Centre National de la Recherche Scientifique

Laboratoire de Physique Théorique et Modèles Statistiques

Rapport de Stage 2019

Auteur :
Cadmos Kahalé-Abdou

Superviseur :
M. Leonardo Mazza

Un rapport soumis pour le diplôme de

Double Licence Mathématiques et Physique de l'Université Paris-Sud

1er février 2021

Résumé

Lorsqu'une particule est soumise à un champ magnétique, les effets quantiques sont nombreux. En se restreignant uniquement à un champ magnétique constant, en utilisant différentes jauges, et en faisant des analogies avec l'oscillateur harmonique quantique, les différentes énergies propres et états propres du système seront retrouvés et discutés. Les valeurs propres de l'Hamiltonien lié à ce systèmes sont les Niveaux de Landau, en référence à Lev Lavidovitch Landau (prix Nobel 1962). Les particules préparées dans l'état du Niveau de Landau le plus bas (LLL pour Lowest Landau Level) seront étudiées et les résultats discutés. Ensuite, différentes configurations du problème seront étudiées, en confinant les particules dans un domaine défini.

Remerciements

Merci à M. Mazza de m'avoir suivi avec bienveillance et minutie, à M. Hello pour avoir orienté mon projet ainsi qu'à Mme. Le Vaou qui à fait en sorte que ce stage se déroule dans les meilleurs conditions possibles.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

L'objectif de ce projet est d'étudier la physique derrière un système quantique, qui sera dans notre cas un gaz ferminonique, à deux dimensions soumis à un champ magnétique perpendiculaire externe lorsqu'un potentiel de confinement y est appliqué. Pour se faire l'étude se portera d'abord sur le système lorsqu'il n'est soumis qu'au champ magnétique, puis différentes potentiels de confinement seront influée au système. Les différents comportements des niveaux d'énergies et des états seront étudiés et discutés. Ensuite, différentes configurations du système seront étudiées dans l'objectif d'obtenir un profil de densité lié à la probabilité de présence de la particule dans un domaine, et déterminer si tous les niveaux d'énergies sont accessibles et accédés.

1.1 Enjeux du Projet

Ce projet consistait dans un premier temps de reprendre une partie du programme de Mécanique Quantique de la troisième année de licence à l'Université Paris-Sud, et utiliser ces connaissances pour comprendre le cours de J. Dalibard sur les "Champs magnétiques uniformes et niveaux de Landau". Il a fallut donc comprendre Le mouvement cyclotron classique, ensuite expliciter le spectre d'énergie en utilisant des outils mathématiques algébriques et la notion de jauge, qui a été explicitée par le cours de Barton Zwiebach sur la plateforme MIT Open Courseware. Ces informations n'étant majoritairement pas en rapport avec le projet, elles ne figureront pas dans ce rapport, mais il reste intéressant de noter que ce support vidéo à contribué à ma compréhension personnelle du sujet [1]. Ensuite, il s'agissaient d'utiliser ces connaissances fraichement acquises pour vérifier certains calculs déjà effectués par J.Dalibard, puis répondre à certaines questions en rapport avec le sujet de recherche de M. Mazza, notamment en appliquant différents potentiels au système et en étudiant son évolution par le calcul.

1.2 Contributions

La contribution apportée était avant tout de l'ordre du calcul. Plusieurs équations on été vérifiées, des constantes explicitées et des phénomènes physiques reprécisés. Dans un premier temps, pour comprendre le mouvement cyclotron de la particule et son rapport avec les niveaux de Landau, il a fallu reprendre l'examen de Mécanique Quantique de Janvier 2019 du Magistère de Physique de l'Université Paris-Sud, qui portait partiellement sur le sujet. Il a ensuite fallut écrire la solution de celui-ci en utilisant le langage

LateX que je n'avais jamais utilisé auparavant. Cela à donc été une initiaion, pour moi, à l'utilisation de ce langage. Non seulement résoudre ce sujet m'a permis, mis en perspective avec les nouvelles connaissances acquises avec le cours de J.Dalibard, d'assoir une base solide pour la suite de mon projet, mais aussi de fournir une version informatisée de la solution de l'examen en question. Ensuite mon travail consistait à expliciter certains calculs que J.Dalibard omettais dans son cours par soucis de cohérence. En effet, certains calculs repris au sein de mon projet n'étaient pas particulièrement utiles à la compréhension générale et académique du problème mais s'avéraient très utiles appliqués aux contraintes qui faisaient la spécificiter de ce stage. Finalement, il a fallut utiliser mes connaissances en programmation scientifique, notamment ma connaissnace du langage de programmation python, pour expliciter graphiquement certains résultats liés au cours de J.Dalibard et du projet.

Chapitre 2

Niveaux de Landau

Ce chapitre sera dédiée à la description du mouvement de la particule lorsqu'elle est soummise à un champ magnétique uniforme dirigé selon l'axe vertical Oz, $\vec{B} = B\vec{u_z}$.

2.1 Oscillateur Harmonique à deux dimensions

La section suivante a pour seule référence le texte de Jean Dalibard[2] qui traite exactement de ce sujet.

On considère une particule de masse m astreinte à se déplacer dans le plan Oxy et soumise à un potentiel d'oscillateur harmonique isotrope $H_0 = H_x + H_y$ avec :

$$H_x = \frac{\hat{p_x}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2, \quad H_y = \frac{\hat{p_y}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{y}^2 \tag{2.1}$$

On note $|n_x\rangle$ les vecteurs propres de H_x associés aux énergies $E_{n_x} = (n_x + \frac{1}{2})\hbar\omega$ et $|n_y\rangle$ les vecteurs propres de H_y associés aux énergies $E_{n_y} = (n_y + \frac{1}{2})\hbar\omega$, n_x et n_y des entiers naturels.

On montre que les vecteurs $|n_x\rangle\,|n_y\rangle$ sont vecteurs propres de H_0 et que les énergies associées sont de la forme $E_n = (n+1)\hbar\omega$:

$$H_0\,|n_x\rangle\,|n_y\rangle = (E_{n_x} + E_{n_y})|n_x\rangle|n_y\rangle \tag{2.2}$$

On retrouve donc E_n :

$$E_n = E_{n_x} + E_{n_y} = (n+1)\hbar\omega \tag{2.3}$$

avec $n = n_x + n_y$

On trouve alors que l'énergie du fondamental est $E_0 = \hbar\omega$, et le vecteur propre associé est le vecteur $|0,0\rangle$. Notons la dégénérescence de degré n, g_n. L'état fondamental n'est donc pas dégénéré. Mais notons que $g_n = (n+1)$.

2.2 Particule quantique soumise à un champ magnétique en jauge symétrique

Reprenons le problème de la particule soumise au champ magnétique L'Hamiltonien de la particule de charge q en présence du champ magnétique s'écrit :

$$\hat{H} = \frac{(\hat{\vec{p}} + q\vec{A}(\hat{\vec{r}}))^2}{2m} \tag{2.4}$$

On prendra dans ce paragraphe la jauge symétrique suivante [1] :

$$A_x(r) = -B_y/2, \quad A_y(r) = B_x/2, \quad A_z(r) = 0 \tag{2.5}$$

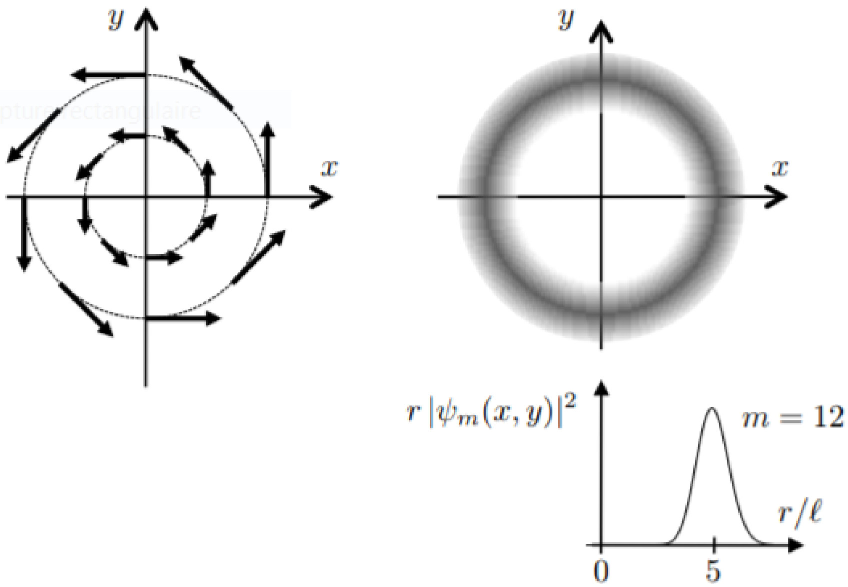

FIGURE 2.1 – Gauche : représentation du potentiel vecteur en jauge symétrique. Droite : densité de probabilité pour une fonction propre de l'hamiltonien en jauge symétrique appartenant au premier niveau d'énergie. La densité de probabilité $r|\psi_m(x,y)|^2$ est maximale pour $r_m = \sqrt{2m+1}l$; la densité de probabilité est tracée pour $m = 12$ [2]

Notons que ce choix de jauge brise l'invariance par translation du problème, mais respecte l'invariance par rotation autour du centre.

On va maintenant chercher les valeurs propres de cet Hamiltonien, et expliciter le mouvement de la particule dans le plan Oxy.

En développant l'Hamiltonien on peut l'écrire sous la forme $H = H_{xy} + H_z$, avec

$$\hat{H}_z = \frac{\vec{p}_z^{\,2}}{2m}, \hat{H_{xy}} = \hat{H}_0 + \omega\hat{L_z} \tag{2.6}$$

où $\hat{L_z} = \hat{x}\hat{p_y} - \hat{p_x}\hat{y}$ est la composante sur l'axe Oz du moment cinétique et la pulsation $\omega = \frac{qB}{2m}$ qui est elle même la moitié de la pulsation cyclotron de la particule $\omega_c = \frac{qB}{m}$, et $\hat{H}_0$ l'Hamiltonien associé à l'oscillateur quantique isotrope en deux dimensions de pulsation ω.

Le mouvement dans le plan Oxy et sur l'axe Oz sont séparés, en effet H_{xy} et H_z sont indépendants, donc ils commutent. H_z agit sur un mouvement selon l'axe Oz, cela décrit une particule libre. Nous ferons donc le choix de négliger H_z dans l'étude à partir de maintenant.

On commence donc par étudier le mouvement de la particule dans le plan Oxy, donc celui qui est décrit par l'Hamiltonien H_{xy}. Cela revient donc à dire que l'on étudie une particule confinée dans une structure plane et soumise à un champ magnétique perpendiculaire à ce plan.

2.2.1 Les états propres en jauge symétrique

Les opérateurs $\hat{H}_0$ et $\hat{L_z}$ commutent, ils ont donc une base de vecteurs propres communs. Ils fournissent alors une base de vecteur propre pour H_{xy}.

Nous noterons $|n, m\rangle$ les vecteurs propres de H_0 et $\hat{L_z}$ associés aux valeurs propres $(n+1)\hbar\omega$ et $m\hbar$ respectivement.

Les valeurs propres de H_{xy} sont donc $E_{nm} = (n+m+1)\hbar\omega$.

On s'attend donc à trouver des niveaux d'énergie, régulièrement espacés de la quantité ω_c, qui sont appelés niveaux de Landau. Pour rechercher la forme des états propres, il faut choisir une jauge pour exprimer le potentiel vecteur, ce que nous ferons dans la suite. Nous rappelons que le choix de la jauge laisse invariant le spectre associé à l'opérateur en question. Notons d'ores et déjà que puisque nous étudions ici un problème bi-dimensionnel et qu'on trouve que les énergies sont repérées par un seul nombre quantique n, on peut s'attendre à ce que les niveaux d'énergies soient dégénérés. Nous verrons que c'est effectivement le cas, la dégénérescence étant en fait macroscopique pour chaque niveau E_n : le nombre d'états propres croit proportionnellement à la surface accessible à la particule dans le plan xy.

On note ϵ_n le sous espace propre engendré par les états propres de H_0 correspondant à la même valeur propre E_n. $\hat{H}_0$ et $\hat{L_z}$ commutant, on peut décomposer la recherche d'une base de vecteurs propres communs à $\hat{H}_0$ et $\hat{L_z}$ en une recherche réduite à chaque sous-espace ϵ_n. La base de vecteurs propres communs finale sera obtenue comme la réunion des vecteurs propres communs de chacun des ϵ_n.

On introduit d'abord l'opérateur hermitien *quantité de mouvements* :

$$\hat{\Pi}_j = \hat{p}_j - qA_j(\hat{\mathbf{r}}), \quad j = x, y, \quad \hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla \tag{2.7}$$

Avec lequel on peut réecrire l'Hamiltonien :

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}(\hat{\Pi}_x^2 + \hat{\Pi}_y^2) \tag{2.8}$$

Notons de plus que les deux composantes de l'opérateurs $\hat{\Pi}$ ne commutent pas :

$$[\hat{\Pi}_x, \hat{\Pi}_y] = i\hbar qB \tag{2.9}$$

La recherche des états propres de $(\hat{\Pi}_x^2 + \hat{\Pi}_y^2)/2m$, sachant que le commutateur de ces deux opérateurs hermitiens est une constante (2.9), est un problème très similaire à celui de la diagonalisation de l'hamiltonien d'un oscillateur harmonique $(\hat{P}^2 + \hat{X}^2)/2$, avec $[\hat{X}, \hat{P}] = i$. Nous allons donc utiliser une méthode similaire à celle développée par Dirac pour résoudre le problème de l'oscillateur harmonique.

On introduit alors les opérateurs anhilation et création :

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar qB}}(\hat{\Pi}_x + i\hat{\Pi}_y), \quad \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar qB}}(\hat{\Pi}_x - i\hat{\Pi}_y). \tag{2.10}$$

La relation de commutation

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] \tag{2.11}$$

et l'expression de l'Hamiltonien

$$\hat{H} = \hbar\omega_c(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}) \tag{2.12}$$

sont identiques à celles obtenues pour les opérateurs d'un oscillateur harmonique de pulsation ω_c. On en déduit que les valeurs propres de $\hat{H}$ sont nécessairement de la forme

$$E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega_c, \quad \textit{avec n entier positif ou nul} \tag{2.13}$$

Nous reconfirmerons ce résultat par la suite.

On rappelle que $\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a_x} + \hat{a_x}^\dagger)$ et $\hat{p_x} = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}(\hat{a_x}^\dagger + \hat{a_x})$, et similairement pour $\hat{y}$ et $\hat{p_y}$ avec les opérateurs création et anhilation $\hat{a_y}^\dagger$ et $\hat{a_y}$.

On trouve l'espace engendré par les états propres $|n_x\rangle|n_y\rangle$ (que nous avons trouvé à l'équation (2.2)) et $\hat{L_z}$ (démonstration en Annexe) sont :

$$\hat{L_z}|n_x\rangle|n_y\rangle = i\frac{\hbar}{2}(2\sqrt{n_x}\sqrt{n_y+1}\,|n_x-1\rangle\,|n_y+1\rangle - 2\sqrt{n_x+1}\sqrt{n_y}\,|n_x+1\rangle\,|n_y-1\rangle) \tag{2.14}$$

L'état fondamental de H_0 est l'état que l'on a appelé $|0\rangle|0\rangle$, associé à la valeur propre $E_0 = \hbar\omega$, cet état est aussi état propre de $\hat{L_z}$:

$$\hat{L_z}|0\rangle|0\rangle = 0$$

ϵ_0 est donc engendré par un vecteur unique : $|0\rangle|0\rangle$, vecteur propre de l'opérateur H_{xy}, pour la valeur propre $\hbar\omega$, qui correspond au premier niveau de Landau (Lowest Landau Level (LLL)). Rappelons bien qu'ici, nous sommes en train de retrouver les vecteurs propres de $\hat{L_z}$ afin de digonaliser l'Hamiltonien $\hat{H}_{xy}$ donné à l'équation (2.6), le nouvel hamiltonien étant de la forme $H = H_{xy} + H_z$.

Ainsi, on peut noter :

- L'état fondamental $|0\rangle|0\rangle$ d'énergie $\hbar\omega$ est non dégénéré ;
- Le premier niveau excité d'énergie $3\hbar\omega$ est dégénéré de degré de dégénérescence 2, engendré par les états $|1\rangle|0\rangle$, et $|0\rangle|1\rangle$
- Le deuxième niveau excité d'énergie $5\hbar\omega$ est de dégénérescence 3 et enegendré par trous états $|2\rangle|0\rangle$, $|1\rangle|1\rangle$, et $|0\rangle|2\rangle$

En continuant ainsi, on conclut que la dégénerscence associée aux différentes énergies propres de notre système actuel est la même que celle de l'oscillateur harmonique à deux dimensions. La fonction d'onde associée à un état $|n_x\rangle|n_y\rangle$ est $P_{n_x}(x)e^{-x^2/4l^2}, \quad P_{n_y}(y)e^{-y^2/4l^2}$, où les P_n sont les polynômes d'Hermite de degrés n et l la longueur associée à de l'oscillateur.

L'expression de l'opérateur $\hat{L_z}$ en coordonnées polaires est la suivante :

$$\hat{L_z} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

Ses fonctions propres sont de la forme $F(r)e^{im\varphi}$, avec m un entier relatif et F une fonction de la variable radiale. On remarque que l'état fondamental de l'opérateur $\hat{H}_0$, de fonction d'onde $e^{-r^2/4l^2}$ est de cette forme pour $m = 0$.

On cherche maintenant à établir une base propre commune à $\hat{H}_0$ et $\hat{L_z}$. Une telle base sera donc aussi une base de $\hat{H}$. On peut travailler par sous espace propre de H_0 :

- On a noté l'état fondamental, commun à $\hat{H}_0$ et $\hat{L_z}$, l'état $e^{-r^2/4l^2}$
- Dans le premier état excité de H_0 on retrouve les états $|1\rangle|0\rangle$, et $|0\rangle|1\rangle$, qui ont pour fonctions d'onde $xe^{-r^2/4l^2}$ et $ye^{-r^2/4l^2}$ respectivement. Ils ne sont donc pas des états propres de $\hat{L_z}$, mais il est facile de trouver deux combinaisons linéaires qui conviennent :

$$(x - iy)e^{-r^2/4l^2} = re^{-i\varphi}e^{-r^2/4l^2}\text{et } (x + iy)e^{-r^2/4l2} = re^{+i\varphi}e^{-r^2/4l^2}, \qquad (2.15)$$

associées respectivement à m = -1 et m = +1
- Plus généralement, dans un sous-espace propre donné de $\hat{H}_0$ associé au nombre quantique $n = n_x + n_y$, on peut identifier $n_0 + 1$ états propres indépendants de $\hat{L_z}$ associés aux nombres quantiques azimutaux

$$m = -n_0, -n_0 + 2, ..., n_0 - 2, n_0 \qquad (2.16)$$

L'écriture générale de ces états est compliquée, sauf pour les deux états extrêmes $m = \pm n_0$ qui ont pour fonction d'onde :

$$m = \pm n_0 : \quad (x \pm iy)^m e^{-r^2/4l^2} = r^m e^{\pm im\varphi} e^{-r^2/4l^2} \qquad (2.17)$$

2.2.2 Déterminer les valeurs propres du nouvel Hamiltonien

Maintenant que nous disposons d'une base commune à $\hat{H}_0$ et $\hat{L_z}$, le problème de la diagonalisation de $\hat{H}$ est résolu. Un état propre commun à $\hat{H}_0$ et $\hat{L_z}$, de valeur propre $(n_0 + 1)\hbar\omega$ et $m\hbar$, sera également état propre de $\hat{H}$ avec la valeur propre :

$$E_{n_0m} = (n_0 + 1)\hbar\omega - m\hbar\omega, \;\; \text{avec } m = -n_0, -n_0 + 2, ..., n_0 - 2, n_0. \qquad (2.18)$$

Ce qui s'écrit aussi :

$$E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega_c, \text{avec } n = \frac{n_0 - m}{2}\text{un entier positif ou nul} \qquad (2.19)$$

On retrouve donc la structure de l'Hamiltonien en niveaux de Landau régulièrement espacés (voir figure 2.2). On note de plus que chaque niveau de Landau est *infiniment dégénéré*, au moins si la particule peut explorer tout le plan *xy*. Il existe en effet une infinité de façons d'atteindre tout entier n à partir de couples(n_0, m) si on ne restreint pas les valeurs de n_0 et m réalisables.

2.3 Le niveau de Landau fondamental (LLL)

La section suivant a été essentiellement traité par Jean Dalibard[2] dont le texte sera la référence exclusive.

Cette procédure fournit un moyen systématique pour trouver une base d'états propres de $\hat{H}$. Interéssons nous ici au niveau de Landau fondamental. $n = 0$ (Lowest Landau Level), obtenu en prenant systématiquement $n_0 = m$. On retrouve donc les fonctions d'ondes du chapitre précédent :

$$\psi_{n_0=m,m} \propto (x+iy)^m e^{-r^2/4l^2} = r^m e^{im\varphi} e^{-r^2/4l^2} \tag{2.20}$$

On normalise la fonction d'onde :

$$\begin{aligned}
1 &= \int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi} |\alpha_m r^m e^{im\varphi} e^{-r^2/4l^2}|^2 \, r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi, \ \textit{(avec } \alpha_m \textit{ la constante d'intégration)} \\
&= \int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi} |\alpha_m|^2 r^{2m} e^{-r^2/2l^2} \, r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi \\
&= 2\pi|\alpha_m^2| \int_0^{+\infty} r^{2m} e^{-r^2/2l^2} \, r\mathrm{d}r \\
&= 2\pi|\alpha_m|^2([-r^{2m} e^{-r^2/2m} l^2]_0^{+\infty} + 2ml^2 \int_0^{+\infty} r^{2m-2} e^{-r^2/2l^2} \, r\mathrm{d}r \\
&= 4\pi|\alpha_m|^2 ml^2 \int_0^{+\infty} r^{2m-2} e^{-r^2/2l^2} \, r\mathrm{d}r \\
&= 2^{m+1}|\alpha_m|^2 (m!) l^{2m} \int_0^{+\infty} e^{-r^2/2l^2} \, r\mathrm{d}r \\
&= 2^{m+1}|\alpha_m|^2 (m!) l^{2m}
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Ainsi, on trouve :

$$\begin{aligned}
|\alpha_m|^2 &= \frac{1}{2\pi l^2 (m!)} \frac{1}{2^m l^{2m}} \\
\implies \alpha_m &= \frac{1}{\sqrt{2\pi l^2 (m!)}} \frac{1}{\sqrt{2^m} l^m} \ \textit{(à un multiple de i près)}
\end{aligned}$$

Sur la figure 2.1, nous avons, tracé, la densité de probabilité radiale $r|\psi_m|^2$, associée à un état ψ_m du LLL (ici $n_0 = m$ on peut donc oublier l'indice n_0). Cette densité de probabilité est invariante par rotation autour de l'axe z et elle est maximale sur un cercle de rayon

$$r_m = \sqrt{2m+1} l \tag{2.22}$$

Une particule préparée dans un état ψ_m donné est donc localisée sur un anneau étroit, la réunion de tous ces anneaux recouvrant le plan. On trouve par ailleurs :

$$\langle \psi_m | r^2 | \psi_m \rangle = (2m+2) l^2 \tag{2.23}$$

L'orthogonalité des différents ψ_m est assurée par leur dépendance différente vis à vis de l'angle polaire φ :

$$\int \psi_m^*(r)\psi_{m'}(r) \mathrm{d}^2 r \propto \int e^{-im\varphi} e^{im'\varphi} \mathrm{d}\varphi = 2\pi\delta_{m,m'} \tag{2.24}$$

On remarque d'abord que :

$$\frac{1}{|\alpha_m|^2} = \int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi} r^{2m} e^{-r^2/2l^2} \, r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi \tag{2.25}$$

On a donc :

$$\frac{1}{|\alpha_{m+1}|^2} = \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} r^{2m+2} e^{-r^2/2l^2}\, r \mathrm{d}r \mathrm{d}\varphi \tag{2.26}$$

Ainsi,

$$\langle \psi_m | r^2 | \psi_m \rangle = \frac{|\alpha_m|^2}{|\alpha_{m+1}|^2} = \frac{2\pi l^2 (m+1!) 2^{m+1} l^{2m+1}}{2\pi l^2 (m!) 2^m l^{2m}} = (2m+2) l^2 \tag{2.27}$$

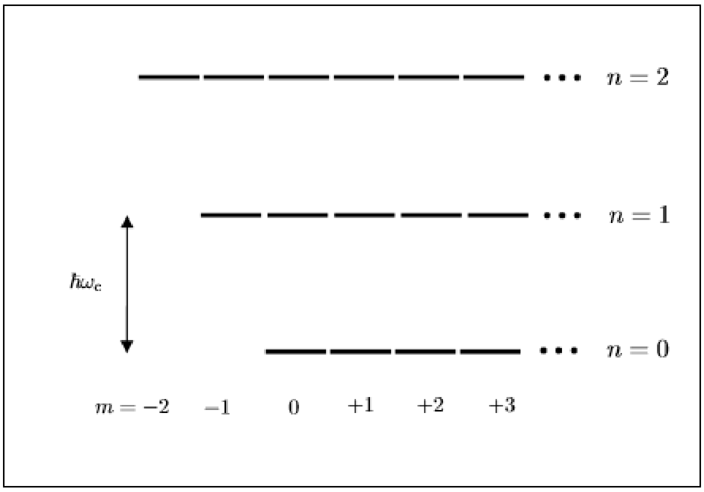

FIGURE 2.2 – Structure des niveaux d'énergie de l'hamiltonien $\hat{H}$ décrivant une particule dans un champ magnétique uniforme. Cette structure se déduit de celle du haut en déplaçant un niveau (n_0, m) de l'énergie $-\hbar\omega_c/2$. [2]

Chapitre 3

Les potentiels de confinement

On souhaiterais étudier le comportement du système au contact de différents potentiels de confinement externes.[3]

3.1 Application du premier potentiel

Le premier potentiel appliqué au système est $V_1 = \frac{1}{2}m^*\Omega^2 r^2$. On retrouve déjà l'orthogonalité des différents ψ_m qui est assurée par leur dépendance différente vis à vis de l'angle polaire φ. Les particules étant situées sur un anneau étroit, l'observable V_1 pour une particule préparée dans l'état ψ_m nous donne pour moyenne :

$$\frac{1}{2}m^*\Omega^2\langle\psi_m|r^2|\psi_m\rangle = \frac{1}{2}m^*\Omega^2(2m+2)l^2 = m^*\Omega^2(m+1)l^2 \tag{3.1}$$

Une valeur linéaire en m, avec $m*$ la masse d'une particule et Ω non nul.

En supposant que les prticules observées sont N fermions qui composent un gaz, on établit la densité du gaz en posant [3] :

$$\rho(x,y) = \sum_{\textit{niveaux occupés}}^{N} |\psi_m(x,y)|^2 \tag{3.2}$$

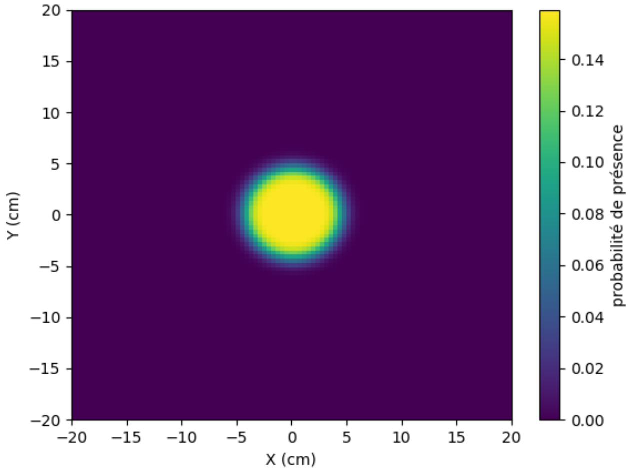

FIGURE 3.1 – Densité du gaz pour N = 10 particules

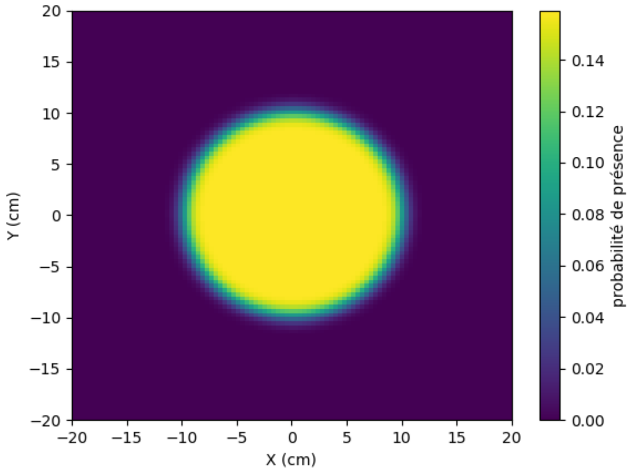

FIGURE 3.2 – Densité du gaz pour N = 50 particules

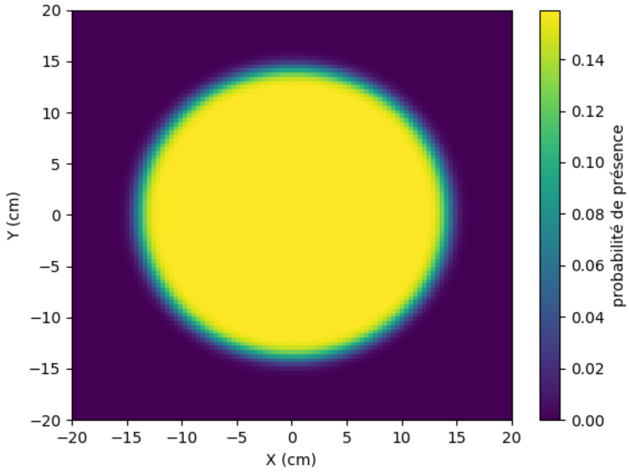

FIGURE 3.3 – Densité du gaz pour N = 100 particules

On note d'abord la symétrie circulaire relevée en séction 2.1.1. On observe aussi que la densité des particules n'est pas établie sur un anneau, mais s'étale sur un disque. Plus N est grand, plus le rayon du cercle est grand. On retrouve l'aspect linéaire du niveau d'énergie de la particule soumise au potentiel V_1 par rapport à m. Il est intéressant de noté aussi que la distribution des particules est uniforme.

3.2 Application d'un deuxième potentiel

On décide maintenant d'appliquer un potentiel $V_2 = V_0 e^{-r^2/2\sigma^2}$. On retrouve encore l'orthogonalité des différents ψ_m, et les différentes valeurs moyennes de l'observable pour des particules préparées dans l'état ψ_m sont :

$$\begin{aligned} \langle \psi_m | V_2 | \psi_m \rangle &= V_0 2\pi |\alpha_m|^2 \int_0^{+\infty} r^{2m} r e^{-r^2(1/2l^2 + 1/2\sigma^2)} \mathrm{d}r \\ &= V_0 2\pi |\alpha_m|^2 2^m (m!) (\frac{1}{1/l^2 + 1/\sigma^2})^m \frac{1}{2(1/l^2 + 1/\sigma^2)} \\ &= V_0 (\frac{\sigma^2}{l^2 + \sigma 2})^{m+1} \\ &= V_0 (1 + \frac{l^2}{\sigma^2})^{-(m+1)} \end{aligned} \tag{3.3}$$

En modélisant le système soumis aux deux potentiels, on observe une distribution convexe des niveaux d'énergies. En supposant que l'on intègre au système les particules une à une, la première particule remplira le niveau d'énergie le plus faible. Le gaz étant fermionique, le principe d'exclusion de Pauli nous dit que la deuxième particule sera au premier niveau d'énergie supérieur, et ainsi de suite jusqu'à se retrouver avec les N particules du système. Pour des σ et l donnés, quel est le niveau d'énergie en dessous duquel le premier niveau d'énergie E_0 n'est pas atteint ? [3]

L'énergie associée au nouvel Hamiltonien du système soumis au potentiel V_1 et V_2 est :

$$E_m = \frac{\hbar \omega_c}{2} + m^* \Omega^2 (m+1) l^2 + V_0 (1 + \frac{l^2}{\sigma^2})^{-(m+1)} \tag{3.4}$$

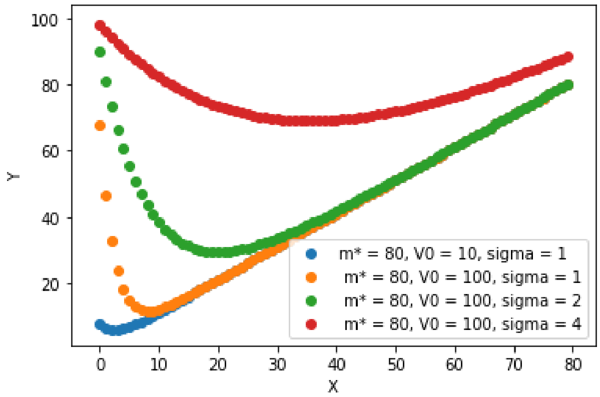

FIGURE 3.4 – Structure d'énergie de l'hamiltonien décrivant une particule dans un champ magnétique uniforme soumis aux potentiels V_1 et V_2, pour différentes valeurs de σ et V_0.

On cherche à trouver N, le nombre de fermions nécessaires pour pour que le niveau d'énergie E_0 soit remplit, donc, le plus grand N tel que $E_N < E_0$. On cherche donc le N le plus grand tel que :

$$(\frac{l^2}{\sigma^2}+1)\frac{l^2 m^* \Omega^2}{V_0}N + (\frac{l^2}{\sigma^2}+1)^{-N} < 1 \tag{3.5}$$

En posant $\alpha = \frac{l^2 m^* \Omega^2}{V_0}$ et $\beta = \frac{l^2}{\sigma^2}$ on a l'inégalité suivante :

$$\alpha N < \frac{1-(\beta^2+1)^{-N}}{\beta^2+1} \tag{3.6}$$

On pose $f(\beta) = \frac{1-(\beta^2+1)^{-N}}{\beta^2+1}$, et β_{max} la valeur de β tel que $f'(\beta_{max}) = 0$, qui est l'unique maximum de la fonction. Le calcul est le suivant :

$$\begin{aligned} f'(\beta_{max}) &= \frac{N(\beta^2+1)^{-N-1}2\beta(\beta^2+1) - 2\beta(1-(\beta^2+1)^N)}{(\beta^2+1)^2} \\ \text{Ainsi, } &(1+N)(\beta^2+1)^{-N} - 1 = 0 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Donc, on a :

$$\beta_{max} = \sqrt{(\frac{1}{1+N})^{-1/N}+1} \tag{3.8}$$

ON peut donc dans l'espace des phases qui mets en jeu les variables dynamiques α et β, tracer les points qui vérifient l'égalité :

$$\alpha N = \frac{1-(\beta^2+1)^{-N}}{\beta^2+1} \tag{3.9}$$

On obtient alors un espace des phases, avec, tracé, la courbe qui représente les couples où l'égalité (3.8) est vérifiée. On peut donc délimiter les zones suivantes : pour un couple (α, β) en dessous de la courbe le niveau d'énergie E_0 est remplie, si un couple (α, β) représente un point au dessus de la courbe, alors le niveau d'énergie E_0 n'est pas remplie

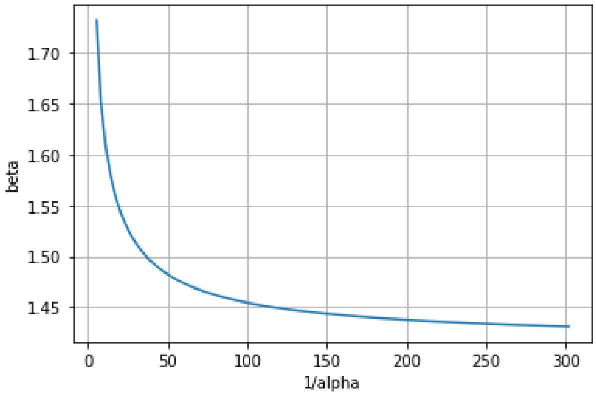

FIGURE 3.5 – Espace des phases mettant en jeu les couples (α, β)

Chapitre 4

Conclusion

Nous avons commencé par expliciter le mouvement de la particule de masse m dans lorsqu'elle est soumise à un champ magnétique dirigé selon l'axe Oz. Par une méthode algébrique et l'utilisation de la jauge symétrique nous avons pu mettre en exergue les différentes énergies propres associées à l'Hamiltonien de ce système.

Dans un premier temps, nous avons retrouvé le mouvement cyclotron de la particule. La densité de probabilité pour une fonction propre de cet Hamiltonien en jauge symétrique est représentée par un anneau. Dans un second temps, le nouvel Hamiltonien, à ce point là du projet, étant composé de l'Hamiltonien de l'oscillateur classique et de l'opérateur moment cinétique, nous avons trouvé une base de fonction d'onde propre commune à ces deux opérateurs pour trouver le spectre et les fonctions d'onde propres du nouvel Hamiltonien. A la fin de cette étude, on retrouve la structure de l'Hamiltonien en niveaux de Landau régulièrement espacés. On note de plus que chaque niveau de Landau est infiniment dégénéré, au moins, si la particule peut explorer tout le plan.

Nous avons porté le reste de l'étude sur le niveau de Landau fondamental (LLL) en particulier. Notre objectif principal étant de lever la dégénéréscence, nous avons appliqué deux potentiels. Le premier potentiel nous a permis de donner un profil linéaire aux énergies associées aux fonctions d'ondes propres du LLL. Nous avons ensuite retracé la densité de probabilité pour une fonction propre de ce nouvel Hamiltonien, qui apparait maintenant comme étant un disque dans le plan xy et non plus un anneau localisé.

Finalement, nous avons appliqué un deuxième potentiel avec un profil gaussien. Cela redistribuera les énergies propres de système selon une courbe convexe. C'est alors que nous avons retrouvé les couples σ et V_0 tels qu'il y ait N particules dans le système avant que le niveau d'énergie E_0 ne soit rempli.

Chapitre 5

Annexe

On explicite ici le calcul qui nous permet d'expliciter l'espace engendré par les états propres $|n_x\rangle|n_y\rangle$ et l'opérateur $\hat{L_z}$. Trouver cet espace et l'espace engendré par H_0 nous permet de trouver le spectre du nouvel Hamiltonien de la section 2.2. On a d'une part,

$xp_y|n_x\rangle|n_y\rangle = x|n_x\rangle \otimes i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}(a_y^\dagger - a_y)|n_y\rangle$
$= i\frac{\hbar}{2}(\sqrt{n_x}\sqrt{n_y+1}\,|n_x+1\rangle|n_y+1\rangle - \sqrt{n_x}\sqrt{n_y}|n_x-1\rangle|n_y-1\rangle + \sqrt{n_x+1}\sqrt{n_y+1}|n_x+1\rangle|n_y+1\rangle - \sqrt{n_x+1}\sqrt{n_y}|n_x+1\rangle|n_y-1\rangle$

D'autre part :

$yp_x|n_x\rangle|n_y\rangle = yi\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}(a_x^\dagger - a_x)|n_x\rangle|n_y\rangle$
$= i\frac{\hbar}{2}(\sqrt{n_x+1}\sqrt{n_y}|n_x+1\rangle|n_y-1\rangle + \sqrt{n_x+1}\sqrt{n_y+1}|n_x+1\rangle|n_y+1\rangle - \sqrt{n_x}\sqrt{n_y}|n_x-1\rangle\,|n_y-1\rangle - \sqrt{n_x}\sqrt{n_y+1}|n_x-1\rangle|n_y+1\rangle)$

Ainsi,

$$L_z|n_x\rangle|n_y\rangle = i\frac{\hbar}{2}(2\sqrt{n_x}\sqrt{n_y+1}|n_x-1\rangle|n_y+1\rangle - 2\sqrt{n_x+1}\sqrt{n_y}|n_x+1\rangle|n_y-1\rangle)$$

Bibliographie

[1] Barton Zwiebach. Lecture 14 : Charged particles in electromagnetic fields, 2019 reupdate. https ://ocw.mit.edu/courses/physics/8-06-quantum-physics-iii-spring-2018/video-lectures/time-dependent-perturbation-theory/.

[2] Jean Dalibard. Mouvement d'une particule dans un champ magnétique uniforme : les niveaux de landau, 2014.

— Akkermans, E. and G. Montambaux (2004), Physique mésoscopique des électrons et des photons, CNRS Editions.
— Cooper, N. R. (2008), « Rapidly rotating atomic gases », in Advances in Physics 57.6, pp. 539–616.
— Eisenstein, J.P. (2005), « Novel phenomena in double layer twodimensional electron systems », in Nanophysics : coherence and transport, ed. by H. Bouchiat, Y. Gefen, S. Guéron, G. Montambaux and J. Dalibard,vol. Ecole des Houches 2004, session LXXXI, Elsevier, , pp. 129–175.
— Girvin, Steven M. (2000), « The Quantum Hall Effect : Novel Excitations and Broken Symmetries », in Topological Aspects of Low Dimensional Systems, ed. by A. Comtet, T. Jolicoeur, S. Ouvry and F. David, vol. Les Houches, July 1998, Springer-Verlag.
— Goerbig, M. O. (2009), « Quantum Hall Effects », in lecture notes for the Singapore session "Ultracold Gases and Quantum Information" of Les Houches Summer School, vol. arXiv :0909.1998.
— Goldman, N., J. Dalibard, A. Dauphin, F. Gerbier, M. Lewenstein, P. Zoller andI. B. Spielman (2013), « Direct imaging of topological edge states in cold-atom systems », in PNAS 110.17, p. 6736.
— Imry, Yoseph (1997), Introduction to Mesoscopic Physics, Oxford University Press.
— Jackson, J. D. (1998), Classical Electrodynamics, New York : John Wiley. Ji, Yang, Yunchul Chung, D. Sprinzak, M. Heiblum, D. Mahalu and Hadas Shtrikman (2003), « An electronic Mach–Zehnder interferometer », in Nature 422, p. 415.
— Yoshioka, Daijiro (2002), The Quantum Hall Effect, Springer-Verlag.

.

[3] Leonardo Mazza. Private communications, Juin - Juillet 2019.