ANÁLISIS NUMÉRICO

ANS115

UNIDAD III

INTERPOLACION NUMERICA

ANÁLISIS NUMÉRICO

ANS115

TEMA

- Polinomio de Interpolación de Lagrange

Agenda

- Polinomio de Interpolación de Lagrange
  - Descripción del Método
  - Gráficas
  - Ejemplo

Objetivos

- Conceptualizar los métodos matemáticos que resuelven ecuaciones polinomiales.
- Describir y Comprender el método matemáticos de Lagrange.
- Analizar una muestra de datos empleando el método matemáticos de Lagrange.

Polinomio de Interpolación de Lagrange

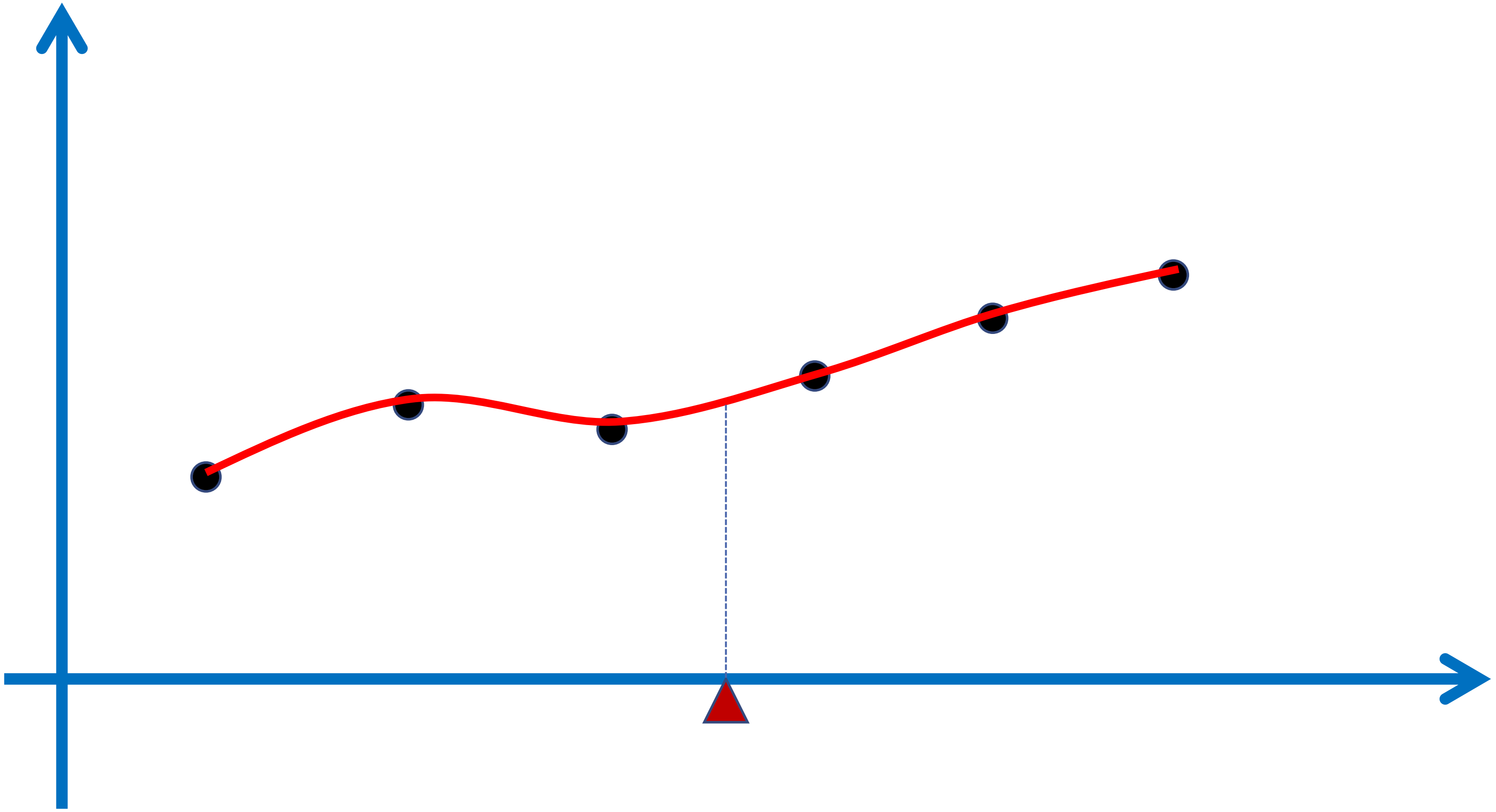
INTERPOLAR:

Dada una tabla de valores se debe encontrar un valor que no está tabulado y que esté comprendido entre los valores dados. Ejemplo:

x	**0**	**0.5**	**1.0**	**1.5**	**2.0**	**2.5**
f(x)	**0.8945**	**1.3476**	**1.2378**	**1.4321**	**1.6574**	**1.7653**

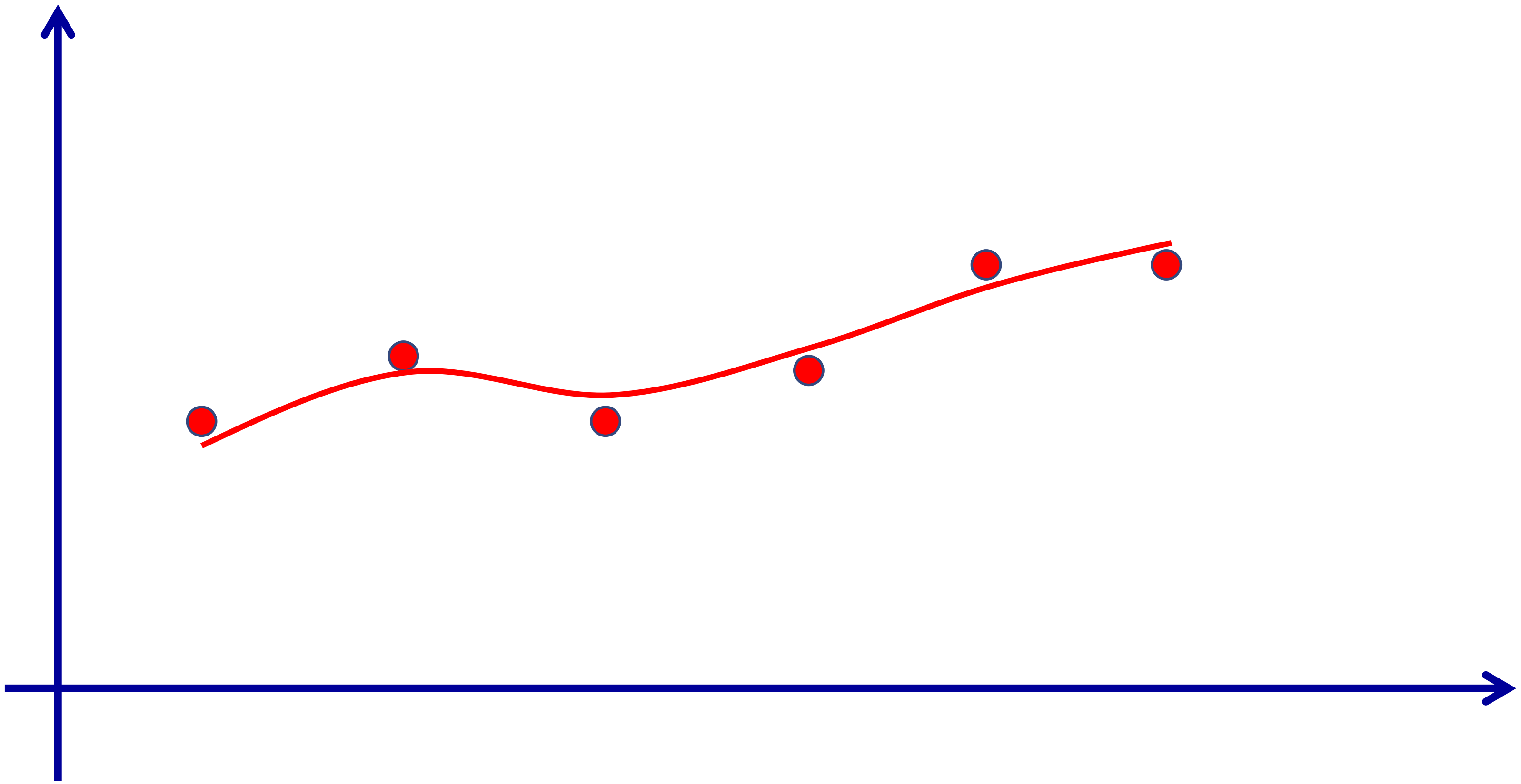
Encontrar el valor de ***f(x)*** cuando ***x* = 1.3**

Polinomio de Interpolación de Lagrange



Se trata de encontrar la imagen de un valor <u>no</u> tabulado.

Polinomio de Interpolación de Lagrange



Se trata de hallar la curva que mejor se ajuste a los datos

Polinomio de Interpolación de Lagrange

Interpolación con funciones de *Scilab*(Matlab)

Scilab cuenta con la función ***interpln***, que realiza una interpolación lineal entre los nodos dados, ejemplo:

x	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5
$f(x)$	0.8945	1.3476	1.2378	1.4321	1.6574	1.7653

Para hallar el valor de ***f(x)*** cuando ***x* = 1.3**

Polinomio de Interpolación de Lagrange

Datos**=[0,0.5,1.0,1.5,2.0,2.5;0.8945,1.3476,1.2378,1.4321,1.6574,1.7653];**

Resp = **interpln**(Datos,1.3)

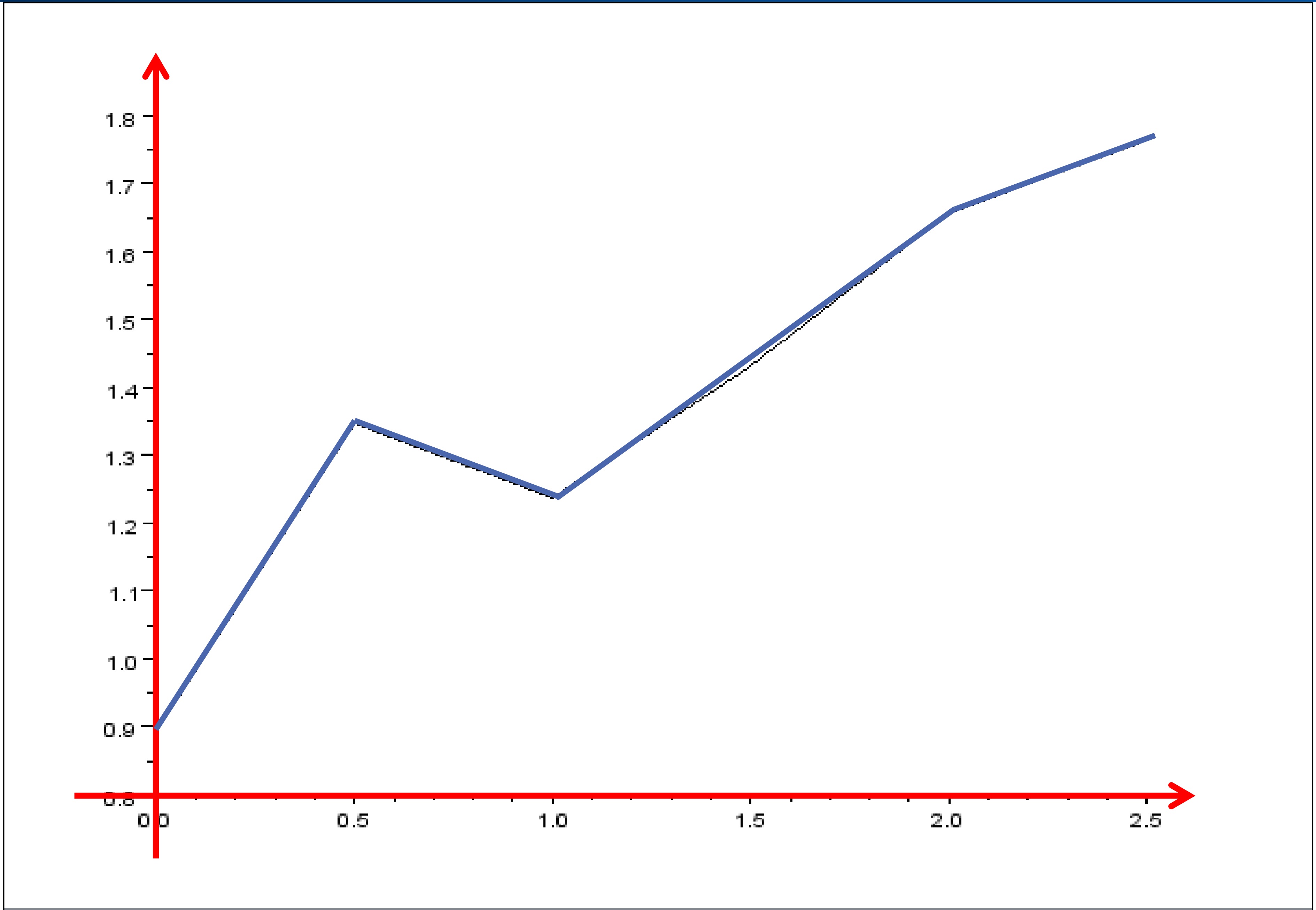
Resp =

1.35438

Se puede hacer un gráfico con valores interpolados:

```
length(Datos)
X=[Datos(1),Datos(3),Datos(5),Datos(7),Datos(9),Datos(11)]
Y=[Datos(2),Datos(4),Datos(6),Datos(8),Datos(10),Datos(12)]
XX=X(1):0.1:X(6)
y1=interpln(Datos,XX)
plot2d(XX,y1)
```

Polinomio de Interpolación de Lagrange



Polinomio de Interpolación de Lagrange

También se puede hacer interpolación utilizando funciones ***spline*** o trazadores cúbicos.

Para hacer esto en ***Scilab***, se requieren dos pasos:

El primero, mediante splin, a partir de un lista de puntos ***$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_m, y_m)$***, se calculan las derivadas, en los puntos x_i, de la función ***spline*** interpolante.

El segundo paso, mediante ***interpln*** se evalúa la función interpolante en los valores dados por un vector, primer parámetro de ***interp***.

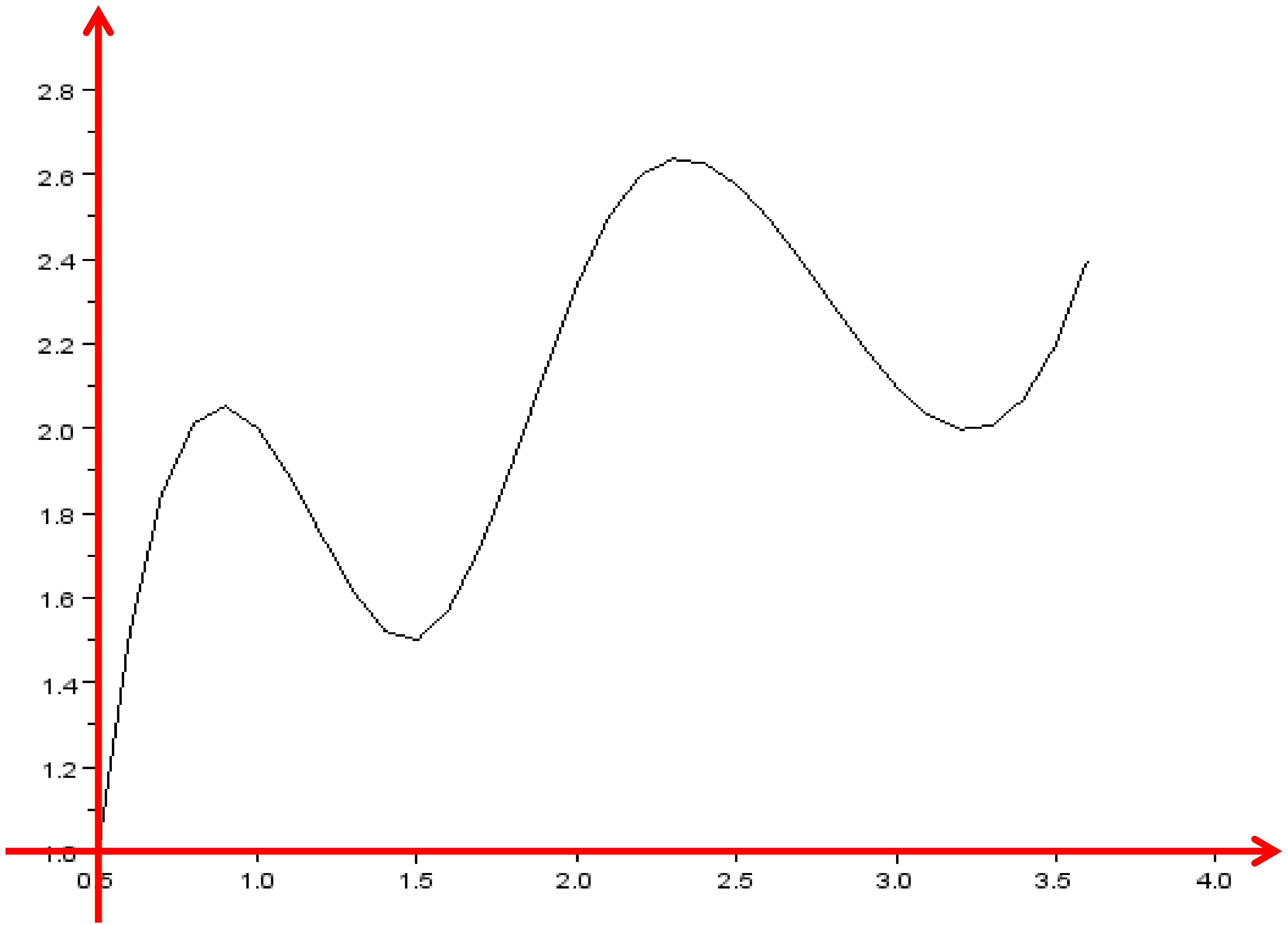
Polinomio de Interpolación de Lagrange

Intentarlo con el siguiente código:

```
clear, clf;
x = [ 0.5 1 1.5 2.1 3 3.6]
y = [ 1 2 1.5 2.5 2.1 2.4]
n = length(x);
xx = ( x(1):0.1:x(n) );
d = splin(x, y);
ys = interp(xx, x, y, d);
plot2d(xx, ys)
```

Ver la gráfica siguiente

Polinomio de Interpolación de Lagrange



Polinomio de Interpolación de Lagrange

El problema de encontrar un polinomio de primer grado que pasa por los puntos distintos (x_0, y_0) y (x_1, y_1) es el mismo que el de aproximar una función f, para la cual $f(x_0) = y_0$ y $f(x_1) = y_1$ por medio de un polinomio de primer grado que interpole los valores de f en los puntos dados o que coincida con ellos.

Polinomio de Interpolación de Lagrange

Primero se definirá las funciones

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \quad \text{y} \quad L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0},$$

y se define entonces

$$\boxed{P(x) = L_0(x) f(x_0) + L_1(x) f(x_1).}$$

Como

$$L_0(x_0) = 1,\ L_0(x_1) = 0,\ L_1(x_0) = 0 \ \text{ y } \ L_1(x_1) = 1,$$

se tiene

$$P(x_0) = 1 \cdot f(x_0) + 0 \cdot f(x_1) = f(x_0) = y_0$$

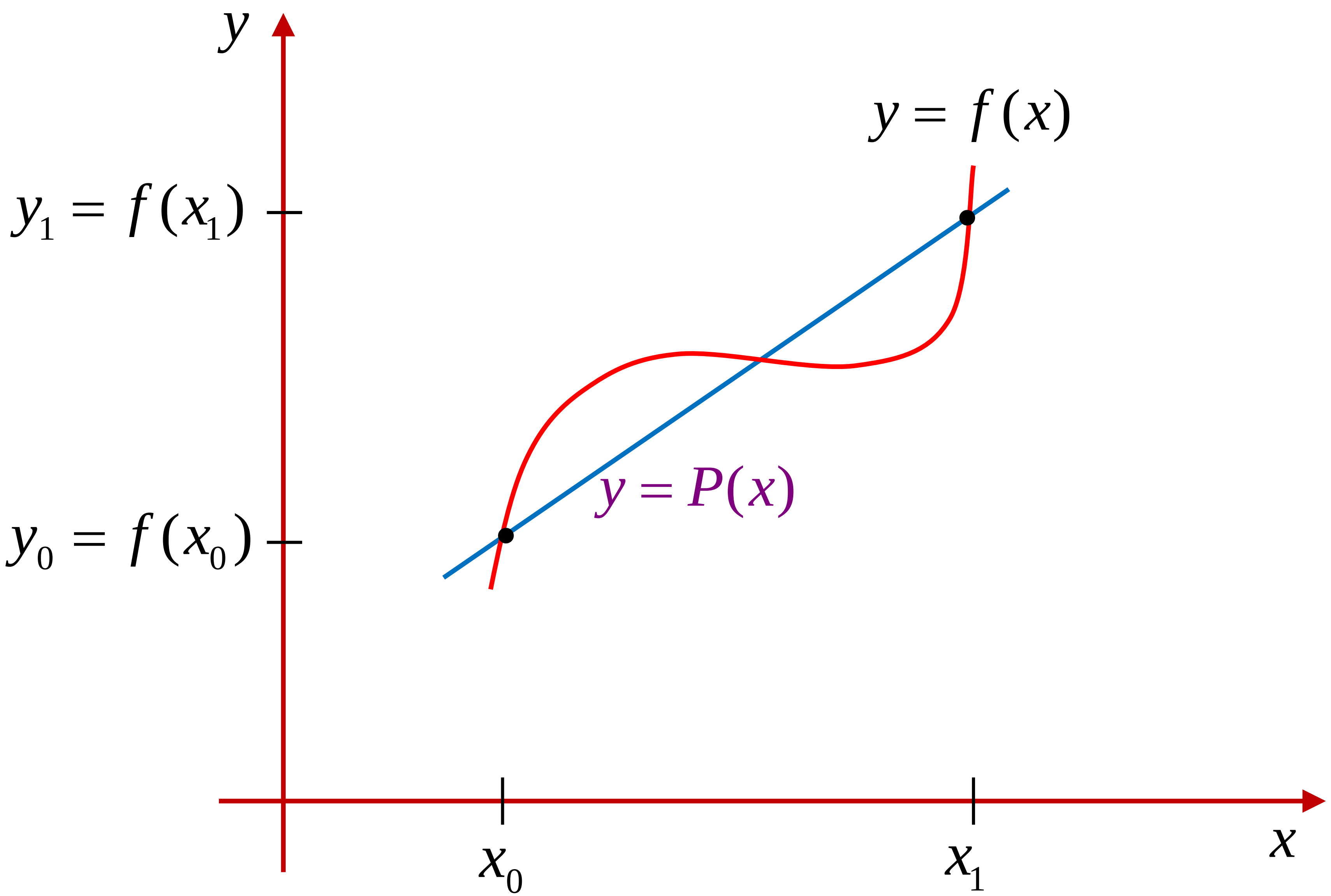
y

$$P(x_1) = 0 \cdot f(x_0) + 1 \cdot f(x_1) = f(x_1) = y_1.$$

Así P es la única función lineal que pasa por (x_0, y_0) y (x_1, y_1).

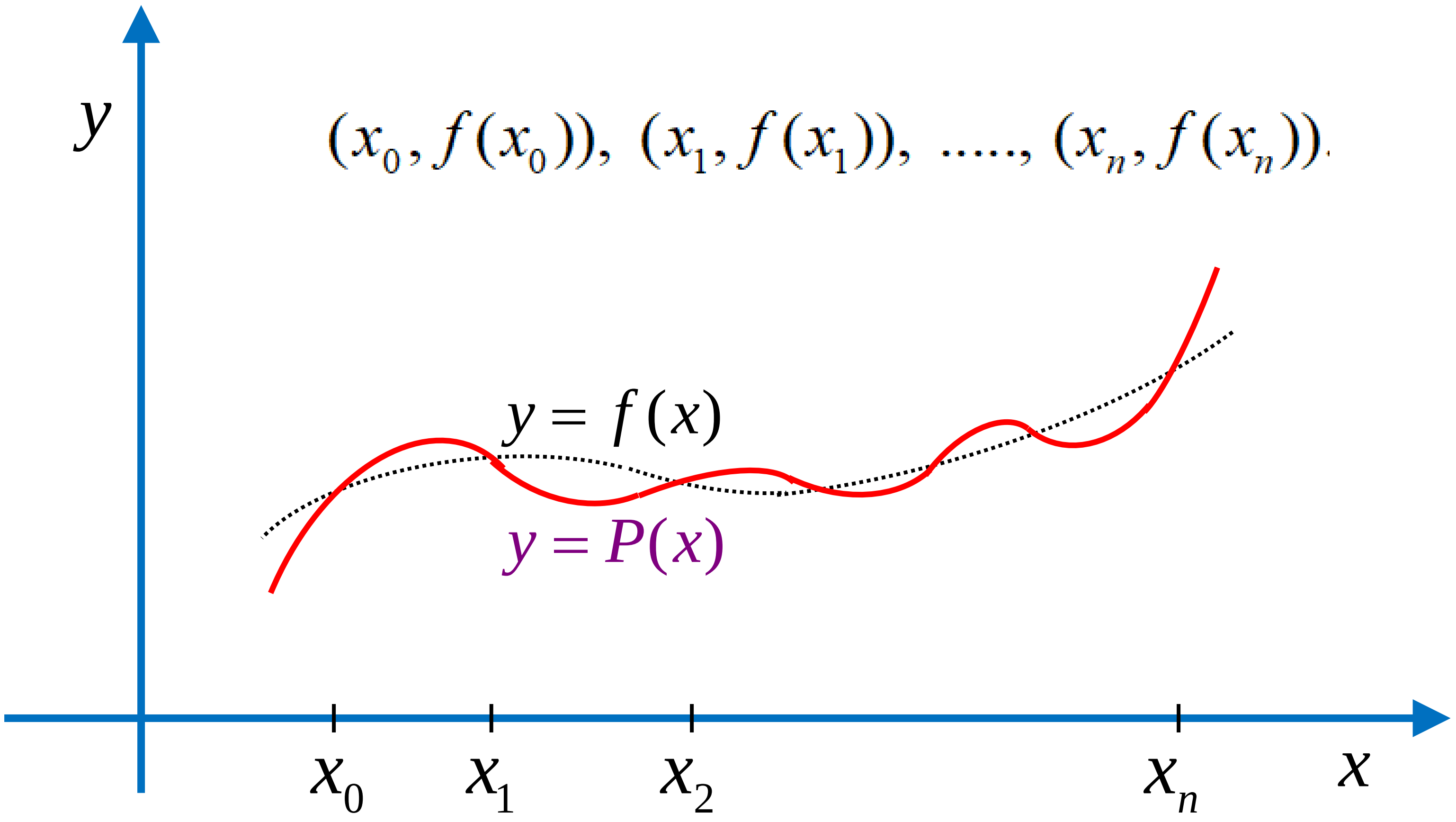
Ver la siguiente figura.

Polinomio de Interpolación de Lagrange



Polinomio de Interpolación de Lagrange

Considerar la construcción de polinomio grado ***n*** que pase por ***n*+1** puntos.



Polinomio de Interpolación de Lagrange

En este caso para cada $k = 0, 1, \ldots, n$ se construye una función $L_{n,k}(x)$ con la propiedad de que $L_{n,k}(x_i) = 0$, cuando $i \neq k$ y $L_{n,k}(x_k) = 1$. Para satisfacer $L_{n,k}(x_i) = 0$ para cada $i \neq k$ se requiere que el numerador de $L_{n,k}(x)$ contenga el término

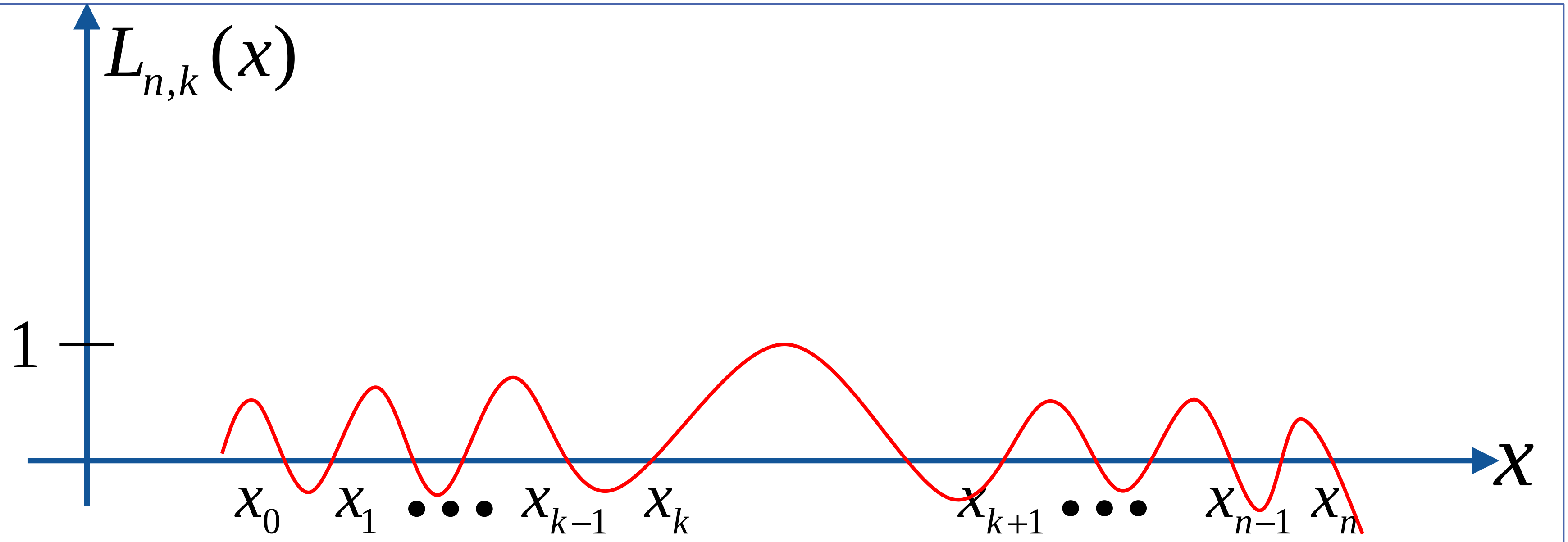
$$(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\ldots(x - x_n).$$

Para satisfacer $L_{n,k}(x_k) = 1$, el denominador de $L_{n,k}(x)$ debe coincidir con este término cuando se evalúe en $x = x_k$. Es decir,

$$\boxed{L_{n,k}(x) = \frac{(x - x_0)\ldots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\ldots(x - x_n)}{(x_k - x_0)\ldots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\ldots(x_k - x_n)}.}$$

En la siguiente figura se muestra la gráfica de un $L_{n,k}(x)$ común.

Polinomio de Interpolación de Lagrange



El polinomio de interpolación se describe fácilmente ahora que se conoce la forma de $L_{n,k}$. Este polinomio, denominado **n-ésimo polinomio interpolante de Lagrange** se define en el siguiente teorema.

TEOREMA de la definición del Polinomio interpolante de Lagrange

Si $x_0, x_1, \ldots, x_n$ son $n+1$ números distintos y si f es una función cuyos valores están dados en esos números, entonces existe un único polinomio $P(x)$ de grado a lo más n, con la propiedad de que

$$f(x_k) = P(x_k) \text{ para cada } k = 0, 1, \ldots, n.$$

Este polinomio está dado por

$$\boxed{P(x) = f(x_0)L_{n,0}(x) + \ldots + f(x_n)L_{n,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)L_{n,k}(x),}$$

donde para cada $k = 0, 1, \ldots, n$; el $L_{n,k}(x)$ está dado por:

Polinomio de Interpolación de Lagrange

$$L_{n,k}(x) = \frac{(x - x_0)\ldots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\ldots(x - x_n)}{(x_k - x_0)\ldots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\ldots(x_k - x_n)}$$

$$= \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)}.$$

Se escribirá $L_{n,k}(x)$ simplemente como $L_k(x)$ cuando no exista confusión respecto a su grado.

EJEMPLO 1

Si se desea utilizar los números (o nodos) $x_0 = 2,\ x_1 = 2.5$ y $x_2 = 4$ para obtener el segundo polinomio interpolante para $\boxed{f(x) = \frac{1}{x}}$, se debe determinar los coeficientes polinómicos $L_0(x),\ L_1(x)$ y $L_2(x)$:

Polinomio de Interpolación de Lagrange

$$L_0(x) = \frac{(x-2.5)(x-4)}{(2-2.5)(2-4)} = (x-6.5)x+10,$$

$$L_1(x) = \frac{(x-2)(x-4)}{(2.5-2)(2.5-4)} = \frac{(-4x+24)x-32}{3},$$

y $$L_2(x) = \frac{(x-2)(x-2.5)}{(4-2)(4-2.5)} = \frac{(x-4.5)x+5}{3}.$$

Puesto que $f(x_0) = f(2) = 0.5,\ f(x_1) = f(2.5) = 0.4$ y $f(x_2) = f(4) = 0.25,$ se tendrá

$$\boxed{P(x) = \sum_{k=0}^{2} f(x_k) L_k(x)}$$

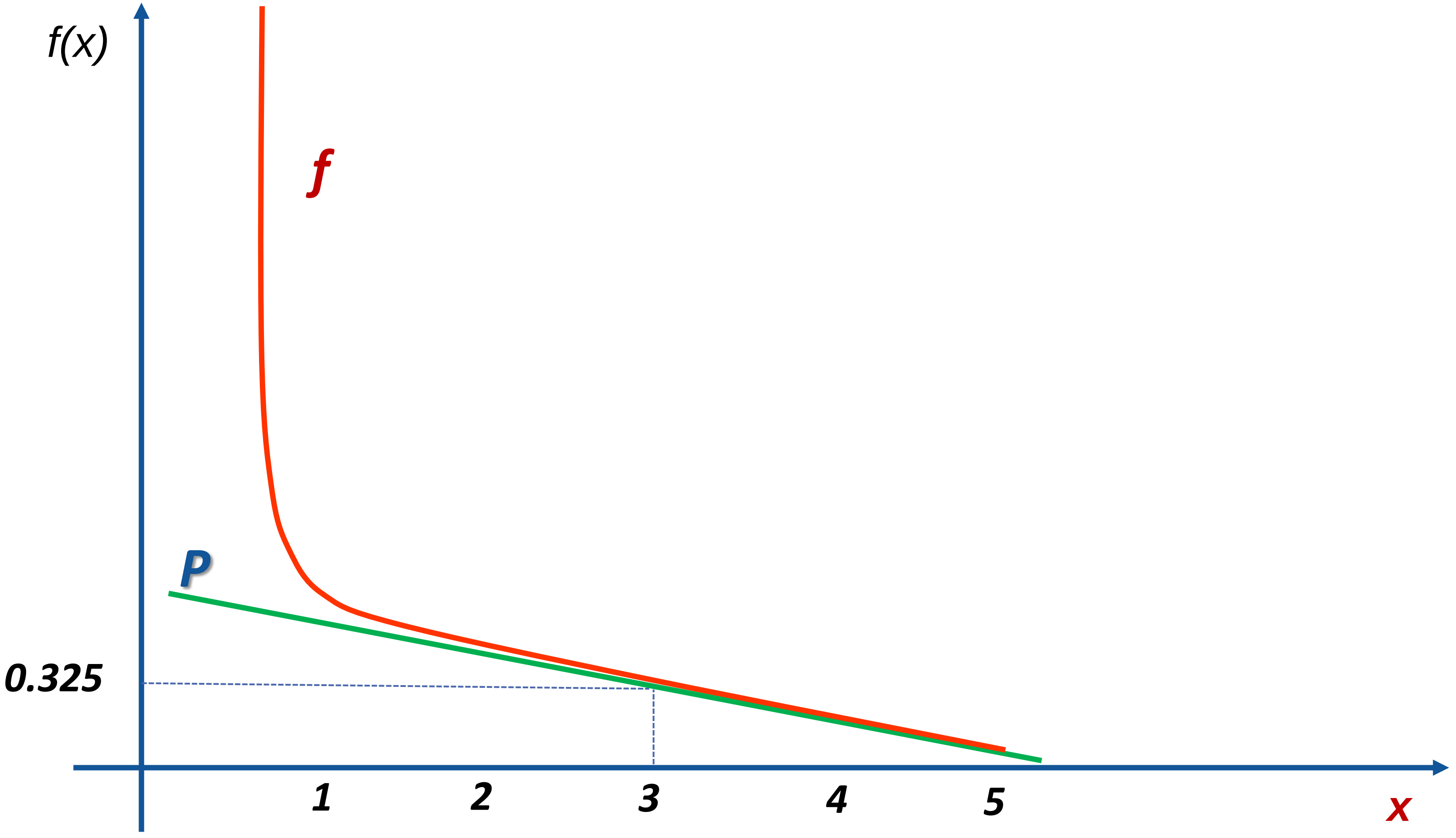
$$= 0.5\left[(x-6.5)x+10\right] + 0.4\left[\frac{(-4x+24)x-32}{3}\right] + 0.25\left[\frac{(x-4.5)x+5}{3}\right]$$

$$P(x) = \underline{(0.05x-0.425)x+1.15}.$$

Polinomio de Interpolación de Lagrange

Una aproximación a $f(3) = 1/3$, es $f(3) \approx P(3) = 0.325$.

En la siguiente figura se muestra las gráficas de $f(x)$ y $P(x)$.



Gracias por su atención !!