

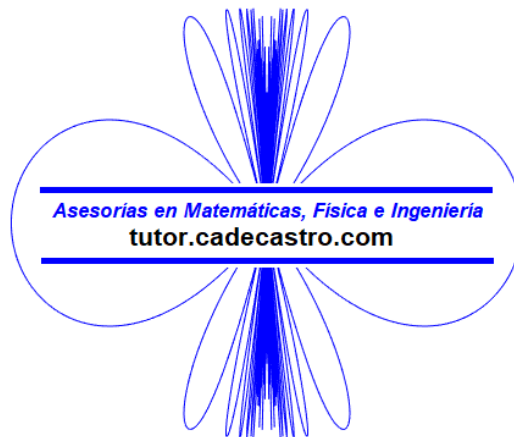
Dinámica básica de aviones para ingenieros

Con un ejemplo de diseño conceptual

Carlos Armando De Castro



Asesorías en Matemáticas, Física e Ingeniería



© Carlos Armando De Castro Payares. 2ª edición, 2017 (rev. 2020).

Todas las imágenes y fotografías son de autoría propia.

Se permite su reproducción con fines educativos y académicos, no lucrativos, dando crédito al autor.

Bogotá, Colombia.

<https://tutor.cadecastro.com>

NOTA IMPORTANTE: el objetivo de este libro es dar ideas generales de la dinámica de aviones para ingenieros, estudiantes de ingeniería y personas de profesiones afines con interés en la aviación, éste no debe tomarse como un manual certificado de estudios aeronáuticos y en ningún momento debe usarse como guía para el vuelo o diseño de aviones. **Nada sustituye un entrenamiento adecuado en escuelas de aviación con instructores certificados.**

CONTENIDO

1.	INTRODUCCIÓN	4
	Nota de unidades de medida y dinámica mostrada	5
2.	CONCEPTOS DE AERODINÁMICA	8
2.1.	LAS CUATRO FUERZAS DEL VUELO.....	8
	Peso.....	8
	Sustentación.....	8
	Empuje.....	8
	Arrastre o resistencia	9
2.2.	PERFILES ALARES.....	9
	¿Por qué vuela un avión?.....	9
	Ángulo de ataque y pérdida	10
	Variación de C_L con el ángulo de ataque.....	11
	Elementos de aumento de coeficiente de sustentación.....	12
2.3.	POLAR DE ARRASTRE	13
2.4.	RELACIÓN L/D.....	14
	Ejemplo 2.1. Perfil alar CDC 220.....	15
	Ejemplo 2.2. Aerodinámica completa del Air-E.....	17
3.	MENCIÓN DE LOS MÉTODOS DE PROPULSIÓN	20
3.1.	MOTORES DE PISTÓN Y HÉLICE	20
3.2.	MOTORES A REACCIÓN.....	21
3.3.	MOTORES TURBOHÉLICE	21
4.	DINÁMICA DEL VUELO RECTO Y NIVELADO	23
4.1.	VELOCIDAD DE PÉRDIDA.....	23
	Carga alar.....	24
4.2.	EMPUJE REQUERIDO	24
	Empuje requerido en función de la velocidad	24
	Empuje requerido mínimo	25
4.3.	POTENCIA REQUERIDA	26
	Potencia requerida en función de la velocidad.....	26
	Potencia requerida mínima.....	26
	Ejemplo 4.1. El Air-E en vuelo recto y nivelado.....	27
5.	DINÁMICA DE VUELO EN ASCENSO Y DESCENSO	29
5.1.	VELOCIDAD VERTICAL (TASA DE ASCENSO/DESCENSO).....	29

5.2.	VELOCIDAD VERTICAL EN FUNCIÓN DE LA POTENCIA APLICADA Y LA VELOCIDAD DEL AVIÓN	30
	Máxima tasa de ascenso.....	30
	Velocidad para máxima tasa de ascenso	31
	Ejemplo 5.1. Desempeño en ascenso del Air-E.	31
6.	DINÁMICA DEL PLANEEO	32
	Tasa de planeo.....	32
7.	DINÁMICA DE LOS VIRAJES	35
7.1.	SUSTENTACIÓN EN UN VIRAJE.....	35
	Factor de carga del viraje.....	35
	Aumento de la velocidad de pérdida	37
7.2.	ACELERACIÓN CENTRÍPETA Y RADIO DE GIRO DEL VIRAJE.....	38
	Radio de giro del viraje	39
	Aceleración centrípeta	39
	Ejemplo 7.1. Viraje coordinado en el Air-E.	40
	Ejemplo 7.2. Viraje escarpado en el Air-E.....	40
8.	ACELERACIÓN MANTENIENDO NIVEL DE VUELO	41
	Ejemplo 8.1.....	41
9.	DINÁMICA DE MANIOBRAS DE LEVANTE Y DESCENSO	43
9.1.	MANIOBRA DE LEVANTE	44
	Ejemplo 9.1. Maniobra de levante.	44
9.2.	MANIOBRA DE DESCENSO.....	47
	Ejemplo 9.2. Maniobra de descenso.....	47
	Gravedad cero.....	49
10.	DINÁMICA DEL DESPEGUE.....	51
	Ejemplo 10.1. Despegue del Air-E.....	52
11.	DINÁMICA DEL ATERRIZAJE.....	55
11.1.	RECOGIDA.....	56
	Ejemplo 11.1. Recogida en el Air-E.....	56
11.2.	CARRERA DE ATERRIZAJE	58
	Ejemplo 11.2. Carrera de aterrizaje del Air-E.	59
	BIBLIOGRAFÍA	60
	SOBRE EL AUTOR	60
	ASESORÍAS EN MATEMÁTICAS, FÍSICA E INGENIERÍA.....	61

1. INTRODUCCIÓN

Volar: el sueño de los hombres y los pájaros enfermos¹, un sueño que llegó a ser posible gracias a los esfuerzos acumulados de varios científicos e ingenieros hasta que se hizo realidad el 17 de diciembre 1903 en Carolina del Norte, Estados Unidos en el avión *Flyer* de los hermanos Wright²; desde ese momento hoy ya hace 110 años el conocimiento en ésta área ha crecido de una forma impresionante, haciendo más segura la experiencia de volar para millones de pasajeros cada año y para todos los que compartimos esta pasión.

La dinámica básica del vuelo para aviones es la misma tanto para un ultraliviano Rans S-12 como para un reactor comercial Boeing 747, es sencilla y se puede entender con conocimientos básicos de física mecánica, por lo que la idea de este libro es que los ingenieros y estudiantes de ingeniería lo puedan entender sin complicaciones e iniciar en el fascinante y apasionante mundo de la aviación.



Figura 1.1. Avión Rans S-12 Airaile piloteado por el autor durante su primer vuelo solo.

¹ Frase de Los Simpsons, temporada 7 capítulo 9, “La última carcajada de Bob Patiño”.

²http://en.wikipedia.org/wiki/Wright_brothers

Para toda la teoría y ejemplos usaremos un avión ultraliviano de diseño propio calculado para la empresa A-620 Aircraft Builders y que es el primer avión tripulado eléctrico de Colombia, llamado *Air-E*:



Figura 1.2. Avión eléctrico ultraliviano Air-E, presentado en la Feria de la Industria Aeroespacial Colombiana FIAC 2017.

Nota de unidades de medida y dinámica mostrada

En la aviación se utiliza generalmente el sistema imperial de medidas (pies, millas, libras, etc...) y por ello en este libro lo usaremos junto con el sistema métrico internacional (SI), en una mezcla un tanto absurda de unidades que lamentablemente se hace necesaria.

Las ecuaciones de dinámica mostradas en este libro son asumiendo aire en calma, ya que la dinámica en turbulencia entra en el área de los sistemas dinámicos no lineales y caos.

Los capítulos del libro se dividen de acuerdo con cinco criterios para poder comprender mejor los temas:

Conceptos necesarios para entender la dinámica de aviones:

Cap. 2. Conceptos de aerodinámica

Cap. 3. Mención de los métodos de propulsión.

Vuelo sin aceleración:

Cap. 4. Dinámica del vuelo recto y nivelado.

Cap. 5. Dinámica del vuelo en ascenso y descenso.

Cap. 6. Dinámica del planeo.

Vuelo con aceleración:

Cap. 7. Dinámica de los virajes.

Cap. 8. Aceleración manteniendo nivel de vuelo.

Cap. 9. Dinámica de maniobras de ascenso y descenso.

Despegue y aterrizaje:

Cap. 10. Dinámica del despegue.

Cap. 11. Dinámica del aterrizaje.

PARTE I

CONCEPTOS NECESARIOS PARA ENTENDER LA DINÁMICA DE AVIONES

2. CONCEPTOS DE AERODINÁMICA

La idea de esta sección es dar a conocer los principios generales y ecuaciones básicas de la aerodinámica con la que se modela la dinámica de un avión para poder comprender las siguientes secciones del libro.

2.1. LAS CUATRO FUERZAS DEL VUELO

Todo avión en vuelo tiene cuatro fuerzas actuando sobre él: peso, sustentación, empuje y arrastre.

Peso

Todo cuerpo tiene una masa y por lo tanto un **peso** debido a la acción de la gravedad de la Tierra (que tiene un valor promedio de aceleración $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ para lo que nos concierne en este libro). El peso es una fuerza que siempre apunta hacia el centro de la Tierra y es el responsable de mantenernos en el suelo, se designa generalmente con la letra W y se calcula a partir de la masa m con la ecuación:

$$W = mg \quad (2.1)$$

Sustentación

La sustentación es la fuerza que contrarresta el peso y nos permite volar, ésta fuerza se genera en los aviones gracias al movimiento de las alas a través del aire y es perpendicular a la trayectoria del avión, se designa con la letra L .

La sustentación se describe para un avión de superficie alar S en aire con densidad ρ y a una velocidad V con la siguiente ecuación:

$$L = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_L \quad (2.2)$$

A la Ecuación 2.2 se llegó después de muchas mediciones hechas por los ingenieros y científicos estudiosos de la aerodinámica. La variable C_L es llamada coeficiente de sustentación y es un valor adimensional que depende de la geometría del cuerpo que se está estudiando (perfil alar, el avión como un todo, etc...), profundizaremos más en los coeficientes de sustentación en la Sección 2.2.

Empuje

El empuje es la fuerza que mueve el avión a través de la masa de aire para lograr que las alas produzcan sustentación, se designa con la letra T y se consigue por medio de los sistemas de propulsión de los aviones (Capítulo 3). El empuje va en la dirección del movimiento cuando se vuela en aire en calma.

Arrastre o resistencia

El arrastre o resistencia es la fuerza que se opone al movimiento del avión, se designa con la letra D y se divide en dos partes:

- **Resistencia parásita:** debida a la fricción del aire sobre el cuerpo del avión y elementos tales como montantes, cables, etc... que obstaculizan el flujo de aire.
- **Arrastre inducido:** es debido a la sustentación y aumenta al aumentar ésta, más de esto en la sección sobre el Polar de arrastre.

El arrastre se describe para un avión de superficie alar S en aire con densidad ρ y a una velocidad V con la siguiente ecuación:

$$D = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_D \quad (2.3)$$

A la Ecuación 2.3 se llegó después de muchas mediciones hechas por los ingenieros y científicos estudiosos de la aerodinámica. La variable C_D es llamada **coeficiente de arrastre** y es un valor adimensional que depende de la geometría del cuerpo que se está estudiando (perfil alar, el avión como un todo, etc...), profundizaremos más en los coeficientes de arrastre en la Sección 2.3.

2.2. PERFILES ALARES

¿Por qué vuela un avión?

Como ya se dijo, los aviones vuelan gracias a la sustentación producida por las alas, y éstas la producen gracias a la forma de sus perfiles:

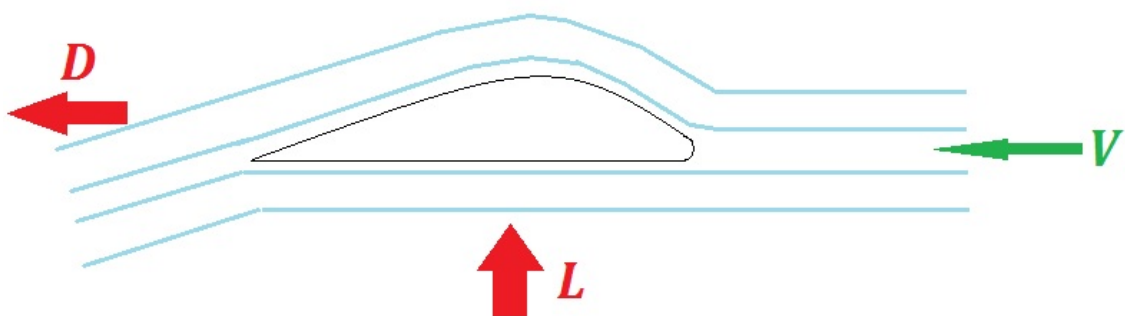


Figura 2.1. Perfil alar en movimiento a través del aire.

Como se observa en la Figura 2.1, la forma del perfil y la viscosidad del aire que lo hace “pegar” a la superficie con la que tiene contacto obligan al aire a dirigirse hacia abajo, lo cual debido a la 1ª. Ley de Newton de acción y reacción hace que el aire empuje el ala hacia arriba, generando así la fuerza de sustentación.

En muchos textos y libros de aviación se dice que el perfil del ala hace que el aire que pasa por encima se mueva más rápido generando baja presión en la parte superior del perfil y una fuerza resultante hacia arriba por la ley de Bernoulli, sin embargo, estudios han demostrado que esto es falso³.

Adicionalmente, en el perfil se genera también un arrastre parásito debido a la fricción de la superficie del ala y un arrastre inducido debido a la sustentación.

Ángulo de ataque y pérdida

El ángulo de ataque es el ángulo formado entre la cuerda del perfil y la trayectoria de vuelo:

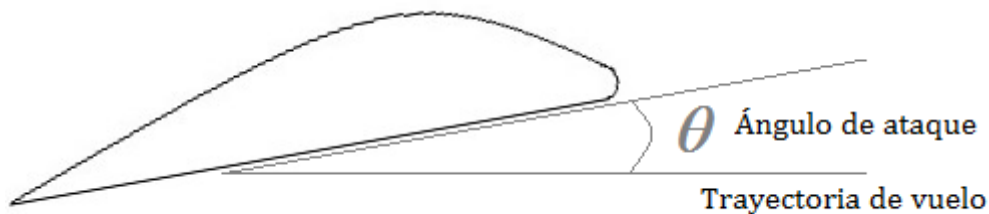


Figura 2.2. Definición del ángulo de ataque.

Consideremos ahora el perfil de la Figura 2.1 pero en un ángulo de ataque determinado:

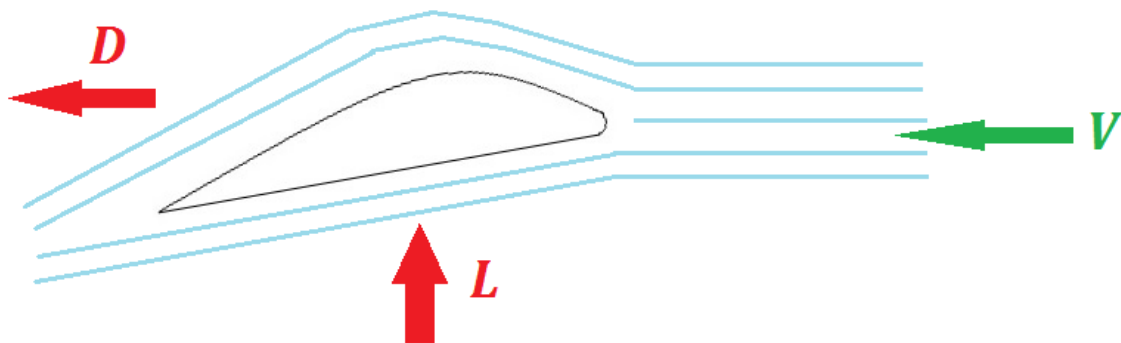


Figura 2.3. Perfil alar con ángulo de ataque.

En la Figura 2.3 podemos observar que ahora el aire es forzado con mayor intensidad hacia abajo, por lo que la sustentación va a ser mayor a la generada en el caso de la Figura 2.1, sin embargo también observamos que la fuerza resultante va a tener un componente mayor hacia atrás, por lo cual se genera un mayor arrastre, y esto aquí es la explicación conceptual del **arraastre inducido**.

Surge una pregunta entonces: ¿podemos aumentar el ángulo de ataque indefinidamente para tener mayor coeficiente de sustentación?

³<http://www.grc.nasa.gov/WWW/k-12/airplane/wrong1.html>

La respuesta a esto es: **no**. Al continuar aumentando el ángulo de ataque llegará un punto en el que se empezarán a formar remolinos (vórtices) de turbulencia en la parte superior del ala, lo cual conduce a que la sustentación disminuya hasta llegar al punto en el que se pierda totalmente la sustentación, un evento conocido como **pérdida** (*stall* en inglés). Todo piloto siempre debe estar muy atento a evitar llegar a una situación de pérdida en vuelo ya que pueden llegar a ser muy peligrosas.

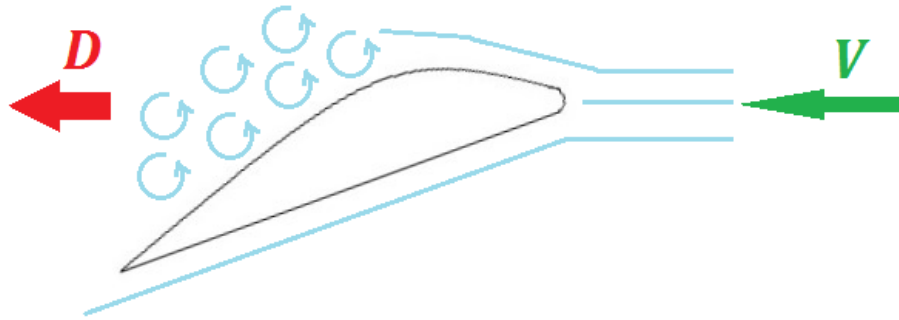


Figura 2.4. Ala en pérdida.

Se considera que la pérdida inicia en el punto en el que el coeficiente de sustentación es el mayor obtenible en el ala.

Variación de C_L con el ángulo de ataque

Mediciones hechas en multitud de perfiles alares han mostrado la forma típica de la relación entre el coeficiente de sustentación y el ángulo de ataque:

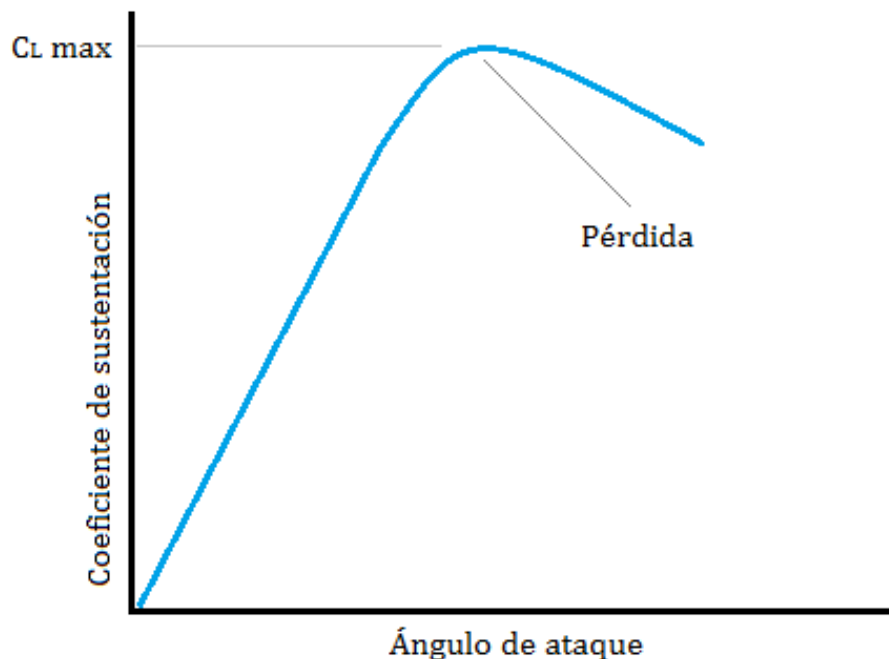


Figura 2.5. Curva típica de variación del coeficiente de sustentación con el ángulo de ataque.

Nota: en un ala real se forman vórtices en las puntas por lo que el coeficiente de sustentación es menor al del perfil sólo. Hay métodos para calcular el factor de disminución del coeficiente real de sustentación pero no los mostraré en este libro, pueden dirigirse a la referencia [1] para mayor información.

Elementos de aumento de coeficiente de sustentación

Son elementos utilizados para aumentar el coeficiente de sustentación sin variar el ángulo de ataque, los más comunes son los **flaps** y los **slats**. El principio común de ambos es hacer que el aire que pasa alrededor del ala baje con mayor intensidad, produciendo una fuerza mayor de sustentación, voy a ilustrar únicamente los flaps:

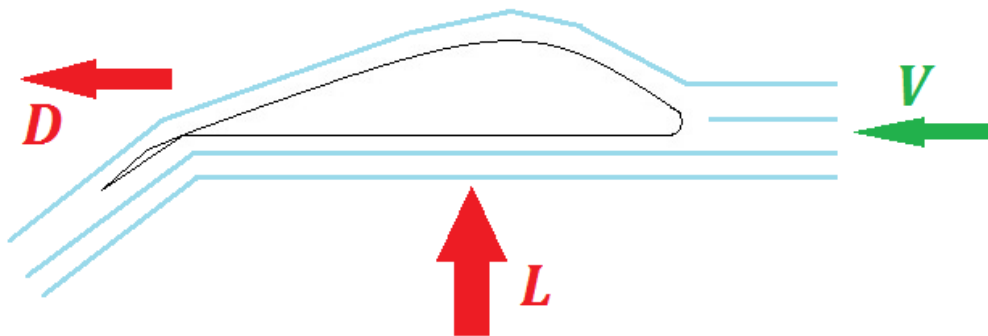


Figura 2.6. El perfil de la Figura 2.1 con flaps.

Se observa que el aire tiene mayor movimiento hacia abajo, lo que hace que aumente la sustentación, sin embargo, el arrastre también aumenta. Los flaps se utilizan generalmente en maniobras de despegue y aterrizaje corto y vuelo lento.



Figura 2.7. Avión MXP-740 con flaps y slats que cubren la totalidad de la envergadura, este es un avión tipo STOL (Short Take-Off and Landing).

2.3. POLAR DE ARRASTRE

Ya hemos visto que el arrastre aumenta al aumentar la sustentación debido al arrastre inducido. ¿Cómo se describe esta relación? Los estudios hechos en muchos perfiles y aviones han mostrado que típicamente es una relación parabólica:

$$C_D = C_{D0} + KC_L^2 \quad (2.4)$$



Figura 2.8. Curva típica relacionando C_D con C_L .

La relación descrita en la Ecuación 2.4 es llamada el **polar de arrastre** (*drag polar* en inglés) y **es una ecuación importantísima** ya que con ayuda de ella se puede describir toda la dinámica de un avión en vuelo (no aplica para el perfil solamente, aplica para todo el avión). En la Ecuación 2.4 aparecen tanto la resistencia parásita como el arrastre inducido:

- Resistencia parásita: C_{D0}
- Arrastre inducido: KC_L^2

Para el avión completo que vuele por debajo de la velocidad del sonido, los parámetros del polar de arrastre son:

$$C_{D0} = C_{D0-fricción} + C_{D0-otros} \quad (2.5)$$

$$K = K_{perfil} + \frac{1}{\pi\epsilon AR} \quad (2.6)$$

En la Ec. 2.6 tenemos que AR es la razón de aspecto del ala del avión y ϵ el factor de eficiencia de la envergadura que se calcula con métodos más allá del alcance de este libro (en el Ejemplo 2.2. mostramos una ecuación empírica).

2.4. RELACIÓN L/D

Una de las relaciones aerodinámicas más importantes en la dinámica de aviones es la relación L/D por lo cual es de suma importancia conocer los contenidos de esta sección antes de iniciar a estudiar la dinámica del vuelo. De las Ecuaciones 2.2 y 2.3 tenemos:

$$\frac{L}{D} = \frac{\frac{1}{2}\rho V^2 S C_L}{\frac{1}{2}\rho V^2 S C_D} = \frac{C_L}{C_D}$$

Sustituyendo la Ecuación 2.4 del polar de arrastre tenemos:

$$\frac{L}{D} = \frac{C_L}{C_{D0} + K C_L^2} \quad (2.7)$$

Con la Ecuación 2.7 podemos calcular el valor del coeficiente de sustentación para el cual L/D es máxima, derivando Ec. 2.7 respecto a C_L e igualando a cero tenemos:

$$\frac{d}{dC_L} \left(\frac{L}{D} \right) = \frac{C_{D0} + K C_L^2 - 2K C_L^2}{(C_{D0} + K C_L^2)^2} = 0$$

De donde para tener $(L/D)_{\max}$ el coeficiente de sustentación es:

$$C_L = \sqrt{\frac{C_{D0}}{K}} \quad (2.8)$$

Y el coeficiente de arrastre en $(L/D)_{\max}$ se obtiene de sustituir Ec. 2.8 en Ec. 2.4 y es:

$$C_D = 2C_{D0} \quad (2.9)$$

Tenemos entonces que el máximo valor de L/D es:

$$\boxed{\left(\frac{L}{D} \right)_{\max} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{C_{D0} K}}} \quad (2.10)$$

Ejemplo 2.1. Perfil alar CDC 2420

En el Air-E se utiliza un perfil alar diseñado por el autor, el CDC 2520:

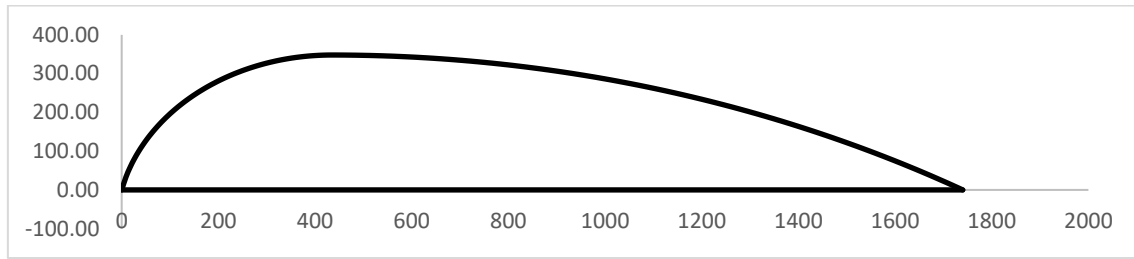


Figura 2.9. Perfil alar CDC 2520.

Este perfil tiene las siguientes especificaciones:

$(C_L)_{m\acute{a}x}$	2.353
$\alpha @ (C_L)_{m\acute{a}x}$	15.0°
$(L/D)_{m\acute{a}x}$	17.8
$\alpha @ (L/D)_{m\acute{a}x}$	5°
$C_L @ (L/D)_{m\acute{a}x}$	1.476
$\alpha @ C_L = 0$	-9.0°

Tabla 2.1. Especificaciones del perfil alar CDC 2520.

De las ecuaciones 2.8 y 2.10 tenemos los parámetros del polar de arrastre:

$$C_{D0} = \frac{C_L}{2(L/D)_{m\acute{a}x}} \quad (2.11)$$

$$K = \frac{1}{2C_L(L/D)_{m\acute{a}x}} \quad (2.12)$$

Para este perfil se calculan con los datos de la Tabla 2.1 y son:

$$C_{D0-perfil} = 0.0415$$

$$K_{perfil} = 0.0190$$

Este es un perfil de alta sustentación pero al mismo tiempo alto arrastre (ya que “no hay nada gratis en la vida”) y está diseñado para ser usado en aeronaves de vuelo lento y carácter recreativo, como es el caso del Air-E.

La curva del polar de arrastre para este perfil se calculó por medio de simulaciones computacionales con software de dinámica computacional de fluidos (ANSYS CFX) y se muestra en la Figura 2.10:

⁴ <http://www.airfoildb.com/foils/751>

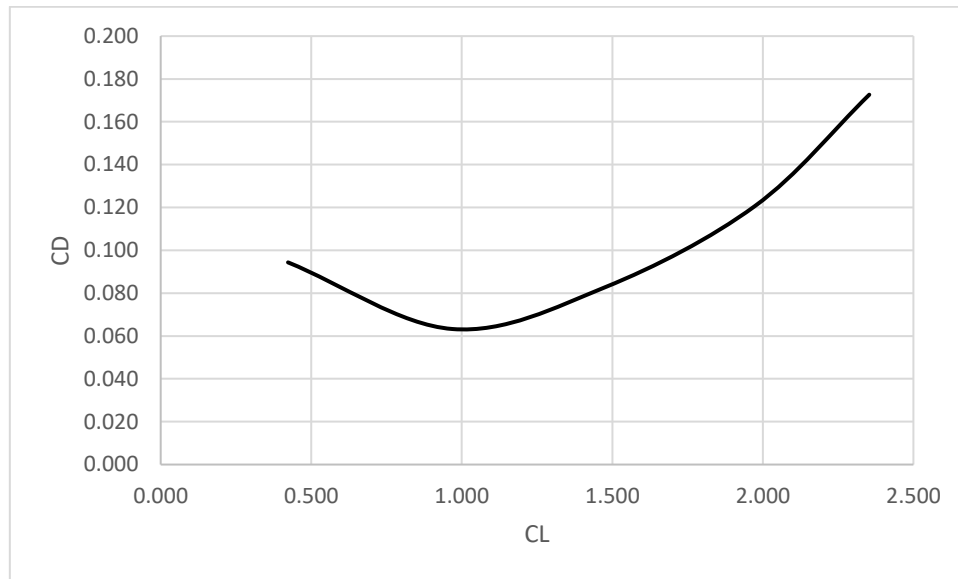


Figura 2.10. Polar de arrastre para el perfil CDC 2520.

La curva del coeficiente de sustentación respecto al ángulo de ataque se calculó también por medio de simulaciones computacionales:

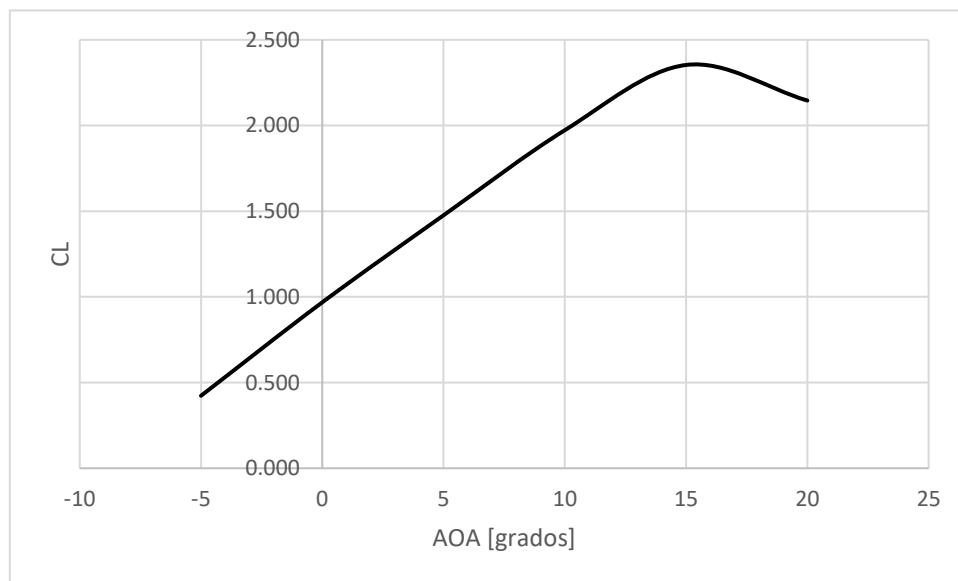


Figura 2.11. Coeficiente de sustentación en función del ángulo de ataque del perfil CDC 2520.

Por último, la curva de la relación sustentación/arrastre en función del ángulo de ataque se calcula con la información del coeficiente de sustentación y arrastre:

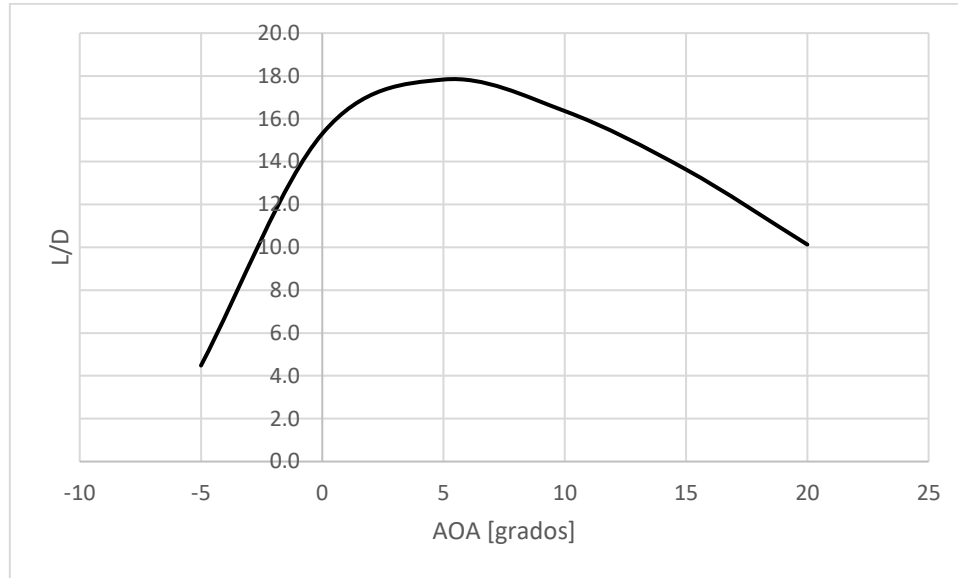


Figura 2.12. L/D del perfil CDC 2520.

Ejemplo 2.2. Aerodinámica completa del Air-E.

Para calcular la aerodinámica completa del Air-E nos basamos en los métodos de Anderson [1] y Raymer [2].

Según Raymer, una aproximación válida para un ala real en vuelo subsónico (como nuestro avión) es que el coeficiente de sustentación real del ala es el 90% del coeficiente de sustentación del perfil alar puro. Para compensar posibles inexactitudes de la simulación computacional lo tomamos como 85% y entonces:

$$(C_L)_{\text{máx}} = (0.85)(2.353) = \boxed{2.000}$$

Tenemos que el arrastre por fricción para nuestro avión el de aviación ultraliviana con cabina abierta [1]:

$$C_{D0-\text{fricción}} = 0.008(S_{\text{total}}/S) = 0.008(4) = 0.032$$

Asumiendo que el arrastre parásito adicional debido a montantes, cables y demás elementos del avión tenemos:

$$C_{D0-\text{otros}} = 0.008$$

Entonces el coeficiente de arrastre parásito para el Air-E es:

$$C_{D0} = C_{D0-\text{fricción}} + C_{D0-\text{otros}} = 0.0320 + 0.008$$

$$\boxed{C_{D0} = 0.040}$$

Deseamos que la razón de aspecto de nuestro avión que sea $AR = 5.17$ (no muy baja pero tampoco muy alta para reducir esfuerzos estructurales en las alas) y siguiendo las recomendaciones de Raymer [2] para calcular el factor de eficiencia de la envergadura del ala para un ala recta tenemos:

$$\epsilon = 1.78(1 - 0.045AR^{0.68}) - 0.64 \quad (2.13)$$

En nuestro caso el factor del arrastre inducido es entonces:

$$\epsilon = 1.78(1 - 0.045(5.17)^{0.68}) - 0.64 = 0.89 > 0.75$$

Por recomendación de Raymer lo dejamos en 0.75, entonces:

$$K = \frac{1}{\pi\epsilon AR} = \frac{1}{\pi(0.75)(5.17)} = \boxed{0.0821}$$

Con estos parámetros del polar de arrastre calculamos la relación sustentación/arrastre máxima del avión con la Ec. 2.10:

$$\left(\frac{L}{D}\right)_{\max} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{(0.040)(0.0821)}} = \boxed{8.7}$$

Nótese la diferencia de este valor con respecto al del perfil CDC 2520 sólo.

Resumiendo en una tabla la aerodinámica del Air-E:

C_{D0}	0.0400
K	0.0821
$(C_L)_{\max}$	2.000
$(L/D)_{\max}$	8.7

Tabla 2.2. Parámetros aerodinámicos del Air-E.

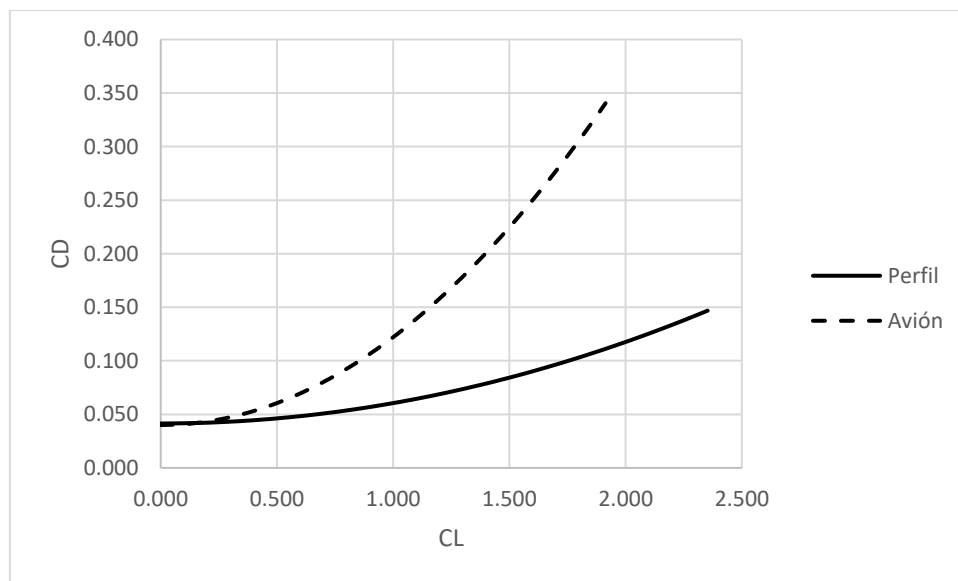


Figura 2.13. Gráfica del polar de arrastre para el Air-E.

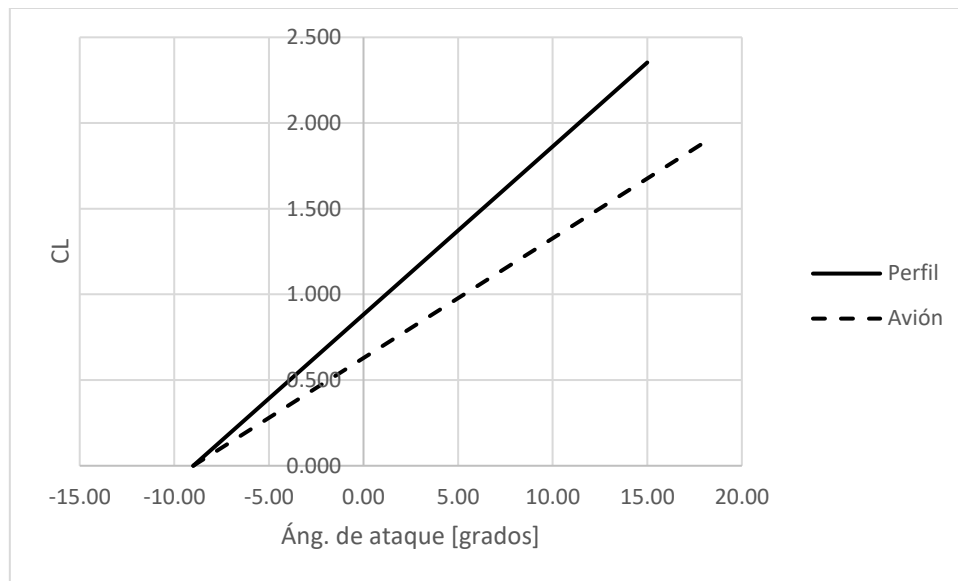


Figura 2.14. Coeficiente de sustentación en función del ángulo de ataque del ala para el Air-E.

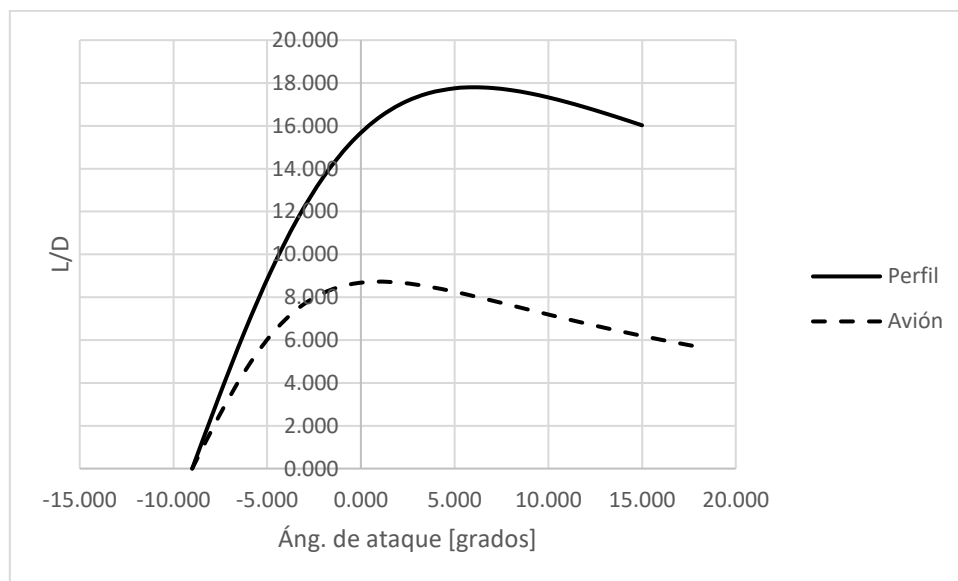


Figura 2.15. L/D del Air-E.

3. MENCIÓN DE LOS MÉTODOS DE PROPULSIÓN

La idea de este capítulo es únicamente mencionar los métodos de propulsión típicos en los aviones con datos conceptuales de su funcionamiento y su influencia en la dinámica de vuelo.

3.1. MOTORES DE PISTÓN Y HÉLICE



Figura 3.1. Avión con motor de pistón Rans S-6 Coyote II.

Una hélice es simplemente un perfil aerodinámico que al rotar produce la fuerza de empuje, la rotación es debida en este tipo de sistemas a un motor de pistón.

En un avión con motor de pistón y hélice el piloto controla la potencia aumentándola o disminuyéndola y se considera que la potencia total disponible es constante.

Se puede modelar la potencia entregada P_{del} de acuerdo a la potencia del motor entregada al eje de salida P_{motor} y una eficiencia de la hélice η_p :

$$P_{del} = \eta_p P_{motor} \quad (3.1)$$

En las hélices ***se debe garantizar que la punta de la misma no llegará a la velocidad del sonido***, por lo tanto se deben seleccionar o diseñar reductores desde la salida del motor hasta la hélice del avión.

3.2. MOTORES A REACCIÓN

Un motor a reacción es una máquina que absorbe aire, lo comprime y lo envía a una cámara de combustión en la cual se producen gases a alta presión que son expulsados hacia atrás para producir el empuje.

En un avión con motor a reacción el piloto controla el empuje aumentándolo o disminuyéndolo y se considera que el empuje total disponible es constante.

3.3. MOTORES TURBOHÉLICE

Estos motores utilizan los gases producto de la reacción de combustión para mover una hélice, por lo que son un intermedio entre los aviones de hélice y los a reacción.

En un avión con motor turbohélice el piloto controla la potencia equivalente del motor aumentándola o disminuyéndola y se considera que la potencia total disponible es constante.

Se puede modelar la potencia entregada P_{del} de acuerdo a la potencia de eje equivalente del motor P_{es} y una eficiencia de la hélice η_p :

$$P_{del} = \eta_p P_{es} \quad (3.2)$$

PARTE II

VUELO SIN ACELERACIÓN

4. DINÁMICA DEL VUELO RECTO Y NIVELADO

En un vuelo recto y nivelado las cuatro fuerzas del vuelo se encuentran balanceadas respecto a sus contrarias (sustentación igual al peso y empuje igual al arrastre), como se ilustra en el diagrama de cuerpo libre de la Figura 4.1:

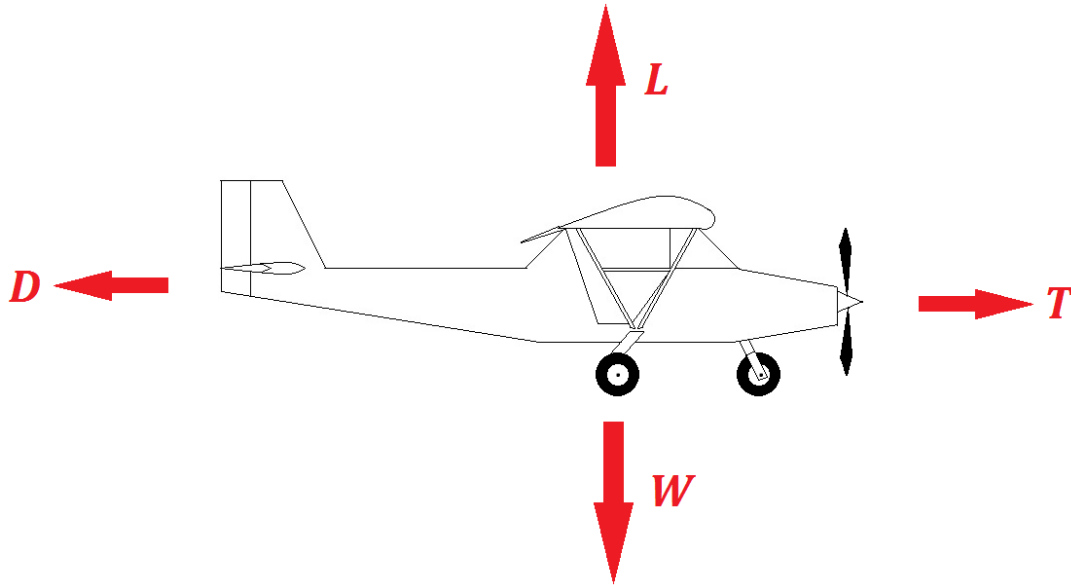


Figura 4.1. Fuerzas sobre un avión en vuelo recto y nivelado.

Lo primero que debemos hacer es garantizar que el avión esté volando sin descender ni ascender por lo que la sustentación iguala en valor al peso, el balance de fuerzas en la dirección vertical es:

$$L = W \quad (4.1)$$

De la Ec. 2.2 en la Ec. 4.1 tenemos:

$$\frac{1}{2} \rho V^2 S C_L = W \quad (4.2)$$

4.1. VELOCIDAD DE PÉRDIDA

La velocidad mínima a la que un avión se puede mantener en vuelo antes de desplomarse por falta de sustentación se denomina **velocidad de pérdida** y se calcula con los conceptos de la Sección 2.2 y la Ecuación 4.2 donde para este caso el coeficiente de sustentación es el máximo posible, entonces la velocidad de pérdida V_s es:

$$V_s = \sqrt{\frac{2(W/S)}{\rho(C_L)_{\max}}} \quad (4.3)$$

Observación importante: la velocidad de pérdida depende de la densidad del aire y por lo tanto de la altitud a la que se encuentre el avión, **no es un valor único**.

Carga alar

En la Ec. 4.3 aparece un parámetro importante en la dinámica de aviones, la **carga alar** (W/S). Ésta afecta, además del valor de la velocidad de pérdida, a otros parámetros de desempeño como podremos observar más adelante.

4.2. EMPUJE REQUERIDO

El balance de fuerzas en la dirección del movimiento es:

$$T = D \quad (4.4)$$

Podemos igualar cada una de las Ecuaciones 4.1 y 4.2 al valor 1 y luego igualarlas entre ellas:

$$\frac{L}{W} = \frac{D}{T}$$

Reagrupando queda:

$$\boxed{\frac{L}{D} = \frac{1}{(T/W)}} \quad (4.5)$$

En la Ecuación (4.5) aparecen dos parámetros importantes en la dinámica de aviones, uno es L/D el cual ya vimos en la Sección 2.4 y que empieza a mostrar su relevancia, el otro es la **relación Empuje/Peso** (T/W).

De la Ec. 4.5 despejamos el **empuje requerido** para sostener el vuelo a nivel:

$$\boxed{T_{req} = \frac{W}{L/D}} \quad (4.6)$$

Empuje requerido en función de la velocidad

De las ecuaciones 2.4 y 2.5 tenemos:

$$\frac{1}{L/D} = \frac{C_D}{C_L} = \frac{C_{D0} + KC_L^2}{C_L} = \frac{C_{D0}}{C_L} + KC_L \quad (4.7)$$

Para sostener el vuelo nivelado a una velocidad deseada V (que debe ser mayor a la velocidad de pérdida) despejamos el coeficiente de sustentación requerido utilizando la Ec. 4.2:

$$C_{Lreq} = \frac{2(W/S)}{\rho V^2} \quad (4.8)$$

De la Ec. 4.7 y la Ec. 4.8 sustituidas en Ec. 4.6 se tiene el empuje requerido en función de la velocidad:

$$T_{req} = W \left[\frac{\rho V^2}{2(W/S)} C_{D0} + \frac{2(W/S)}{\rho V^2} K \right] \quad (4.9)$$

Observamos que el empuje requerido para mantener vuelo a nivel depende de las siguientes variables:

- La velocidad deseada de vuelo, V .
- El peso del avión, W .
- La carga alar, W/S .
- La densidad del aire, ρ y por tanto la altitud de vuelo.
- La aerodinámica del avión representada en los parámetros del polar de arrastre.

Nos interesa saber ahora cuál es el mínimo empuje con el que podemos mantener un vuelo a nivel.

Empuje requerido mínimo

De la Ec. 4.6 se nota que el empuje requerido es mínimo cuando L/D es máxima, por lo que sustituyendo el valor de $(L/D)_{max}$ de la Ec. 2.9 en la Ec. 4.6 tenemos:

$$(T_{req})_{min} = 2W\sqrt{C_{D0}K} \quad (4.10)$$

Nótese que el empuje mínimo requerido sólo depende del peso del avión y de los parámetros del polar de arrastre. Ahora, ¿con qué velocidad se logra el mínimo empuje requerido? Igualando las ecuaciones 4.9 y 4.10 y después de un proceso algebraico tenemos:

$$V_{Tmin} = \sqrt{\frac{2(W/S)}{\rho} \sqrt{\frac{K}{C_{D0}}}} \quad (4.11)$$

Hay que tener cuidado con que esta velocidad no sea menor a la velocidad de pérdida del avión.

Pasemos ahora a indagar sobre la potencia requerida, ya que ésta es una de las variables importantes a la hora de escoger un motor en aviones de hélice.

4.3. POTENCIA REQUERIDA

De la física mecánica sabemos que la potencia es el producto de la fuerza ejercida por la velocidad que se tiene, por lo que la **potencia requerida** para sostener el vuelo a nivel es:

$$P_{req} = T_{req}V = \frac{WV}{L/D} \quad (4.12)$$

Potencia requerida en función de la velocidad

Sustituyendo el empuje requerido de la Ec. 4.9 en la Ec. 4.12 tenemos:

$$P_{req} = WV \left[\frac{\rho V^2}{2(W/S)} C_{D0} + \frac{2(W/S)}{\rho V^2} K \right] \quad (4.13)$$

Observamos que la potencia requerida depende de las mismas variables que el empuje requerido para mantener vuelo a nivel.

Nos interesa saber ahora cuál es la mínima potencia con la que podemos mantener un vuelo a nivel.

Potencia requerida mínima

Ésta la vamos a calcular de una forma diferente a como calculamos el empuje requerido mínimo; derivando la Ec. 4.13 respecto a la velocidad e igualando a cero tenemos:

$$\frac{dP_{req}}{dV} = W \left[\frac{3C_{D0}}{2(W/S)} \rho V_{Pmin}^2 - \frac{2(W/S)K}{\rho V_{Pmin}^2} \right] = 0$$

Entonces despejando la velocidad para la potencia mínima requerida es:

$$V_{Pmin} = \sqrt{\frac{2(W/S)}{\rho} \sqrt{\frac{K}{3C_{D0}}}} \quad (4.14)$$

Notamos inmediatamente que **la velocidad de mínima potencia requerida es diferente a la velocidad de mínimo empuje requerido.**

El valor de la potencia mínima requerida se halla sustituyendo la Ec. 4.14 en la Ec. 4.13 y después de simplificar:

$$(P_{req})_{min} = 1.755W \sqrt{\frac{2(W/S)}{\rho} \sqrt{C_{D0}K^3}} \quad (4.15)$$

Ejemplo 4.1. El Air-E en vuelo recto y nivelado.

La masa máxima deseada del Air-E (avión vacío + ocupantes + baterías + equipaje) es de 250 kg, entonces por la Ec. 2.1 tenemos el peso del avión:

$$W = (250)(9.8) = 2450 \text{ N}$$

La velocidad de pérdida siempre es un requerimiento del diseño, en nuestro caso deseamos que sea de 25 mph al nivel del mar, es decir 11.30 m/s con densidad del aire de 1.225 kg/m³ (atmósfera estándar internacional), calculamos la carga alar requerida con la Ec. 4.3 despejada:

$$(W/S) = \frac{1}{2} \rho V_s^2 (C_L)_{\max} = \frac{1}{2} (1.225) (11.3)^2 (2.000)$$

$$\boxed{(W/S) = 156.4 \text{ N/m}^2}$$

Con este resultado calculamos el área alar requerida para el Air-E:

$$S = \frac{W}{(W/S)} = \frac{2450 \text{ N}}{156.4 \text{ N/m}^2} = \boxed{15.66 \text{ m}^2}$$

Como ya definimos una razón de aspecto del avión de 5.17, tenemos que la envergadura del Air-E debe ser:

$$b = \sqrt{(AR)S} = \sqrt{(5.17)(15.66 \text{ m}^2)} = \boxed{9.00 \text{ m}}$$

Y la cuerda alar:

$$c = \frac{S}{b} = \frac{15.66 \text{ m}^2}{9.00 \text{ m}} = \boxed{1.74 \text{ m}}$$

El empuje requerido mínimo al nivel del mar para el Air-E se calcula con la Ec. 4.10 y es:

$$(T_{req})_{\min} = 2(2450) \sqrt{(0.0400)(0.0821)} = \boxed{281 \text{ N}}$$

Con la Ec. 4.11 tenemos la velocidad a la cual el empuje requerido es el mínimo:

$$V_{Tmin} = \sqrt{\frac{2(156.4)}{1.225} \sqrt{\frac{0.0821}{0.0400}}} = 19.1 \frac{\text{m}}{\text{s}} = \boxed{43 \text{ mph}}$$

La potencia requerida mínima se calcula con la Ec. 4.15:

$$(P_{req})_{\min} = 1.755(2450) \sqrt{\frac{2(156.4)}{1.225} \sqrt{(0.0400)(0.0821)^3}} = 4711.6 \text{ W}$$

$$(P_{req})_{min} = 4.71 \text{ kW} = 6.3 \text{ hp}$$

La velocidad para la mínima potencia requerida se calcula con la Ec. 4.14:

$$V_{Pmin} = \sqrt{\frac{2(156.4)}{1.225}} \sqrt{\frac{0.0821}{3(0.0400)}} = 14.5 \frac{\text{m}}{\text{s}} = \boxed{33 \text{ mph}}$$

Para todas las velocidades deseadas del avión desde la pérdida de 25 mph hasta la máxima de 83 mph (que se da cuando la potencia requerida es igual a la disponible) se grafican las ecuaciones 4.9 y 4.13:

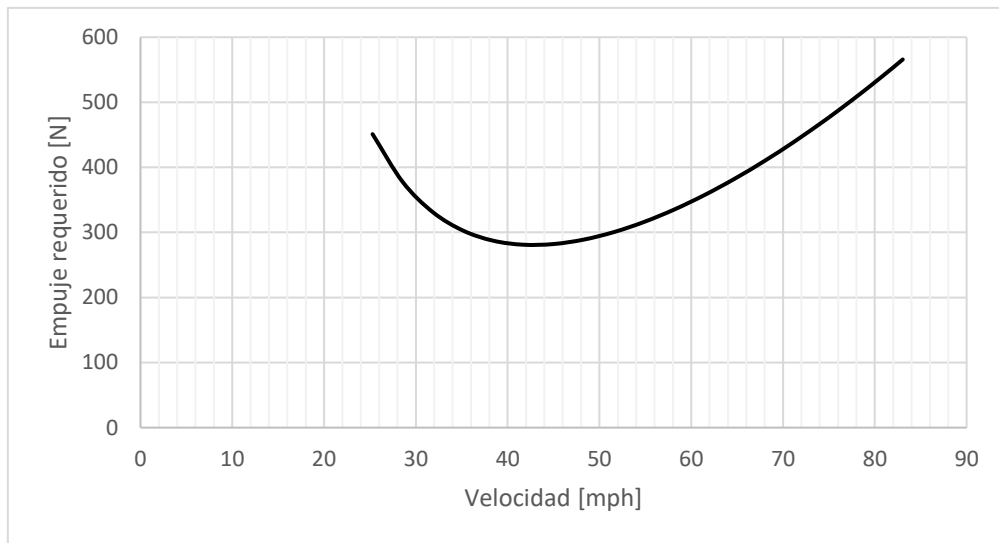


Figura 4.2. Empuje requerido para el Air-E.

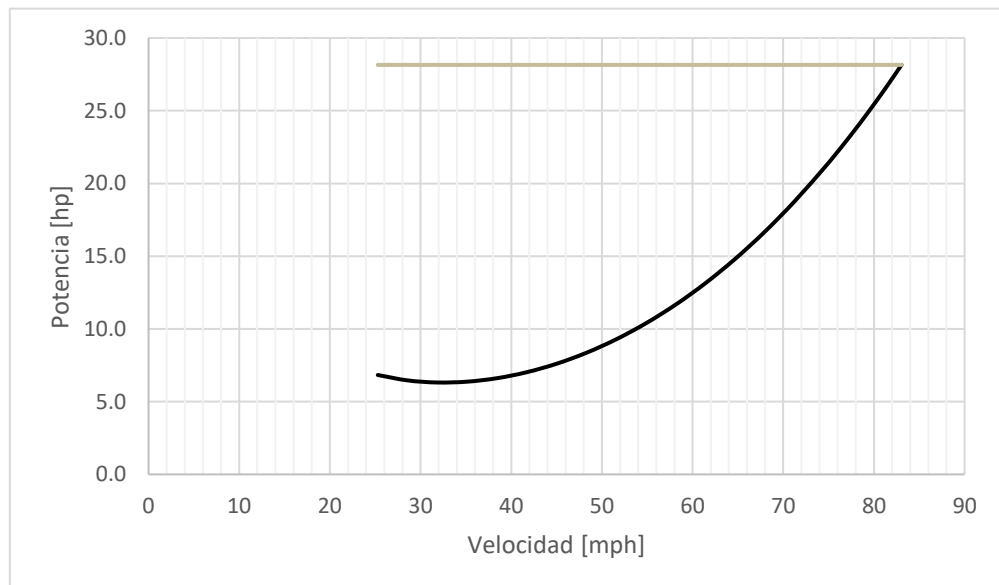


Figura 4.3. Potencia requerida para el Air-E.

5. DINÁMICA DE VUELO EN ASCENSO Y DESCENSO

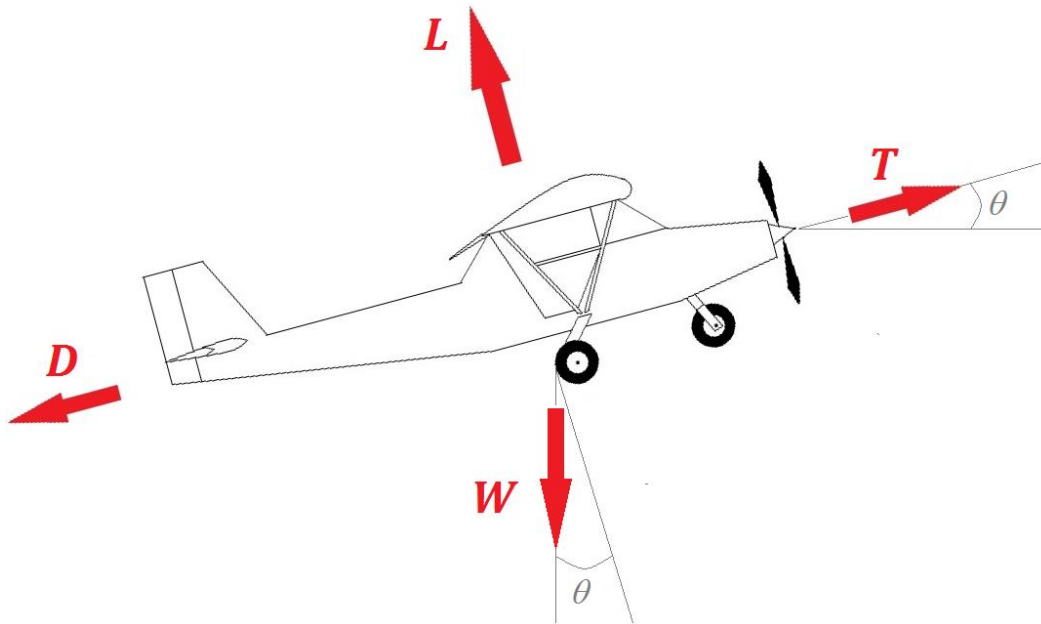


Figura 5.1. Fuerzas sobre un avión en ascenso.

Consideremos el avión de la Figura 5.1 que se encuentra volando con una trayectoria a un ángulo θ respecto a la horizontal, el balance de fuerzas en la dirección perpendicular al movimiento es:

$$L = W \cos \theta \quad (5.1)$$

Y en la dirección del movimiento:

$$T = D + W \sin \theta \quad (5.2)$$

Estas ecuaciones son generales tanto para ascenso como para descenso ya que no estamos suponiendo valores particulares del ángulo θ .

5.1. VELOCIDAD VERTICAL (TASA DE ASCENSO/DESCENSO)

Para el avión de la Figura 5.1 que vuela a una velocidad V tenemos que la **velocidad vertical (tasa de ascenso/descenso)** denotada como VS (del inglés *vertical speed*) es:



$$VS = V \sin \theta \quad (5.3)$$

Vemos por la Ecuación 5.3 que para un ángulo con signo positivo la velocidad vertical es positiva y el avión está en ascenso; para un ángulo con signo negativo la velocidad vertical es negativa y por tanto el avión está en descenso.

5.2. VELOCIDAD VERTICAL EN FUNCIÓN DE LA POTENCIA APLICADA Y LA VELOCIDAD DEL AVIÓN

De la Ec. 5.2 tenemos la relación trigonométrica:

$$\sin\theta = \frac{T - D}{W} \quad (5.4)$$

En la Ec. 5.4 debemos tener en cuenta que T es el empuje aplicado y D es el arrastre definido por la Ec. 2.3, este arrastre tiene el mismo valor por la velocidad V que el que debe ser vencido por el motor en un vuelo nivelado por lo que es efectivamente el empuje requerido T_{req} (Sección 4.2):

$$\sin\theta = \frac{T_{apl} - T_{req}}{W} \quad (5.5)$$

Entonces de Ec. 5.5 en Ec. 5.3 tenemos la velocidad vertical:

$$VS = \frac{V}{W} (T_{apl} - T_{req}) \quad (5.6)$$

Con esto y sabiendo que potencia es igual a fuerza por velocidad vemos que en la Ec. 5.6 la velocidad vertical es igual a:

$$VS = \frac{P_{apl} - P_{req}}{W} \quad (5.7)$$

La sencillez de la Ec. 5.7 es hermosa, ésta nos dice simplemente lo siguiente: **si la potencia aplicada es menor a la potencia requerida para vuelo a nivel el avión está en descenso; si la potencia aplicada es mayor a la potencia requerida para vuelo a nivel el avión está en ascenso.**

De la Ec. 4.13 en la Ec. 5.7 tenemos la velocidad vertical en función de la potencia aplicada P_{apl} y la velocidad del avión V :

$$VS = \frac{P_{apl}}{W} - V \left[\frac{\rho V^2}{2(W/S)} C_{D0} + \frac{2(W/S)}{\rho V^2} K \right] \quad (5.8)$$

Máxima tasa de ascenso

La máxima tasa de ascenso del avión para una potencia aplicada dada se obtiene observando que en la Ec. 5.7 P_{apl} y W son constantes por lo que la máxima tasa de ascenso se obtiene cuando $P_{req} = (P_{req})_{\min}$ entonces de la Ec. 4.15 en la Ec. 5.7 tenemos:

$$VS_{\max} = \frac{P_{apl}}{W} - 1.755 \sqrt{\frac{2(W/S)}{\rho}} \sqrt{C_{D0} K^3} \quad (5.9)$$

Velocidad para máxima tasa de ascenso

Como la máxima tasa de ascenso se obtiene con la mínima potencia requerida tenemos que la velocidad para obtener la máxima tasa de ascenso que se denota como V_y es la misma dada por la Ec. 4.14:

$$V_y = \sqrt{\frac{2(W/S)}{\rho}} \sqrt{\frac{K}{3C_{D0}}} \quad (5.10)$$

Ejemplo 5.1. Desempeño en ascenso del Air-E.

Para el Air-E se tiene un motor eléctrico sin escobillas (BLDC) de 35 kW (46.9 hp) de potencia y una hélice que tiene una eficiencia estimada de hacia abajo de 60%, entonces la potencia disponible (máxima entregada al avión) es por la Ec. 3.1:

$$P_{disp} = (0.6)(35 \text{ kW}) = 21 \text{ kW}$$

La máxima tasa de ascenso **al nivel del mar** del Air-E es entonces:

$$VS_{m\acute{a}x} = \frac{P_{disp} - (P_{req})_{m\acute{i}n}}{W} = \frac{1000(21 - 4.71)}{2450} = 6.6 \text{ m/s} = \boxed{1309 \text{ pies/min}}$$

Ésta tasa se da con la velocidad de mínima potencia requerida: $V_y = 33 \text{ mph}$. Para todo el rango de velocidad y distintas potencias aplicadas tenemos:

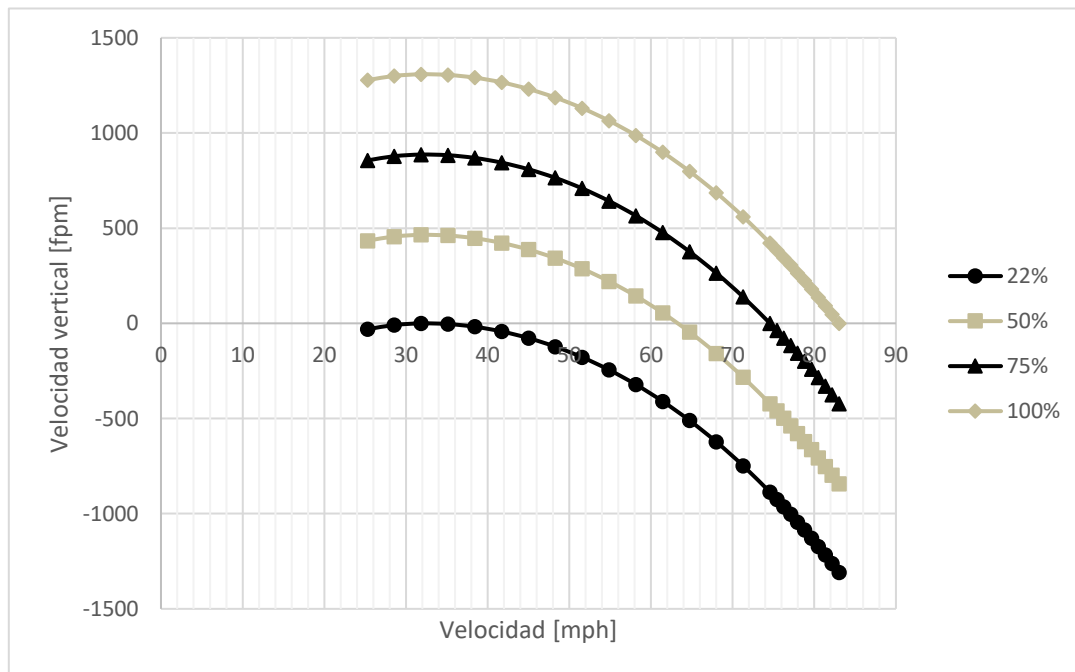


Figura 5.2. Velocidad vertical en función de la potencia aplicada como porcentaje de la disponible y la velocidad del avión.

6. DINÁMICA DEL PLANEEO

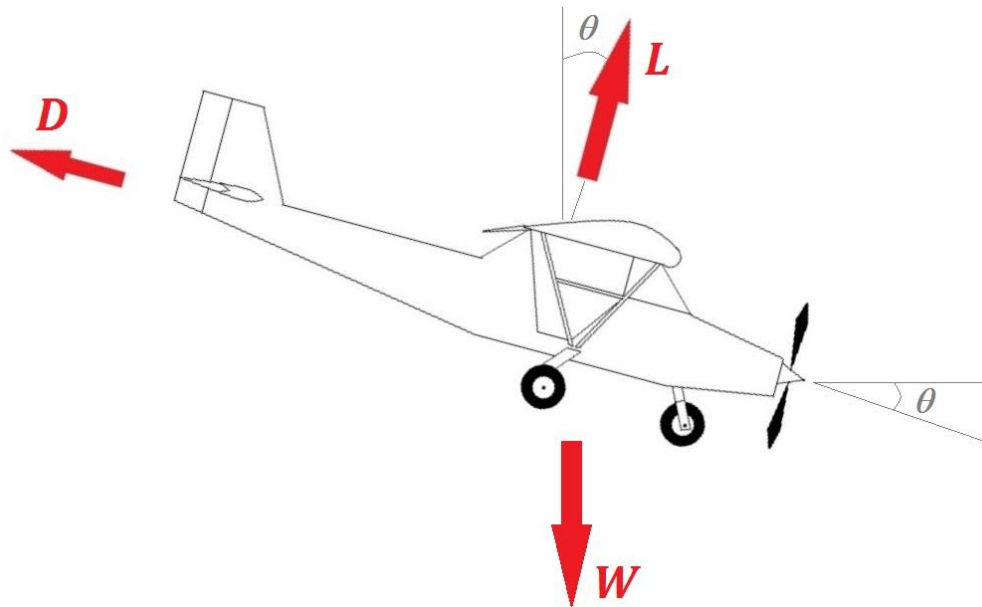


Figura 6.1. Fuerzas sobre un avión en planeo.

En el caso que el motor falle en vuelo un avión no va a caer como una piedra sino que planeará, con las fuerzas actuando sobre él mostradas en la Figura 6.1. El balance de fuerzas en la dirección perpendicular al planeo es:

$$L - W \cos \theta = 0 \quad (6.1)$$

El balance de fuerzas en la dirección del movimiento del avión es:

$$W \sin \theta - D = 0 \quad (6.2)$$

Despejando la sustentación y el arrastre obtenemos:

$$\frac{L}{D} = \frac{W \cos \theta}{W \sin \theta} = \frac{1}{\tan \theta} \quad (6.3)$$

El ángulo de planeo depende entonces únicamente de la razón Sustentación/Arrastre y se calcula de:

$$\boxed{\tan \theta = \frac{1}{(L/D)}} \quad (6.4)$$

Tasa de planeo

En las especificaciones de los aviones se da la **tasa de planeo** (GR, del inglés *gliding ratio*), que es la razón de la distancia horizontal recorrida (Δx) por cada unidad de altura perdida (Δy).

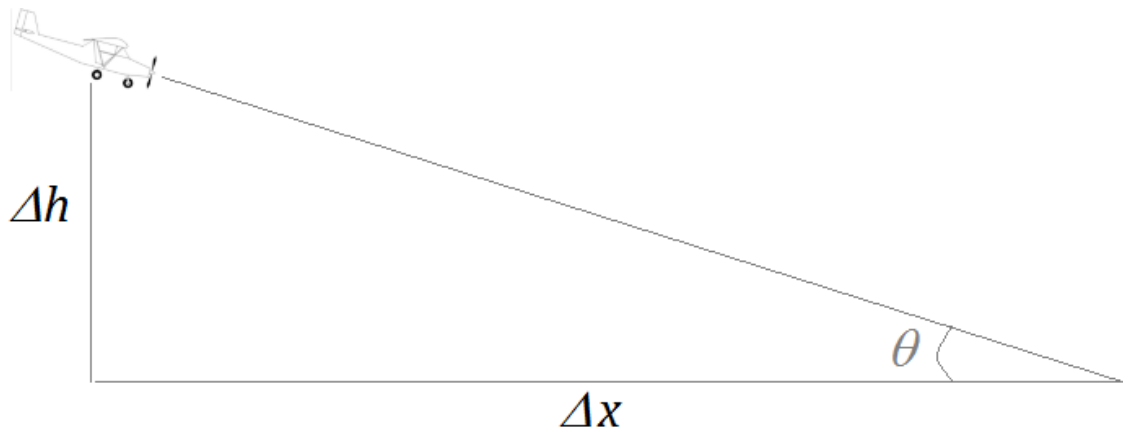


Figura 6.2. Diagrama ilustrando la tasa de planeo.

De la Figura 6.2 vemos que existe la relación triangular:

$$\tan\theta = \frac{\Delta h}{\Delta x} \quad (6.5)$$

De la Ec. 6.4 en la Ec. 6.5 tenemos:

$$\frac{1}{(L/D)} = \frac{\Delta h}{\Delta x} \quad (6.6)$$

La tasa de planeo es entonces:

$$\boxed{GR = \frac{L}{D}} \quad (6.7)$$

La máxima tasa de planeo es igual entonces a $(L/D)_{max}$, por lo que la velocidad del avión para sostener la mejor tasa de planeo es la misma dada por la Ec. 4.11:

$$\boxed{V_{GRmax} = \sqrt{\frac{2(W/S)}{\rho}} \sqrt{\frac{K}{C_{D0}}}} \quad (6.8)$$

Para el Air-E la máxima tasa de planeo es 8.7 y se consigue con 43 mph.

PARTE III

VUELO CON ACELERACIÓN

7. DINÁMICA DE LOS VIRAJES

Los virajes a nivel son una de las maniobras básicas del vuelo y es importante conocer su dinámica, ya que no son tan simples como se cree generalmente.

7.1. SUSTENTACIÓN EN UN VIRAJE

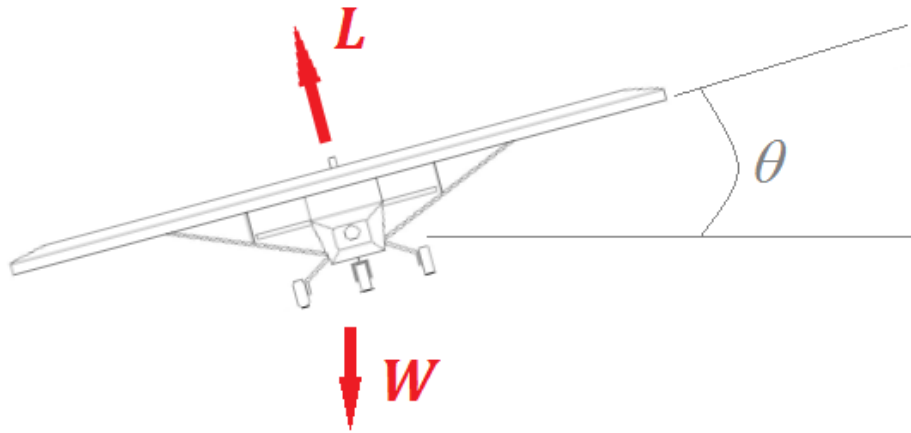


Figura 7.1. Vista frontal de un avión en viraje mostrando las fuerzas perpendiculares al movimiento.

En la Figura 7.1 se ilustra un avión en viraje con un ángulo de alabeo θ , el balance de fuerzas en la dirección vertical es:

$$L \cos \theta = W \quad (7.1)$$

Entonces la fuerza de sustentación necesaria para sostener el nivel de vuelo en el viraje es:

$$L = \frac{W}{\cos \theta} \quad (7.2)$$

Factor de carga del viraje

Se define el **factor de carga** ($n=L/W$) como el factor que multiplica la sustentación requerida para mantener el vuelo a nivel, de la Ec. 7.2 vemos que es:

$$\boxed{n = \frac{L}{W} = \frac{1}{\cos \theta}} \quad (7.3)$$

Como vemos en la Ec. 7.3 el factor de carga en un viraje no depende de los parámetros aerodinámicos del avión ni su potencia sino que es una ecuación general y aplica para todos los aviones. Poniendo la Ec. 7.3 en números tenemos:

Ángulo de alabeo [grados]	Factor de carga
0	1.00
5	1.00
10	1.02
15	1.04
20	1.06
25	1.10
30	1.15
35	1.22
40	1.31
45	1.41
50	1.56
55	1.74
60	2.00

Tabla 7.1. Factor de carga en función del ángulo de alabeo.

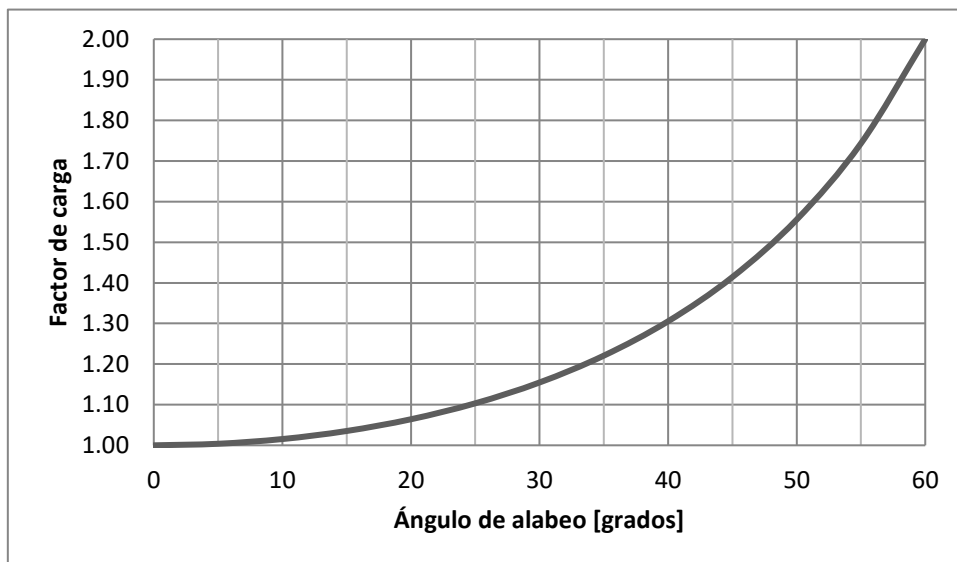


Figura 7.2. Factor de carga en función del ángulo de alabeo.

Todo piloto debe tener en cuenta esta dinámica al momento de efectuar un viraje. Observamos que para los **virajes escarpados** (de 45° a 60° de alabeo) el factor de carga hace que se requiera de un 41% hasta un 100% más de sustentación para mantener el nivel de vuelo.

Para viraje con un alabeo mayor a 60° el factor de carga crece de manera extremadamente rápida hasta hacerse infinito en las ecuaciones para 90° de alabeo, es decir: **en un alabeo de 90° el avión caerá irremediamente ya que no hay componente vertical de la sustentación que contrarreste el peso del avión.**

Aumento de la velocidad de pérdida

El valor de la velocidad de pérdida aumenta en un viraje, si la velocidad de pérdida en vuelo recto de un avión es V_{s1} tenemos que en un viraje la velocidad de pérdida V_{s2} se calcula con la Ec. 4.3 y la Ec. 7.2:

$$\frac{1}{2}\rho V_{s2}^2 S(C_L)_{máx} = n \left[\frac{1}{2}\rho V_{s1}^2 S(C_L)_{máx} \right]$$

De donde:

$$\boxed{V_{s2} = V_{s1}\sqrt{n}} \quad (7.4)$$

De donde el aumento de la velocidad de pérdida comparado respecto a la de un vuelo recto es:

$$\frac{V_{s2} - V_{s1}}{V_{s1}} = \sqrt{n} - 1 \quad (7.5)$$

Poniendo la Ec. 7.5 en números tenemos:

Ángulo de alabeo [grados]	Aumento de velocidad de pérdida
0	0.0%
5	0.2%
10	0.8%
15	1.7%
20	3.2%
25	5.0%
30	7.5%
35	10.5%
40	14.3%
45	18.9%
50	24.7%
55	32.0%
60	41.4%

Tabla 7.2. Aumento de la velocidad de pérdida en función del ángulo de alabeo.

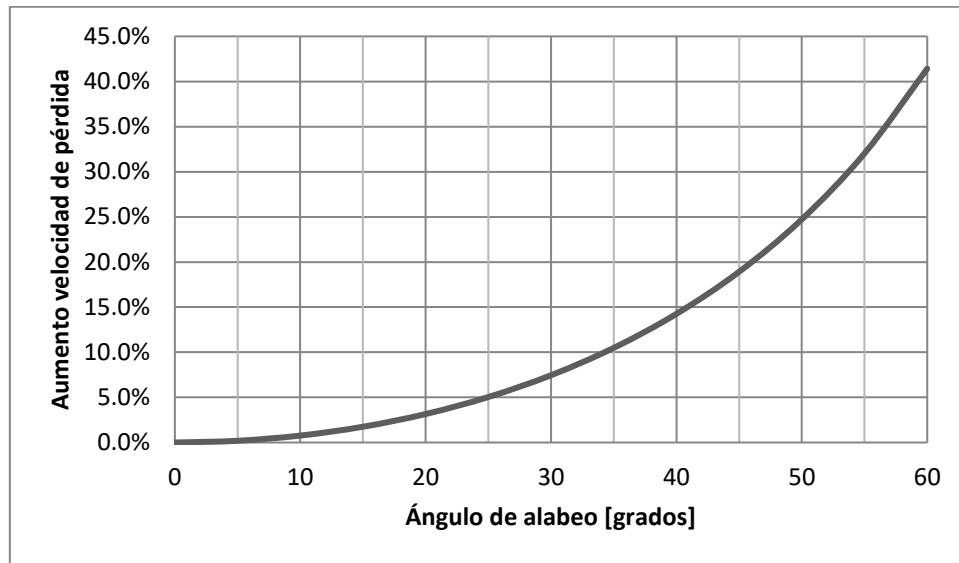


Figura 7.3. Aumento de la velocidad de pérdida en función del ángulo de alabeo.

7.2. ACELERACIÓN CENTRÍPETA Y RADIO DE GIRO DEL VIRAJE

Todo viraje se mantiene gracias a una aceleración centrípeta, como se observa en la Figura 7.4:

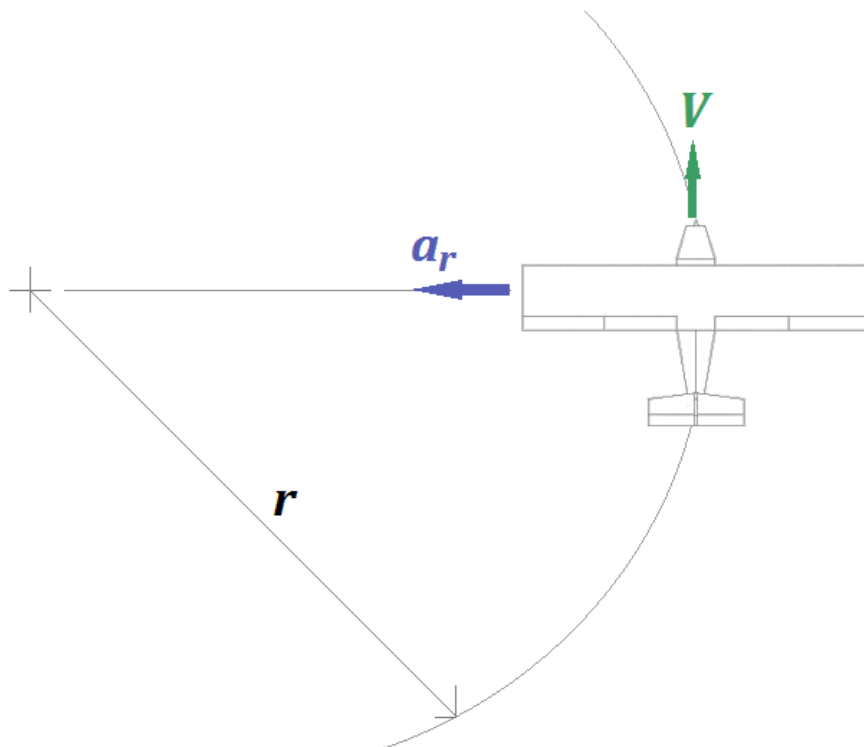


Figura 7.4. Vista superior de un avión en viraje mostrando la velocidad y aceleración centrípeta.

La aceleración centrípeta en un viraje con radio de giro r a una velocidad V es:

$$a_r = \frac{V^2}{r} \quad (7.6)$$

Esta aceleración es causada por la componente de la fuerza de sustentación que entra a la curva, con la Figura 7.1 tenemos el balance de fuerzas en la dirección radial del giro:

$$L \sin \theta = \frac{W}{g} \frac{V^2}{r} \quad (7.7)$$

Sustituyendo L de la Ec. 7.2 en la Ec. 7.7 y cancelando el peso tenemos:

$$\tan \theta = \frac{1}{g} \frac{V^2}{r} \quad (7.8)$$

Radio de giro del viraje

El radio de giro del avión para un ángulo de alabeo y una velocidad dadas lo calculamos de la Ec. 7.8:

$$\boxed{r = \frac{V^2}{g \tan \theta}} \quad (7.9)$$

La velocidad angular del viraje es:

$$\boxed{\omega = \frac{V}{r} = \frac{g \tan \theta}{V}} \quad (7.10)$$

Aceleración centrípeta

La aceleración centrípeta o radial la obtenemos de la Ec. 7.9 en la 7.6:

$$\boxed{a_r = g \tan \theta} \quad (7.11)$$

Ejemplo 7.1. Viraje coordinado en el Air-E.

Un viraje coordinado es uno en el que se recorren 360° en 2 minutos. La velocidad angular es entonces:

$$\omega = \frac{2\pi \text{ rad}}{120 \text{ s}} = 0.0524 \text{ rad/s}$$

Supongamos que vamos a hacer el viraje a una velocidad de 100 kph (27.78 m/s), el radio de giro es entonces:

$$r = \frac{V}{\omega} = \frac{27.78 \text{ m/s}}{0.0524 \text{ rad/s}} = 530.52 \text{ m}$$

Este radio de giro se obtiene con un ángulo de alabeo de:

$$\theta = \arctan\left(\frac{V^2}{gr}\right) = \arctan\left(\frac{(27.78)^2}{(9.8)(530.52)}\right) = 8.44^\circ$$

El factor de carga en este ángulo es:

$$n = \frac{1}{\cos 8.44^\circ} = 1.011$$

Ejemplo 7.2. Viraje escarpado en el Air-E.

Supongamos al igual que en el ejemplo 7.1 hacemos un viraje a 50 mph pero esta vez uno escarpado de 45° de inclinación. El factor de carga es:

$$n = \frac{1}{\cos 45^\circ} = 1.414$$

La velocidad de pérdida en este caso sabiendo que en vuelo recto es de 25 mph es:

$$V_{s2} = (25 \text{ mph})\sqrt{1.414} = 30 \text{ mph}$$

8. ACELERACIÓN MANTENIENDO NIVEL DE VUELO

Considerando las fuerzas como en la Figura 4.1 manteniendo el nivel de vuelo tenemos:

$$C_L = \frac{2(W/S)}{\rho V^2} \quad (8.1)$$

En la dirección del movimiento el avión está acelerando:

$$\frac{W}{g} \frac{dV}{dt} = T_{apl} - D = \frac{P_{apl}}{V} - T_{req} \quad (8.2)$$

Con el polar de arrastre y la Ec. 8.1 en la Ec. 8.2 después de algo de álgebra se tiene:

$$\frac{dV}{dt} = g \left[\frac{P_{apl}}{WV} - \left(\frac{\rho V^2}{2(W/S)} C_{D0} + \frac{2(W/S)}{\rho V^2} K \right) \right] \quad (8.3)$$

Como la velocidad varía en el tiempo el coeficiente de sustentación también debe variar para mantener el nivel de vuelo, derivando la Ec. 8.1 respecto al tiempo:

$$\frac{dC_L}{dt} = -\frac{4(W/S)}{\rho V^3} \frac{dV}{dt} \quad (8.4)$$

Nótese el signo negativo en la ecuación 8.4, éste indica que si la velocidad aumenta el coeficiente de sustentación debe disminuir para mantener el nivel de vuelo, de la misma manera, si la velocidad disminuye el coeficiente de sustentación debe aumentar para mantener el nivel de vuelo. Esto lo logra el piloto controlando la actitud del avión (inclinación del morro), siempre teniendo cuidado de no llegar a la velocidad de pérdida.

Ejemplo 8.1.

Por ejemplo, consideremos el Air-E que inicialmente volaba al nivel del mar a 50 mph y le aplicamos una potencia de 10 hp pero manteniendo el nivel de vuelo, resolviendo por métodos numéricos [4] la Ec. 8.3 tenemos los desarrollos de la velocidad y el coeficiente de sustentación en la Figuras 8.1 y 8.2, en donde se puede observar que como la potencia aplicada es mayor a la potencia requerida el avión empieza a aumentar su velocidad hasta llegar a los 54 mph, donde la potencia aplicada se iguala con la potencia requerida para vuelo a nivel a esa velocidad; igualmente, el coeficiente de sustentación disminuye a medida que aumenta la velocidad hasta alcanzar un valor constante.

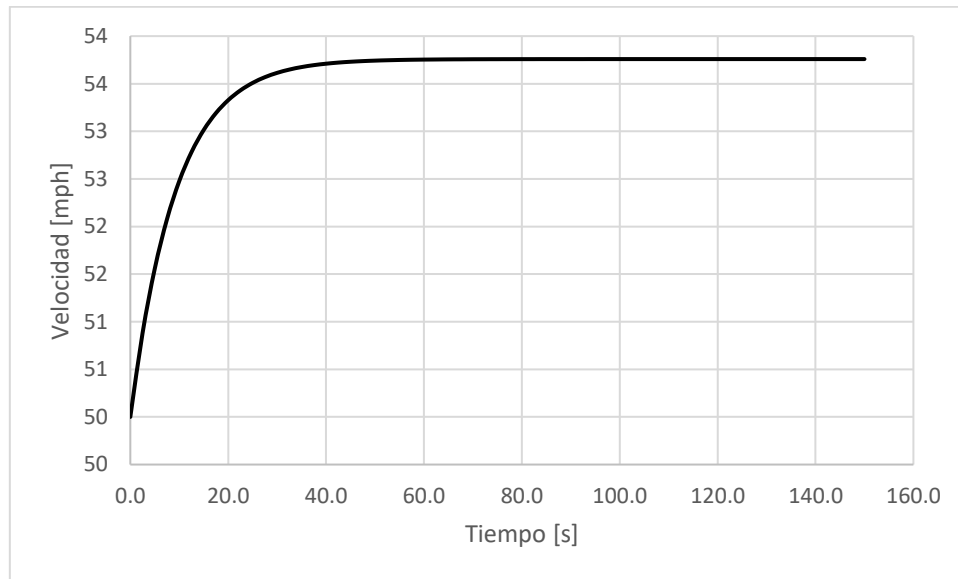


Figura 8.1. Velocidad en función del tiempo.

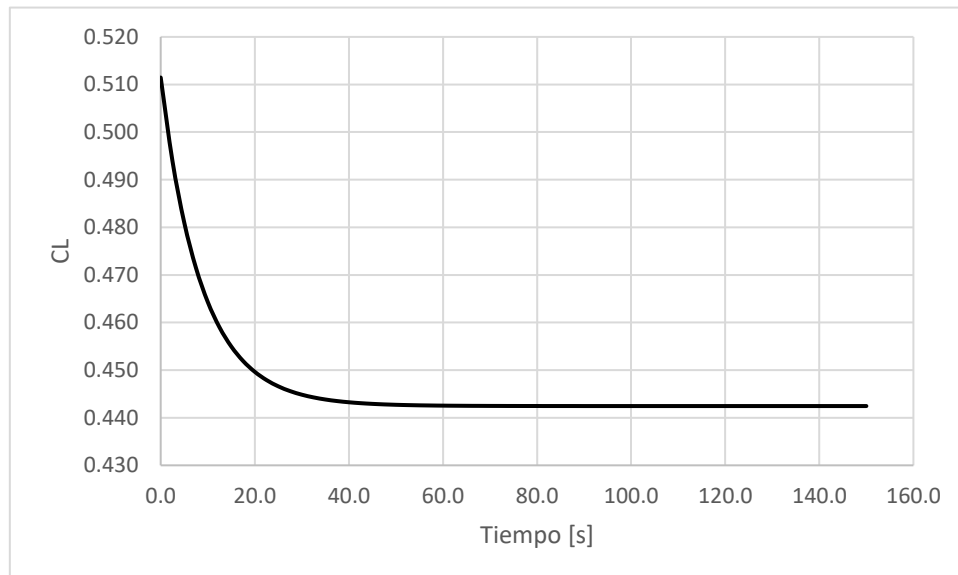


Figura 8.2. Coeficiente de sustentación en función del tiempo.

9. DINÁMICA DE MANIOBRAS DE LEVANTE Y DESCENSO

La maniobra de levante se utiliza para elevar el avión rápidamente una altura y en una distancia horizontal x , como se ilustra en la Figura 9.1:

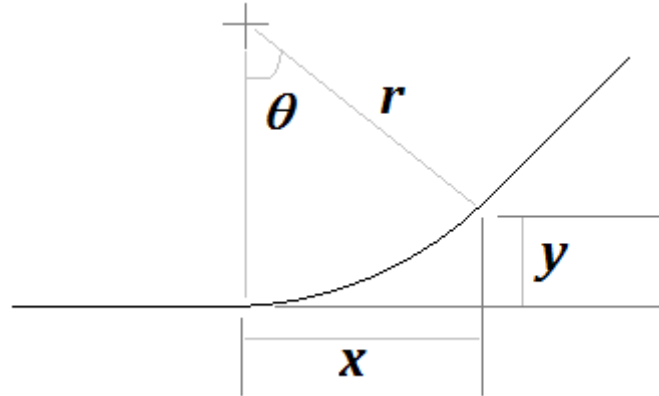


Figura 9.1. Ilustración de la maniobra de levante.

De la Figura 9.1 vemos por trigonometría que el radio de la curva y el ángulo que se recorre en la misma son:

$$r = \frac{x^2 + y^2}{2y} \quad (9.1)$$

$$\theta = \arcsin\left(\frac{2xy}{x^2 + y^2}\right) \quad (9.2)$$

Estos valores se calculan igual para una curva en una maniobra de descenso.

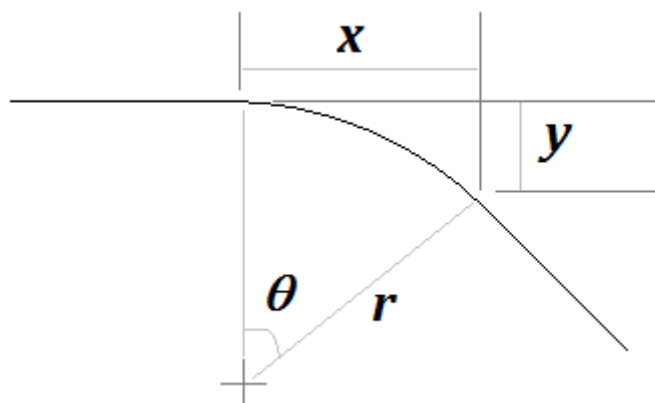


Figura 9.2. Ilustración de la maniobra de descenso.

9.1. MANIOBRA DE LEVANTE

Remitámonos a la Figura 4.1 donde esta vez la sustentación se dirige al interior de una circunferencia y a un ángulo de inclinación instantáneo θ , entonces la suma de fuerzas en la dirección radial es:

$$\frac{W V^2}{g r} = L - W \cos \theta \quad (9.3)$$

El factor de carga instantáneo de la maniobra es:

$$n = \frac{L}{W} = \frac{V^2}{r g} + \cos \theta \quad (9.4)$$

El coeficiente de sustentación es entonces:

$$C_L = \frac{2(W/S)n}{\rho V^2} \quad (9.5)$$

De la suma de fuerzas en la dirección del movimiento y con la Ec. 9.5 tenemos la ecuación de evolución de la velocidad:

$$\frac{dV}{dt} = g \left[\frac{P_{apl}}{WV} - \left(\frac{\rho V^2}{2(W/S)} C_{D0} + \frac{2(W/S)}{\rho V^2} n^2 K \right) - \sin \theta \right] \quad (9.6)$$

La velocidad angular instantánea del giro es además:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{V}{r} \quad (9.7)$$

Con las ecuaciones 9.4 a 9.7 se puede escribir un programa de solución numérica para calcular la evolución de la dinámica del avión en esta maniobra.

Ejemplo 9.1. Maniobra de levante.

Consideremos el Air-E volando en vuelo recto y nivelado al nivel del mar a 50 mph con una potencia aplicada igual a la requerida (8.8 hp). El piloto hace una maniobra de levante para ascender 10 m de altura en 100 m de recorrido horizontal pero no toca el acelerador (no le aplica más potencia).

Con la Ec. 9.1 y 9.2 tenemos el radio de giro de la curva y el ángulo que debe barrer:

$$r = \frac{100^2 + 10^2}{2(10)} = 505.0 \text{ m}$$

$$\theta = \arcsin \left(\frac{2(100)(10)}{100^2 + 10^2} \right) = 11.42^\circ$$

Se hizo un programa de solución por el método de Euler en Excel [4] implementando las ecuaciones 9.4 a 9.7, los resultados con un intervalo de 0.1 s son los siguientes:

Se completa la maniobra en 3.8 s que es el tiempo en el cual se barre el ángulo necesario, durante el tiempo de duración de la maniobra vemos que el factor de carga inicia en su punto máximo (1.1 G) y va disminuyendo a medida que se va cumpliendo con el levante.

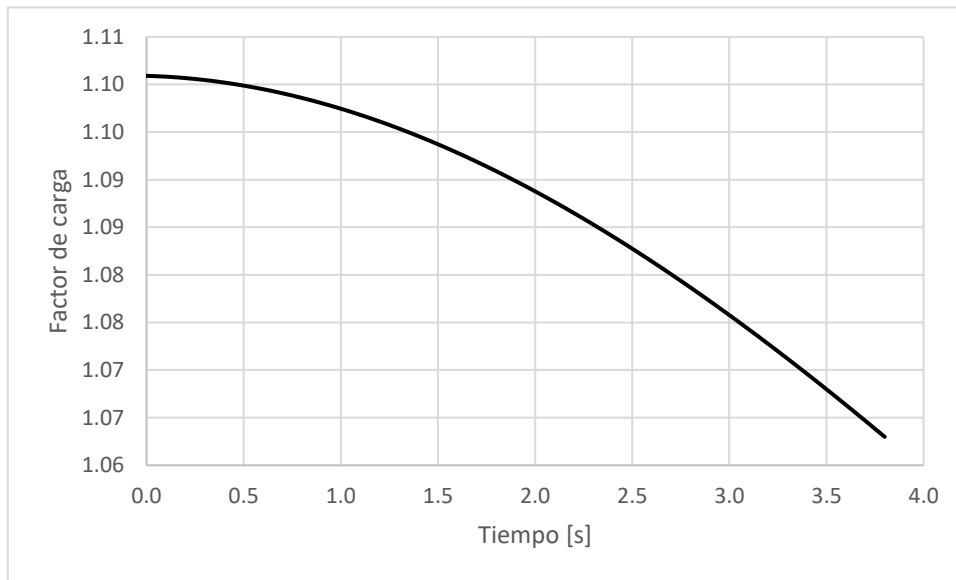


Figura 9.3. Factor de carga durante la maniobra de levante.

¿Qué pasa con la velocidad del avión durante la maniobra de levante? Veamos la Figura 9.4:

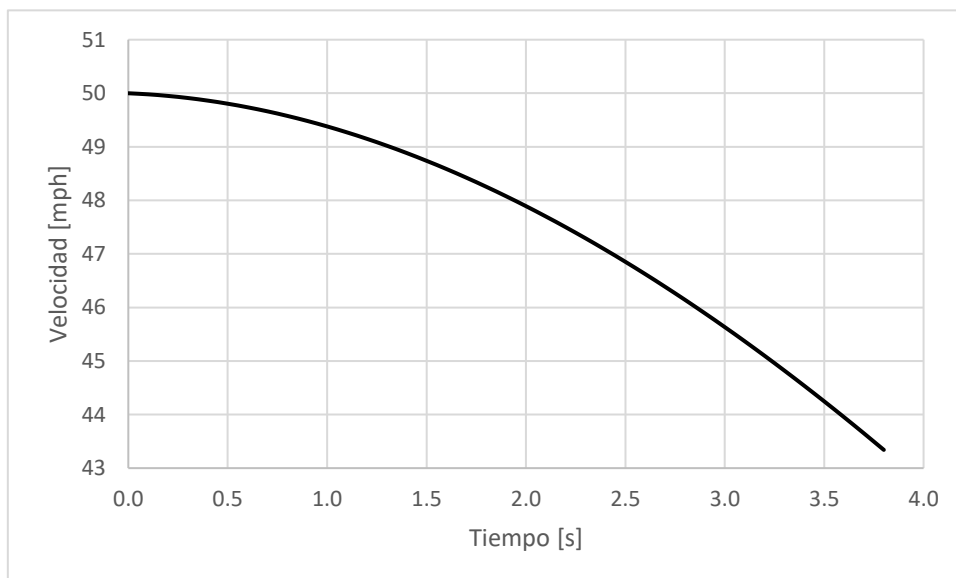


Figura 9.4. Velocidad del avión durante la maniobra de levante.

Observamos que la velocidad cae de la inicial de 50 mph hasta un valor de 43 mph. ¿Por qué pasa esto? Ocurre porque para completar la maniobra de levante el piloto ha aumentado el ángulo de ataque sin haber aplicado potencia y por lo tanto el arrastre total del avión ha aumentado sin un empuje que lo contrarreste, ***por este motivo físico es que se debe aplicar potencia para cualquier maniobra de ascenso, ya que si no se hace así se “mata” la velocidad del avión pudiendo entrar en pérdida.***

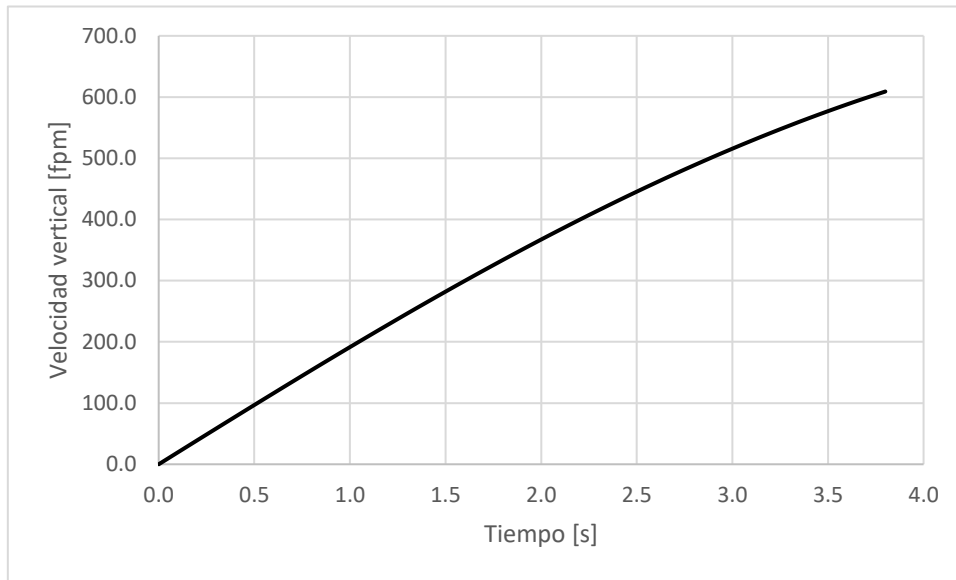


Figura 9.5. Velocidad vertical del avión en la maniobra de levante.

La velocidad vertical del avión inicia en cero y aumenta durante toda la maniobra, mostrando que efectivamente el avión está en ascenso.

9.2. MANIOBRA DE DESCENSO

Remitámonos a la Figura 4.1 donde esta vez la sustentación se dirige al exterior de una circunferencia y a un ángulo de inclinación instantáneo, entonces la suma de fuerzas en la dirección radial es:

$$\frac{W}{g} \frac{V^2}{r} = W \cos \theta - L \quad (9.8)$$

El factor de carga instantáneo de la maniobra es:

$$n = \frac{L}{W} = \cos \theta - \frac{V^2}{rg} \quad (9.9)$$

El coeficiente de sustentación es entonces:

$$C_L = \frac{2(W/S)n}{\rho V^2} \quad (9.10)$$

De la suma de fuerzas en la dirección del movimiento y con la Ec. 9.10 tenemos la ecuación de evolución de la velocidad:

$$\frac{dV}{dt} = g \left[\frac{P_{apl}}{WV} - \left(\frac{\rho V^2}{2(W/S)} C_{D0} + \frac{2(W/S)}{\rho V^2} n^2 K \right) + \sin \theta \right] \quad (9.11)$$

Nótese que en este caso el peso del avión (representado por el factor $\sin \theta$) ayuda a que éste gane velocidad, al contrario que en la maniobra de levante descrita por la Ec. 9.6. La velocidad angular instantánea del giro es:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{V}{r} \quad (9.12)$$

Con las ecuaciones 9.9 a 9.12 se puede escribir un programa de solución numérica para calcular la evolución de la dinámica del avión en esta maniobra.

Ejemplo 9.2. Maniobra de descenso.

Consideremos el Air-E volando en vuelo recto y nivelado al nivel del mar a 50 mph con una potencia aplicada igual a la requerida. El piloto hace una maniobra de descenso para bajar 10 m de altura en 100 m de recorrido horizontal pero no toca el acelerador (no le quita potencia).

El radio de giro y el ángulo a barrer son los mismos que en el Ejemplo 9.1. Se hizo un programa de solución por el método de Euler en Excel [4] implementando las ecuaciones 9.9 a 9.12, los resultados con un intervalo de 0.1 s son los siguientes:

Se completa la maniobra en 3.5 s que es el tiempo en el cual se barre el ángulo necesario, durante el tiempo de duración de la maniobra vemos que el factor de carga inicia en su punto máximo (0.9 G) y va disminuyendo a medida que se va cumpliendo con el descenso. Éste valor del factor de carga inferior a la aceleración de la gravedad es lo que hace que se sienta el “vacío” en el estómago en una maniobra de descenso.

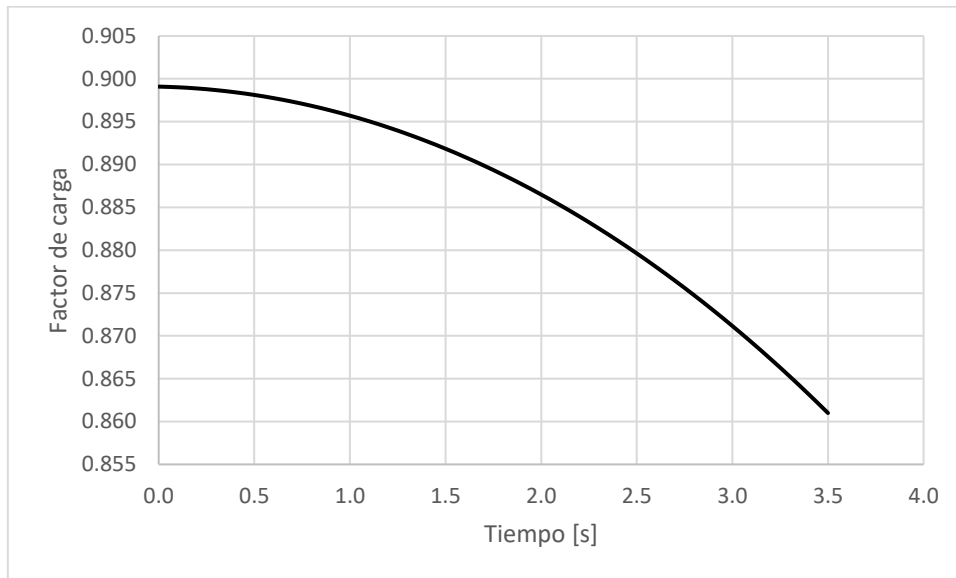


Figura 9.6. Factor de carga durante la maniobra de descenso.

¿Qué pasa con la velocidad del avión durante la maniobra de descenso? Veamos la Figura 9.7:

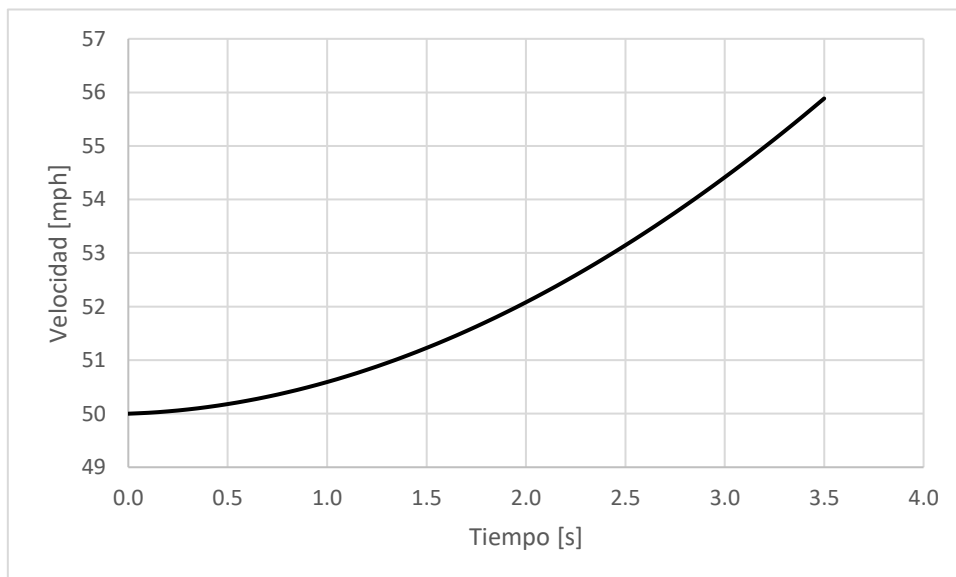


Figura 9.7. Velocidad del avión durante la maniobra de descenso.

Observamos que la velocidad aumenta de la inicial de 50 mph hasta un valor de 56 mph. ¿Por qué pasa esto? Ocurre porque para completar la maniobra de levante el piloto ha disminuido el ángulo de ataque sin haber reducido potencia y por lo tanto el arrastre total del avión ha disminuido con el mismo empuje que llevaba para contrarrestar un arrastre mayor, ***por este motivo físico es que se debe quitar potencia para cualquier maniobra de descenso, ya que si no se hace así se aumenta demasiado la velocidad del avión pudiendo llegar al límite de la resistencia estructural.***

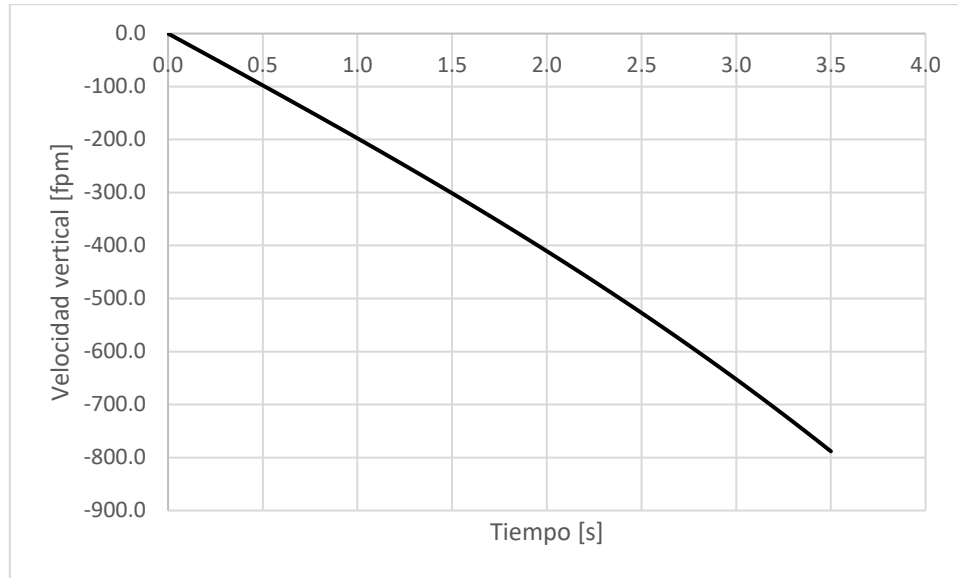


Figura 9.8. Velocidad vertical del avión en la maniobra de descenso.

Gravedad cero

Es posible experimentar la gravedad cero en la Tierra y es en un avión en descenso, que es como los futuros astronautas entrenan antes de su primera misión. Haciendo el factor de carga igual a cero en la Ec. 9.9:

$$\cos\theta - \frac{V^2}{rg} = 0$$

Para un radio de giro y una velocidad dadas:

$$\theta = \arccos\left(\frac{V^2}{rg}\right) \quad (9.13)$$

PARTE IV

DESPEGUE Y ATERRIZAJE

10. DINÁMICA DEL DESPEGUE

El despegue se compone de las siguientes etapas:

- Carrera de despegue.
- Rotación (levante inicial).
- Ascenso constante.

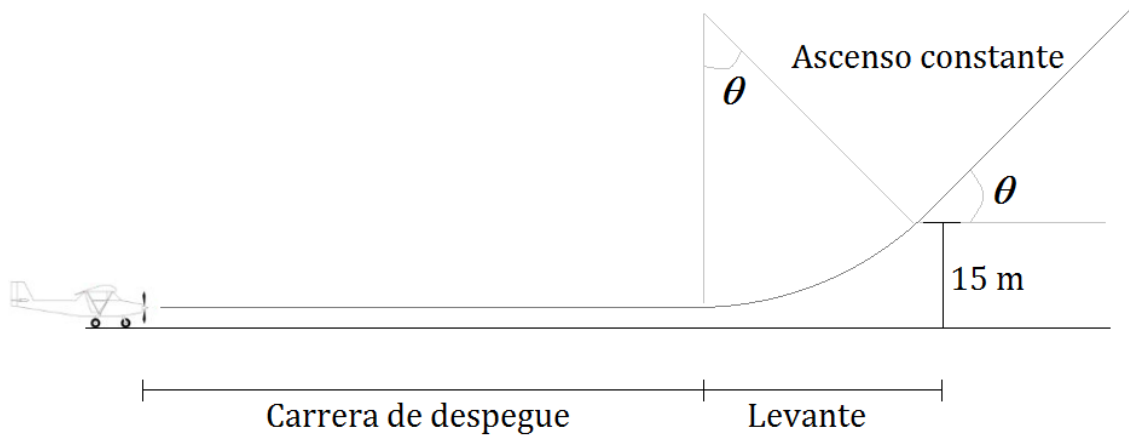


Figura 10.1. Etapas del despegue.

En la Figura 10.1 se pone la altura de 15 m al finalizar la maniobra de levante ya que muchas regulaciones exigen que un avión pase por encima de un obstáculo de esta altura al final de una pista. Analizaremos en este capítulo únicamente la dinámica de la carrera de despegue ya que las otras dos partes tienen la misma dinámica mostrada en las secciones 9.1 y 5.1.

Las fuerzas sobre un avión en carrera de despegue se muestran en la Figura 10.2:

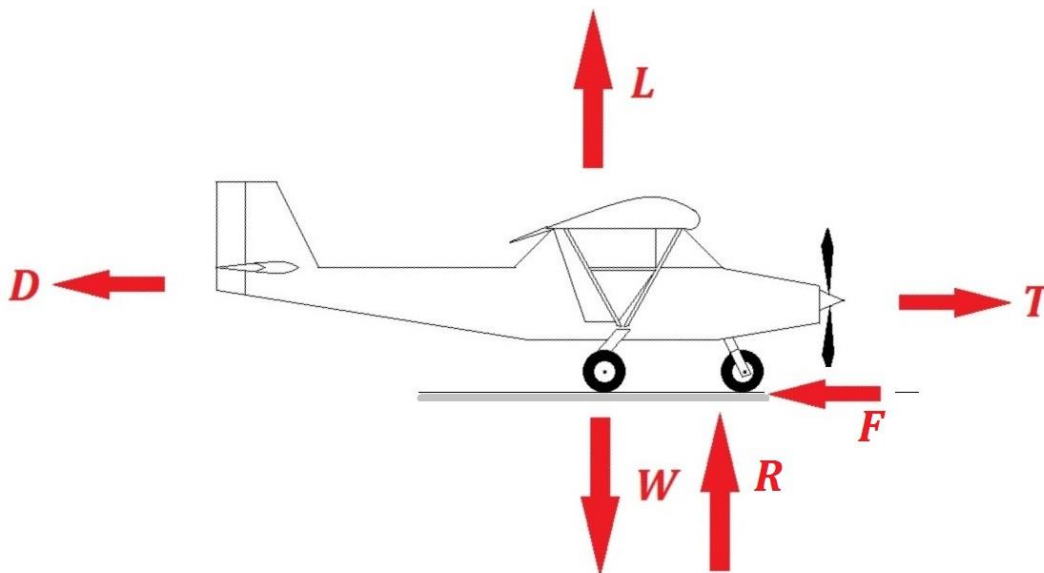


Figura 10.2. Fuerzas sobre un avión en carrera de despegue.

La carrera de despegue se hace desde el avión detenido hasta que alcanza la velocidad de rotación V_r que generalmente es $1.1V_s$. La suma de fuerzas en la dirección vertical es:

$$L + R = W$$

De donde:

$$R = W - \frac{1}{2} \rho V^2 S C_L \quad (10.1)$$

El coeficiente de sustentación se calcula con la velocidad de rotación de diseño:

$$C_L = \frac{2(W/S)}{\rho V_r^2} \quad (10.2)$$

La suma de fuerzas en la dirección del movimiento es:

$$\frac{W}{g} \frac{dV}{dt} = T_{apl} - D - F \quad (10.3)$$

Donde F es la fuerza de fricción seca $F = \mu R$, entonces tenemos con esto y de 10.1 en 10.3:

$$\frac{dV}{dt} = g \left[\frac{T_{apl}}{W} - \frac{\rho V^2}{2(W/S)} C_D - \mu \left(1 - \frac{\rho V^2 S}{2(W/S)} C_L \right) \right] \quad (10.4)$$

Con el polar de arrastre tenemos la ecuación final:

$$\left[\frac{dV}{dt} = g \left[\frac{T_{apl}}{W} - \mu + \frac{\rho V^2 S}{2(W/S)} (\mu C_L - C_{D0} - K C_L^2) \right] \right] \quad (10.5)$$

En la Ec. 10.5 hay que tener en cuenta que cuando la velocidad es cero se tiene T_{apl} como el máximo empuje que entrega el conjunto motor-hélice al avión en tierra. La distancia recorrida se calcula de:

$$\left[\frac{dx}{dt} = V \right] \quad (10.6)$$

Ejemplo 10.1. Despegue del Air-E.

Supongamos que el Air-E va a despegar de una pista de asfalto al nivel del mar ($\mu=0.7$)⁵ y que el empuje máximo en tierra es de 2205 N, la velocidad de rotación en éste caso es 30 mph; con estos datos se programa en Excel una solución numérica [4] que resuelve las ecuaciones 10.2 a 10.6.

Vemos que el avión recorre 45 m de pista antes de alcanzar la velocidad de rotación y lo hace en 9.5 s.

⁵ http://www.engineeringtoolbox.com/friction-coefficients-d_778.html

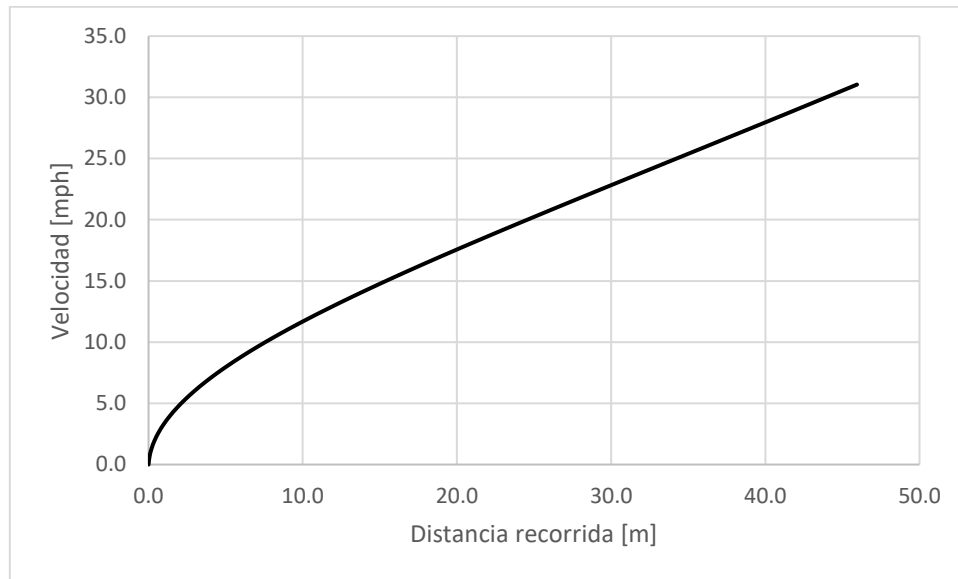


Figura 10.3. Velocidad del avión vs. Distancia recorrida en la carrera de despegue.

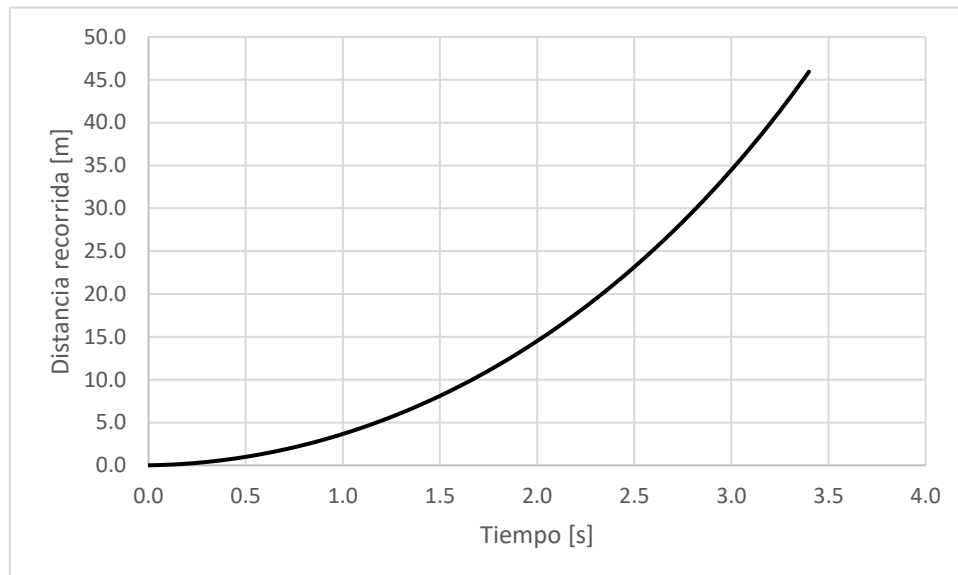


Figura 10.4. Distancia recorrida en función del tiempo.

Para el levante inicial se desea salvar 15 m y finalizar con un ángulo de 41.1° de inclinación (para la mejor tasa de ascenso) por lo que con las ecuaciones de la Sección 9.1 tenemos la distancia horizontal de esta maniobra es 40 m.

Con la carrera de despegue y la distancia horizontal de la maniobra de levante tenemos que la distancia total de despegue del Air-E es:

$$x_{\text{despegue}} = x_{\text{carrera}} + x_{\text{levante}} = 85 \text{ m}$$

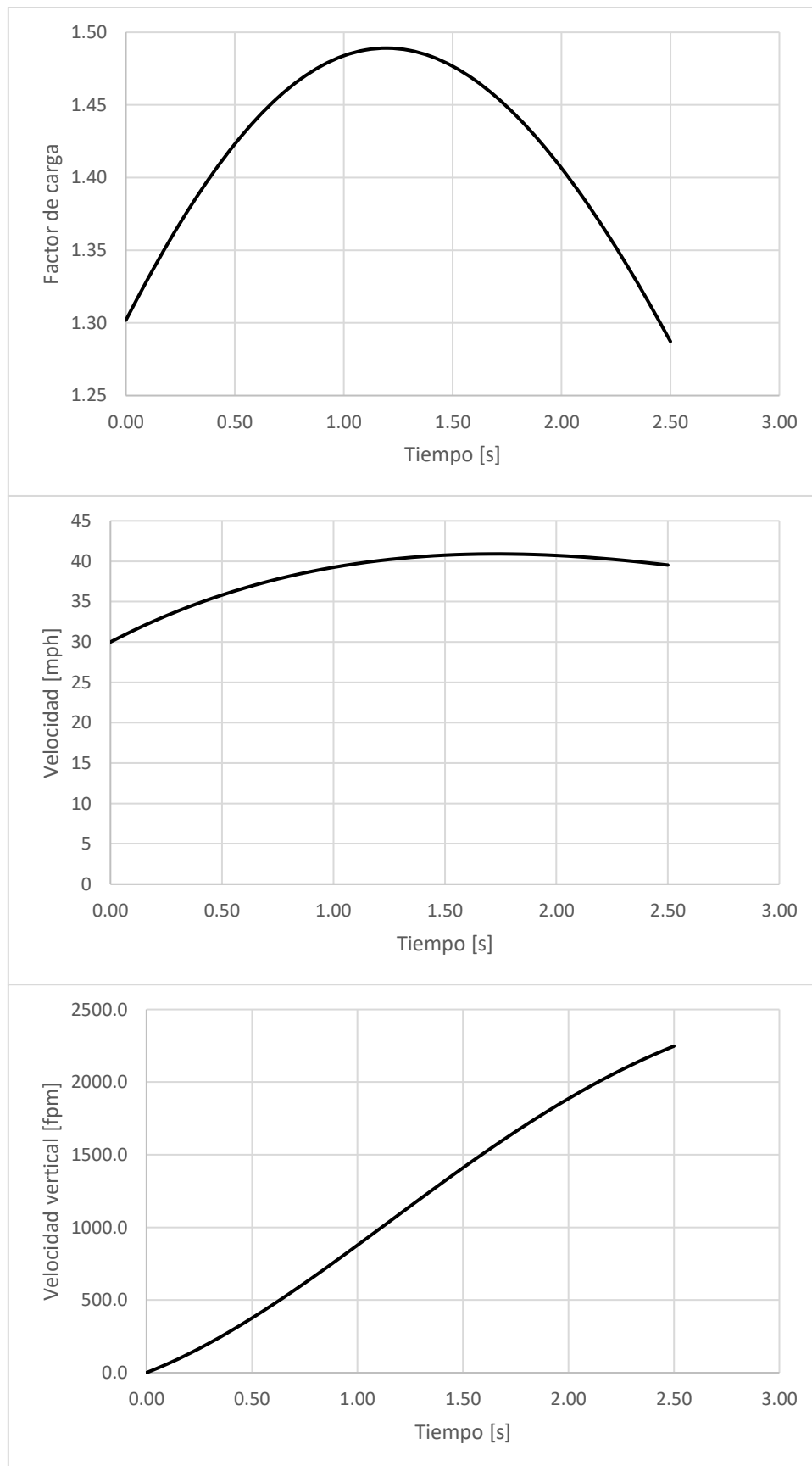


Figura 10.5. Dinámica del levante al despegar.

11. DINÁMICA DEL ATERRIZAJE

Llegamos a la parte final de este libro y la que un estudiante de aviación generalmente es lo último que aprende de las maniobras básicas de vuelo: el aterrizaje.

El aterrizaje, a diferencia del despegue, no es opcional, y por tanto es muy importante conocer su dinámica y la física detrás de éste.

El aterrizaje se compone de las siguientes etapas:

- Aproximación final.
- Recogida (*flare* en inglés).
- Carrera de frenado.

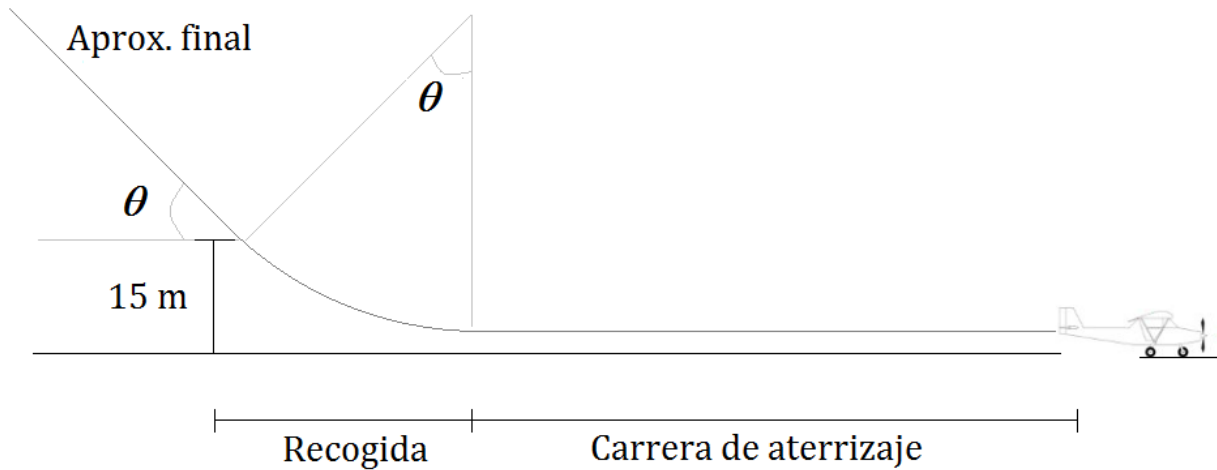


Figura 11.1. Etapas del aterrizaje.

En la Figura 11.1 se pone la altura de 15 m al iniciar la recogida ya que muchas regulaciones exigen que un avión pase por encima de un obstáculo de esta altura (50 ft) al llegar a una pista. Analizaremos en este capítulo la dinámica de la recogida y la dinámica de la carrera de frenado del aterrizaje ya que la aproximación final tiene la misma dinámica mostrada en la Sección 5.2 o 6.1.

11.1. RECOGIDA

Como no hay potencia aplicada consideremos el diagrama de cuerpo libre de la Figura 6.1 pero en la curva de la Figura 11.1, la suma de fuerzas en la dirección radial es:

$$L - W \cos \theta = \frac{W}{g} \frac{V^2}{r}$$

Con la definición del factor de carga como L/W tenemos:

$$n = \cos \theta + \frac{V^2}{gr} \quad (11.1)$$

El coeficiente de sustentación instantáneo requerido para completar la maniobra es:

$$C_L = \frac{2(W/S)n}{\rho V^2} \quad (11.2)$$

De la suma de fuerzas en la dirección del movimiento y con la 11.2 tenemos la ecuación de evolución de la velocidad:

$$\frac{dV}{dt} = g \left[\sin \theta - \left(\frac{\rho V^2}{2(W/S)} C_{D0} + \frac{2(W/S)}{\rho V^2} n^2 K \right) \right] \quad (11.3)$$

Nótese que en este caso el peso del avión (representado por el factor $\sin \theta$) ayuda a que éste gane velocidad, al contrario que en la maniobra de levante descrita por la Ec. 9.6. La velocidad angular instantánea del giro es:

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{V}{r} \quad (11.4)$$

Con las ecuaciones 11.1 a 11.4 se puede escribir un programa de solución numérica para calcular la evolución de la dinámica del avión en esta maniobra.

Ejemplo 11.1. Recogida en el Air-E.

Supongamos que el Air-E viene en aproximación final a 40 mph con un ángulo de 41.1° de inclinación y se desea salvar un obstáculo de 15 m por lo que con las ecuaciones de la Sección 9.1 tenemos la distancia horizontal de esta maniobra es 40 m. Con métodos numéricos [4] solucionamos la dinámica de la recogida:

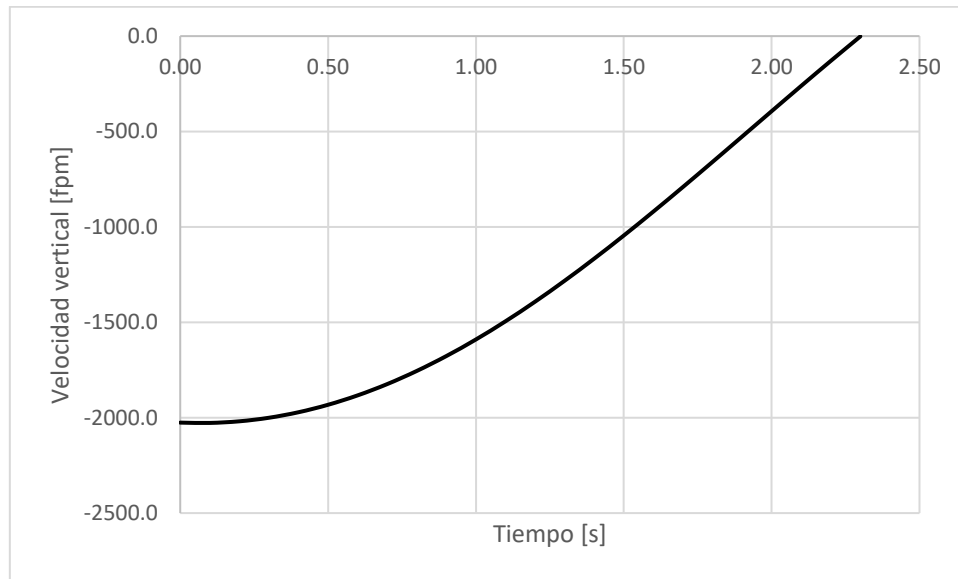


Figura 11.2. Velocidad vertical en la maniobra de recogida.

Nótese que la velocidad vertical disminuye su valor absoluto, es decir, al hacer la recogida el avión va a descender más lentamente, y éste es el objeto de esta maniobra: garantizar un toque suave con el terreno.

La velocidad del avión no sufre mucho durante la recogida si se hace suavemente, como podemos ver en la Figura 11.3, donde incluso aumenta ligeramente durante la mitad de la maniobra:

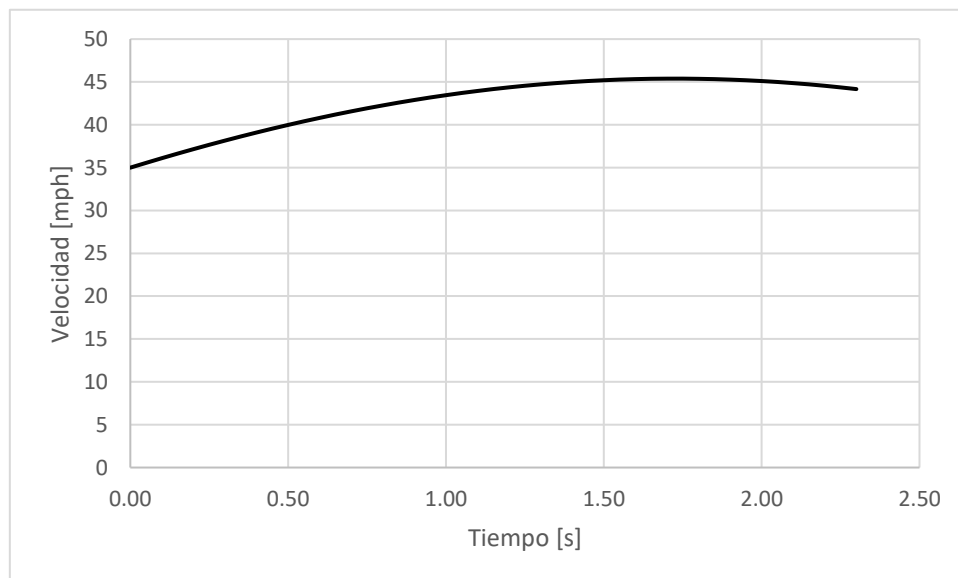


Figura 11.3. Velocidad del avión en la maniobra de recogida.

11.2. CARRERA DE ATERRIZAJE

Las fuerzas sobre un avión en carrera de aterrizaje se muestran en la Figura 11.4:

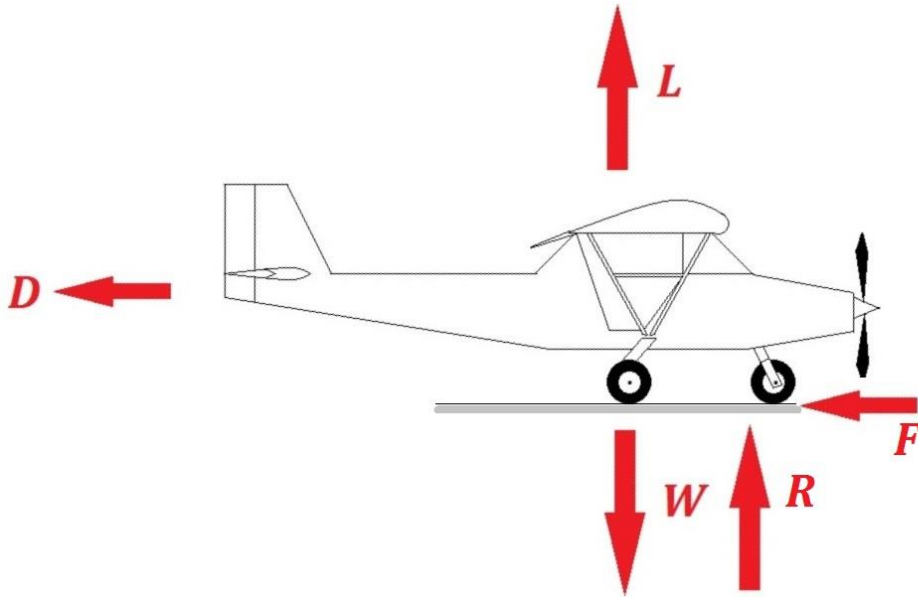


Figura 11.4. Fuerzas sobre un avión en carrera de aterrizaje.

No hay empuje ya que el motor se corta al tocar tierra en un aterrizaje completo.

La carrera de aterrizaje se hace hasta que el avión se detenga. La suma de fuerzas en la dirección vertical es:

$$L + R = W$$

De donde:

$$R = W - \frac{1}{2} \rho V^2 S C_L \quad (11.5)$$

El coeficiente de sustentación se calcula con la velocidad de diseño dada para la aproximación final:

$$C_L = \frac{2(W/S)}{\rho V_r^2} \quad (11.6)$$

La suma de fuerzas en la dirección del movimiento es:

$$\frac{W}{g} \frac{dV}{dt} = -D - F \quad (11.7)$$

Donde F es la fuerza de fricción seca $F = \mu R$, entonces tenemos:

$$\frac{dV}{dt} = g \left[-\frac{\rho V^2}{2(W/S)} C_D - \mu \left(1 - \frac{\rho V^2 S}{2(W/S)} C_L \right) \right] \quad (11.8)$$

Con el polar de arrastre tenemos la ecuación final:

$$\frac{dV}{dt} = g \left[-\mu + \frac{\rho V^2 S}{2(W/S)} (\mu C_L - C_{D0} - K C_L^2) \right] \quad (11.9)$$

La distancia recorrida se calcula de:

$$\frac{dx}{dt} = V \quad (11.10)$$

Con las ecuaciones 11.6 a 11.10 se puede escribir un programa de solución numérica para calcular la carrera de aterrizaje.

Ejemplo 11.2. Carrera de aterrizaje del Air-E.

Tenemos que el Air-E ya hizo la recogida y toca con motor cortado a 40 mph en la misma pista de asfalto por la que despegó en el Ejemplo 10.1, calculamos con métodos numéricos [4] la distancia de la carrera de aterrizaje:

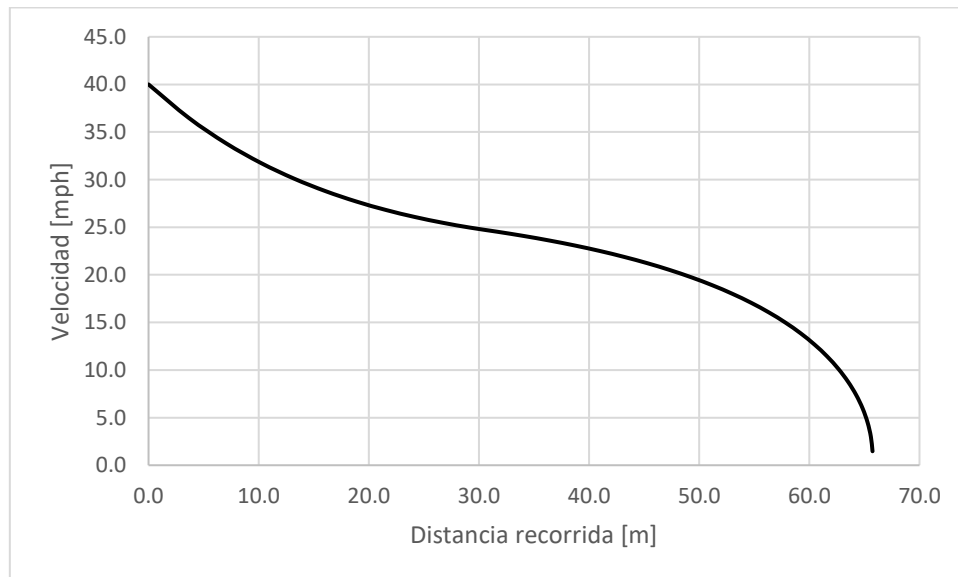


Figura 11.5. Velocidad del avión vs. Distancia recorrida en la carrera de aterrizaje.

La solución numérica nos dice que el avión se detiene en 65 m de carrera.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] John D. Anderson. **Aircraft Performance and Design**. McGraw Hill. 1999.
- [2] Daniel P. Raymer. **Aircraft Design: A Conceptual Approach**, 2nd edition. American Institute of Aeronautics and Astronautics. 1992.
- [3] Raymond A. Serway. **Physics for Scientists and Engineers**. 9th edition. Brooks/Cole Cengage Learning. 2014.
- [4] Carlos Armando De Castro. **Métodos numéricos básicos para ingeniería**. <https://tutor.cadecastro.com/p/metodos-numericos-basicos-para.html>

SOBRE EL AUTOR



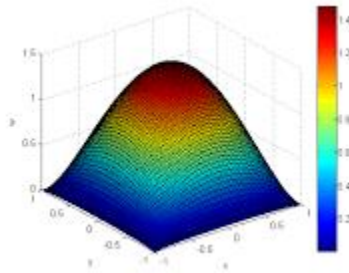
Carlos Armando De Castro

Ingeniero Mecánico egresado de la Universidad de los Andes de Bogotá, Colombia, donde estudió gracias a la beca Bachilleres por Colombia otorgada por Ecopetrol a los mejores bachilleres del país cada año; ha visto cursos de posgrado en Dinámica Computacional de Fluidos, Matemáticas Aplicadas y Combustión; ha presentado ponencias en el VII Congreso Colombiano de Métodos Numéricos, el Seminario Internacional Secado de Productos Agrícolas y el I Congreso de Energía Sostenible.

Es Piloto Deportivo de aviones ultralivianos graduado del Club Colombiano de Aviación Deportiva y uno de los diseñadores junto con el Ing. Gustavo Adolfo Zuluaga Osorio del Air-E, primer avión eléctrico colombiano fabricado por la empresa *A620 Aircraft Builders*.

ASESORÍAS EN MATEMÁTICAS, FÍSICA E INGENIERÍA

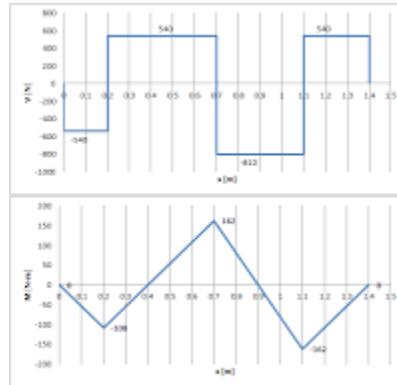
SERVICIOS PARA ESTUDIANTES



Damos asesorías y clases particulares de refuerzo para estudiantes de bachillerato y universitarios en las siguientes áreas:

- **Matemáticas:** geometría, álgebra, trigonometría, cálculo diferencial, integral y vectorial, ecuaciones diferenciales, álgebra lineal.
- **Física:** mecánica, eléctrica y térmica, dinámica de aviones.
- **Ingeniería:** mecánica de sólidos estática y dinámica, mecánica de materiales, mecánica de fluidos, termodinámica, transferencia de calor, diseño mecánico, aerodinámica básica.
- **Métodos numéricos:** uso de **Matlab** y **Excel** para solución por medio de métodos numéricos de diferentes problemas en materias avanzadas y proyectos de grado de pregrado y posgrado.
- **Pruebas SABER:** preparación adicional en Matemáticas y Física. También aplica para examen de ingreso a U. Nacional.
- **Estudiantes de Aviación:** refuerzo en Aerodinámica, Matemáticas y Física para estudiantes de Piloto Comercial.
- **Traducción de inglés:** traducimos artículos científicos y técnicos desde y hacia el inglés para presentación a revistas y seminarios internacionales.

SERVICIOS PARA PEQUEÑAS Y MEDIANAS EMPRESAS



Prestamos los siguientes servicios para pequeñas y medianas empresas:

- **Montaje de indicadores:** implementación de hojas de cálculo en Excel para manejo de datos, indicadores y estadísticas con uso de tablas dinámicas.
- **Análisis de datos:** prestamos servicios de análisis estadístico y de indicadores clave para determinar el desempeño de su empresa y hallar cuellos de botella o causas raíces de fallas recurrentes.
- **Procesos de mantenimiento preventivo:** asesoramos en el montaje de procesos de mantenimiento preventivo y correctivo, implementando formatos y hojas de control en Excel.
- **Cursos de Excel:** dictamos cursos en manejo de Excel para usted y sus empleados para manejo de miles de datos de forma eficiente.
- **Cálculos de Ingeniería:** prestamos servicios de cálculo de ingeniería y diseño de estructuras y máquinas simples.
- **Traducción del inglés:** traducimos manuales y documentos técnicos desde y hacia el inglés.

Asesorías en Matemáticas, Física e Ingeniería

Celular: (+57) 312-636-9880

Correo: tutor@cadecastro.com

<https://tutor.cadecastro.com>

Bogotá, Colombia