APUNTES DE CLASES – VIBRACIONES DE SISTEMAS MECÁNICOS

Carlos Armando De Castro

Asesorías en Matemáticas, Física e Ingeniería

1. VIBRACIONES LIBRES NO AMORTIGUADAS

Una vibración ocurre en un sistema mecánico cuando hay una fuerza restauradora, es decir, una fuerza que se opone al movimiento del sistema y lo intenta regresar a su posición original, el ejemplo más simple es el sistema masa-resorte sin fricción:

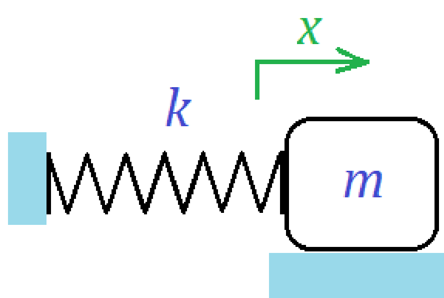

Figura 1.1. Sistema masa-resorte.

La posición x se mide desde la posición de equilibrio del sistema, en éste sistema horizontal es desde la posición en la cual el resorte no está deformado (estirado o comprimido). Para la masa corrida una distancia general x en la dirección positiva se hace un ***diagrama de cuerpo libre*** (DCL) para la masa mostrando todas las fuerzas que actúan sobre ella y se iguala al ***diagrama de masa acelerada*** (DMA) mostrando las aceleraciones involucradas [1].

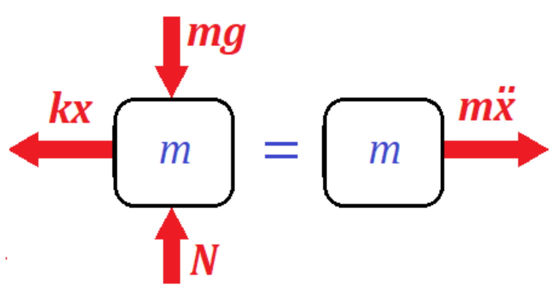

Figura 1.2. DCL y DMA de la masa en el sistema masa-resorte de la Fig. 1.1.

Recordando la relación entre la aceleración y la posición que es $a = \ddot{x}$ (cada punto encima de la variable indica una derivada respecto al tiempo) se tiene de la Fig. 1.2 en la dirección horizontal:

$$-kx = m\ddot{x}$$

Se reescribe de la forma:

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0} \quad (1)$$

La ecuación (1) es la forma general de la ecuación diferencial que describe una vibración libre no amortiguada, ω_0 es la ***frecuencia natural*** del sistema y sus unidades son rad/s. En el caso que estamos mirando de masa-resorte se tiene:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2)$$

<u>Observación:</u> todo sistema que al analizarlo resulte en una ecuación diferencial de la forma de (1) se encuentra en una vibración (u oscilación) libre, también llamada ***movimiento armónico simple***.

La solución de la ecuación (1) es de la forma [2]:

$$x(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t) \quad (3)$$

Con condiciones iniciales de posición y velocidad en el tiempo cero $x(0) = x_0, v(0) = v_0$ se tiene la solución completa de (1):

$$\boxed{x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)} \quad (4)$$

La amplitud de la vibración es la distancia máxima que recorre la masa desde el punto de equilibrio hasta cualquiera de los extremos, sale de la ecuación (4) haciendo resultante entre las magnitudes del coseno y el seno:

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2} \quad (5)$$

Cuando la masa se encuentra en $x = A$ ó $x = -A$ su velocidad instantánea es cero. La energía total del movimiento armónico simple se conserva y es igual a la energía potencial del resorte en su máxima deformación:

$$\boxed{E = \frac{1}{2} m v(t)^2 + \frac{1}{2} k x(t)^2 = \frac{1}{2} k A^2} \quad (6)$$

El tiempo que demora en completa un ciclo es llamado el ***período***, se calcula como:

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_0}} \quad (7)$$

¿Qué pasa si la masa cuelga verticalmente? En éste caso la posición y se mide desde la deformación de equilibrio del resorte y_{eq} por lo que el diagrama de cuerpo libre queda como se muestra a continuación:

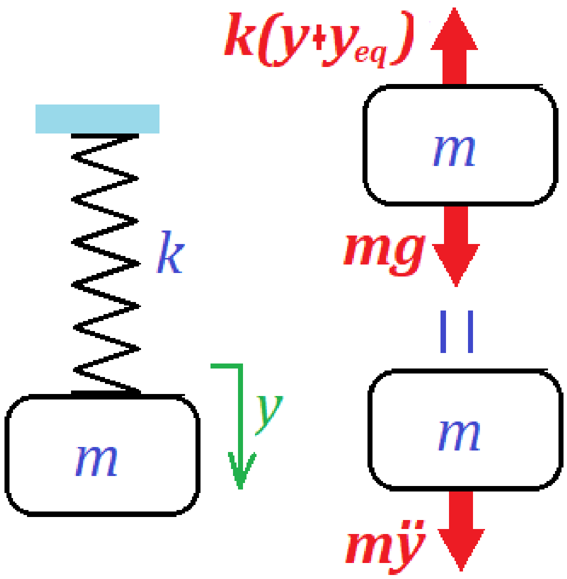

Figura 1.3. DCL y DMA de sistema masa-resorte vertical.

El balance de fuerzas es entonces:

$$k(y + y_{eq}) - mg = -m\ddot{y}$$

$$ky + ky_{eq} - mg = -m\ddot{y}$$

Pero en el equilibrio $ky_{eq} = mg$ por lo que la ecuación queda:

$$ky = -m\ddot{y}$$

$$m\ddot{y} + ky = 0$$

Dividiendo entre la masa resulta la misma ecuación (1) que representa el movimiento armónico simple.

Ejemplo 1.1. Considere un sistema masa-resorte con m = 2.0 kg, k = 3.0 N/m, x_0 = 0.5 m y v_0 = 1.0 m/s. La frecuencia natural del sistema es entonces:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3}{2}} = 1.225\ \mathrm{rad/s}$$

El período es entonces de la ecuación (7):

$$T = \frac{2\pi}{1.225} = 5.13\ \mathrm{s}$$

La amplitud del movimiento es de acuerdo a la ecuación (5):

$$A = \sqrt{(0.5)^2 + \left(\frac{1.0}{1.225}\right)^2} = 0.957\ \mathrm{m}$$

La energía mecánica de éste sistema se calcula con la ecuación (6):

$$E = \frac{1}{2}(3.0)(0.957)^2 = 1.375\ \mathrm{J}$$

Graficando la ecuación (4) se tiene:

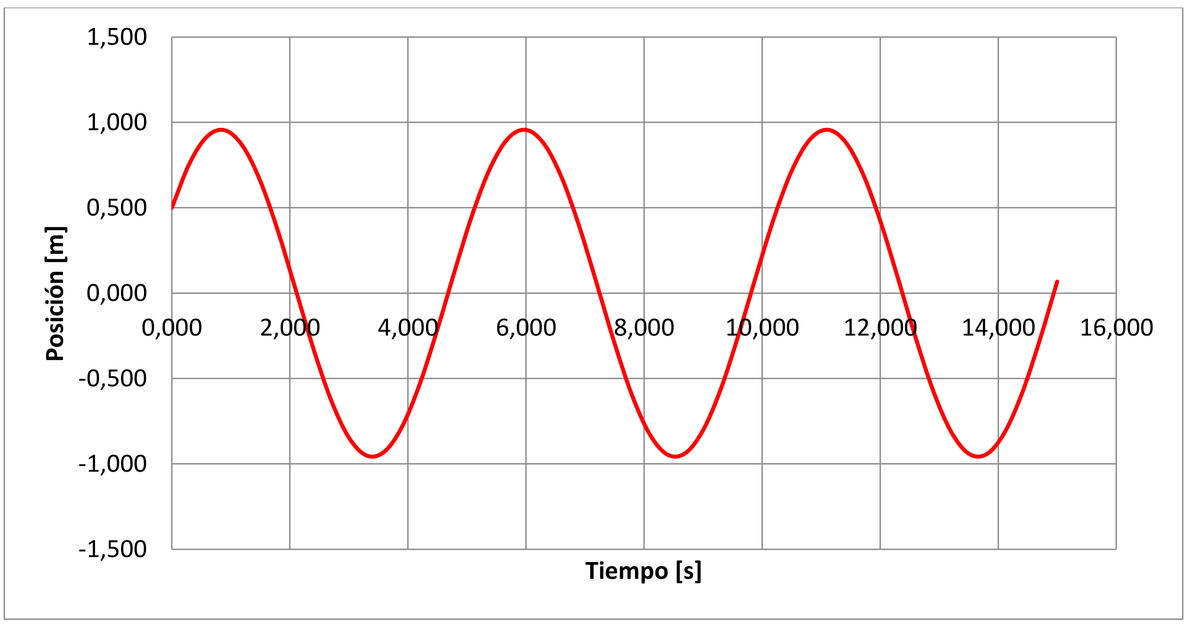

Figura 1.4. Posición de la masa en el tiempo para el ejemplo 1.1.

2. VIBRACIONES LIBRES AMORTIGUADAS

Partimos del sistema masa-resorte anterior pero agregando un dispositivo que genera una fuerza proporcional y contraria en dirección a la velocidad del movimiento, llamado ***amortiguador***.

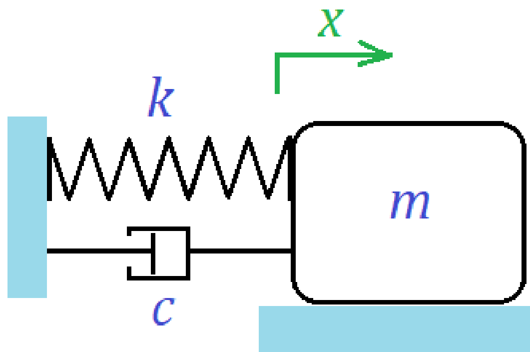

Figura 2.1. Sistema masa-resorte-amortiguador.

Dibujando el DCL y el DMA de éste sistema se hace el balance de fuerzas:

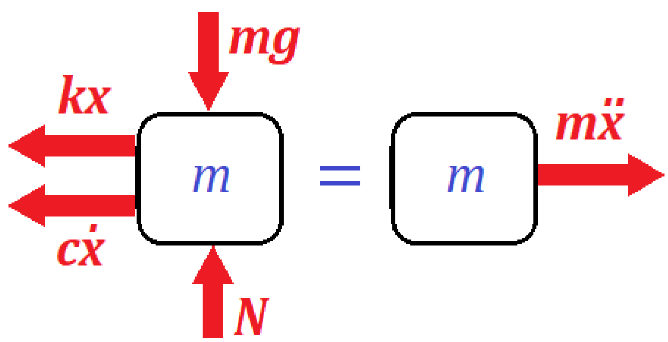

Figura 2.2. DCL y DMA del sistema masa-resorte-amortiguador.

Se tiene de la Fig. 2.2 en la dirección horizontal:

$$-kx - c\dot{x} = m\ddot{x}$$

Se reescribe de la forma:

$$\boxed{\ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = 0} \quad (8)$$

La ecuación (8) es la forma general de la ecuación diferencial que describe una vibración libre amortiguada, ω_0 es la ***frecuencia natural*** del sistema; la variable ζ es llamada la ***razón de amortiguación*** del sistema.

Observación: todo sistema que al analizarlo resulte en una ecuación diferencial de la forma de (8) se encuentra en una vibración (u oscilación) libre amortiguada.

Sacando la ecuación característica [2] de la ecuación diferencial (8) se tienen las raíces por medio de la ecuación cuadrática:

$$r = \frac{-2\zeta\omega_0 \pm \sqrt{(2\zeta\omega_0)^2 - 4(1)\omega_0^2}}{2(1)} = -\zeta\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1} \quad (9)$$

De la raíz cuadrada de la ecuación (9) resultan los siguientes casos de interés [2]:

***i*) $\zeta > 1$: sistema sobreamortiguado**

Ambas raíces son reales diferentes y la solución de (8) es de la forma:

$$\boxed{x(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}} \quad (10)$$

Donde las raíces son:

$$\begin{aligned} r_1 &= -\zeta\omega_0 - \omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1} \\ r_2 &= -\zeta\omega_0 + \omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1} \end{aligned} \quad (11)$$

***ii*) $\zeta = 1$: sistema críticamente amortiguado**

Ambas raíces son reales y repetidas y la solución de (8) es de la forma:

$$\boxed{x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-\zeta\omega_0 t}} \quad (12)$$

***iii*) $\zeta < 1$: sistema subamortiguado**

Ambas raíces son reales y complejas y la solución de (8) es de la forma:

$$\boxed{x(t) = e^{-\zeta\omega_0 t}(C_1 \cos\omega_1 t + C_2 \sin\omega_1 t)} \quad (13)$$

Donde la frecuencia de oscilación o vibración (dentro del coseno y el seno) es:

$$\omega_1 = \omega_0\sqrt{1 - \zeta^2} \quad (14)$$

En los casos mostrados las constantes C_1 y C_2 se calculan con las condiciones iniciales de posición y velocidad para cada caso. Gráficas de sistemas en cada caso se muestran a continuación:

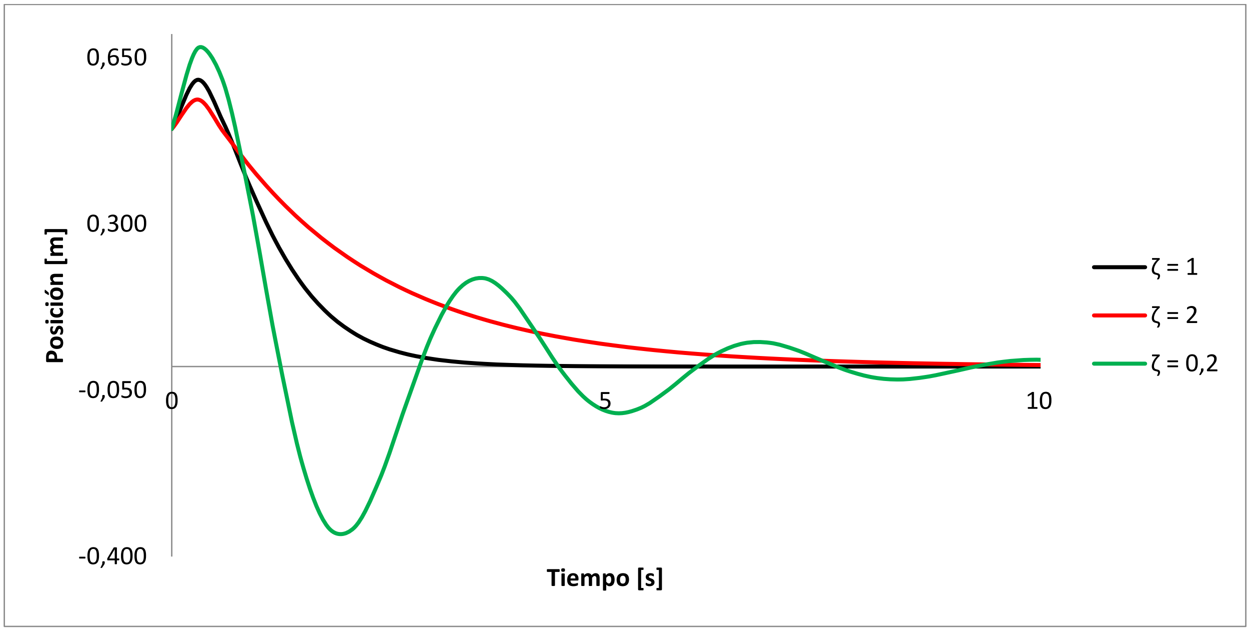

Figura 2.3. Comparación de vibraciones críticamente amortiguadas, sobreamortiguadas y subamortiguadas para $\omega_0 = 2$ rad/s, $x_0 = 0.5$ m, $v_0 = 1$ m/s.

Observación: las vibraciones críticamente amortiguadas son las que llegan más rápido al punto de equlibrio.

Lo visto para los sistemas amortiguados son el caso más general e incluyen al sistema no amortiguado simplemente haciendo $\zeta = 0$ en las ecuaciones de interés.

3. VIBRACIONES FORZADAS Y RESONANCIA

Partimos del sistema masa-resorte-amortiguador anterior pero agregando una fuerza externa que impulsa al sistema, o fuerza de excitación:

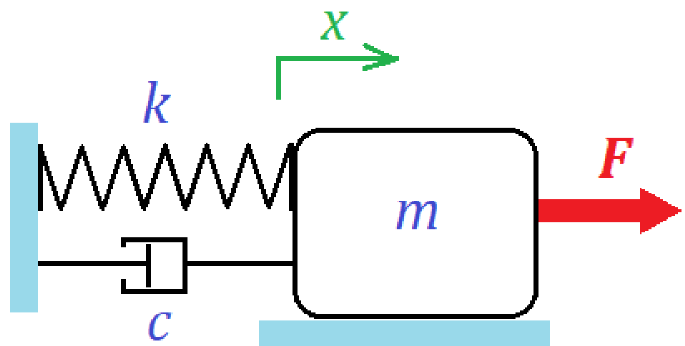

Figura 3.1. Sistema masa-resorte-amortiguador impulsado por una fuerza externa.

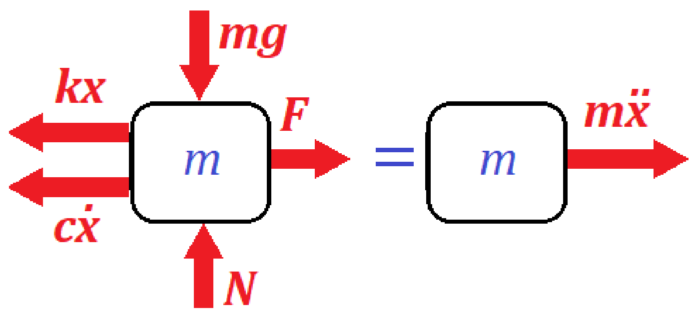

Figura 3.2. DCL y DMA del sistema de la Fig. 3.1.

Se tiene de la Fig. 3.2 en la dirección horizontal:

$$-kx - c\dot{x} + F(t) = m\ddot{x}$$

Se reescribe de la forma:

$$\boxed{\ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F(t)}{m}} \qquad (15)$$

La ecuación (15) es la forma no homogénea de la ecuación (8), por lo tanto la solución de (15) es la suma de la solución homogénea (la misma forma de la ecuación 8) más una particular que depende de la fuerza de excitación $F(t)$. La solución homogénea es llamada la ***respuesta transitoria*** del problema ya que ésta tiende a desaparecer en los sistemas amortiguados, la solución particular es la ***respuesta estacionaria*** o en ***estado estable*** del sistema ya que ésta queda después que la parte transitoria ha desaparecido y se mantendrá mientras la fuerza de excitación actúe.

Caso de interés: fuerza de excitación sinusoidal

Cuando la fuerza de excitación es sinusoidal es un caso de interés para las vibraciones, la forma general de esa fuerza es:

$$F(t) = F_0 \cos \omega t \qquad (16)$$

Donde ω es la frecuencia de la fuerza externa. La solución particular de (15) es entonces de la forma:

$$x_p = X_1 \cos \omega t + X_2 \sin \omega t \qquad (17)$$

Sacando las derivadas para meterla en la ecuación diferencial (15) se tiene:

$$\dot{x}_p = -\omega X_1 \sin \omega t + \omega X_2 \cos \omega t \qquad (18)$$

$$\ddot{x}_p = -\omega^2 X_1 \cos \omega t - \omega^2 X_2 \sin \omega t \qquad (19)$$

Sustituyendo (17), (18) y (19) en (15) se tiene:

$$-\omega^2 X_1 \cos \omega t - \omega^2 X_2 \sin \omega t + 2\zeta\omega_0(-\omega X_1 \sin \omega t + \omega X_2 \cos \omega t) + \omega_0^2(X_1 \cos \omega t + X_2 \sin \omega t) = \frac{F_0}{m} \cos \omega t \qquad (20)$$

Igualando términos de senos y cosenos de cada lado de (20) y resolviendo el sistema resultante se tiene:

$$X_1 = \frac{F_0}{m}\left[\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_0\omega)^2}\right] \qquad (21)$$

$$X_2 = \frac{F_0}{m}\left[\frac{2\zeta\omega_0\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_0\omega)^2}\right] \qquad (22)$$

La amplitud de la respuesta estacionaria del sistema es entonces $X = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$:

$$\boxed{X = \frac{F_0}{m}\left[\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_0\omega)^2}}\right]} \qquad (23)$$

Otra forma de escribirla es sacando la frecuencia natural al cuadrado de (23):

$$\boxed{X = \frac{F_0/k}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + \left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}} \qquad (24)$$

Como F_0/k es la deformación del resorte que equilibra a la amplitud de la fuerza de excitación se define el ***factor de amplificación*** de la amplitud estacionaria como:

$$\boxed{M = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + \left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}} \quad (25)$$

Éste resultado es muy importante ya que nos indica que para una fuerza de excitación sinusoidal la amplitud del movimiento se aumentará de acuerdo a la relación ω/ω_0. Cuando $\omega/\omega_0 \approx 1$ la amplificación es máxima, esto se llama ***resonancia*** del sistema y puede ser destructiva por lo que un buen diseño debe garantizar evitarla.

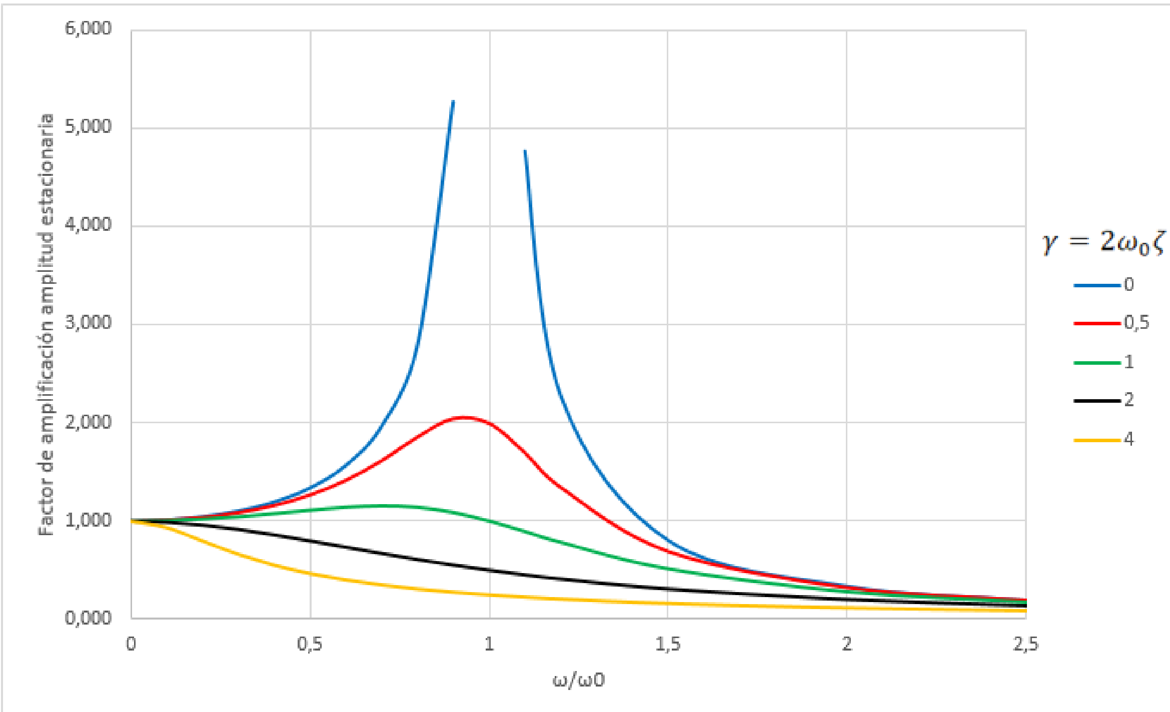

Figura 3.3. Factor de amplificación para diferentes razones de frecuencias y sistemas.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Andrew Pytel, Jaan Kiusalaas. ***Ingeniería Mecánica: Dinámica***. Cengage Learning.

[2] Tom Apostol. ***Calculus***. 2ª edición. Ed. Reverté.