In [27]:
```
from IPython.display import Image
```

Dinámica del Robot Planar Angular

(Modelo Dinámico de Euler-Lagrange)

El modelo dinámico de Euler-Lagrange se basa en 2 formulas muy basicas:

$L = K - U$

La función Lagrange nos dice que la energia del sistema va a ser la suma de las energias cineticas del sistema, menos la suma de las energias potenciales del sistema.

Recordemos que la energia cinetica esta definida asi:

$K_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2$

... no realmente ...

en realidad tenemos que agregar un termino mas que proviene del hecho que estamos lidiando con velocidades angulares:

$K_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2 + \frac{1}{2} I_i \omega_i^2$

Y la energia potencial es:

$U_i = m_i g h_i$

aqui no hay sorpresas :)

$\tau_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i}$

La función de los torques (o fuerzas), nos dice que el torque aplicado en cada eslabon para lograr cierto movimiento será el resultado de la suma de la derivada con respecto al tiempo de la derivada de la función Lagrange con respecto a la primera derivada de cada variable asociada al grado de libertad, con la derivada de la función Lagrange con respecto a la variable asociada al grado de libertad...

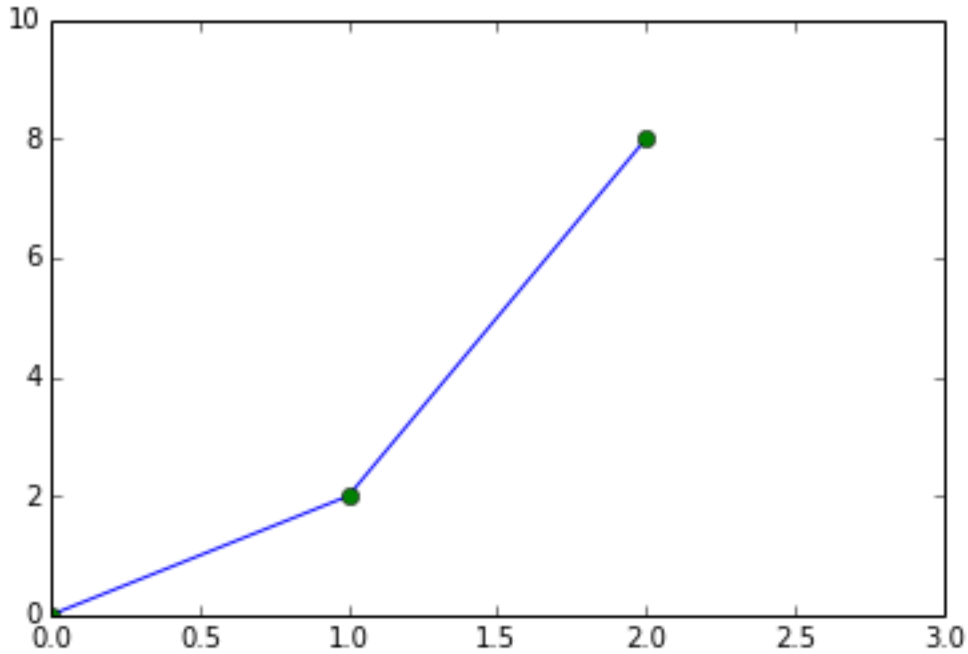
Lo se es mucho, pero la formula no se ve tan mal... o si?

El problema

Lo primero que tenemos que definir es el problema.

Tenemos un robot con dos grados de libertad rotacionales sobre un plano horizontal. Es decir:

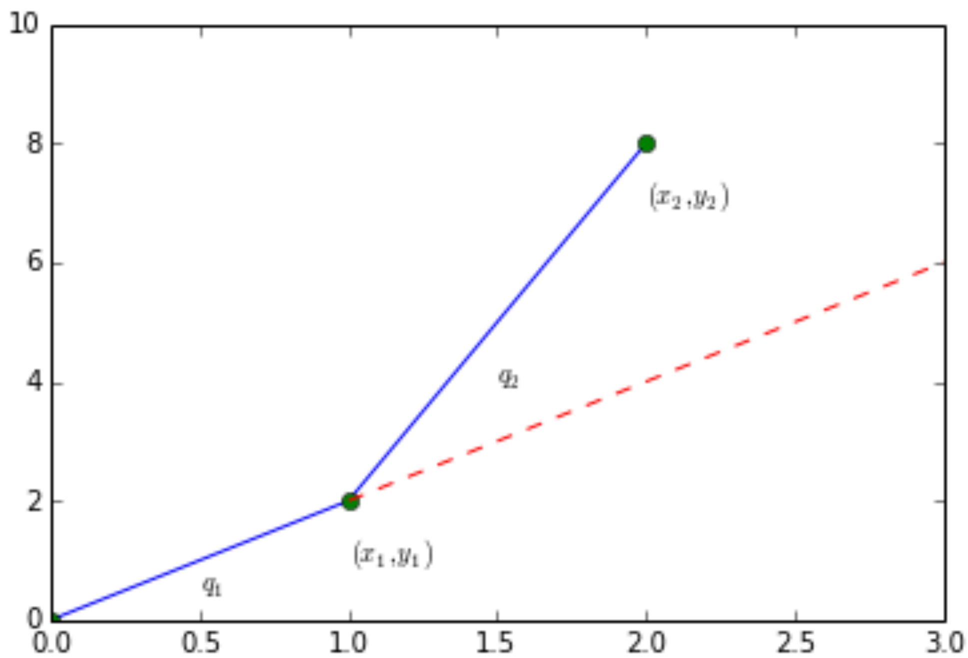
In [9]:
```
plot([0,1,2], [0,2,8])
plot([0,1,2], [0,2,8],'o')
axis([0,3,0,10]);
```



No le pongan mucha atención al codigo, tan solo es una representacion de dos eslabones con dos articulaciones, una en el origen y otra entre los dos eslabones.

Si ponemos atencion a sus coordenadas podremos ver que estan directamente relacionadas a los angulos con los que varía el motor.

In [23]:
```
plot([0,1,2], [0,2,8]); plot([0,1,2], [0,2,8],'o'); plot([1,3], [2,6],'--')
annotate(r'$(x_1, y_1)$', xy=(1,2), xytext=(1,1)); annotate(r'$(x_2, y_2)$', xy=(2,
8), xytext=(2,7))
annotate(r'$q_1$', xy=(0,0), xytext=(0.5, 0.5)); annotate(r'$q_2$', xy=(1,2), xytex
t=(1.5, 4))
axis([0,3,0,10]);
```



Por lo tanto las coordenadas para el centro de masa de cada eslabon serán:

$x_1 = \frac{l_1}{2} \cos(q_1)$

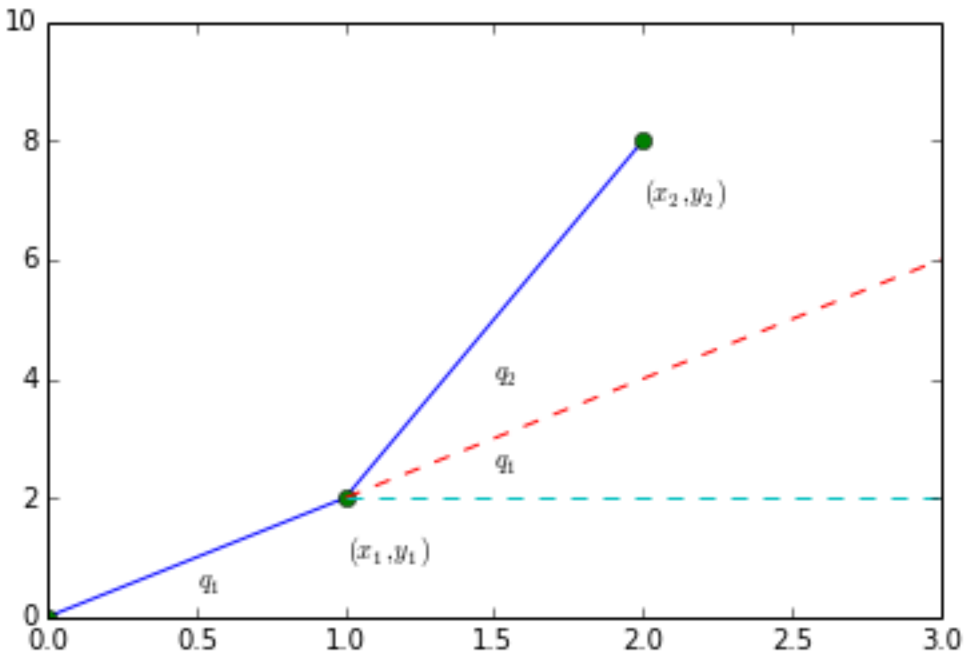
$y_1 = \frac{l_1}{2} \sin(q_1)$

$x_2 = l_1 \cos(q_1) + \frac{l_2}{2} \cos(q_1 + q_2)$

$y_2 = l_1 \sin(q_1) + \frac{l_2}{2} \sin(q_1 + q_2)$

Talvez esto ayude...

In [24]:
```
plot([0,1,2], [0,2,8]); plot([0,1,2], [0,2,8],'o')
plot([1,3], [2,6],'--'); plot([1,3], [2,2],'--')
annotate(r'$(x_1, y_1)$', xy=(1,2), xytext=(1,1)); annotate(r'$(x_2, y_2)$', xy=(2,
8), xytext=(2,7))
annotate(r'$q_1$', xy=(0,0), xytext=(0.5, 0.5)); annotate(r'$q_2$', xy=(1,2), xytex
t=(1.5, 4))
annotate(r'$q_1$', xy=(1,2), xytext=(1.5, 2.5)); axis([0,3,0,10]);
```



$x_1 = \frac{l_1}{2} \cos q_1$

$y_1 = \frac{l_1}{2} \sin q_1$

$x_2 = l_1 \cos q_1 + \frac{l_2}{2} \cos(q_1 + q_2)$

$y_2 = l_1 \sin q_1 + \frac{l_2}{2} \sin(q_1 + q_2)$

Y si tenemos que:

$r_1 = (x_1, y_1)$

$r_2 = (x_2, y_2)$

entonces las velocidades de los eslabones estarán dadas por la primera derivada de su posición:

$v_1 = \dot{r}_1 = (\dot{x}_1, \dot{y}_1)$

$v_2 = \dot{r}_2 = (\dot{x}_2, \dot{y}_2)$

donde:

$\dot{x}_1 = -\frac{l_1}{2} \dot{q}_1 \sin q_1$

$\dot{y}_1 = \frac{l_1}{2} \dot{q}_1 \cos q_1$

$\dot{x}_2 = -l_1 \dot{q}_1 \sin q_1 - \frac{l_2}{2} (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \sin(q_1 + q_2)$

$\dot{y}_2 = l_1 \dot{q}_1 \cos q_1 + \frac{l_2}{2}(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)\cos(q_1 + q_2)$

Y si elevamos la velocidad al cuadrado, obtendremos:

$$v_1^2 = \left(-\frac{l_1}{2}\dot{q}_1 \sin q_1\right)^2 + \left(\frac{l_1}{2}\dot{q}_1 \cos q_1\right)^2 = \left(-\frac{l_1}{2}\dot{q}_1\right)^2\left(\sin^2 q_1 + \cos^2 q_1\right) = \frac{l_1^2}{4}\dot{q}_1{}^2$$

$$v_2^2 = \left(-l_1\dot{q}_1 \sin q_1 - \frac{l_2}{2}(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)\sin(q_1 + q_2)\right)^2 + \left(l_1\dot{q}_1 \cos q_1 + \frac{l_2}{2}(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)\cos(q_1 + q_2)\right)^2$$

$$= l_1^2\dot{q}_1{}^2 \sin^2 q_1 + l_1 l_2 \dot{q}_1\left(\dot{q}_1 + \dot{q}_2\right)\sin q_1 \sin(q_1 + q_2) + \frac{l_2^2}{4}\left(\dot{q}_1 + \dot{q}_2\right)^2 \sin^2(q_1 + q_2)$$

$$+ l_1^2\dot{q}_1{}^2 \cos^2 q_1 + l_1 l_2 \dot{q}_1\left(\dot{q}_1 + \dot{q}_2\right)\cos q_1 \cos(q_1 + q_2) + \frac{l_2^2}{4}\left(\dot{q}_1 + \dot{q}_2\right)^2 \cos^2(q_1 + q_2)$$

$$= l_1\dot{q}_1{}^2 + \frac{l_2^2}{4}\left(\dot{q}_1 + \dot{q}_2\right)^2 + l_1 l_2 \dot{q}_1\left(\dot{q}_1 + \dot{q}_2\right)\left(\sin q_1 \sin(q_1 + q_2) + \cos q_2 \cos(q_1 + q_2)\right)$$

$$+ \frac{l_2^2}{4}\left(\dot{q}_1 + \dot{q}_2\right)^2 + l_1 l_2 \dot{q}_1\left(\dot{q}_1 + \dot{q}_2\right)\left(\sin^2 q_1 \cos q_2 + \sin q_1 \cos q_1 \sin q_2 + \cos^2 q_1 \cos q_2 - \sin q_1 \cos q_1 \sin q_2\right)$$

$$= l_1\dot{q}_1{}^2 + \frac{l_2^2}{4}\left(\dot{q}_1 + \dot{q}_2\right)^2 + l_1 l_2 \dot{q}_1\left(\dot{q}_1 + \dot{q}_2\right)\cos q_2$$

$$= \left[l_1^2 + l_1 l_2 \cos q_2 + \frac{l_2^2}{4}\right]\dot{q}_1{}^2 + \left[l_1 l_2 + \frac{l_2^2}{4}\right]\dot{q}_1\dot{q}_2 + \frac{l_2^2}{4}\dot{q}_2{}^2$$

La Energia Cinetica

Una vez que tenemos las velocidades de los eslabones podemos sustituirlas en la formula de la energia cinetica.

$K_i = \frac{1}{2}m_i v_i^2 + \frac{1}{2}I_i\omega_i^2$

Para el primer eslabon tendremos:

$K_1 = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}I_1\omega_1^2$

... y sustituyendo v_1 y ω_1:

$K_1 = \frac{1}{8}m_1 l_1^2\dot{q}_1{}^2 + \frac{1}{2}I_1\dot{q}_1{}^2$

... en donde I_1 es un termino especifico de la geometria del primer eslabon. No lo tomaremos tanto en cuenta en nuestro analisis (siempre y cuando sepamos que lo podemos calcular en cualquier momento e incluirlo).

Y para el segundo eslabon:

$$K_2 = \frac{1}{2}m_2\left\{\left[l_1^2 + l_1 l_2 \cos q_2 + \frac{l_2^2}{4}\right]\dot{q}_1{}^2 + \left[l_1 l_2 + \frac{l_2^2}{4}\right]\dot{q}_1\dot{q}_2 + \frac{l_2^2}{4}\dot{q}_2{}^2\right\} + \frac{1}{2}I_2\dot{q}_2{}^2$$

Si, se que esto empieza a ser sobrecogedor, pero aun no desesperen... falta mas!

La Energia Potencial

Esta realmente es facil, si analizamos los grados de libertad de nuestro robot planar, nos daremos cuenta que nunca sube o baja. Siempre esta en el mismo plano horizontal, por lo que nuestro trabajo se facilita y podemos decir que:

$U = 0$

In [28]:
```
Image(url="http://ckrickett.files.wordpress.com/2011/09/hooray.jpg")
```

Out[28]:

La función Lagrange

Ahora estamos listos para armar nuestra función Lagrange.

$L = K - U$

... entonces sumamos las dos energias cineticas que teniamos y la energia potencial que encontramos ;)

$$L = \frac{1}{8}m_1 l_1^2 \dot{q}_1{}^2 + \frac{1}{2}I_1 \dot{q}_1{}^2 + \frac{1}{2}m_2 \left\{ \left[l_1^2 + l_1 l_2 \cos q_2 + \frac{l_2^2}{4} \right] \dot{q}_1{}^2 + \left[l_1 l_2 + \frac{l_2^2}{4} \right] \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \frac{l_2^2}{4} \dot{q}_2{}^2 \right\} + \frac{1}{2} I_2 \dot{q}_2{}^2$$

... y reorganizamos de tal manera que los terminos con $\dot{q}_1{}^2$ queden agrupados, los que tienen $\dot{q}_1 \dot{q}_2$ igual y los que tienen $\dot{q}_2{}^2$ tambien.

$$L = \frac{1}{2} \left\{ m_1 \frac{l_1^2}{4} + I_1 + m_2 \left[l_1^2 + l_1 l_2 \cos q_2 + \frac{l_2^2}{4} \right] \right\} \dot{q}_1{}^2 + \frac{1}{2} \left\{ m_2 \left[l_1 l_2 \cos q_2 + \frac{l_2^2}{4} \right] \right\} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \frac{1}{2} \left\{ m_2 \frac{l_2^2}{4} + I_2 \right\} \dot{q}_2{}^2$$

(esta formula casi se sale de la pantalla, pero verán que en realidad es muy simple).

Los Torques

Pues bien, llegamos de nuevo a $\tau_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i}$

... empezemos por τ_1

Para calcular τ_1 primero tenemos que calcular $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$, pero notamos que es con respecto a $\dot{q}_1$, es decir, que ningun termino que no contenga a $\dot{q}_1$ estará en esta derivada.

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \left\{ m_1 \frac{l_1^2}{4} + I_1 + m_2 \left[l_1^2 + l_1 l_2 \cos q_2 + \frac{l_2^2}{4} \right] \right\} \dot{q}_1 + \frac{1}{2} \left\{ m_2 \left[l_1 l_2 \cos q_2 + \frac{l_2^2}{4} \right] \right\} \dot{q}_2$$

... y derivamos esto con respecto al tiempo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) = \quad & \left\{ m_1 \frac{l_1^2}{4} + I_1 + m_2 \left[l_1^2 + l_1 l_2 \cos q_2 + \frac{l_2^2}{4} \right] \right\} \ddot{q}_1 + \frac{1}{2} \left\{ m_2 \left[l_1 l_2 \cos q_2 + \frac{l_2^2}{4} \right] \right\} \ddot{q}_2 \\ & + m_2 l_1 l_2 \sin q_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 \sin q_2 \dot{q}_2{}^2 \end{aligned}$$

Ahora derivamos la función Lagrange con respecto a q_1:

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = 0$$

... no existe ningun termino q_1 en la función Lagrange, por lo que la derivada con respecto a q_1 es 0.

Entonces ya podemos concluir que el torque de nuestro primer grado de libertad, estará dado por:

$$\begin{aligned} \tau_1 = \quad & \left\{ m_1 \frac{l_1^2}{4} + I_1 + m_2 \left[l_1^2 + l_1 l_2 \cos q_2 + \frac{l_2^2}{4} \right] \right\} \ddot{q}_1 + \frac{1}{2} \left\{ m_2 \left[l_1 l_2 \cos q_2 + \frac{l_2^2}{4} \right] \right\} \ddot{q}_2 \\ & + m_2 l_1 l_2 \sin q_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 \sin q_2 \dot{q}_2{}^2 \end{aligned}$$

... o un poco mejor organizado...

$$\tau_1 = \left\{ m_1 \frac{l_1^2}{4} + I_1 + m_2 \left[l_1^2 + l_1 l_2 \cos q_2 + \frac{l_2^2}{4} \right] \right\} \ddot{q}_1 + \frac{1}{2} \left\{ m_2 \left[l_1 l_2 \cos q_2 + \frac{l_2^2}{4} \right] \right\} \ddot{q}_2 + \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 \sin q_2 \left(2\dot{q}_1 + \dot{q}_2 \right) \dot{q}_2$$

Para calcular τ_2 tenemos que derivar la función Lagrange con respecto a $\dot{q}_2$.

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = \frac{1}{2} \left\{ m_2 \left[l_1 l_2 \cos q_2 + \frac{l_2^2}{4} \right] \right\} \dot{q}_1 + \left\{ m_2 \frac{l_2^2}{4} + I_2 \right\} \dot{q}_2$$

... y su derivada con respecto al tiempo:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right) = \frac{1}{2} \left\{ m_2 \left[l_1 l_2 \cos q_2 + \frac{l_2^2}{4} \right] \right\} \ddot{q}_1 + \left\{ \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 \sin q_2 \right\} \dot{q}_1 \dot{q}_2$$

La derivada de L con respecto a q_2:

$$\frac{\partial L}{\partial q_2} = \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 \sin q_2 \left(\dot{q}_1{}^2 \dot{q}_2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2{}^2 \right)$$

Entonces decimos que τ_2 es:

$$\tau_2 = \frac{1}{2} \left\{ m_2 \left[l_1 l_2 \cos q_2 + \frac{l_2^2}{4} \right] \right\} \ddot{q}_1 + \left\{ \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 \sin q_2 \right\} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 \sin q_2 \left(\dot{q}_1{}^2 \dot{q}_2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2{}^2 \right)$$

... o bien:

$$\tau_2 = \frac{1}{2}\left\{ m_2 \left[l_1 l_2 \cos q_2 + \frac{l_2^2}{4} \right] \right\} \ddot{q}_1 + \left\{ \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 \sin q_2 \right\} \left[\left(\dot{q}_1{}^2 + q_1 \right) \dot{q}_2 + \dot{q}_2{}^2 \dot{q}_1 \right]$$

τ

Me he cuidado de acomodar muy especificamente los resultados de τ, ya que por si se dieron cuenta, no tengo solo uno, sino uno por cada grado de libertad, es decir que voy a poder acomodar de manera matricial mis resultados.

La forma general a la que quiero llegar es esta:

$\tau = M\ddot{q} + C\dot{q} + G$

en donde:

τ es el vector de torques asociados a los grados de libertad.

M es la Matriz de masas del robot.

C es la Matriz de Coriolis.

G es el Vector de gravedad.

q es el Vector de posicion de nuestro robot.

$\dot{q}$ es el Vector de velocidades de nuestro robot.

$\ddot{q}$ es el Vector de aceleraciones de nuestro robot.

Este es un gran resultado, ya que si tenemos la posición de nuestro robot, podemos obtener el torque requerido en cada grado de libertad para obtener este movimiento.

Pero aun no cantemos victoria, aun tenemos un paso mas por dar.

Si τ_1 y τ_2 se ven asi:

$$\tau_1 = \left\{ m_1 \frac{l_1^2}{4} + I_1 + m_2 \left[l_1^2 + l_1 l_2 \cos q_2 + \frac{l_2^2}{4} \right] \right\} \ddot{q}_1 + \frac{1}{2}\left\{ m_2 \left[l_1 l_2 \cos q_2 + \frac{l_2^2}{4} \right] \right\} \ddot{q}_2 + \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 \sin q_2 \left(2\dot{q}_1 + \dot{q}_2 \right) \dot{q}_2$$

$$\tau_2 = \frac{1}{2}\left\{ m_2 \left[l_1 l_2 \cos q_2 + \frac{l_2^2}{4} \right] \right\} \ddot{q}_1 + \left\{ \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 \sin q_2 \right\} \left[\left(\dot{q}_1{}^2 + q_1 \right) \dot{q}_2 + \dot{q}_2{}^2 \dot{q}_1 \right]$$

las matrices serán:

$$M = \begin{pmatrix} m_1 \frac{l_1^2}{4} + I_1 + m_2 \left[l_1^2 + l_1 l_2 \cos q_2 + \frac{l_2^2}{4} \right] & \frac{1}{2} m_2 \left[l_1 l_2 \cos q_2 + \frac{l_2^2}{4} \right] \\ \frac{1}{2} m_2 \left[l_1 l_2 \cos q_2 + \frac{l_2^2}{4} \right] & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 \sin q_2 \begin{pmatrix} 2\dot{q}_2 & \dot{q}_2 \\ \dot{q}_2{}^2 & \dot{q}_1{}^2 + \dot{q}_1 \end{pmatrix}$$

$$G = g \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Conclusiones

- Nadie dijo que hacer robots era fácil.
- Tampoco es tan dificil como llegar a la luna.

Y ya en serio

- La formula general con la que modelamos nuestro sistema es:

$$\tau = M\ddot{q} + C\dot{q} + G$$

- Llegamos a esta forma por medio de:

$$\tau_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

donde $L = K - U$

- K es lo único extraño que vimos aqui:

$$K_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2 + \frac{1}{2} I_i \omega_i^2$$

pero a esos terminos casi ni los pelamos.

Alguna duda?

Esta presentación se puede encontrar en forma de documento o diapositivas en:

https://github.com/robblack007/clase-robotica-industrial

Tambien encontrarán la solución a la tarea y breves instrucciones para instalar el ambiente de desarrollo IPython.

Gracias por su atencion. Que tengan buen fin de semana!