

1 Derivação implícita

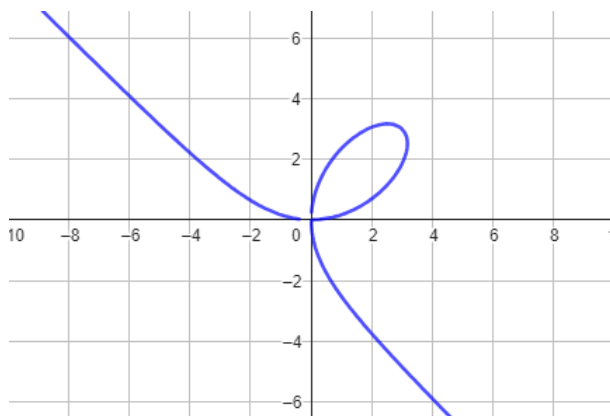
Questão 1:

Suponha que $f(x)$ é uma função que satisfaz $f(x) \geq 0$ e a equação $x^2 + f(x)^2 = 1$.

- a) Para quais valores de x existe $f(x)$?
- b) Podemos expressar $f(x)$ explicitamente em termos de x ?
- c) Imaginando agora que $f(x) \leq 0$, expresse $f(x)$ explicitamente em termos de x .

Questão 2:

Considere a curva formada pelos pontos que satisfazem $x^3 + y^3 = 6xy$ e veja o seu gráfico abaixo. Ela é chamada Folium de Descartes.



- a) Verifique que os pontos $(0, 0)$ e $(3, 3)$ são pontos da curva, mas que $(1, 1)$ não é.
- b) Observando a figura, verifique que podemos encontrar, dentro do Folium de Descartes, o gráfico de 3 funções $f_1(x)$, $f_2(x)$ e $f_3(x)$, definidas para x no intervalo $(1.8, 2.2)$. Pinte esses gráficos.
- c) Mesmo reconhecendo o gráfico das funções do item anterior, não conseguimos explicitá-las. Por isso, dizemos que elas são funções da variável x definidas implicitamente. Imaginando que y é dado implicitamente em termos de x , encontre $\frac{dy}{dx}$.
- d) Encontre a inclinação da reta tangente à curva no ponto $(3, 3)$.

Questão 3:

Para a curva abaixo, determine os pontos onde inclinação da reta tangente vale 1

$$x^2 + y^2 - xy = 1.$$

Questão 4:

Seja $y^2 = x^2 + \sin(xy)$. Se y é dado implicitamente em termos de x , determine $\frac{dy}{dx}$.

Questão 5:

Considere um tanque cilíndrico de raio 1m com água dentro atingindo uma altura h .

- a) Escreva o volume da água dentro do tanque em função da altura h .
- b) Se abrirmos uma torneira na parte de baixo do tanque, a água irá escoar, fazendo com que a altura de água preenchida mude em função do tempo. Por consequência, o volume também. Encontre uma expressão que relacione $\frac{dV}{dt}$ e $\frac{dh}{dt}$.
- c) Se a água escoa uma taxa de 3000 L/min, qual é a taxa de variação da altura da água em função do tempo?

Questão 6:

Ar está sendo injetado em um balão esférico à uma taxa de $100 \text{ cm}^3/\text{s}$. Quão rápido o raio do balão está aumentando no momento em que o diâmetro é 50 cm?

2 Primitivas

Definição: uma função F é uma primitiva de f se $F'(x) = f(x)$.

Questão 7:

Encontre pelo menos uma primitiva para cada função abaixo.

- a) $f(x) = 2$.
- b) $f(x) = 2x$.
- c) $f(x) = 3x^2$.
- d) $f(x) = x^2$.
- e) $f(x) = x^a, a \neq -1$.
- f) $f(x) = 0$.
- g) $f(x) = \cos(x)$.
- h) $f(x) = -\text{sen}(x)$.
- i) $f(x) = \text{sen}(x)$.
- j) $f(x) = \sec^2(x)$.
- k) $f(x) = \sec(x) \text{tg}(x)$.
- l) $f(x) = e^x$.
- m) $f(x) = a^x \ln(a), 0 < a \neq 1$.
- n) $f(x) = a^x, 0 < a \neq 1$.

Questão 8:

Sejam $f(x) = 1/x$ e $g(x) = \ln(x)$.

- a) Para quais valores de x está definida $f(x)$? E $g(x)$?
- b) Seja $h(x) = \ln|x|$. Para quais valores de x está definida $h(x)$?
- c) Calcule a derivada de $h(x)$ em cada ponto onde ela está definida.
- d) $h(x)$ é uma primitiva de $f(x)$?

Questão 9:

Encontre a única primitiva F de $f(x) = \cos(x) + x^3$ tal que $F(0) = 3$.