SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN NO LINEAL DEL PÉNDULO SIMPLE

Carlos Armando De Castro

Asesorías en Matemáticas, Física e Ingeniería

1. LA ECUACIÓN DIFERENCIAL DEL PÉNDULO SIMPLE

El péndulo simple consiste de una masa puntual sujeta por una cuerda de masa despreciable a la que se le da un ángulo y una velocidad angular inicial para dejarlo oscilar libremente [1].

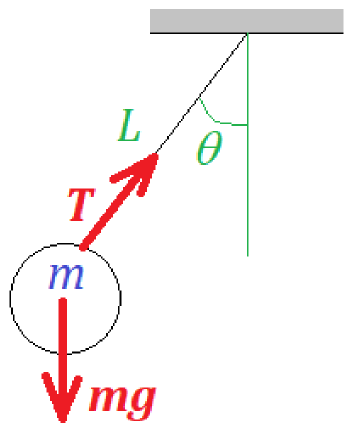


Figura 1.1. El péndulo simple, con las fuerzas que actúan sobre la masa.

De la suma de momentos alrededor del punto de apoyo de la cuerda se tiene por 2ª. Ley de Newton:

$$\sum M = I\alpha$$

Donde reemplazando el momento de inercia y recordando que la aceleración angular es la segunda derivada respecto al tiempo del ángulo:

$$-mgL\sin\theta = mL^2\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Organizando se tiene la ecuación diferencial de segundo orden que modela el péndulo simple:

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\sin\theta} \qquad (1)$$

El movimiento del péndulo simple no depende por tanto del valor de la masa colgante. Las condiciones iniciales son ángulo y velocidad iniciales dadas: $\theta(0) = \theta_0$, $\theta'(0) = \omega_0$.

2. SOLUCIÓN LINEALIZADA

Para ángulos pequeños ($\theta < 10^o$) es válida la aproximación $\sin\theta \approx \theta$ por tanto la ecuación (1) linealizada es:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta \quad (2)$$

La solución de esta ecuación es inmediata de la teoría de las ecuaciones diferenciales de segundo orden con coeficientes constantes [2], la frecuencia angular natural del sistema es:

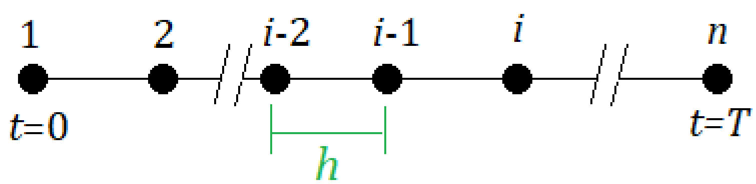
$$\omega_n = \sqrt{g/L} \quad (3)$$

Por tanto la solución linealizada es:

$$\boxed{\theta_{lineal}(t) = \theta_0\cos(\omega_n t) + \frac{\omega_0}{\omega_n}\sin(\omega_n t)} \quad (4)$$

3. SOLUCIÓN NUMÉRICA

Primero se hace una partición del dominio de la solución $t \in [0, T]$ en n puntos ("nodos") de solución y con un intervalo entre nodos h:



Donde por geometría se tiene:

$$h = \frac{T}{n-1} \quad (5)$$

En la ecuación (1) se hace la discretización de la segunda derivada de forma implícita para garantizar estabilidad de la solución numérica, entonces para el nodo *i* se tiene:

$$\frac{\theta_i - 2\theta_{i-1} + \theta_{i-2}}{h^2} = -\frac{g}{L}\sin\theta_i \quad (6)$$

Como hay n nodos la ecuación (6) es efectivamente un sistema de ecuaciones no lineal para los ángulos θ_i en cada paso de tiempo, este sistema se resuelve por iteración de punto fijo modificada [3], para la k-ésima iteración tenemos:

$$\boxed{\theta_i^k = 2\theta_{i-1}^k - \theta_{i-2}^k - \frac{gh^2}{L}\sin\left(\theta_i^{k-1}\right)} \quad (7)$$

¡Tener en cuenta que la *k* es un superíndice y no un exponente!

Se debe iniciar con una ***suposición inicial*** de la solución en todo el dominio, una suposición fácil es la solución de la ecuación linealizada. La iteración (7) se hace hasta llegar a un residual mínimo aceptable o un número máximo de iteraciones establecido. De la condición inicial se tiene para el primer nodo:

$$\theta_1 = \theta_0 \quad (8)$$

Para la condición inicial de velocidad angular derivamos alrededor del nodo 1 con una derivada de primer orden:

$$\frac{\theta_2 - \theta_1}{h} = \omega_0$$

De donde:

$$\theta_2 = \theta_1 + h\omega_0 \quad (9)$$

Los valores dados por (8) y (9) son fijos para todas las iteraciones. Para los ejemplos siguientes la solución numérica se hizo con un código en SCILAB, un software similar a MATLAB que tiene la ventaja de ser *open source* y gratis para descargar [4].

Ejemplo:

Parámetros de la simulación:

$$\theta_0 = \frac{\pi}{3} \text{ rad}, \omega_0 = 0, T = 1.42 \text{ s (igual al período de la solución linealizada).}$$

En la Fig. E1.1 se muestra la solución numérica para diferentes valores de n donde se observa que son diferentes (a pesar de haber convergencia en las iteraciones de solución del sistema no lineal), esto es debido al tamaño de paso h que entre más pequeño más se acerca a la solución real de la ecuación diferencial, para n = 1000 y n = 10000 la solución no varía apreciablemente y por tanto puede decirse que ***hay convergencia sobre la malla*** (o sobre la discretización) para n > 1000.

Una vez que se asegura convergencia sobre la malla se compara la solución numérica con la linealizada en la Fig. E1.2, donde podemos observar una diferencia apreciable que se explica con el hecho de que nuestro ángulo inicial es mayor al máximo donde la linealización entrega errores aceptables (iniciamos con 60º de ángulo).

Para un valor de T = 14.2 s se observa en la Fig. E1.3 que la amplitud de la solución numérica disminuye con el tiempo a diferencia de la solución linealizada.

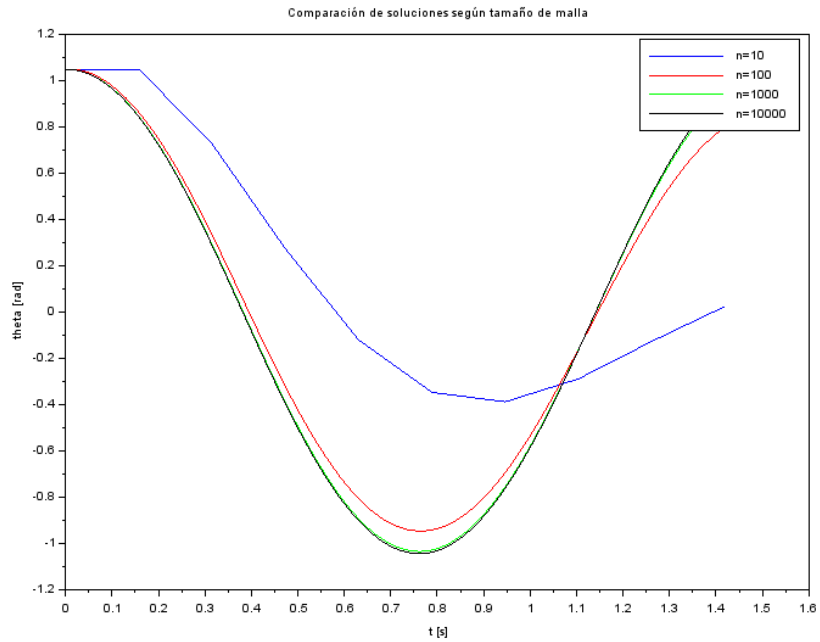


Figura E.1.1. Convergencia de la solución sobre la malla de discretización.

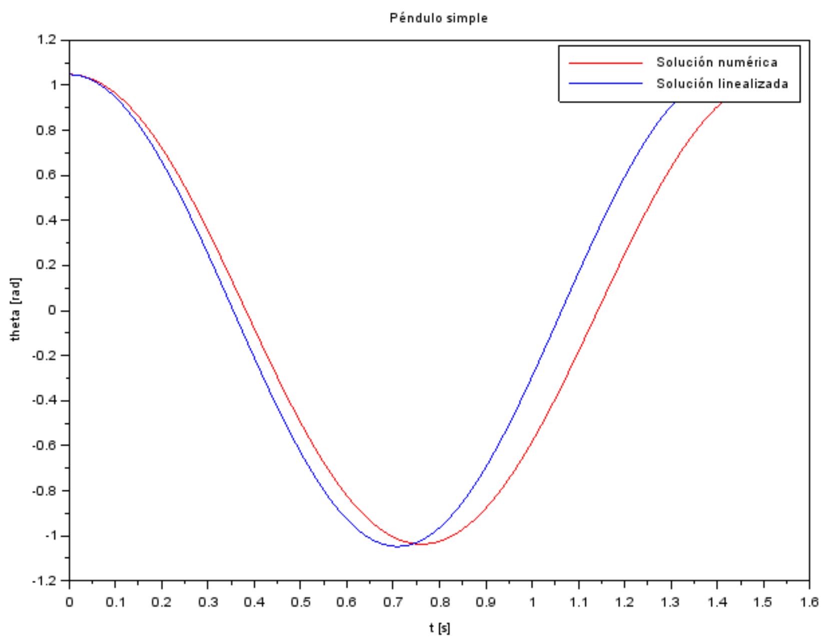


Figura E1.2. Comparación de la solución del sistema no lineal con la solución numérica.

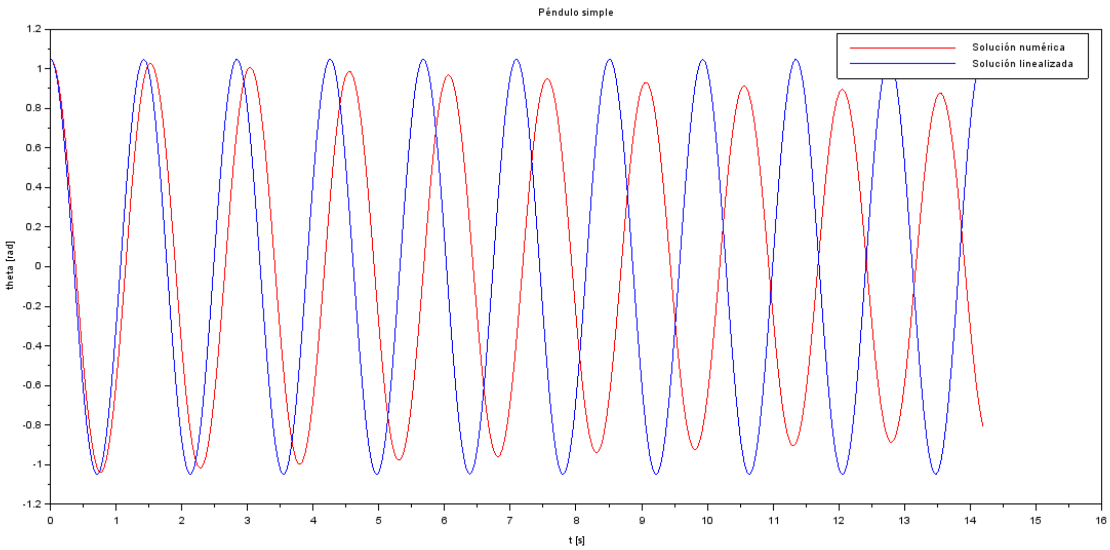


Figura E1.3. Comparación de la solución del sistema no lineal con la solución numérica para un tiempo final mayor.

BIBLIOGRAFÍA:

[1] Raymond A. Serway, John W. Jewett. ***Física para ciencias e ingeniería***. Cengage Learning.

[2] Dennis Zill. ***Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado***. Cengage Learning.

[3] Carlos Armando De Castro. ***Métodos numéricos básicos para ingeniería con aplicaciones en Matlab y Excel***. https://tutor.cadecastro.com/p/metodos-numericos-basicos-para.html

[4] Software **SCILAB**. https://www.scilab.org/

¿Desea más profundización y ejemplos prácticos?
Contáctenos para una clase personalizada.