CAÍDA LIBRE CON RESISTENCIA AERODINÁMICA

Carlos Armando De Castro

Asesorías en Matemáticas, Física e Ingeniería

1. FUERZAS QUE ACTÚAN EN UNA CAÍDA LIBRE

A diferencia del caso idealizado que se enseña en los primeros cursos de Física Mecánica en la universidad, un cuerpo en caída libre en el mundo real no tiene como aceleración la de la gravedad ya que tiene sobre él actuando además de su propio peso W a la fuerza de arrastre del aire que lo rodea, una fuerza aerodinámica D que se opone al movimiento que tiene instantáneamente [1].

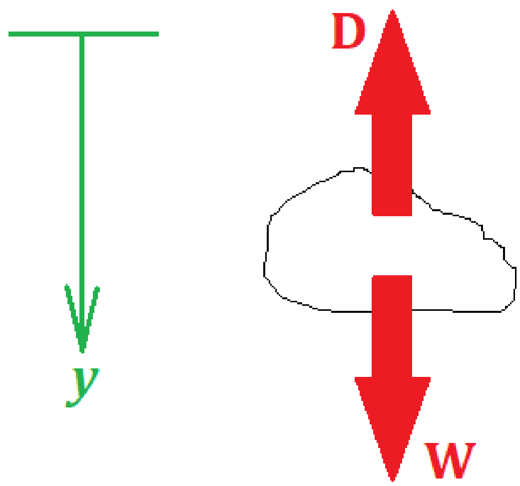


Figura 1.1. Diagrama de cuerpo libre de un objeto en caída libre.

De la segunda ley de Newton, en la dirección vertical:

$$\sum F = ma$$

Tomando positiva la fuerza en la dirección del movimiento (hacia abajo) se tiene:

$$W - D = ma \quad (1)$$

2. LA ECUACIÓN DIFERENCIAL DEL MOVIMIENTO EN CAÍDA LIBRE

El peso y el arrastre aerodinámico son respectivamente [1]:

$$W = mg$$

$$D = \frac{1}{2}\rho C_D A v^2 \quad (2)$$

Donde ρ es la densidad del aire, C_D es el coeficiente de arrastre del cuerpo y A es el área frontal del cuerpo en la dirección del movimiento; v es la velocidad instantánea del cuerpo.

Reemplazando las ecuaciones (2) en la ecuación (1) se tiene:

$$mg - \frac{1}{2}\rho C_D A v^2 = ma \quad (3)$$

De la cinemática se sabe la relación entre la aceleración y la velocidad [2] y por la regla de la cadena [3] se tiene:

$$a = \frac{dv}{dt} = \left(\frac{dv}{dy}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right)$$

Como la velocidad es la derivada de la posición [2] se tiene:

$$v = \frac{dy}{dt}$$

Entonces la aceleración es:

$$a = v\,\frac{dv}{dy} \quad (4)$$

Reemplazando la ecuación (4) en la ecuación (3) se tiene la ecuación diferencial que modela la caída libre de un cuerpo con resistencia aerodinámica:

$$mg - \frac{1}{2}\rho C_D A v^2 = mv\,\frac{dv}{dy} \quad (5)$$

Dividiendo todo entre la masa:

$$g - \left(\frac{\rho C_D A}{2m}\right)v^2 = v\,\frac{dv}{dy} \quad (6)$$

Definimos:

$$k = \frac{\rho C_D A}{2m} \quad (7)$$

Entonces la ecuación diferencial queda:

$$\boxed{g - kv^2 = v\,\frac{dv}{dy}} \qquad (8)$$

La condición inicial es que al inicio del movimiento (y=0) hay una velocidad inicial v_0, entonces $v(0) = v_0$.

3. SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL

Separando v e y en la ecuación (8) tenemos:

$$\frac{v}{g - kv^2}dv = dy$$

Integrando con las condiciones iniciales en cuenta [4]:

$$\int_{v_0}^{v} \frac{v}{g - kv^2}dv = \int_0^y dy$$

La integral del lado izquierdo se resuelve por sustitución, entonces:

$$-\frac{1}{2k}\ln\left(\frac{g - kv^2}{g - kv_0^2}\right) = y$$

Despejando v se tiene, primero dejando solo el logaritmo natural:

$$\ln\left(\frac{g - kv^2}{g - kv_0^2}\right) = -2ky$$

Sacando exponencial a ambos lados:

$$\frac{g - kv^2}{g - kv_0^2} = e^{-2ky}$$

Pasando el denominador del lado izquierdo a multiplicar:

$$g - kv^2 = (g - kv_0^2)e^{-2ky}$$

Pasando de lado la velocidad:

$$kv^2 = g - (g - kv_0^2)e^{-2ky}$$

Dividiendo entre k, simplificando y sacando raíz, tenemos la velocidad en función de la distancia que se ha caído:

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{g}{k} - \left(\frac{g}{k} - v_0^2\right)e^{-2ky}}} \qquad (9)$$

4. VELOCIDAD TERMINAL

La velocidad terminal v_t es la máxima a la que puede llegar un cuerpo en caída libre con resistencia aerodinámica, se da cuando la velocidad ya no cambia, matemáticamente es cuando:

$$\frac{dv}{dy} = 0$$

En la ecuación (8) tenemos:

$$g - kv_t^2 = 0$$

Entonces, despejando tenemos que la velocidad terminal es:

$$v_t = \sqrt{\frac{g}{k}} \qquad (10)$$

De la ecuación (7) en (10) se tiene:

$$\boxed{v_t = \sqrt{\frac{2mg}{\rho C_D A}}} \qquad (11)$$

Todas las ecuaciones mostradas se implementaron en una hoja de cálculo de Excel que calcula la evolución de la velocidad y la velocidad terminal.

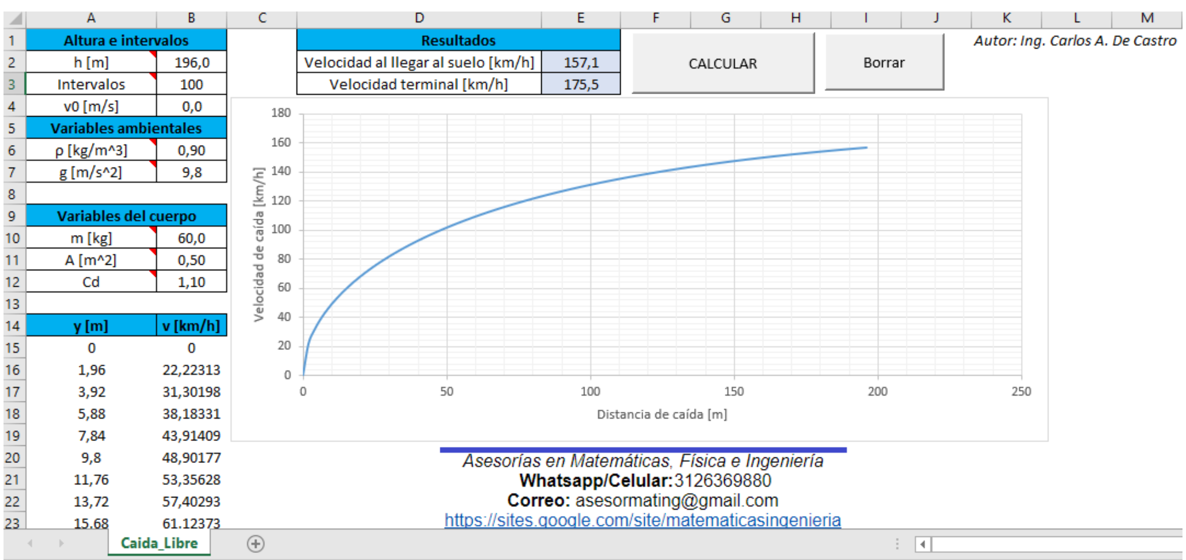


Figura 4.1. Hoja de Excel programada con las ecuaciones para el cálculo de caída libre de objetos con resistencia aerodinámica.

Ejemplo 1: ***Caída de un cuerpo humano sin paracaídas***. Los datos de entrada son los siguientes, con las ecuaciones (9) y (11) programadas en un macro de Excel:

Altura e intervalos	
h [m]	1000,0
Intervalos	100
v0 [m/s]	0,0
Variables ambientales	
ρ [kg/m^3]	1,23
g [m/s^2]	9,8

Variables del cuerpo	
m [kg]	70,0
A [m^2]	0,510
Cd	1,10

Los datos de área y coeficiente de arrastre se toman de la referencia [5]. Los resultados se muestran a continuación:

Resultados	
Velocidad al llegar al suelo [km/h]	160,8
Velocidad terminal [km/h]	160,9

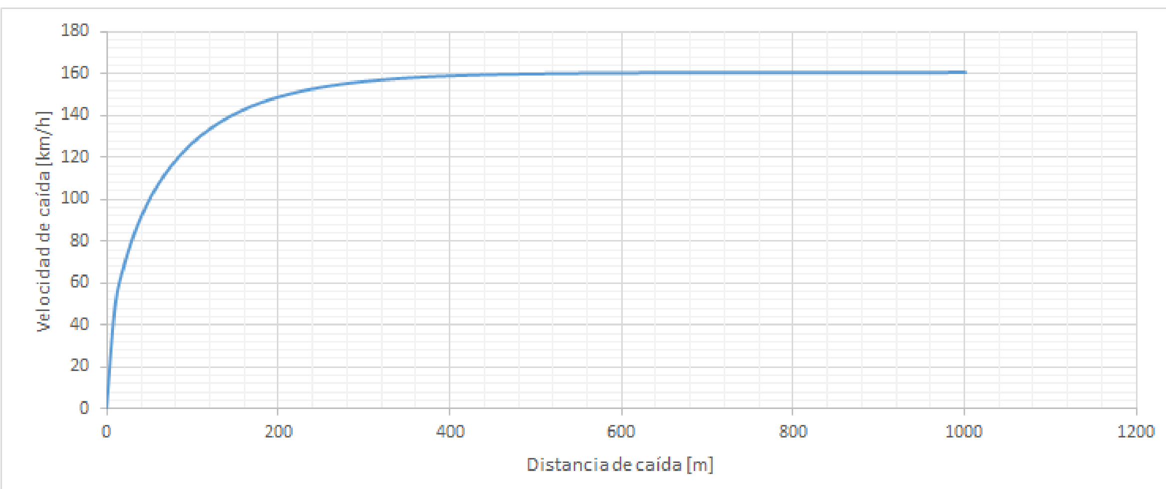


Figura E1. Velocidad de un cuerpo humano sin paracaídas a medida que cae.

Ejemplo 2: ***Caída de un cuerpo humano con paracaídas***. Los datos de entrada son los siguientes:

Altura e intervalos	
h [m]	1000,0
Intervalos	100
v0 [m/s]	0,0
Variables ambientales	
ρ [kg/m^3]	1,23
g [m/s^2]	9,8

Variables del cuerpo	
m [kg]	150,0
A [m^2]	15,00
Cd	1,40

La masa incluye 80 kg del paracaídas, los datos de área y coeficiente de arrastre del paracaídas se toman de la referencia [6]. Los resultados se muestran a continuación:

Resultados	
Velocidad al llegar al suelo [km/h]	38,5
Velocidad terminal [km/h]	38,5

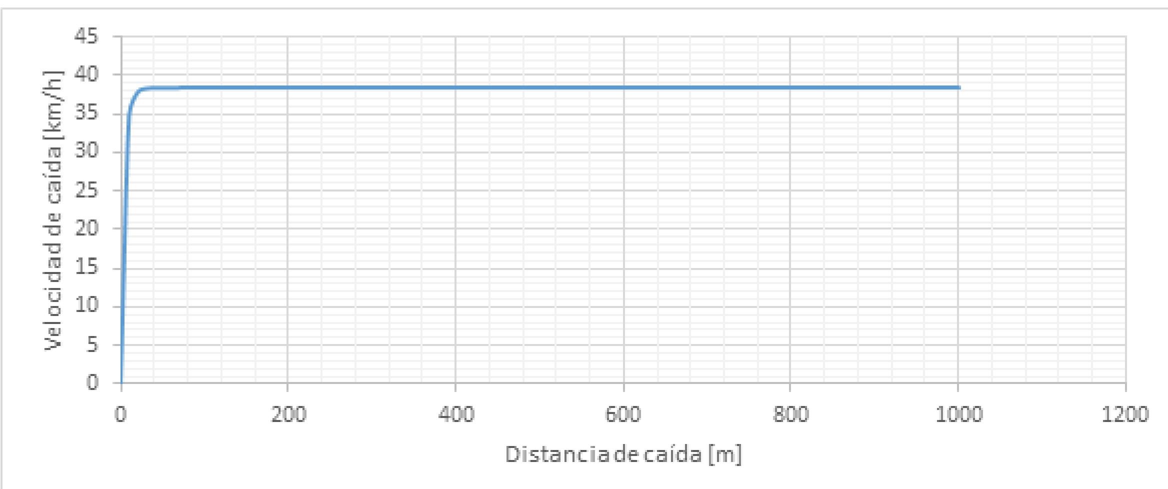


Figura E2. Velocidad de un cuerpo humano con paracaídas a medida que cae.

Se observa el efecto del paracaídas en la velocidad terminal (en éste ejemplo la reduce en un 76%).

<u>Velocidad para alturas pequeñas</u>:

Cuando la altura de caída h es muy pequeña y la velocidad inicial es cero podemos usar la aproximación de la serie de McLaurin para la función exponencial [7] truncada en el segundo término, entonces:

$$e^x \approx 1 + x$$

Entonces:

$$e^{-2kh} \approx 1 + (-2kh) = 1 - 2kh \quad (12)$$

Reemplazando (12) en (9):

$$v = \sqrt{\frac{g}{k} - \left(\frac{g}{k}\right)(1 - 2kh)} = \sqrt{\frac{g}{k} - \frac{g}{k} + \frac{g}{k}(2kh)}$$

Entonces:

$$v = \sqrt{2gh} \quad (13)$$

Que es la ecuación de velocidad en caída libre sin resistencia del aire como se enseña en Física Mecánica.

BIBLIOGRAFÍA:

[1] Carlos Armando De Castro. ***Dinámica básica de aviones para ingenieros***. https://sites.google.com/site/matematicasingenieria/dinamica-basica-de-aviones-para-ingenieros

[2] Andrew Pytel, Jaan Kiusalaas. ***Ingeniería mecánica: Dinámica***. International Thomson Editores. 1999.

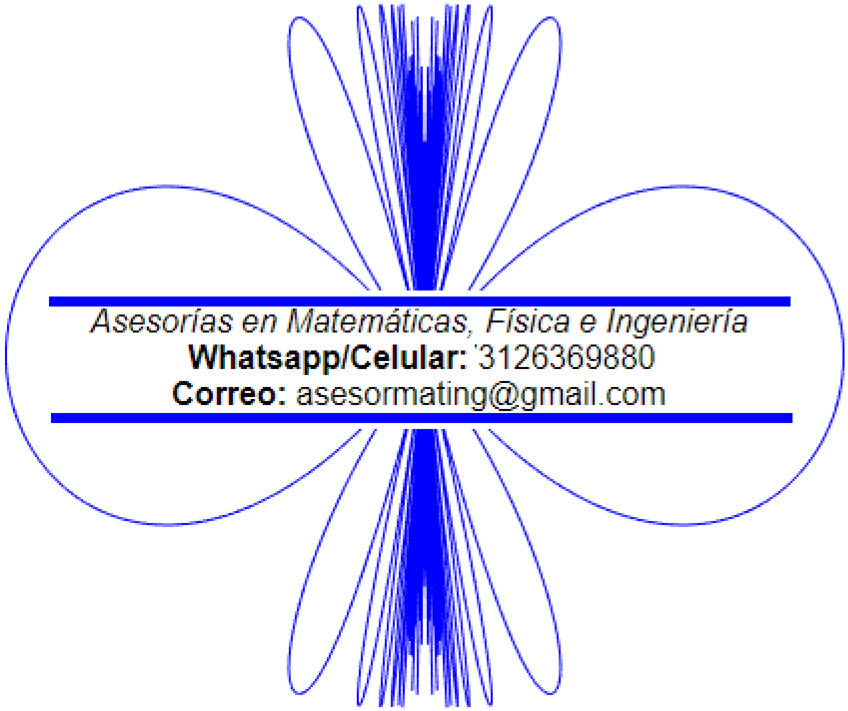
[3] Tom M. Apostol. ***Calculus, Vol. 1***. Editorial Reverté. 1988.

[4] Carlos Armando De Castro. ***Ecuaciones diferenciales separables***. https://sites.google.com/site/matematicasingenieria/318226662-Ecuaciones-Diferenciales-Separables.pdf?attredirects=0

[5] https://www.cse.iitk.ac.in/users/amit/books/whitt-1982-bicycling-science.html

[6] ***Drag coefficients of different objects.*** https://www.researchgate.net/publication/273771608_ONLINE_WIND_TUNNEL_LABORATORY/figures?lo=1

[7] Carlos Armando De Castro. ***Sucesiones y series***. https://sites.google.com/site/matematicasingenieria/Sucesiones_y_Series.pdf?attredirects=0



¿Desea más profundización y ejemplos prácticos?
Contáctenos para una clase personalizada.