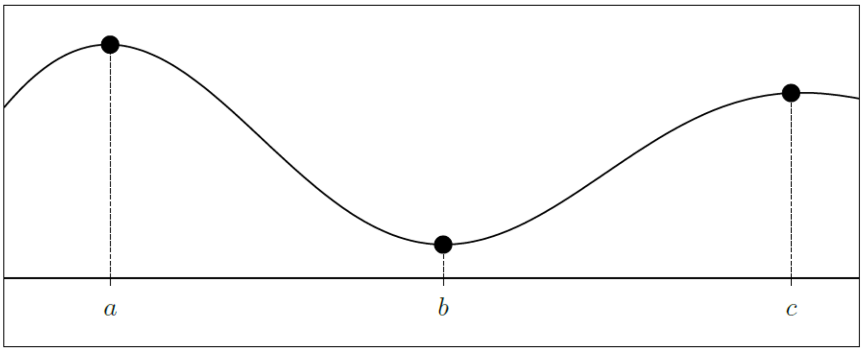
[1] Como tirar conclusões sobre uma função f dada (crescimento/decrescimento, máximos e mínimos locais, concavidade etc.) a partir de suas derivadas?



Olhando o gráfico acima, podemos notar que entre b e c, a inclinação da reta tangente ao gráfico é positiva, e negativa entre a e b. Além disso, vemos também que f cresce entre b e c e decresce entre a e b. Como já vimos antes, temos que:

Teorema (Teste Crescente/Decrescente)**.** Seja $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função real, I um intervalo.

a) Se $f'(x) > 0$ em I, então f é crescente em I.

b) Se $f'(x) < 0$ em I, então f é decrescente em I.

Vamos aplicar o teorema acima para obter regiões de crescimento e decrescimento de algumas funções.

Exemplo. Considere a função $f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x + 1$, com $x \in \mathbb{R}$. Vamos encontrar as regiões de crescimento e decrescimento de f.

Derivando f, obtemos

$$f'(x) = 12x^2 + 6x - 6 = 6 \cdot (2x^2 + x - 1).$$

Para estudar o sinal de f', devemos primeiramente encontrar as raízes do polinômio $2x^2 + x - 1$. De fato,

$$2x^2 + x - 1 = 0 \implies x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{-1 \pm 3}{4} \implies x = -1 \text{ ou } x = \frac{1}{2}.$$

Como $f'(x)$ é uma parábola com concavidade para cima, segue que $f'(x) > 0$ em $(-\infty, -1) \cup (1/2, \infty)$ e $f'(x) < 0$ em $(-1, 1/2)$. Portanto, f é crescente em $(-\infty, -1) \cup (1/2, \infty)$ e decrescente em $(-1, 1/2)$.

[1] Esta aula usou parte do material produzido no projeto "Elaboração de material para disciplinas na modalidade semi-presencial", do Departamento de Matemática do IM/UFRJ. Coordenação: Paulo Amorim; Participantes: Bruno Telch, Rafael Lobosco, Leonardo Damasceno

Repare que o que acabámos de fazer foi determinar o sinal de $f'(x)$. Muitas vezes, isso pode ser feito facilmente com a ajuda de um quadro ou tabela de sinais. Observemos que o sinal de $f'(x)$ é o mesmo que o sinal de $2x^2+x-1$. Como encontrámos as raízes de $2x^2+x-1$, podemos fatorá-lo:

$$2x^2+x-1 = 2(x+1)(x-1/2)$$

(o "2" aparece porque o polinômio $2x^2+x-1$ tem um 2 no termo de grau 2). Assim, o sinal de $f'(x)$ será o mesmo do que o sinal de $(x+1)(x-1/2)$. Deste modo, vemos que quando apenas estamos interessados no sinal de um polinômio (neste caso $f'(x)$), basta encontrar as suas raízes e ver o sinal do produto dos polinômios de grau que se anulam em cada raíz (neste caso, $(x+1)(x-1/2)$).

Mas o sinal de um produto ou quociente é fácil de ver, ao contrário do sinal de uma soma:

	$x<-1$	$x=-1$	$-1<x<1/2$	$x=1/2$	$x>1/2$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-1/2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x+1)(x-1/2)$	$+$	0	$-$	0	$+$
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	0	$\searrow$	0	$\nearrow$

Determinámos assim os intervalos onde f cresce e decresce. Neste caso, como f' é uma parábola voltada para cima, é fácil saber onde é positiva ou negativa conhecendo apenas as raízes. Mas se f' fosse um polinômio de maior grau, um quadro de sinais é imprescindível.

Lembremo-nos do Teorema de Fermat: se f é uma função diferenciável em um ponto de máximo/mínimo local c pertencente ao seu domínio, então $f'(c)=0$. Além disso, note que a sua recíproca não é verdadeira (considere $f(x)=x^3$ e $c=0$). Com esse resultado, uma questão natural a se considerar é a seguinte: como descobrir se f admite máximo/mínimo em um ponto crítico c?

Observando a imagem anterior, note que $f(b)$ é um valor de mínimo local (f é decrescente em $[a,b]$ e é crescente em $[b,c]$). Com essas informações, podemos concluir que, nos pontos extremos, o valor da derivada f' **muda de sinal**. Assim, podemos formular um critério que nos permite concluir se um certo ponto crítico é um máximo ou mínimo local a partir da sua primeira derivada.

Teorema (Teste da Primeira Derivada)**.** Seja f uma função contínua e c um ponto crítico de f.

a) Se o sinal de f' mudar de positivo para negativo, então f tem um máximo local em c.

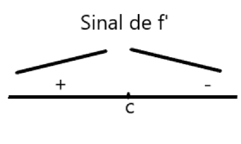


Diagrama auxiliar

b) Se o sinal de f' mudar de negativo para positivo, então f tem um mínimo local em c.

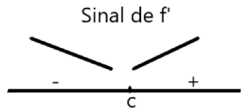
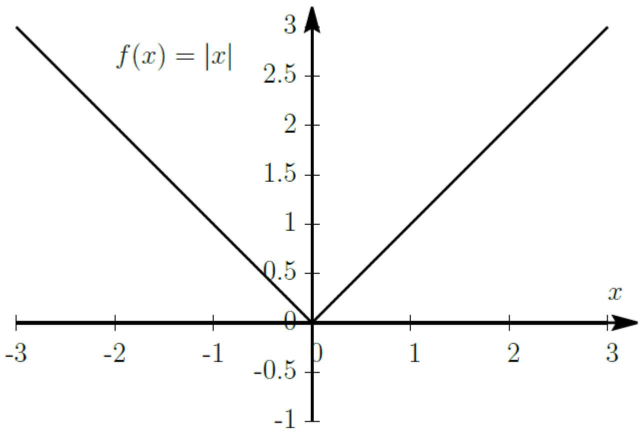


Diagrama auxiliar

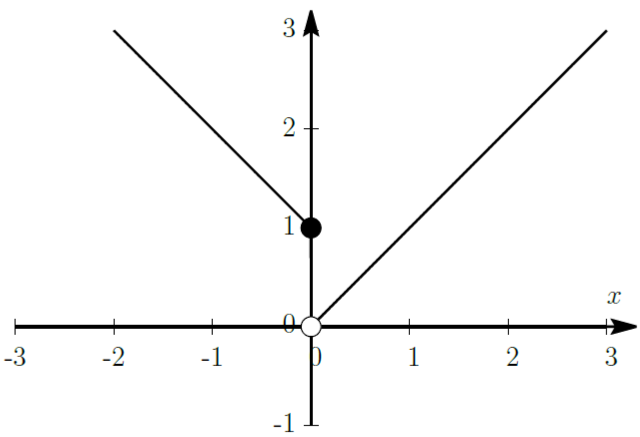
c) Se o sinal de f' não mudar em c, então f não tem nem máximo e nem mínimo locais em c.

Repare que este teste nos permite analisar a figura no início desta aula e concluir que a e c são pontos de máximo, e b é ponto de mínimo.

Note ainda que a função não precisa ter derivada no ponto para se concluir que ele é máximo ou mínimo; ou seja, o teste da primeira derivada também funciona com pontos críticos onde a derivada não existe, como ilustrado na figura abaixo com a função $|x|$.



Ainda, é importante que a função seja contínua. Senão, poderíamos aplicar o teste da primeira derivada à função abaixo, que não tem máximo nem mínimo local em $c = 0$, apesar de esse ser um ponto crítico (pois a derivada não existe aí).



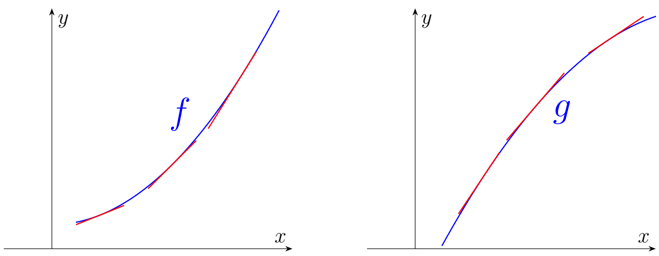
Exemplo. Vamos utilizar o Teste da Primeira Derivada para encontrar os pontos de máximo e mínimo locais da função $f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x + 1$ do exemplo anterior.

Sabemos que os pontos críticos de f são $x_0 = -1$ e $x_0 = \dfrac{1}{2}$. Além disso, como $f'(x) > 0$ para $x < -1$ e $f'(x) < 0$ para $-1 < x < \dfrac{1}{2}$, segue do Teste da Primeira Derivada que $x_0 = -1$ é um ponto de máximo local de f.

Da mesma forma, como $f'(x) < 0$ para $-1 < x < \dfrac{1}{2}$ e $f'(x) > 0$ para $x > \dfrac{1}{2}$, segue do Teste da Primeira Derivada que $x_0 = \dfrac{1}{2}$ é um ponto de mínimo local de f.

Note que tendo feito o quadro de sinais que está acima, estas conclusões são fáceis de chegar.

Agora iremos elaborar um critério para decidir se um certo ponto crítico é máximo ou mínimo local a partir de sua segunda derivada. De fato, observe os dois gráficos abaixo.



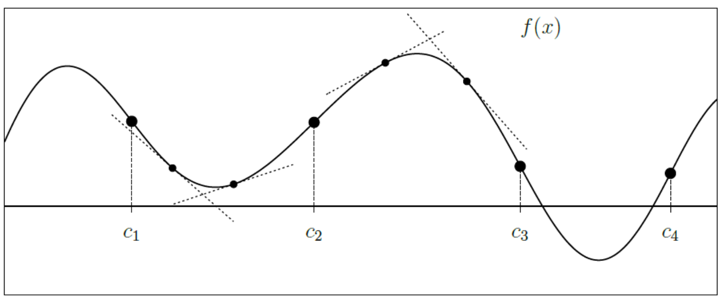
Observe que ambas as funções descritas acima são crescentes. Entretanto, os seus gráficos se comportam de forma um pouco diferente. Com isso, fazemos a seguinte definição:

Definição. Seja f uma função diferenciável e I um intervalo contido em seu domínio.

a) Dizemos que f é **côncava para baixo** em I se todas as suas tangentes em I estão acima do gráfico de f em I.

b) Dizemos que f é **côncava para cima** (ou **convexa**) em I se todas as suas tangentes em I estão abaixo do gráfico de f em I.

Agora observe o gráfico abaixo, onde representamos uma função e algumas das suas retas tangentes:



Observe que a função f cujo gráfico é descrito acima é côncava para baixo no intervalo $[c_2, c_3]$, e é côncava para cima (ou convexa) nos intervalos $[c_1, c_2]$, $[c_3, c_4]$. Agora compare o comportamento da derivada em cada uma dessas regiões. Enquanto nas regiões onde o gráfico de f é côncavo para cima, a inclinação da reta tangente ao gráfico (isto é, a primeira derivada) está **crescendo**, nas regiões onde o gráfico de f é côncavo para baixo, a inclinação da reta tangente ao gráfico está **decrescendo**.

Como vimos na aula passada, temos:

Teorema (Teste da Concavidade)**.** Seja f uma função duas vezes diferenciável em um intervalo I.

a) Se $f''(x) > 0$ para todo $x \in I$, então f será côncava para cima nesse intervalo.

b) Se $f''(x) < 0$ para todo $x \in I$, então f será côncava para baixo nesse intervalo.

Agora observe que, nos pontos c_1 e c_3, a função f deixa de ser côncava para baixo e se torna convexa. Da mesma forma, nos pontos c_2 e c_4, a função f deixa de ser convexa e se torna côncava para baixo. Caso algum ponto possua esse tipo de comportamento, damos o nome de **ponto de inflexão**.

Definição. Um ponto c no domínio de f é um **ponto de inflexão** se f é contínua em c e o gráfico de f mudar de concavidade em c.

Segue do Teste da Concavidade que se a segunda derivada de uma função f mudar de sinal em um ponto c, então c é um ponto de inflexâo de f.

Exemplo. Retomemos ao primeiro exemplo, $f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x + 1$, $x \in \mathbb{R}$. Sabemos que

$$f'(x) = 6 \cdot \left(2x^2 + x - 1\right) \implies f''(x) = 6 \cdot (4x + 1)$$

e que $f'(-1) = f'\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$. Como $f''(-1) = -18 < 0$ e $f''\left(\dfrac{1}{2}\right) = 18 > 0$, segue do Teste da Segunda Derivada que $x_0 = -1$ é um máximo local de f e $x_0 = \dfrac{1}{2}$ é um mínimo local de f.

Utilizando os critérios formulados acima juntamente com os resultados vistos anteriormente, é possível fazer um esboço do gráfico de uma função.

Exemplo. Faremos o esboço do gráfico da função $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$.

1. Primeiramente, explicitaremos o domínio de f: como o numerador e o denominador estão bem definidos para todo $x \in \mathbb{R}$, o domínio de f é $\mathbb{R}$.

2. Agora, descobriremos as interseções do gráfico de f com os eixos coordenados: a interseção com o eixo x é o ponto do plano $(x_0, f(x_0))$ tal que $f(x_0) = 0$, isto é,

$$0 = \frac{x}{x^2 + 1} \iff x = 0,$$

pois $x^2 + 1 \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Logo, $(0,0)$ é o único ponto de interseção do gráfico de f com o eixo x.

A interseção com o eixo y é o ponto do plano $(0, f(0)) = (0,0)$. Logo, o único ponto de interseção com os eixos coordenados é a própria origem.

3. Calculemos as assíntotas de f: as assíntotas horizontais são as retas $y = m$ tais que $\lim_{x\to\infty} f(x) = m$ ou $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -m$. Então,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}} = 0.$$

Da mesma forma, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. Logo, a reta $y = 0$ é a única assíntota horizontal.

As assíntotas verticais são as retas $x = a$ tais que $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$. Como f é uma função contínua em $\mathbb{R}$, não há assíntotas verticais.

4. O próximo passo é calcular a primeira derivada para encontrar os pontos críticos e analisá-los. Derivando f, obtemos:

$$f'(x) = \frac{1\cdot(x^2+1) - x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}.$$

Portanto, os pontos críticos de f são os pontos $f'(x_0) = 0$ dado que f' existe para todos os pontos no domínio de f. Logo,

$$f'(x_0) = 0 \iff \frac{1-x_0^2}{(x_0^2+1)^2} = 0 \iff x_0^2 - 1 = 0 \iff x_0 = \pm 1.$$

Analisemos o sinal de f'. Sabemos que, para $x < -1$,

$$x < -1 \implies x^2 > 1 \implies 1 - x^2 < 0.$$

Da mesma forma, se $x > 1$, $1 - x^2 < 0$. Além disso, para $x \in (-1,1)$,

$$x \in (-1,1) \implies x^2 < 1 \implies 1 - x^2 > 0.$$

Como $(x^2+1)^2 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, obtemos a seguinte tabela:

	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
$1 - x^2$	$-$	0	$+$	0	$-$
$(x^2+1)^2$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	0	$\searrow$

Logo, segue do Teste C/D e do Teste da Primeira Derivada que f é decrescente em $(-\infty,-1] \cup [1,\infty)$ e crescente em $[-1,1]$ e f admite um mínimo local em $x = -1$ e um máximo local em $x = 1$.

5. Agora iremos obter as regiões de concavidade/convexidade e os pontos de inflexão. De fato, derivando novamente f, obtemos

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}\right)' = \frac{-2x\cdot(x^2+1)^2-(1-x^2)\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4} \\ &= \frac{2x\cdot(x^2-3)}{(x^2+1)^3}. \end{aligned}$$

Calculando os possíveis pontos de inflexão, obtemos

$$f''(x)=0 \iff \frac{2x\cdot(x^2-3)}{(x^2+1)^3} \iff x=0 \text{ ou } x^2-3=0 \iff x=0 \text{ ou } x=\pm\sqrt{3}.$$

Agora, vamos analisar o sinal de f''. Para $x<-\sqrt{3}$, temos que

$$x<-\sqrt{3} \implies x^2>3 \implies x^2-3>0.$$

Da mesma forma, para $x>\sqrt{3}$, $x^2-3>0$. Para $-\sqrt{3}<x<0$, temos que

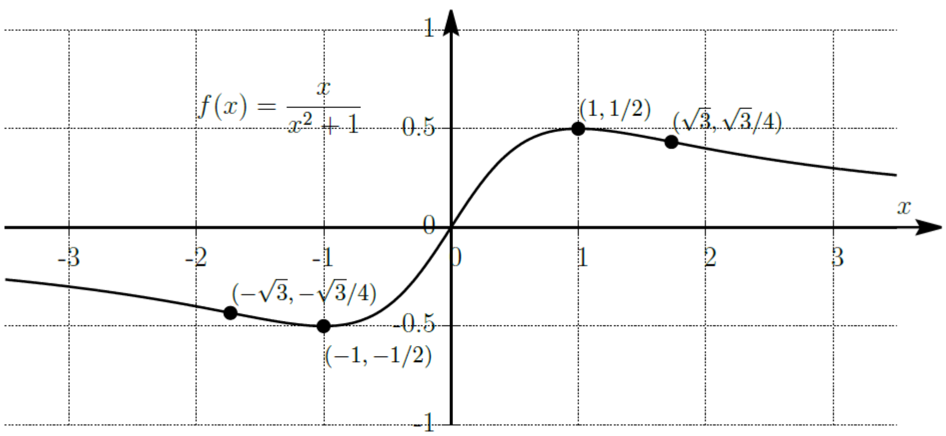
$$-\sqrt{3}<x<0 \implies x^2<3 \implies x^2-3<0.$$

Da mesma forma, para $0<x<\sqrt{3}$, $x^2-3<0$. Montando a tabela,

	$x<-\sqrt{3}$	$x=-\sqrt{3}$	$x\in(-\sqrt{3},0)$	$x=0$	$x\in(0,\sqrt{3})$	$x=\sqrt{3}$	$x>\sqrt{3}$
$2x$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
x^2-3	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x^2+1)^3$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\frown$	0	$\smile$	0	$\frown$	0	$\smile$

Portanto, segue do Teste de Concavidade que f é côncava para cima nos intervalos $(-\sqrt{3},0)$ e $(\sqrt{3},\infty)$ e côncava para baixo nos intervalos $(-\infty,-\sqrt{3})$ e $(0,\sqrt{3})$. Além disso, os pontos de inflexão de f são 0 e $\pm\sqrt{3}$.

6. Utilizando os dados obtidos, podemos fazer o seguinte esboço do gráfico de f:



Utilizando o exemplo anterior como base, podemos estabelecer um pequeno roteiro para a construção de esboço de gráficos:

1. Encontrar o domínio da função.
2. Encontrar as interseções com os eixos (caso existam).
3. Obter as assíntotas horizontais e verticais do gráfico (caso existam).
4. Calcular a primeira derivada e obter os intervalos de crescimento/decrescimento, pontos críticos e máximos e mínimos locais.
5. Calcular a segunda derivada e obter os intervalos de concavidade/convexidade e os pontos de inflexão.
6. Utilizar os dados obtidos para fazer o esboço do gráfico.