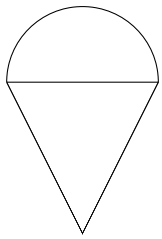
1 Somas e áreas

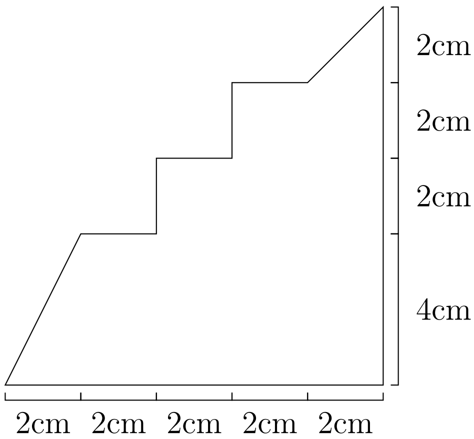
Questão 1:

Seja a figura abaixo formada por um semicírculo de raio 5cm e um triângulo de altura 10cm, calcule a área da figura.



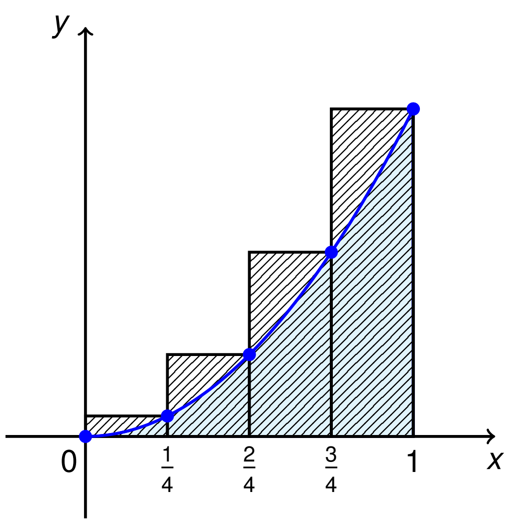
Questão 2:

Calcule a área da figura abaixo.



Questão 3:

Seja o gráfico de $f(x) = x^2$, com $x \in [0, 1]$ e os 4 retângulos com vértices superiores à direita apoiados em pontos a curva.



a) Use a soma das áreas destes 4 retângulos como aproximação para a área da região abaixo do gráfico. Essa aproximação é maior ou menor do que a área real?

b) Qual seria o valor dessa aproximação com 10 retângulos?

c) Determine uma expressão para a aproximação construída com n retângulos. Use a fôrmula

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \,.$$

d) Se o número de retângulos fosse muito grande ($n \to \infty$), qual seria o valor da área?

Repare que essa construção foi feita usando retângulos apoiados à direita no gráfico. Poderiam ter sido escolhidos retângulos apoiados na esquerda. A diferença pode ser observada no seguinte link em geogebra: GeoGebra.

2 Notação de somatório

O somatório é uma operação da forma

$$\sum_{i=m}^{n} a_i \,,$$

onde Σ representa a operação de somatório, a_i os termos que estão sendo somados, i o índice referente a cada termo, começando no valor m e terminando em n. Alguns exemplos:

a) $\displaystyle\sum_{i=0}^{5} 5i = 5\cdot 0 + 5\cdot 1 + 5\cdot 2 + 5\cdot 3 + 5\cdot 4 + 5\cdot 5 = 75 \,.$

b) $\displaystyle\sum_{i=2}^{4} i^2 - 1 = (2^2-1) + (3^2-1) + (4^2-1) = 26 \,.$

c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} k = k + k + \ldots + k = n\cdot k \,.$

d) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} \,.$

e) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 \,.$

3 Integral definida

Definição: Seja f uma função real, contínua num intervalo $[a,b]$. Podemos definir a soma de Riemann como uma expressão da forma

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x = f(x_1^*)\Delta x + f(x_2^*)\Delta x + \ldots + f(x_n^*)\Delta x \,,$$

onde $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, cada x_i^* é dito um ponto amostral pertencende ao subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, que satisfaz $x_i = a + (i-1)\Delta x$.

Definição: Definimos a integral definida de f, de a até b, como o valor do limite, caso exista,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x \, .$$

Ou seja, a integral definida é o limite de uma soma de Riemann.

Definição: Se $a \leq b$, definimos

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \, .$$

Em particular,

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \, .$$

Além disso, a integral definida tem as seguintes propriedades:

a) $\displaystyle\int_a^b c\, dx = c(b-a) \, ,$

b) $\displaystyle\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \, ,$

c) $\displaystyle\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx \, ,$

d) $\displaystyle\int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx \, ,$

e) $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \, .$