Comentarios al análisis del problema del caminante bajo la lluvia

Carlos Armando De Castro Payares
cadecastro@gmail.com

En el presente escrito haré algunos comentarios adicionales a los dos artículos que he escrito sobre el modelado matemático de la cantidad de agua absorbida por la ropa de un caminante bajo la lluvia. Ya he mostrado con ecuaciones matemáticas que si una persona desea mojarse lo menos posible si lo sorprende la lluvia o debe recorrer cierta distancia bajo ella lo mejor que puede hacer en caso de no disponer de un buen paraguas es correr lo más rápido que pueda, lo cual de por sí es un instinto arraigado en el cerebro humano por lo que se ve que el modelo matemático desarrollado es consistente con lo que nos indica la naturaleza. Puede que haya habido algunos pasos en la deducción de las ecuaciones que no sean del agrado de algunos lectores apegados al formalismo matemático que enseñan en muchas universidades y que luego no pueden sacarse de la cabeza, puesto que me he salido un poco del procedimiento formal para poner algunas cosas "con la mano", aunque ello no es de ninguna manera alejado de lo que se ha hecho y se hace en muchos de los círculos de los científicos teóricos: el mismo Einstein introdujo en sus ecuaciones de la Relatividad General la constante cosmológica para que la ecuación mostrara el Universo como él lo veía; si bien él mismo diría luego que la constante cosmológica había sido su "*mayor error*", resulta que hoy en día la constante cosmológica sí se tiene en cuenta en los cálculos de los físicos teóricos, y hasta está siendo considerada como una constante fundamental, al igual que la constante de gravitación de Newton. Éste ejemplo no es porque yo piense compararme con Einstein (ni mucho menos) sino para mostrar que lo que he hecho no es algo que esté prohibido desde el punto de vista de la lógica formal y hasta lleva en varias ocasiones a resultados que permiten describir acertadamente nuestra relación con el mundo exterior.

En este escrito añadiré algunas cosas sobre las ecuaciones del segundo artículo, así como comentaré algo sobre el significado de las éstas. Mostraré en la medida de lo posible las cosas en un lenguaje común sin (muchas) herramientas matemáticas; así mostraré el significado de las variables, las ecuaciones halladas y los números adimensionales propuestos para describir el problema; esto es para lograr que entiendan los resultados del trabajo las personas que no manejan las matemáticas en el mismo nivel que las manejo yo o cualquier estudiante de ciencias e ingeniería (o al menos al nivel que se espera que las manejen). Mostraré además los argumentos lógicos que apoyan las conclusiones de los artículos escritos anteriormente, además de tratar de rebatir algunos argumentos de las personas que proclaman que para mojarse menos lo mejor es caminar bajo la lluvia.

Empezaré por decir algo sobre el Teorema de Vaschy-Buckingham, más conocido por *Teorema* Π y en el cual baso mis análisis sobre el problema del caminante bajo la lluvia. Éste es una herramienta matemática útil para simplificar el análisis de problemas físicos que involucran muchas variables, ya que permite reducir el problema a una cantidad menor de variables, además, es utilísimo para los experimentos, puesto que al reducir la cantidad de variables a tener en cuenta se reduce en un gran número la cantidad de experimentos a realizar, así como al garantizar semejanza entre un modelo a escala y el objeto real de estudio se pueden realizar los experimentos con modelos reducidos, como se hace con los edificios y los aviones en los túneles de viento. El Teorema Π indica un procedimiento para agrupar las distintas variables en ciertas cantidades sin dimensiones llamadas *números* (o grupos) *adimensionales*, de los cuales dice la cantidad de ellos necesaria para describir completamente el problema, aunque no dice cuáles deben ser los números, que quedan a discreción del investigador.

El primer artículo que escribí sobre el tema (referencia 1) lo titulé en parte *¿es mejor caminar o correr bajo la lluvia?* Comenzaré diciendo que en estos momentos me arrepiento de haberle puesto tal título, puesto que al decir que es "mejor" correr que caminar bajo la lluvia me refiero exclusivamente a las personas que no desean mojarse, sin tener en cuenta las diferentes personas que aman andar bajo la lluvia, casos particulares en los cuales es mucho mejor caminar bajo la lluvia para disfrutar de la sensación refrescante de las gotas recorriendo el cuerpo atraídas hacia el centro de la Tierra por la acción de la gravedad.

En el artículo mencionado se tenían en cuenta las siguientes variables (las escribo con la notación y el significado tal y como eran dados en el artículo):

Variable	**Significado**
m_w	Masa de agua absorbida por la ropa del caminante
$\dot{m}_r$	Masa de agua que cae por unidad de tiempo y de área
L	Distancia a recorrer bajo la lluvia
V_∞	Magnitud de la velocidad del viento
V_p	Magnitud de la velocidad de la persona

Tabla 1.

Las variables fueron escogidas pensando en las posibles experimentaciones que se hagan para validar el modelo, puesto que todas ellas son fácilmente mesurables, así como se determinó que la mejor forma de medir el "mojado" era por medio de la masa de agua absorbida por la ropa, tal y como ya lo habían propuesto los *Mythbusters.*

Hago notar aquí algunas cosas que en el momento de escribir aquel artículo se me pasaron por alto: no se tenía en cuenta el área de la ropa del caminante, la magnitud de la velocidad del viento era la que se tenía en cuenta en vez de la de las gotas de agua y no se hacían especificaciones sobre la dirección de ésta.

Aplicando el Teorema Π se hallaba que eran necesarios dos números adimensionales para describir el problema y se proponían los siguientes:

Número de mojado	$\frac{m_w V_p}{\dot{m}_r L^3}$
Razón de velocidades	$\frac{V_\infty}{V_p}$

Tabla 2.

Tales números fueron propuestos sin un procedimiento formal que los demostrara, de hecho, lo que hice fue tantear hasta hallar los números que necesitaba, teniendo en cuenta que la correlación que iba a proponer luego tenía que ser acorde con la experiencia. Como no se tuvo en cuenta el área de la ropa del caminante, el número de mojado en éste caso no tiene un significado físico muy claro y es por eso que se escribió un segundo trabajo luego de ese. La razón de velocidades es simplemente una comparación entre la velocidad de la persona y la velocidad del viento.

Como es el procedimiento establecido por el Teorema Π, el número adimensional que contiene la variable que nos interesaba (en este caso, el número de mojado) se pone como una función del otro número adimensional, es decir, se asume que depende de alguna manera de éste y esta dependencia debería ser hallada experimentalmente. Sin embargo, y tal como lo establezco en el artículo, toda correlación entre dos variables puede ser aproximada por medio de un polinomio*, en el caso que nos interesa sería de la siguiente manera:

$$\boxed{\frac{m_w V_p}{\dot{m}_r L^3} = \sum_{k=0}^{n} a_k \left(\frac{V_\infty}{V_p} \right)^k}$$

Ecuación 1.

En el artículo tal relación se aproxima como lineal y de ahí surgen las concordancias entre el modelo y la experiencia, tales como que si se está quieto bajo la lluvia se mojará mucho, que si se recorre mucha distancia bajo la lluvia también se mojará mucho, así como la conclusión de que es mejor correr bajo la lluvia para mojarse menos. Sin embargo, las concordancias entre el modelo y la experiencia, así como las predicciones y la conclusión siguen siendo las mismas si se tienen en cuenta todos los términos de la sumatoria mayores que los de primer grado. Cualquier lector que tenga los conocimientos necesarios en matemáticas y esté interesado en comprobarlo puede observar que al despejar de la Ecuación 1 la masa de agua en términos de las demás variables y considerar los mismos límites que se consideran en el artículo obtendrá los mismos valores para la cantidad de agua absorbida, y por lo tanto las mismas conclusiones del artículo en la aproximación lineal, no lo haré aquí puesto que no es el propósito de este escrito, así como no quiero llenarlo de símbolos matemáticos que

* Burden, Richard. *Análisis Numérico,* Capítulo 8. Segunda Edición. Grupo Editorial Iberoamérica.

terminarían confundiendo a los profanos en la materia.

Vamos ahora al segundo artículo (referencia 2), el cual es mucho más completo y por lo tanto interesante.

En el artículo mencionado se tenían en cuenta las siguientes variables (las escribo con la notación y el significado tal y como eran dados en el artículo):

Variable	Significado
m_w	Masa de agua absorbida por la ropa del caminante
$\dot{m}_{rA}$	Masa de agua que cae por unidad de tiempo y de área
D	Distancia a recorrer bajo la lluvia
V_r	Magnitud de la velocidad horizontal del viento (aleatoria)
V_p	Magnitud de la velocidad de la persona (horizontal)
A	Área superficial de la ropa del caminante

Tabla 3.

Puede verse que el artículo estaba más completo, ya que tenía en cuenta el área de la ropa, así como se especifica que se tiene en cuenta sólo la velocidad horizontal de las gotas de lluvia, las cuales no se considera que vayan en una dirección preferencial sino que ésta varía ocasionalmente, lo cual puede pasar en un día de lluvia con viento.

Aplicando el Teorema Π se hallaba que eran necesarios tres números adimensionales para describir completamente el problema. Luego de realizar los procedimientos matemáticos formales se hallaban los siguientes números adimensionales:

$$\Pi_1 = \frac{m_w V_p}{\dot{m}_{rA} A^{3/2}}; \quad \Pi_2 = \frac{V_r}{V_p}; \quad \Pi_3 = \frac{D}{\sqrt{A}}$$

El número Π_1 es el equivalente al número de mojado del primer artículo, el número Π_2 es la razón de velocidades del primer artículo, el número Π_3 es una *razón de medidas.* Sin embargo, y como se establece claramente en el artículo, el número Π_1 así definido no tiene un significado físico claro, por lo cual se redefine "a mano" como

$$\Pi_1 = \frac{m_w V_p}{\dot{m}_{rA} A D}$$

Y se le da el nombre de *número de mojado*, el cual es el equivalente al número de mojado del primer artículo pero más completo al considerar el área de la ropa.

Podemos considerar los números adimensionales hallados como adimensionalizaciones de las variables que dependen del caminante con respecto a las variables que no puede modificar. Las variables que pueden ser modificadas por el caminante son su velocidad y la distancia a recorrer (puesto que el caminante puede recortar la distancia al tomar atajos o decidir resguardarse antes de llegar a su meta), mientras que las variables que no puede modificar son la velocidad de la lluvia y el área de su ropa, así como la cantidad de agua que cae.

Veamos entonces la adimensionalización: si se toma el inverso de Π_2, es decir, se toma el número $1/\Pi_2 = V_p/V_r$, entonces podemos considerarlo como la *velocidad adimensional* del caminante, es decir, la velocidad del caminante comparada con respecto a la velocidad de las gotas de lluvia del medio. Igualmente, el número Π_3 es la *distancia a recorrer adimensionalizada* con respecto al área de la ropa del caminante, de la cual se considera la raíz cuadrada para garantizar adimensionalidad. Ahora pasemos al número de mojado: si se mueve V_p al denominador tenemos

$$\Pi_1 = \frac{m_w}{\dot{m}_{rA} A(D/V_p)}$$

Y D/V_p es el tiempo que dura el caminante bajo la lluvia. Como en el denominador tenemos el producto de la masa de agua que cae por unidad de tiempo y área, el área superficial de la ropa y el tiempo que se pasa bajo la lluvia, vemos que el denominador representa la masa de agua total que cae durante todo el recorrido del caminante. Por lo anterior, vemos que el número de mojado representa la fracción del total de agua que cae absorbida por la ropa del caminante.

Vamos ahora al desarrollo teórico de la ecuación propuesta en el artículo. La ecuación es

$$\boxed{\frac{m_w V_p}{\dot{m}_{rA} AD} = a + b\frac{V_r D}{V_p\sqrt{A}}}$$

Ecuación 2.

Ya tenemos claro qué es lo que representa el número de mojado. Veamos qué quiere decir el segundo término del lado derecho de la ecuación 2. Reagrupando las variables tenemos:

$$\frac{(D/\sqrt{A})}{(V_p/V_r)} = \frac{DISTANCIA\ ADIMENSIONAL}{VELOCIDAD\ ADIMENSIONAL}$$

Lo que viene a resultar siendo un *tiempo adimensional* de estancia bajo la lluvia. Observemos ahora la ecuación luego de despejar la masa de agua:

$$\boxed{m_w = \dot{m}_{rA}\left(a\frac{AD}{V_p} + b\frac{V_r D^2\sqrt{A}}{V_p{}^2}\right)}$$

Ecuación 3.

Si consideramos que no hay velocidad horizontal de las gotas de lluvia tenemos entonces que la masa de agua absorbida es

$$\boxed{m_w = a\frac{\dot{m}_{rA} AD}{V_p}}$$

Ecuación 4.

De la ecuación 4 vemos que la masa de agua absorbida es igual al producto de una constante por la masa total de agua que cae. La constante a representa un factor de forma que dice qué fracción del agua que cae efectivamente moja sin tener en cuenta la velocidad de la lluvia; como no puede absorberse más masa de agua que la que cae, así como es claro que por lo menos algo de aquella agua mojará la ropa, tenemos que la constante *a* está acotada entre los siguientes valores:

$$\boxed{0 < a < 1}$$

Acotemos ahora la constante *b*. Como la masa de agua absorbida no puede ser negativa ya que ello no tendría sentido, y además debe ser estrictamente mayor que cero, entonces de la ecuación 3 vemos que debe cumplirse la siguiente condición:

$$a + b\frac{V_r D}{V_p\sqrt{A}} > 0 \quad \Rightarrow \quad b > -a\frac{V_p\sqrt{A}}{V_r D}$$

En los casos extremos en los que *a=0* y *a=1* tenemos respectivamente que

$$b > 0 \quad \wedge \quad b > -\frac{V_p\sqrt{A}}{V_r D}$$

Al ser una intersección de intervalos tenemos que la constante *b* se acota únicamente así:

$$\boxed{b > 0}$$

Demostrado está formalmente que la afirmación hecha en el artículo de que las dos constantes eran mayores que cero era acertada, por lo cual las conclusiones que afirmaban que no había manera de evitar mojarse bajo la lluvia y que entre más rápido se anduviera bajo ésta la persona se mojaría menos son correctas.

Algo interesante que ver es que la ecuación del mojado fue propuesta sin ninguna demostración formal, simplemente se asumió una relación que ha mostrado ser ajustada con la experiencia de la vida diaria y con el instinto tanto de personas como de animales, al decir teóricamente que es mejor correr si no desea mojarse mucho, lo que hacen las personas y los animales cuando se larga a llover.

Con respecto a esto último, veamos por qué las personas que afirman, contra su propio instinto, que es mejor caminar para mojarse menos están erradas:

Dicen tales personajes que al correr uno se "lleva por delante" las gotas de lluvia que se encuentran al frente y que caminando no lo harían. Sin embargo, no tienen en cuenta que al correr se dura mucho menos tiempo bajo la lluvia que al caminar y en últimas esto es lo que importa, es decir, tiene un mayor efecto en la cantidad de agua absorbida el tiempo que se pase bajo la lluvia que las gotas que uno pueda llevarse por delante ya que se disminuye la masa de agua que cae sobre uno, además, si bien al correr el caminante se lleva por delante algunas gotas, al mismo tiempo evita que otras que le iban a caer encima lo hagan. Se muestra siempre el experimento de los *Mythbusters* en ambiente controlado en el cual se mostraba que al correr se mojaba más la persona, sin embargo, los mismos *Mythbusters* repitieron el experimento bajo lluvia real y concluyeron que al correr se moja menos bajo la lluvia. Otra cosa que no convence es que quienes afirman que es mejor caminar para mojarse menos no muestran ningún modelo matemático que confirme lo que dicen, todo lo que afirman es basado en especulaciones que además van en contra de la reacción natural de correr, cosa que seguro hacen cuando los sorprende un aguacero.

Por mi parte, seguiré corriendo bajo la lluvia hasta que me compre un paraguas.

Referencias:

1. De Castro, Carlos Armando. *Análisis dimensional: ¿es mejor caminar o correr bajo la lluvia?* Publicado en http://matematicas.ingenieria.googlepages.com/lluvia2.pdf
2. De Castro, Carlos Armando. *Análisis del problema del caminante bajo la lluvia: modelado matemático utilizando números adimensionales.* Publicado en http://matematicas.ingenieria.googlepages.com/lluvia3.pdf