1. (a)

$$L(x) = f(0) + f'(0)(x-0)$$
$$L(x) = 1 + 3(1-x)^2(-1)x = 1 - 3(1-x)^2 x$$
$$L(x) = 1 + 3(1-x)^2(-1)x = 1 - 3x$$

(b)

$$L(x) = f(e^2) + f'(e^2)(x - e^2)$$

$$f'(k) = \frac{d}{dx}\left(\frac{k^2}{\ln k}\right)$$
$$f'(k) = \frac{(k^2)' \ln k - k^2 (\ln k)'}{(\ln k)^2}$$
$$f'(k) = \frac{2k \ln k - k^2 \frac{1}{k}}{(\ln k)^2}$$
$$f'(k) = \frac{2k \ln k - k}{(\ln k)^2}$$

$$L(k) = \frac{e^4}{\ln e^2} + \frac{2e^2 \ln e^2 - e^2}{(\ln e^2)^2}(k - e^2)$$
$$L(k) = \frac{e^4}{2} + \frac{3e^2}{4}(k - e^2)$$

2.

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - 5}{x - 2} = 10$$

3.

$$y' = 3x^2 + 3$$
$$3x^2 + 3 = 6$$
$$x = \pm 1$$
$$((1,4), (-1,-4))$$
$$4 = 6 \times 1 + c \implies x = -2$$
$$-4 = 6 \times (-1) + c \implies x = 2$$
$$y_1 = 6x + 2$$
$$y_2 = 6x - 2$$

4.

5.

6.

7.

$$C/h = kv^3 \implies C = khv^3$$
$$h = \frac{S}{v}$$
$$h = \frac{S}{v-a}$$
$$C = k\frac{Sv^3}{v-a}$$
$$T(v) = \frac{kSv^3}{v-a}$$
$$T'(v) = kS\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{v^3}{v-a}\right)\right]$$
$$T'(v) = kS\left(\frac{3v^2(v-a)-v^3}{(v-a)^2}\right)$$
$$T'(v) = kS\left(\frac{3v^3-3av^2-v^3}{(v-a)^2}\right)$$
$$T'(v) = kS\left(\frac{2v^3-3av^2}{(v-a)^2}\right)$$
$$\frac{2v^3-3av^2}{(v-a)^2} = 0$$
$$2v^3-3av^2 = 0$$
$$2v-3a = 0 \implies v = \frac{3}{2}a$$

8.

9.

$$
\begin{aligned}
&Cu_a(m) = 5m \\
&Cu_l(m) = 3m \\
&h = 100 \\
&\sqrt{b^2 + h^2} = 1000 \\
&b^2 = 1000^2 - 100^2 = (1000 + 100)(1000 - 100) = 1100 \times 900 \\
&= 11 \times 9 \times 100^2 \\
&b = \sqrt{11} \times 3 \times 100 = 300\sqrt{11} \\
&Cu_t(t_1, a, t_2) = Cu_l(t_1) + Cu_a(a) + Cu_l(t_2) \\
&Cu_t(t_1, a, t_2) = 3t_1 + 5a + 3t_2
\end{aligned}
$$

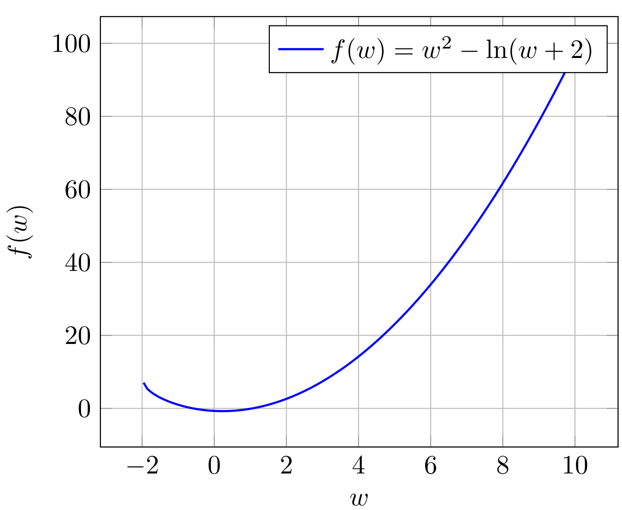
10. (a)

$$
\begin{aligned}
&w + 2 \geq 0 \implies w \geq -2 \\
&D(f) = [-2, +\infty)
\end{aligned}
$$

(b)

$$w^2 - \ln(w + 2) = 0$$

(c)



11. (a) Certamente, uma função contínua em um intervalo fechado $[a, b]$ pode existir sem apresentar pontos críticos em seu interior.

Um exemplo simples seria uma função constante dentro do intervalo $[a, b]$. Se considerarmos uma função $f(x)$ constante nesse intervalo, não haverá variação na função dentro do intervalo, e, portanto, não existirão pontos críticos, pois não há mudança na inclinação ou na concavidade.

Portanto, uma função constante em um intervalo fechado $[a, b]$ é contínua em todo o intervalo, mas não tem pontos críticos, já que não há mudança na função ao longo desse intervalo.

(b) Uma função contínua em um intervalo fechado $[a, b]$ pode, sim, existir sem apresentar pontos críticos em seu interior.

Um exemplo clássico é uma função constante no intervalo $[a, b]$. Se considerarmos uma função $f(x)$ constante nesse intervalo, não haverá variação na função dentro do intervalo, e, portanto, não existirão pontos críticos, já que não há mudança na inclinação ou concavidade.

Portanto, uma função constante em um intervalo fechado $[a, b]$ é contínua em todo o intervalo, mas não tem pontos críticos, pois não há mudança na função ao longo desse intervalo.

(c) Não é verdade que uma função contínua em $[a, b]$ com um mínimo local em $c \in (a, b)$ necessariamente tenha pontos críticos no intervalo (a, b). Além disso, a existência da derivada não é uma exigência para a presença de um mínimo local em $x = c$.

Um exemplo disso é uma função com um mínimo local em c mas sem pontos críticos. Por exemplo, a função $f(x) = |x|$ possui um mínimo local em $x = 0$, mas não possui pontos críticos no intervalo $(-1, 1)$ porque a derivada não existe em $x = 0$.

Portanto, a presença de um mínimo local em c não implica que a função tenha pontos críticos no intervalo (a, b), e a derivada não precisa existir em $x = c$ para que haja um mínimo local nesse ponto.

(d) Sim, é possível ter uma função contínua em um intervalo fechado $[a, b]$ que possui um máximo absoluto em $x = a$ e um mínimo absoluto em $x = b$. Isso ocorre quando a função é constante nesse intervalo.

Se considerarmos uma função $f(x)$ que é constante em $[a, b]$ e diferente de constantes em $x = a$ e $x = b$, teremos um exemplo de uma função que alcança seu valor máximo absoluto em $x = a$ e seu valor mínimo absoluto em $x = b$.

(e) Sim, uma função que atenda a essas condições seria uma função constante no intervalo $[a, b]$. Se $f(x)$ é uma função constante nesse intervalo, a derivada $f'(x)$ seria zero para qualquer x no intervalo (a, b).

Se considerarmos $f(x) = c$ para $x \in [a, b]$, onde c é uma constante, a derivada $f'(x)$ será zero, pois a derivada de uma constante é zero. Nesse caso, a função terá um mínimo absoluto em $x = a$ e um máximo absoluto em $x = b$ sem ter pontos críticos no intervalo (a, b).

Portanto, a função constante $f(x) = c$ para $x \in [a, b]$ é um exemplo de uma função que atende às condições especificadas: mínimo absoluto em $x = a$, máximo absoluto em $x = b$ e $f'(x) = 0$ para qualquer x no intervalo (a, b).

(f) Uma função contínua em um intervalo fechado $[a, b]$ com um mínimo absoluto em x_1 e um máximo absoluto em x_2 onde $x_1 = x_2$ não é possível, exceto em um caso particular.

Em um cenário onde $x_1 = x_2$ no intervalo $[a, b]$, a função deveria ter ambos os extremos do intervalo como mínimo e máximo absolutos, o que só é possível se a função for constante nesse intervalo, ou seja, se $f(x)$ for uma constante em $[a, b]$.

Assim, a única situação na qual uma função contínua em um intervalo $[a, b]$ poderia ter um mínimo absoluto em x_1 e um máximo absoluto em x_2 com $x_1 = x_2$ seria se a função fosse uma constante nesse intervalo.

Portanto, a resposta seria que somente uma função constante em todo o intervalo $[a, b]$ teria mínimo e máximo absolutos no mesmo ponto, se $x_1 = x_2$.

(g) Sim. Uma função que quebrasse esta regra violaria o teste de derivada.

(h) Sim, é possível ter uma função derivável $f(x)$ no intervalo aberto (a, b) sem possuir pontos extremos nesse intervalo.

Um exemplo seria a função $f(x) = x$ no intervalo aberto (a, b). Essa função é derivável em todos os pontos do intervalo aberto, porém não possui um máximo ou mínimo local nesse intervalo. Como é uma função linear e não tem pontos de inflexão, ela não possui pontos extremos.

Portanto, é possível ter funções deriváveis no intervalo aberto (a, b) sem apresentar pontos extremos nesse intervalo.