UNIDAD V

TÉCNICAS DE SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS CON PROBLEMAS DE VALOR INICIAL

5.1 -5.2 TEORÍA DE SOLUCIÓN NUMÉRICA DE EDO'S Y METODO DE EULER

1. INTRODUCCIÓN

Las Ecuaciones Diferenciales son utilizados para para modelar problemas de ciencias e ingeniería que requieren para su explicación el cambio de una variable con respecto a otra.

2. OBJETIVO

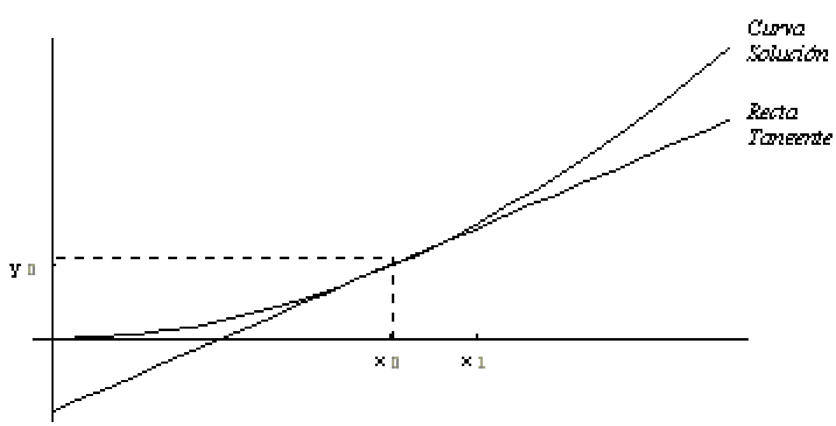
Conceptualizar los métodos matemáticos que resuelven ecuaciones diferenciales cuyas soluciones convergen a un valor y además el comparar los métodos matemáticos de Euler, en base a los criterios de eficiencia, precisión y tolerancia.

5.1 TEORÍA DE SOLUCIÓN NUMÉRICA DE EDO'S Y METODO DE EULER

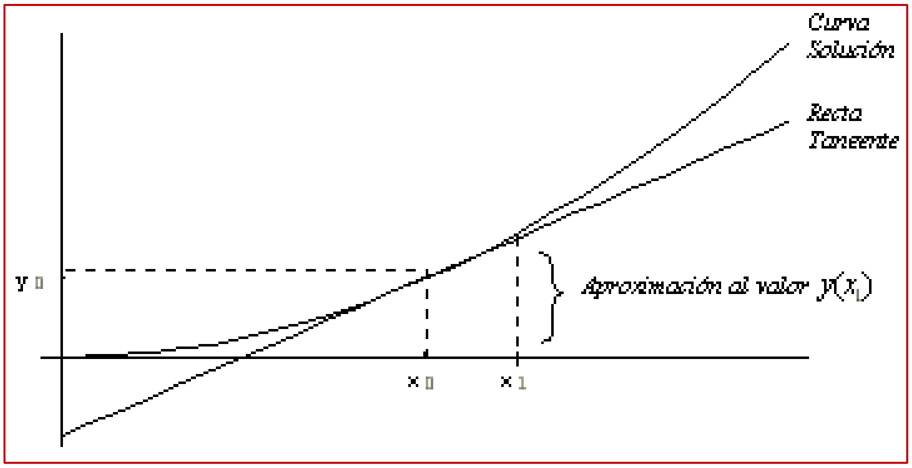
MÉTODO DE EULER

La idea del método de Euler es muy sencilla y está basada en el significado geométrico de la derivada de una función en un punto dado.

Supongamos que tuviéramos la curva solución de la ecuación diferencial y trazamos la recta tangente a la curva en el punto dado por la condición inicial.



Debido a que la recta tangente aproxima a la curva en valores cercanos al punto de tangencia, podemos tomar el valor de la recta tangente en el punto x_1 como una aproximación al valor deseado. $y(x_1)$



Así, calculemos la ecuación de la recta tangente a la curva solución de la ecuación diferencial dada en el punto (x_0, y_0). De los cursos de Geometría Analítica, sabemos que la ecuación de la recta es:

$$y = m(x - x_0) + y_0$$

donde *m* es la pendiente. En este caso, sabemos que la pendiente de la recta tangente se calcula con la derivada:

$$m = y'\big|_{(x_0, y_0)} = f(x_0, y_0)$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente es :

$$y = f(x_0, y_0)(x - x_0) + y_0$$

Ahora bien, suponemos que x_1 es un punto cercano a x_0, y por lo tanto estará dado como $x_1 = x_0 + h$. De esta forma, tenemos la siguiente aproximación:

$$y(x_1) = y(x_0 + h) \approx f(x_0, y_0)(\cancel{x_0} + h - \cancel{x_0}) + y_0$$

De aquí, tenemos nuestra fórmula de aproximación:

$$y(x_0 + h) \approx y_0 + h \cdot f(x_0, y_0)$$

Esta aproximación puede ser suficientemente buena, si el valor de *h* es realmente pequeño, digamos de una décima ó menos. Pero si el valor de *h* es más grande, entonces podemos cometer mucho error al aplicar dicha fórmula. Una forma de reducir el error y obtener de hecho un método iterativo, es dividir la distancia $h = |x_1 - x_0|$ en n partes iguales (procurando que estas partes sean de longitud suficientemente pequeña) y obtener entonces la aproximación en n pasos, aplicando la fórmula anterior n veces de un paso a otro, con la nueva *h* igual a $\dfrac{|x_1 - x_0|}{n}$.

En una gráfica, tenemos lo siguiente:

$$\begin{array}{cccc}
x_0 & x_0 + h & x_0 + 2h & \cdots x_1 \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
y_0 & y_1 & y_2 & \cdots y_n \\
 & & & (\textbf{\textit{solución}})
\end{array}$$

Ahora bien, sabemos que:

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$$

Para obtener y_2 únicamente hay que pensar que ahora el papel de (x_0, y_0) lo toma el punto (x_1, y_1), y por lo tanto, si sustituímos los datos adecuadamente, obtendremos que:

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1)$$

De aquí se ve claramente que la fórmula recursiva general, está dada por:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

Esta es la conocida fórmula de Euler que se usa para aproximar el valor de $y(x_1)$ aplicándola sucesivamente desde x_0 hasta x_1 en pasos de longitud *h*.

Ejemplo 1

Dada la siguiente ecuación diferencial con la condición inicial:

$$y' = 2xy$$
$$y(0) = 1$$

Aproximar $y(0.5)$.

NOTA

Primero observamos que esta ecuación sí puede resolverse por métodos tradicionales de ecuaciones diferenciales. Por ejemplo, podemos aplicar el método de separación de variables. Veamos las dos soluciones.

***Solución Analítica*.**

$$\frac{dy}{dx} = 2xy$$

$$\frac{dy}{y} = 2xdx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2xdx$$

$$\ln|y| = x^2 + c$$

Sustituyendo la condición inicial:

$$x = 0 \rightarrow y = 1$$

$$\ln 1 = 0^2 + c$$

$$0 = c$$

Por lo tanto, tenemos que la curva solución real está dada:

$$\ln y = x^2$$

$$e^{\ln y} = e^{x^2}$$

$$y = e^{x^2}$$

Y por lo tanto, el valor real que se pide es:

$$y(0.5) = e^{(0.5)^2} = 1.28403$$

Solución Numérica

Aplicamos el método de Euler y para ello, observamos que la distancia entre $x_0 = 0$ y $x_1 = 0.5$ no es lo suficientemente pequeña. Si didimos esta distancia entre cinco obtenemos un valor de $h = 0.1$ y por lo tanto, obtendremos la aproximación deseada en cinco pasos.

De esta forma, tenemos los siguientes datos:

$$\begin{cases} x_0 & = & 0 \\ y_0 & = & 1 \\ h & = & 0.1 \\ f(x,y) & = & 2xy \end{cases}$$

Sustituyendo estos datos en la fórmula de Euler, tenemos, en un primer paso:

$$\begin{cases} x_1 & = & x_0 + h & = & 0.1 \\ y_1 & = & y_0 + hf(x_0, y_0) & = & 1 + 0.1[2(0)(1)] & = & 1 \end{cases}$$

Aplicando nuevamente la fórmula de Euler, tenemos, en un segundo paso:

$$\begin{cases} x_2 & = & x_1 + h & = & 0.2 \\ y_2 & = & y_1 + hf(x_1, y_1) & = & 1 + 0.1[2(0.1)(1)] & = & 1.02 \end{cases}$$

Y así sucesivamente hasta obtener y_5. Resumimos los resultados en la siguiente tabla:

n	x_n	y_n
0	0	1
1	0.1	1
2	0.2	1.02
3	0.3	1.0608
4	0.4	1.12445
5	0.5	1.2144

Concluimos que el valor aproximado, usando el método de Euler es:

$$y(0.5) \approx 1.2144$$

Puesto que en este caso, conocemos el valor verdadero, podemos usarlo para calcular el error relativo porcentual que se cometió al aplicar la fórmula de Euler. Tenemos que:

$$|\in_v| = \left|\frac{1.28402 - 1.2144}{1.28402} \times 100\%\right| = 5.42\%$$

Ejemplo 2

Aplicar el método de Euler para aproximar $y(1.3)$, dada la ecuación diferencial.

$$y' = x^2 + 0.5y^2$$

$$y(1) = 2$$

Solución

Nuevamente vemos que nos conviene dividir en pasos la aproximación. Así, elegimos nuevamente $h = 0.1$ para obtener el resultado final en tres pasos. Por lo tanto, aplicamos el método de Euler con los siguientes datos:

$$\begin{cases} x_0 & = & 1 \\ y_0 & = & 2 \\ h & = & 0.1 \\ f(x,y) & = & x^2 + 0.5y^2 \end{cases}$$

En un primer paso, tenemos que:

$$\begin{cases} x_1 & = & x_0 + h & = & 1.1 \\ y_1 & = & y_0 + hf(x_0, y_0) & = & 2 + 0.1\left[1^2 + 0.5(2)^2\right] & = & 2.3 \end{cases}$$

Resumimos los resultados en la siguiente tabla:

n	x_n	y_n
0	1	2
1	1.1	2.3
2	1.2	2.6855
3	1.3	3.1901

De lo cual, concluímos que la aproximación buscada es:

$$y(1.3) \approx 3.1901$$

MÉTODO DE EULER MEJORADO

Este método se basa en la misma idea del método anterior, pero hace un refinamiento en la aproximación, tomando un promedio entre ciertas pendientes.

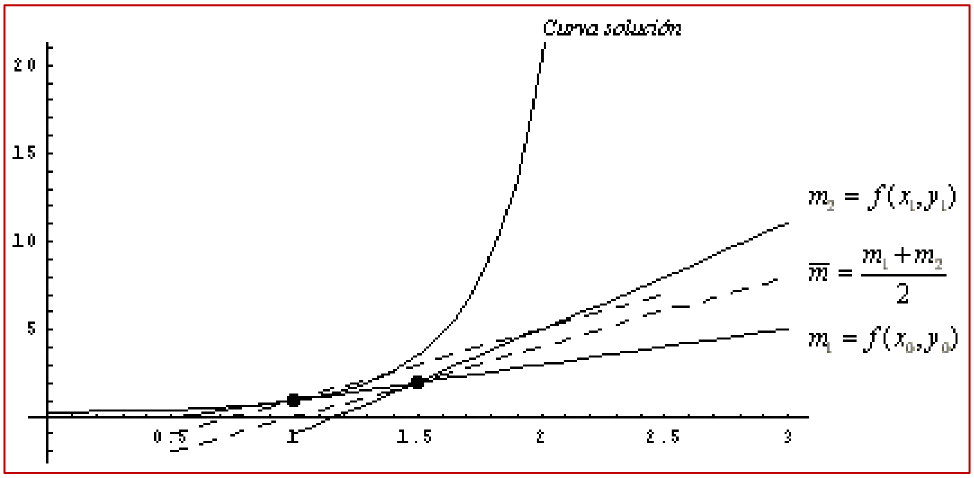
La fórmula es la siguiente:

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot \left[\frac{f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y^*_{n+1})}{2} \right]$$

donde

$$y^*_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)$$

Para entender esta fórmula, analicemos el primer paso de la aproximación, con base en la siguiente gráfica:



En la gráfica, vemos que la pendiente promedio $\overline{m}$ corresponde a la pendiente de la recta bisectriz de la recta tangente a la curva en el punto de la condición inicial y la "recta tangente" a la curva en el punto (x_1, y_1), donde y_1 es la aproximación obtenida con la primera fórmula de Euler. Finalmente, esta recta bisectriz se traslada paralelamente hasta el punto de la condición inicial, y se considera el valor de esta recta en el punto $x = x_1$ como la aproximación de Euler mejorada.

Ejemplo 1

Aplicar el método de Euler mejorado, para aproximar $y(0.5)$ si:

$$y' = 2xy$$
$$y(0) = 1$$

Solución

Vemos que este es el mismo ejemplo 1 del método anterior. Así que definimos $h = 0.1$ y encontraremos la aproximación después de cinco iteraciones. A diferencia del método de Euler 1, en cada iteración requerimos de dos cálculos en vez de uno solo: el de y_n^* primero y posteriormente el de y_n.

Para aclarar el método veamos con detalle las primeras dos iteraciones. Primero que nada, aclaramos que tenemos los siguientes datos iniciales:

$$\begin{cases} x_0 & = & 0 \\ y_0 & = & 1 \\ h & = & 0.1 \\ f(x,y) & = & 2xy \end{cases}$$

En nuestra primera iteración tenemos:

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + h = 0 + 0.1 = 0.1 \\ y_1^* = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0) = 1 + 0.1[2(0)(1)] = 1 \\ \therefore\ y_1 = y_0 + h\left(\dfrac{f(x_0, y_0) + f(x_1, y^*_1)}{2}\right) = 1.01 \end{cases}$$

Nótese que el valor de y_1^* coincide con el y_1 (Euler 1), y es el único valor que va a coincidir, pues para calcular y_2^* se usará y_1 y no y_1^*.

Esto lo veremos claramente en la siguiente iteración:

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + h = 0.1 + 0.1 = 0.2 \\ y_2^* = y_1 + h \cdot f(x_0, y_0) = 1.0302 \\ y_2 = y_1 + h\left(\dfrac{f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2^*)}{2}\right) = 1.040704 \end{cases}$$

Nótese que ya no coinciden los valores de y_2 (*Euler* 1) y el de y_2^*. El proceso debe seguirse hasta la quinta iteración. Resumimos los resultados en la siguiente tabla:

n	x_n	y_n
0	0	1
1	0.1	1.01
2	0.2	1.040704
3	0.3	1.093988
4	0.4	1.173192
5	0.5	1.28336

Concluímos entonces que la aproximación obtenida con el método de Euler mejorado es:

$$y(0.5) \approx 1.28336$$

Con fines de comparación, calculamos el error relativo verdadero:

$$|\in_v| = \left|\frac{1.28402 - 1.28336}{1.28402} \times 100\%\right| = 0.05\%$$

Vemos que efectivamente se ha obtenido una mejor aproximación con este método, reduciendo el error relativo verdadero de un 5.4% hasta un 0.05%. En nuestro tercer método veremos cómo se reduce aún más este error prácticamente a un 0%

Veamos un segundo ejemplo.

<u>Ejemplo 2</u>

Aplicar el método de Euler mejorado para aproximar *y*(1.3) si tenemos :

$$y' = x - y + 5$$
$$y(1) = 2$$

Solución

Tenemos los siguientes datos:

$$h = 0.1$$
$$f(x, y) = x - y + 5$$

$$x_0 = 1$$
$$y_0 = 2$$

En una primera iteración, tenemos lo siguiente:

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + h = 1.1 \\ y_1^* = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0) = 2.4 \\ y_1 = 2 + 0.1\left(\dfrac{4 + (1.1 - 2.4 + 5)}{2}\right) = 2.385 \end{cases}$$

Resumimos los resultados en la siguiente tabla:

n	x_n	y_n
0	1	2
1	1.1	2.385
2	1.2	2.742925
3	1.3	3.07635

Concluimos entonces que la aproximación buscada es:

$$y(1.3) \approx 3.07635$$

Finalmente, veamos el tercero y último método que estudiaremos en este curso.

Por simplicidad del curso, no veremos la justificación formal de estas últimas fórmulas.

5.3 MÉTODO DE TAYLOR DE ORDEN SUPERIOR

1. INTRODUCCIÓN

El método de resolución de Euler anterior se basó básicamente en una simple aproximación de la derivada primera

$$\dot{x} = \frac{x_{(t+\Delta t)} - x_{(t)}}{\Delta t}$$

Despejando $x_{(t+\Delta t)}$ y teniendo en cuenta que $\dot{x}$ es precisamente *f(x,t)* encontrábamos una ecuación de recurrencia para $x_{(t+\Delta t)}$. Ahora haremos lo siguiente: desarrollaremos $x_{(t+\Delta t)}$ en serie de Taylor hasta un orden que elegimos a conveniencia.

Por ejemplo si desarrollamos en Taylor a $x_{(t+\Delta t)}$ tomando solo 3 términos de la serie obtenemos:

$$x_{(t+\Delta t)} \cong x_{(t)} + \dot{x}_{(t)}\Delta t + \frac{1}{2!}\ddot{x}_{(t)}\Delta t^2 \qquad 3.1$$

pero, según la ecuación diferencial, $\dot{x} = f(x,t)$ y entonces

$$\ddot{x} = \dot{f}(x,t) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} = f_x \dot{x} + f_t = f_x f + f_t \qquad 3.2$$

(donde hemos utilizado la notación: $\frac{\partial f}{\partial x} = f_x$ y $\frac{\partial f}{\partial t} = f_t$

Luego, si en la ecuación 3.1 reemplazamos $\dot{x}$ por f y además reemplazamos $\ddot{x}$ por 3.2 nos queda una ecuación de recurrencia para $x_{(t+\Delta t)}$

$$x_{(t+\Delta t)} \cong x_{(t)} + f\Delta t + \frac{1}{2}\left(f_x f + f_t\right)\Delta t^2 \qquad 3.5$$

A diferencia de la de *Euler*, esta ecuación (aunque más "precisa") posee derivadas de la función, f es decir es necesario calcular previamente estas derivadas.

Por qué decimos que la 3.5 es más precisa que su análoga 2.4, se justifica inmediatamente si se tiene en cuenta que la 2.4 también es originada desarrollando en Taylor a $x_{(t+\Delta t)}$, pero quedándose solamente con un solo termino del desarrollo .Vale decir el método de Euler pasa a ser un caso particular de resolución por serie de Taylor (cuando tomamos solo dos términos de la serie)

Teniendo en cuenta entonces que se trata de métodos que utilizan desarrollos en Taylor, el error cometido al aproximar $x_{(t+\Delta t)}$ por el polinomio

$$x_{(t+\Delta t)} \cong x_{(t)} + \dot{x}_{(t)}\Delta t$$

Está en el orden de Δt^2 o menor, mientras que en la 3.5 (que sale del polinomio de Taylor 3.1) el error es del orden de Δt^3 (o menor) es decir un orden de magnitud más pequeño .

Si en vez de cortar la serie en Δt^2 hubiésemos tomado más términos, la 3.5 se hubiese complicado bastante más. Si por ejemplo hubiésemos tomado 4 términos de la serie de Taylor hubiese aparecido una derivada tercera, que si la calculamos da:

$$\dddot{x} = f_{tt} + f\, f_{tx} + f_x(f_x f + f_t) + (f_{xx} f + f_{xt}) f \qquad 3.6$$

donde utilizamos la notación:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} f = f_{tt} \qquad \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} = f_{tx} \qquad \frac{\partial^2}{\partial x^2} f = f_{xx} \right]$$

2. OBJETIVO

Conceptualizar los métodos matemáticos que resuelven ecuaciones diferenciales cuyas soluciones convergen a un valor. Comparar los métodos matemáticos de Euler y Taylor, en base a los criterios de eficiencia, precisión y tolerancia. Analizar una muestra de datos empleando cada uno de los métodos matemáticos de Euler y Taylor.

3. MÉTODO DE TAYLOR DE ORDEN SUPERIOR

MÉTODO DE TAYLOR DE ORDEN n:

$\omega_0 = \alpha$

$\omega_{i+1} = \omega_i + hT^{(n)}(t_i, \omega_i)$ para cada $i = 0, 1, \ldots, N-1$

donde $T^{(n)}(t_i, \omega_i) = f(t_i, \omega_i) + \frac{h}{2} f'(t_i, \omega_i) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{n!} f^{(n-1)}(t_i, \omega_i)$

Nótese que el Método de Euler es el Método de Taylor de orden 1.

EJEMPLO 1: Aplicar el Método de Taylor de órdenes 2 y 4 al problema de Valor Inicial :

$y' = y - t^2 + 1$, $0 \le t \le 2$, $y(0) = 0.5$

Solución :

Encontrando primero las tres derivadas de f con respecto a t :

$$f(t, y(t)) = y(t) - t^2 + 1$$

$$f'(t, y(t)) = y'(t) - 2t = y - t^2 - 2t + 1$$

$$f''(t, y(t)) = y' - 2t - 2 = y - t^2 + 1 - 2t - 2 = y - t^2 - 2t - 1$$

$$f'''(t, y(t)) = y' - 2t - 2 = y - t^2 + 1 - 2t - 2 = y - t^2 - 2t - 1$$

Entonces

$$T^{(2)}(t_i, \omega_i) = f(t_i, \omega_i) + \frac{h}{2} f'(t_i, \omega_i) = \omega_i - t_i^2 + 1 + \frac{h}{2}(\omega_i - t_i^2 - 2t_i + 1)$$

$$= \left(1 + h/2\right)(\omega_i - t_i^2 + 1) - ht_i$$

$$T^{(4)}(t_i,\omega_i)= f(t_i,\omega_i)+\frac{h}{2}f'(t_i,\omega_i)+\frac{h^2}{6}f''(t_i,\omega_i)+\frac{h^3}{24}f'''(t_i,\omega_i)$$

$$=\omega_i-t_i^2+1+\frac{h}{2}\left(\omega_i-t_i^2-2t_i+1\right)+\frac{h^2}{6}\left(\omega_i-t_i^2-2t_i-1\right)$$

$$+\frac{h^3}{24}\left(\omega_i-t_i^2-2t_i-1\right)$$

$$=\left(1+\frac{h}{2}+\frac{h^2}{6}+\frac{h^3}{24}\right)\left(\omega_i-t_i^2\right)-\left(1+\frac{h}{3}+\frac{h^2}{12}\right)(ht_i)+1+\frac{h}{2}-\frac{h^2}{6}-\frac{h^3}{24}$$

En consecuencia, los métodos de Taylor de órdenes 2 y 4 son:

$$\omega_0=0.5$$

$$\omega_{i+1}=\omega_i+h\left[\left(1+\frac{h}{2}\right)\left(\omega_i-t_i^2+1\right)-ht_i\right] \qquad \text{para cada } i=0,1,\ldots,N-1$$

y $\omega_0=0.5$

$$\omega_{i+1}=\omega_i+h\left[\left(1+\frac{h}{2}+\frac{h^2}{6}+\frac{h^3}{24}\right)\left(\omega_i-t_i^2\right)-\left(1+\frac{h}{3}+\frac{h^2}{12}\right)ht_i+1+\frac{h}{2}-\frac{h^2}{6}-\frac{h^3}{24}\right]$$

Si se toman en particular los valores de $h=0.2$, entonces $N=10$ $t_i=(0.2)i$ para $i=0,1,2,\ldots,9$. Por tanto el Método de 2º orden es:

$$\omega_0=0.5$$

$$\omega_{i+1}=\omega_i+0.2\left[\left(1+\frac{0.2}{2}\right)\left(\omega_i-0.04i^2+1\right)-0.04i\right]$$

$$\omega_{i+1}=1.22\omega_i-0.0088i^2-0.008i+0.22$$

y el de 4º orden es:

$$\omega_0=0.5$$

$$\omega_{i+1}=\omega_i+0.2\left[\begin{array}{l}\left(1+\frac{0.2}{2}+\frac{0.04}{6}+\frac{0.008}{24}\right)\left(\omega_i-0.04i^2\right)\\ -\left(1+\frac{0.2}{3}+\frac{0.04}{12}\right)(0.04i)+1+\frac{0.2}{2}-\frac{0.04}{6}-\frac{0.008}{24}\end{array}\right]$$

$$\omega_{i+1}=1.2214\omega_i-0.008856i^2-0.00856i+0.2186$$

	Valores exactos	Métodos de Taylor de orden 2	Error	Métodos de Taylor de orden 4	Error
t_i	$y(t_i)$	w_i	$\lvert y(t_i)-w_i\rvert$	w_i	$\lvert y(t_i)-w_i\rvert$
0.0	0.5000000	0.5	0	0.5000000	0
0.2	0.8292986	0.8300000	0.0007014	0.8293000	0.0000014
0.4	1.2140877	1.2158000	0.0017123	1.2140910	0.0000034
0.6	1.6489406	1.6520760	0.0031354	1.6489468	0.0000062
0.8	2.1272295	2.1323347	0.0051032	2.1272396	0.0000101
1.0	2.6408591	2.6486459	0.0077868	2.6408744	0.0000153
1.2	3.1799415	3.1913480	0.0114065	3.1799640	0.0000225
1.4	3.7324000	3.7486446	0.0162446	3.7324321	0.0000321
1.6	4.2834838	4.3061464	0.0226626	4.2835285	0.0000447
1.8	4.8151763	4.8462986	0.0311223	4.8152377	0.0000615
2.0	5.3054720	5.3476843	0.0422123	5.3055554	0.0000834

Si se quiere encontrar una aproximación para el valor de ***t* = 1.25**, deberá emplearse interpolación. Para ello se requieren aproximaciones a *y´(1.2)* y *y´(1.4)*

Así como las aproximaciones a *y(1.2)* y *y(1.4)* Donde las aproximaciones a las derivadas están disponibles de la ED:

$$\text{Dado que} \quad y' = f(t, y(t)) = y(t) - t^2 + 1$$
$$\text{Así} \quad y'(1.2) = y(1.2) - (1.2)^2 + 1 \cong 3.3180810$$
$$y'(1.4) = y(1.4) - (1.4)^2 + 1 \cong 2.7724321$$

Verifique se obtiene que *y(1.25)=3.3336166*

TEOREMA 5.12

Si se utiliza el Método de Taylor de orden n para aproximar la solución de:

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad , \quad a \le t \le b \quad , \quad y(a) = \alpha$$

Con tamaño de paso h y si $y \in C^{n+1}[a,b]$, entonces el error local de truncamiento es del $O(h^n)$.

EJERCICIO:

Aplique el Método de Taylor de Orden 2 para aproximar la solución del siguiente problema de Valor Inicial:

$$y' = 1 + \frac{y}{t} \quad , \quad 1 \le t \le 2 \quad , \quad y(1) = 2 \quad , \quad h = 0.25$$

ALGORITMO

Obtener *f´(t,y(t))*

Calcular $T^{(2)}(t,y(t))$

Definir ω_{i+1}

Calcular ω_0, ω_1, ω_2, ω

Obteniendo $f'(t,y(t))$

$$f(t,y(t)) = 1 + \frac{y}{t}$$

$$f_t'(t,y(t)) = -\frac{y}{t^2}$$

$$f_y'(t,y(t)) = \frac{1}{t}$$

$$f'(t,y(t)) = f_t'(t,y(t)) + f_y'(t,y(t))f(t,y(t))$$

$$f'(t,y(t)) = -\frac{y}{t^2} + \frac{1}{t}\left(1 + \frac{y}{t}\right) = -\frac{y}{t^2} + \frac{1}{t} + \frac{y}{t^2} = \frac{1}{t}$$

Calcular $T^{(2)}(t,y(t))$:

$$T^{(2)}(t,y(t)) = f(t,y(t)) + \frac{h}{2} f'(t,y(t))$$

$$= 1 + \frac{y}{t} + \frac{0.25}{2}\left(\frac{1}{t}\right)$$

$$= 1 + \frac{y}{t} + \frac{0.25}{2t}$$

Definir ω_{i+1}

Si $\omega_i = y(t_i)$ entonces $\omega_{i+1} = \omega_i + hT^{(2)}(t_i,\omega_i)$

$$= \omega_i + 0.25\left[1 + \frac{\omega_i}{t_i} + \frac{0.25}{2t_i}\right]$$

Si $t_i = 1 + 0.25i$

Entonces $\omega_{i+1} = \omega_i + 0.25\left[1 + \frac{\omega_i}{1+0.25i} + \frac{0.25}{2(1+0.25i)}\right]$

t_i	ω_i
1.00	2.00000000
1.25	2.78125000
1.50	3.61250000
1.75	4.48540000
2.00	5.39400000

Por ejemplo para el cálculo de ω_1 :

$$\omega_1 \quad \text{con} \quad i = 0: \quad \omega_{0+1} = \omega_0 + 0.25\left[1 + \frac{\omega_0}{1 + 0.25(0)} + \frac{0.25}{2(1 + 0.25(0))}\right]$$

$$\omega_1 = 2.00 + 0.25\left[1 + \frac{2.00}{1.00} + \frac{0.25}{2.00(1.00 + 0)}\right] = 2.78125$$

4. ENLACES SUGERIDOS

https://es.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9todo_de_Euler

https://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_Taylor

5. BIBLIOGRAFÍA

- Análisis Numérico, *Richard L. Burden/J. Douglas Faires*, Editorial Thomson Learning Inc.
- Métodos Numéricos Con SCILAB, Héctor Manuel Mora Escobar, Abril 2010

6. GLOSARIO

7. PREGUNTAS DE AUTOEVALUACIÓN

1. ¿Qué es el método de Euler?
2. ¿Cuál es la fórmula del método, que se debe considerar en el algoritmo?
3. A manera de ejercicio de investigación, considere la siguiente pregunta: ¿En qué consiste el método de Euler modificado, cuál es su algoritmo, descríbalo?

4. ¿El método de Taylor de orden 1 es también llamado?

5. ¿La fórmula de Taylor que consideraremos en el algoritmo es :?

6. ¿A su criterio cual puede ser una desventaja del método de Taylor, que considera la fórmula :?