

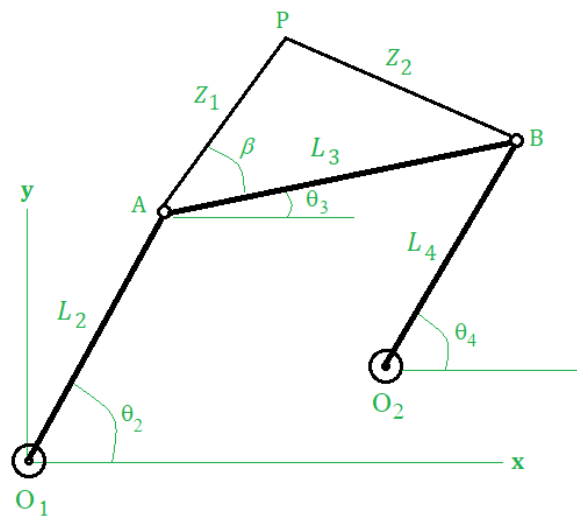
## ANÁLISIS DE POSICIÓN, VELOCIDAD Y ACELERACIÓN DE MECANISMOS DE 4 BARRAS POR MÉTODOS ANALÍTICOS - NUMÉRICOS

Carlos Armando De Castro

*Asesorías en Matemáticas, Física e Ingeniería*

### 1. INTRODUCCIÓN

En éste escrito se muestra el análisis cinemático general de un mecanismo de 4 barras por métodos analíticos – numéricos, implementados en Excel para entregar las soluciones. El esquema generalizado de un mecanismo de 4 barras es el siguiente:



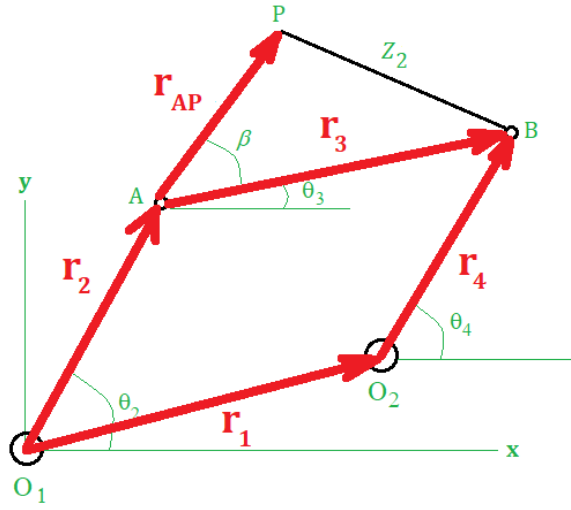
**Figura 1.1.** Mecanismo de 4 barras generalizado.

Todos los ángulos son medidos desde el eje x (horizontal), el eslabón impulsor (de entrada) es el eslabón 2 que parte del pivote (o apoyo) O<sub>1</sub>. El ángulo  $\beta$  que da la posición del punto de salida P es constante ya que el elemento acoplador APB no cambia de forma en ninguna parte del movimiento [1].

### 2. ANÁLISIS DE POSICIÓN

El análisis de posición es utilizado para que con un ángulo de entrada  $\theta_2$  y conociendo las coordenadas de los apoyos y las longitudes de los eslabones se puedan establecer los demás ángulos  $\theta_3$ ,  $\theta_4$  y por lo tanto la posición del punto P de salida del mecanismo. Si bien éste análisis puede hacerse de forma gráfica rápidamente para una posición particular se requiere repetir varias veces el mismo proceso para analizar diversas posiciones del mecanismo [1].

Para analizar la posición analíticamente se pone cada eslabón como un vector [1], según el esquema mostrado:



**Figura 2.1.** Eslabones del mecanismo como vectores.

Cada uno de los vectores detallado por componentes es:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}_1 &= (O_{2x}, O_{2y}) \\
 \mathbf{r}_2 &= (L_2 \cos \theta_2, L_2 \sin \theta_2) \\
 \mathbf{r}_3 &= (L_3 \cos \theta_3, L_3 \sin \theta_3) \\
 \mathbf{r}_4 &= (L_4 \cos \theta_4, L_4 \sin \theta_4) \\
 \mathbf{r}_{AP} &= (Z_1 \cos(\theta_3 + \beta), Z_1 \sin(\theta_3 + \beta))
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Del álgebra de vectores tenemos que se cumple para el esquema mostrado en la Fig. 2.1 el siguiente lazo vectorial:

$$\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_4
 \tag{2}$$

Igualando por componentes se tiene el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases}
 L_2 \cos \theta_2 + L_3 \cos \theta_3 = O_{2x} + L_4 \cos \theta_4 \\
 L_2 \sin \theta_2 + L_3 \sin \theta_3 = O_{2y} + L_4 \sin \theta_4
 \end{cases}
 \tag{3}$$

Las incógnitas son los ángulos  $\theta_3$ ,  $\theta_4$  y despejarlos analíticamente de esas ecuaciones es una tarea engorrosa, por tanto se hace de forma iterativa; asumiendo inicialmente un valor para  $\theta_3$  se tiene del sistema de ecuaciones (3):

$$\theta_4 = \arctan\left(\frac{L_2 \sin \theta_2 + L_3 \sin \theta_3 - O_{2y}}{L_2 \cos \theta_2 + L_3 \cos \theta_3 - O_{2x}}\right) \quad (4)$$

Con éste valor calculado de  $\theta_4$  se despeja y se calcula  $\theta_3$  del sistema de ecuaciones (3):

$$\theta_3 = \arctan\left(\frac{O_{2y} - L_2 \sin \theta_2 + L_4 \sin \theta_4}{O_{2x} - L_2 \cos \theta_2 + L_4 \cos \theta_4}\right) \quad (5)$$

**Se itera** con las ecuaciones (4) y (5) hasta alcanzar convergencia del método; éste es el método numérico de **punto fijo multivariable** [2]. Una vez calculados los ángulos se calcula la posición del punto P de salida:

$$\mathbf{r}_P = \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_{AP} \quad (6)$$

Detallando componentes:

$$P_x = L_2 \cos \theta_2 + Z_1 \cos(\theta_3 + \beta)$$

$$P_y = L_2 \sin \theta_2 + Z_1 \sin(\theta_3 + \beta)$$

(7)

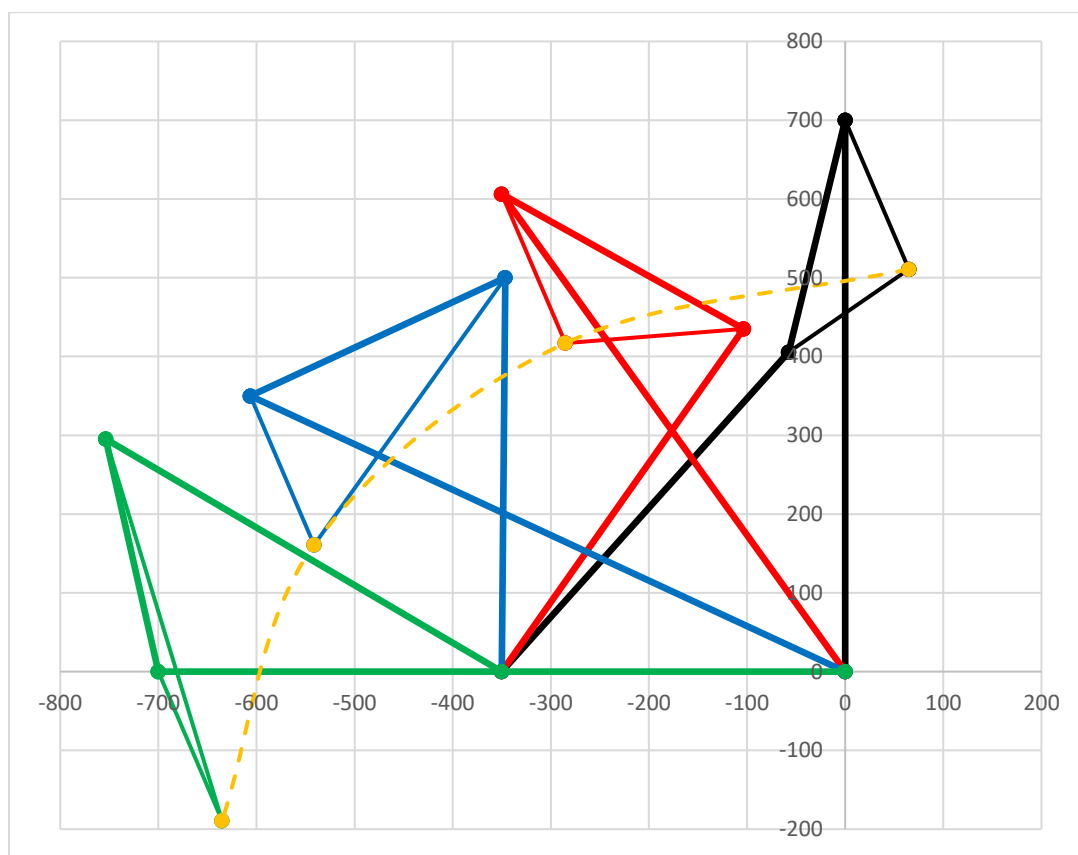
**Ejemplo 2.1.** Considere un mecanismo de 4 barras con las siguientes medidas:

Coordenadas apoyo 2	
O2x [mm]	-350
O2y [mm]	0
Longitudes eslabones	
L2 [mm]	700
L3 [mm]	300
L4 [mm]	500
Acoplador	
Z1 [mm]	200
$\beta$ [grados]	30

Implementando el esquema iterativo mostrado con las ecuaciones (4) y (5) y la posición de P con las ecuaciones (7) se tiene la solución a diversas posiciones del eslabón de entrada implementadas en una hoja de cálculo de Excel:

Ángulos eslabón entrada		$\theta_3$ [grados]	$\theta_4$ [grados]	Px [mm]	Py [mm]
$\theta_2$ pos 1 [grados]	90,0	258,9	54,2	64,9	510,8
$\theta_2$ pos 2 [grados]	120,0	-34,8	60,5	-285,1	417,0
$\theta_2$ pos 3 [grados]	150,0	30,0	89,6	-541,3	160,8
$\theta_2$ pos 4 [grados]	180,0	100,3	143,8	-635,1	-189,2

Las posiciones del mecanismo se muestran a continuación:



**Figura 2.2.** Diversas posiciones del mecanismo del Ejemplo 2.1, mostrando la configuración de los eslabones y el trazado de la trayectoria del punto P de salida.

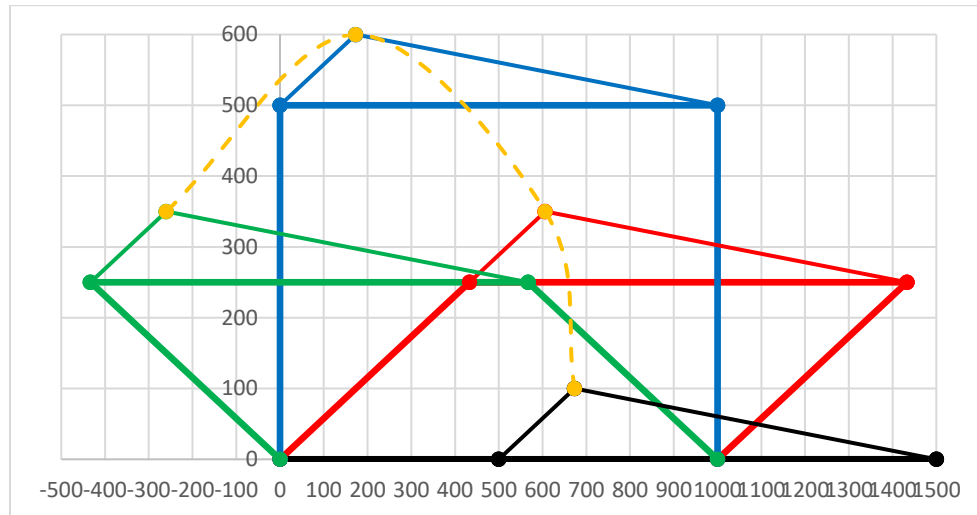
**Ejemplo 2.2.** Considere un mecanismo de 4 barras con las siguientes medidas:

Coordenadas apoyo 2	
O2x [mm]	1000
O2y [mm]	0
Longitudes eslabones	
L2 [mm]	500
L3 [mm]	1000
L4 [mm]	500
Acoplador	
Z1 [mm]	200
$\beta$ [grados]	30

La solución a diversas posiciones es:

Ángulos eslabón entrada		$\theta 3$ [grados]	$\theta 4$ [grados]	Px [mm]	Py [mm]
$\theta 2$ pos 1 [grados]	0,0	0,0	0,0	673,2	100,0
$\theta 2$ pos 2 [grados]	30,0	0,0	30,0	606,2	350,0
$\theta 2$ pos 3 [grados]	90,0	0,0	90,0	173,2	600,0
$\theta 2$ pos 4 [grados]	150,0	0,0	150,0	-259,8	350,0

Las posiciones del mecanismo se muestran a continuación:



**Figura 2.3.** Diversas posiciones del mecanismo del Ejemplo 2.2, mostrando la configuración de los eslabones y el trazado de la trayectoria del punto P de salida. Éste es un mecanismo para elevar y bajar cargas sin variar la horizontalidad de la misma.

### 3. ANÁLISIS DE VELOCIDAD

Para el análisis de velocidad se utiliza el método vectorial de velocidades relativas [3]. La entrada en éste caso es la velocidad angular del eslabón 2, entonces para el punto A se tiene:

$$\mathbf{v}_A = \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \omega_2 \\ L_2 \cos \theta_2 & L_2 \sin \theta_2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\mathbf{v}_A = (-\omega_2 L_2 \sin \theta_2, \omega_2 L_2 \cos \theta_2)}$$

(8)

Mirando la velocidad del punto B por el eslabón 4 se tiene:

$$\mathbf{v}_B = \boldsymbol{\omega}_4 \times \mathbf{r}_4 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \omega_4 \\ L_4 \cos \theta_4 & L_4 \sin \theta_4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{v}_B = (-\omega_4 L_4 \sin \theta_4, \omega_4 L_4 \cos \theta_4)$$

(9)

Mirando la velocidad del punto B por el eslabón 3 se tiene:

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega}_3 \times \mathbf{r}_3 = (v_{Ax}, v_{Ay}) + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \omega_3 \\ L_3 \cos \theta_3 & L_3 \sin \theta_3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{v}_B = (v_{Ax} - \omega_3 L_3 \sin \theta_3, v_{Ay} + \omega_3 L_3 \cos \theta_3)$$

(10)

Donde  $v_{Ax}$  y  $v_{Ay}$  son las componentes de la velocidad del punto A dados por la ecuación (8). Igualando por componentes las ecuaciones (9) y (10) se tiene el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} -\omega_4 L_4 \sin \theta_4 = v_{Ax} - \omega_3 L_3 \sin \theta_3 \\ \omega_4 L_4 \cos \theta_4 = v_{Ay} + \omega_3 L_3 \cos \theta_3 \end{cases}$$

(11)

Las incógnitas son las velocidades angulares de los eslabones 3 y 4; en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} L_3 \sin \theta_3 & -L_4 \sin \theta_4 \\ -L_3 \cos \theta_3 & L_4 \cos \theta_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_3 \\ \omega_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{Ax} \\ v_{Ay} \end{pmatrix}$$

(12)

Este sistema se resuelve de forma rápida utilizando la regla de Cramer [4]:

$$\omega_3 = \frac{\begin{vmatrix} v_{Ax} & -L_4 \sin \theta_4 \\ v_{Ay} & L_4 \cos \theta_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} L_3 \sin \theta_3 & -L_4 \sin \theta_4 \\ -L_3 \cos \theta_3 & L_4 \cos \theta_4 \end{vmatrix}}, \quad \omega_4 = \frac{\begin{vmatrix} L_3 \sin \theta_3 & v_{Ax} \\ -L_3 \cos \theta_3 & v_{Ay} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} L_3 \sin \theta_3 & -L_4 \sin \theta_4 \\ -L_3 \cos \theta_3 & L_4 \cos \theta_4 \end{vmatrix}}$$

Desarrollando los determinantes y simplificando se tiene:

$$\omega_3 = \frac{v_{Ax} \cos \theta_4 + v_{Ay} \sin \theta_4}{L_3 \sin(\theta_3 - \theta_4)} \quad (13)$$

$$\omega_4 = \frac{v_{Ax} \cos \theta_3 + v_{Ay} \sin \theta_3}{L_4 \sin(\theta_3 - \theta_4)} \quad (14)$$

Con las velocidades angulares se puede calcular la velocidad del punto B con la ecuación (9) y la velocidad del punto P es:

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega}_3 \times \mathbf{r}_{AP} = (v_{Ax}, v_{Ay}) + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \omega_3 \\ Z_1 \cos(\theta_3 + \beta) & Z_1 \sin(\theta_3 + \beta) & 0 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{v}_P = (v_{Ax} - \omega_3 Z_1 \sin(\theta_3 + \beta), v_{Ay} + \omega_3 Z_1 \cos(\theta_3 + \beta)) \quad (15)$$

**Ejemplo 3.1.** Considere el mecanismo del Ejemplo 2.1, con velocidad angular y posición siguientes:

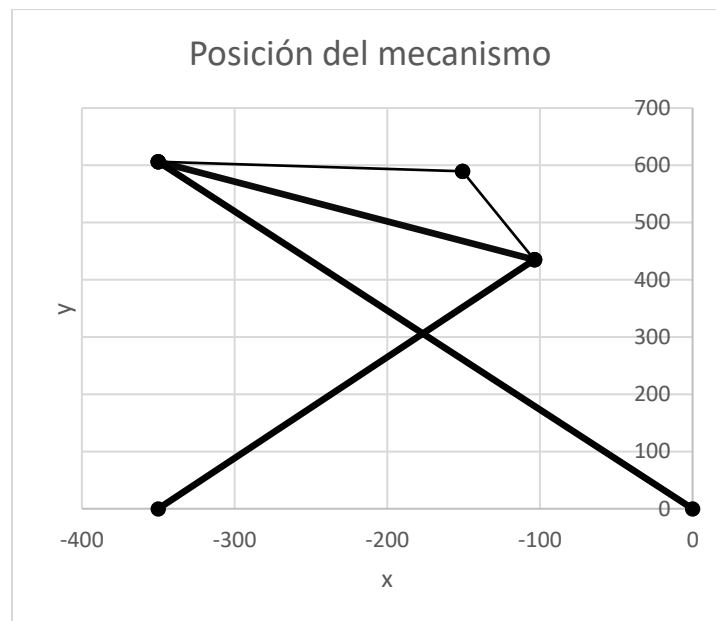
Datos entrada	
$\theta_2$ [grados]	120,0
$\omega_2$ [rad/s]	5,00

Soluciones:

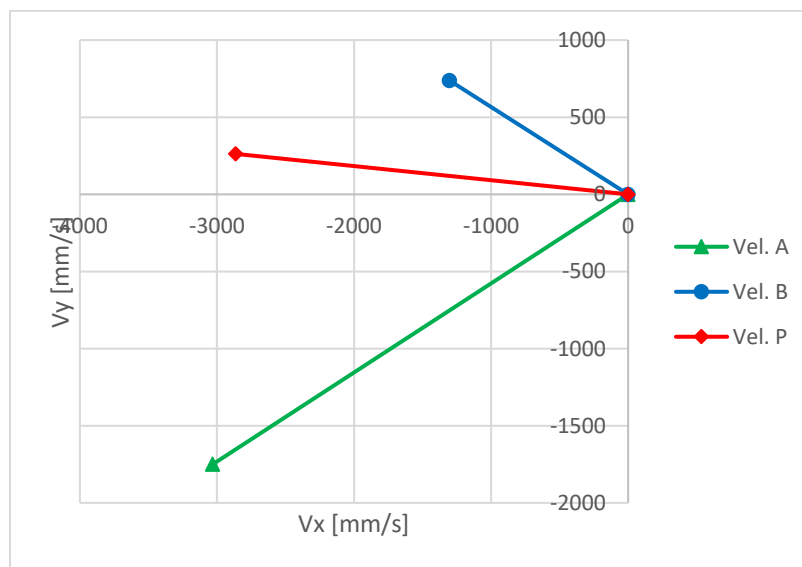
Vel. Angulares	
$\omega_3$ [rad/s]	10,10
$\omega_4$ [rad/s]	2,99
Velocidades	
Punto A	
$v_{Ax}$ [m/s]	-3,03
$v_{Ay}$ [m/s]	-1,75
Punto B	
$v_{Bx}$ [m/s]	-1,30
$v_{By}$ [m/s]	0,74

Punto P	
$v_{Px}$ [m/s]	-2,86
$v_{Py}$ [m/s]	0,26

Las gráficas en ese instante de la posición y velocidades de los puntos son:



**Figura 3.1.** Posición del mecanismo en el instante analizado.



**Figura 3.2.** Vectores de velocidad puntos A, B y P en el instante analizado.



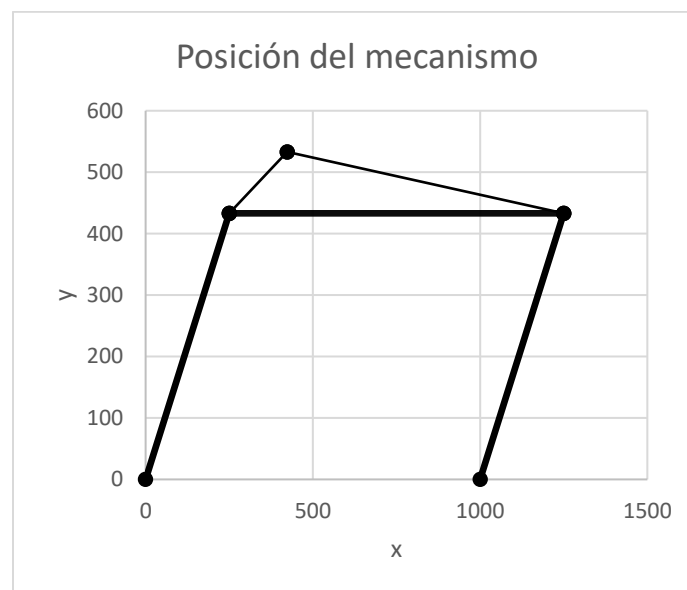
**Ejemplo 3.2.** Considere el mecanismo del Ejemplo 2.2, con velocidad angular y posición siguientes:

Datos entrada	
$\theta_2$ [grados]	60,0
$\omega_2$ [rad/s]	5,00

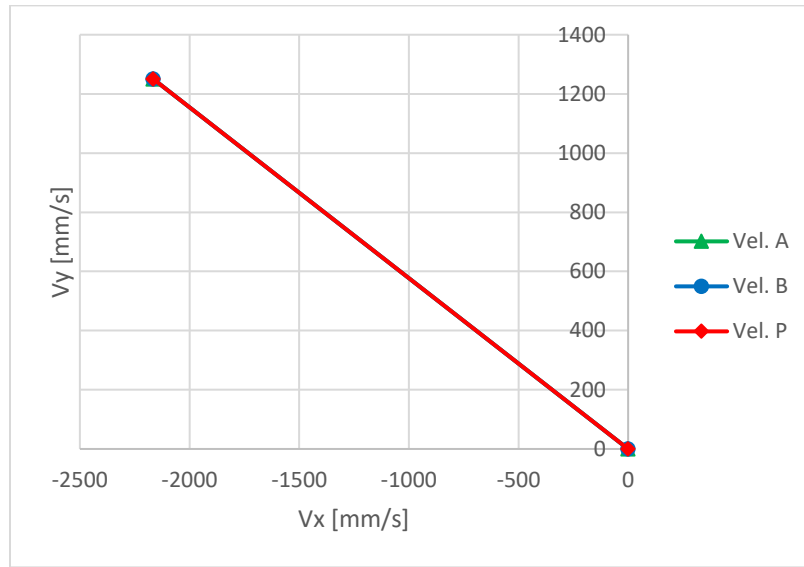
Soluciones:

Vel. Angulares	
$\omega_3$ [rad/s]	0,00
$\omega_4$ [rad/s]	5,00
Velocidades	
Punto A	
$v_{Ax}$ [m/s]	-2,17
$v_{Ay}$ [m/s]	1,25
Punto B	
$v_{Bx}$ [m/s]	-2,17
$v_{By}$ [m/s]	1,25
Punto P	
$v_{Px}$ [m/s]	-2,17
$v_{Py}$ [m/s]	1,25

Las gráficas en ese instante de la posición y velocidades de los puntos son:



**Figura 3.3.** Posición del mecanismo en el instante analizado.



**Figura 3.4.** Vectores de velocidad puntos A, B y P en el instante analizado.

**Observación importante:** en todo el análisis de velocidad se ha asumido que los ángulos de todos los eslabones son conocidos, esto se logra por medio de un análisis de posición por lo que es claro entonces que para hacer un análisis de velocidad hay que haber hecho de antemano el análisis de posición.

**Observación adicional:** para el análisis de aceleración (próximo a verse) debe ya haberse hecho el análisis de velocidad.

#### 4. ANÁLISIS DE ACELERACIÓN

Para el análisis de aceleración se utiliza el método vectorial de aceleraciones relativas [3]. La entrada en éste caso es la aceleración angular del eslabón 2 y las velocidades ya conocidas del mecanismo calculadas por medio del análisis de velocidades, entonces para el punto A se tiene:

$$\mathbf{a}_A = \alpha_2 \times \mathbf{r}_2 + \omega_2 \times \mathbf{v}_A = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \alpha_2 \\ L_2 \cos \theta_2 & L_2 \sin \theta_2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \omega_2 \\ v_{Ax} & v_{Ay} & 0 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{a}_A = (-\alpha_2 L_2 \sin \theta_2 - \omega_2 v_{Ay}, \quad \alpha_2 L_2 \cos \theta_2 + \omega_2 v_{Ax})$$

(16)

Mirando la aceleración del punto B por el eslabón 4 se tiene:

$$\mathbf{a}_B = \boldsymbol{\alpha}_4 \times \mathbf{r}_4 + \boldsymbol{\omega}_4 \times \mathbf{v}_B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \alpha_4 \\ L_4 \cos \theta_4 & L_4 \sin \theta_4 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \omega_4 \\ v_{Bx} & v_{By} & 0 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{a}_B = (-\alpha_4 L_4 \sin \theta_4 - \omega_4 v_{By}, \quad \alpha_4 L_4 \cos \theta_4 + \omega_4 v_{Bx})$$

(17)

Mirando la aceleración del punto B por el eslabón 3 se tiene:

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\alpha}_3 \times \mathbf{r}_3 + \boldsymbol{\omega}_3 \times (\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A)$$

$$\mathbf{a}_B = (a_{Ax}, a_{Ay}) + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \alpha_3 \\ L_3 \cos \theta_3 & L_3 \sin \theta_3 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \omega_3 \\ v_{Bx} - v_{Ax} & v_{By} - v_{Ay} & 0 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{a}_B = (a_{Ax} - \alpha_3 L_3 \sin \theta_3 - \omega_3 (v_{By} - v_{Ay}), \quad a_{Ay} + \alpha_3 L_3 \cos \theta_3 + \omega_3 (v_{Bx} - v_{Ax}))$$

(18)

Donde  $a_{Ax}$  y  $a_{Ay}$  son las componentes de la aceleración del punto A dados por la ecuación (16). Igualando por componentes las ecuaciones (17) y (18) se tiene el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} -\alpha_4 L_4 \sin \theta_4 - \omega_4 v_{By} = a_{Ax} - \alpha_3 L_3 \sin \theta_3 - \omega_3 (v_{By} - v_{Ay}) \\ \alpha_4 L_4 \cos \theta_4 + \omega_4 v_{Bx} = a_{Ay} + \alpha_3 L_3 \cos \theta_3 + \omega_3 (v_{Bx} - v_{Ax}) \end{cases}$$

(19)

Las incógnitas son las aceleraciones angulares de los eslabones 3 y 4; en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} L_3 \sin \theta_3 & -L_4 \sin \theta_4 \\ -L_3 \cos \theta_3 & L_4 \cos \theta_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{Ax} - \omega_3 (v_{By} - v_{Ay}) + \omega_4 v_{By} \\ a_{Ay} + \omega_3 (v_{Bx} - v_{Ax}) - \omega_4 v_{Bx} \end{pmatrix}$$

(20)

Para simplificar se definen:

$$a_1 = a_{Ax} - \omega_3 (v_{By} - v_{Ay}) + \omega_4 v_{By}$$

$$a_2 = a_{Ay} + \omega_3 (v_{Bx} - v_{Ax}) - \omega_4 v_{Bx}$$

(21)

Entonces la solución por regla de Cramer [4] del sistema (20) es:

$$\alpha_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & -L_4 \sin \theta_4 \\ a_2 & L_4 \cos \theta_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} L_3 \sin \theta_3 & -L_4 \sin \theta_4 \\ -L_3 \cos \theta_3 & L_4 \cos \theta_4 \end{vmatrix}}, \quad \alpha_4 = \frac{\begin{vmatrix} L_3 \sin \theta_3 & a_1 \\ -L_3 \cos \theta_3 & a_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} L_3 \sin \theta_3 & -L_4 \sin \theta_4 \\ -L_3 \cos \theta_3 & L_4 \cos \theta_4 \end{vmatrix}}$$

Desarrollando los determinantes y simplificando se tiene:

$$\alpha_3 = \frac{a_1 \cos \theta_4 + a_2 \sin \theta_4}{L_3 \sin(\theta_3 - \theta_4)} \quad (22)$$

$$\alpha_4 = \frac{a_1 \cos \theta_3 + a_2 \sin \theta_3}{L_4 \sin(\theta_3 - \theta_4)} \quad (23)$$

Con las aceleraciones angulares se puede calcular la aceleración del punto B con la ecuación (17) y la aceleración del punto P es:

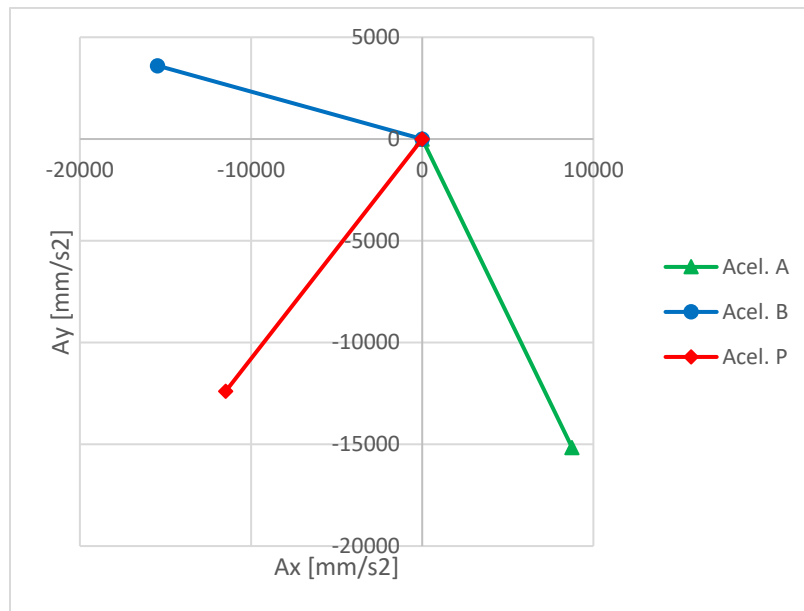
$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_A + \alpha_3 \times \mathbf{r}_{AP} + \omega_3 \times (\mathbf{v}_P - \mathbf{v}_A)$$

$$\mathbf{a}_P = (a_{Ax}, a_{Ay}) + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \alpha_3 \\ Z_1 \cos(\theta_3 + \beta) & Z_1 \sin(\theta_3 + \beta) & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \omega_3 \\ v_{Px} - v_{Ax} & v_{Py} - v_{Ay} & 0 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{a}_P = (a_{Ax} - \alpha_3 Z_1 \sin(\theta_3 + \beta) - \omega_3 (v_{Py} - v_{Ay}), a_{Ay} + \alpha_3 Z_1 \cos(\theta_3 + \beta) + \omega_3 (v_{Px} - v_{Ax})) \quad (24)$$

**Ejemplo 4.1.** Considere el mecanismo de los ejemplos 2.1 y 3.1 con  $\alpha_2 = 0$ , se tiene:

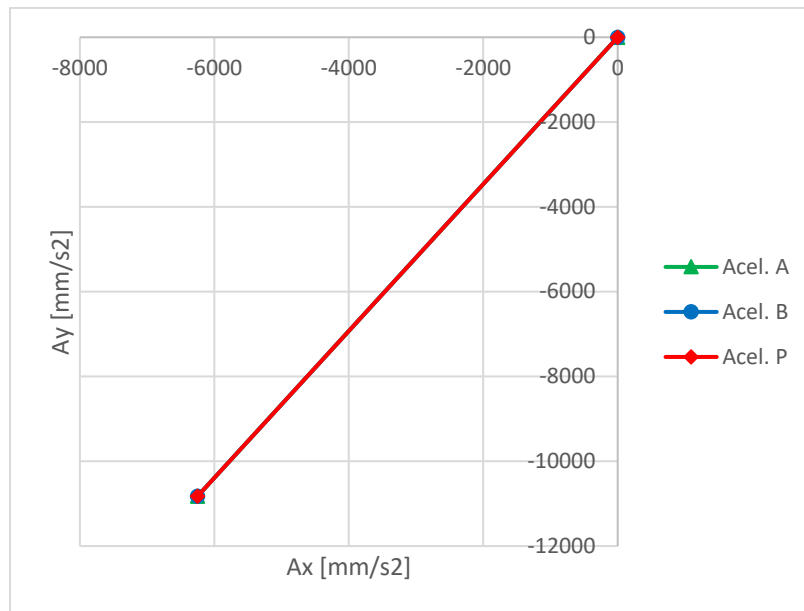
Acel. Angulares	
$\alpha_3$ [rad/s <sup>2</sup> ]	5,31
$\alpha_4$ [rad/s <sup>2</sup> ]	30,46
Aceleraciones	
Punto A	
a_Ax [m/s <sup>2</sup> ]	8,8
a_Ay [m/s <sup>2</sup> ]	-15,2
Punto B	
a_Bx [m/s <sup>2</sup> ]	-15,5
a_By [m/s <sup>2</sup> ]	3,6
Punto P	
a_Px [m/s <sup>2</sup> ]	-11,5
a_Py [m/s <sup>2</sup> ]	-12,4



**Figura 4.1.** Vectores de aceleración puntos A, B y P en el instante analizado.

**Ejemplo 4.2.** Considere el mecanismo de los ejemplos 2.2 y 3.2 con  $\alpha_2 = 0$ , se tiene:

Acel. Angulares	
$\alpha_3$ [rad/s²]	0,00
$\alpha_4$ [rad/s²]	0,00
Aceleraciones	
Punto A	
$a_{Ax}$ [m/s²]	-6,3
$a_{Ay}$ [m/s²]	-10,8
Punto B	
$a_{Bx}$ [m/s²]	-6,3
$a_{By}$ [m/s²]	-10,8
Punto P	
$a_{Px}$ [m/s²]	-6,3
$a_{Py}$ [m/s²]	-10,8



**Figura 4.2.** Vectores de aceleración puntos A, B y P en el instante analizado.

#### BIBLIOGRAFÍA:

- [1] Robert L. Norton. *Dinámica de maquinaria*. McGraw Hill.
- [2] Carlos Armando De Castro. *Métodos numéricos básicos para ingeniería*. [https://sites.google.com/site/matematicasingeneria/metodos\\_numericos\\_ingenieria](https://sites.google.com/site/matematicasingeneria/metodos_numericos_ingenieria)
- [3] Andrew Pytel, Jaan Kiusalaas. *Ingeniería Mecánica: Dinámica*. Cengage Learning.
- [4] Tom Apostol. *Calculus*. 2ª edición. Ed. Reverté.

*¿Desea más profundización y ejemplos prácticos?  
Contáctenos para una clase personalizada.*