UNIDAD V

TÉCNICAS DE SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS CON PROBLEMAS DE VALOR INICIAL

5.4 MÉTODO DE RUNGE-KUTTA
5.5 MÉTODO DE RUNGE-KUTTA FEHLBERG

5.4 MÉTODO DE RUNGE-KUTTA

1. INTRODUCCIÓN

La computadora, es la herramienta más poderosa hasta ahora conocida, para la solución de problemas en el campo de las ciencias exactas, en este caso los métodos numéricos, como punto principal por sus aplicaciones en la ingeniería.

Los métodos numéricos son técnicas, donde es posible resolver los problemas por medio de operaciones aritméticas, estos métodos implementan un buen número de cálculos que son por demás demasiado lentos si se hacen manualmente, gastando mucha energía en la técnica misma de solución en vez de aplicarla sobre la definición del problema y su interpretación.

El trabajo monótono que se hacía anteriormente al uso de la computadora, hace de importancia, el dominio de los métodos numéricos, los cuales se deben llevar a cabo en combinación con las capacidades y potencialidades de la programación de computadoras para de esa forma resolver los problemas de ingeniería mucho más fácilmente y eficientemente.

2. OBJETIVO

El comparar los métodos matemáticos de Runge-Kutta, en base a los criterios de eficiencia, precisión y tolerancia, Así como el analizar una muestra de datos empleando cada uno de los métodos matemáticos de Runge-Kutta.

3. MÉTODO DE RUNGE-KUTTA

Los métodos numéricos de *Runge-kutta*, es el análisis y solución de los problemas de valor inicial de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO), estos son una extensión del método de *Euler* para resolver las (EDO'S), pero con un orden de exactitud más alto que este.

Estos métodos se aplican a una EDO´s utilizando puntos igualmente espaciados. La forma general del método RK de orden ***n*** es la siguiente:

$K_1 = hf(x_i, y_i)$

$K_2 = hf(x_i + \alpha_2 h, y_i + \beta_{21}K_1)$

$K_3 = hf(x_i + \alpha_3 h, y_i + \beta_{31}K_1 + \beta_{32}K_2$

.

. .

$Kh=hf(x_i + \alpha_n h, y_i + \beta_{n1}K_1 + \beta_{n2}K_2 + \cdots + \beta_{n,n-1}K_{n-1})$

$y_{i+1} = y_i + R_1K_1 + R_2K_2 + \ldots + R_nK_n.$

Se ve claramente que los métodos vistos son de RK: el método de Euler es uno de RK de orden 1, el método de *Heun* y el del punto medio son métodos de RK de orden 2.

Método de Euler:

$$K_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$Y_i+1 = y_i + K_1$$

Método de Heun:

$$K_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$K_2 = hf(x_i + h, y_i + K_1)$$

$$Yi + 1 = y_i + \frac{1}{2}K_1 + \frac{1}{2}K_2.$$

Método del punto medio:

$$K_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$K_2 = hf(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}K_1)$$

$$y_{i+1} = y_i + 0K_1 + K_2.$$

Un método muy popular es el siguiente método RK de orden 4:

$$K_1 = hf(x_i, y_i)$$
$$K_2 = hf(x_i + h/2, y_i + K_1/2)$$
$$K_3 = hf(x_i + h/2, y_i + K_2/2)$$
$$K_4 = hf(x_i + h, y_i + K_3)$$
$$y_{i+1} = y_i + (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)/6.$$

Ejemplo: Resolver, por el método *RK4* anterior, la ecuación diferencial

$$y' = 2x^2 - 4x + y \quad y(1) = 0.7182818$$

en el intervalo [1, 3], con h = 0.25.

$$K_1 = hf(x_0, y_0)$$
$$= 0.25f(1, 0.7182818)$$
$$= -0.320430$$

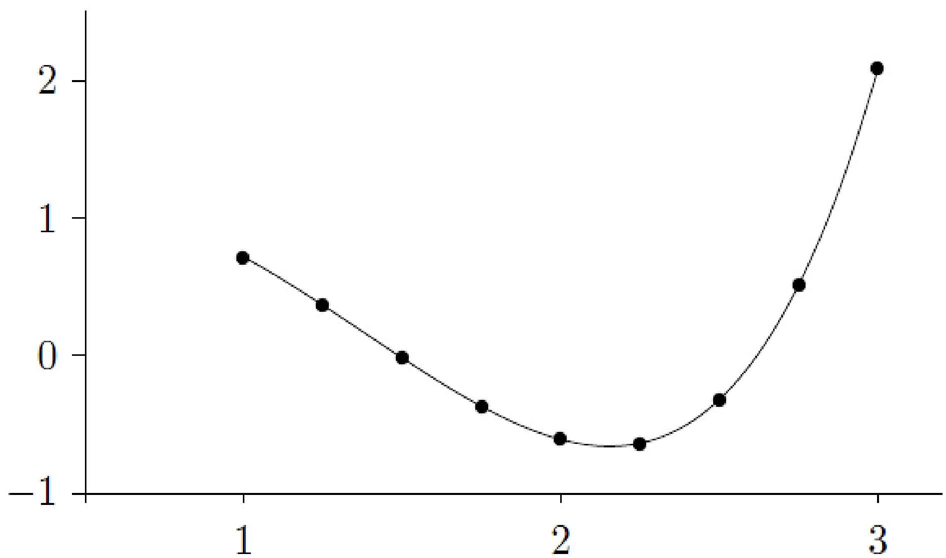
$$K_2 = hf(x_0 + h/2, y_0 + K_1/2)$$
$$= 0.25f(1.125, 0.558067)$$
$$= -0.352671$$

$$K_3 = hf(x_0 + h/2, y_0 + K_2/2)$$
$$= 0.25f(1.125, 0.541946)$$
$$= -0.356701$$

$$K_4 = hf(x_0 + h, y_0 + K_3)$$
$$= 0.25f(1.25, 0.361581)$$
$$= -0.378355$$

$$y_1 = y_0 + (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)/6 = 0.3653606$$

$$K_1 = hf(x_1, y_1)$$
$$= 0.25f(1.25, 0.3653606)$$
$$= -0.377410$$
$$K_2 = hf(x_1 + h/2, y_1 + K_1/2)$$
$$= 0.25f(1.375, 0.176656)$$
$$= -0.385524$$



Ejemplo del método *Runge-Kutta* 4

$$K_3 = hf\,(x_1 + h/2,\ y_1 + K_2/2)$$
$$= 0.25f\,(1.375,\ 0.172599)$$
$$= -0.386538$$

$$K_4 = hf\,(x_1 + h,\ y_1 + K_3)$$
$$= 0.25f\,(1.5,\ -0.02117)$$
$$= -0.380294$$

$$y_2 = y_1 + (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)/6 \ = -0.0182773$$

x_i	$\tilde{y}(x_i)$	$y(x_i)$
1.00	0.7182818	0.7182818
1.25	0.3653606	0.3653430
1.50	-0.0182773	-0.0183109
1.75	-0.3703514	-0.3703973
2.00	-0.6108932	-0.6109439
2.25	-0.6372210	-0.6372642
2.50	-0.3174905	-0.3175060
2.75	0.5175891	0.5176319
3.00	2.0853898	2.0855369

En este ejemplo, los resultados son aún mejores. Hubo que evaluar 32 veces la función *f(x, y)*, 4 veces en cada iteración. Si se trabaja con *h* = 0.1 se obtiene *y*˜(3) = 2.0855314; con *h* = 0.01 se obtiene *y*˜(3) = 2.0855369; con h = 0.001 se obtiene y˜(3) = 2.0855369.

El método *RK4* se puede escribir de la siguiente manera en el algoritmo:

```
function [Y, X] = RK4(f, x0, y0, xf, n)
        Método Runge-Kutta 4 para la ecuacion diferencial

        y' = f(x,y)
        y(x0) = y0
        en intervalo  [x0, xf]
   // n = numero de subintervalos

        Y, X seran vectores fila de  n+1 elementos
        Y  contendra las aproximaciones de
        y(x0) y(x0+h) y(x0+2h)  ... y(xf)
        con h = (xf-x0)/n
   // X    contendra los valores  x0  x0+h  x0+2h ... xf

   h = (xf-x0)/n
   X = zeros(1,n+1)
   Y = X
      X(1)= x0
      Y(1)= y0
   xi =    x0
   yi =    y0
   for i=1:n
        K1= h*f(xi,            yi)
        K2= h*f(xi+h/2, yi+K1/2);
        K3= h*f(xi+h/2,        yi+K2/2);
        K4= h*f(xi+h,          yi+K3);
      xi   = xi+h
      yi   = yi + (K1 + 2*K2 + 2*K3 + K4)/6
      Y(i+1) = yi X(i+1) = xi
   end endfunction
```

Ejemplo 1 :

Suponiendo que se aplica los métodos de Runge-Kutta de orden dos al siguiente problema de valor inicial

$$y' = y - t^2 + 1, \ 0 \le t \le 2, \quad y(0) = 0.5,$$

con $N = 10, \ h = 0.2, \ t_i = 0.2i$ y $w_0 = 0.5$ en cada caso.

Las ecuaciones de diferencias son:

Método del Punto Medio: $w_{i+1} = 1.22w_i - 0.0088i^2 - 0.008i + 0.218;$

Método modificado de Euler: $w_{i+1} = 1.22w_i - 0.0088i^2 - 0.008i + 0.216;$

Método de Heun: $w_{i+1} = 1.22w_i - 0.0088i^2 - 0.008i + 0.217\overline{3};$

para cada $i = 0,1,...,9.$

La siguiente tabla contiene los resultados de estos cálculos.

Para este problema, es **mejor** el método del punto medio, **seguido por** el método de Heun.

t_i	$y(t_i)$	Método del punto medio	Error	Método modificado de Euler	Error
0.0	0.5000000	0.5	0	0.5000000	0
0.2	0.8292986	0.8280000	0.0012986	0.8260000	0.0032986
0.4	1.2140877	1.2113600	0.0027277	1.2069200	0.0071677
0.6	1.6489406	1.6446592	0.0042814	1.6372424	0.0116982
0.8	2.1272295	2.1212842	0.0059453	2.1102357	0.0169938
1.0	2.6408591	2.6331668	0.0076923	2.6176879	0.0231715
1.2	3.1799415	3.1704634	0.0094781	3.1495789	0.0303627
1.4	3.7324000	3.7211654	0.0112346	3.6936862	0.0387138
1.6	4.2834838	4.2706218	0.0128620	4.2350972	0.0483866
1.8	4.8151763	4.8009586	0.0142177	4.7556185	0.0595577
2.0	5.3054720	5.2903695	0.0151025	5.2330546	0.0724173

t_i	$y(t_i)$	Método de Heun	Error
0.0	0.5000000	0.5000000	0
0.2	0.8292986	0.8273333	0.0019653
0.4	1.2140877	1.2098800	0.0042077
0.6	1.6489406	1.6421869	0.0067537
0.8	2.1272295	2.1176014	0.0096281
1.0	2.6408591	2.6280070	0.0128521
1.2	3.1799415	3.1635019	0.0164396
1.4	3.7324000	3.7120057	0.0203944
1.6	4.2834838	4.2587802	0.0247035
1.8	4.8151763	4.7858452	0.0293310
2.0	5.3054720	5.2712645	0.0342074

5.5 MÉTODO DE RUNGE-KUTTA FEHLBERG

1. INTRODUCCIÓN

En matemáticas, el método de *Runge-Kutta-Fehlberg* (o método de Fehlberg) es un algoritmo de análisis numérico para la resolución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias. Fue desarrollado por el matemático alemán Erwin Fehlberg y se basa en los métodos de *Runge-Kutta*.

El método de *Runge-Kutta-Fehlberg* emplea un método junto con un método que se sirve de todos los puntos del primero, y por ello es conocido como **RKF45**.

Desde entonces se han desarrollado métodos similares con diferentes pares de órdenes. Realizando un cálculo adicional a los requeridos por el método RK5, es posible estimar y controlar el error en la solución así como determinar automáticamente la longitud del paso con el que el método avanza en su cálculo de la solución, haciendo de este un método eficiente para problemas de integración numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias

Siguiendo las ideas presentadas anteriormente para la estimación del error local, *Fehlberg* desarrolló un par de métodos *Runge Kutta* de orden 4 y 5 asociados, de tal forma que ambos utilizan en cada paso las mismas evaluaciones de ***f*** con el fin de ahorrar cálculos.

El método de orden 5 requiere 6 evaluaciones de ***f*** en cada paso. Fehlberg demostró que es posible usar 5 de esos valores para desarrollar un método de orden 4 (en lugar del método clásico, que usa 4 evaluaciones de ***f***.

El estimador de orden 4 así obtenido puede utilizarse junto con el de orden 5 para estimar el error local, sin necesidad de nuevas evaluaciones de ***f*** y habilitando una estimación del nuevo paso *h*.

2. OBJETIVO

El conceptualizar el método matemáticos que resuelven ecuaciones diferenciales cuyas soluciones que convergen a un valor. Analizar una muestra de datos empleando cada uno de los métodos matemáticos de Runge-Kutta y Fehlberg

3. MÉTODO DE RUNGE-KUTTA FEHLBERG

En los métodos de integración de Cuadratura Adaptativa, se estudió el uso del tamaño de paso variable junto con la eficiencia requerida en la cantidad de cálculos.

Por sí mismos ello no sería un motivo suficiente para preferirlos como método de solución numérica de *EDO's*, y presentan otra característica útil:

El procedimiento del tamaño de paso que incorpora una estimación del error de truncamiento que no requiere aproximar las derivadas de orden superior de la función

A estos métodos se les llama "Adaptativos", adaptan el número y la posición de los nodos con que se efectúa la aproximación, y garantizar que el Error de Truncamiento no rebase la cota dada.

La forma general del método de diferencias que incluye el control del error que es la siguiente:

$$\omega_{i+1} = \omega_i + h_i \phi(t_i, \omega_i, h_i) \quad \text{para } i = 0,1,2,\dots,N-1$$

Para aproximar la solución $y(t)$ al problema de valor inicial :

$$y' = f(t, y) \qquad a \le t \le b \qquad y(a) = \alpha$$

$$\omega_{i+1} = \omega_i + h_i \phi(t_i, \omega_i, h_i) \quad \text{para } i = 0,1,2,\dots,N-1$$

Deberá tener la propiedad de que, con una tolerancia dada $\varepsilon > 0$ la cantidad mínima de puntos de red que serivirá para asegurarse de que el error global $|y(t_i) - \omega_i|$, no rebasará a ε con cualquier $i = 0,1,2,\dots,N-1.$

Aunque por lo general no es posible determinar el error global de un método, existe una estrecha relación entre el error local de truncamiento y el error global.

El método de *Runge-Kutta-Fehlberg*, consiste en emplear el método de *Runge-Kutta* con el error local de truncamiento de quinto orden para estimar el error local en un método de *Runge-Kutta* de cuarto orden.

El método *R-K de 5º* orden usado está dado por:

$$\tilde{\omega}_{i+1} = \omega_i + \frac{16}{135}k_1 + \frac{6656}{12825}k_3 + \frac{28561}{56430}k_4 - \frac{9}{50}k_5 + \frac{2}{55}k_6$$

El método de R - K de 4º orden es:

$$\omega_{i+1} = \omega_i + \frac{25}{216}k_1 + \frac{1408}{2565}k_3 + \frac{2197}{4104}k_4 - \frac{1}{5}k_5$$

Donde

$$k_1 = hf\left(t_i, \omega_i\right)$$

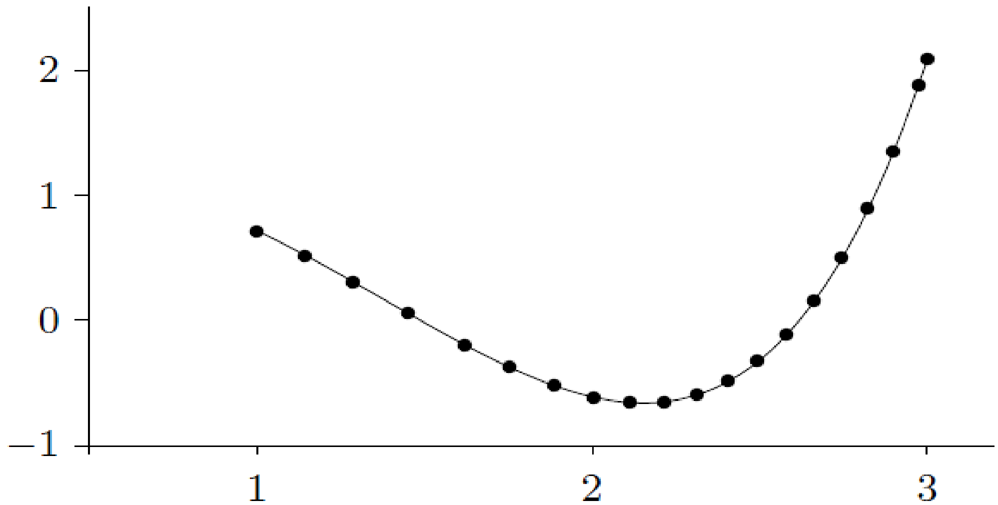
$$k_2 = hf\left(t_i + \frac{h}{4}, \omega_i + \frac{1}{4}k_1\right)$$

$$k_3 = hf\left(t_i + \frac{3h}{8}, \omega_i + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2\right)$$

$$k_4 = hf\left(t_i + \frac{12h}{13}, \omega_i + \frac{1932}{2197}k_1 - \frac{7200}{2197}k_2 + \frac{7296}{2197}k_3\right)$$

$$k_5 = hf\left(t_i + h, \omega_i + \frac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \frac{3680}{513}k_3 - \frac{845}{4104}k_4\right)$$

$$k_6 = hf\left(t_i + \frac{h}{2}, \omega_i - \frac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \frac{3544}{2656}k_3 + \frac{1859}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5\right)$$



Una ventaja de este método consiste en que sólo se requieren 6 evaluaciones de la función por paso, en cambio de manera conjunta los métodos de R-K de 4º y 5º orden sumados requieren por lo menos

Como el objetivo no es sólo estimar el error local de truncamiento, sino que también lo es ajustar el tamaño del paso para mantenerlo dentro de una cota dada esto se hace suponiendo que:

$$\text{Como } \tau_{i+1}(h) \text{ es de } O(h^n), \text{ entonces existe un número } K$$
$$\text{independiente de } h \text{ tal que } \tau_{i+1}(h) \approx Kh^n$$

En el proceso de control del error se usó un valor inicial de ***h*** en el i-esimo paso para obtener los primeros valores de ***w i+1*** que permitió encontrar ***q*** en ese paso y luego se repitieron los cálculos.

Este procedimiento requiere el doble de evaluaciones de funciones por paso, sin control del error

En la práctica el valor q a usar se selecciona de manera diferente. El valor de q determinado en el *i-esimo* paso cumple dos propósitos.

Rechazar de ser necesario, la elección inicial de ***h*** en el *i-esimo* paso y repetir los cálculos por medio de *qh* Predecir una elección adecuada de *h* para (*i*+1) esimo paso.

El algoritmo ALGO53"**RUNGE_KUTTA_FEHLBERG_7_53**" incluye la gráfica de los puntos encontrados.

Ejercicio:

Utilizar el ALG053, para aproximar la solución de

$$y' = y - t^2 + 1 \qquad 0 \le t \le 2 \qquad y(0) = 0.5$$

Usando $\text{TOL} = 10^{-5}$, tamaño máximo de paso $= 0.25$

y un tamaño mínimo de paso $= 0.01$.

Verifique sus respuestas con la solución exacta:

$$y(t) = (t+1)^2 - 0.5e^t$$

Algoritmo:

This is the Runge-Kutta-Fehlberg Method.

Input the function F(t,y) in terms of t and y

For example: y-t^2+1

'y-t^2+1'

Input left and right endpoints on separate lines.

0

2

Input the initial condition

0.5

Input tolerance

10^-5

Input minimum and maximum mesh spacing on separate lines.

0.01

0.25

RUNGE-KUTTA-FEHLBERG METHOD

T(I)	W(I)	H	R .
0.0000000	0.5000000	0	0
0.2500000	0.9204886	0.2500000	0.0000062
0.4865522	1.3964910	0.2365522	0.0000045
0.7293332	1.9537488	0.2427810	0.0000043
0.9793332	2.5864260	0.2500000	0.0000038
1.2293332	3.2604605	0.2500000	0.0000024
1.4793332	3.9520955	0.2500000	0.0000007
1.7293332	4.6308268	0.2500000	0.0000015
1.9793332	5.2574861	0.2500000	0.0000043
2.0000000	5.3054896	0.0206668	0.0000000

RUNGE-KUTTA-FEHLBERG METHOD

T(I)	W(I)	$Y(I)=(t+1)^2-0.5e^t$	|Y(I)-W(I)|
0.0000000	0.5000000	0.5000000	0
0.2500000	0.9204886	0.9204873	0.0000009
0.4865522	1.3964910	1.3964884	0.0000026
0.7293332	1.9537488	1.9537446	0.0000042
0.9793332	2.5864260	2.5864198	0.0000062
1.2293332	3.2604605	3.2604520	0.0000085
1.4793332	3.9520955	3.9520845	0.0000110
1.7293332	4.6308268	4.6308127	0.0000141
1.9793332	5.2574861	5.2574687	0.0000174
2.0000000	5.3054896	5.3054720	0.0000176

4. ENLACES SUGERIDOS

https://es.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9todo_de_Runge-Kutta

https://es.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9todo_de_Runge-Kutta-Fehlberg

5. BIBLIOGRAFÍA

- Análisis Numérico, *Richard L. Burden/J. Douglas Faires*, Editorial Thomson Learning Inc.
- Métodos Numéricos Con SCILAB, Héctor Manuel Mora Escobar, Abril 2010

6. GLOSARIO

7. PREGUNTAS DE AUTOEVALUACIÓN

1. ¿Qué es el método de *Runge-Kutta*?

2. ¿Cuáles son sus fórmulas de procesos?

3. ¿Explique en qué consiste el método de *Runge-Kutta-Fehlberg* ?

4. ¿Cuál método es mejor y porque, *RK4 o RKF*?