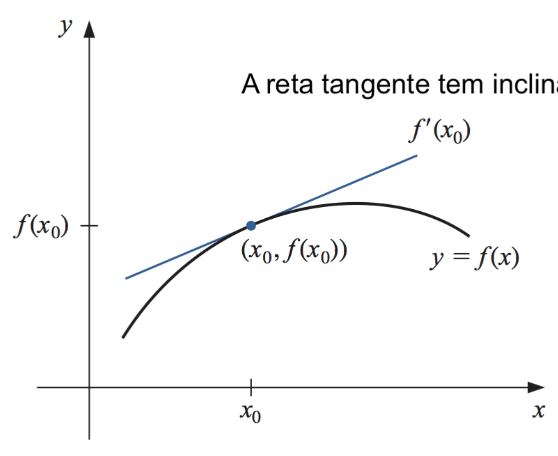
Introdução à Computação Numérica
Polinômios de Taylor e aproximação de funções

Prof. Daniel G. Alfaro Vigo
dgalfaro@ic.ufrj.br
DCC–IC–UFRJ

CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

Aproximação linear



Interpretação geométrica da reta tangente:
Aproximação linear:

$$\boxed{f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\,\Delta x}$$

Expansão de Taylor

Teorema de Taylor

Sejam $n \geq 0$ inteiro e f uma função n vezes continuamente diferenciável em $[a, b]$ que possui derivada de ordem $n+1$ em (a, b). Se $x_0, x \in [a, b]$ então

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x - x_0)^n + R_n(x; x_0)$$

e existe um número ξ entre x_0 e x tal que

$$R_n(x; x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(x - x_0)^{n+1}.$$

Expansão de Taylor

Teorema de Taylor

Sejam $n \geq 0$ inteiro e f uma função n vezes continuamente diferenciável em $[a, b]$ que possui derivada de ordem $n+1$ em (a, b). Se $x_0, x \in [a, b]$ então

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x - x_0)^n + R_n(x; x_0)$$

e existe um número ξ entre x_0 e x tal que

$$R_n(x; x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(x - x_0)^{n+1}.$$

O resto $R_n(x; x_0)$ também pode ser representado na forma integral (ou de Cauchy)

$$R_n(x; x_0) = \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(s)}{n!}\,(x - s)^n\,ds.$$

Expansão de Taylor (cont)

Expansão de Taylor de $f(x)$ centrada em x_0

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x - x_0)^n + R_n(x; x_0)}$$

Expansão de Taylor (cont)

Expansão de Taylor de $f(x)$ centrada em x_0

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x - x_0)^n + R_n(x; x_0)}$$

$\Rightarrow$ O polinômio na variável x (para x_0 fixo)

$$\begin{aligned} T_n(x; x_0) &= f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x - x_0)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k, \end{aligned}$$

é o **polinômio de Taylor de ordem n de f centrado em x_0**.

Expansão de Taylor (cont)

Expansão de Taylor de $f(x)$ centrada em x_0

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x - x_0)^n + R_n(x; x_0)}$$

$\Rightarrow$ O polinômio na variável x (para x_0 fixo)

$$\begin{aligned} T_n(x; x_0) &= f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x - x_0)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k, \end{aligned}$$

é o **polinômio de Taylor de ordem n de f centrado em x_0**.

$\Rightarrow$ O termo $R_n(x; x_0)$ é o **resto** da expansão.

Exemplo: $f(x) = \mathrm{e}^x$

Lembretes: $\Rightarrow$ O número de Euler

$$\mathrm{e} = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2,718281828459045\ldots$$

$\Rightarrow$ $f^{(k)}(x) = \frac{d^k \mathrm{e}^x}{dx^k} = \mathrm{e}^x$.

Temos que

$$\begin{aligned} T_n(x; x_0) &= \mathrm{e}^{x_0} + \mathrm{e}^{x_0}\,(x - x_0) + \cdots + \frac{\mathrm{e}^{x_0}}{n!}\,(x - x_0)^n, \\ &= \mathrm{e}^{x_0} \sum_{k=0}^{n} \frac{(x - x_0)^k}{k!}, \\ R_n(x; x_0) &= \frac{\mathrm{e}^{\xi}}{(n+1)!}\,(x - x_0)^{n+1} \end{aligned}$$

em que ξ é um número entre x_0 e x.

Exemplo: $f(x) = \mathrm{e}^x$ (cont)

Aproximação do número e.
Para $x_0 = 0$ e $x = 1$ temos

$$\mathrm{e} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{\mathrm{e}^{\xi}}{(n+1)!}, \qquad \text{em que } \xi \in (0,\, 1).$$

Observe que $\quad 0 < R_n(1;0) < \frac{3}{(n+1)!} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} R_n(1;0) = 0$

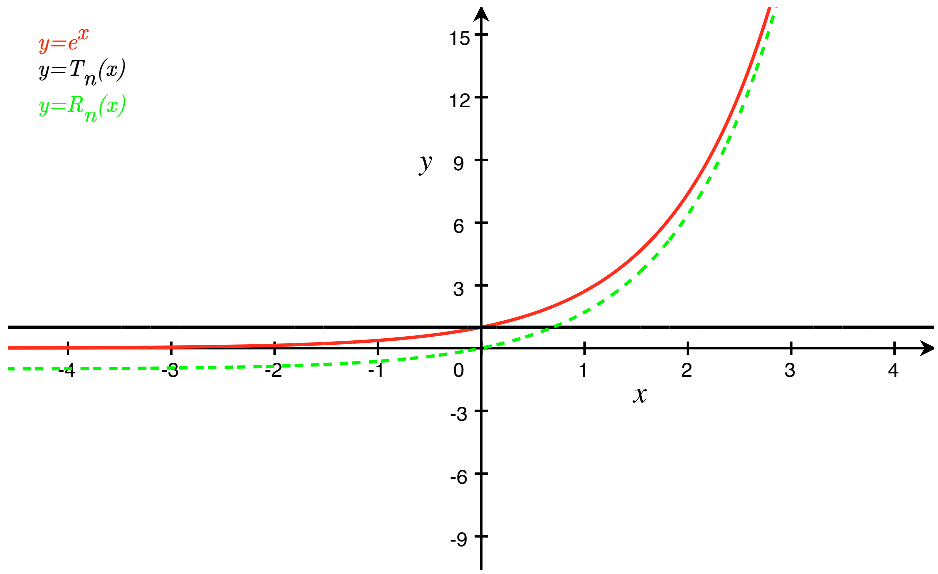
$$\Rightarrow \quad \boxed{\mathrm{e} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}}$$

Exemplo: Aproximação do número e

n	$\mathrm{e} \approx T_n(1;0)$	$R_n(1;0) \leq$
1	2	$3/2! = 1.5$
5	2.716666666666666	$3/6! = 4.2 \times 10^{-3}$
7	2.718253968253968	$3/8! \approx 7.5 \times 10^{-5}$
10	2.718281801146385	$3/11! \approx 7.6 \times 10^{-8}$
15	2.718281828458995	$3/16! \approx 1.5 \times 10^{-13}$
18	2.718281828459045	$3/19! \approx 2.5 \times 10^{-17}$

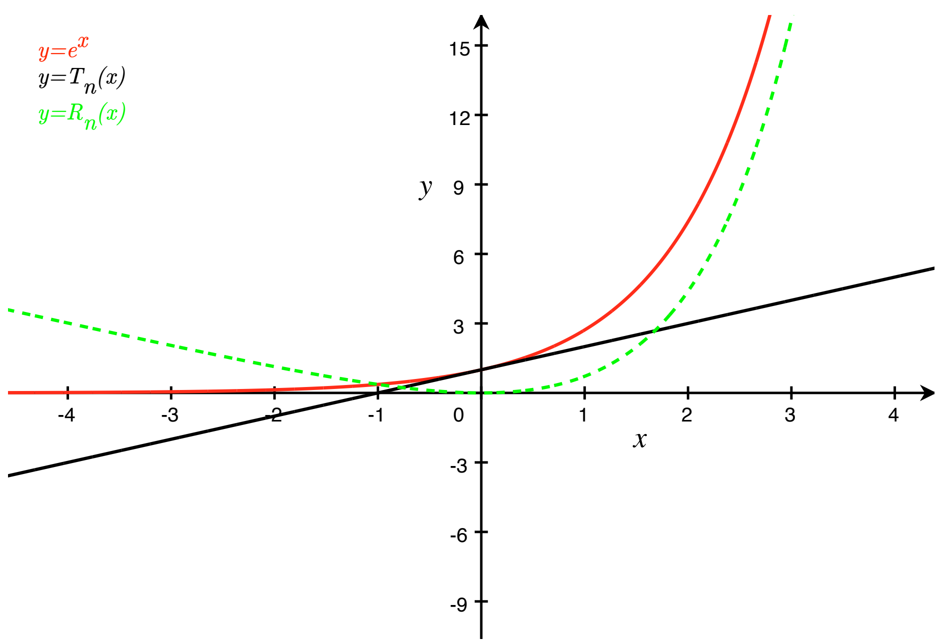
Exemplo: Função exponencial

Expansão de Taylor, de ordem $n = 0$ centrada em $x_0 = 0$.



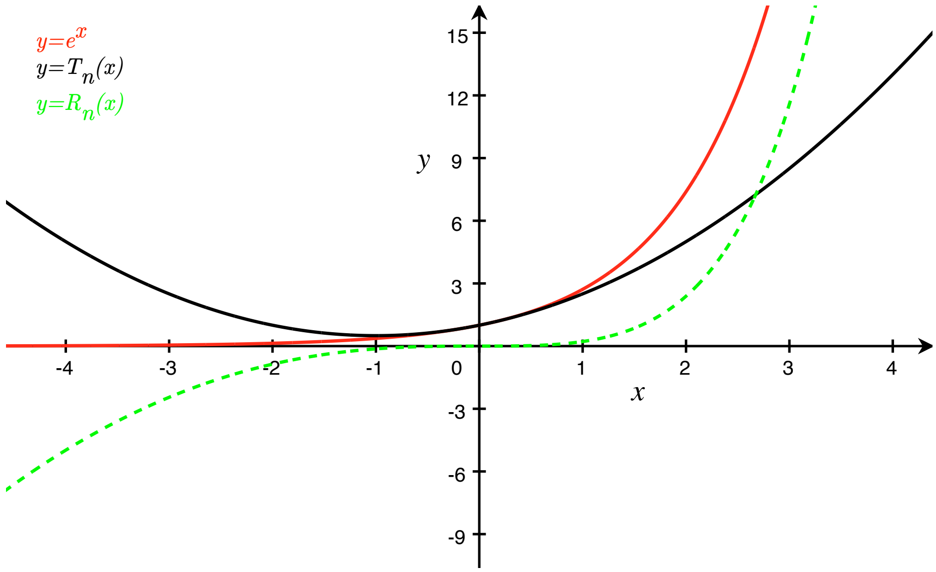
Exemplo: Função exponencial

Expansão de Taylor, de ordem $n = 1$ centrada em $x_0 = 0$.



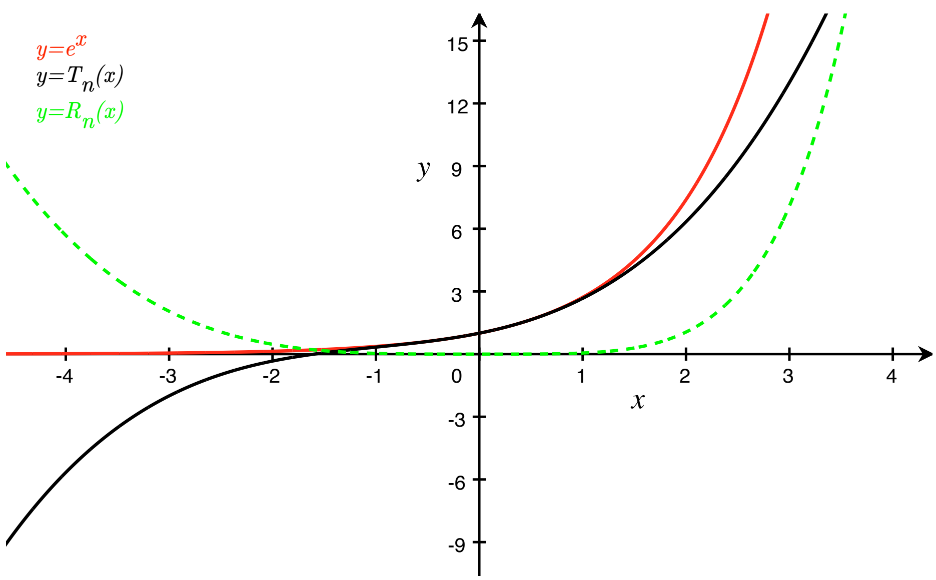
Exemplo: Função exponencial

Expansão de Taylor, de ordem $n = 2$ centrada em $x_0 = 0$.



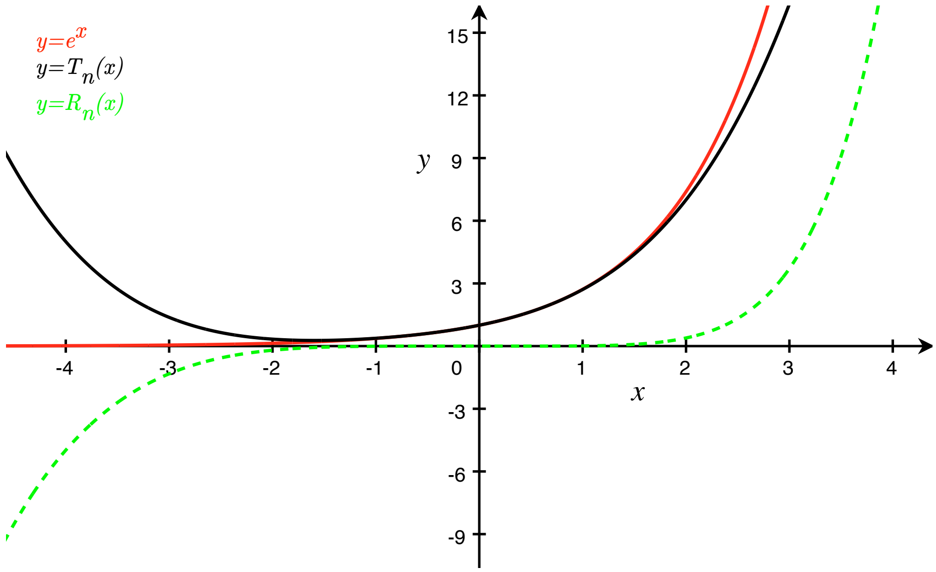
Exemplo: Função exponencial

Expansão de Taylor, de ordem $n = 3$ centrada em $x_0 = 0$.



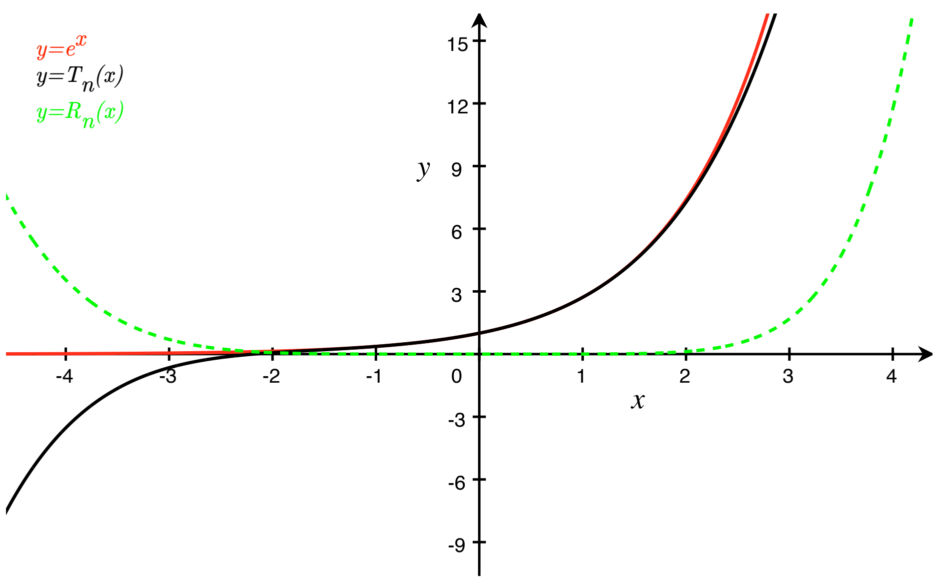
Exemplo: Função exponencial

Expansão de Taylor, de ordem $n = 4$ centrada em $x_0 = 0$.



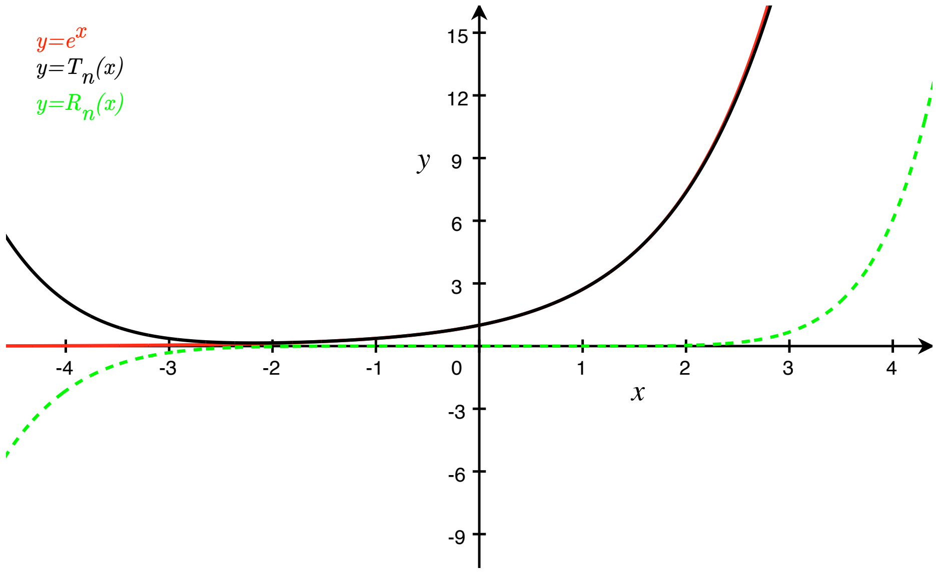
Exemplo: Função exponencial

Expansão de Taylor, de ordem $n = 5$ centrada em $x_0 = 0$.



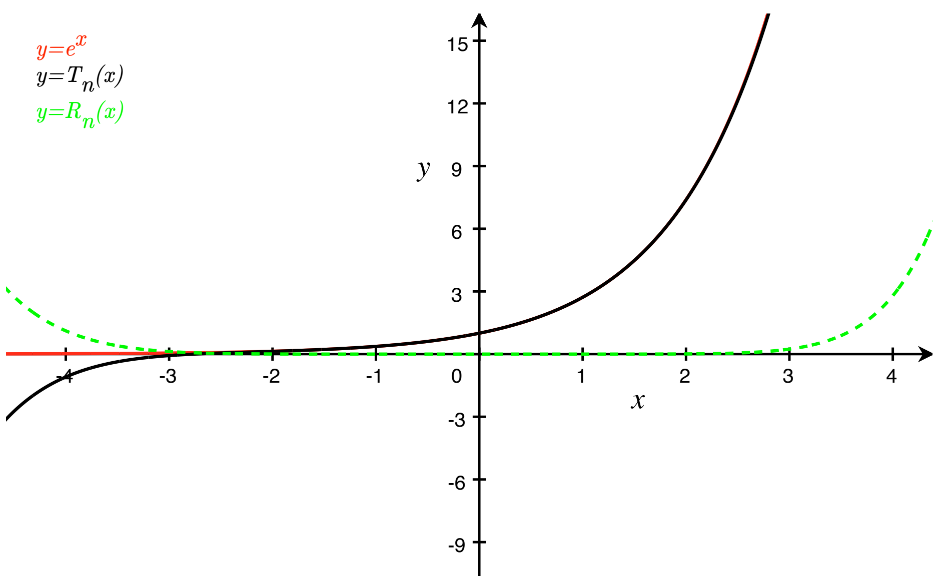
Exemplo: Função exponencial

Expansão de Taylor, de ordem $n = 6$ centrada em $x_0 = 0$.



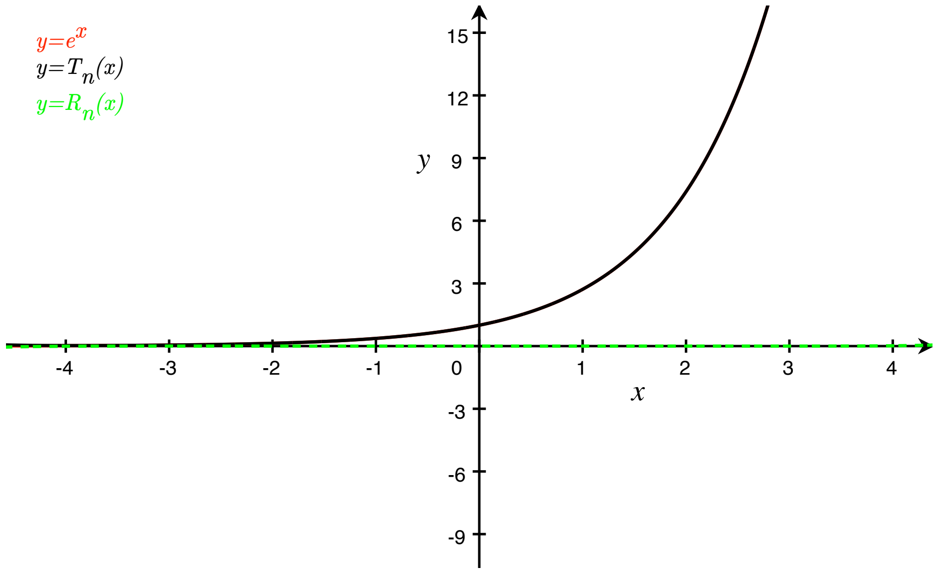
Exemplo: Função exponencial

Expansão de Taylor, de ordem $n = 7$ centrada em $x_0 = 0$.



Exemplo: Função exponencial

Expansão de Taylor, de ordem $n = 12$ centrada em $x_0 = 0$.



Exemplo: $f(x) = \ln(1+x)$

Lembretes: $\Rightarrow$ $\ln(1+x)$ é contínua e infinitamente diferenciável em $x \in (-1, +\infty)$.

$\Rightarrow$ $f'(x) = \frac{1}{1+x}$, $f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$, $f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}, \dots$

$\Rightarrow$ $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k} \quad k \geq 1.$

Exemplo: $f(x) = \ln(1+x)$

Lembretes: $\Rightarrow$ $\ln(1+x)$ é contínua e infinitamente diferenciável em $x \in (-1, +\infty)$.

$\Rightarrow$ $f'(x) = \frac{1}{1+x}$, $f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$, $f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}, \dots$

$\Rightarrow$ $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$ $\quad k \geq 1$.

Temos que para x_0, $x > -1$

$$T_n(x;x_0) = \ln(1+x_0) + \frac{(x-x_0)}{(1+x_0)} - \frac{(x-x_0)^2}{2(1+x_0)^2} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}(x-x_0)^n}{n\,(1+x_0)^n},$$

$$= \ln(1+x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(x-x_0)^k}{k\,(1+x_0)^k},$$

$$R_n(x;x_0) = \frac{(-1)^n}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}\,(x-x_0)^{n+1}$$

em que ξ é um número entre x_0 e x.

Exemplo: $f(x) = \ln(1+x)$ (cont)

Aproximação de $\ln(3/2)$
Para $x_0 = 0$ e $x = 1/2$ obtemos

$$\ln(3/2) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k\,2^k} + \frac{(-1)^{n+2}}{(n+1)[2(1+\xi)]^{n+1}}$$

em que $\xi \in (0, 1/2)$.
Observe que $|R_n(\frac{1}{2};0)| < \frac{2^{-(n+1)}}{n+1}$ $\quad \Rightarrow \quad$ $\lim_{n\to\infty} R_n(\frac{1}{2};0) = 0$

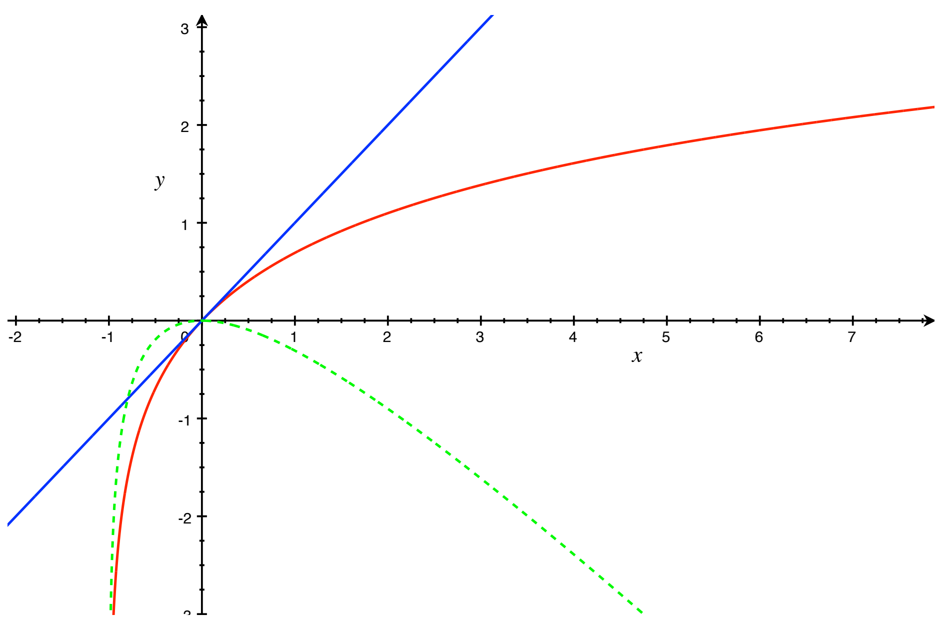
$$\boxed{\ln(3/2) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k\,2^k}}$$

Exemplo: Aproximação de $\ln(3/2)$

n	$\ln(3/2) \approx T_n(\frac{1}{2};0)$	$\lvert R_n(\frac{1}{2};0)\rvert \leq$
1	0.5	$1/2^3 = 0.125$
5	0.4072916666666667	$1/(6 \cdot 2^6) \approx 2.7 \times 10^{-3}$
10	0.4054346478174603	$1/(11 \cdot 2^{11}) \approx 4.5 \times 10^{-5}$
15	0.4054657568451514	$1/(16 \cdot 2^{16}) \approx 9.6 \times 10^{-7}$
50	0.4054651081081644	$1/(51 \cdot 2^{51}) \approx 8.8 \times 10^{-18}$

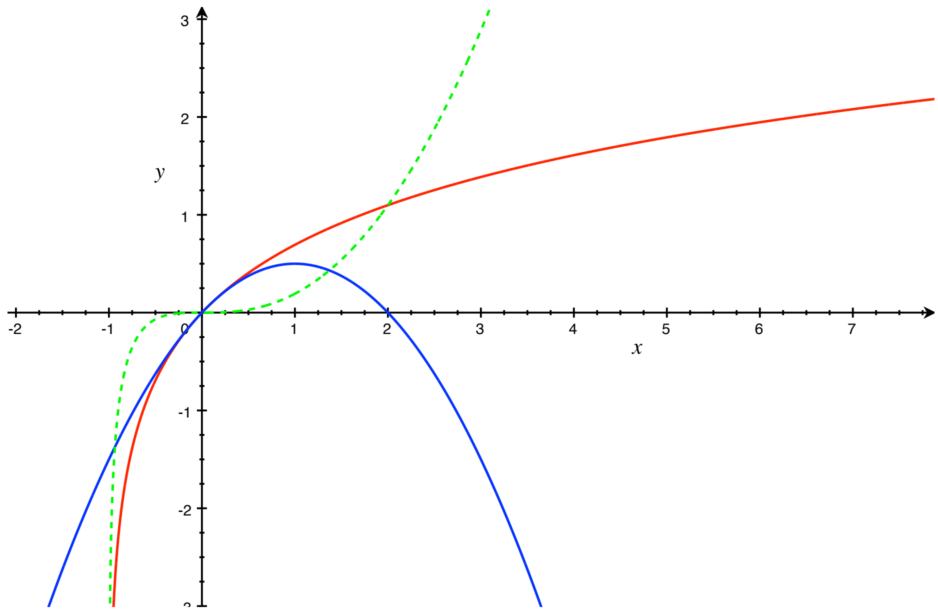
Exemplo: Função logaritmo $\ln(1+x)$

Expansão de Taylor, de ordem $n = 1$ centrada em $x_0 = 0$.



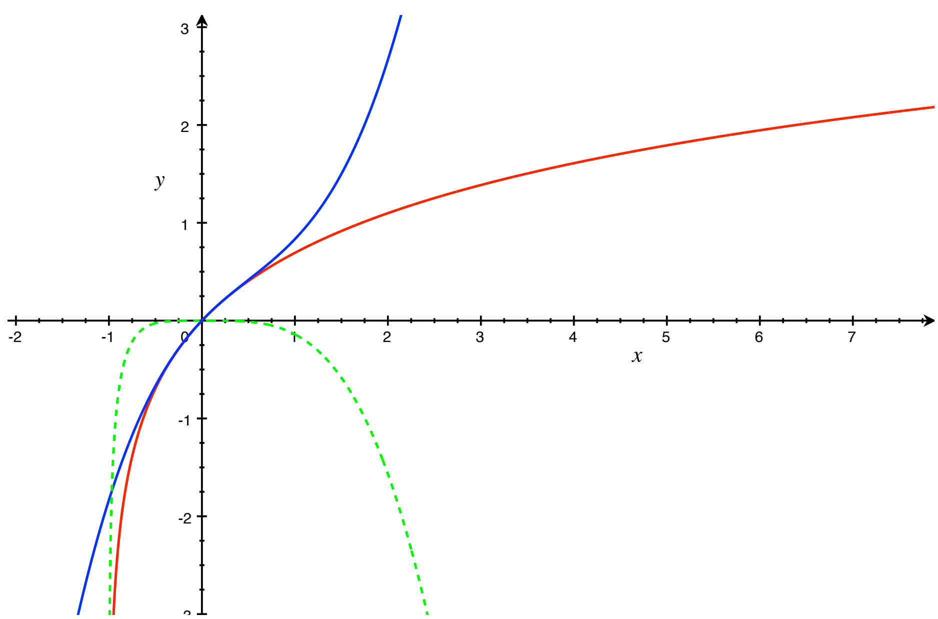
Exemplo: Função logaritmo $\ln(1+x)$

Expansão de Taylor, de ordem $n = 2$ centrada em $x_0 = 0$.



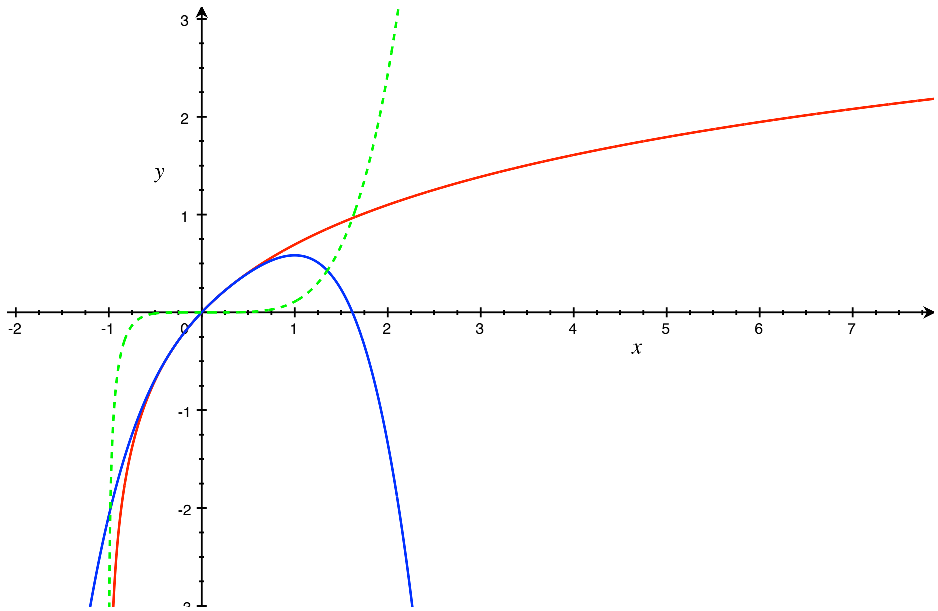
Exemplo: Função logaritmo $\ln(1+x)$

Expansão de Taylor, de ordem $n = 3$ centrada em $x_0 = 0$.



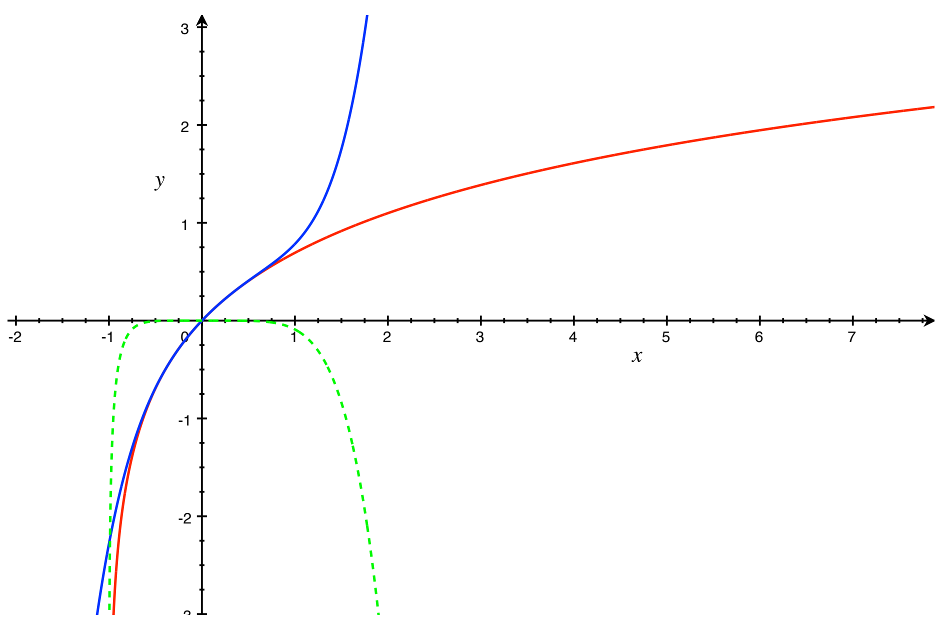
Exemplo: Função logaritmo $\ln(1+x)$

Expansão de Taylor, de ordem $n = 4$ centrada em $x_0 = 0$.



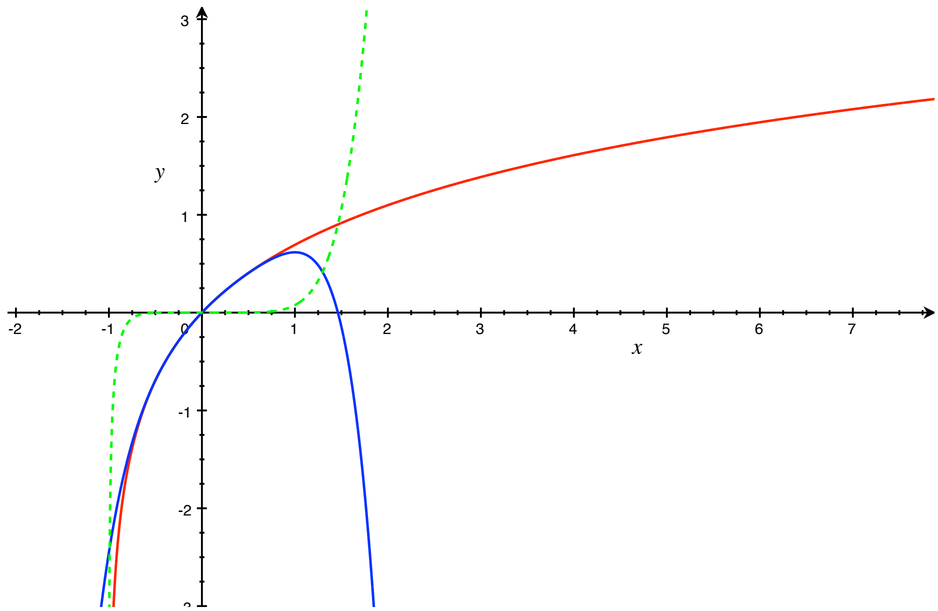
Exemplo: Função logaritmo $\ln(1+x)$

Expansão de Taylor, de ordem $n = 5$ centrada em $x_0 = 0$.



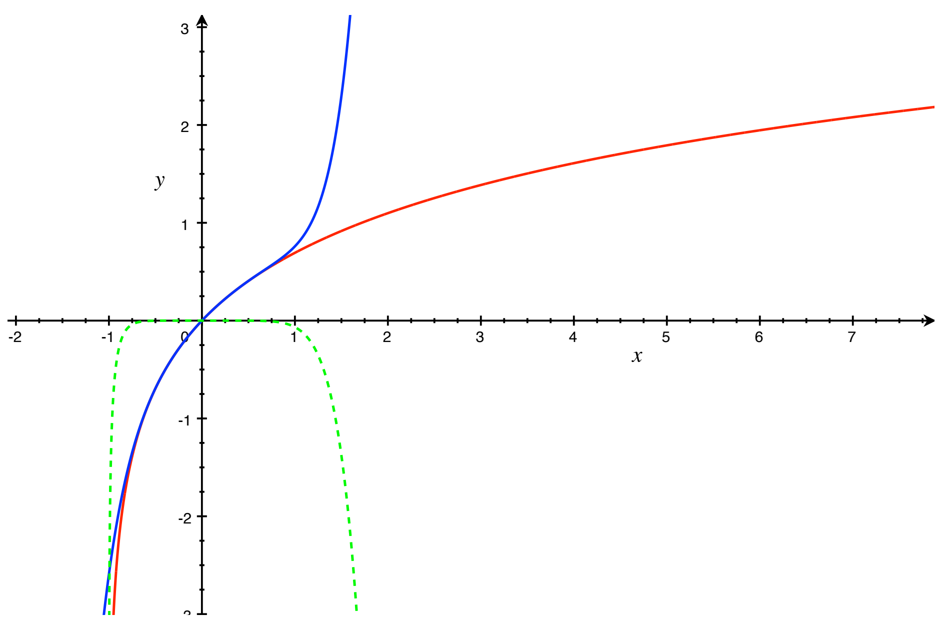
Exemplo: Função logaritmo $\ln(1+x)$

Expansão de Taylor, de ordem $n = 6$ centrada em $x_0 = 0$.



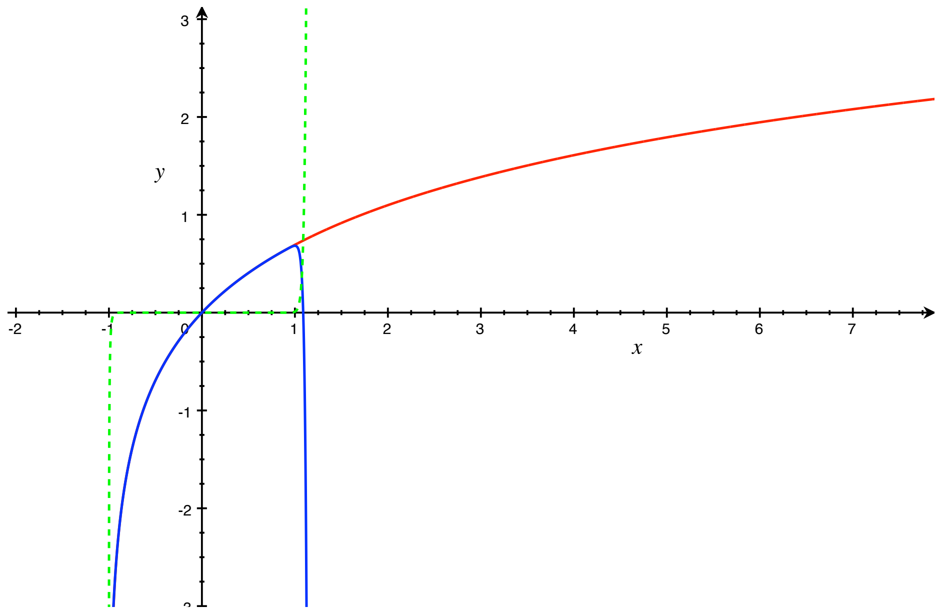
Exemplo: Função logaritmo $\ln(1+x)$

Expansão de Taylor, de ordem $n = 7$ centrada em $x_0 = 0$.



Exemplo: Função logaritmo $\ln(1 + x)$

Expansão de Taylor, de ordem $n = 50$ centrada em $x_0 = 0$.



Observações

⇒ Podemos usar os polinômios de Taylor para aproximar os valores de uma função não elementar na vizinhança de um ponto onde conhecemos os valores exatos da função e suas derivadas.

⇒ O intervalo onde essas aproximações são apropriadas depende da função que está sendo estudada.

⇒ É possível usar a fórmula correspondente ao resto para obter uma estimativa do nível de erro cometido nessas aproximações.

1. Lembretes: Cálculo 1
   - Derivadas
   - Reta tangente
   - Aproximação linear
   - Teorema do valor médio

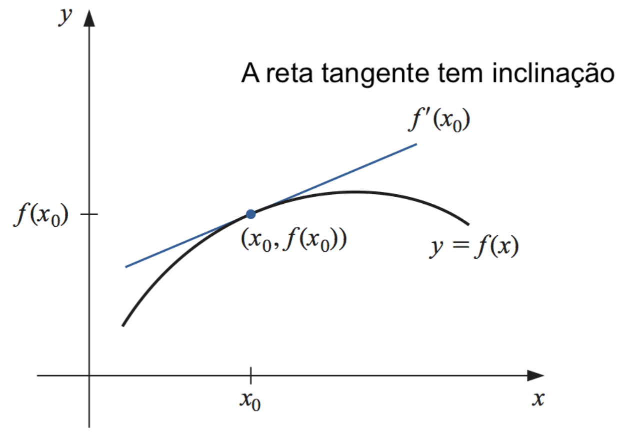
Derivadas

Considere a função real $f(x)$.
$\Rightarrow$ A derivada de f em x_0 é dada por

- $f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ quando o limite existe.

$\Rightarrow$ Se f possui derivada em todo $x_0 \in (a,b)$ dizemos que ela é diferenciável em (a,b). Escrevemos $f \in C^1(a,b)$.

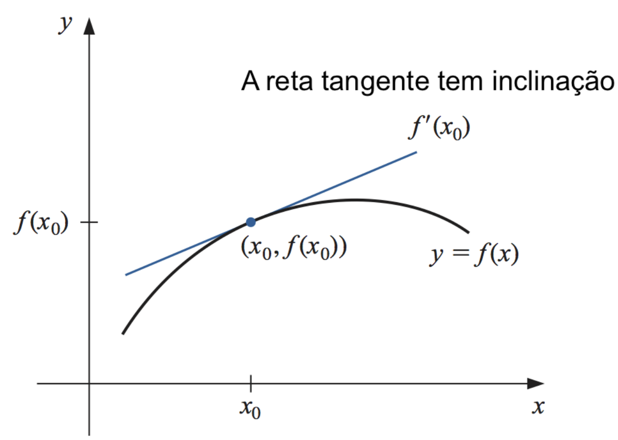
Interpretação geométrica: Reta tangente



Interpretação geométrica da derivada.
Reta tangente:

$$\boxed{y = f'(x_0)\,(x - x_0) + f(x_0)}$$

Interpretação geométrica da derivada: Aproximação linear



Interpretação geométrica da derivada.
Aproximação linear:

$$\boxed{f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\,\Delta x}$$

O Teorema do valor médio

Teorema do valor médio (de Lagrange)

Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b). Então existe um número $c \in (a, b)$ tal que

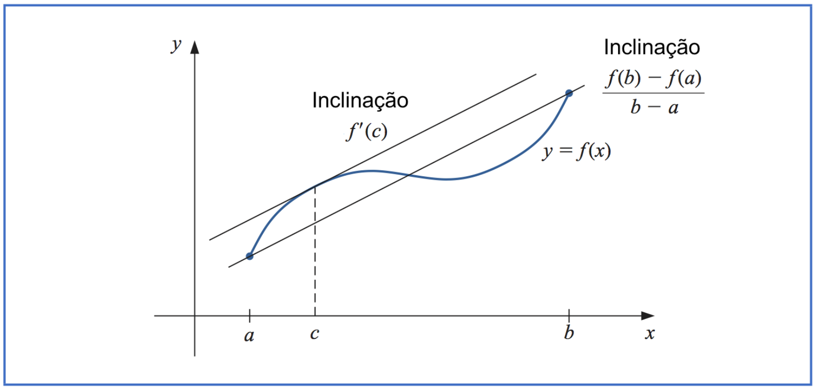
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

O Teorema do valor médio

Teorema do valor médio (de Lagrange)

Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b). Então existe um número $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



Interpretação geométrica do Teorema [Burden, 2013].

O Teorema do valor médio

Teorema de Rolle

Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b). Se $f(a) = f(b)$ então existe um número $c \in (a, b)$ tal que

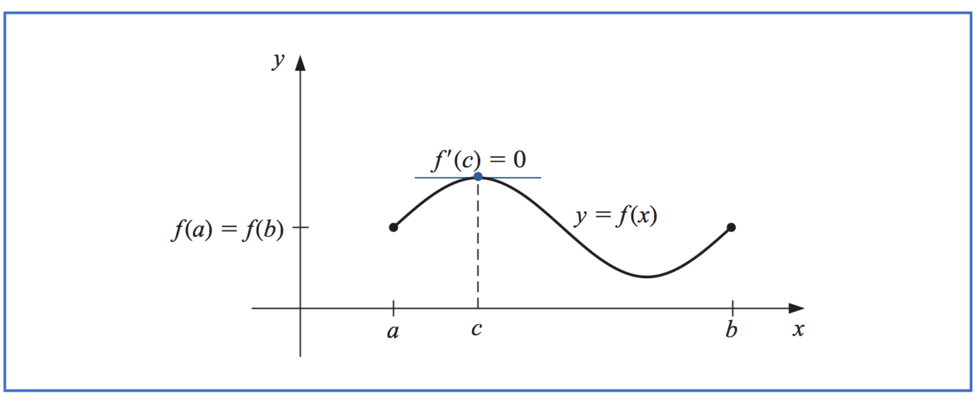
$$f'(c) = 0.$$

O Teorema do valor médio

Teorema de Rolle

Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b). Se $f(a) = f(b)$ então existe um número $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = 0.$$



Interpretação geométrica do Teorema [Burden, 2013].

Referências

R.L. Burden e J.D. Faires,
Análise Numérica.
Trad. 8a Edição, Cengage Learning, 2013.