ANÁLISIS NUMÉRICO

ANS115

UNIDAD II

MÉTODOS ITERATIVOS PARA LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES NO LINEALES Y ACELERACIÓN DE LA CONVERGENCIA

ANÁLISIS NUMÉRICO

ANS115

TEMA

- El Método de la Secante

Agenda

- Método de la Secante
  - Teorema
  - Algoritmo
  - Grafica
  - Ejemplos

Objetivos

- Estudiar el métodos de la Secante en base a los criterios de eficiencia, precisión y tolerancia.
- Analizar una muestra de datos empleando cada uno de los métodos matemáticos del Método de la Secante

Método de la Secante

El involucrar la derivada es un problema en el método de **Newton-Raphson** ya que en algunos casos no se puede calcular con facilidad.

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

La derivada de $\boldsymbol{f(x)}$ en un punto $\boldsymbol{x_n}$ puede aproximarse usando el método de los elementos finitos, por:

$$\boxed{f'(x_n) \approx \frac{f(x_{n-1}) - f(x_n)}{x_{n-1} - x_n}}$$

Método de la Secante

Entonces, remplazando:

$$\boldsymbol{x_{n+1} = x_n - \frac{f\,(x_n)}{f\,'(x_n)}}$$

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_{n-1}) - f(x_n)}{x_{n-1} - x_n}$$

$$= x_n - \frac{f\,(x_n)}{\dfrac{f(x_{n-1}) - f(x_n)}{x_{n-1} - x_n}}$$

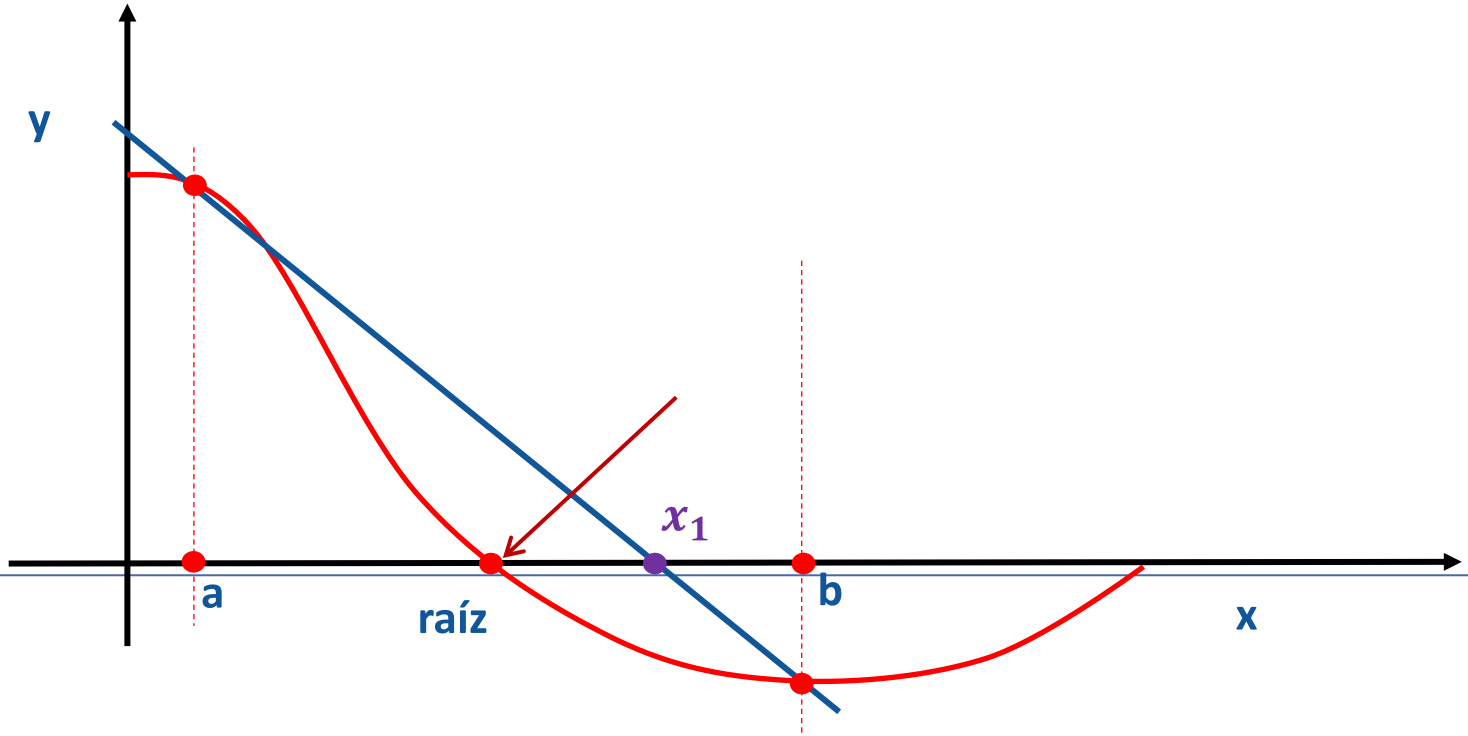
$$= x_n - \frac{f\,(x_n)(x_{n-1} - x_n)}{f(x_{n-1}) - f(x_n)}$$

De esta manera, obtenemos el proceso iterativo que nos da el método de la secante

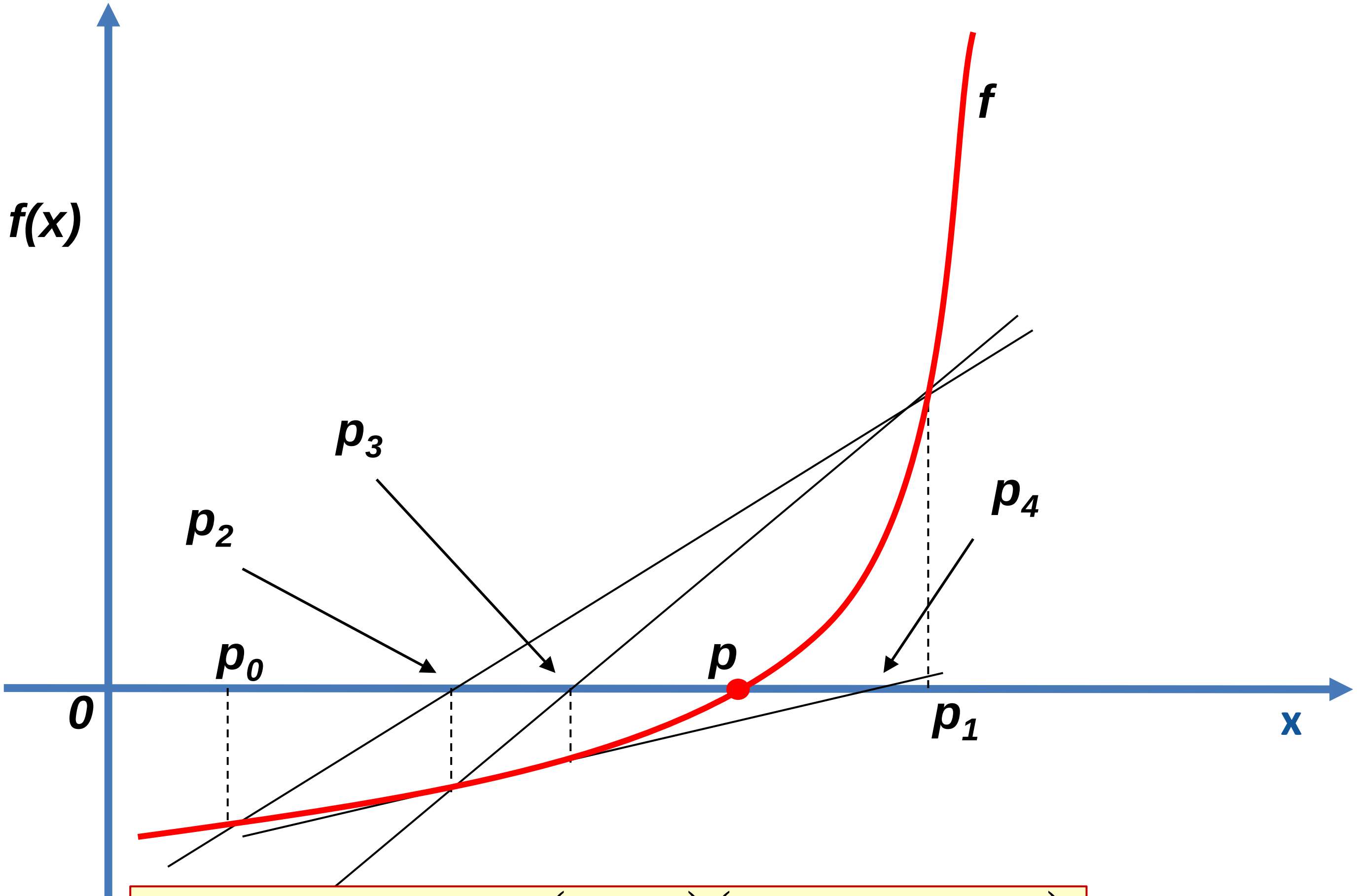
Método de la Secante

Es un método en que, para aproximarse a la raíz, en cada iteración se evalúa la función y no la derivada.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_{n-1} - x_n)}{f(x_{n-1}) - f(x_n)} \quad n = 0,1,2,3 \ldots$$



Método de la Secante



$$p_n = p_{n-1} - \frac{f\left(p_{n-1}\right)\left(p_{n-1} - p_{n-2}\right)}{f\left(p_{n-1}\right) - f\left(p_{n-2}\right)}$$

Método de la Secante

1

Elegir dos puntos iniciales cualquiera x_0 , x_1 para los cuales se evalúan los valores de la función : $f(x_0)$ y $f(x_1)$

2

Se traza una recta secante por esos dos puntos

3

El punto de intersección de esta recta con el eje de las abscisas $(x_2, 0)$ constituye una segunda aproximación de la raíz

Método de la Secante

4

Se reemplazan los subíndices: $x_i = x_{i+1}$, de manera que x_1 pasa a ser x_0 y x_2 pasa a ser x_1

5

Se traza una segunda secante por los nuevos puntos x_0, x_1, obteniendo una segunda aproximación con x_2

6

El proceso se repite n veces hasta que el punto de intersección x_2, coincide con el valor exacto de la raíz

Método de la Secante

NEWTON Y SECANTE CONVERGEN CUADRÁTICAMENTE AL VALOR DE LA RAÍZ

EL ERROR RELATIVO ES PROPORCIONAL AL CUADRADO DEL ERROR CORRESPONDIENTE DE LA ITERACIÓN ANTERIOR

CUANDO EL ERROR RELATIVO EN UNA ITERACIÓN ES MENOR QUE 1 (INFERIOR AL 100%), LA CONVERGENCIA ESTÁ GARANTIZADA

CUANDO EL ERROR RELATIVO EN UNA ITERACIÓN ES MAYOR QUE 1, LA DIVERGENCIA ESTÁ GARANTIZADA

Método de la Secante

ALGORITMO

ENTRADA: Las aproximaciones iniciales p_0 y p_1. La Tolerancia (***TOL***) y el Número Máximo de Iteraciones N_0)

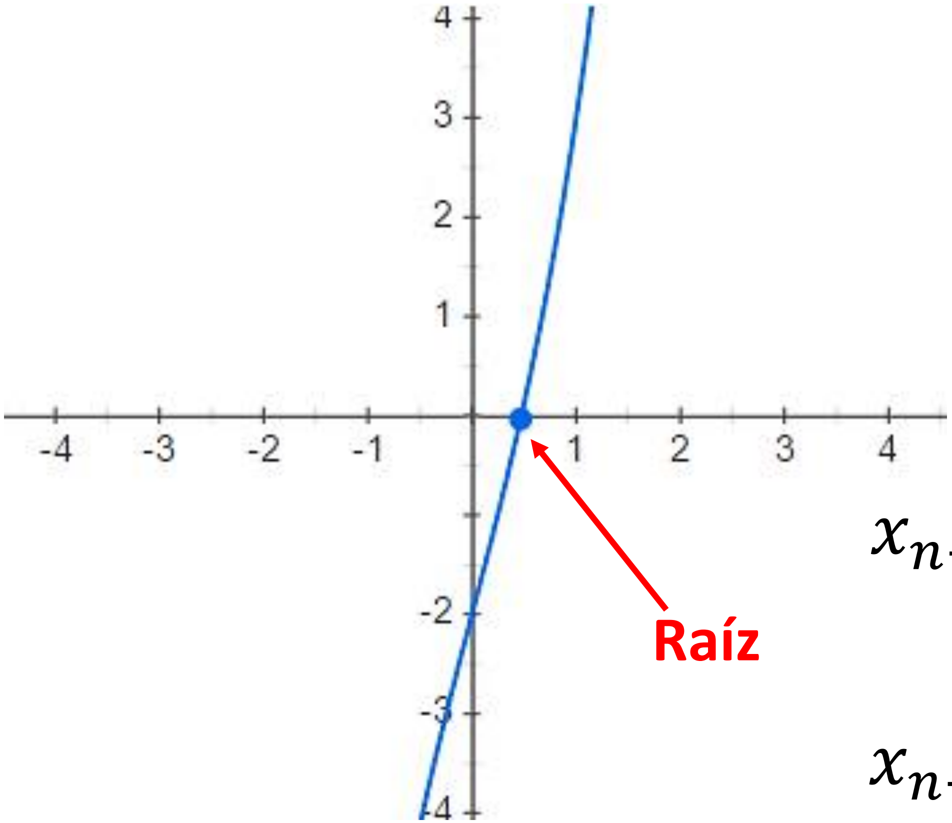
SALIDA: Solución aproximada p o mensaje de error

1) Hacer $i=2$; $q_0=f(p_0)$; $q_1=f(p_1)$
2) **Mientras** $i \leq N_0$ Hacer pasos 3 a 6
   3) Hacer $p = p_1 - q_1 (p_1 - p_0)/(q_1 - q_0)$.
   4) Si $|p - p_1| < TOL$ entonces SALIDA(p); PARAR
   5) Hacer $i=i+1$
   6) Hacer $p_0 = p_1$; $q_0 = q_1$; $p_1 = p$; $q_1=f(p)$
7) **SALIDA** ('El método falló'); PARAR

Método de la Secante

Ejemplo 1

Estimar el valor de la raíz de la ecuación $\boxed{x^3 + 4x - 2 = 0}$ aplicando el método de la secante con valores iniciales



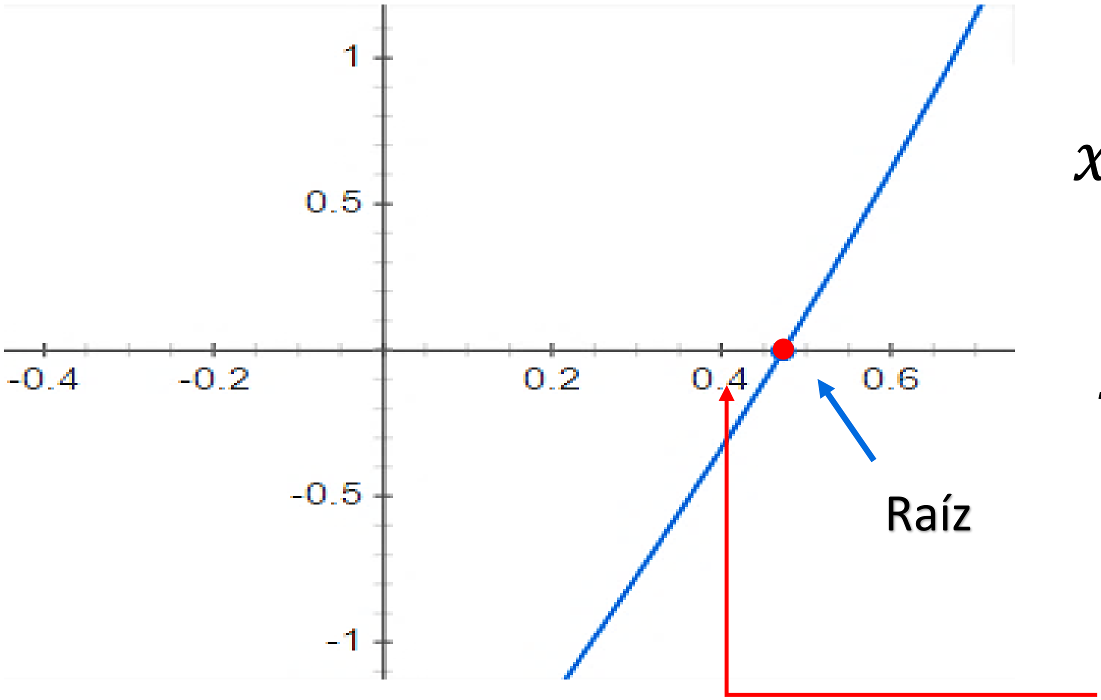
$$x_{-1} = 1, x_0 = 0$$

x_{n-1}	x_n	x_{n+1}
1	0	?

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_{n-1} - x_n)}{f(x_{n-1}) - f(x_n)}$$

$$x_{n+1} = 0 - \frac{f(0)(1 - 0)}{f(1) - f(0)}$$

Método de la Secante



$$x_{n+1} = 0 - \frac{f(0)(1-0)}{f(1)-f(0)}$$

$$x_{n+1} = 0 - \frac{-2*(1)}{3-(-2)}$$

$$x_{n+1} = 0 - \frac{-2}{5}$$

$$x_{n+1} = 0.4$$

Completamos nuestra tabla y continuamos las iteraciones hasta encontrar la aproximación más cercana

x_{n-1}	x_n	x_{n+1}
1	**0**	**0.4**

Método de la Secante

Ejemplo 2

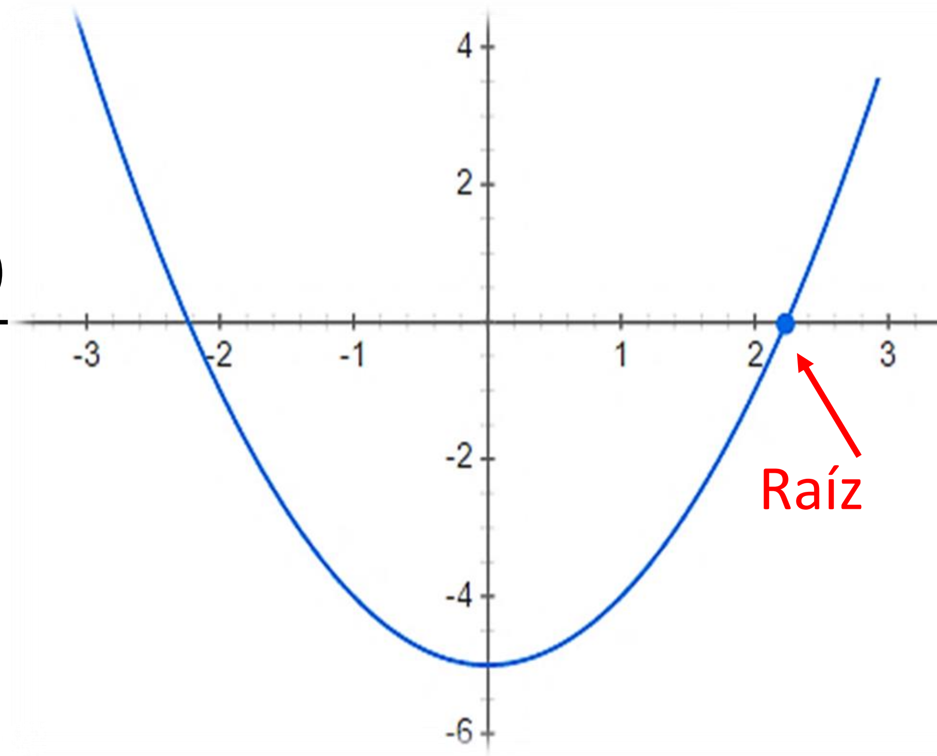
Estimar el valor de la raíz de la ecuación aplicando el método de la secante con valores iniciales

$$x^2 - 5 = 0 \qquad x_{-1} = 3, x_0 = 2$$

x_{n-1}	x_n	x_{n+1}
3	2	?

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_{n-1} - x_n)}{f(x_{n-1}) - f(x_n)}$$

$$\boxed{x_{n+1} = 2 - \frac{f(2)(3-2)}{f(3) - f(2)}}$$



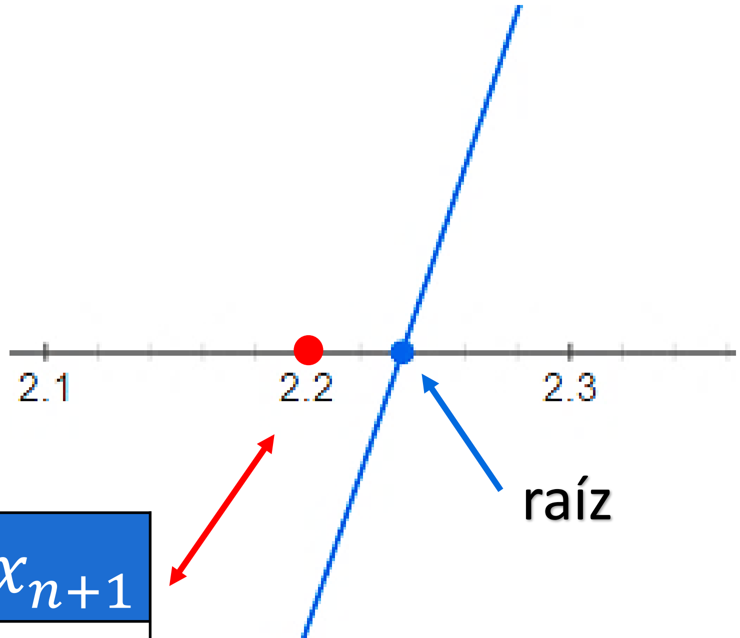
Método de la Secante

$$x_{n+1} = 2 - \frac{f(2)(3-2)}{f(3)-f(2)}$$

$$x_{n+1} = 2 - \frac{-1*(1)}{4-(-1)}$$

$$x_{n+1} = 2 - \frac{-1}{5}$$

$$x_{n+1} = 2.2$$



x_{n-1}	x_n	x_{n+1}
3	2	2.2

Se toma los nuevos valores iniciales y continuamos con la siguiente iteración:

x_{n-1}	x_n	x_{n+1}
3	2	2.2
2	2.2	?

Método de la Secante

Haciendo los cálculos desde Excel, la tabla tendría lo siguientes valores:

n	xn-1	xn	xn+1
0	3,0000	2,0000	2,2000
1	2,0000	2,2000	2,2381
2	2,2000	2,2381	2,2361
3	2,2381	2,2361	2,2361
4	2,2361	2,2361	**2,2361**

Como resultado, tenemos que la aproximación a la raíz es: **2.2361**

Feliz día !!