Questão 1:
Encontre a aproximação linear $L(x)$ das funções numa vizinhança do ponto pedido:

(a) $f(x) = (1-x)^3$ em $x = 0$.

(b) $f(k) = \dfrac{k^2}{\ln k}$ em $k = e^2$.

Questão 2:
Seja f uma função derivável tal que $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x) - 5}{x - 2} = 10$. Calcule $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$, $f(2)$ e $f'(2)$

Questão 3:
Quantas retas tangentes ao gráfico de $y = x^3 + 3x$ são paralelas à reta $y = 6x + 1$? Determine as equações dessas retas tangentes.

Questão 4:
Seja $f(x) = x + 5 + \ln(x^2 - 4)$. Esboce o gráfico de $f(x)$ depois de

(a) especificar o domínio da função

(b) encontrar as assíntotas horizontais e verticais, se existirem.

(c) achar os intervalos em que $f(x)$ é crescente ou decrescente, indicando os pontos críticos

(d) encontrar os máximos ou mínimos locais, se existirem

(e) estudar a concavidade, apontando os pontos de inflexão

Questão 5:
Seja $f(x) = \dfrac{e^x}{x^3}$. Esboce o gráfico de $f(x)$ depois de

(a) especificar o domínio da função

(b) encontrar as assíntotas horizontais e verticais, se existirem.

(c) achar os intervalos em que $f(x)$ é crescente ou decrescente, indicando os pontos críticos

(d) encontrar os máximos ou mínimos locais, se existirem

(e) estudar a concavidade, apontando os pontos de inflexão

Questão 6:
Seja $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$. Esboce o gráfico de $f(x)$ depois de

(a) especificar o domínio da função

(b) encontrar as assíntotas horizontais e verticais, se existirem.

(c) achar os intervalos em que $f(x)$ é crescente ou decrescente, indicando os pontos críticos

(d) encontrar os máximos ou mínimos locais, se existirem

(e) estudar a concavidade, apontando os pontos de inflexão

Questão 7:
Verificou-se que o custo **por hora** para mover uma lancha é proporcional ao cubo da sua velocidade. Deseja-se fazer uma viagem de S Km em um rio contra a correnteza. As águas do rio fluem a uma velocidade de a Km/h. Considerando que a lancha usará uma velocidade constante no trajeto, qual é o valor dessa velocidade que minimiza o custo **total** da viagem?

Questão 8:
Considere a elipse descrita por $\frac{x^2}{4}+y^2=1$, que tem comprimento 2 para o semieixo na direção horizontal e 1 para o semieixo na direção vertical. Queremos construir um retângulo de lados paralelos aos eixos coordenados e que esteja inscrito nessa elipse. Quais são as dimensões do retângulo que maximizam sua área? Qual é o valor dessa área máxima?

Questão 9:
Em um rio de margens retas e paralelas, deseja-se levar energia elétrica a partir de um ponto A em uma das margens até um ponto C na outra margem. O fio a ser utilizado na água custa 5 reais por metro, e o o que será utilizado fora custa 3 reais por metro. O rio tem largura de 100 m. Em relação ao ponto A, é preciso seguir o rio por 1000 m para ficar na posição exatamente oposta a C. Como deve ser feita a ligação entre os pontos A e C de forma que o gasto com fios seja o menor possível?

Questão 10:
Seja $f(w) = w^2 - \ln(w+2)$.

(a) Qual o domínio de f?

(b) A função f possui alguma raiz no intervalo $[0, 2]$? Justifique.

(c) Encontre os ponto de máximo e mínimo absolutos/globais de f no intervalo $[0, 2]$

Questão 11:
Para cada uma das questões abaixo, responda "sim" ou "não", justificando suas respostas.

(a) Existe função contínua no intervalo fechado $[a, b]$ que não atinge nem máximo nem mínimo?

(b) Existe função contínua em $[a, b]$ sem pontos críticos em (a, b)?

(c) É verdade que uma função contínua em $[a, b]$ com mínimo local em $c \in (a, b)$ necessariamente tem pontos críticos em (a, b)? A derivada precisa existir em $x = c$?

(d) Existe função contínua em $[a, b]$ com máximo absoluto em $x = a$ e mínimo absoluto em $x = b$?

(e) Existe função $f(x)$ definida em $[a, b]$ com mínimo absoluto em $x = a$ e máximo absoluto em $x = b$ com $f'(x) = 0$ para qualquer $x \in (a, b)$?

(f) Existe função contínua em $[a, b]$ com mínimo absoluto em x_1 e máximo absoluto em x_2, sendo $x_1 = x_2$?

(g) É verdadeiro que uma função $f(x)$ contínua em $[a, b]$ com máximo local em $c \in (a, b)$ necessariamente satisfaz $f'(c) = 0$?

(h) Existe função $f(x)$ derivável em (a, b) sem pontos extremos no intervalo aberto (a, b)?

Gabarito

1. (a) $L(x) = 1 - 3x$ (b) $L(k) = \dfrac{e^4}{2} + \dfrac{3}{4}e^2(k - e^2)$
2. $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 5$, $f(2) = 5$ e $f'(x) = 10$
3. Duas retas, $y = 6(x-1) + 4$ e $y = 6(x+1) - 4$
4. (a) $Dom(f) = (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$
   (b) f não possui assíntotas horizontais.
   Assíntotas verticais: $x = -2$ e $x = 2$.
   (c) f é crescente em $(-\infty, -1-\sqrt{5}) \cup (2, \infty)$, decrescente em $(-1-\sqrt{5}, -2)$ e tem ponto crítico em $x = -1 - \sqrt{5}$.
   (d) f tem máximo local em $x = -1 - \sqrt{5}$. Seu valor é
   $f(-1-\sqrt{5}) = -1 - \sqrt{5} + 5 + \ln\big((-1-\sqrt{5})^2 - 4\big)$
   (e) f é côncava para baixo em $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$ e não possui pontos de inflexão.
5. (a) $Dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
   (b) Assíntota horizontal: $y = 0$
   Assíntota vertical: $x = 0$.
   (c) f é crescente em $(3, \infty)$, decrescente em $(-\infty, 3)$ e tem ponto crítico em $x = 0$ e $x = 3$.
   (d) f tem mínimo local em $x = 3$. Seu valor é $f(3) = e^3/27$
   (e) f é côncava para baixo em $(-\infty, 0)$ e côncava para cima em $(0, \infty)$.
   f não possui pontos de inflexão.
6. (a) $Dom(f) = \mathbb{R}$
   (b) f não possui assíntotas horizontais nem verticais.
   (c) f é crescente em $(3, \infty)$, decrescente em $(-\infty, 3)$ e tem pontos críticos em $x = 0$ e $x = 3$.
   (d) f tem mínimo local em $x = 3$. Seu valor é $f(3) = -17$
   (e) f é côncava para baixo em $(0, 2)$ e côncava para cima em $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$.
   f tem pontos de inflexão em $x = 0$ e em $x = 2$.
7. $V = \frac{3a}{2}$
8. As dimensões do retângulo que maximizam sua área são $L = 2\sqrt{2}$ e $H = \sqrt{2}$. Logo, a área máxima é $A = 4$.
9. O custo é minimizado se forem usados um fio de $\sqrt{75^2 + 100^2}$ metros pela água e um fio de 925 metros pela terra.
10. (a) $D_f = \{x \in \mathbb{R} | x > -2\}$. (b) Sim. Dica: use o TVI. (c) $w_c = \dfrac{-4 + \sqrt{24}}{4} = -1 + \dfrac{\sqrt{6}}{2}$ é ponto de mínimo absoluto/global no intervalo $[0, 2]$. E $w = 2$ é ponto de máximo absoluto/global no intervalo $[0, 2]$.
11. (a) Não (b) Sim (c) Sim e não (d) Sim
    (e) Sim (f) Sim (g) Não (h) Sim