Segundo proyecto de Análisis Numérico

Noviembre 21 de 2006

Considere el siguiente sistema compuesto de dos masas y dos resortes ideales, atados de la forma que se muestra bajo la acción de la gravedad. Las masas son respectivamente 10 Kg. y 25 Kg., las constantes de Hooke de los resortes son respectivamente 10N/cm. y 40N/cm., las longitudes de equilibrio de los resortes son respectivamente 75 cm. y 90 cm., la configuración del dibujo es la configuración inicial tomada en reposo. Realice los siguientes pasos para conocer la dinámica de este sistema:

a. Proponga un conjunto de coordenadas y velocidades generalizadas.
b. Escriba la energía cinética del sistema en términos de las velocidades generalizadas.
c. Escriba la energía potencial del sistema en términos de las coordenadas generalizadas.
d. Escriba el Lagrangiano del sistema.
e. Plantee las ecuaciones de Euler Lagrange.
f. Reduzca las ecuaciones de Euler Lagrange a la forma de un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden dado en la forma canónica.
g. Fije las condiciones iniciales para el sistema mencionado.
h. Realice la integración numérica del sistema mediante Runge-Kutta de orden 4.
i. Simule el comportamiento del sistema durante un minuto, 10 minutos y media hora.
j. Grafique los resultados de manera que se visualice claramente la dinámica del sistema.

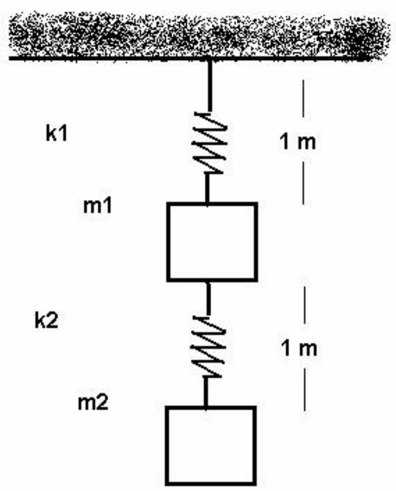


Figura 1.

Solución:

a) Coordenadas y velocidades generalizadas para el sistema:

Las coordenadas generalizadas para el sistema se muestran en la figura 2:

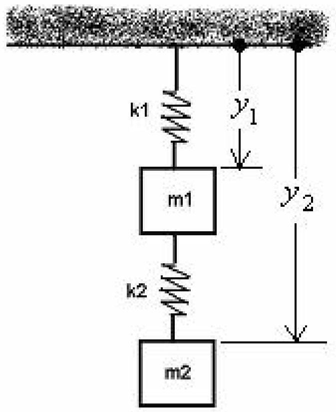


Figura 2.

Y las velocidades generalizadas son entonces $\dot{y}_1 = dy_1/dt,\ \dot{y}_2 = dy_2/dt$.

b) Energía cinética del sistema:

La energía cinética K del sistema en términos de las velocidades generalizadas es

$$K = \tfrac{1}{2} m_1 \dot{y}_1^{\,2} + \tfrac{1}{2} m_2 \dot{y}_2^{\,2}$$
$$K = \tfrac{1}{2}(10)\dot{y}_1^{\,2} + \tfrac{1}{2}(25)\dot{y}_2^{\,2}$$
$$\Rightarrow K = 5\dot{y}_1^{\,2} + 12.5\dot{y}_2^{\,2}$$

c) Energía potencial del sistema:

La energía potencial U del sistema en términos de las coordenadas generalizadas es

$$U = -m_1 g y_1 - m_2 g y_2 + \tfrac{1}{2}k_1(y_1 - l_1)^2 + \tfrac{1}{2}k_2(y_2 - y_1 - l_2)^2$$
$$U = -(10)(9.8)y_1 - (25)(9.8)y_2 + \tfrac{1}{2}(1000)(y_1 - 0.75)^2 + \tfrac{1}{2}(4000)(y_2 - y_1 - 0.90)^2$$
$$\Rightarrow U = -98y_1 - 245y_2 + 500\cdot(y_1 - 0.75)^2 + 2000\cdot(y_2 - y_1 - 0.90)^2$$

d) Lagrangiano del sistema:

El lagrangiano del sistema $L = K - U$ es entonces

$$L = 5\dot{y}_1^{\,2} + 12.5\dot{y}_2^{\,2} + 98y_1 + 245y_2 - 500\cdot(y_1 - 0.75)^2 - 2000\cdot(y_2 - y_1 - 0.90)^2$$

e) Ecuaciones de Euler-Lagrange del sistema:

Para $j = 1$:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial y_1} = 0$$
$$\frac{d}{dt}(10\dot{y}_1) - 98 + 1000\cdot(y_1 - 0.75) - 4000\cdot(y_2 - y_1 - 0.90) = 0$$
$$10\ddot{y}_1 + 5000y_1 - 4000y_2 = -2752$$

Para $j = 2$:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial y_2} = 0$$
$$\frac{d}{dt}(25\dot{y}_2) - 245 + 4000\cdot(y_2 - y_1 - 0.90) = 0$$
$$25\ddot{y}_2 - 4000y_1 + 4000y_2 = 3845$$

El sistema de ecuaciones diferenciales que modela al sistema es

$$10\ddot{y}_1 + 5000y_1 - 4000y_2 = -2752$$
$$25\ddot{y}_2 - 4000y_1 + 4000y_2 = 3845$$

f) Reducción de las ecuaciones de Euler-Lagrange a un sistema de ecuaciones diferenciales en forma canónica de primer orden:

Sean $u_1 = y_1$, $u_2 = y_2$, $u_3 = \dot{y}_1$, $u_4 = \dot{y}_2$, entonces resulta el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\dot{u}_1 = u_3$$
$$\dot{u}_2 = u_4$$
$$\dot{u}_3 = -500u_1 + 400u_2 - 275.2$$
$$\dot{u}_4 = 160u_1 - 160u_2 + 153.8$$

g) Condiciones iniciales del sistema:

Las condiciones iniciales del sistema son

$$u_1(0) = 1, \quad u_2(0) = 2, \quad u_3(0) = u_4(0) = 0.$$

h) Solución numérica por el método de Runge-Kutta de orden 4:

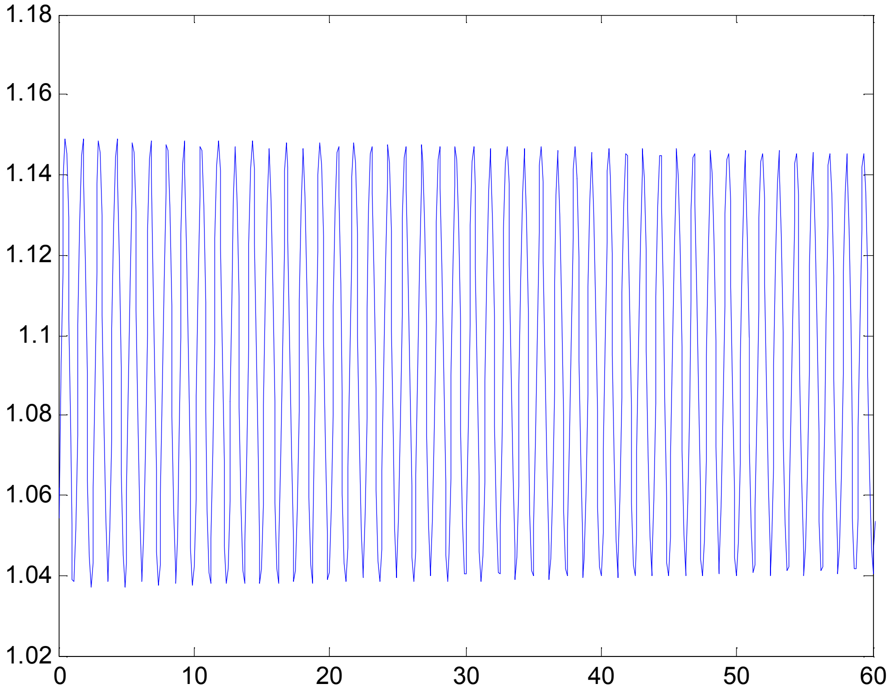
El algoritmo elaborado en Matlab para la solución numérica y la simulación es el siguiente:

```
function proyecto2

a=0;
b=input('Tiempo total de simulación en segundos: ');
h=input('Tamaño de paso h= ');
n=(b-a)/h;

t=a;
u1=1;
u2=2;
u3=0;
u4=0;

U1(1)=u1;
U2(1)=u2;
U3(1)=u3;
U4(1)=u4;
T(1)=t;

for i=1:n+1;

    k11=h*u3;
    k12=h*u4;
    k13=h*(-500*u1+400*u2-275.2);
    k14=h*(160*u1-160*u2+153.8);

    k21=h*(u3+0.5*k13);
    k22=h*(u4+0.5*k14);
    k23=h*(-500*(u1+0.5*k11)+400*(u2+0.5*k12)-275.2);
    k24=h*(160*(u1+0.5*k11)-160*(u2+0.5*k12)+153.8);

    k31=h*(u3+0.5*k23);
    k32=h*(u4+0.5*k24);
    k33=h*(-500*(u1+0.5*k21)+400*(u2+0.5*k22)-275.2);
    k34=h*(160*(u1+0.5*k21)-160*(u2+0.5*k22)+153.8);

    k41=h*(u3+k33);
    k42=h*(u4+k34);
    k43=h*(-500*(u1+k31)+400*(u2+k32)-275.2);
    k44=h*(160*(u1+k31)-160*(u2+k32)+153.8);

    u1=u1+(k11+2*k21+2*k31+k41)/6;
    u2=u2+(k12+2*k22+2*k32+k42)/6;
    u3=u3+(k13+2*k23+2*k33+k43)/6;
    u4=u4+(k14+2*k24+2*k34+k44)/6;

    U1(i)=u1;
    U2(i)=u2;
    U3(i)=u3;
    U4(i)=u4;
    T(i)=t;

    t=a+i*h;

end
```

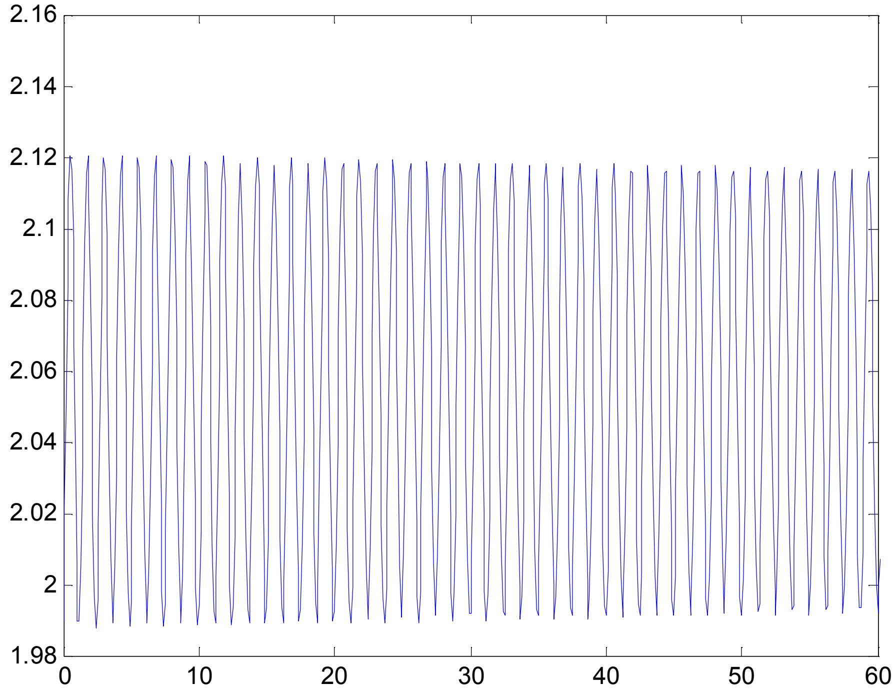
i) y *j)* Simulación y gráficas: $h = 0.1$:

- $t = 1$ min:

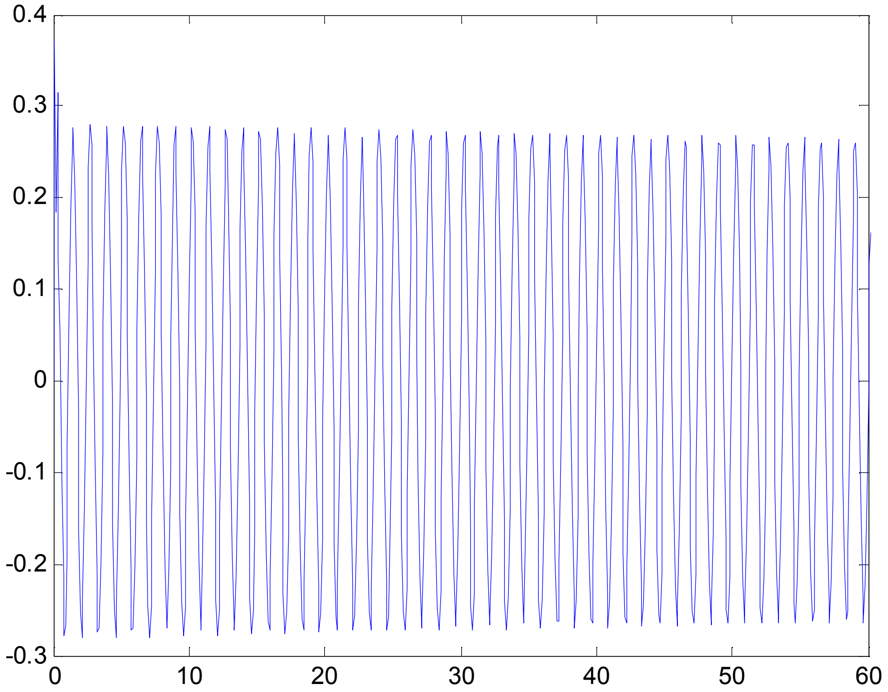
Posición de la masa 1:



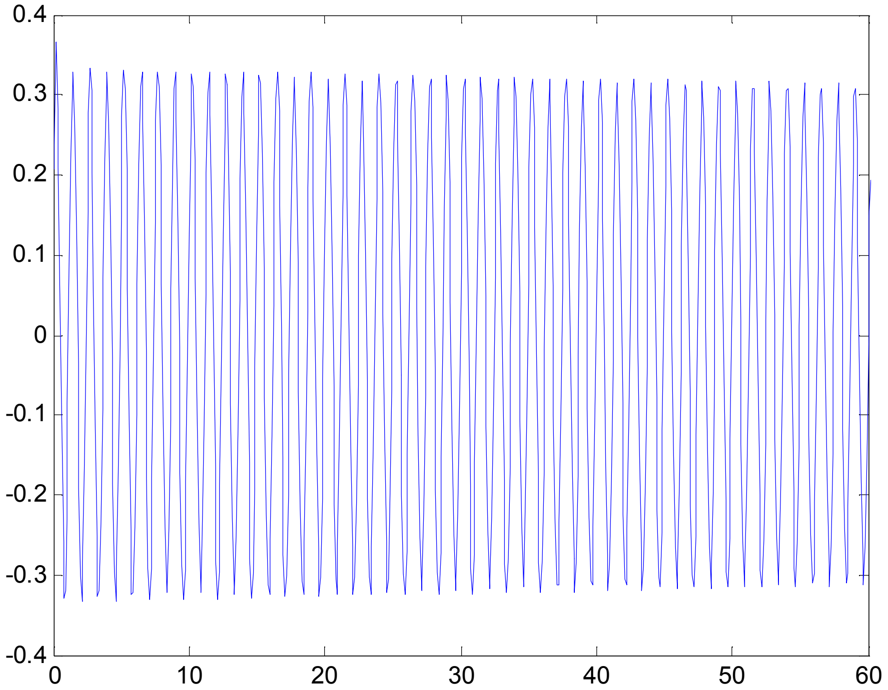
Posición de la masa 2:



Velocidad de la masa 1:

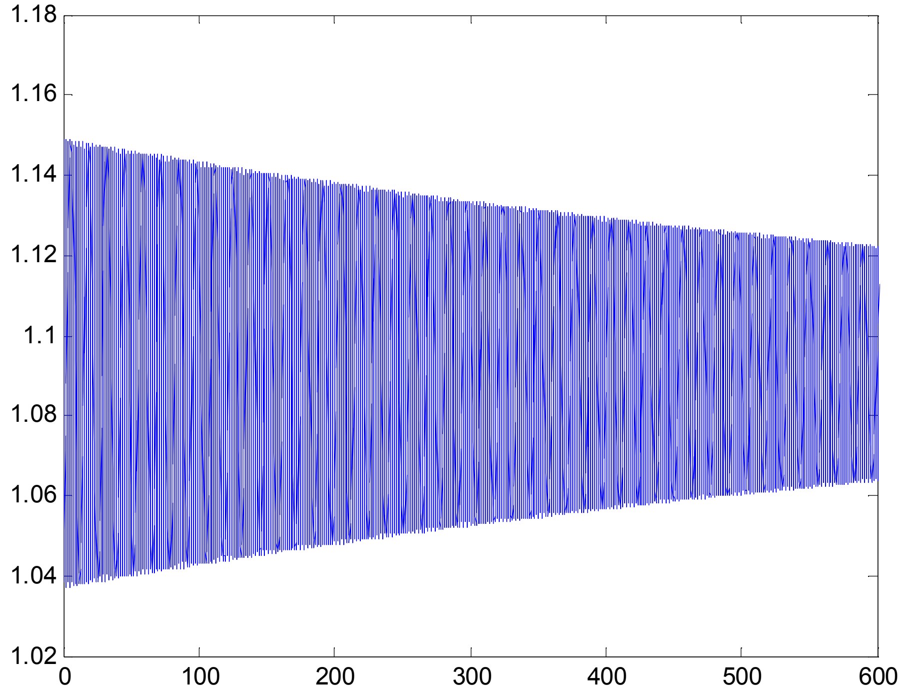


Velocidad de la masa 2:

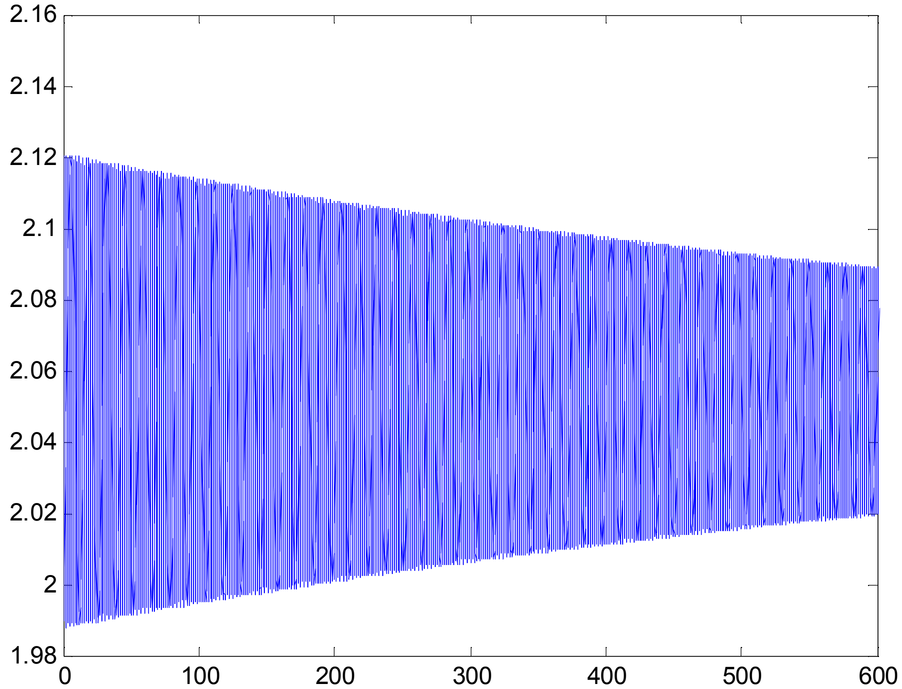


- t = 10 min:

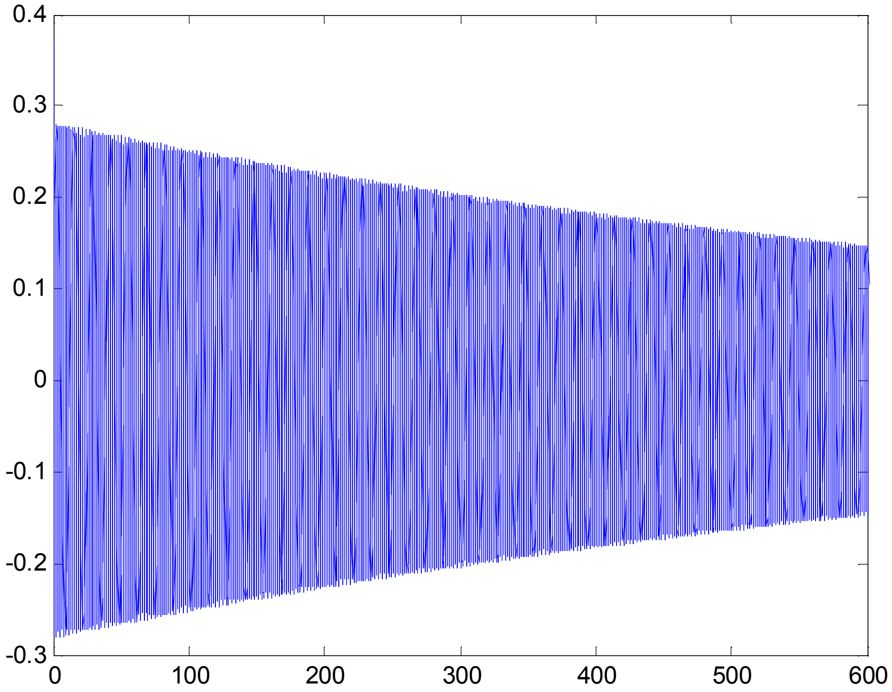
Posición de la masa 1:



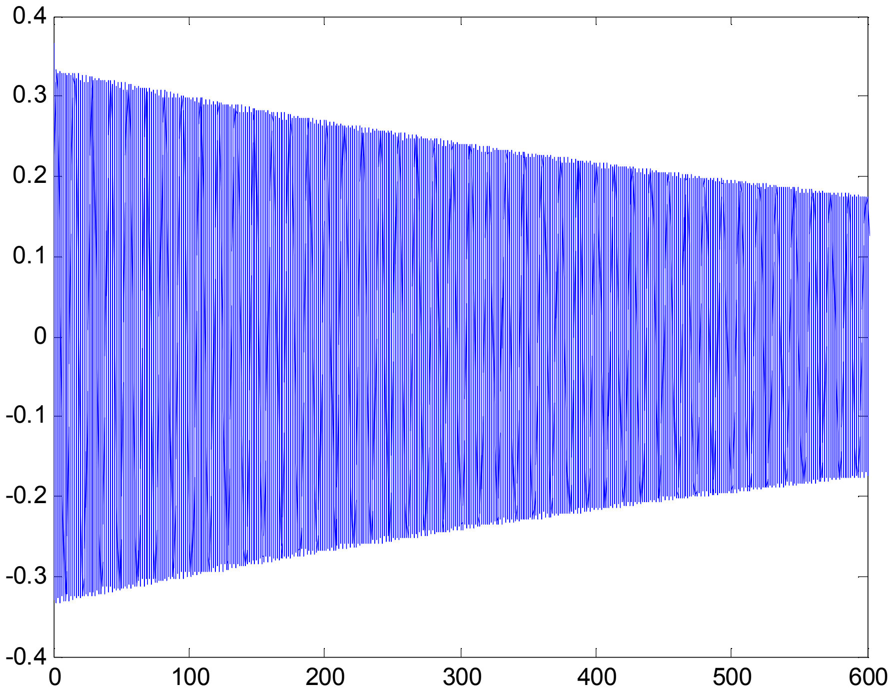
Posición de la masa 2:



Velocidad de la masa 1:

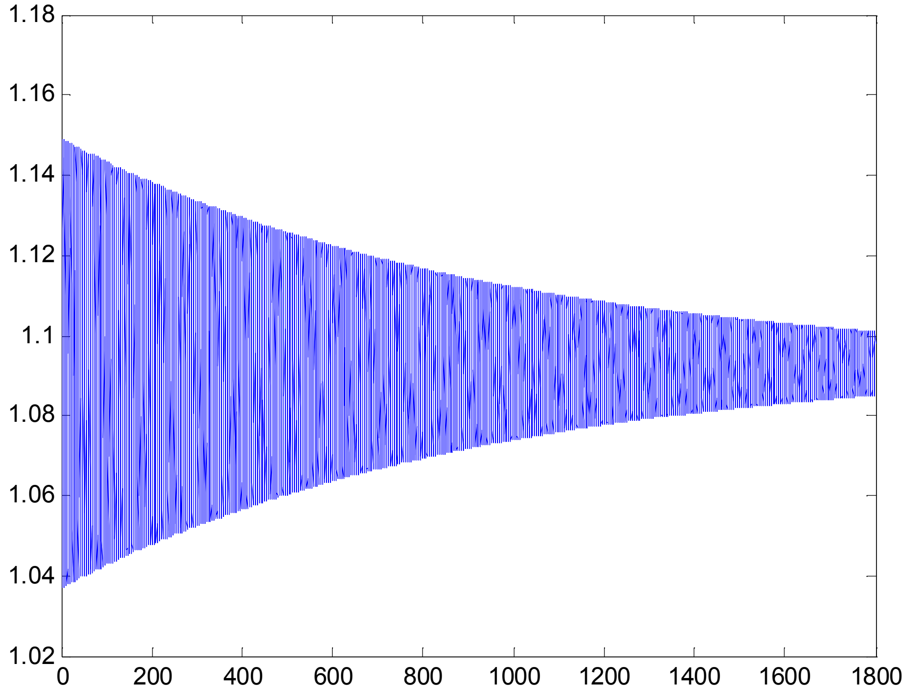


Velocidad de la masa 2:

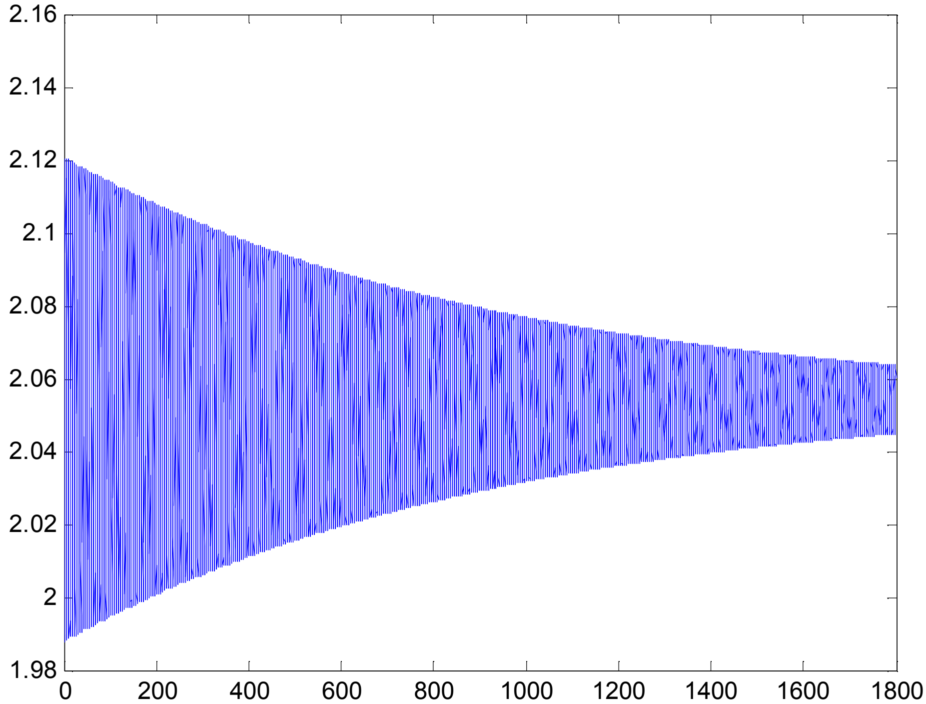


- t = 30 min:

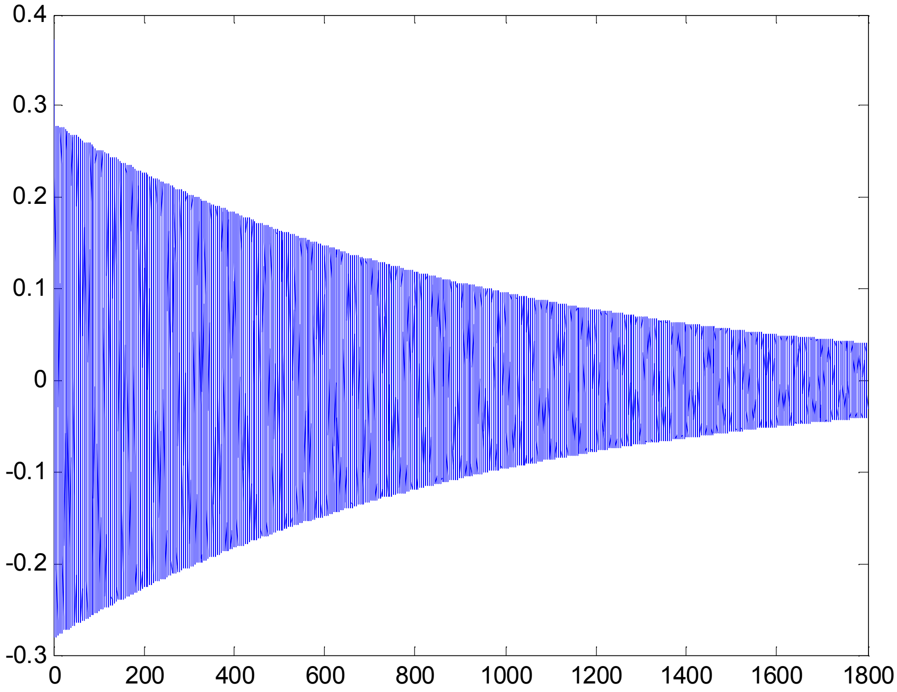
Posición de la masa 1:



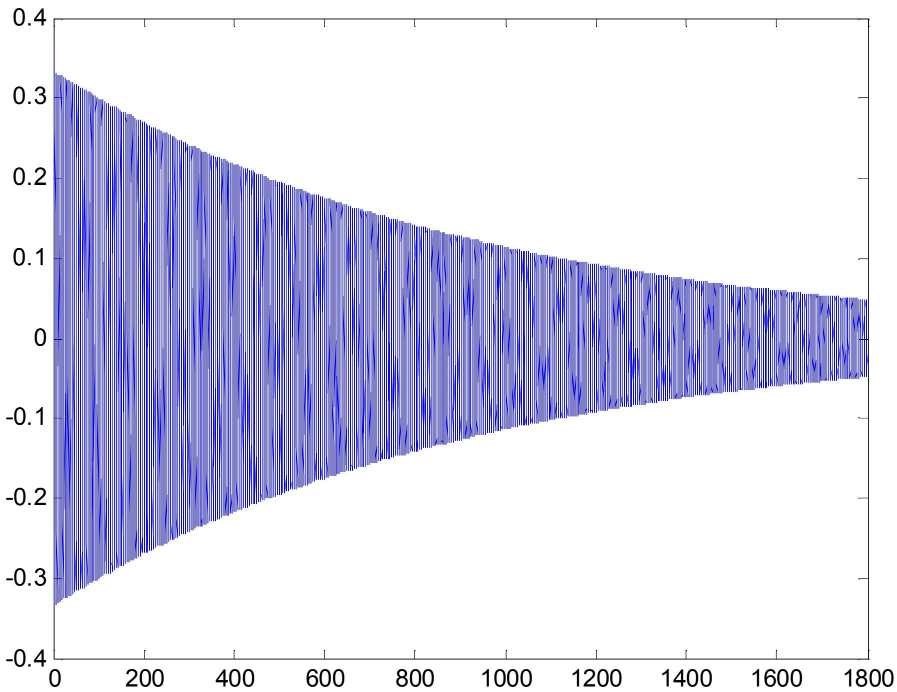
Posición de la masa 2:



Velocidad de la masa 1:



Velocidad de la masa 2:

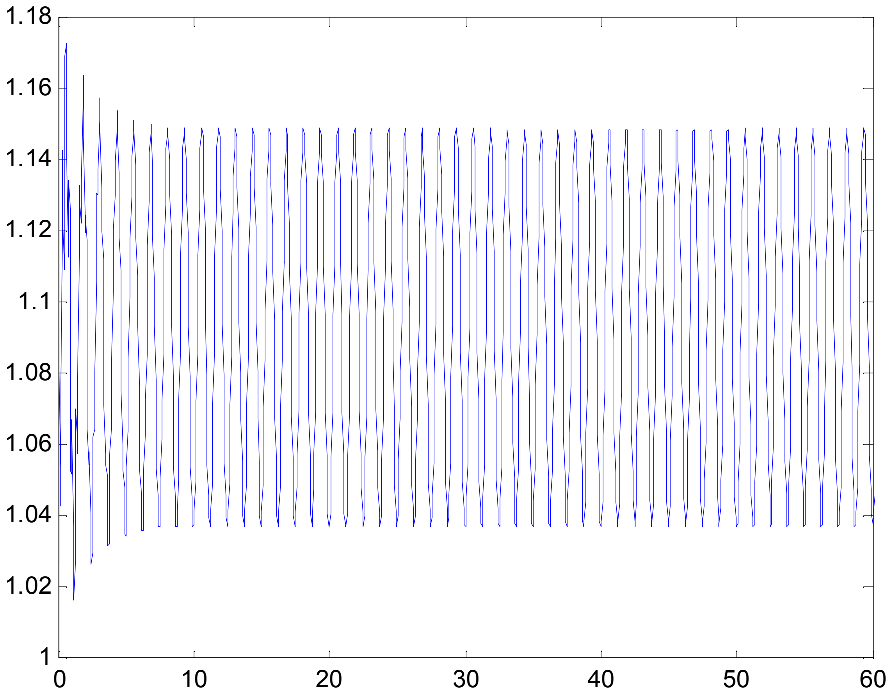


Las gráficas para 10 min. y 30 min. se ven como si fueran áreas debido a la alta frecuencia de oscilación de sistema.
Posiciones en metros y velocidades en metros por segundo.

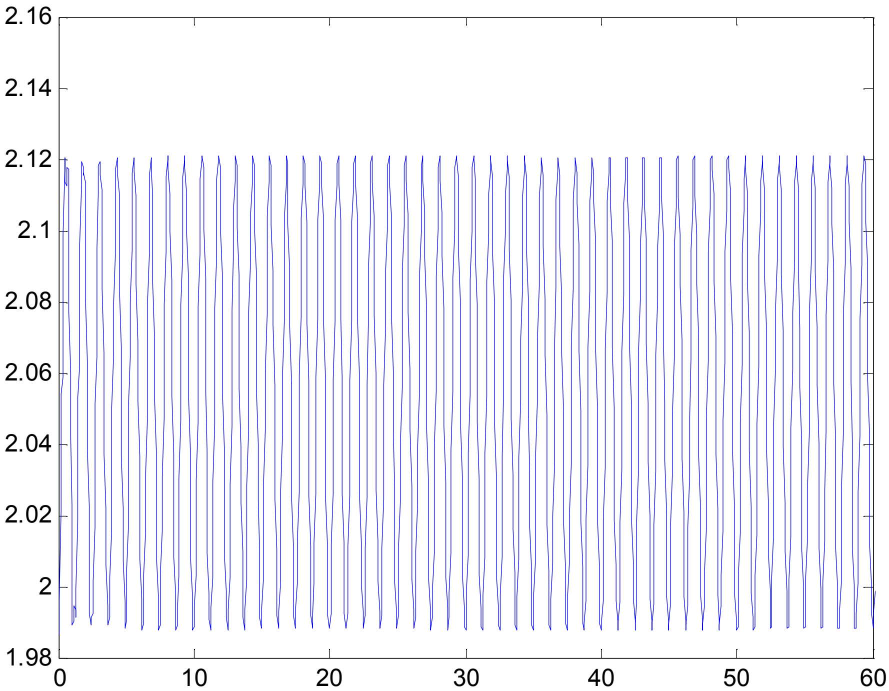
$h = 0.05$:

- $t = 1$ min:

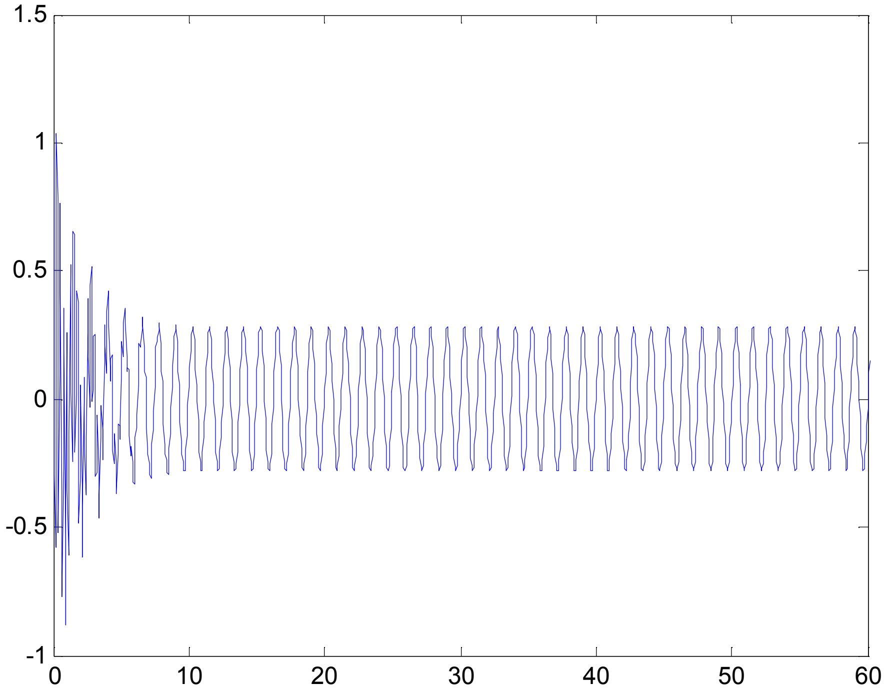
Posición de la masa 1:



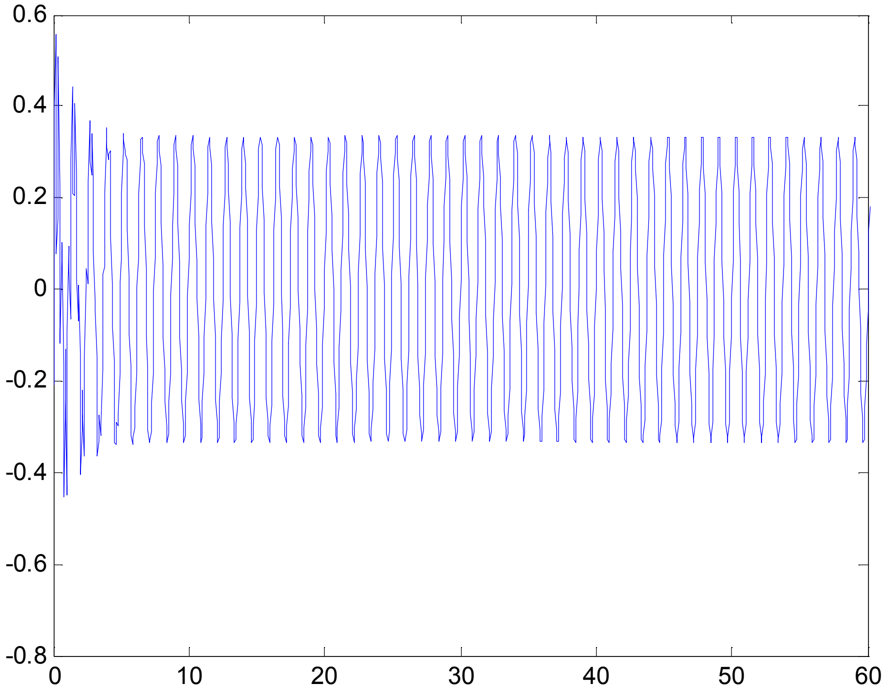
Posición de la masa 2:



Velocidad de la masa 1:

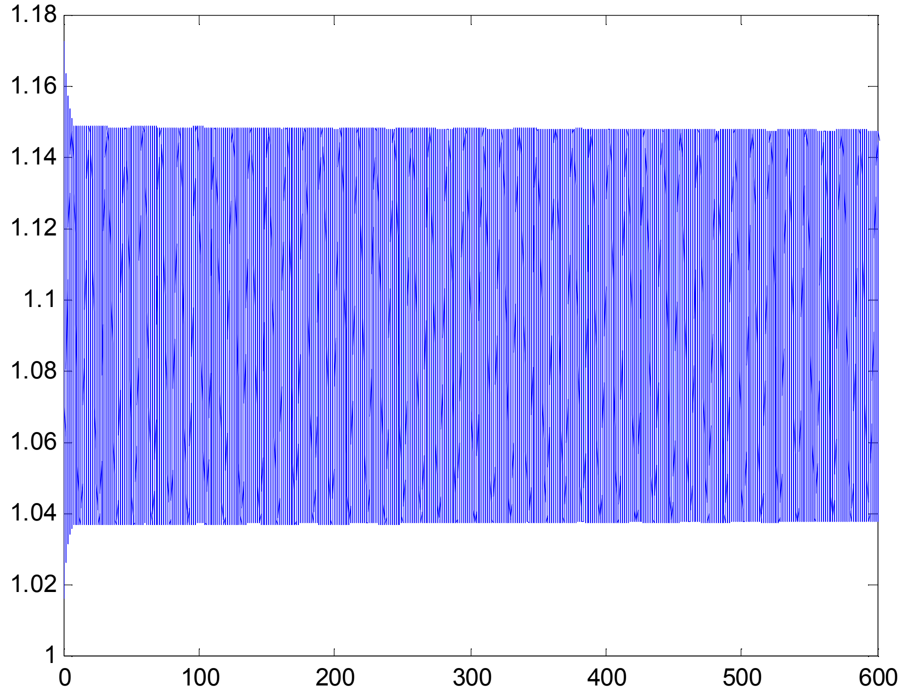


Velocidad de la masa 2:

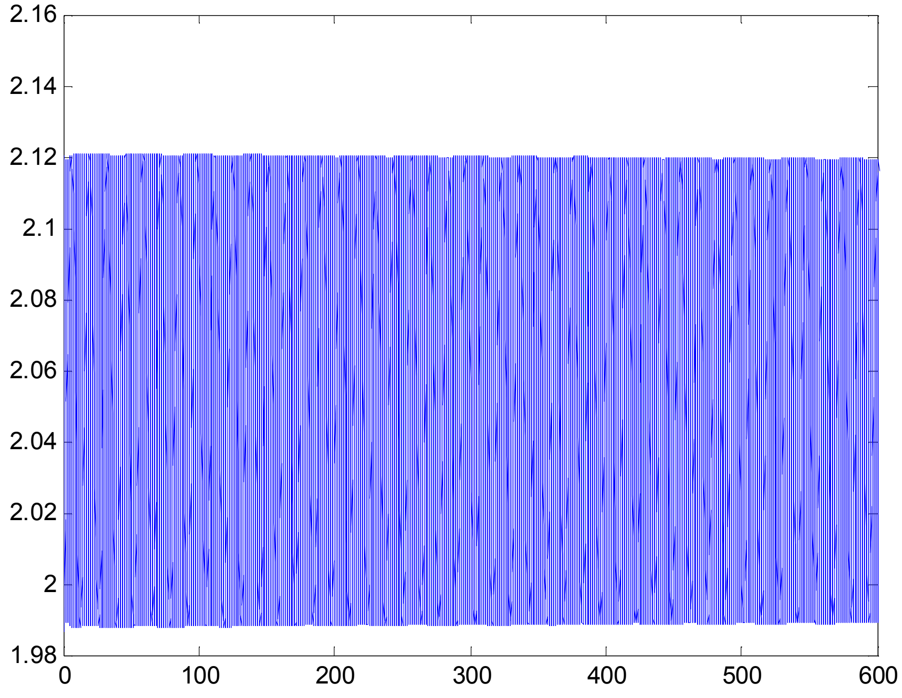


- t = 10 min:

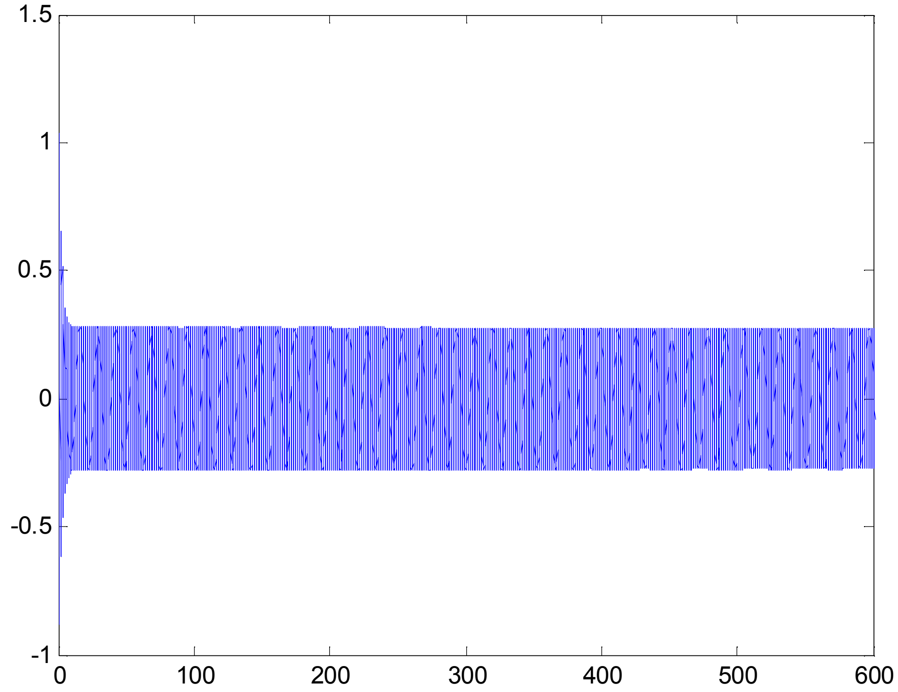
Posición de la masa 1:



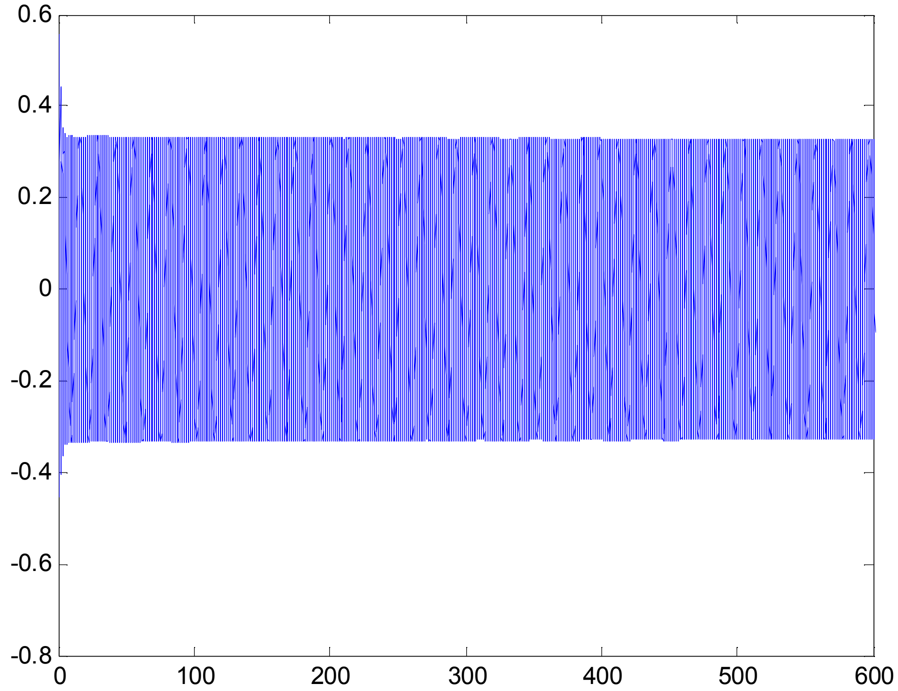
Posición de la masa 2:



Velocidad de la masa 1:

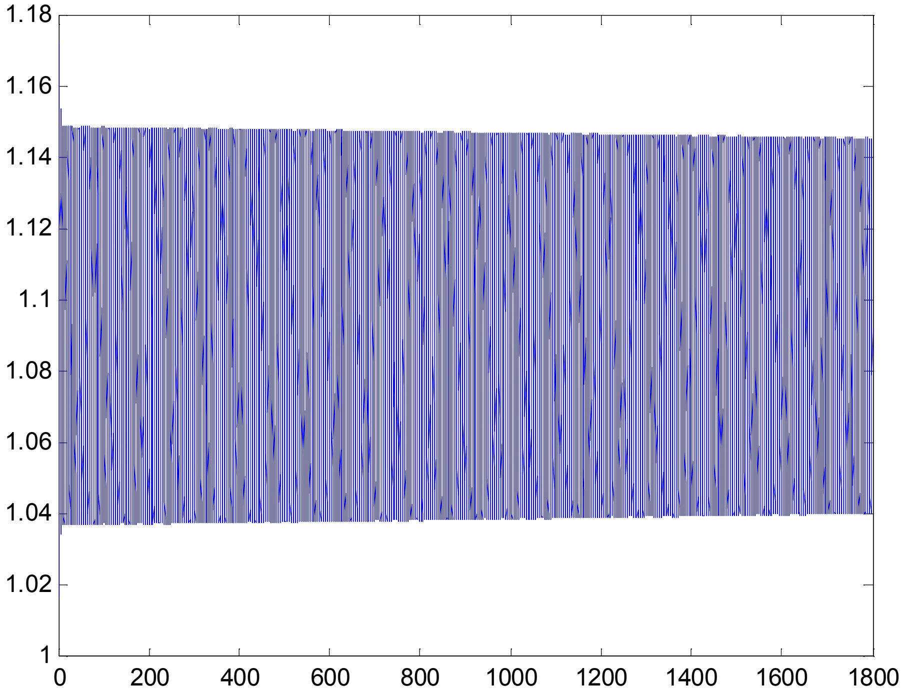


Velocidad de la masa 2:

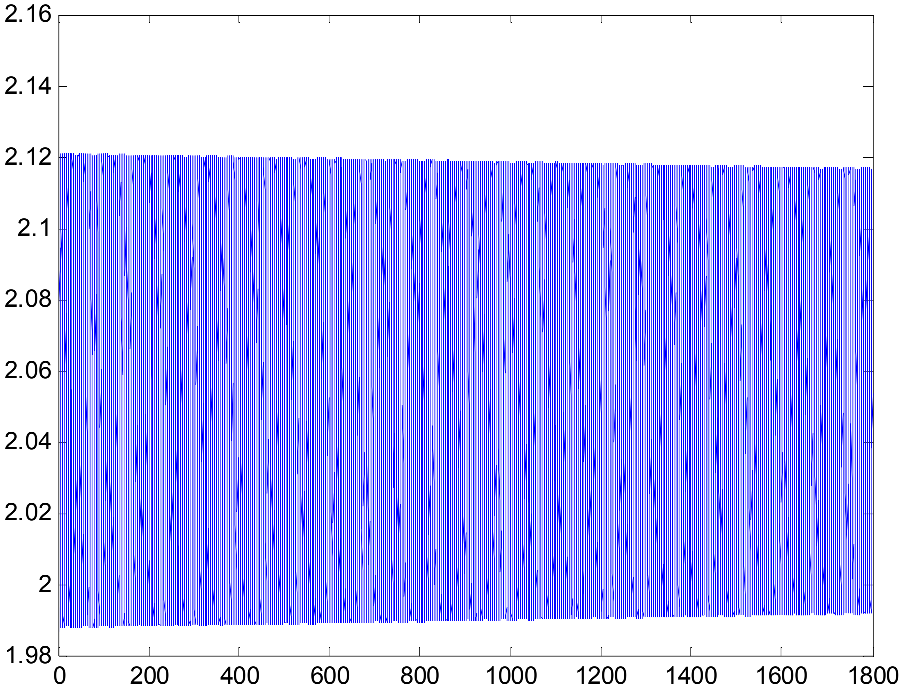


- $t = 30$ min:

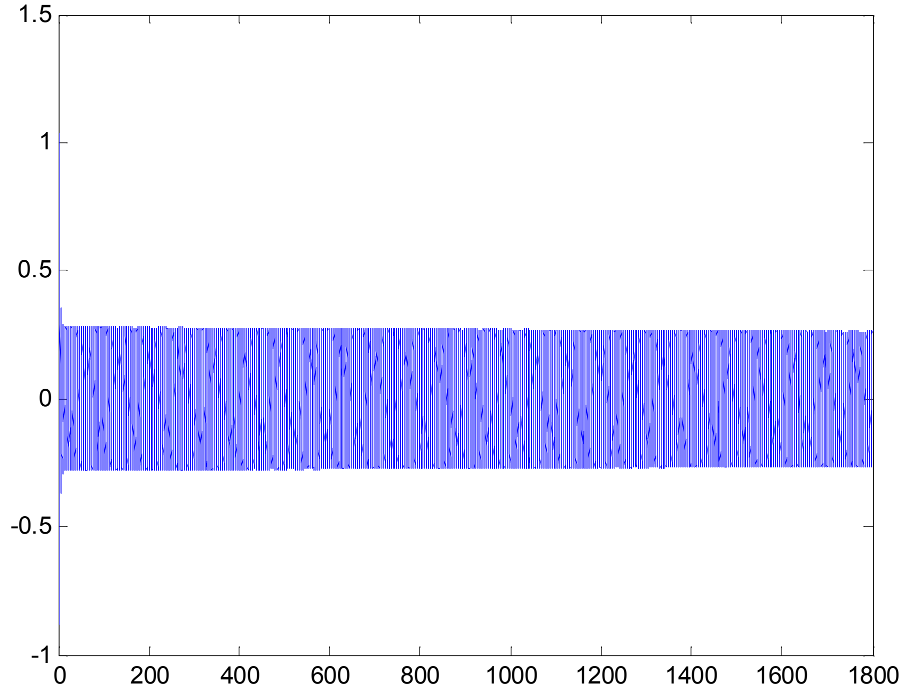
Posición de la masa 1:



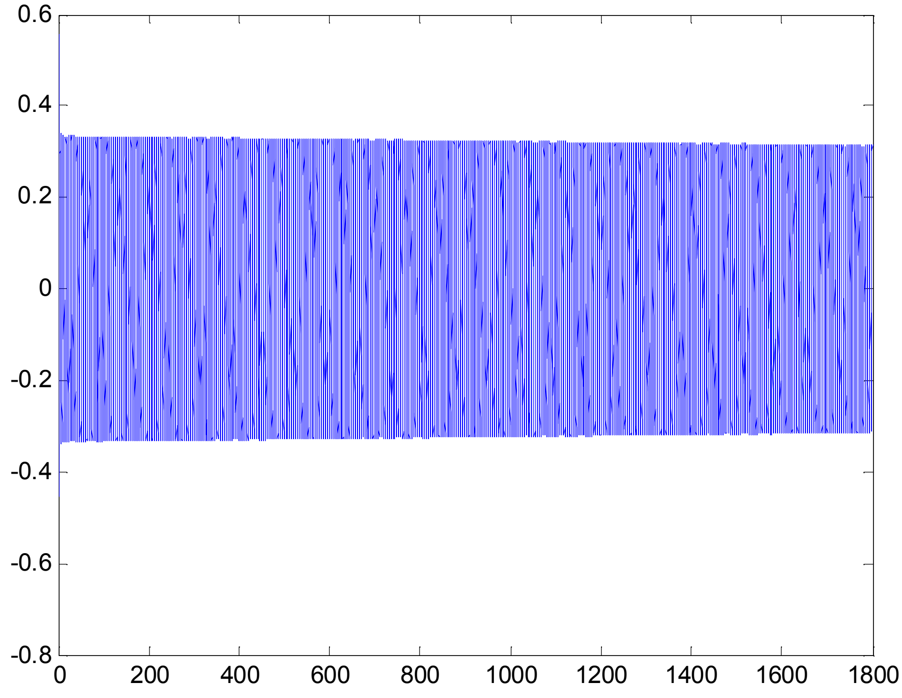
Posición de la masa 2:



Velocidad de la masa 1:



Velocidad de la masa 2:



Las gráficas para 10 min. y 30 min. se ven como si fueran áreas debido a la alta frecuencia de oscilación de sistema.
Posiciones en metros y velocidades en metros por segundo.