Questão 1:
Compute a derivada da função $f(x)$

(a) $5^x + \log_3 x$

(b) $\arctan(x^2 + 1)$

(c) $\operatorname{arcsen}(e^x)$

Questão 2:
Calcule
$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{x}.$$

Questão 3:
Sabendo que $f(x)$ é uma função derivável com $f(1) = 3$ e que $h(x) = xe^{\left(f(x)\right)^2} + f(x)$ é uma função constante, obtenha $f'(1)$.

Questão 4:
Encontre a aproximação linear $L(x)$ da função $f(x) = \operatorname{sen} x$ no ponto $x = 0$.

Questão 5:
Determine a diferencial df de $f(x) = \operatorname{tg}(\sqrt{x})$.

Questão 6:
Calcule Δy e dy para $y = 2/x$ a partir de $x = 4$ e usando $dx = \Delta x = 0.2$.

Questão 7:
Um empresário encomendou uma esfera de aço de raio 12 cm. O fabricante entregou-lhe uma esfera com a especificação "esfera de aço polido com raio $r = 12 \pm 0.06$ cm", ou seja, com erro máximo de 0.06 cm para mais ou para menos. Qual a margem de erro aproximada do volume da esfera? Use a fórmula $V(r) = (4/3)\pi r^3$ para o volume V da esfera em função do raio r

Questão 8:
Encontre os valores máximos e mínimos da função $g(x) = 2\exp(x^2 - 4x)$.
Notação: $\exp(\square)$ significa $e^{\square}$.

Questão 9:
Suponha que a derivada da função f seja $f'(x) = (x-7)(x+1)(x+5)$. Em quais intervalos f é crescente ou decrescente? Em quais pontos (se houver) o gráfico de f assume valores máximos ou mínimos locais? Considerando $x \in \mathbb{R}$, há máximos ou mínimos absolutos?

Questão 10:
Seja $f(x) = (6 - 6x)/x^2$. Esboce o gráfico de $f(x)$ depois de

(a) especificar o domínio da função

(b) encontrar as assíntotas horizontais e verticais, se existirem.

(c) achar os intervalos em que $f(x)$ é crescente ou decrescente, indicando os pontos críticos

(d) encontrar os máximos ou mínimos locais, se existirem

(e) estudar a concavidade, apontando os pontos de inflexão

Questão 11:
Seja $g(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}$. Esboce o gráfico de $g(x)$ depois de

(a) especificar o domínio da função

(b) encontrar as assíntotas horizontais e verticais, se existirem.

(c) achar os intervalos em que $f(x)$ é crescente ou decrescente, indicando os pontos críticos

(d) encontrar os máximos ou mínimos locais, se existirem

(e) estudar a concavidade, apontando os pontos de inflexão

Questão 12:
Um recipiente com a forma de paralelepípedo de base quadrada tem um volume de $24000\,\mathrm{m}^3$. Sabendo-se que o custo da base e da tampa é o triplo do custo dos lados, determine as dimensões do recipiente de menor custo possível.

Questão 13:
Considere a função $y = \sqrt{8 - x^2}$ com $0 < x < \sqrt{8}$. Queremos construir um retângulo de lados paralelos aos eixos coordenados que esteja inscrito na região R formada pelo gráfico da função $y(x)$ com os eixos $y = 0$ e $x = 0$. Qual o tamanho dos lados desse retângulo para que a área seja máxima, e qual é esse valor de área máxima?

Questão 14:
Usando o Teorema do Valor médio, confira se é possível existir função f derivável que possui: $f(0) = -1$, $f(2) = 4$ e $f'(x) \leq 2$ para todo x.

Questão 15:
Suponha que $f(x)$ seja derivável no intervalo $[a, b]$ e que $f'(x) = 2^x$ para todo $x \in [a, b]$. É verdade que $f(a) < f(b)$? **Dica**: confira primeiro a intuição geométrica de derivada para achar a resposta, e depois use o Teorema do Valor Médio para formalizar/generalizar o seu raciocínio!

Questão 16:
Encontre o limite, quando existir, justificando seu raciocínio. Use a Regra de l'Hôpital.

(a) $\lim \dfrac{x^9 - 1}{x^5 - 1}$ com $x \to 1$

(b) $\lim \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ com $x \to \infty$

(c) $\lim \left(x \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{x} \right)$ com $x \to +\infty$

(d) $\lim \left(\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x} \right)$ com $x \to 1$

(e) $\lim x^{(x^2)}$ com $x \to 0^+$

(f) $\lim x^{1/x}$ com $x \to +\infty$

(g) $\lim (1 - 2x)^{1/x}$ com $x \to 0$

Questão 17:
Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $f(x) = \dfrac{x^2 + ax + a - 1}{x^2 - 3x + 2}$. O limite de $f(x)$ quando x tende a 2 existe e vale $L \in \mathbb{R}$. Calcule os valores de a e L.

Questão 18:
Determine $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{e^{\operatorname{sen}(\pi \Delta x)} - 1}{\Delta x}$. **Dica:** utilize a definição de derivada em um ponto, e escolha a função e um ponto conveniente.

Questão 19:
Uma linha de telefone é pendurada entre dois postes separados por 14 metros, na forma da catenária $y = 20 \cosh(x/20) - 15$. Colocando os postes nas posições $x = -7$ e $x = 7$, qual a altura do fio quando $x = 0$? Encontre a inclinação da curva onde o fio encontra o poste à direita sabendo que $\operatorname{senh}(7/20) \approx 0.36$.

Gabarito

1. (a) $f(x) = 5^x + \log_3(x) \implies f'(x) = 5^x \ln(5) + \dfrac{1}{x\ln(3)}$

   (b) $f(x) = \arctan(x^2+1) \implies f'(x) = \dfrac{2x}{1+(x^2+1)^2}$

   (c) $f(x) = \text{arcsen}(e^x) \implies f'(x) = \dfrac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}(3x)}{x} = 3$

3. $f'(1) = \dfrac{-e^9}{6e^9+1}$

4. $L(x) = x$

5. $dy = \dfrac{\sec^2(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}dx$

6. $\Delta y = -\dfrac{1}{42} \approx -0.023, \quad dy = -\dfrac{1}{40} \approx -0.025$

7. $\Delta V \approx dV = \pm 34.56\pi$

8. $x = 2$ é ponto de mínimo com valor mínimo $g(2) = \dfrac{2}{e^4}$. **Extra:** esse ponto de mínimo é ponto de mínimo absoluto de $g(x)$.

9. Crescente: $x \in (-5,-1)$ e $x \in (7,+\infty)$. Decrescente: $x \in (-\infty,-5)$ e $x \in (-1,7)$. Pontos de mínimo locais: $x = -5$, $x = 7$. Ponto de máximo local: $x = -1$. Não há pontos de máximo absoluto, mas há pontos de mínimo absolutos.

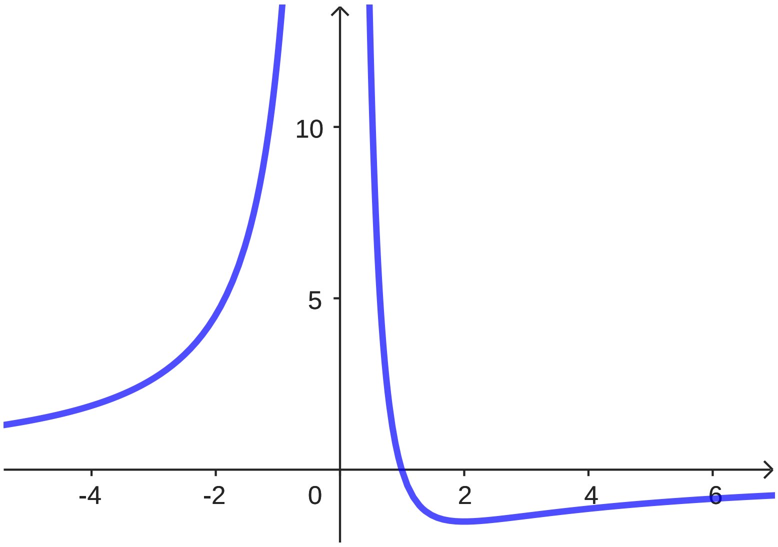
10. (a) Domínio: $\mathbb{R}$ com $x \neq 0$.

    (b) Assíntota vertical: $x = 0$. Assíntota horizontal: $y = 0$ (na esquerda e na direita)

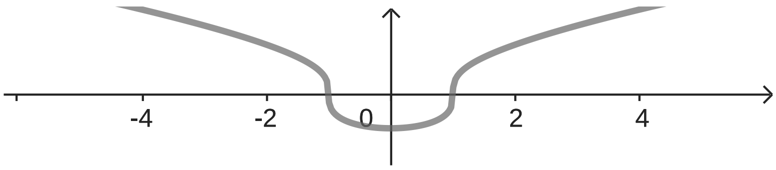
    (c) Pontos críticos: $x = 2$. Crescimento: $x \in (-\infty,0)$ e $x \in (2,+\infty)$. Decrescimento: $x \in (0,2)$.

    (d) Ponto de mínimo local: $\left(2, -\dfrac{6}{4}\right)$.

    (e) Concavidade para cima: $x \in (-\infty,3)$. Concavidade baixo: $x \in (3,+\infty)$. Ponto de inflexão: $\left(3, -\dfrac{12}{9}\right)$.



11. (a) Domínio: $\mathbb{R}$.
    (b) Sem assíntotas.
    (c) Pontos críticos: $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$. Crescimento: $x \in (0, +\infty)$. Decrescimento: $x \in (-\infty, 0)$.
    (d) Ponto de mínimo local: $(0, -1)$.
    (e) Concavidade para baixo: $x \in (-\infty, -1)$, $x \in (1, +\infty)$. Concavidade para cima: $x \in (-1, 1)$. Pontos de inflexão: $(-1, 0)$ e $(1, 0)$.



12. Altura $H = 60\,\mathrm{m}$ e aresta da base $L = 20\,\mathrm{m}$.

13. Lados do retângulo: 2 e 2. Área máxima: 4.

14. Não é possível que $f'(x) \leq 2$ para todo x do intervalo, porque o TVM garante que em algum ponto do intervalo ocorre derivada de valor 2.5.

15. Sim, porque como a derivada é sempre positiva, o TVM garante que $f(b) > f(a)$ para $b > a$.

16. (a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^9 - 1}{x^5 - 1} = \frac{9}{5}$.
    (b) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$.
    (c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} = \pi$.
    (d) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \left(\frac{x}{x - 1} - \frac{1}{\ln x} \right) = \frac{1}{2}$.

(e) $\lim_{x\to 0^+} x^{(x^2)} = 1.$

(f) $\lim_{x\to +\infty} x^{1/x} = 1$

(g) $\lim_{x\to 0}(1-2x)^{1/x} = e^{-2}$

17. $a = -1\,,\ L = 3$

18. $\lim_{\Delta x\to 0} \dfrac{e^{\operatorname{sen}(\pi\Delta x)} - 1}{\Delta x} = \pi$

19. $y'(7) = \operatorname{senh}(7/20) \approx 0.36.$