UNIDAD III

INTERPOLACIÓN NUMÉRICA

3.2 DIFERENCIAS DIVIDIDAS

1. INTRODUCCIÓN

La manera más conocida para calcular la representación de Newton del polinomio interpolante, está basada en el método de diferencias divididas. Una gran ventaja sobre la forma clásica del método de Lagrange es que podemos agregar más nodos a la tabla de datos y obtener el polinomio interpolante sin tener que recalcular todo. Comparado con la forma modificada de Lagrange, no hay ganancia y más bien esta última forma es más estable. Aun así, el método de diferencias divididas tiene aplicaciones adicionales en otros contextos.

2. OBJETIVO

Conceptualizar los métodos matemáticos que resuelven ecuaciones polinomiales. Comparar los métodos matemáticos de Diferencias divididas en base a los criterios de eficiencia, precisión y tolerancia. Analizar una muestra de datos empleando cada uno de los métodos matemáticos de Diferencias divididas.

3. DIFERENCIAS DIVIDIDAS

Así como podemos aproximar una función mediante la aproximación polinomial de *LaGrange*, también podemos aproximar la derivada y la integral de una función con diferencias divididas. La derivada y la integral respectivamente el polinomio de interpolación, que en realidad es el principio básico para la diferenciación e integración de los métodos numéricos.

Supongamos una función ***f (x)*** con derivada en el punto x_0 analíticamente está dado por:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x)$$

Pero cuando la función es dada de manera tabular, se tiene.

$Punto$	0	1	....	i	....	n
x	x_0	x_1	....	x_i	....	x_n
$f(x)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	....	$f(x_i)$	....	$f(x_n)$

La derivada sólo puede obtenerse de manera aproximada, por ejemplo si se desea calcular la derivada de f(x) en el punto "*x*" tal que *x0 < x < x1*

Esto se determina así:

$$f'(x) \approx \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}, \qquad x_0 < x < x_1$$

La expresión de la derecha se llama primera diferencia dividida de *f(x)* respecto a los valores de x0 y x1 y se denota generalmente $f\,[x_0, x_1]$, esto es,

$$f[x_0\,, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Observación:

Se debe destacar que la relación entre la primera diferencia dividida y la primera derivada está dada por el teorema del valor medio.

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(c)\ , \quad c \in (x_0\,, x_1)$$

Siempre que *f (x)* cumpla con las condiciones del teorema del valor medio.

Podemos generalizar para un orden más alto en donde el argumento es $x_i \ , \ 0 \le i \le n \ ; \ f[x_i]$ se llama diferencia dividida, de orden cero:

$$f[x_0\,, x_1\,, \ldots.., x_i] = \frac{f[x_1\,, x_2\,, \ldots.., x_i] - f[x_0\,, x_1\,, \ldots.., x_{i-1}]}{x_i - x_0}$$

orden cero:

Primer **Segundo** **Tercer**

$x_0 \quad f[x_0]$

$x_1 \quad f[x_1]$

$x_2 \quad f[x_2]$

$x_3 \quad f[x_3]$

$x_4 \quad f[x_4]$

$x_5 \quad f[x_5]$

Primer

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}$$

$$f[x_1, x_2] = \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1}$$

$$f[x_2, x_3] = \frac{f[x_3] - f[x_2]}{x_3 - x_2}$$

$$f[x_3, x_4] = \frac{f[x_4] - f[x_3]}{x_4 - x_3}$$

$$f[x_4, x_5] = \frac{f[x_5] - f[x_4]}{x_5 - x_4}$$

Segundo

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$$

$$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_3, x_2] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1}$$

$$f[x_2, x_3, x_4] = \frac{f[x_3, x_4] - f[x_2, x_3]}{x_4 - x_2}$$

$$f[x_3, x_4, x_5] = \frac{f[x_4, x_5] - f[x_3, x_4]}{x_5 - x_3}$$

Tercer

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0}$$

$$f[x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{f[x_2, x_3, x_4] - f[x_1, x_2, x_3]}{x_4 - x_1}$$

$$f[x_2, x_3, x_4, x_5] = \frac{f[x_3, x_4, x_5] - f[x_2, x_3, x_4]}{x_5 - x_2}$$

Observación:

- Para formar la expresión se requiere *i* + 1 puntos.
- El numerador es la recta de dos diferencias de orden *i* – 1.
- El denominador es la recta de los argumentos no comunes en el numerador.

Ejemplo:

Supongamos que tenemos la siguiente información

Puntos	0	1	2	3	4	5
x	-2	-1	0	2	3	6
$f(x)$	-18	-5	-2	-2	7	142

Obtenido del polinomio $x^3 - 2x^2 - 2$

La primer diferencia dividida en los puntos (0), (1) y (1), (2)

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{-5-(-18)}{-1-(-2)} = 13$$

$$f[x_1, x_2] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{-2-(-5)}{0-(-1)} = 3$$

La segunda diferencia dividida para (0), (1) y (2)

$$f[x_0,x_1,x_2]=\frac{f`[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}=\frac{3-(13)}{0-(-2)}=-5$$

De esta manera construimos la tabla de diferencias divididas

Puntos	*X*	*f(x)*	1º orden	2º orden	3º 0rden	4º orden
0	**-2**	-18				
			13			
1	**-1**	-5		-5		
			3		1	
2	**0**	-2		-1		0
			0		1	
3	**2**	-2		3		0
			9		1	
4	**2**	7		9		
			45			
5	**6**	142				

Observemos que:

Todas las diferencias divididas de tercer orden tienen el mismo valor independiente del valor de las x que se usen para calcularse.

Las diferencias de cuarto orden todos tienen el valor de cero, lo que tiene afinidad con el criterio que la derivada de tercer orden es una constante y la de cuarto orden es cero, para cualquier valor de *x*.

El razonamiento anterior nos induce a decir que si al construir una tabla de diferencias divididas en alguna columna el valor es constante y la siguiente columna es cero la información proviene de un polinomio de grado igual al orden de las diferencias que tengan valores constantes.

El razonamiento anterior nos induce afirmar que nuestro polinomio es de grado 3 es decir mi polinomio será:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} f[x_0, x_1, ..., x_k] \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + ...$$

En nuestro ejemplo se tiene:

$$p(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

$$p(x) = -18 + 13(x+2) - 5(x+2)(x+1) + 1(x+2)(x+1)(x-0)$$

$$p(x) = x^3 - 2x^2 - 2$$

GENERALIZACION :

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + ... + a_n(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1})$$

En donde:

$x_0, x_1, ..., x_n$: Son las abscisas de los puntos 0, 1, 2, …, *n*

$a_0, a_1, ..., a_n$: Son coeficientes por determinar y están dados por:

$$a_0 = f[x_0]; a_1 = f[x_0, x_1]; a_2 = f[x_0, x_1, x_2]; ....; a_n = f[x_0, x_1, ..., x_n]$$

Esto es tendremos la siguiente aproximación polinomial

$$P_n(x) = f[x_0] + (x - x_0) f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_0, x_1, x_2] + ... \\ + (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_n) f[x_0, x_1, ..., x_n]$$

$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j \pi_{i=0}^{j-1} (x - x_i)$ Polinomio de aproximación de **Newton**

Ejemplo:

Determinar la aproximación polinomial de Newton para la información tabular e interpolar para *x* = 2.

DIFERENCIAS DIVIDIDAS

			Diferencias divididas		
Puntos	*X*	*f[x]*	1º dividida	2º dividida	3º dividida
0	**1**	**56**			
			14.2		
1	**5**	**113**		**-0.31**	
			4.5		**0.019**
2	**20**	**181**		**0.081**	
			1.68		
3	**40**	**214**			

$$P_1(x) = a_0 + a_1(x - x_0) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) = 56 + 14.2(x - 1)$$

Observación:

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{113 - 56}{5 - 1} = \frac{57}{4} = 14.2$$

$$P_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{4.5 - 14.2}{20 - 1} = \frac{-9.7}{19} = -0.51$$

$$f[x_1, x_2] = \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1} = \frac{181 - 113}{15} = \frac{68}{15} = 4.5$$

$$P_2(x) = 56 + 14.2(x - 1) - 0.51(x - 1)(x - 5)$$

$$P_1(2) = 56 + 14.2(2 - 1) = 70.2$$

$$P_2(2) = 56 + 14.2(2 - 6) - 0.51(2 - 1)(2 - 5) = 70.2 + 1.53 = 71.7$$

- $P_3(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)$

$$a_0 = f[x_0] = 56; a_1 = f_1[x_0, x_1] = 14.2; a_2 = f[x_0, x_1, x_2] = -0.51;$$

$$a_3 = f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0} = \frac{-0.081 + 0.51}{40 - 1}$$

$$= \frac{0.429}{39} = 0.011$$

Pero:

$$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1} = \frac{1.68 - 4.5}{40 - 5} = -0.081$$

$$P_3(x) = 56 + 14.2(x-1) - 0.51(x-1)(x-5) + 0.019(x-1)(x-5)(x-20)$$

Si: $x = 2$

$$f(2) = P_3(2) = 56 + 14.2(2-1) - 0.51(2-1)(2-5) + 0.019(2-1)(2-5)(2-20)$$
$$= 71.7 + 0.969 = 72.67$$

4. ENLACES SUGERIDOS

https://es.wikipedia.org/wiki/Interpolaci%C3%B3n_polin%C3%B3mica

5. BIBLIOGRAFÍA

- Análisis Numérico, *Richard L. Burden/J. Douglas Faires*, Editorial Thomson Learning Inc.
- Métodos Numéricos Con SCILAB, Héctor Manuel Mora Escobar, Abril 2010

6. GLOSARIO

7. PREGUNTAS DE AUTOEVALUACIÓN

1. ¿Qué son las diferencias divididas?
2. ¿Cuál es una desventaja de este metodo?

UNIDAD III

INTERPOLACIÓN NUMÉRICA

3.2 DIFERENCIAS DIVIDIDAS

1. PREGUNTAS DE AUTOEVALUACIÓN

1. ¿Qué son las diferencias divididas?

   Respuesta: Es un método de interpolación que utiliza varios nodos y su nombre es debido a a que en el cálculo hay diferencias o resta de los dos nodos más próximo asi como la división entre la imagen *f(x)* de estos nodos.

2. ¿Cuál es una desventaja de este metodo?

   Respuesta: Si se aumenta el número de puntos a interpolar (o nodos) con la intención de mejorar la aproximación a una función, también lo hace el grado del polinomio interpolador así obtenido, por norma general. De este modo, aumenta la dificultad en el cálculo, haciéndolo poco operativo manualmente a partir del grado 4,