Teorema 1.14 (Teorema de Taylor)

Suponha que $f \in C^n[a, b]$, que $f^{(n+1)}$ exista em $[a, b]$ e que $x_0 \in [a, b]$. Para todo $x \in [a, b]$ existe um número $\xi(x)$ entre x_0 e x com

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x),$$

onde

$$\begin{aligned} P_n(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \end{aligned}$$

e

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

■

Aqui o elemento $P_n(x)$ é chamado de **polinômio de Taylor de enésimo grau** para f centrado em x_0, e $R_n(x)$ é chamado de **resto** (ou de **erro de truncamento**) associado a $P_n(x)$. A série infinita obtida tomando-se o limite de $P_n(x)$ para n tendendo a infinito ($n \to \infty$) é chamada de **série de Taylor** para f centrada em x_0. No caso em que $x_0 = 0$, o polinômio de Taylor normalmente é chamado de **polinômio de Maclaurin**, e a série de Taylor é chamada de **série de Maclaurin**.

O termo **erro de truncamento** (ou resto) se refere ao fato de que se incorre em um erro quando se faz o somatório dos termos de uma série finita, ou truncada, para se obter um resultado aproximado da soma dos termos de uma série infinita.

EXEMPLO 3

Determine o polinômio de Taylor (a) de 2º grau e (b) de 3º grau para a função $f(x) = \cos x$ centrado em $x_0 = 0$, e use esses polinômios para obter o resultado aproximado de cos(0,01). (c) Use o polinômio de Taylor de 3º grau e seu resto para obter o resultado aproximado de $\int_0^{0,1} \cos x\, dx$.

Como $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, o Teorema de Taylor pode ser aplicado para qualquer $n \geq 0$. Assim sendo,

$$f'(x) = -\operatorname{sen} x, \quad f''(x) = -\cos x, \quad f'''(x) = \operatorname{sen} x \quad \text{e} \quad f^{(4)}(x) = \cos x,$$

então

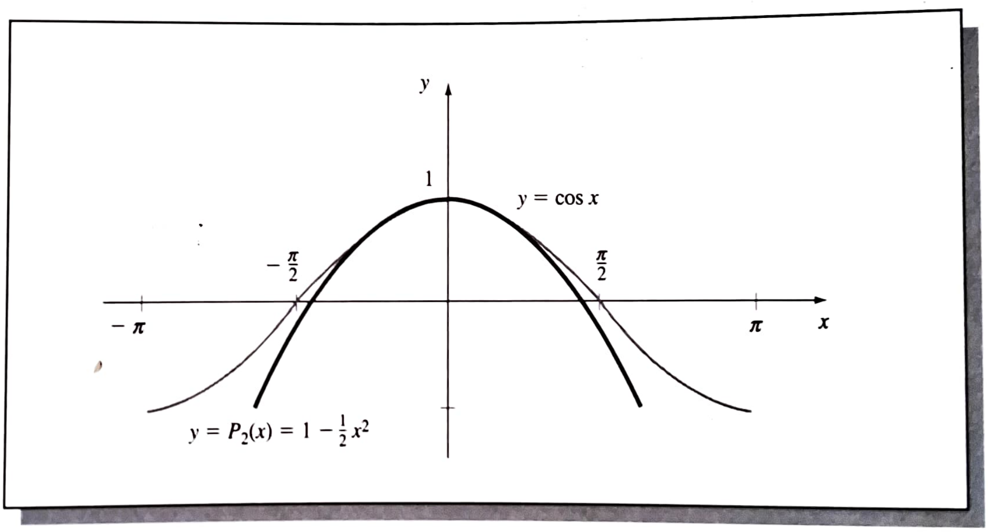
$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 0, \quad f''(0) = -1 \quad \text{e} \quad f'''(0) = 0.$$

a. Para $n = 2$ e $x_0 = 0$, temos

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 \operatorname{sen} \xi(x),$$

onde $\xi(x)$ é um número entre 0 e x (veja a Figura 1.12).

Figura 1.12



Para $x = 0{,}01$, o polinômio de Taylor e o resto são:

$$\cos 0{,}01 = 1 - \frac{1}{2}(0{,}01)^2 + \frac{1}{6}(0{,}01)^3 \operatorname{sen} \xi(x)$$
$$= 0{,}99995 + 0{,}1\bar{6} \times 10^{-6} \operatorname{sen} \xi(x),$$

onde $0 < \xi(x) < 0{,}01$. (A barra sobre o algarismo 6 em 0,16 é utilizada para indicar que esse dígito se repete indefinidamente.) Como $|\operatorname{sen} \xi(x)| < 1$ para todo x, temos

$$|\cos 0{,}01 - 0{,}99995| \leq 0{,}1\bar{6} \times 10^{-6},$$

e então a aproximação 0,99995 tem pelo menos os cinco primeiros algarismos significativos iguais aos cinco algarismos do valor real de cos 0,01. Assim sendo,

$$0{,}9999483 < 0{,}99995 - 1{,}\bar{6} \times 10^{-6} \leq \cos 0{,}01 \leq 0{,}99995 + 1{,}\bar{6} \times 10^{-6}$$
$$< 0{,}9999517.$$

O limite de erro é muito maior que o erro real. Isso se deve em parte ao valor pouco adequado que escolhemos para o $|\operatorname{sen} \xi(x)|$. Pode-se mostrar que para todos os valores de x temos $|\operatorname{sen} x| \leq |x|$. Como $0 \leq \xi < 0{,}01$, poderíamos utilizar o fato de que $|\operatorname{sen} \xi(x)| \leq 0{,}01$ na fórmula do resto, obtendo o limite $0{,}1\bar{6} \times 10^{-8}$.

b. Como $f'''(0) = 0$, o polinômio de Taylor de 3º grau com resto centrado em $x_0 = 0$ é

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 \cos \tilde{\xi}(x),$$

onde $0 < \tilde{\xi}(x) < 0{,}01$. O polinômio de aproximação permanece o mesmo, e a aproximação continua sendo 0,99995, mas agora temos garantida uma precisão muito maior. Como $|\cos \tilde{\xi}(x)| \leq 1$ para qualquer valor de x, temos

$$\left|\frac{1}{24}x^4 \cos \tilde{\xi}(x)\right| \leq \frac{1}{24}(0{,}01)^4(1) \approx 4{,}2 \times 10^{-10}.$$

Dessa forma

$$|\cos 0{,}01 - 0{,}99995| \leq 4{,}2 \times 10^{-10},$$

e

$$0{,}99994999958 = 0{,}99995 - 4{,}2 \times 10^{-10}$$
$$\leq \cos 0{,}01 \leq 0{,}99995 + 4{,}2 \times 10^{-10} = 0{,}99995000042.$$

As primeiras duas partes deste exemplo ilustram os dois objetivos da análise numérica. O primeiro é encontrar um valor aproximado, o que, em ambos os casos, é estabelecido pelo polinômio de Taylor. O segundo é determinar a precisão da aproximação. Nesse caso, o polinômio de Taylor de 3º grau dá muito mais informação que o de 2º grau, ainda que ambos os polinômios forneçam a mesma aproximação.

c. Aplicando o polinômio de Taylor de 3º grau temos

$$\begin{aligned}\int_0^{0,1} \cos x\, dx &= \int_0^{0,1}\left(1 - \frac{1}{2}x^2\right) dx + \frac{1}{24}\int_0^{0,1} x^4 \cos \tilde{\xi}(x)\, dx \\ &= \left[x - \frac{1}{6}x^3\right]_0^{0,1} + \frac{1}{24}\int_0^{0,1} x^4 \cos \tilde{\xi}(x)\, dx \\ &= 0{,}1 - \frac{1}{6}(0{,}1)^3 + \frac{1}{24}\int_0^{0,1} x^4 \cos \tilde{\xi}(x)\, dx.\end{aligned}$$

Portanto

$$\int_0^{0,1} \cos x\, dx \approx 0{,}1 - \frac{1}{6}(0{,}1)^3 = 0{,}0998\bar{3}.$$

Um limite para o erro nessa aproximação é determinado a partir da integração do resto do polinômio de Taylor e do fato de que $|\cos \tilde{\xi}(x)| \leq 1$ para qualquer valor de x:

$$\frac{1}{24}\left|\int_0^{0,1} x^4 \cos \tilde{\xi}(x)\, dx\right| \leq \frac{1}{24}\int_0^{0,1} x^4 \left|\cos \tilde{\xi}(x)\right| dx$$

$$\leq \frac{1}{24}\int_0^{0,1} x^4\, dx = 8,\overline{3} \times 10^{-8}.$$

Uma vez que o valor real dessa integral é

$$\int_0^{0,1} \cos x\, dx = \operatorname{sen} x\Big]_0^{0,1} = \operatorname{sen} 0,1 \approx 0,099833417,$$

o erro verdadeiro para essa aproximação é $8,332 \times 10^{-8}$, que está dentro dos limites de erros calculados. ■

... no Exemplo 3. Utilizando o Maple,

7. Seja $f(x) = x^3$.

a. Encontre o polinômio de Taylor de 2º grau $P_2(x)$ centrado em $x_0 = 0$.

b. Encontre $R_2(0{,}5)$ e o erro verdadeiro utilizando $P_2(0{,}5)$ para aproximar $f(0{,}5)$.

c. Repita o item (a) usando $x_0 = 1$.

d. Repita o item (b) usando o polinômio do item (c).

8. Encontre o polinômio de Taylor de 3º grau $P_3(x)$ para a função $f(x) = \sqrt{x+1}$ centrada em $x_0 = 0$. Aproxime $\sqrt{0{,}5}$, $\sqrt{0{,}75}$, $\sqrt{1{,}25}$ e $\sqrt{1{,}5}$ usando $P_3(x)$, e encontre os erros verdadeiros.

9. Encontre o polinômio de Taylor de 2º grau $P_2(x)$ para a função $f(x) = e^x \cos x$ centrada em $x_0 = 0$.

a. Utilize $P_2(0{,}5)$ para aproximar $f(0{,}5)$. Encontre um limite superior para o erro $|f(0{,}5) - P_2(0{,}5)|$ utilizando a fórmula do erro, e compare-o com o erro verdadeiro.

b. Encontre um limite para o erro $|f(x) - P_2(x)|$ utilizando $P_2(x)$ para aproximar o valor $f(x)$ no intervalo $[0, 1]$.

c. Aproxime $\int_0^1 f(x)\,dx$ usando $\int_0^1 P_2(x)\,dx$.

d. Encontre um limite superior para o erro obtido em (c) usando $\int_0^1 |R_2(x)\,dx|$ e compare o limite com o erro verdadeiro.

10. Repita o Exercício 9 usando $x_0 = \pi/6$.

11. Encontre o polinômio de Taylor de 3º grau $P_3(x)$ para a função $f(x) = (x-1)\ln x$ centrada em $x_0 = 1$.

a. Use $P_3(0{,}5)$ para obter a aproximação de $f(0{,}5)$. Encontre um limite superior para o erro de $|f(0{,}5) - P_3(0{,}5)|$ utilizando a fórmula do erro e compare o resultado com o erro verdadeiro.

b. Encontre um limite para o erro $|f(x) - P_3(x)|$ utilizando $P_3(x)$ para a aproximação de $f(x)$ no intervalo $[0{,}5,\ 1{,}5]$.

c. Aproxime $\int_{0{,}5}^{1{,}5} f(x)\,dx$ utilizando $\int_{0{,}5}^{1{,}5} P_3(x)\,dx$.

d. Encontre um limite superior para o erro obtido em (c) utilizando $\int_{0{,}5}^{1{,}5} |R_3(x)\,dx|$, e compare esse limite com o erro verdadeiro.