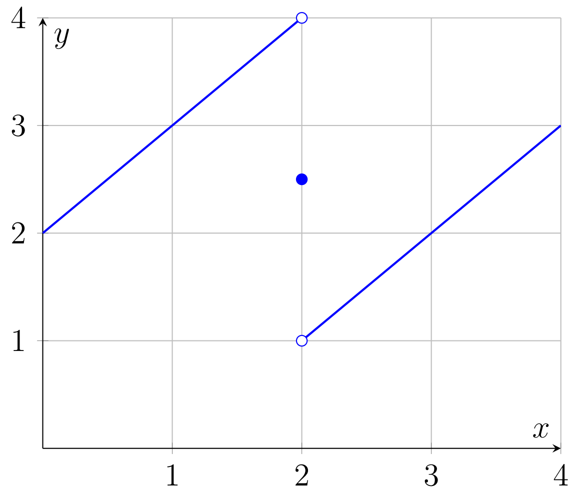
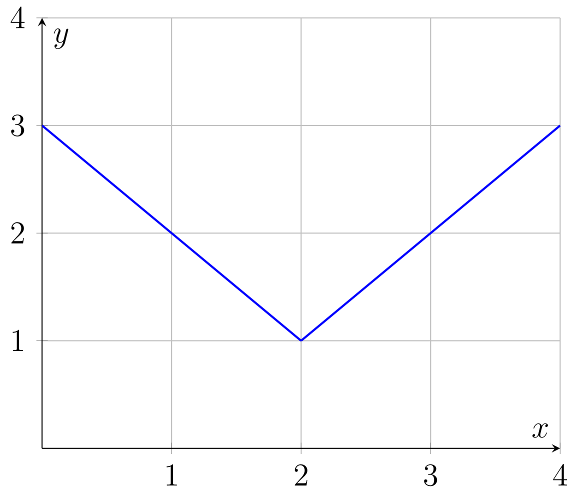
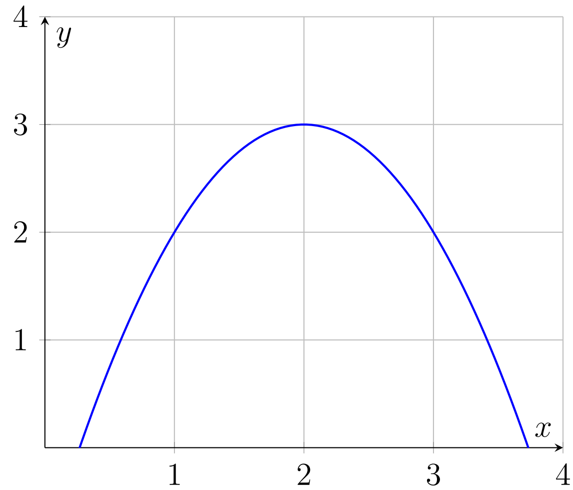
1 Encontrar valores máximos e mínimos.

Considere os seguintes gráficos de funções







Vemos que algumas funções tem valores extremos, em quanto outras não tem. O teorema a seguir da condições para garantir que uma função tenha valores extremos.

Teorema do Valor extremo Se f for uma função **continua** em um intervalo **fechado** $[a, b]$, então f assume valor máximo absoluto $f(c)$ e valor mínimo absoluto $f(d)$ em certos números c e d em $[a, b]$.

Pergunta: Onde podem ocorrer os valores máximos ou mínimos absolutos de uma função contínua em um intervalo $[a, b]$? Como encontrá-los?

Explore as figuras acima e discuta com seus colegas e com sua professora/seu professor.

Conclusão: Os máximos ou mínimos absolutos podem ocorrer nos extremos do intervalo (a ou b) ou nos pontos críticos que estão dentro do intervalo. Assim, conseguimos construir um roteiro para encontrar esses pontos de máximo e de mínimo.

Roteiro para achar máximos e mínimos absolutos.

Para encontrar os valores máximos e mínimos absolutos de uma função continua f em um intervalo fechado $[a, b]$:

1. Encontre os valores de f nos números criticos de f que estão no intervalo aberto em (a, b).

2. Encontre os valores nas extremidades a e b do intervalo.

3. O maior valor entre as etapas 1 e 2 é o valor máximo absoluto, ao passo que o menor de esses valores é o valor mínimo absoluto.

Questão 1:

Encontre os valores máximo e mínimo absolutos da função

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1 \text{ com } -\frac{1}{2} \leq x \leq 4.$$

Questão 2:

Encontre os valores máximo e mínimo absolutos da função

$$h(x) = x^3 - x^2 - x \text{ com } -2 \leq x \leq 2.$$

2 Problemas de otimização

A teoria de máximos e mínimos vista anteriormente permite-nos determinar valores ótimos para certas quantidades desejadas, desde que sejamos capazes de formular o problema de uma forma adequada. Problemas clássicos do dia-a-dia podem ser, por exemplo, determinar

- lucro máximo;
- custo mínimo;
- tempo mínimo;
- tamanho ótimo;
- etc.

Questão 3:

Uma lata cilíndrica é feita para receber um litro de óleo. Encontre as dimensões que minimizarão o custo do metal para produzir a lata.

Questão 4:

Uma caixa sem tampa deve ser construída a partir de um pedaço quadrado de papelão, com 3 metros de largura, cortando fora um quadrado de cada um dos 4 cantos e dobrando para cima os lados. Encontre o maior volume que essa caixa pode ter.

Questão 5:

Tem um fermentador industrial no qual a velocidade da fermentação é dada por $f(t) = t(100-t)$, onde t é a temperatura.

(a) Qual é a velocidade de fermentação máxima?

(b) Para garantir a segurança do fermentador, foi estabelecido que a temperatura máxima de trabalho do fermentador é 40 graus, nesse caso, qual é a velocidade de fermentação máxima?

Relembrando algumas fórmulas de Geometria

Em alguns problemas de Cálculo, como as Questões 3 e 4, precisamos usar fórmulas de Geometria Espacial que são vistas no ensino médio. Recordamos, abaixo, algumas delas.

- Esfera de raio r:
  - Área da superfície: $4\pi r^2$
  - Volume: $\frac{4}{3}\pi r^3$
- Cilindro Circular Reto de altura h com base circular de raio r:
  - Área da superfície: $2\pi r^2 + 2\pi rh$
  - Volume: $\pi r^2 h$
- Paralelepípedo de lados a, b e c:
  - Área da superfície: $2(ab + bc + ac)$
  - Volume: abc
- Cone de altura h com base circular de raio r:
  - Área da superfície: $\pi r^2 + \pi rl$
  - Volume: $\frac{1}{3}\pi r^2 h$