



UNIDAD I

ANÁLISIS DE ERRORES Y SU PROPAGACIÓN **TEOREMAS DE CÁLCULO QUE APOYAN LOS MÉTODOS.**

1. INTRODUCCIÓN

El Análisis Numérico es una rama de las matemáticas que, mediante el uso de algoritmos iterativos, obtiene soluciones numéricas a problemas en los cuales la matemática simbólica (o analítica) resulta poco eficiente y en consecuencia no puede ofrecer una solución. En particular, a estos algoritmos se les denomina métodos numéricos.

Por lo general los métodos numéricos se componen de un número de pasos finitos que se ejecutan de manera lógica, mejorando aproximaciones iniciales a cierta cantidad, tal como la raíz de una ecuación, hasta que se cumple con cierta cota de error. A esta operación cíclica de mejora del valor se le conoce como iteración.

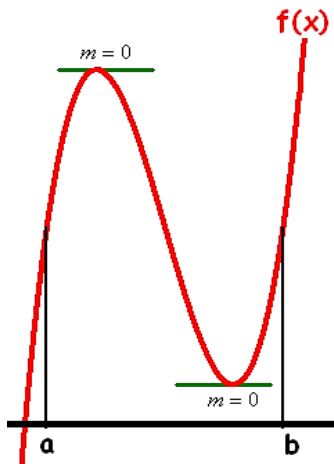
El análisis numérico es una alternativa muy eficiente para la resolución de ecuaciones, tanto algebraicas (polinomios) como trascendentes teniendo una ventaja muy importante respecto a otro tipo de métodos: La repetición de instrucciones lógicas (iteraciones), proceso que permite mejorar los valores inicialmente considerados como solución. Dado que se trata siempre de la misma operación lógica, resulta muy pertinente el uso de recursos de cómputo para realizar esta tarea

2. OBJETIVO DE LA UNIDAD

Fundamentar los elementos de cálculo que son importantes para la solución numérica de problemas matemáticos.

3. TEOREMAS Y CONCEPTOS FUNDAMENTALES

3.1 Teorema de Rolle.-

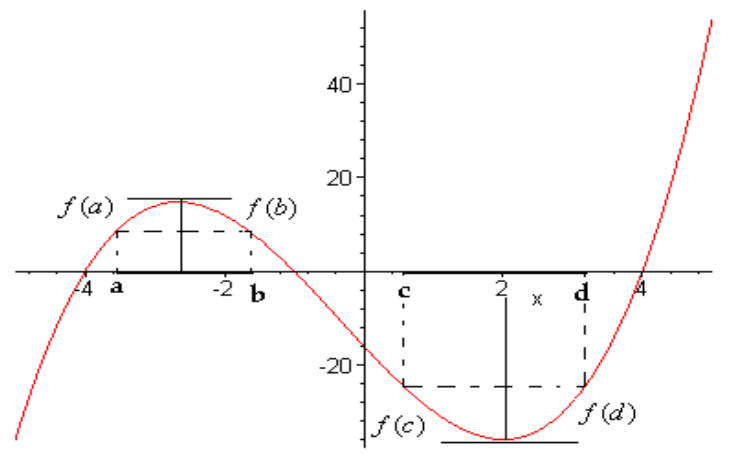


La idea del teorema de Rolle es que una curva continua y sin “picos” que toma los mismos valores en los extremos de un intervalo, necesariamente tiene algún punto con tangente horizontal.

En este ejemplo la función $f(x)$ que es continua y sin “picos” y toma los mismos valores en los extremos del intervalo $[a, b]$ tiene dos puntos del intervalo en los que la tangente a la curva es horizontal (o sea de pendiente cero).

Enunciado del teorema de Rolle

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ continua en } [a, b] \\ f \text{ derivable en } (a, b) \\ f(a) = f(b) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{existe al menos un } c \in (a, b) \text{ tal que } f'(c) = 0$$



Ejemplo I

La función graficada arriba es $f(x) = (x+4)(x+1)(x-4) = x^3 + x^2 - 16x - 16$.

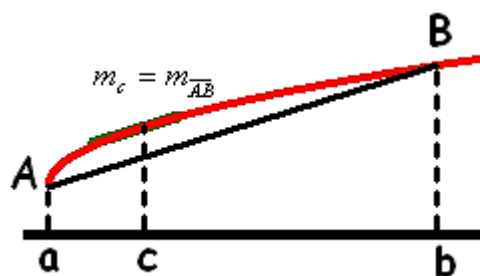


Si tomamos $a = -4$ y $b = -1$, tenemos que $f(a) = f(b) = 0$. A partir de $f'(x) = 3x^2 + 2x - 16 = 0$, encontramos que $x \approx -2.67$, es el x que pertenece a $[-4, -1]$ que satisface el teorema de Rolle. Aun cuando no es necesario que $f(a) = f(b) = 0$, hemos escogido estos puntos por que de antemano sabemos que en ellos $f(a) = f(b)$.

Ejemplo II

Del mismo modo. Como $f(-1) = f(4)$, al resolver de nuevo $f'(x) = 3x^2 + 2x - 16 = 0$, obtenemos la raíz positiva $x = 2$, que corresponde al valor de x que satisface el teorema de Rolle en el intervalo $[-1, 4]$

Teorema del valor medio.-

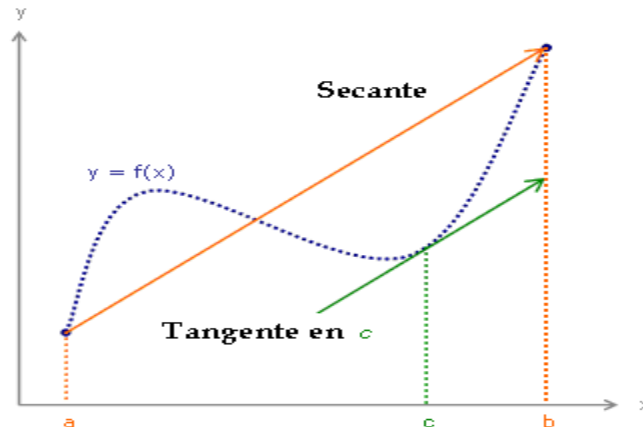


La idea del teorema del valor medio es que en una curva continua y sin “picos” que va del punto A al punto B, hay algún punto intermedio en el que la tangente a la curva en dicho punto es paralela al segmento AB.

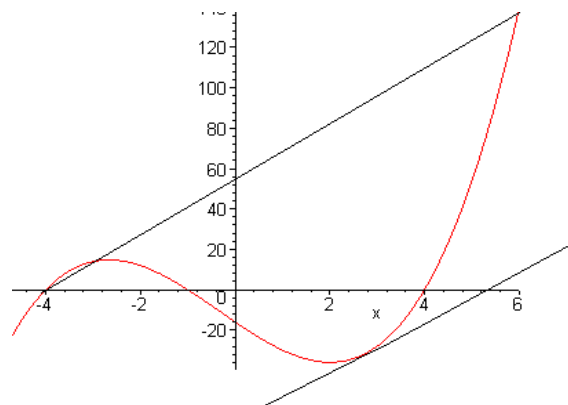
(Es decir, tienen la misma pendiente)

Enunciado del teorema del valor medio

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ continua en } [a, b] \\ f \text{ derivable en } (a, b) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{existe al menos un } c \in (a, b) \text{ tal que } f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Ejemplo I. Verificación gráfica del teorema del valor medio para la función $f(x) = (x+4)(x-4)(x+1)$ en el intervalo $[-4, 6]$



La pendiente de la recta secante es $m = \frac{f(6) - f(-4)}{6 - (-4)} = \frac{140 - 0}{10} = 14$

Como $f(x) = (x+4)(x-4)(x+1) = x^3 + x^2 - 16x - 16$, entonces $f'(x) = 3x^2 + 2x - 16$.

Para hallar el punto c , $-4 < c < 6$, que satisface el teorema del valor medio debemos resolver la ecuación:



$f'(x) = 3x^2 + 2x - 16 = 14$. Resolviéndola por la fórmula de segundo grado, hallamos que la solución positiva corresponde a $c = x \approx 2,85$, que coincide con la respuesta que sugiere el gráfico anterior.

Ejemplo.-Aplicando el teorema de Rolle, demuestra que $x^3 - 3x + b = 0$ no puede tener más de una raíz en el intervalo $[-1,1]$ cualquiera que sea el valor de b (hazlo por reducción al absurdo: supón que hay dos raíces en $[-1,1]$).

La función $f(x) = x^3 - 3x + b$ es continua en $[-1,1]$ (es un polinomio).

Es derivable en $[-1,1]$ y su derivada es $f'(x) = 3x^2 - 3$.

Si calculamos donde se anula la derivada, $(f' = 0) \quad 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$

Veamos pues, que $x^3 - 3x + b = 0$ no puede tener más de una raíz en $[-1,1]$

Supongamos que $f(x) = x^3 - 3x + b$ tiene dos raíces a_1 y a_2 en $[-1,1]$ es decir

$$f(a_1) = f(a_2) = 0$$

$$\text{Rolle: } \left. \begin{array}{l} f \text{ continua en } [-1,1] \\ f \text{ derivable en } (-1,1) \\ f(a_1) = f(a_2) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{existe al menos un } c \in (a_1, a_2) \text{ tal que } f'(c) = 0$$

Pero sabemos que f' se anula en $\begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$ que no están incluidos en (a_1, a_2) puesto que

$-1 \leq a_1, a_2 \leq 1$, hemos llegado a una **contradicción**.

Por tanto $x^3 - 3x + b = 0 \quad \forall b$ como máximo tiene una raíz en $[-1,1]$.

Aplicaciones del teorema del valor medio.-

A lo largo del tema hemos visto propiedades como:

$$f \text{ creciente y derivable en } x_0 \Rightarrow f'(x_0) \geq 0$$

En las que a partir de propiedades de la función se obtienen consecuencias sobre la derivada.

Hemos dejado sin demostrar otras como:



$$f'(x_0) > 0 \Rightarrow f \text{ creciente en } x_0$$

En las que a partir de alguna propiedad de la derivada obtenemos datos de la función. Con el teorema del valor medio se simplifican las demostraciones de este último tipo de teoremas.

Función constante.-

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ continua en } [a,b] \\ f \text{ derivable en } (a,b) \\ f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a,b) \end{array} \right\} \Rightarrow f \text{ CONSTANTE en } [a,b]$$

Tomamos dos puntos cualesquiera $x_1 < x_2$ del intervalo $[a,b]$

En $[x_1, x_2]$ se cumplen las condiciones del teorema del valor medio. Existe pues un $c \in (x_1, x_2)$

tal que $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$ y como $f'(c) = 0$ (hipótesis)

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0 \rightarrow f(x_2) = f(x_1) \quad \forall x_1, x_2 \in [a,b] \rightarrow f \text{ CONSTANTE}$$

Función creciente.-

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ continua en } [a,b] \\ f \text{ derivable en } (a,b) \\ f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a,b) \end{array} \right\} \Rightarrow f \text{ CRECIENTE en } [a,b]$$

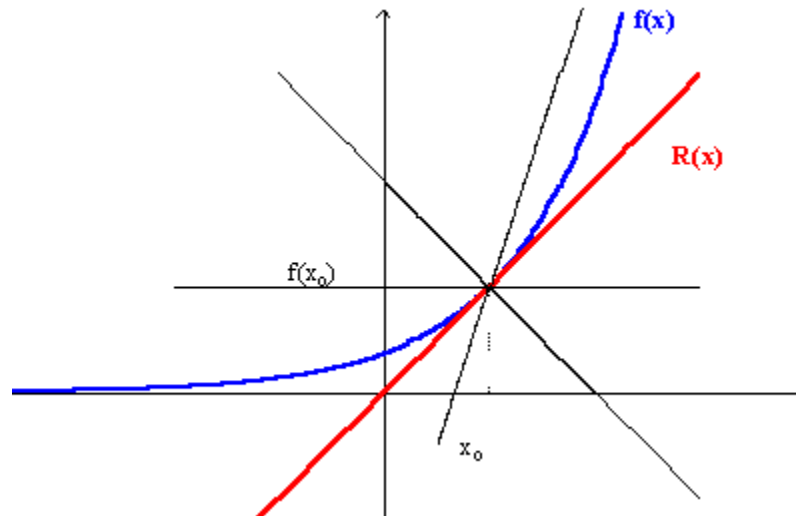
3.2 TEOREMA DE TAYLOR

INTRODUCCION:

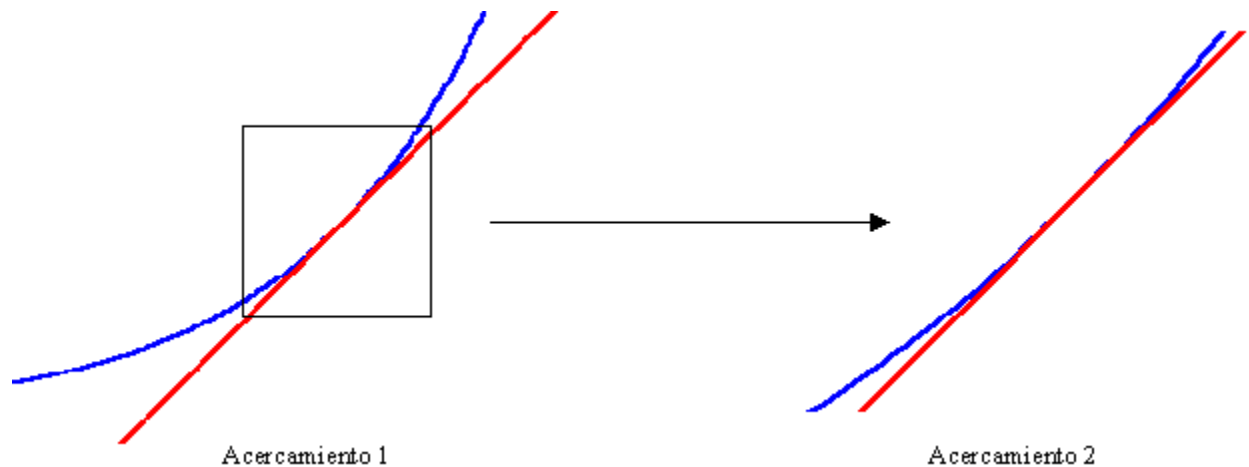
Sabemos que la recta tangente, como la mejor aproximación lineal a la gráfica de f en las cercanías del punto de tangencia $(x_0, f(x_0))$, es aquella recta que pasa por el mencionado punto y tiene la misma pendiente que la curva en ese punto (*primera derivada en el punto*), lo que hace que la recta tangente y la curva sean prácticamente indistinguibles en las cercanías del punto de tangencia. Gráficamente podemos observar que la curva se pega "suavemente" a la



recta en este entorno, de tal manera que "de todas las rectas que pasan por el punto, es esta recta la que más se parece a la curva cerca del punto".



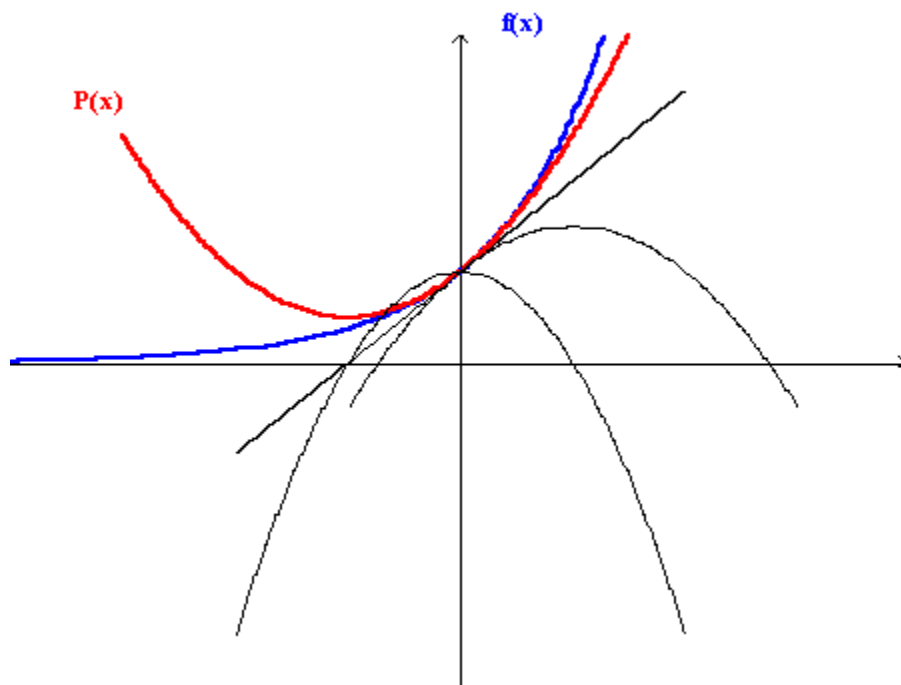
Nótese que cerca del punto de tangencia, la curva se comporta casi linealmente, como se puede apreciar si hacemos acercamientos a la gráfica anterior



Como observamos en los problemas de diferencial, si x se encuentra "lejos" de x_0 , la recta tangente ya no funciona como aproximador. Parece pues natural preguntarnos por otra función (no lineal) que sirva a nuestros propósitos. La recta tangente es un polinomio de grado 1, el más sencillo tipo de función que podemos encontrar, por lo que podemos tratar de ver si es posible encontrar un polinomio de grado dos que nos sirva para aproximar nuestra función en un rango más grande que la recta tangente.



Veamos que sucede si en lugar de aproximarnos con una recta tratamos de hacerlo con una parábola, es decir tratemos de encontrar de todas las parábolas que pasan por $(x_0, f(x_0))$, la que mejor aproxima a la curva, es decir tratemos de encontrar "la parábola tangente". Nótese que la parábola tangente a una curva no es única.



Naturalmente a esta parábola $P(x) = a + b(x - x_0) + c(x - x_0)^2$ debemos pedirle que pase por el punto, que tenga la misma inclinación (primera derivada) y la misma concavidad que la parábola (segunda derivada), es decir debemos pedirle:

- a) $P(x_0) = f(x_0)$
- b) $P'(x_0) = f'(x_0)$
- c) $P''(x_0) = f''(x_0)$

Como $P(x_0) = a$, $P'(x) = b$ y $P''(x) = 2c$, concluimos que

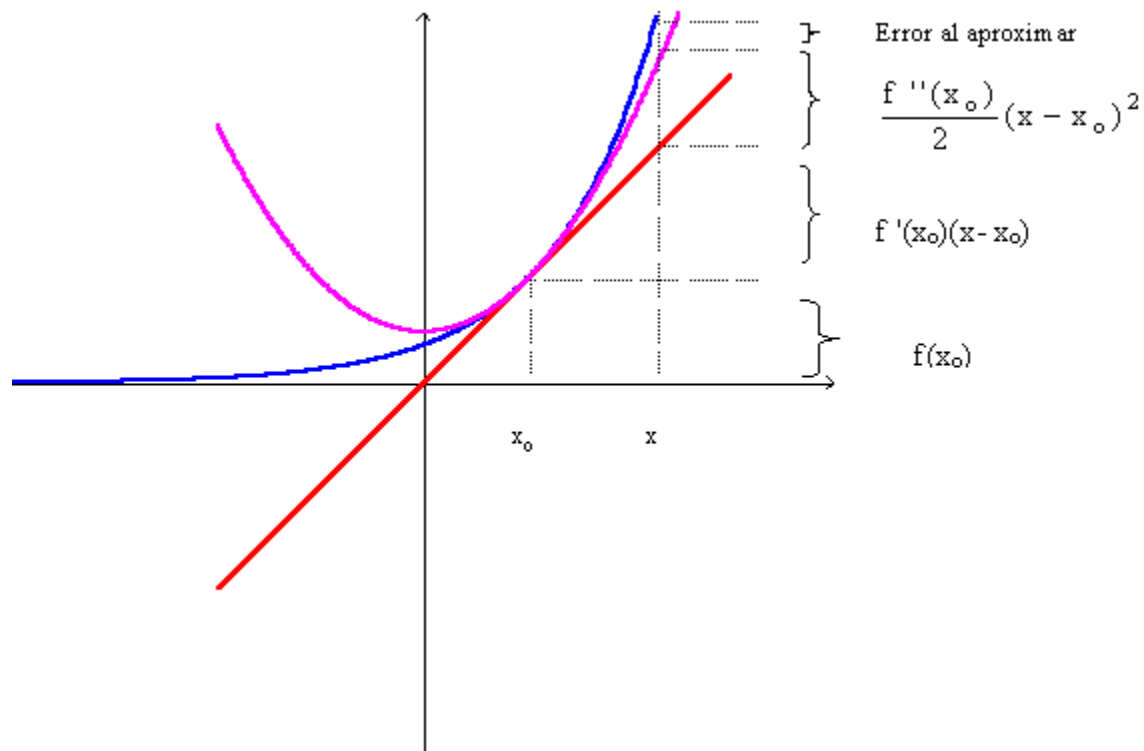
$$a = f(x_0), \quad b = f'(x_0) \quad \text{y} \quad c = (1/2)f''(x_0)$$

quedando la ecuación de la parábola que mejor aproxima a la curva en las cercanías de $(x_0, f(x_0))$, como:

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2$$



En la figura de abajo, observamos gráficamente los tres sumandos de la expresión de la parábola tangente. Los dos primeros nos dan la altura sobre la recta tangente y añadiéndole el tercero nos da la altura sobre la parábola tangente



Verifiquemos lo anterior en el caso particular de la función $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$ y valores de x cercanos a 0

En la tabla de abajo observamos que la parábola tangente a la gráfica de f en $(0,1)$ efectivamente es una mejor aproximación para f que la recta tangente, para valores cercanos a 0.



x	1+x	$1 + x + \frac{x^2}{2}$	e^x
1	2	2.5	2.718281828
0.5	1.5	1.625	1.6487212707
0.3	1.3	1.345	1.34985880757
0.1	1.1	1.105	1.10517091807
0.01	1.01	1.01005	1.010050167
0.001	1.001	1.0010005	1.00100050016

LOS COEFICIENTES DE UN POLINOMIO, EN TÉRMINOS DE SUS DERIVADAS

Un polinomio de grado n está completamente determinado por sus (n+1) coeficientes.

$$P(x) = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \dots + a_n (x - x_0)^n$$

En lo sucesivo, expresaremos al polinomio en potencias de $(x - x_0)$ y encontraremos sus coeficientes en términos de las derivadas evaluadas en x_0 .

$$P'(x) = a_1 + 2a_2 (x - x_0) + 3a_3 (x - x_0)^2 + 4a_4 (x - x_0)^3 + \dots + na_n (x - x_0)^{n-1}$$

$$P^{(2)}(x) = 2a_2 + (2)(3)a_3 (x - x_0) + (3)(4)a_4 (x - x_0)^2 + \dots + n(n-1)a_n (x - x_0)^{n-2}$$

$$P^{(3)}(x) = (2)(3)a_3 + (2)(3)(4)a_4 (x - x_0) + \dots + n(n-1)(n-2)a_n (x - x_0)^{n-3}$$

.

$$P^{(n)}(x) = (1)(2)\dots(n) a_n = n! a_n$$

De donde, evaluando cada una de estas derivadas en x_0 , obtenemos los coeficientes del polinomio:

$$a_0 = P(x_0), a_1 = P'(x_0), a_2 = \frac{P^{(2)}(x_0)}{2!}, a_3 = \frac{P^{(3)}(x_0)}{3!}, \dots, a_n = \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

y en consecuencia la expresión del polinomio será:



$$P(x) = P(x_0) + P'(x_0)(x - x_0) + \frac{P^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \dots (1)$$

Observación: En base a lo anterior, podemos afirmar que, dado un polinomio cualquiera podemos expresarlo en potencias de $(x - x_0)$ para cualquier x_0 . Asimismo si conocemos las derivadas en un punto x_0 , podemos encontrar el polinomio, como se verá en los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1. Encuentre el polinomio de grado 4 que satisface:

$$P(2) = 3, P'(2) = 5, P^{(2)}(2) = 4, P^{(3)}(2) = 24 \text{ y } P^{(4)}(2) = 48$$

Solución: Para encontrar la expresión del polinomio en términos de $(x - 2)$, simplemente sustituimos $x_0 = 2$ y $n = 4$ en la expresión (1), obteniendo:

$$P(x) = P(2) + P'(2)(x - 2) + \frac{P^{(2)}(2)}{2!}(x - 2)^2 + \frac{P^{(3)}(2)}{3!}(x - 2)^3 + \frac{P^{(4)}(2)}{4!}(x - 2)^4$$

y por lo tanto el polinomio buscado es:

$$P(x) = 3 + 5(x - 2) + 2(x - 2)^2 + 4(x - 2)^3 + 2(x - 2)^4$$

Ejemplo 2. Expresar al polinomio $P(x) = 7x^3 + x^2 + 8$ en potencias de $(x - 1)$.

Solución: Evaluemos al polinomio y a sus 3 primeras derivadas en $x_0 = 1$.

$$P(x) = 7x^3 + x^2 + 8 \quad P(1) = 16$$

$$P'(x) = 21x^2 + 2x \quad P'(1) = 23$$

$$P^{(2)}(x) = 42x + 2 \quad P^{(2)}(1) = 44$$

$$P^{(3)}(x) = 42 \quad P^{(3)}(1) = 42$$

Sustituimos en (1) con $x_0 = 1$ y $n = 3$, obteniendo la expresión buscada:

$$P(x) = 16 + 23(x - 1) + (44/2)(x - 1)^2 + (42/6)(x - 1)^3$$

Es decir:

$$P(x) = 16 + 23(x - 1) + 22(x - 1)^2 + 7(x - 1)^3$$

Que puede comprobarse fácilmente efectuando las operaciones, para concluir que:

$$7x^3 + x^2 + 8 = 16 + 23(x - 1) + 22(x - 1)^2 + 7(x - 1)^3$$



Volviendo a la representación (I), si f no es un polinomio, obviamente no podrá representarse de la misma manera, sin embargo en vista de que para la recta tangente, que es un polinomio de grado 1, se cumple que para x cercano a x_0 :

$$f(x) \cong f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

y gráficamente observamos que para x cercano a x_0 , la función es muy parecida a su "parábola tangente", es decir:

$$f(x) \cong f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2$$

surge de manera natural preguntarnos si para valores cercanos a x_0 , se cumplirá:

$$f(x) \cong f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

y podríamos intentar verlo en algunos casos particulares. Al polinomio:

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

le llamaremos el POLINOMIO DE TAYLOR de grado n para f , en el punto x_0 .

En estos términos, la recta tangente y la parábola tangente, vienen siendo los polinomios de Taylor para f de grados 1 y 2 respectivamente.

En la siguiente tabla compararemos a la función exponencial $f(x) = e^x$ (última columna) con los polinomios de Taylor correspondientes de grados 1 hasta 4. Obsérvese que la segunda columna corresponde a la recta tangente y la tercera columna a la parábola tangente.

x	$1+x$	$1+x+\frac{x^2}{2}$	$1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$	$1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}$	e^x
1	2	2.5	2.666666	2.7083333	2.718281828
0.5	1.5	1.625	1.645833	1.6484375	1.6487212707
0.3	1.3	1.345	1.3495	1.3498375	1.34985880757

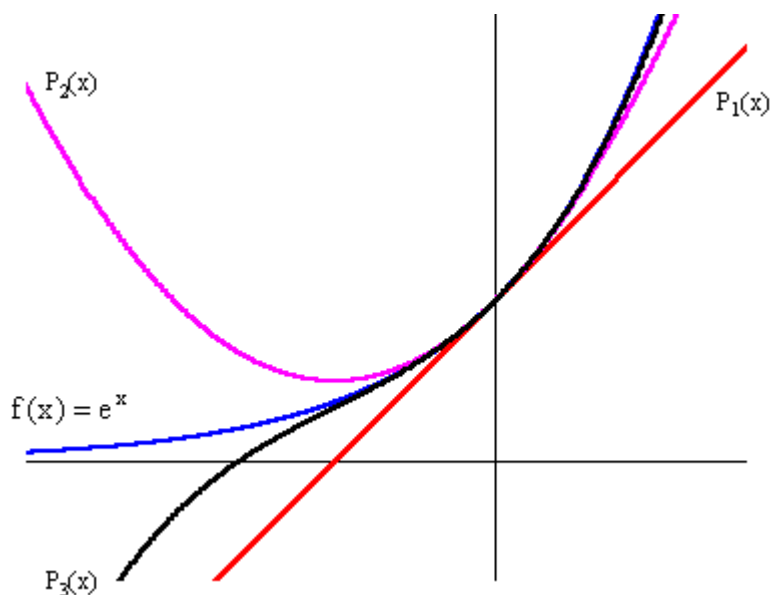


0.1	1.1	1.105	1.10516667	1.10517083	1.10517091807
0.01	1.01	1.01005	1.01005017	1.01005017	1.010050167
0.001	1.001	1.0010005	1.00100050000	1.00100050017	1.00100050016

Si analizamos con detenimiento la información proporcionada por esta tabla, veremos lo siguiente:

1. En cada columna, vemos que la aproximación del correspondiente polinomio de Taylor es mejor cuanto más cercano se encuentre x a 0.
2. En cada renglón, vemos que para cada valor fijo de x , no importa si está cerca o no de 0, la aproximación va mejorando conforme aumentamos el grado del polinomio de Taylor.

Una representación gráfica de esta situación se muestra a continuación para los polinomios de Taylor de grado 1, 2 y 3.



Vea la siguiente animación, en la cual se representan sucesivamente los primeros 10 polinomios de Taylor, aproximándose cada vez más a las funciones:

$$\underline{f(x) = \exp(x)}$$



$$\underline{f(x) = \sin(x)}$$

$$\underline{f(x) = \cos(x)}$$

El Teorema de Taylor que a continuación enunciamos sin demostración, nos dice que bajo ciertas condiciones, una función puede ser expresarse como un polinomio de Taylor mas un cierto error, es decir $f(x) = P_n(x) + E_n$ y además nos dirá como estimar este error.

3.3 TEOREMA DE TAYLOR. Sea f continua en $[a, b]$ y con derivadas hasta de orden n continuas también en este intervalo cerrado; supóngase que $f^{(n+1)}(x)$ existe en (a,b) , entonces para x y $x_0 \in (a,b)$ se tiene:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + E_n$$

donde $E_n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ y c es un punto que se encuentra entre x y x_0 .

Observación: El Teorema del valor medio es un caso particular del Teorema de Taylor, ya que para $n = 0$ en éste último, tenemos:

$$f(x) = f(x_0) + E_0 \text{ con } E_0 = \frac{f^{(1)}(c)}{1!}(x - x_0)^1 \text{ para } c \text{ entre } x \text{ y } x_0, \text{ es decir,}$$

$f(x) = f(x_0) + f'(c)(x - x_0)$ con c entre x y x_0 , o bien la conocida expresión para el Teorema del Valor Medio:

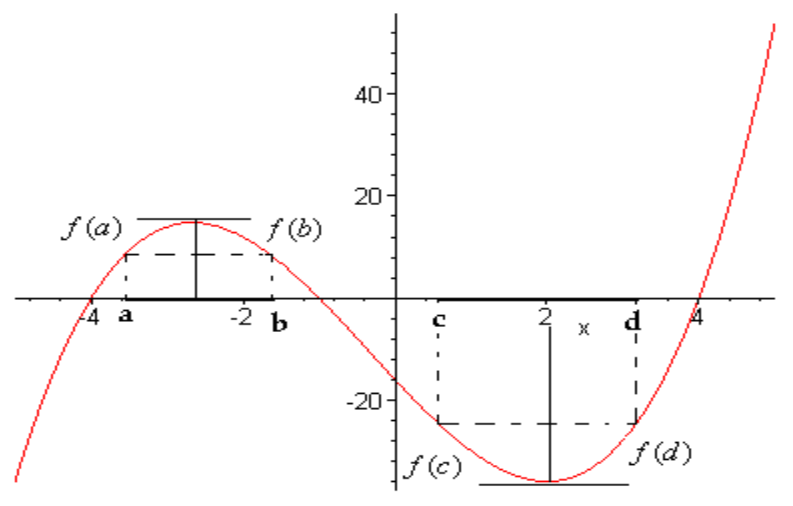
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(c)$$

3.4 Teorema del valor extremo (Llamado también Teorema de Weierstrass)

Si f es una función continua en un intervalo cerrado $[a,b]$ entonces f tiene un máximo absoluto y un mínimo absoluto en $[a,b]$.

Ejemplo I

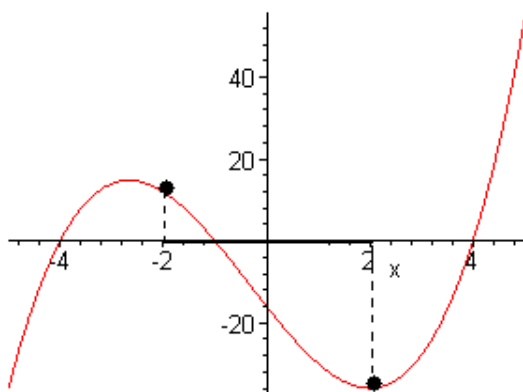
La función continua del gráfico que corresponde a $f(x) = (x+4)(x+1)(x-4) = x^3 + x^2 - 16x - 16$, tiene un máximo absoluto en $[-4, -2]$ y un mínimo absoluto en $[0, 4]$



Ejemplo II

Tomando el intervalo $[-2, 2]$, para la función continua $f(x) = (x+4)(x+1)(x-4) = x^3 + x^2 - 16x - 16$,

Obtenemos los valores máximo y mínimo absolutos en los extremos del intervalo.



Problemas Propuestos Resueltos

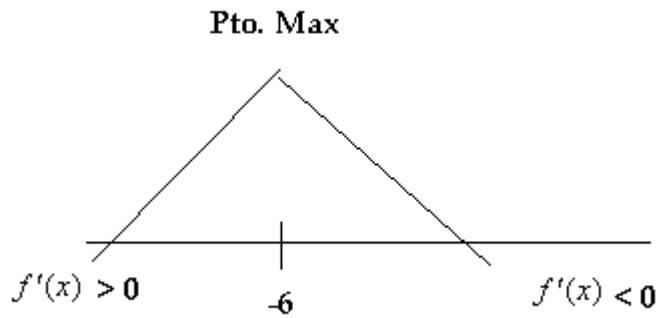
En los problemas siguientes hallar los puntos críticos y los extremos relativos.

2. $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 - 4x - 2$ Luego $f'(x) = -\frac{2}{3}x - 4$



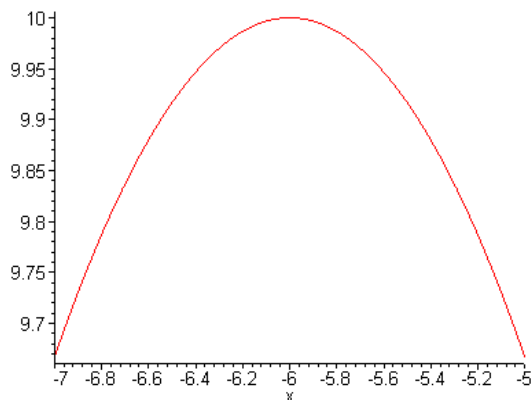
Puntos críticos: $f'(x) = -\frac{2}{3}x - 4 = 0 \Rightarrow x = -6$

Estudio de primera derivada



Analizando los cambios de signo de la primera derivada en el punto crítico, concluimos que el valor $f(-6) = 10$ es un máximo relativo.

Observemos el gráfico de la función alrededor de $x = -6$, efectuado con Maple

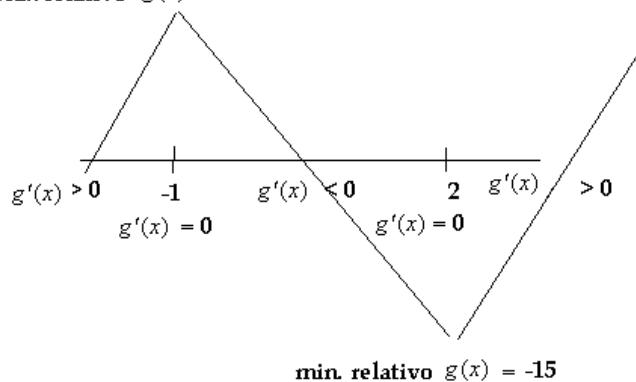


3. $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$ Luego $g'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2)(1)$
Las raíces de (1) son -1 y 2. *Estos son puntos críticos.*

Analicemos el cambio de signo de las derivadas en los puntos críticos

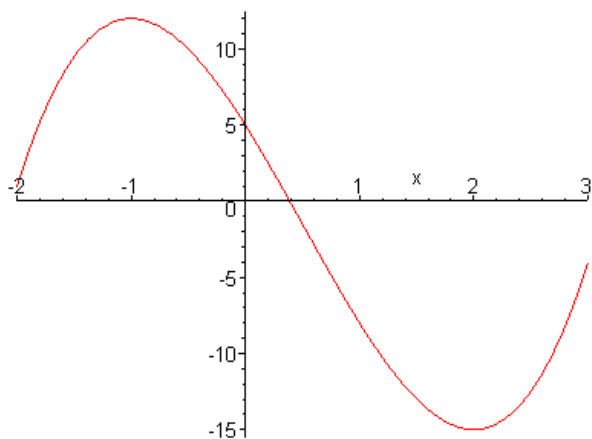


Max relativo $g(x) = 12$



Los puntos críticos de la función son $x_1 = -1$ y $x_2 = 2$, con valor máximo relativo de $g(x) = 12$ y mínimo relativo $g(x) = -15$

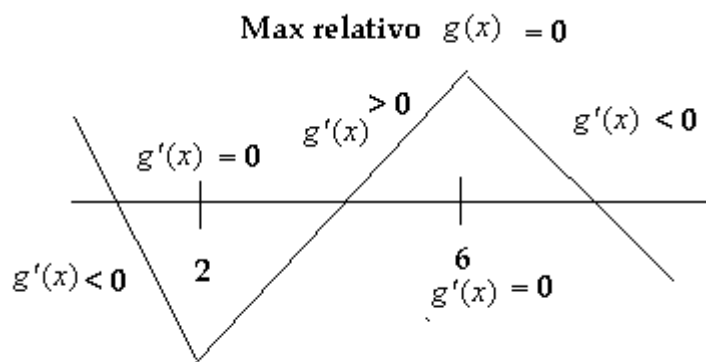
Veamos el gráfico de la función hecho con Maple:



5. $g(x) = -x^3 + 12x^2 - 36x$

Por lo tanto $g'(x) = -3x^2 + 24x - 36$. Los puntos críticos a partir de $g'(x) = 0$ son $x_1 = 2$ y $x_2 = 6$.

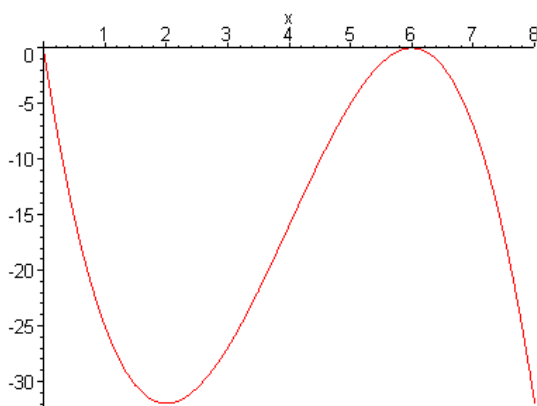
El análisis del cambio de signo de las derivadas se presenta en el siguiente gráfico:



min. relativo $g(x) = -32$

Los valores extremos son mínimo relativo $g(2) = -32$ y máximo relativo $g(6) = 0$

Comparemos los resultados con el gráfico hecho con Maple



16. $f(x) = \frac{x}{x+1}$. Por lo tanto $f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$

El único posible punto crítico es $x = -1$, donde $f'(x)$ no existe, mas por no pertenecer al dominio de la función, no se considera un punto crítico. No hay puntos críticos. Como

$f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, la función siempre es creciente en su dominio.

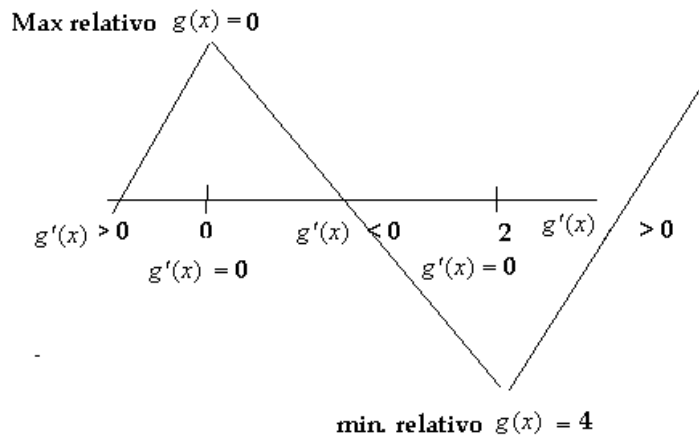
Esta función un poco difícil de generar con Maple tiene una asíntota vertical en $x = -1$.



· $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$. Operando algebraicamente se concluye que $f'(x) = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$

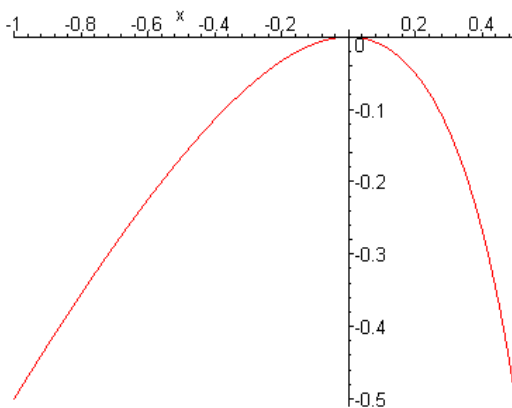
Los únicos puntos críticos son $x_1 = 0$ y $x_2 = 2$, ya que $x = 1$, no pertenece al dominio de la función.

Estudiando los diagramas de cambio de signo que se presentan en la siguiente figura, extraeremos nuestras conclusiones.



Para ver los valores extremos es necesario ordenarle a maple que grafique por segmentos así:

> **plot ($x^2/(x-1)$, $x=-1..0.5$);**

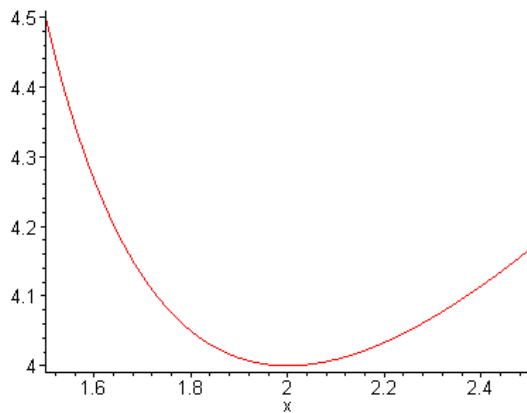


Aquí se puede apreciar el valor extremo máximo en $x = 0$

Graficando cerca de $x = 2$, vemos la situación como quien mira con lupa:



> **plot (x^2/(x-1),x=1.5..2.5);**



Apreciándose el valor extremo mínimo en $x = 2$.

4. ENLACES SUGERIDOS

5. BIBLIOGRAFÍA

Análisis Numérico, Richard L. Burden/J. Douglas Faires, Editorial Thomson Learning Inc.
Métodos Numéricos Con SCILAB, Héctor Manuel Mora Escobar, Abril 2010.

6. GLOSARIO

7. PREGUNTAS DE AUTOEVALUACIÓN

1. ¿Qué es el teorema del Valor Extremo?
2. ¿Qué es el teorema de Taylor?
3. ¿Qué es el teorema de Teorema de Rolle en qué consiste?