Algumas identidades trigonométricas úteis

1. Identidade Trigonométrica Fundamental: $\operatorname{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$

   Divida os dois lados da equação na identidade fundamental por $\cos^2(\theta)$:

2. $\tan^2(\theta) + 1 = \sec^2(\theta)$

   Divida os dois lados da equação na identidade fundamental por $\operatorname{sen}^2(\theta)$:

3. $1 + \cot^2(\theta) = \csc^2(\theta)$

   Com o seno da soma de dois arcos, é possível obter:

4. $\operatorname{sen}(2\theta) = 2\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta)$

   Com o cosseno da soma de dois arcos, e identidade fundamental, é possível obter:

5. $\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$

6. $\cos(2\theta) = 1 - 2\operatorname{sen}^2(\theta)$

Questão 1:
Calcule as integrais.

(a) $\displaystyle\int_0^2 x^3\,dx$

(b) $\displaystyle\int_{-1}^1 (1-2y-3y^2)\,dy$

(c) $\displaystyle\int_0^{49} \sqrt{t}\,dt$

(d) $\displaystyle\int_1^3 \frac{2}{x^3}\,dx$

(e) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \sec^2(\theta)\,d\theta$

(f) $\displaystyle\int_0^1 2^x\,dx$

(g) $\displaystyle\int \left(z^2+1+\frac{1}{z^2+1}\right)\,dz;$

(h) $\displaystyle\int \big(1+\mathrm{tg}^2(s)\big)\,ds;$

Questão 2:
Aplique o Teorema Fundamental do Cálculo para determinar a derivada da função.

(a) $\displaystyle g(x)=\int_1^x \ln(t)\,dt$

(b) $\displaystyle F(x)=\int_x^7 \mathrm{sen}(u^7)\,du$

(c) $\displaystyle h(t)=\int_{\cos(t)}^1 \cos(x)\,dx$

Questão 3:
Seja $\displaystyle S(x)=\int_0^x \mathrm{sen}(\pi t^2/2)\,dt$. Determine os pontos críticos de $S(x)$.

Questão 4:

(a) Verifique que $1\le\sqrt{1+x^4}\le 1+x^4\,,\forall x\in\mathbb{R}\,.$

(b) Mostre que $\displaystyle 1\le\int_0^1\sqrt{1+x^4}\,dx\le\frac{6}{5}\,.$

Questão 5:
Use o método da substituição para calcular cada integral.

(a) $\displaystyle\int x\,\mathrm{sen}(x^2)\,dx$

(b) $\displaystyle\int u^2 e^{u^3}\,du$

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{5-3x}\,dx$

(d) $\displaystyle\int u\sqrt{1-u^2}\,du$

(e) $\displaystyle\int \cos(x)e^{\mathrm{sen}(x)}\,dx$

(f) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{sen}(x)}{1+\cos^2(x)}\,dx$

(g) $\displaystyle\int_{\frac{\pi^2}{4}}^{\pi^2} \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx$

(h) $\displaystyle\int_{-2}^{-6} \left(\frac{4}{(1+2x)^3} - \frac{5}{1+2x}\right)\,dx$

Questão 6:
Seja g uma função com derivada contínua no intervalo $[0,1]$, tal que $g(0) = 1$ e $g(1) = 3$. Calcule a integral

$$\int_0^1 \big(3x^2 - g'(x)\big)\,dx.$$

Questão 7:
Seja f uma função contínua no intervalo $[1,8]$ tal que

$$\int_1^8 f(x)\,dx = 6\,.$$

Calcule a integral $\displaystyle\int_1^2 x^2 f(x^3)\,dx\,.$

Questão 8:
Para as integrais abaixo, tente utilizar alguma identidade trigonométrica antes de resolver.

(a) $\displaystyle\int \cos^3(x)\,dx$

(b) $\displaystyle\int \tan^4(x)\,dx$

Questão 9:
Calcule o volume do sólido de revolução obtido pela rotação da região R delimitada pelas curvas dadas em cada item. Faça um esboço da região R utilizada para a construção do sólido.

(a) $y^2 = 2x + 4$ e $x - y + 2 = 0$, girando em torno do eixo x;

(b) $x = \dfrac{\sqrt{2y}}{y^2 + 1}$, $x = 0$ e $y = 1$, girando em torno do eixo y.

Questão 10:
Faça um esboço do triângulo com vértices $(1, 1)$, $(1, 2)$ e $(2, 2)$. Determine o volume dos sólidos obtidos com a rotação das regiões em torno dos seguintes eixos:

(a) reta $x = 2$;

(b) reta $y = 1$.

Questão 11:
Encontre o volume do sólido S, sabendo que

- a base de S é a região delimitada pela parábola $y = 1 - x^2$ e pelo eixo x;
- as seções transversais perpendiculares ao eixo y são quadradas.

Questão 12:
Use as ideias de cálculo de volume por meio de integrais para encontrar uma expressão para o volume de um tronco de cone circular reto com altura h, raio da base inferior R e raio de base superior r.

Questão 13:
Calcule as integrais indefinidas.

(a) $\displaystyle\int re^{r/2}dr$; (b) $\displaystyle\int p^5 \ln(p)dp$; (c) $\displaystyle\int t \sec^2(2t)dt$; (d) $\displaystyle\int \ln^2(x)dx$.

Questão 14:
Primeiramente faça uma substituição e então use integração por partes para calcular a integral.

(a) $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{\cos(t)}\,\mathrm{sen}(2t)dt.$ (b) $\displaystyle\int \cos(\ln(x))dx;$

Questão 15:
Suponha que, para uma função f, as derivadas f' e f'' sejam contínuas. Se $f(0) = 1$, $f(2) = 3$, $f'(0) = 5$ e $f'(2) = 7$, determine o valor de $I = \displaystyle\int_0^2 3xf''(x)dx$.

Questão 16:
Calcule as seguintes integrais usando substituição trigonométrica.

Para o item (a), utilize $x = \mathrm{sen}(\theta)$ e depois alguma identidade trigonométrica para resolver a integral; lembre-se de voltar para a variável x ao final. Para o item (b), use a mesma ideia do item (a), mas note que será preciso usar outra substituição.

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

(b) $\displaystyle\int_{\frac{2}{5}}^{\frac{4}{5}} \frac{\sqrt{25x^2-4}}{x}\,dx.$

Questão 17:
Com o método de frações parciais, é possível decompor as funções racionais em parcelas mais simples, como indicado em cada caso abaixo. Encontre o valor das constantes $(A\,,B\,,C)$, e depois resolva as integrais.

(a) Resolva $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-7x+10}\,dx$, sabendo que:

$$\frac{1}{x^2-7x+10} = \frac{1}{(x-2)(x-5)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-5}\,.$$

(b) Resolva $\displaystyle\int \frac{1}{(x+1)(x^2+1)}\,dx$, sabendo que:

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}\,.$$

Questão 18:
Para cada integral imprópria abaixo, veja se diverge ou converge. Se convergir, encontre o valor.

(a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{\sqrt{1-\operatorname{sen}(x)}}dx;$ (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}dx;$ (c) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^4}dx;$

Questão 19:
Responda cada item, justificando.

(a) Para cada $a > 0$, calcule o valor de $P(a) = \displaystyle\int_{-a}^{a} x^3 dx;$

(b) Calcule $\displaystyle\lim_{a\to+\infty} P(a);$

(c) Podemos dizer que a integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^3\, dx$ é convergente? Por quê?

Questão 20:
Usando critérios de comparação, determine se as integrais a seguir são convergentes ou divergentes:

(a) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{3x}{x^5+7}dx;$ (b) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x}\cos^2(\sqrt{x^2+1})dx;$

Gabarito

1. (a) $\left.\dfrac{x^4}{4}\right|_0^2 = \dfrac{2^4}{4} = 4$

   (b) $\left.(y - y^2 - y^3)\right|_{-1}^1 = 2 - 0 - 2 = 0$

   (c) $\left.\dfrac{2}{3}t^{3/2}\right|_0^{49} = \dfrac{2}{3}7^3 = \dfrac{686}{3}$

   (d) $\left.2\,\dfrac{x^{-2}}{-2}\right|_1^3 = 1 - \dfrac{1}{9} = \dfrac{8}{9}$

   (e) $\left.\tan(\theta)\right|_0^{\pi/4} = 1$

   (f) $\left.\dfrac{2^x}{\ln(2)}\right|_0^1 = \dfrac{2}{\ln(2)} - \dfrac{1}{\ln(2)} = \dfrac{1}{\ln(2)}$

   (g) $\dfrac{z^3}{3} + z + \arctan(z) + C$

   (h) $\tan x + C$

2. (a) $g'(x) = \ln(x)$;

   (b) $F'(x) - \operatorname{sen}(x^7)$;

   (c) $h'(t) = \cos\big(\cos(t)\big)\operatorname{sen}(t)$;

3. Pontos críticos: $\{0, \pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{4}, \pm\sqrt{6}, \ldots\}$

4. Dica: faça a integral de $1 + x^4$ no mesmo intervalo.

5. (a) $-\dfrac{1}{2}\cos(x^2) + C$

   (b) $\dfrac{e^{u^3}}{3} + C$

   (c) $-\dfrac{\ln|5 - 3x|}{3} + C$

   (d) $-\dfrac{1}{3}(1 - u^2)^{3/2} + C$

   (e) $e^u + C = e^{\operatorname{sen}(x)} + C$

   (f) $-\arctan\big(\cos(x)\big) + C$

   (g) $\left.2\operatorname{sen}(u)\right|_{u=\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \left.2\operatorname{sen}(\sqrt{x})\right|_{x=\frac{\pi^2}{4}}^{\pi^2} = -2$

   (h) $\left.\dfrac{1}{2}\left(-2u^{-2} - 5\ln|u|\right)\right|_{-3}^{-11} = \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{2}{121} - 5\ln 11 + \dfrac{2}{9} + 5\ln 3\right)$

6. -1

7. 2

8. (a) $\operatorname{sen}(x) - \dfrac{1}{3}\operatorname{sen}^3(x) + C$

(b) $\dfrac{\tan^3(x)}{3} - \tan(x) + x + C$

9. (a) $V = \dfrac{4\pi}{3}$
   (b) $V = \dfrac{\pi}{2}$

10. (a) $V = \dfrac{2\pi}{3}$
    (b) $V = \dfrac{2\pi}{3}$

11. $V = \int_0^1 A(y)dy = 2$

12. $V = \dfrac{\pi h}{3(R-r)}(R^3 - r^3) = \dfrac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2)$

13. (a) $e^{r/2}(2r-4) + C$
    (b) $\dfrac{p^6 \ln(p)}{6} - \dfrac{p^6}{36} + C$
    (c) $\dfrac{2t\tan(2t) - \ln|\sec(2t)|}{4} + C$
    (d) $x\ln^2(x) - 2x\ln(x) + 2x + C$

14. (a) $\dfrac{4}{e}$
    (b) $\dfrac{x}{2}\big(\mathrm{sen}\big(\ln(x)\big) + \cos\big(\ln(x)\big)\big) + C$

15. $I = 36$

16. (a) $-\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x} + C$
    (b) $2\big(\tan(\theta) - \theta\big)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = 2\sqrt{3} - \dfrac{2\pi}{3}$

17. (a) $\dfrac{\ln(|x-5|)}{3} - \dfrac{\ln(|x-2|)}{3}$
    (b) $\dfrac{\ln(|x+1|)}{2} - \dfrac{\ln(x^2+1)}{4} + \dfrac{\arctan(x)}{2}$

18. (a) Converge para 2.
    (b) Converge para 0.
    (c) Diverge.

19. (a) 0
    (b) 0
    (c) Não. Por definição, a integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^3\,dx$ só é convergente se $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} x^3\,dx$ e $\displaystyle\int_{a}^{+\infty} x^3\,dx$ convergirem (separadamente) para algum a: nenhuma das duas converge.

20. (a) Converge.
    (b) Converge.