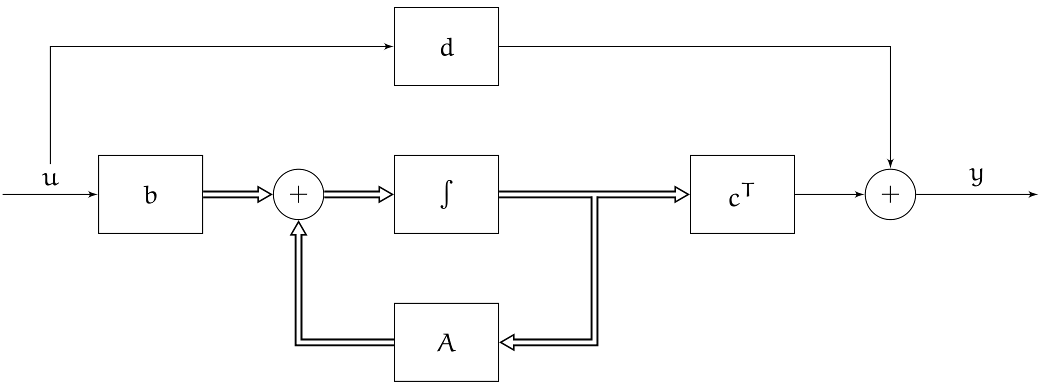
donde $x \in \mathbb{R}^n$ y $u, y \in \mathbb{R}$.

Problema. Se desea encontrar una ley de control $u = f(x)$, que nos permita asignar los polos a voluntad.

Sabemos que:

Polos. $\{s \in \mathbb{C} \mid M(s) = 0\} = \{s \in \mathbb{C} \mid \det(sI - A)\}$

Para resolver este problema hay que investigar el concepto estructural de la alcanzabilidad.



Alcanzabilidad y Controlabilidad

- Una representación de estado se dice controlable, si para cualquier condición inicial, $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$, existe una trayectoria, $x(\cdot)$, solución de la ecuación de estado, tal que en tiempo finito $t_f \in \mathbb{R}$ se llega al origen $(x(t_f) = 0)$.

- Una representación de estado se dice alcanzable, si para cualquier punto $x \in \mathbb{R}$, existe una trayectoria, $x(\cdot)$, solución de la ecuación de estado, tal que en tiempo finito $t_f \in \mathbb{R}$ se llega a un punto cualquiera $(x(t_f) = x_f)$ desde el origen.

En los sistemas lineales estas dos propiedades están mutuamente implicadas, por lo que se les trata indistinguiblemente. Pero en general:

$$\text{Alcanzabilidad} \implies \text{Controlabilidad} \tag{11.2}$$

La solución temporal de $\frac{dx}{dt} = Ax + bu$ con $x(0) = 0$ es:

$$x(t) = \int_0^t \exp\left(A(t-\tau)\right) b u(\tau) d\tau \tag{11.3}$$

del teorema de Cayley-Hamilton se tiene:

$$\exp\left(At\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} A^i t^i = \sum_{i=0}^{n-1} \varphi_i(t) A^i \tag{11.4}$$

donde $\varphi_i(t) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \varphi_{ij} t^j$, $\varphi_{ij} \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{Z}^+$. Por lo anterior, tenemos:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{i=0}^{n-1} \psi_i(t) A^i b \\ x(t) &= \begin{pmatrix} b & Ab & \dots & A^{n-1}b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_0(t) \\ \psi_1(t) \\ \vdots \\ \psi_{n-1}(t) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{11.5}$$

donde $\psi_i(t) = \int_0^t \varphi_i(t-\tau) u(\tau) d\tau$.

Entonces una condición necesaria para que $x(t_f) = x_f \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall t_f \in \mathbb{R}, t_f > 0$, es que la matriz de controlabilidad

$$C_{(A,b)} = \begin{pmatrix} b & Ab & \dots & A^{n-1}b \end{pmatrix} \tag{11.6}$$

sea de rango pleno por filas, de lo contrario existen componentes de $x(t)$ que siempre seran nulos. En nuestro caso particular $(y, u \in \mathbb{R}^n)$:

$$\det C_{(A,b)} \neq 0 \tag{11.7}$$

Si la matriz de controlabilidad $C_{(A,b)}$ es de rango pleno por filas, entonces el gramiano de controlabilidad es invertible. [1]

[1] Aquí se esta abusando de la notación, ya que el gramiano de controlabilidad corresponde al caso en que $t \to \infty$

$$W = \int_0^t \exp(A\sigma) b b^t \exp(A^t \sigma) d\sigma \quad t > 0, \sigma = t - \tau \tag{11.8}$$

Entonces, con la siguiente ley de control se tiene:

$$u(t) = b^t \exp(A^t(t_f - t)) W_{t_f}^{-1} x_f \tag{11.9}$$

Por lo que si sustituimos t_f en la solución para $x(t)$:

$$\begin{aligned} x(t_f) &= \int_0^{t_f} \exp(A(t-\tau)) b u(\tau) d\tau \\ &= \int_0^{t_f} \exp(A(t-\tau)) b b^t \exp(A^t(t_f - \tau)) W_{t_f}^{-1} x_f d\tau \\ &= \int_{t_f}^{0} \exp(A\sigma) b b^t \exp(A^t \sigma) d\sigma W_{t_f}^{-1} x_f \\ &= W_{t_f} W_{t_f}^{-1} x_f = x_f \end{aligned} \tag{11.10}$$

- Por lo que una condición suficiente y necesaria para que la ecuación de estado sea alcanzable (y por lo tanto controlable), es que su matriz de controlabilidad, $C_{(A,b)}$, sea de rango pleno por filas.
- Cuando la matriz de controlabilidad es de rango pleno por filas, se dice que el par (A, b) es controlable.

Asignación de polos

Sea la ecuación de estado controlable, es decir $\frac{dx}{dt} = Ax + bu$ con $b \neq 0$, $\det\left(C_{(A,b)}\right) \neq 0$, $\Pi(s)$ y $\alpha(s)$ los polinomios característico y mínimo de A respectivamente.

$$\Pi(s) = \det(sI - A) \quad \text{grado } \Pi(s) = n$$

$$\alpha(s) \text{ es el polinomio de menor grado tal que } \alpha(A) = 0$$

Sea $\kappa =$ grado $\alpha(s)$, donde obviamente $1 \leqslant \kappa \leqslant n$.

$$\alpha(s) = s^{\kappa} + (a_{\kappa} + a_{\kappa-1}s + \cdots + a_1 s^{\kappa-1})$$

$$\alpha(A) = A^{\kappa} + (a_{\kappa} + a_{\kappa-1}A + \cdots + a_1 A^{\kappa-1})$$

Sean α_i con $i \in \{0, 1, \ldots, \kappa\}$, los polinomios mónicos auxiliares tales que:

$$\begin{aligned}
\alpha_0(s) &= \alpha(s) \\
\alpha_1(s) &= s^{\kappa-1} + (a_{\kappa-1} + a_{\kappa-2}s + \cdots + a_1 s^{\kappa-2}) \\
&\vdots \\
\alpha_{\kappa-1}(s) &= s + a_1 \\
\alpha_{\kappa}(s) &= 1
\end{aligned}$$

en donde, por definición, $\alpha_1(A) \neq 0$ y $\alpha_0(A) = 0$.
Sea $b \neq 0$, un vector en $\mathbb{R}^n$ tal que su polinomio mínimo coincide con $\alpha(s)$.

$$\begin{aligned}
\alpha_i(A)b &\neq 0 \quad i \in \{1, 2, \ldots, \kappa\} \\
\alpha_0(A)b &= 0
\end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned}
(A^{\kappa-1} + (a_{\kappa-1} + a_{\kappa-2}A + \cdots + a_1 A^{\kappa-2}))b &\neq 0 \\
\alpha_0(A)b &= 0
\end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} b & Ab & \ldots & A^{\kappa-1}b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{\kappa-1} \\ a_{\kappa-2} \\ \vdots \\ a_1 \end{pmatrix} &\neq 0 \\
\alpha_0(A)b &= 0
\end{aligned}$$

Suponga que el par (A, b) es controlable, por lo tanto $\det C_{(A,b)} \neq 0$, entonces:

$$\begin{pmatrix} b & Ab & \dots & A^{n-1}b \end{pmatrix} v \neq 0 \quad \forall v \neq 0 \quad \therefore \kappa = n \tag{11.11}$$

Por lo que el polinomio mínimo y el polinomio característico coinciden cuando el par (A, b) es controlable. Definimos la base:

$$\begin{aligned}
e_n &= \alpha_n(A)b = b \\
e_{n-1} &= \alpha_{n-1}(A)b = (A + a_1 I)b = Ae_n + a_1 e_n \\
e_{n-2} &= \alpha_{n-2}(A)b = (A^2 + (a_2 I + a_1 A))b = A(A + a_1 I)b + a_2 b = Ae_{n-1} + a_2 e_n \\
\vdots &= \vdots \\
e_1 &= \alpha_1(A)b = Ae_2 + a_{n-1}e_n
\end{aligned} \tag{11.12}$$

Note que sustituyendo A, tenemos:

$$\alpha(A)b = (A^n + (a_n I + a_{n-1}A + \cdots + a_1 A^{n-1}))b = Ae_1 + a_n e_n = 0 \tag{11.13}$$

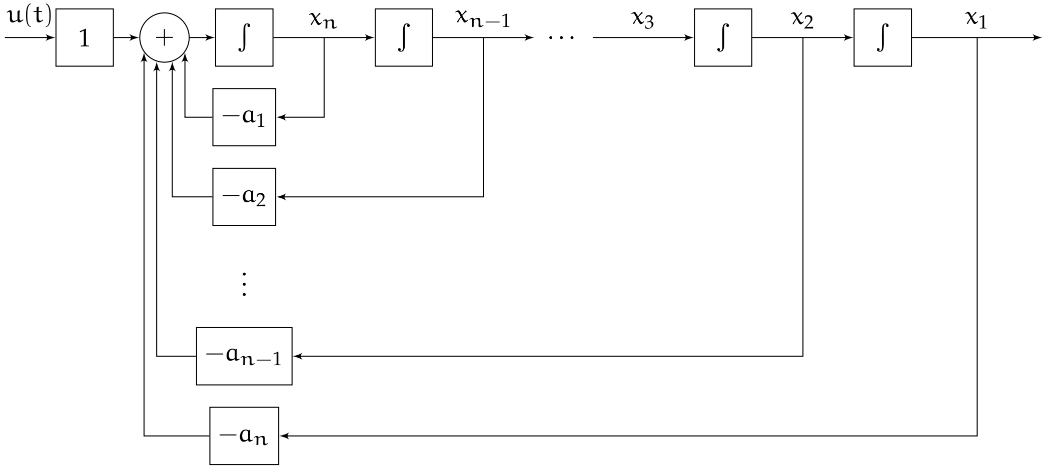
Por lo que:

$$\begin{aligned}
e_n &= b \\
Ae_n &= e_{n-1} - a_1 e_n \\
Ae_{n-1} &= e_{n-2} - a_2 e_n \\
\vdots &= \vdots \\
Ae_2 &= e_1 - a_{n-1}e_n \\
Ae_1 &= -a_n e_n
\end{aligned} \tag{11.14}$$

Entonces, bajo la base definida, las transformaciones lineales tienen la siguiente forma:

$$A_c = [A]_{\{e_1, e_2, \dots, e_n\}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix} \tag{11.15}$$

$$b_c = [b]_{\{e_1, e_2, \dots, e_n\}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{11.16}$$



Por lo tanto:

$$\frac{d}{dt}x_c = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix} x_c + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \tag{11.17}$$

Observaciones.

1. Polinomio Característico

$$\det(sI - A_c) = s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n = \Pi(s)$$

2. Retroalimentación de Estado

   Sea $u = f_c x_c + v$, donde $f_c = (a_n - \bar{a}_n)(a_{n-1} - \bar{a}_{n-1})\dots(a_1 - \bar{a}_1)$. Entonces el sistema de lazo cerrado es:

$$\frac{d}{dt}x_c = A_{f_c}x_c + b_c v \tag{11.18}$$

   donde $A_{f_c} = A_c + b_c f_c$, es decir:

$$A_{f_c} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ -\bar{a}_n & -\bar{a}_{n-1} & -\bar{a}_{n-2} & \dots & -\bar{a}_3 & -\bar{a}_2 & -\bar{a}_1 \end{pmatrix} \tag{11.19}$$

y su polinomio característico es $\det(sI - A_{f_c}) = s^n + \bar{a}_1 s^{n-1} + \cdots + \bar{a}_{n-1} s + \bar{a}_n$.

Propiedades de la matriz de controlabilidad

1. Matriz de controlabilidad del par (A_c, b_c).

$$C_{(A_c,b_c)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \dots & * \\ 0 & 1 & * & \dots & * \\ 1 & * & * & \dots & * \end{pmatrix} \tag{11.20}$$

lo que implica:

$$\det C_{(A_c,b_c)} = \pm 1 \tag{11.21}$$

2. Invarianza de la matriz de controlabilidad bajo cambio de base.

Sea el par (A, b) controlable, sea T una matriz de cambio de base y sean $A_1 = T^{-1}AT$ y $b_1 = T^{-1}b$ las matrices de nuestra nueva base.

$$\begin{aligned} C_{(A_1,b_1)} = \begin{pmatrix} b_1 & A_1 b_1 & \dots & A^{n-1} b_1 \end{pmatrix} = \\ \begin{pmatrix} T^{-1}b & T^{-1}ATT^{-1}b & \dots & (T^{-1}AT \dots T^{-1}AT)T^{-1}b \end{pmatrix} = \\ \begin{pmatrix} T^{-1}b & T^{-1}Ab & \dots & T^{-1}A^{n-1}b \end{pmatrix} = \\ T^{-1} \begin{pmatrix} b & Ab & \dots & A^{n-1}b \end{pmatrix} = T^{-1}C_{(A,b)} \end{aligned}$$

por lo que, podemos notar la siguiente correspondencia:

$$C_{(A_1,b_1)} = \frac{C_{(A,b)}}{T}$$

Mas notablemente podemos notar una manera de calcular la transformación lineal a una forma controlable.

$$T = C_{(A,b)} C^{-1}_{(A_1,b_1)} \tag{11.22}$$

3. Invarianza de la matriz de controlabilidad bajo retroalimentación de estado, $u = f^T x + v$.

Sea $A_f = A + bf^T$ la matriz A del sistema bajo la retroalimentación de estado $u = f^T x + v$. Tendremos que la matriz de controlabilidad de este sistema retroalimentado será:

$$\begin{aligned} C_{(A_f,b)} = \begin{pmatrix} b & A_f b & \dots & A_f^{n-1} b \end{pmatrix} = \\ \begin{pmatrix} b & \left(A + bf^T\right) b & \dots & \left(A + bf^T\right)^{n-1} b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

en donde podemos notar que los terminos van obteniendo la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
\left(A+bf^T\right)b &= Ab+b(f^Tb)=Ab+k_1b\\
\left(A+bf^T\right)^2b &= A^2b+k_1Ab+b(f^TAb+k_1(f^Tb))\\
&= A^2b+k_1Ab+k_2b\\
&\vdots\\
\left(A+bf^T\right)^{n-1}b &= A^{n-1}b+k_1A^{n-2}b+\cdots+k_{n-2}Ab+k_{n-1}b
\end{aligned}
$$

en donde los terminos k_i estan relacionados unicamente con f_T y b, y dejan de fuera a un termino b, por lo que es inmediato ver que lo podemos reescribir de la siguiente manera:

$$C_{(A_f,b)}=\begin{pmatrix}b & Ab & \dots & A^{n-1}b\end{pmatrix}\mathbb{X}$$

$$C_{(A_f,b)}=C_{(A,b)}\mathbb{X} \tag{11.23}$$

donde $\mathbb{X}$ toma la forma:

$$\mathbb{X}=\begin{pmatrix}1 & k_1 & k_2 & \dots & k_{n-1}\\ 0 & 1 & k_1 & \dots & k_{n-2}\\ 0 & 0 & 1 & \dots & k_{n-3}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1\end{pmatrix}$$

lo cual implica que $\det\mathbb{X}=\pm 1$, es decir:

$$\det C_{(A,b)}\neq 0 \implies \det C_{(A_f,b)}\neq 0$$

en particular nosotros tenemos que:

$$\det C_{(A,b)}=\det C_{(A_f,b)} \tag{11.24}$$

Dada la invarianza de la matriz de controlabilidad ($C_{(A,b)}$) bajo cambio de base y retroalimentación de estado, Brunovskii estudió la controlabilidad de los sistemas lineales con todos sus valores propios (polos) en el origen[2]:

$$\begin{pmatrix}A_{Br} & b_{Br}\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{cccccc|c}0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \tag{11.25}$$

[2]El teorema de Brunovskii en realidad esta redactado para sistemas multientradas, y se expresa en matrices diagonales por bloques de tamaño $k_i\times(k_i+1)$, con $\sum_{i=0}^{n}k_i=n$, donde k_i son los indices de controlabilidad

A los indeices k_i de los polinomios mínimos se les denomina indices de controlabilidad. En nuestro caso particular, existe solamente un indice de controlabilidad; $k_i = n$.

4. Invarianza de los ceros del sistema bajo retroalimentación de estado.

   Sea la matriz sistema del sistema en lazo abierto la siguiente:

$$\Sigma(s) = \begin{pmatrix} sI - A & b \\ -c^T & d \end{pmatrix}$$

   entonces, la matriz sistema bajo la retroalimentación será:

$$\Sigma_{lc}(s) = \begin{pmatrix} sI - (A + bf^T) & b \\ -(c^T + df^T) & d \end{pmatrix}$$

   notando que:

$$\begin{pmatrix} sI - A & b \\ -c^T & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -f^T & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sI - (A + bf^T) & b \\ -(c^T + df^T) & d \end{pmatrix}$$

   por lo que:

$$\det \Sigma(s) = \det \Sigma_{lc}(s) \tag{11.26}$$

   Se concluye que la retroalimentaión de estado no afecta a los ceros del sistema; solo puede modificar a los polos controlables.

Formas canónicas

Sea un sistema lineal invariante en el tiempo, una entrada, una salida (SISO), descrito por la siguiente Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO):

$$\left(\frac{d^n}{dt^n} + a_1\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{d}{dt} + a_n\right) y(t) = \left(b_n + b_{n-1}\frac{d}{dt} + \cdots + b_1\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\right) u(t) \tag{11.27}$$

Forma canónica controlador

$$\frac{d}{dt}x_c = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix} x_c + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \tag{11.28}$$

$$y = \begin{pmatrix} b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \dots & b_2 & b_1 \end{pmatrix} x_c \tag{11.29}$$

Polos.

$$\det(sI - A_c) = s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_{n-1}s + a_n \tag{11.30}$$

Ceros.

$$\det \Sigma(s) = b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1}s + b_n \tag{11.31}$$

Matriz de Controlabilidad.

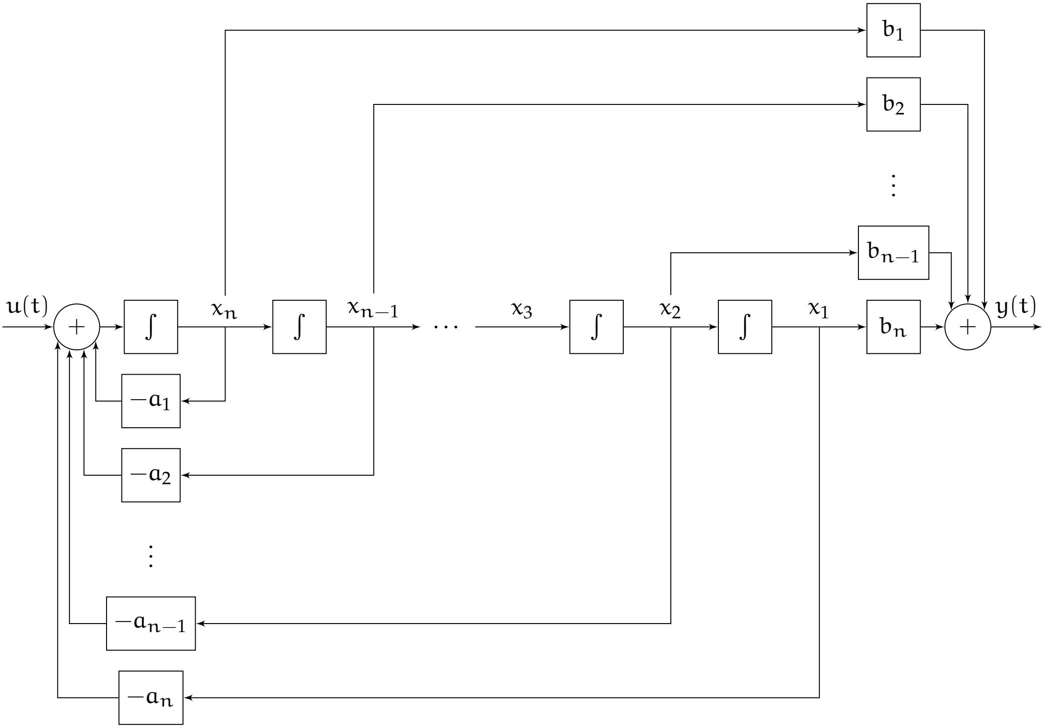
$$C_{(A_c,b_c)} = \begin{pmatrix} b_c & A_c b_c & \dots & A_c^{n-1}b_c \end{pmatrix} \implies \det C_{(A_c,b_c)} = 1 \tag{11.32}$$

Forma canónica controlabilidad

$$\frac{d}{dt}x_c = \begin{pmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -a_3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{n-2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ -a_{n-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ -a_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x_c + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \tag{11.33}$$

$$y = \begin{pmatrix} \beta_n & \beta_{n-1} & \beta_{n-2} & \dots & \beta_2 & \beta_1 \end{pmatrix} x_c \tag{11.34}$$

donde:



$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -a_2 & -a_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -a_{n-3} & -a_{n-4} & -a_{n-5} & \dots & 0 & 0 \\ -a_{n-2} & -a_{n-3} & -a_{n-4} & \dots & 1 & 0 \\ -a_{n-1} & -a_{n-2} & -a_{n-3} & \dots & -a_1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_{n-2} \\ b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix} \tag{11.35}$$

Polos.

$$\det(sI - A_{co}) = s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_{n-1} s + a_n \tag{11.36}$$

Ceros.

$$\det \Sigma(s) = b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n \tag{11.37}$$

Matriz de Controlabilidad.

$$C_{(A_{co}, b_{co})} = \begin{pmatrix} b_{co} & A_{co} b_{co} & \dots & A_{co}^{n-1} b_{co} \end{pmatrix} \implies \det C_{(A_{co}, b_{co})} = \pm 1 \tag{11.38}$$

Capítulo 12

Inobservabilidad y observador de estado

Sea la siguiente representación de estado:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x &= Ax + bu \\ y &= c^T x + du \end{aligned} \tag{12.1}$$

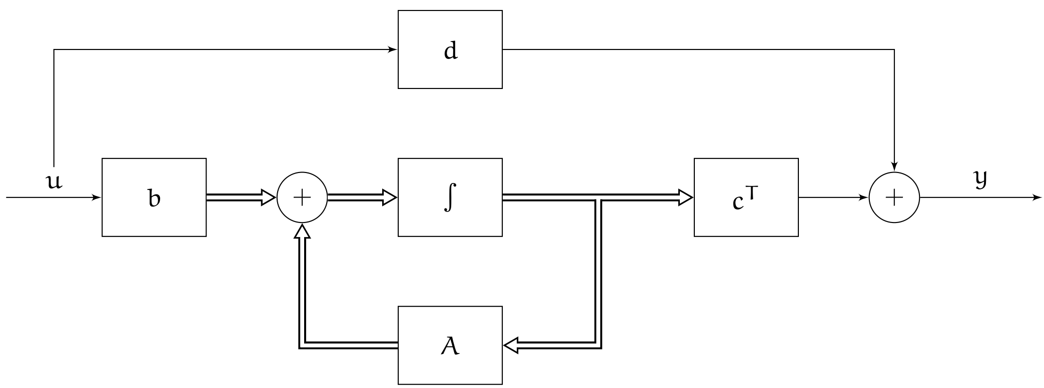
para el siguiente sistema:

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el estado, $u(t) \in \mathbb{R}^n$ y $y(t) \in \mathbb{R}^n$ sean la entrada y salida respectivamente; siendo la condición inicial del estado $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$. La solución esta descrita por:

$$x(t) = \exp{(At)}x_0 + \int_0^t \exp{(A(t-\tau))}bu(\tau)d\tau$$

Problema. Sea la representación de estado de la ecuación 12.1, donde el estado x no esta disponible. Se desea reconstruir el estado x, para poder aplicar una retroalimentación de estado.

$$u = f^T x + v \tag{12.2}$$



Para resolver este problema, hay que investigar el concepto estructural de la inobservabilidad.

Observabilidad e inobservabilidad

Una representación de estado se dice observable si dadas las trayectorias de salida, $y(t)$, y entrada, $u(t)$, en un horizonte de tiempo finito, $t_1 \in \mathbb{R}$, $t_1 > 0$, existe una función $\mathbb{F}(t, u, y)$, tal que:

$$\mathbb{F}(t_1, u(t), y(t)) = x(0) \quad t \in [0, t_1] \tag{12.3}$$

Una representación de estado se dice inobservable, si no es observable.

$$\begin{aligned} x(t) &= \exp(At)x_0 + \int_0^t \exp(A(t-\tau))bu(\tau)d\tau \\ y(t) &= c^T \exp(At)x_0 + \int_0^t c^T \exp(A(t-\tau))bu(\tau)d\tau + du(t) \end{aligned} \tag{12.4}$$

Sabemos del teorema de Caley-Hamilton que:

$$\exp(At) = \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(t)A^i \tag{12.5}$$

donde:

$$\varphi_i(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_{ij}t^j, \quad \varphi_{ij} \in \mathbb{R}, \quad i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}, \quad j \in \mathbb{Z}^+$$

Si juntamos las ecuaciones 12.4 y 12.5 obtendremos:

$$\begin{aligned} y(t_1) = \sum_{i=0}^{n-1} \varphi_i(t_1)c^T A^i x_0 + \\ \int_0^{t_1} c^T \exp(A(t-\tau))bu(\tau)d\tau + du(t_1) = \\ \begin{pmatrix} \varphi_0(t_1) & \varphi_1(t_1) & \ldots & \varphi_{n-1}(t_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c^T \\ c^T A \\ \vdots \\ c^T A^{n-1} \end{pmatrix} x_0 + \\ \int_0^{t_1} c^T \exp(A(t-\tau))bu(\tau)d\tau + du(t_1) \end{aligned}$$

$$\varphi^T(t_1)\mathcal{O}_{(c^T, A)}x(0) = y(t_1) - \int_0^{t_1} c^T \exp(A(t-\tau))bu(\tau)d\tau + du(t_1) \tag{12.6}$$

siendo el lado derecho, la función $\mathbb{F}$. Entonces, una condición necesaia para que se pueda inferir cualquier condición inicial del estado $x(0) = x_0$, a partir de las trayectorias de salida, $y(t)$, y de entrada ,$u(t)$, en el horizonte de tiempo, es que la matriz de observabilidad:

$$\mathcal{O}_{(c^T,A)} = \begin{pmatrix} c^T \\ c^TA \\ \vdots \\ c^TA^{n-1} \end{pmatrix} \tag{12.7}$$

sea de rango pleno por columnas.

En nuestro caso particular, como la entrada y la salida estan en $\mathbb{R}$, esta condición es:

$$\det \mathcal{O}_{(c^T,A)} \neq 0$$

En efecto, si $\mathcal{O}_{(c^T,A)}$, no es de rango pleno por columna, existe una transformación T, invertible, tal que:

$$\mathcal{O}_{(c^T,A)} T^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbb{X} & 0 \end{pmatrix}$$

siendo $\mathbb{X}$ una matriz de rango plano por columnas.

Haciendo el cambio de base, $\bar{x} = Tx$, se obtiene de la ecuación 12.6:

$$\begin{aligned} \varphi^T(t_1)\mathcal{O}_{(c^T,A)} T^{-1}\bar{x}(0) &= \bar{\mathbb{F}}(t_1,u,y) \\ \varphi^T(t_1) \begin{pmatrix} \mathbb{X} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_1(0) \\ \bar{x}_2(0) \end{pmatrix} &= \bar{\mathbb{F}}(t_1,u,y) \\ \varphi^T(t_1)\mathbb{X}\bar{x}_1(0) &= \bar{\mathbb{F}}(t_1,u,y) \end{aligned}$$

por lo que no es posible determinar la segunda parte de componentes, $\bar{x}_2(0)$, a partir de $\bar{\mathbb{F}}(t_1,u,y)$.

Si la matriz de observabilidad es de rango pleno por columnas, entonces[1]:

$$\ker \mathcal{O}_{(c^T,A)} = 0$$

y para nuestro caso particular, $u, y \in \mathbb{R}$:

$$\det \mathcal{O}_{(c^T,A)} \neq 0$$

es decir, $\mathcal{O}_{(c^T,A)}$ es invertible.

De la representación de estado en la ecuación 12.1 se tiene:

$$y = c^T x + du$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= c^T\frac{dx}{dt} + d\frac{du}{dt} \\ &= c^TAx + c^Tbu + d\frac{du}{dt} \end{aligned}$$

[1]Este es un resultado del teorema de espacios vectoriales que indica que $\dim V = \dim \ker T + \dim \operatorname{Im} T$, y que lo que queremos es que $\dim V = \dim \operatorname{Im} T$

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dt^2} &= c^TA\frac{dx}{dt}+c^Tb\frac{du}{dt}+d\frac{d^2u}{dt^2}\\ &= c^TA^2x+c^TAbu+c^Tb\frac{du}{dt}+d\frac{d^2u}{dt^2}\end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} = c^TA^{n-1}x+\sum_{i=0}^{n-2}c^TA^ib\frac{d^{n-2-i}u}{dt^{n-2-i}}$$

por lo que tendremos que:

$$\begin{pmatrix}1\\ \frac{d}{dt}\\ \vdots\\ \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\end{pmatrix}y=\begin{pmatrix}c^T\\ c^TA\\ \vdots\\ c^TA^{n-1}\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}0+d\\ b+d\frac{d}{dt}\\ \vdots\\ \sum_{i=0}^{n-2}c^TA^ib\frac{d^{n-2-i}}{dt^{n-2-i}}+d\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\end{pmatrix}u$$

o escrito de otra manera:

$$\Delta\left(\frac{d}{dt}\right)y=\mathcal{O}_{(c^T,A)}x+\Gamma\left(\frac{d}{dt}\right)u$$

lo cual implica:

$$x=\mathcal{O}_{(c^T,A)}^{-1}\left[\Delta\left(\frac{d}{dt}\right)y-\Gamma\left(\frac{d}{dt}\right)u\right] \tag{12.8}$$

Por lo que es una condición necesaria y suficiente, para que la representación de estado sea observable que su matriz de observabilidad, $\mathcal{O}_{(c^T,A)}$, sea de rango pleno por columnas.

Cuando la matriz de observabilidad es de rango pleno por columnas, se dice que el par (c^T, A) es observable.

Dualidad

La operación matricial "transpuesta", establece una dualidad entre la observabilidad y la controlabilidad. En efecto,

$$\mathcal{O}_{(c^T,A)} = \begin{pmatrix} c^T \\ c^TA \\ \vdots \\ c^TA^{n-1} \end{pmatrix} \tag{12.9}$$

$$\mathcal{O}^T_{(c^T,A)} = \begin{pmatrix} c^T \\ c^TA \\ \vdots \\ c^TA^{n-1} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} c & A^Tc & \dots & \left(A^T\right)^{n-1}c \end{pmatrix} = C_{(A^T,c)} \tag{12.10}$$

$$C^T_{(A,b)} = \begin{pmatrix} b & Ab & \dots & A^{n-1}b \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} b^T \\ b^TA^T \\ \vdots \\ b^T(A^T)^{n-1} \end{pmatrix} = \mathcal{O}_{(b^T,A^T)} \tag{12.11}$$

note tambien que la función de transferencia es una funcion continua en $\mathbb{R}^1$, por lo que:

$$FT = FT^T$$

$$b^T\left(sI - A^T\right)^{-1}c + d = c^T(sI - A)^{-1}b + d \tag{12.12}$$

ademas, el polinomio caracteristico es el mismo:

$$\det(sI - A) = \det(sI - A^T) \implies \sigma(A) = \sigma(A^T) \tag{12.13}$$

Por lo que obtenemos la siguiente dualidad:

$$A \leftrightarrow A^T$$

$$b \leftrightarrow c$$

$$c^T \leftrightarrow b^T$$

$$d \leftrightarrow b$$

$$f^T \leftrightarrow k^T$$

Propiedades de la matriz de observabilidad

Dada la dualidad entre observabilidad y controlabilidad, todos los resultados de controlabilidad del par (A, b) son extrapolables a la observabilidad del par (c^T, A).

1. Asignación de los valores propios (polos), mediante la inyección de salida.

   a) Si $\det C_{(A,b)} \neq 0$, entonces dado un conjunto simetrico con respecto al eje real de n numeros complejos, Λ, existe un vector $f \in \mathbb{R}^n$, tal que:

   $$\sigma(A + bf^T) = \Lambda$$

   b) Si $\det \mathcal{O}_{(c^T,A)} \neq 0$, entonces dado un conjunto simetrico con respecto al eje real de n numeros complejos, Λ, existe un vector $k \in \mathbb{R}^n$, tal que:

   $$\sigma(A + kc^T) = \Lambda$$

   $$\sigma(A^T + ck^T) = \Lambda$$

2. Invarianza de la matriz de observabilidad bajo cambio de base

   Sea el siguiente cambio de base:

   $$\begin{aligned} A_1 &= T^{-1}AT && (12.14) \\ c_1^T &= c^T T && (12.15) \end{aligned}$$

   dado un cambio de base T invertible; entonces tendremos lo siguiente:

   $$\mathcal{O}_{(c_1^T,A_1)} = \mathcal{O}_{(c^T,A)} T^{-1} \qquad (12.16)$$

   de donde podemos notar que:

   $$T = \mathcal{O}^{-1}_{(c_1^T,A_1)} \mathcal{O}_{(c^T,A)} \qquad (12.17)$$

   siempre que el par (c^T, A) sea observable.

3. Invarianza de la matriz de observabilidad bajo inyección de salida

4. Invarianza de los ceros del sistema bajo iyección de salida

Formas canónicas

Forma canónica observador

Forma canónica observabilidad

Observador de estado

Capítulo 13

Principio de Separación

Capítulo 14

Estabilidad de Lyapunov

Dada la siguiente representación de estado:

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + bu(t) \tag{14.1}$$

con $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Definición 14.1. *El sistema representado por la ecuación 14.1 es estable si para cada* $\epsilon > 0$*, existe un* $\delta = \delta(\epsilon)$ *tal que:*

$$\|x_0\| < \delta(\epsilon) \implies \|x(t)\| < \epsilon \quad \forall t \geqslant 0$$

Si no es estable, decimos que es inestable.

Teorema 14.1. *Una matriz* A *es Hurwitz estable, es decir* $\Re\{\lambda(A)\} < 0$*, si y solo si para cualquier matriz simetrica definida positiva dada,* Q*, existe una matriz simetrica definida positiva,* P*, que satisface:*

$$A^T P + PA = -Q \tag{14.2}$$

Nota 14.1. *Una matriz* $H \in \mathbb{C}^{n\times n}$*, se dice Hermitiana si su transpuesta conjugada es ella misma,* $H^* = H$*. Si* $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$*, se dice simétrica si su transpuesta es ella misma,* $H^T = H$*.*

De estas matrices, podemos notar ciertas propiedades:

1. *Todos sus valores propios son reales.*

2. *Cuando los valores propios de* H *son todos positivos o negativos, se dice que* H *es definida positiva o negativa, y se escribe* $H > 0$ *o* $H < 0$ *respectivamente.*

3. *Cuando los valores propios de* H *son todos no negativos o no positivos, se dice que* H *es semidefinida positiva o semidefinida negativa y se escribe* $H \geqslant 0$ *o* $H \leqslant 0$ *respectivamente.*

4. *Desigualdad de Raleigh*

   Dada H *Hermitiana:*

$$\lambda_{min}(H)x^*x \leqslant x^*Hx \leqslant \lambda_{max}(H)x^*x \quad \forall x \in \mathbb{C}^n$$

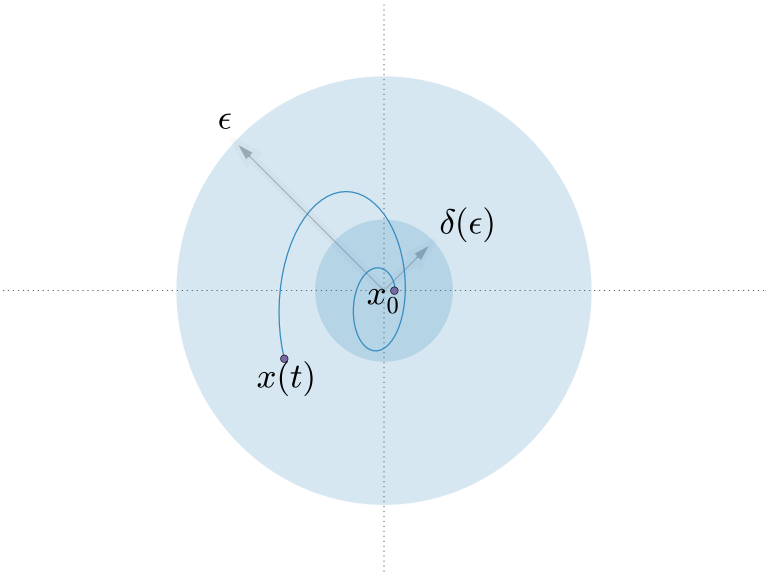


Figura 14.1: Trayectoria acotada por un limite ϵ.

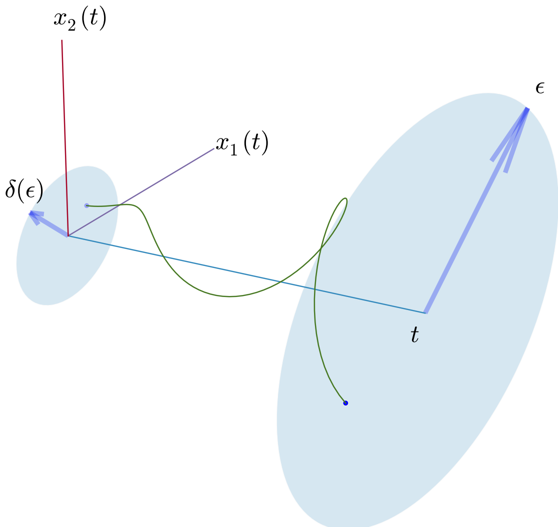


Figura 14.2: Trayectoria acotada por un limite ϵ atraves del tiempo.

Dada H *simétrica:*

$$\lambda_{min}(H)x^T x \leqslant x^T Hx \leqslant \lambda_{max}(H)x^T x \quad \forall x \in \mathbb{C}^n$$

5. H *es semidefinida positiva, si y solo si, puede escribirse de la forma factorizada:*

$$H = G^* G$$

para alguna matriz G*, conocida como raiz cuadrada de* H*, tambien denotada por* $H_{1/2}$*,* $\sqrt{H}$*,* $H^{1/2}$*, por lo que la factorización queda como sigue:*

$$H = H_{1/2}^* H_{1/2}$$

Cuando H *es definida positiva,* $H_{1/2}$ *es una matriz de rango pleno.*

Demostración. Sea la función de Lyapunov:

$$V(x(t)) = x^T P x(t) \quad \forall t \geqslant 0 \tag{14.3}$$

con $P = P^T > 0$.

Derivando a la ecuación 14.3 con respecto del tiempo, a lo largo de las trayectorias solución de la ecuación 14.1, con $u = 0$, se tiene:

$$\begin{aligned}
\frac{dV}{dt} &= \frac{dx(t)}{dt}^T Px(t) + x^T(t)P\frac{dx(t)}{dt} \\
&= x^T(t)A^T Px(t) + x^T(t)PAx(t) \\
&= x^T(t)\left(A^T P + PA\right)x(t) \\
&= -x^T(t)Qx(t) \qquad (14.4)
\end{aligned}$$

Por otro lado, de la ecuación 14.3 se tiene:

$$\lambda_{min}(P)x^T(t)x(t) \leqslant V(x(t)) \leqslant \lambda_{max}(P)x^T(t)x(t)$$

por lo que:

$$0 \leqslant \frac{V(x(t))}{\lambda_{min}(P)} \leqslant x^T(t)x(t) \leqslant \frac{V(x(t))}{\lambda_{max}(P)} \tag{14.5}$$

Entonces, de las ecuaciones 14.4 y 14.5 se obtiene:

$$\frac{dV(x(t))}{dt} \leqslant -\frac{\lambda_{min}(Q)}{\lambda_{max}(P)}V(x(t)) \tag{14.6}$$

De manera análoga

$$\lambda_{min}(Q)x^T(t)x(t) \leqslant x^T(t)Qx(t) \leqslant \lambda_{max}(Q)x^T(t)x(t)$$

Si integramos la ecuación 14.6 tendremos:

$$\int_0^t \frac{dV(x(\tau))}{d\tau}d\tau \leqslant -\frac{\lambda_{min}(Q)}{\lambda_{max}(P)}\int_0^t V(x(\tau))d\tau$$

para lo cual necesitamos el lema de Bellman - Grönwall.

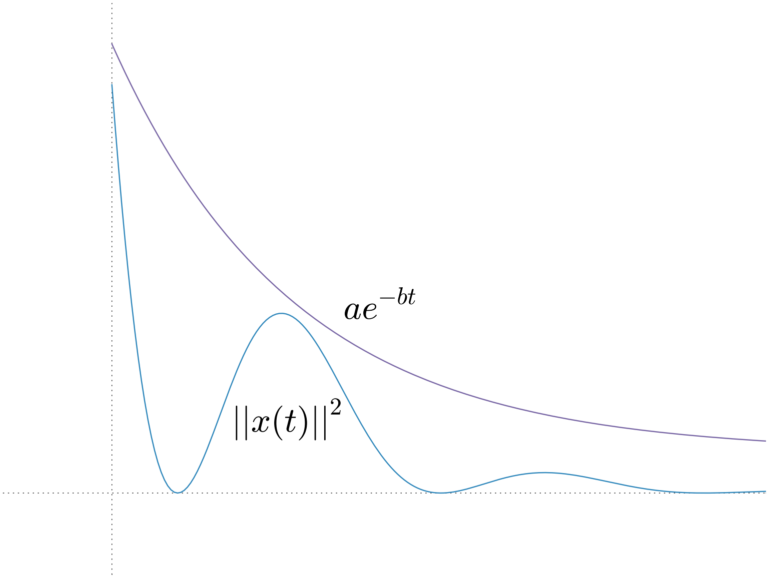


Figura 14.3: Solución exponencialmente estable.

Nota 14.2.

$$u(t) \leqslant c + \int_0^t K(\tau)u(\tau)d\tau \implies u(t) \leqslant c\exp\left(\int_0^t K(\tau)d\tau\right) \quad \forall t \geqslant 0$$

por lo tanto, podemos ver que:

$$V(x(t)) \leqslant V(x(0)) - \frac{\lambda_{min}(Q)}{\lambda_{max}(P)} \int_0^t V(x(\tau))d\tau \tag{14.7}$$

y aplicando el lema de Bellman - Grönwall aqui:

$$V(x(t)) \leqslant V(x(0)) \exp - \frac{\lambda_{min}(Q)}{\lambda_{max}(P)} t \quad \forall t \geqslant 0 \tag{14.8}$$

de la ecuación 14.5 y 14.8, obtenemos finalmente:

$$0 \leqslant x^T(t)x(t) \leqslant \frac{\lambda_{max}(P)}{\lambda_{min}(P)} x^T(0)x(0) \exp\left(-\frac{\lambda_{min}(Q)}{\lambda_{max}(P)} t\right)$$

es decir:

$$||x(t)||^2 \leqslant \frac{\lambda_{max}(P)}{\lambda_{min}(P)} ||x(0)||^2 \exp\left(-\frac{\lambda_{min}(Q)}{\lambda_{max}(P)} t\right)$$

Dado que A es Hurwitz estable tenemos que $\Re\lambda(A) < 0$, sea la siguiente matriz definida positiva:

$$P = \int_0^\infty \exp(A^T t) Q \exp(At) dt$$

con $Q = Q^T > 0$. Entonces tendremos:

$$\begin{aligned}
A^TP + PA &= \int_0^\infty \Big(A^T \exp{(A^T t)} Q \exp{(At)} + \exp{(A^T t)} Q \exp{(At)} A \Big)\, dt \\
&= \int_0^\infty \frac{d}{dt} \Big(\exp{(A^T t)} Q \exp{(At)} \Big)\, dt \\
&= \exp{(A^T t)} Q \exp{(At)} \Big|_0^\infty \\
&= \lim_{t\to\infty} \exp{(A^T t)} Q \exp{(At)} - \exp{(A^T \cdot 0)} Q \exp{(A \cdot 0)} \\
&= 0 - Q = -Q
\end{aligned}$$

□

Lema 14.1. *La ecuación matricial $AX = XB$, tiene unicamente la solución trivial, $X = 0$, si y solo si, A y B no tienen valores propios en común, es decir:*

$$\sigma(A) \cap \sigma(B) \neq \emptyset$$

Demostración. □

Corolario 14.1. *En el teorema 14.1 se puede elegir a Q como una matriz semidefinida positiva, $Q \geqslant 0$, bajo la condición inicial de que $x^T(t)Qx(t)$ no sea identicamente nula a lo largo de cualquier trayectoria no nula, solución de:*

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t)$$

El requerimiento de este corolario se reduce a la condición de que el par $(Q_{1/2}, A)$ sea observable:

$$Q \geqslant 0 \exists Q_{1/2} \textit{ tal que } Q = Q_{1/2}^T Q_{1/2}$$

Corolario 14.2. *Si A es una matriz Hurwitz estable entonces la ecuación de Lyapunov, $A^TP + PA = -Q$, tiene una única solución para cada Q.*

Demostración. Suponga que existen dos soluciones, P_1 y P_2, de la ecuación de Lyapunov, es decir:

$$\begin{aligned}
A^TP_1 + P_1A &= -Q \\
A^TP_2 + P_2A &= -Q
\end{aligned}$$

lo cual implica:

$$\begin{aligned}
A^T(P_2 - P_1) + (P_2 - P_1)A &= 0 \\
A^T(P_2 - P_1) - (P_2 - P_1)(-A) &= 0
\end{aligned}$$

pero sabemos que el espectro de una matriz, no cambia debido a la transposición, $\sigma(A^T) = \sigma(A)$, y por otro lado tenemos que la matriz A es Hurwitz estable, es decir $\Re\{\lambda(A)\} < 0$, lo cual implica que:

$$\Re\{\lambda(-A)\} > 0$$

por lo que podemos concluir que:

$$\sigma(A^T) \cap \sigma(-A) = \emptyset$$

por lo tanto, solo hay una solución y es la trivial. $\square$

Capítulo 15

Introducción a la optimización de funcionales

El problema que tratamos de resolver es el siguiente; determinar $v(t)$, tal que la siguiente ecuación:

$$J(v(t), v'(t)) = \int_{t_1}^{t_2} f_1(v(t), v'(t), t)dt \tag{15.1}$$

sea un extremo.

Primero definamos una función de vecindad $v(t) \to v(\alpha, t)$ tal que si $\alpha = 0 \implies v^* = v(0, t) = v(t)$, es decir, v^* es la función que extremiza a $J(v(t), v'(t))$.

Proponemos una solución en forma lineal:

$$v(\alpha, t) = v(0, t) + \alpha\eta(t) \tag{15.2}$$

pero $v(t)$ y $u(t)$ deben ser idénticos en los puntos extremos.

es decir $\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$, pero además $\eta(t) \in e^1$.[1]

Con esta parametrización en α:

$$v(t) \to v(\alpha, t) = v(0, t) + \alpha\eta(t)$$

tenemos que la ecuación 15.1 nos queda:

$$J(\alpha) = \int_{t_1}^{t_2} f_1(v(\alpha, t), v'(\alpha, t), t)dt$$

donde tenemos que $\alpha = 0$ implica que J es un extremo y $\alpha \neq 0$ implica que J no es un extremo.

Debido a esto, podemos concluir que J tambien esta parametrizada de esta manera:

$$J \to J(\alpha)$$

La condición necesaria para que J tenga un valor estacionario (extremo), es que J sea independiente de α en primer orden (que este relacionado linealmente), a lo largo de la trayectoria que otorga el extremo ($\alpha = 0$), es decir:

[1]Si $f \in e^1$, f es una función diferenciable al menos una vez.

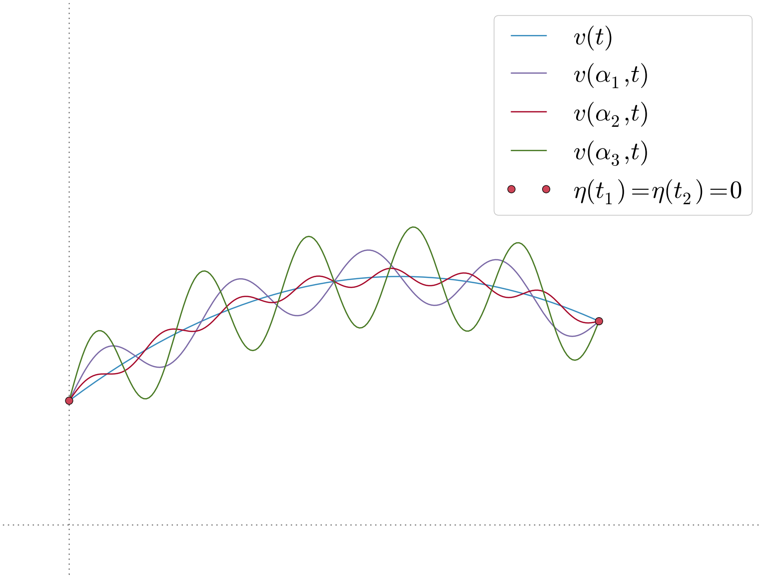


Figura 15.1: Trayectorias $v(\alpha, t)$ solución para $J(v(t), v'(t))$.

$$\left.\frac{\partial J}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} = 0 \quad \forall \eta \in e^1 \tag{15.3}$$

Nota 15.1. *Observe que solo es una condición necesaria, es decir:*

$$J \text{ es extremo } \implies \left.\frac{\partial J}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} = 0$$

Ecuación de Euler

La condición necesaria es:

$$\left.\frac{\partial J}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0}=0$$

entonces hay que seguir los siguientes pasos:

1. Calcular $\frac{\partial J}{\partial \alpha}$.
2. Hacer $\alpha=0$.

Empecemos calculando la derivada parcial de J:

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha}=\frac{\partial}{\partial \alpha}\int_{t_1}^{t_2} f_1(\nu(\alpha,t),\nu'(\alpha,t),t)dt=$$
$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial f_1(\dots)}{\partial \nu(\alpha,t)}\frac{\partial \nu(\alpha,t)}{d\alpha}+\frac{\partial f_1(\dots)}{\partial \nu'(\alpha,t)}\frac{\partial \nu'(\alpha,t)}{d\alpha}\right)dt$$

en este punto aparecen términos reducibles:

$$\frac{\partial \nu(\alpha,t)}{\partial \alpha}=\frac{\partial \nu(t)}{\partial \alpha}+\frac{\partial\left(\alpha\eta(t)\right)}{\partial \alpha}=\eta(t)$$

$$\frac{d\nu'(\alpha,t)}{d\alpha}=\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{d\nu(\alpha,t)}{dt}\right)=\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\nu'(t)+\alpha\frac{d\eta(t)}{dt}\right)=\frac{d\eta(t)}{dt}$$

lo que nos deja:

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha}=\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial f_1(\dots)}{\partial \nu(\alpha,t)}\eta(t)+\frac{\partial f_1(\dots)}{\partial \nu'(\alpha,t)}\frac{d\eta(t)}{dt}\right)dt$$

la segunda parte de esta integral es integrable por partes, si hacemos $u=\frac{\partial f_1(\dots)}{\partial \nu'(\alpha,t)}$, $d\nu=\frac{d\eta(t)}{dt}dt$, $du=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f_1(\dots)}{d\nu'(\alpha,t)}\right)$ y $\nu=\eta(t)$:

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha}=\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial f_1(\dots)}{\partial \nu(\alpha,t)}\eta(t)-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f_1(\dots)}{\partial \nu'(\alpha,t)}\right)\eta(t)\right)dt+\left.\frac{\partial f_1(\dots)}{\partial \nu'(\alpha,t)}\eta(t)\right|_{t_1}^{t_2}$$

pero recordemos que $\eta(t_1)=\eta(t_2)=0$, por lo que el ultimo termino se elimina y nos queda:

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha}=\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial f_1(\dots)}{\partial \nu(\alpha,t)}\eta(t)-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f_1(\dots)}{\partial \nu'(\alpha,t)}\right)\eta(t)\right)dt=$$
$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial f_1(\nu(\alpha,t),\nu'(\alpha,t),t)}{\partial \nu(\alpha,t)}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f_1(\nu(\alpha,t),\nu'(\alpha,t),t)}{\partial \nu'(\alpha,t)}\right)\right)\eta(t)dt \quad (15.4)$$

Si ahora, en la ecuación 15.4 sustituimos $\alpha=0$, obtendremos:

$$\left.\frac{\partial J}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial f_1(\nu(t), \nu'(t), t)}{\partial \nu(t)} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f_1(\nu(t), \nu'(t), t)}{\partial \nu'(t)} \right) \right) \eta(t) dt$$

Por lo que la condición necesaria es:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial f_1(\nu(t), \nu'(t), t)}{\partial \nu(t)} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f_1(\nu(t), \nu'(t), t)}{\partial \nu'(t)} \right) \right) \eta(t) dt = 0 \quad \forall \eta(t) \in e^1$$

lo cual implica que:

$$\frac{\partial f_1(\nu(t), \nu'(t), t)}{\partial \nu(t)} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f_1(\nu(t), \nu'(t), t)}{\partial \nu'(t)} \right) = 0 \tag{15.5}$$

esta es la que conocemos como ecuación de Euler.

Multiplicadores de Lagrange

Deseamos resolver el siguiente problema:

Minimizar la función $f(v) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sujeta a la restricción $\mathscr{G}(v) = 0$, donde $\mathscr{G}(v) = \begin{pmatrix} \mathscr{G}_1(v) & \mathscr{G}_2(v) & \dots & \mathscr{G}_m(v) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$ y $\mathscr{G}_i(v) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con $i \in \{1, 2, \dots, m\}$.

Para resolver este problema haremos uso de los multiplicadores de Lagrange, los cuales estan basados en el concepto de la derivada direccional[2]

Derivada direccional y vector gradiente

Definición 15.1. *La derivada direccional de f_1 en $v_0 \in \mathbb{R}^n$ en la dirección del vector unitario $\eta \in \mathbb{R}^n$ es:*

$$D_\eta f_1(v_0) = \lim_{\alpha \to 0}^{n} \frac{f_1(v_0 + \alpha) - f_1(v_0)}{\alpha} \tag{15.6}$$

donde α es un escalar, es decir, $\alpha \in \mathbb{R}$, en el caso de que este limite exista.

Superficie con vector posición evaluado y vector dirección de la derivada unitario.

Curva cortada por una recta por la que pasa un vector restando los dos puntos evaluados de la curva.

Esta derivada nos da la razon de cambio de f_1 en el punto v_0 y en la dirección η, siempre y cuando $\alpha \to 0$.

Teorema 15.1. *Si f_1 es una función diferenciable de $v \in \mathbb{R}^n$, entonces f_1 tiene una derivada direccional en la dirección de cualquier vector unitario $\eta \in \mathbb{R}^n$ y por lo tanto:*

$$D_\eta f_1(v) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_1(v_i)}{d v_i} \eta_i \tag{15.7}$$

[2]Esta derivada es formalmente conocida como la derivada de Fréchet, la cual se relaciona linealmente con la diferencial de Fréchet.

donde $\nu = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \vdots \\ \nu_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $\eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ *con* $\|\eta\| = 1$.

Definición 15.2. *Dada una base ortonormal de* $\mathbb{R}^n$, $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, *entonces el gradiente de* t_1 *es la función vectorial,* ∇f_1, *definida por:*

$$\nabla_\nu f_1(\nu) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial \nu_i} e_i \tag{15.8}$$

donde $\nu_i = \sum_{i=1}^{n} \nu_i e_i$.

Con esta notación gradiente, la ecuación 15.19 de la derivada direccional se escribe:

$$D_\eta f_1(\nu) = (\nabla f_1(\nu), \eta) \tag{15.9}$$

donde $(R, S) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es el producto punto, es decir, la proyección escalar del vector R sobre la dirección del vector S.

Teorema 15.2. *Suponga que* $f_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *es una funcional diferenciable. El máximo valor de la derivada* $D_\eta f(\nu)$ *es* $\|D_\eta f(\nu)\|$ *y se obtiene cuando la dirección de* η *coincide con el vector gradiente* $\nabla_\nu f_1(\nu)$.

Sea la superficie, $\mathscr{S}$, definida por la funcional $\mathscr{G} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de la siguiente manera:

$$\mathscr{S} = \{\nu \in \mathbb{R}^n \mid \mathscr{G}(\nu) = k\} \tag{15.10}$$

Sea $\mathscr{C}$ una curva contenida en $\mathscr{S}$ y que pase por el punto $\nu_0 \in \mathbb{R}$, la cual está definida por la función vectorial $R : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, esto es:

$$\mathscr{C} = \{\nu \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R} \mid \nu = R(t)\} \tag{15.11}$$

Sea $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $R(t_0) = \nu_0$.
Como $\mathscr{C} \subset \mathscr{S}$, entonces cualquier punto, $\nu \in \mathscr{C}$, satisface:

$$\mathscr{G}(\nu) = k$$

lo cual implica (asumiendo que ν es una función diferenciable y que tambien $\mathscr{G}$ lo es):

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mathscr{G}}{\partial \nu_i} \frac{d\nu_i}{dt} = 0$$

es decir:

$$\left(\nabla_i \mathscr{G}, R'(t)\right) = 0$$

donde $R'(t) = \frac{dR(t)}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{d\nu_1(t)}{dt} \\ \frac{d\nu_2(t)}{dt} \\ \vdots \\ \frac{d\nu_n(t)}{dt} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$.
En particular, cuando $t = t_0$, se tiene:

$$R(t_0) = v_0$$

$$\left(\nabla_v \mathscr{G}(v_0), \frac{dR(t_0)}{dt} \right) = 0$$

Esta ecuación indica que el vector gradiente en v_0, $\nabla_v \mathscr{G}(v_0)$, es perpendicular al vector tangente $\frac{dR(t_0)}{dt}$ a cualquier $\mathscr{C} \subset \mathscr{S}$ que pase por v_0.

Superficie con vector tangente.

Plano tangente a superficie de nivel y vector normal al plano.

Si $\nabla_v \mathscr{G}(v_0) \neq 0$, entonces se define el plano tangente a la superficie de nivel $\mathscr{S}$, en el punto $\mathscr{G}(v_0)$ y tiene un vector normal $\nabla_v \mathscr{G}(v_0)$, esto es, el plano tangente τ que esta definido por:

$$\tau = \{v \in \mathbb{R}^n \mid (\nabla_v \mathscr{G}(v_0), v - v_0) = 0\} \tag{15.12}$$

Multiplicadores de Lagrange

Procederemos ahora a resolver el problema original. Suponga que la funcional f_1 tiene un extremo en el punto v_0 en la superficie:

$$\mathscr{S}_m \{v \in \mathbb{R}^n, i \in \{1, 2, \ldots, m\} \mid \mathscr{G}(v) = 0\} \tag{15.13}$$

donde $\mathscr{G}(v) = \begin{pmatrix} \mathscr{G}_1(v) \\ \mathscr{G}_2(v) \\ \vdots \\ \mathscr{G}_m(v) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$ y $\mathscr{G}_i(v) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$.

Sea una curva:

$$\mathscr{C} = \{v \in \mathbb{R}^n t \in \mathbb{R} \mid v = R(t)\} \subset \mathscr{S}_m \tag{15.14}$$

tal que $v_0 \in \mathscr{C}$.

Sea $t_0 \in \mathbb{R}$ el paramtero correspondiente a v_0, es decir $v_0 = R(t_0)$.

La funcional compuesta:

$$\mathscr{H} = f_1(R(t)) \tag{15.15}$$

representa a los valores de f que también está en $\mathscr{C}$.

Como f_1 tiene un extremo en v_0, entonces $\mathscr{H}$ tiene un extremo en t_0, por lo que:

$$\left.\frac{d\mathscr{H}(t)}{dt}\right|_{t=t_0} = 0 \tag{15.16}$$

Pero si f es diferenciable, se deduce por la regla de la cadena:

$$0 = \left.\frac{d}{dt}\mathscr{H}\right|_{t=t_0} = \left.\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial v_i}\frac{v_i(t)}{dt}\right|_{t=t_0, v=v_0} = \left(\nabla_v f_1(v_0), \frac{d}{dt}R(t_0)\right) \tag{15.17}$$

esto nos indica que el vector gradiente $\nabla_v f_1(v_0)$, es ortogonal al vector tangente, $\frac{dR(t_0)}{dt}$, para cada una de estas curvas.

Pero sabemos que los vectores gradientes de las coordenadas, $(\mathscr{G}_i, \mathscr{G}_i(v_0))$, son tambien ortogonales a $\frac{dR(t_0)}{dt}$, por lo que los vectores gradiente $\nabla_v f_1(v_0)$ y $\nabla_v \mathscr{G}_i(v_0)$ con $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ necesariamente son paralelos.

Entonces, si $\nabla_v \mathscr{G}_i(v_0)$ con $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, existen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, tales que:

$$\nabla_v f_1(v_0) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla_v \mathscr{G}_i(v_0) \tag{15.18}$$

y al vector $\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$ se le conoce como multiplicadores de Lagrange.

Entonces para resolver el problema original se procede como sigue:

1. Se construye la siguiente funcional aumentada:

$$f_a(\nu, \lambda) = f_1(\nu) - (\lambda, \mathscr{G}(\nu)) \tag{15.19}$$

2. Se encuentran los puntos estacionarios de la ecuación 15.19:

$$\begin{aligned} \nabla_\nu f_a(\nu, \lambda) &= 0 \\ \nabla_\lambda f_a(\nu, \lambda) &= 0 \end{aligned} \tag{15.20}$$

El par (ν_0, λ_0) que satisface la ecuación 15.20 es la solución del problema original.

Observe que con este método, se esta transformando un problema de optimización con restricciones, en uno sin restricciones.

Capítulo 16

Introducción al control óptimo

Sea el sistema descrito por la representación de estado:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + bu \tag{16.1}$$

donde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^{n \times n}$, con condiciones iniciales $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$; se desea minimizar el indice de desempeño:

$$J(x, u) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \left(x^T Q x + \rho u^2 \right) dt \tag{16.2}$$

donde $\rho > 0$ y $Q = Q^T \geqslant 0$, a lo largo de las trayectorias solución de la ecuación 16.1. Es decir se desea minimizar la ecuación 16.2 con las restricciones de la ecuación 16.1.

Este problema de minimización con restricciones se va a resolver usando los multiplicadores de Lagrange.

El indice de desempeño aumentado es:

$$Ja(x, u, \lambda) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{2} \left(x^T Q x + \rho u^2 \right) + \lambda^T \left(Ax + bu - \frac{dx}{dt} \right) \right)$$

Definiendo los siguientes funcionales:

Lagrangiano

$$\mathscr{L}(x, u, \lambda, t) = \frac{1}{2} \left(x^T Q x + \rho u^2 \right) \tag{16.3}$$

Hamiltoniano

$$\mathscr{H}(x, u, \lambda, t) = \mathscr{L}(x, u, \lambda, t) + \lambda^T (Ax + bu) \tag{16.4}$$

se obtiene:

$$Ja(x, u, \lambda) = \int_0^\infty \left(\mathscr{H}(x, u, \lambda, t) - \lambda^T \dot{x} \right) dt \tag{16.5}$$

si tenemos que $\nu = \begin{pmatrix} x \\ u \\ \lambda \end{pmatrix}$, podemos ver al indice de desempeño aumentado como una función:

$$J\mathfrak{a}(x,u,\lambda) = \int_0^\infty f(v,\dot{v},t)dt$$

Sabemos que la ecuación de Euler es:

$$\frac{\partial f(v,\dot{v},t)}{\partial v} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f(v,\dot{v},t)}{\partial \dot{v}}\right) = 0 \tag{16.6}$$

pero sabemos que v es un vector con 3 funciones, por lo que al derivar con respecto a cada una tendremos:

1. Con respecto a x:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right) &= 0\\
\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial x} - \frac{d}{dt}(-\lambda) &= 0\\
Qx + A^T\lambda + \frac{d\lambda}{dt} &= 0
\end{aligned}$$

   lo cual implica:

$$-\frac{d\lambda}{dt} = Qx + A^T\lambda \tag{16.7}$$

2. Con respecto a u:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{u}}\right) &= 0\\
\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial u} - \frac{d}{dt}(0) &= 0\\
\rho u + \lambda^T b &= 0
\end{aligned}$$

   lo cual implica:

$$u = -\rho^{-1} b^T \lambda \tag{16.8}$$

3. Con respecto a λ:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \lambda} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{\lambda}}\right) &= 0\\
\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \lambda} - \frac{dx}{dt} - \frac{d}{dt}(0) &= 0\\
Ax + bu - \frac{dx}{dt} = 0
\end{aligned}$$

   lo cual implica:

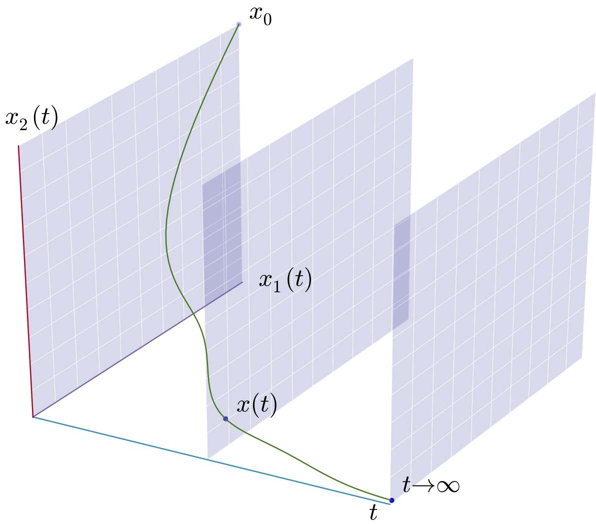


Figura 16.1: Trayectoria óptima solución del sistema.

$$\frac{dx}{dt} = Ax + bu \tag{16.9}$$

De las ecuaciones 16.7, 16.8 y 16.9 podemos obtener el siguiente resultado:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -b\rho^{-1}b^T \\ -Q & -A^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} \tag{16.10}$$

de donde $M = \begin{pmatrix} A & -b\rho^{-1}b^T \\ -Q & -A^T \end{pmatrix}$ es la matriz de Hamilton, y las condiciones de frontera del sistema son $x(0) = x_0$ y $\lim_{t\to\infty} \lambda(t) = 0$.

Si bien hemos usado a λ, aun no hemos mencionado que esta variable representa el coestado del sistema y si bien las condiciones de frontera del sistema son correctas, cabe mencionar que lo que realmente queremos es que $x(0) = x_0$ y $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$, por lo que hace falta relacionar al estado del sistema, $x(t)$, con el coestado, $\lambda(t)$.

En base a la ecuación 16.8 se propone que la solución sea una realimentación de estado, para esto se propone que el estado x y el coestado λ esten relacionados por una matriz P, esto es:

$$\lambda = Px \tag{16.11}$$

Por lo que de las ecuaciones 16.10 y 16.11, podemos obtener que:

$$\begin{pmatrix} I \\ P \end{pmatrix} \dot{x} = \begin{pmatrix} A & -b\rho^{-1}b^T \\ -Q & -A^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ P \end{pmatrix} x$$

si premultiplicamos esta expresión con $\begin{pmatrix} P & -I \end{pmatrix}$, obtendremos:

$$0 = \begin{pmatrix} PA + Q & -Pb\rho^{-1}b^T + A^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ P \end{pmatrix} x$$

$$0 = \left(A^T P + PA - Pb\rho^{-1}b^T P + Q \right) x \quad \forall x \text{ solución del sistema 16.1}$$

Por lo que hemos llegado a la ecuación algebraica de Riccati:

$$A^T P + PA - Pb\rho^{-1}b^T P + Q = 0 \tag{16.12}$$

siendo la ley de control óptimo (de las ecuaciones 16.8 y 16.11):

$$u = -f_*^T x \tag{16.13}$$

donde $f_*^T = \rho^{-1}b^T P$.

Note que de las ecuaciones 16.12 y 16.13, se obtiene la ecuación de Lyapunov del sistema en lazo cerrado:

$$\begin{aligned}
A^T P + PA - Pbf_*^T &= -Q \\
A^T P + P\left(A - bf_*^T\right) &= -Q \\
\left(A - bf_*^T\right)^T P + P\left(A - bf_*^T\right) &= -\left(Q + f_* b^T P\right) \\
\left(A - bf_*^T\right)^T P + P\left(A - bf_*^T\right) &= -\left(Q + f_* \rho f_*^T\right) \qquad (16.14)
\end{aligned}$$

En donde la expresión del lado derecho debe ser $\left(Q + f_* b^T P\right) = \left(Q + f_* b^T P\right)^T \geqslant 0$, por lo que tambien pediremos que P sea simétrica y semidefinida positiva ($P = P^T \geqslant 0$).

Como nota final, tan solo hacemos notar que el sistema realimentado queda:

$$\frac{dx}{dt} = (A - bf_*^T)x \tag{16.15}$$

Y que una manera de interpretar la minimización del indice de desempeño es con la siguiente gráfica:

Propiedades de la matriz de Hamilton

La controlabilidad del par (A, b), garantiza la existencia de la solución del problema de control óptimo.

Definiendo la siguiente matriz de cambio de base:

$$T = \begin{pmatrix} I & 0 \\ P & I \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -P & I \end{pmatrix} \tag{16.16}$$

y aplicando este cambio de base, la representación de estado de la ecuación 16.10 queda:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\bar{\lambda}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - bf_*^T & -b\rho^{-1}b^T \\ -0 & -(A - bf_*^T)^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \bar{\lambda} \end{pmatrix} \tag{16.17}$$

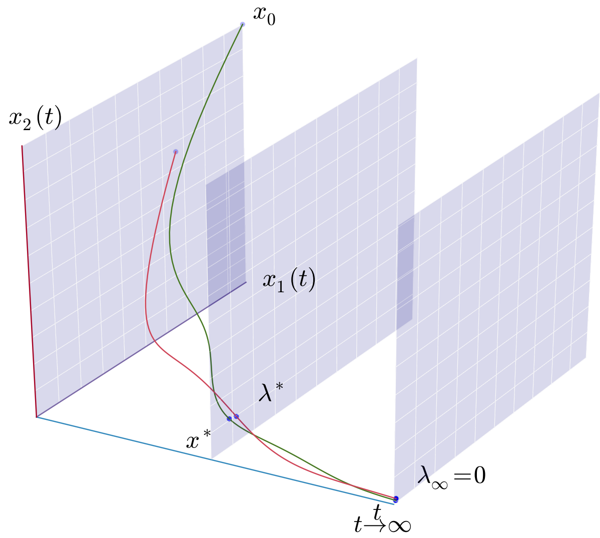


Figura 16.2: Trayectoria óptima solución del sistema del estado y coestado.

En efecto:

$$\begin{pmatrix} x \\ \bar{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -P & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} T^{-1}MT &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ -P & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & -b\rho^{-1}b^T \\ -Q & Pb\rho^{-1}b^T - A^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ P & I \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A & -b\rho^{-1}b^T \\ -(PA+Q) & Pb\rho^{-1}b^T - A^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ P & I \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A - b\rho^{-1}b^T P & -b\rho^{-1}b^T \\ -(A^T P + PA - Pb\rho^{-1}b^T P + Q) & -(A^T + Pb\rho^{-1}b^T) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

si sustituimos las ecuaciones 16.12 y 16.13, tendremos:

$$T^{-1}MT = \begin{pmatrix} A - bf_*^T & -b\rho^{-1}b^T \\ 0 & -(A - bf_*^T)^T \end{pmatrix}$$

Nota 16.1. *Note que el determinante de la matrix Hamiltoniana es igual al de esta matriz:*

$$\begin{aligned} \det(sI - M) &= \det(sI - T^{-1}MT) \\ &= (-1)^n \pi(s)\pi(-s) \end{aligned}$$

donde $\pi(s) = \det(sI - (A - bf_*^T))$, *es decir que los valores propios de* M *son simetricos con respecto al eje* $j\omega$.

Resolviendo el sistema de la ecuación 16.17 en el horizonte de tiempo $[0, T]$ y con $A_{f_*} = A - bf_*^T$:

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}(t) &= \exp(A_{f_*}^T (T-t))\bar{\lambda}(t) \\ x(t) &= \exp(A_{f_*} t)x_0 - \int_0^t \exp(A_{f_*}(t-\tau))b\rho^{-1}b^T\bar{\lambda}(\tau)d\tau \end{aligned} \tag{16.18}$$

especificamente para nuestro tiempo T y sustituyendo $\bar{\lambda}(t)$ en $x(t)$:

$$x(T) = \exp(A_{f_*}T)x_0 - \int_0^T \exp(A_{f_*}(T-\tau))b\rho^{-1}b^T \exp(A_{f_*}^T(T-\tau))\bar{\lambda}(T)d\tau\bar{\lambda}(T)$$

Siendo la parte integral de esta solución el Gramiano de controlabilidad.
Recordemos que:

$$\begin{aligned} (A, b)\text{controlable} &\implies (A_{f_*}, b)\text{controlable} \\ &\implies \det \int_0^T \exp(A_{f_*}(T-\tau))bb^T \exp(A_{f_*}^T(T-\tau))\bar{\lambda}(T)d\tau \\ &\implies \det \int_0^T \exp(A_{f_*}(T-\tau))b\rho^{-1}b^T \exp(A_{f_*}^T(T-\tau))\bar{\lambda}(T)d\tau\bar{\lambda}(T) \end{aligned}$$

Asi pues, asumiremos la controlabilidad del par (A, b).
Sea x^* la trayectoria óptima, por lo que:

$$J(x^*, x_0) \leqslant J(x, x_0)$$

para toda solución de la ecuación 16.1.
Entonces, el coestado $\bar{\lambda}^*$ que minimice a Ja será:

$$Ja(x^*, \lambda^*, x_0, \bar{\lambda}(T)) \leqslant Ja(x, \bar{\lambda}, x_0, \bar{\lambda}(T))$$

para todo par $(x, \bar{\lambda})$ solución de la ecuación 16.17 y estará caracterizada por:

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}^*(T) &= W_c^{-1}(0, T)\left(\exp(A_{f_*}T)x_0 - x^*(T)\right) \\ W_c(0, T) &= \int_0^T \exp(A_{f_*}(T-\tau))b\rho^{-1}b^T \exp\left(A_{f_*}^T(T-\tau)\right)d\tau \end{aligned}$$

por lo que si W_c es invertible, existe una solución; y para que W_c sea invertible, el par (A, b) debe ser controlable.

La observabilidad del par $(Q_{1/2, A})$, donde $Q = Q_{1/2}^T Q_{1/2}$, asegura la solución estable de la solución de Riccati.

De las ecuaciones 16.12 y 16.13, la ecuación de Riccati se puede escribir de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
A^T P + PA - Pb\rho^{-1}b^T P &= -Q \\
(A - bf_*^T)P + P(A - bf_*^T) &= -Q - f_* b^T P \\
A_{f_*}^T P + PA_{f_*} &= -Q - f_*\rho f_*^T
\end{aligned}
$$

en donde el termino izquierdo se reconoce de la ecuación de Lyapunov y el termino derecho sabemos que es una matriz simétrica, por lo que se obtiene la siguiente ecuación de Lyapunov:

$$
A_{f_*}^T P + PA_{f_*} = \begin{pmatrix} -Q_{1/2}^T & f_* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{1/2} \\ f_*^T \end{pmatrix} \tag{16.19}
$$

en donde podemos nombrar al segundo termino como:

$$
\bar{Q} = \begin{pmatrix} -Q_{1/2}^T & f_* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{1/2} \\ f_*^T \end{pmatrix}
$$

y de donde tenemos que $P = P^T > 0$ y $\bar{Q} = \bar{Q}^T \geqslant 0$.

Si recordamos el corolario 14.1 de Kalman, sabemos que podemos escoger una $Q \geqslant 0$ para la ecuación de Lyapunov, siempre y cuando el par $(Q_{1/2}, A)$ sea observable.

Notemos que la observabilidad del par $(Q_{1/2}, A)$, implica la observabilidad del par $\left(\begin{pmatrix} Q_{1/2} \\ f_*^T \end{pmatrix}\right.$,

En efecto, primero notamos que:

$$
\begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & -b & I \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{1/2} \\ f_*^T \\ sI - A + bf_*^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{1/2} \\ sI - A \\ f_*^T \end{pmatrix} \tag{16.20}
$$

lo cual implica que:

$$
\text{rango} \begin{pmatrix} Q_{1/2} \\ sI - A \end{pmatrix} \leqslant \text{rango} \begin{pmatrix} Q_{1/2} \\ sI - A \\ f_*^T \end{pmatrix}
$$

es decir, aumentar filas en una matriz no disminuye el rango, y de la ecuación 16.19 podemos notar que:

$$
\text{rango} \begin{pmatrix} Q_{1/2} \\ f_*^T \\ sI - A + bf_*^T \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} Q_{1/2} \\ sI - A \\ f_*^T \end{pmatrix} \leqslant n \tag{16.21}
$$

por lo que:

$$
\text{rango} \begin{pmatrix} Q_{1/2} \\ sI - A \end{pmatrix} = n \forall s \in \mathbb{C} \implies \text{rango} \begin{pmatrix} Q_{1/2} \\ f_*^T \\ sI - A + bf_*^T \end{pmatrix} = n \forall s \in \mathbb{C} \tag{16.22}
$$

Nota 16.2. *Criterio del rango de Popov-Belevitch-Hautus*

I *El par (A, b) es controlable si y solo si:*

$$
\text{rango} \begin{pmatrix} sI - A & b \end{pmatrix} = n \quad \forall s \in \mathbb{C}
$$

II *El par* (c^T, A) *es observable si y solo si:*

$$\text{rango}\begin{pmatrix} c^T & sI - A \end{pmatrix} = n \quad \forall s \in \mathbb{C}$$

Tomando en cuenta el criterio de Popov-Belevitch-Hautus podemos afirmar que si el par $\left(\begin{pmatrix} Q_{1/2} \\ f_*^T \end{pmatrix}, sI - A_{f_*}\right)$ es observable, tambien lo será $\left(\begin{pmatrix} Q_{1/2} \\ f_*^T \end{pmatrix}, A_{f_*}\right)$ y por lo tanto tambien lo será $\left(Q_{1/2}, A_{f_*}\right)$, es decir:

$$(Q_{1/2}, A) \text{ es observable } \Longrightarrow \left(\begin{pmatrix} Q_{1/2} \\ f_*^T \end{pmatrix}, A\right) \text{ es observable}$$

Construyamos entonces la siguiente función de Lyapunov:

$$V(x(t)) = x^T(t)Px(t) \tag{16.23}$$

derivando la función de Lyapunov a lo largo de las trayectorias solución de la ecuación 16.15 y sustituyendo la ecuación 16.19 tendremos:

$$\begin{aligned} \frac{dV(x(t))}{dt} &= x^T(t)(A_{f_*}^T P + PA_{f_*})x(t) \\ &= -x^T(t)\bar{Q}x(t) \end{aligned}$$

por lo que el criterio de estabilidad de Kalman se deduce la estabilidad Hurwitz del sistema en lazo cerrado, ademas la solución es única, debido al corolario 14.2.

Capítulo 17

Sistemas lineales bajo el punto de vista de teoria de anillos

Anillos conmutativos euclidianos

Un anillo es una estructura algebraica de un conjunto $\mathcal{A}$, provisto de dos operaciones a las que les llamamos suma $(+)$ y producto $(\cdot)$, con las siguientes propiedades:

1. $(\mathcal{A}, +)$ es un grupo abeliano
   - *a*) $a, b, \in \mathcal{A} \implies a + b \in \mathcal{A}$
   - *b*) $a, b, c \in \mathcal{A} \implies a + (b + c) = (a + b) + c$
   - *c*) $\exists! 0 \in \mathcal{A}$ tal que $0 + a = a + 0 = a \quad \forall a \in \mathcal{A}$
   - *d*) $\forall a \in \mathcal{A} \exists \bar{a} \in \mathcal{A}$ tal que $a + \bar{a} = 0 \quad \bar{a} = -a \quad b + \bar{a} = b - a$
   - *e*) $a, b \in \mathcal{A} \implies a + b = b + a$
2. $(\mathcal{A}, \cdot)$ es un semigrupo con unidad
   - *a*) $a, b \in \mathcal{A} \implies a \cdot b \in \mathcal{A}$
   - *b*) $a, b, c \in \mathcal{A} \implies a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
   - *c*) $\exists! 1 \in \mathcal{A}$ tal que $1 \cdot a = a \cdot 1 = a \quad \forall a \in \mathcal{A}$
3. Distributividad de $(+)$ y $(\cdot)$
   - *a*) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
   - *b*) $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$
4. Propiedad Euclidiana

   Existe una función euclidiana llamada grado, grado : $\mathcal{A} \to \mathbb{Z}^+$, tal que para todo par de elementos $a, b \in \mathcal{A}$, existen $c, r \in \mathcal{A}$ tales que:

   $$a = b \cdot c + r$$

   con $\text{grado}\, r < \text{grado}\, b$ o $\text{grado}\, r = 0$.

   A esto se le conoce como el algoritmo de la división de Euclides.

5. Conmutatividad de $(\cdot)$

   Si $a \cdot b = b \cdot a \quad \forall a, b \in \mathcal{A}$ se dice que el anillo $\mathcal{A}$ es conmutativo.

De aquí en adelante a los anillos euclidianos conmutativos les llamaremos simplemente anillos.

Esta estructura es la generalización de los numeros enteros. La función grado del anillo de los numeros enteros corresponde al valor absoluto y en el anillo de los polinomios corresponde al grado de los polinomios.

Dos nociones importantes de la teoría de anillos es el máximo común divisor y primos relativos.

Definición 17.1. *Dados $a, b, c \in \mathcal{A}$, siendo $\mathcal{A}$ un anillo conmutativo, entonces tendremos:*

1. $b \neq 0$ *es un divisor de* a *si existe* $m \in \mathcal{A}$ *tal que:*

$$a = b \cdot m$$

   en dado caso se escribe ${}^{b}/_{a}$ *y se dice que* b *divide a* a.

2. $c \in \mathcal{A}$ *es el máximo común divisor de* $a, b \in \mathcal{A}$ *si:*

   a) c *es divisor de* a *y* b, *es decir* ${}^{c}/_{a}$ *y* ${}^{c}/_{b}$, *es decir, existen* $m, n \in \mathcal{A}$ *tal que:*

$$a = m \cdot c \quad y \quad b = n \cdot c$$

   b) *Cualquier otro divisor de* a *y* b *es tambien divisor de* c, *es decir,* ${}^{d}/_{a}$ *y* ${}^{d}/_{b}$ *implica que* ${}^{d}/_{c}$, *es decir, existe* $l \in \mathcal{A}$ *tal que:*

$$c = l \cdot d$$

   y se escribe como $c = (a, b)$.

Lema 17.1. *Si* $a, b \in \mathcal{A}$, $a \neq 0$ *y* $b \neq 0$, *entonces existe* (a, b). *Ademas existen* $m, n \in \mathcal{A}$ *tales que:*

$$m \cdot a + n \cdot b = (a, b) \tag{17.1}$$

Definición 17.2. *Sean* $a, b \in \mathcal{A}$, a *y* b *serán primos relativos si* $(a, b) = 1$.

Lema 17.2. *Sean* $a, b, c \in \mathcal{A}$ *con* $(a, b) = 1$, *entonces:*

$$\exists m_0, n_0 \in \mathcal{A} \text{ tal que } m_0 a + n_0 b = 1 \tag{17.2}$$

$$\exists m, n \in \mathcal{A} \text{ tal que } ma + nb = c \tag{17.3}$$

A la primera ecuación la conocemos como la identidad de Bezout y a la segunda como ecuación Diofantina.

Definición 17.3. *El anillo de los polinomios, en el indeterminado* s, *y con coeficientes reales se le denomina* $\mathbb{R}[s]$, *siendo su función* grado, *el grado de los polinomios.*

El anillo de fracciones propias de polinomios, en el indeterminado s, *y con coeficientes reales se le denomina* $\mathbb{R}(s)$, *siendo su función* grado, *el grado relativo de la función, es decir, para una función* $f(s) = \frac{a(s)}{b(s)} \in \mathbb{R}(s)$ *con* $a(s), b(s) \in \mathbb{R}[s]$, $b \neq 0$ *y* $\text{grado}\, a(s) \leqslant \text{grado}\, b(s)$, *el grado relativo es:*

$$\text{grado}\, f(s) = \text{grado}\, b(s) - \text{grado}\, a(s)$$

Representación de sistemas lineales en $\mathbb{R}[s]$

Sea un sistema lineal representado por la ecuación diferencial ordinaria:

$$M\left(\frac{d}{dt}\right) y(t) = N\left(\frac{d}{dt}\right) u(t) \tag{17.4}$$

donde $M(s), N(s) \in \mathbb{R}[s]$ y grado $M(s) \geqslant$ grado $N(s)$, $y(t)$ es la salida y $u(t)$ es la señal de control.

Asignación de polos con cancelación de ceros

Se desea encontrar una ley de control lineal tal que el sistema en lazo cerrado este representado por la siguiente ecuación diferencial ordinaria siguiente:

$$Q\left(\frac{d}{dt}\right) y(t) = r(t) \tag{17.5}$$

donde $Q(s) \in \mathbb{R}[s]$ es un polinomio Hurwitz y $r(t)$ es la señal de referencia.

Este problema se resuelve utilizando el algoritmo de la división de Euclides. Para esto se propone la siguiente ley de control lineal:

$$\mathcal{S}\left(\frac{d}{dt}\right) N\left(\frac{d}{dt}\right) u(t) = -\mathcal{R}\left(\frac{d}{dt}\right) y(t) + r(t) \tag{17.6}$$

donde $\mathcal{S}(s), \mathcal{R}(s) \in \mathbb{R}[s]$, son solución del algoritmo de la división de Euclides, es decir:

$$Q(s) = \mathcal{S}(s)M(s) + \mathcal{R}(s) \tag{17.7}$$

donde grado $\mathcal{R}(s) <$ grado $M(s)$ o grado $\mathcal{R}(s) = 0$.

En efecto, aplicando el operador $\mathcal{S}\left(\frac{d}{dt}\right)$ a la ecuación 17.4 se obtiene que:

$$\mathcal{S}\left(\frac{d}{dt}\right) M\left(\frac{d}{dt}\right) y(t) = \mathcal{S}\left(\frac{d}{dt}\right) N\left(\frac{d}{dt}\right) u(t)$$

y sustituyendo la ecuación 17.6 tenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}\left(\frac{d}{dt}\right) M\left(\frac{d}{dt}\right) y(t) &= -\mathcal{R}\left(\frac{d}{dt}\right) y(t) + r(t) \\ \left(\mathcal{S}\left(\frac{d}{dt}\right) M\left(\frac{d}{dt}\right) + \mathcal{R}\left(\frac{d}{dt}\right)\right) y(t) &= r(t) \end{aligned}$$

por lo que la ecuación 17.7 implica:

$$Q\left(\frac{d}{dt}\right) y(t) = r(t)$$

Con respecto a la dinámica de la entrada, podemos aplicar el operador $\mathcal{R}\left(\frac{d}{dt}\right)$ a la ecuación 17.4 y obtener:

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}\left(\frac{d}{dt}\right)M\left(\frac{d}{dt}\right)y(t) &= \mathcal{R}\left(\frac{d}{dt}\right)N\left(\frac{d}{dt}\right)u(t)\\
M\left(\frac{d}{dt}\right)\mathcal{R}\left(\frac{d}{dt}\right)y(t) &= \mathcal{R}\left(\frac{d}{dt}\right)N\left(\frac{d}{dt}\right)u(t)\\
M\left(\frac{d}{dt}\right)\left(r(t)-\mathcal{S}\left(\frac{d}{dt}\right)N\left(\frac{d}{dt}\right)u(t)\right) &= \mathcal{R}\left(\frac{d}{dt}\right)N\left(\frac{d}{dt}\right)u(t)\\
\left(\mathcal{R}\left(\frac{d}{dt}\right)N\left(\frac{d}{dt}\right)+M\left(\frac{d}{dt}\right)\mathcal{S}\left(\frac{d}{dt}\right)N\left(\frac{d}{dt}\right)\right)u(t) &= M\left(\frac{d}{dt}\right)r(t)\\
\left(\mathcal{R}\left(\frac{d}{dt}\right)+M\left(\frac{d}{dt}\right)\mathcal{S}\left(\frac{d}{dt}\right)\right)N\left(\frac{d}{dt}\right)u(t) &= M\left(\frac{d}{dt}\right)r(t)
\end{aligned}$$

por lo que la ecuación 17.7 implica:

$$Q\left(\frac{d}{dt}\right)N\left(\frac{d}{dt}\right)u(t) = M\left(\frac{d}{dt}\right)r(t) \tag{17.8}$$

por lo que los ceros del sistema, raices de $N(s)$, pasan a formar parte de los polos de la dimensión del controlador.

Este esquema de control solo funcionará para sistemas de fase mínima, es decir, cuando $N(s)$ es un polinomio Hurwitz.

Asignación de polos sin cancelación de ceros

Se desea encontrar una ley de control, tal que el sistema en lazo cerrado este representado por la ecuación diferencial ordinaria:

$$Q_D\left(\frac{d}{dt}\right)y(t) = N\left(\frac{d}{dt}\right)r(t) \tag{17.9}$$

donde $Q_D(s) \in \mathbb{R}[s]$ es un polinomio Hurwitz dado y $r(t)$ es la señal de referencia.

Para obtener la ley de control, se tiene que resolver la ecuación Diofantina (17.3), se asume que los polinomios de $M(s)$ y $N(s)$ son primos relativos, es decir $(M, N) = 1$.

Para esto se supone la siguiente ley de control lineal:

$$\mathcal{S}\left(\frac{d}{dt}\right)u(t) = -\mathcal{R}\left(\frac{d}{dt}\right)y(t) + r(t) \tag{17.10}$$

donde $\mathcal{S}(s), \mathcal{R}(s) \in \mathbb{R}[s]$, son solución de la ecuación Diofantina:

$$\mathcal{S}(s)M(s) + \mathcal{R}(s)N(s) = Q_D(s) \tag{17.11}$$

En efecto, aplicando el operador $\mathcal{S}\left(\frac{d}{dt}\right)$ a la ecuación 17.4 y sustituyendo la ecuación 17.10, obtenemos:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}\left(\frac{d}{dt}\right) M\left(\frac{d}{dt}\right) y(t) &= \mathcal{S}\left(\frac{d}{dt}\right) N\left(\frac{d}{dt}\right) u(t) \\
&= N\left(\frac{d}{dt}\right) \mathcal{S}\left(\frac{d}{dt}\right) u(t) \\
&= N\left(\frac{d}{dt}\right) \left(-\mathcal{R}\left(\frac{d}{dt}\right) y(t) + r(t)\right) \\
&= -N\left(\frac{d}{dt}\right) \mathcal{R}\left(\frac{d}{dt}\right) y(t) + N\left(\frac{d}{dt}\right) r(t) \\
\left(\mathcal{S}\left(\frac{d}{dt}\right) M\left(\frac{d}{dt}\right) + N\left(\frac{d}{dt}\right) \mathcal{R}\left(\frac{d}{dt}\right)\right) &= N\left(\frac{d}{dt}\right) r(t) \\
Q_D\left(\frac{d}{dt}\right) y(t) &= N\left(\frac{d}{dt}\right) r(t)
\end{aligned}
$$

por lo que hemos llegado a la ley de control que esperabamos.

Con respecto a la dinámica de la entrada, aplicando el operador $\mathcal{R}\left(\frac{d}{dt}\right)$ a la ecuación 17.4 y sustituyendo la ecuación 17.10, obtenemos:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{R}\left(\frac{d}{dt}\right) M\left(\frac{d}{dt}\right) y(t) &= \mathcal{R}\left(\frac{d}{dt}\right) N\left(\frac{d}{dt}\right) u(t) \\
M\left(\frac{d}{dt}\right) \mathcal{R}\left(\frac{d}{dt}\right) y(t) &= \\
M\left(\frac{d}{dt}\right) \left(-\mathcal{S}\left(\frac{d}{dt}\right) u(t) + r(t)\right) &= \\
\left(M\left(\frac{d}{dt}\right) \mathcal{S}\left(\frac{d}{dt}\right) + \mathcal{R}\left(\frac{d}{dt}\right) N\left(\frac{d}{dt}\right)\right) u(t) &= M\left(\frac{d}{dt}\right) r(t)
\end{aligned}
$$

por lo que llegamos a:

$$
Q_D\left(\frac{d}{dt}\right) u(t) = M\left(\frac{d}{dt}\right) r(t) \tag{17.12}
$$

Note ahora que tanto la salida como la entrada tienen la misma dinámica dada por el polinomio Hurwitz seleccionado, $Q_D(s)$.

Note tambien que la salida continua con los mismos ceros determinados por $N(s)$.

Este esquema de control sirve tanto para sistemas de fase mínima, como para sistemas de fase no mínima.

Ahora bien, para resolver la ecuación Diofantina, se utiliza la matriz de Sylvester; consideremos por ejemplo:

$$
\begin{aligned}
M(s) &= s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3 \\
N(s) &= b_0 s^3 + b_1 s^2 + b_2 s + b_3 \\
\mathcal{R}(s) &= r_0 s^2 + r_1 s + r_2 \\
\mathcal{S}(s) &= s_0 s^2 + s_1 s + s_2 \\
Q_D(s) &= q_0 s^5 + q_1 s^4 + q_2 s^3 + q_3 s^2 + q_4 s + q_5
\end{aligned} \tag{17.13}
$$

Note que:

$$\text{grado}\, M(s) = n \quad \text{grado}\, N(s) \leqslant n \quad \text{grado}\, \mathcal{R}(s) < n \quad \text{grado}\, \mathcal{S}(s) < n \quad \text{grado}\, Q_D(s) < 2n \tag{17.14}$$

Sustituyendo las ecuaciónes 17.13 en la ecuación 17.11 e igualando los coeficientes de los mismos monomios s^i con $i \in 1, 2, \ldots, n$, se obtiene la siguiente expresión matricial.

$$\mathcal{S}(s)M(s) + \mathcal{R}(s)N(s) = Q_D(s)$$

$$\begin{multlined}(s_0 s^2 + s_1 s + s_2)(s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3) \\ + (r_0 s^2 + r_1 s + r_2)(b_0 s^3 + b_1 s^2 + b_2 s + b_3) \\ = q_0 s^5 + q_1 s^4 + q_2 s^3 + q_3 s^2 + q_4 s + q_5\end{multlined}$$