Análisis de estabilidad

Roberto Cadena Vega

4 de octubre de 2014

Mapeos no lineales (representando sistemas dinámicos autónomos).

Sea un sistema dinámico no lineal, representado por la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \tag{1}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ y $f \in C^1$, es decir, f es continuamente diferenciable.

Dado $p \in \mathbb{R}^n$ un punto en donde se quiere analizar la estabilidad del sistema, tenemos que:

$$f(x) = f(p) + J_f(p)(x - p) + \mathcal{O}(||x - p||) \tag{2}$$

donde $J_f(p)$ es el Jacobiano de f en p, es decir la pendiente generalizada de la función, $(x - p)$ es la distancia entre el punto de análisis y el punto de equilibrio del sistema, y $\mathcal{O}(||x - p||)$ son terminos de orden mayor de esta distancia.

Teorema de Hartman - Grobman

Para un sistema dinámico que tenga puntos de equilibro de la forma

$$f(\bar{x}) = 0 \implies \frac{dx}{dt} = 0 \quad \text{en } \bar{x} \tag{3}$$

diremos que $\bar{x}$ es un punto hiperbólico[1] si:

$$\det{(\lambda I - J_f)} \neq bi \quad b \in \mathbb{R} \tag{4}$$

es decir, que este determinante no tenga raices puramente imaginarias.

Por otro lado, una vez determinado que $\bar{x}$ es hiperbólico, podemos definir los siguientes comportamientos del sistema:

$\bar{x}$ es estable, si las partes reales de todas las raices de $\det{(\lambda I - J_f(\bar{x}))}$ son negativas.

$\bar{x}$ es inestable, si al menos una raiz de $\det{(\lambda I - J_f(\bar{x}))}$ tiene parte real positiva.

[1] Basicamente lo que dice el teorema de Hartman - Grobman, es que dado un sistema no lineal, existe una vecindad de puntos, N, alrededor de los puntos de equilibrio del sistema, x_i, para los cuales existe un homomorfismo entre el mismo sistema, $\dot{x} = f(x)$, y un mapeo lineal, $\dot{x} = Ax$, es decir una linealización, si la linealización tiene un polinomio caracteristico con raices con parte real no nula.

Ejemplo 1

Sea el sistema presa - depredador:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= ax_1 - bx_1x_2 \\ \dot{x}_2 &= -cx_2 + dx_1x_2 \end{aligned}$$

es decir:

$$\dot{x} = f(x)$$

donde:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$f(x) = \begin{pmatrix} ax_1 - bx_1x_2 \\ -cx_2 + dx_1x_2 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \tag{6}$$

Puntos de equilibrio

Sea el primer punto de equilibrio:

$$x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ya que:

$$f(x_1) = \begin{pmatrix} a \cdot 0 - b \cdot 0 \cdot 0 \\ -c \cdot 0 + d \cdot 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y el segundo punto de equilibrio:

$$x_2 = \begin{pmatrix} \frac{c}{d} \\ \frac{a}{b} \end{pmatrix}$$

ya que:

$$f(x_2) = \begin{pmatrix} a \cdot \frac{c}{d} - b \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b} \\ -c \cdot \frac{a}{b} + d \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Jacobiano

Si bien el sistema $\dot{x} = f(x)$, con los parametros de la ecuación 6 es una función en $\mathbb{R}^2$, tambien lo podemos ver como un par de funciones en $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{pmatrix} ax_1 - bx_1x_2 \\ -cx_2 + dx_1x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}$$

Entonces su Jacobiano estará dado por la formula:

$$J_f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} \tag{7}$$

En especifico, para nuestro sistema:

$$J_f(x) = \begin{pmatrix} a - bx_2 & -bx_1 \\ dx_2 & -c + dx_1 \end{pmatrix}$$

Hiperbolicidad

Para descubrir si el punto de equilibrio planteado es hiperbólico o no, tenemod que sacar las raices del polinomio que resulta de $\det(\lambda I - J_f)$, empezaremos con el segundo punto de equilibrio.

$$\lambda I - J_f(x_2) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -\frac{bc}{d} \\ \frac{da}{b} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \frac{bc}{d} \\ -\frac{da}{b} & \lambda \end{pmatrix}$$

por lo que:

$$\det(\lambda I - J_f) = \lambda^2 + ac$$

de aqui podemos ver que sus raices son:

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-ac} = \pm aci$$

y como sus raices son puramente imaginarias, podemos decir que x_2 no es hiperbólico.

Por otro lado, el primer punto de equilibrio:

$$\lambda I - J_f(x_1) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - a & 0 \\ 0 & \lambda + c \end{pmatrix}$$

por lo que:

$$\det(\lambda I - J_f) = (\lambda - a)(\lambda + c)$$

Sus raices son $\lambda_1 = a$ y $\lambda_2 = -c$, por lo que si podemos aplicar el teorema de Hartman - Grobman y decir que es inestable debido a $\lambda_1 = a$.

Ejemplo 2

Sea el sistema presa - depredador con limitante de recursos:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 = f_1(x) &= ax_1 - bx_1x_2 - ex_1^2 \\ \dot{x}_2 = f_2(x) &= -cx_2 + dx_1x_2 \end{aligned}$$

Puntos de Equilibrio

$$x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x_2 = \begin{pmatrix} \frac{c}{d} \\ \frac{ad-ec}{db} \end{pmatrix}$$

Jacobiano

$$J_f(x) = \begin{pmatrix} a - bx_2 - 2ex_1 & -bx_1 \\ dx_2 & -c + dx_1 \end{pmatrix}$$

Hiperbolicidad

Para el primer punto de equilibrio:

$$J_f(x_1) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}$$

$$\det\left(\lambda I - J_f(x_1)\right) = (\lambda - a)\,(\lambda + c)$$

por lo que el primer punto de equilibrio x_1 es inestable.
Por otro lado, el segundo punto de equilibrio:

$$J_f(x_2) = \begin{pmatrix} -\frac{ec}{d} & -\frac{bc}{d} \\ \frac{ad-ec}{b} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det\left(\lambda I - J_f(x_2)\right) = \lambda\left(\lambda + \frac{ec}{d}\right) + \frac{bc}{d}\frac{ad-ec}{b} = \lambda^2 + \frac{ec}{d}\lambda + ac - \frac{ec^2}{d}$$

Y si analizamos esta ecuación y el significado detras de los parametros, nos daremos cuenta que estas raices solo pueden ser de parte real negativa, por lo que x_2 es estable.