



UNIDAD IV

4.0 DERIVACIÓN E INTEGRACIÓN NUMÉRICA

4.8 MÉTODOS DE INTEGRACIÓN GAUSSIANA

4.9 MÉTODOS DE GAUSS LEGENDRE

4.8 MÉTODOS DE INTEGRACIÓN GAUSSIANA

1. INTRODUCCIÓN.

En las fórmulas de integración pasadas considerando que los espaciamientos son iguales, es decir que la variable independiente x está dividida en intervalos equiespaciados. Gauss observó que a falta de exigir la condición de conocimiento de la función $f(x)$ en valores predeterminados, una fórmula de tres términos requeriría seis parámetros (en vez de tres como el caso de Simpson) y correspondería a una fórmula de integración polinómica de grado cinco. Las formulas gaussianas pueden aplicarse cuando la función $f(x)$ se conoce explícitamente si por el contrario, se conocen valores equiespaciados de la función ya que estas han sido evaluadas experimentalmente, se deben usar las fórmulas de integración numérica.

Las fórmulas de integración de Gauss tienen la forma:

$$I = \int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^n w_i f(x_i)$$

Donde, w_i son las funciones de peso y $f(x_i)$ son las $n+1$ evaluaciones de la función $f(x)$

2. OBJETIVO.

Estudiar los métodos matemáticos de derivación e integración Gaussiana en base a los criterios de eficiencia, precisión y tolerancia. Identificar el método idóneo que debe aplicarse a una muestra de datos de un problema real. Implementar cada uno de los métodos de derivación e integración en la herramienta informática.

3. METODOS DE INTEGRACION GAUSSIANA.

Las fórmulas de Newton-Cotes se dedujeron integrando los polinomios interpolantes.



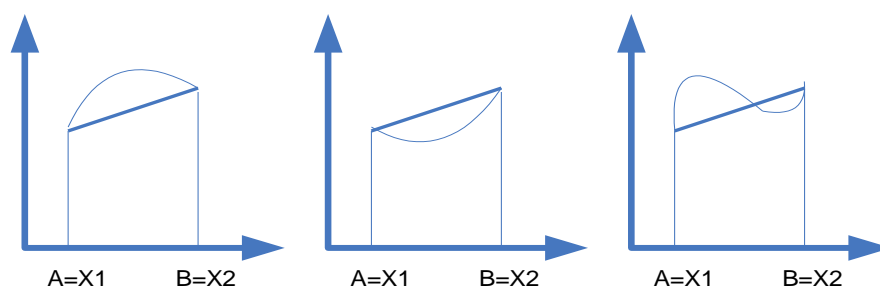
Ya que el término de error en el polinomio interpolante de grado n contiene la $(n+1)$ derivada de la función a aproximar, una fórmula de este tipo será exacta cuando aproxime cualquier polinomio de un grado menor o igual que n .

En todas las fórmulas de Newton-Cotes se emplean valores de la función en puntos equidistantes.

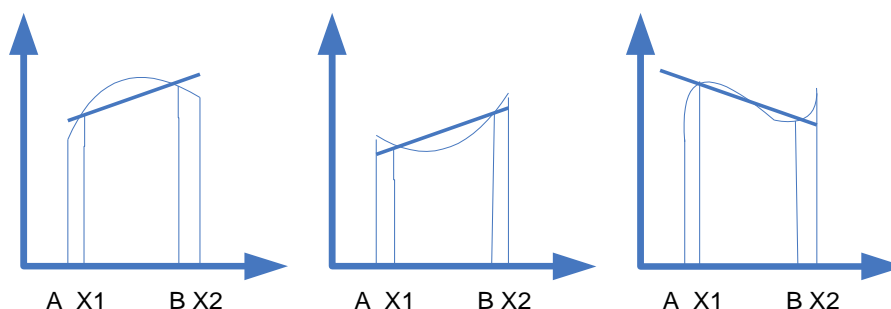
Las fórmulas de Newton-Cotes se dedujeron integrando los polinomios interpolantes.

En todas las fórmulas de Newton-Cotes se emplean valores de la función en puntos equidistantes. Por lo que analizaremos los siguientes casos.

Esta situación puede afectar considerablemente la exactitud de la aproximación. Por ejemplo, véase el caso de la regla del trapecio con que se determinan las integrales de las siguientes funciones.



La regla del trapecio, sin duda ésta no es la mejor línea para aproximar la integral. Las líneas como las que se muestran en la siguiente figura seguramente producirán, en la generalidad de los casos, mucho mejores aproximaciones.





La **cuadratura gaussiana** selecciona los puntos de la evaluación de manera óptima y no en una forma igualmente espaciada.

Se escogen los nodos x_1, x_2, \dots, x_n en el intervalo $[a, b]$ y los coeficientes c_1, c_2, \dots, c_n , para reducir en lo posible el error esperado que se obtiene al efectuar la aproximación.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n c_i f(x_i)$$

Si se desea medir esta exactitud, se supondrá que la selección óptima de estos valores es la que dé el resultado exacto de la clase más numerosa de polinomios; es decir, la selección que ofrezca el máximo grado de precisión.

En la fórmula de aproximación los coeficientes c_1, c_2, \dots, c_n son arbitrarios, y los nodos x_1, x_2, \dots, x_n están restringidos sólo por la especificación de que se encuentren en $[a, b]$, el intervalo de la integración. Esto genera **2n** parámetros de donde elegir.

Si los coeficientes de un polinomio se consideran parámetros, la clase de polinomios de grado máximo **2n – 1** también contiene **2n** parámetros. Así pues, éste es el tipo de polinomios más amplio en que es posible esperar que la fórmula sea exacta.

Para dar un ejemplo del procedimiento con que se escogen los parámetros apropiados, se mostrará cómo seleccionar los coeficientes y los nodos cuando **n = 2** y cuando el intervalo de integración es **[-1, 1]**.

Después se explicará el caso más general de una elección arbitraria de los nodos y coeficientes, indicando cómo modificar el método cuando se integra en un intervalo arbitrario.

Suponiendo que se quiere determinar c_1, c_2, x_1 y x_2 de modo que la fórmula de integración:

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n c_i f(x_i), \text{ da el resultado exacto,}$$

Siempre que $f(x)$ sea un polinomio de grado $2(2) - 1 = 3$ o menor, es decir, cuando $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$, para algún conjunto de constantes a_0, a_1, a_2 y a_3 .



Dado que:

$$\int (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3)dx = a_0 \int 1dx + a_1 \int xdx + a_2 \int x^2dx + a_3 \int x^3dx,$$

esto equivale a demostrar que la fórmula produce resultados exactos cuando $f(x)$ es $1, x, x^2, x^3$. Por tanto, se necesita c_1, c_2, x_1 y x_2 , de modo que:

$$\begin{aligned} c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 1 &= \int_{-1}^1 1dx = 2, & c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 &= \int_{-1}^1 xdx = 0, \\ c_1 \cdot x_1^2 + c_2 \cdot x_2^2 &= \int_{-1}^1 x^2dx = \frac{2}{3}, & \text{y} & \quad c_1 \cdot x_1^3 + c_2 \cdot x_2^3 = \int_{-1}^1 x^3dx = 0, \end{aligned}$$

Con unas cuantas operaciones algebraicas se puede demostrar que este sistema de ecuaciones tiene solución única

$$c_1 = 1, \quad c_2 = 1, \quad x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

con que se obtienen la fórmula de aproximación

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \approx f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

Esta fórmula tiene un grado de precisión tres, esto es, produce el resultado exacto con cada polinomio de grado tres o menor.

ALGORITMO EN EJECUCION

Este es el método de Cuadratura Gaussiana.

Ingresa la función $F(x)$ en términos de x

Por ejemplo: $\cos(x)$

' x^4 '

Ingresa el límite inferior de integración ' a ' y el límite superior de integración ' b ' en líneas separadas

0.5



1

Ingresa un número entero positivo N entre 2 y 5.

2

El integral de F de 0.500000000000 a 1.000000000000

con N igual a 2

es :-----> 0.1935763888901679300000000000

EJEMPLO 2: Aproximar la integral de x^4 , en el intervalo [0.5,1]. El valor real es: **0.19375**

N	Fórmulas Cerradas "newtoncot.m"	Fórmulas Abiertas "newtoncot.m"	Cuadratura Gaussiana "CUAD_GAUSS.m"
0	-	0.15820312500	-
1	0.26562500000	0.16994598765	-
2	0.26041666667	0.19352213542	0.19357638889
3	0.19386574074	0.19359166667	0.19375000001
4	0.19375000000	-	0.19374999999
5	-	-	0.19375000000

4.9 MÉTODOS DE GAUSS LEGENDRE

En las fórmulas de integración pasadas considerando que los espaciamientos son iguales, es decir que la variable independiente x está dividida en intervalos equiespaciados. Gauss observó que a falta de exigir la condición de conocimiento de la función $f(x)$ en valores predeterminados, una fórmula de tres términos requeriría seis parámetros (en vez de tres como el caso de Simpson) y correspondería a una fórmula de integración polinómica de grado cinco. Las fórmulas gaussianas pueden aplicarse cuando la función $f(x)$ se conoce explícitamente si por el contrario, se conocen valores equiespaciados de la función ya que estas han sido evaluadas experimentalmente, se deben usar las fórmulas de integración numérica.



Las fórmulas de integración de Gauss tienen la forma:

$$I = \int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^n w_i f(x_i)$$

Donde, w_i son las funciones de peso y $f(x)$ son las $n+1$ evaluaciones de la función $f(x)$

Cuadratura Gauss Legendre

El objetivo de este método es aproximar la función $f(x)$, por un polinomio $p_n(x)$ que sea ortogonal con respecto a una función de peso dado, en el intervalo.

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

$$I = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b P_n(x) dx + \int_a^b R_n(x) dx$$

Donde $w(x)$ son funciones de peso, $P_n(x)$ es el polinomio seleccionado y $R_n(x)$ es el residuo originado por la aproximación.

Es conveniente que los límites de integración sea entre $(-1,1)$ y no entre (a, b) . para ello se puede hacer un sencillo cambio de variable de la siguiente forma:

$$x = \frac{(b-a)t + b + a}{2} \quad y \quad dx = \left(\frac{b-a}{2}\right) dt$$

Así se tiene que.

$$I = \int_a^b f(x) w(x) dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 F(t) \Omega(t) dt$$

$$I = \int_{-1}^1 F(t) \Omega(t) dt = \int_{-1}^1 \left[\sum_{i=0}^n L_i(t) F(t_i) \right] \Omega(t) dt + \int_{-1}^1 R_n(t) dt$$

L_1 es el polinomio de Legendre:



$$L_1 = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \left[\frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right]$$

Nótese que L e L' están relacionadas de la siguiente manera:

$$I = \frac{b-a}{2} I'$$

Reagrupando los términos de la primera ecuación de esta cuadratura, se tiene:

$$I' = \int_{-1}^1 F(t) \Omega(t) \sum_{i=0}^n F(t_i) \int_{-1}^1 L_i(t) \Omega(t) dt + \int_{-1}^1 R_n(t) \Omega(t) \Omega(t) dt$$

Se puede demostrar que si la función $F(t)$ es equivalente a un polinomio de grado inferior o igual a un polinomio de grado $2n+1$, la integral es exacta si los coeficientes son calculados por la fórmula:

$$w_i = \int_{-1}^1 L_i(t) dt = \sum_{i=0}^n F(t_i) w_i$$

Las funciones $\Omega(t)$ son funciones positivas integrales asociadas a la propiedad de ciertos polinomios ortogonales. De hecho los valores que aparecen en el cálculo de la sumatoria son justamente las raíces de estos mismos polinomios ortogonales, raíces utilizadas en el desarrollo:

$$\int_a^b p_i(x) p_j(x) dx = \begin{cases} 0 & \rightarrow i \neq j \\ c_i & \rightarrow i = j \end{cases}$$

Dependiendo del intervalo (a,b) , también llamado dominio, se selecciona el tipo de polinomio que satisfaga la ecuación general del método de Romberg. Finalmente el resultado de la integral es:



$$I = \int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 F(t)dt = \frac{b-a}{2} \sum_{i=0}^n F(t_i)w_i$$

Polinomios de Legendre:

Dominio (1,1), función de peso $\Omega(x)=1$

$$L_0(x) = 1; L_1(x) = x; L_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1); L_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x);$$

$$L_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3); \dots$$

$$L_{i+1}(x) = \frac{(2i+1)L_i(x) - iL_{i-1}(x)}{i+1}$$

4. OBJETIVO.

Estudiar los métodos matemáticos de derivación e integración Gaussiana en base a los criterios de eficiencia, precisión y tolerancia así como aprender a estudiar los métodos matemáticos de derivación e integración Gauss-Legendre en base a identificar el método idóneo que debe aplicarse a una muestra de datos de un problema real.

5. METODOS DE GAUSS LEGENDRE.

Con esta técnica podríamos determinar los nodos y coeficientes de las fórmulas que proporcionan resultados exactos con los polinomios de grado superior, pero también se puede aplicar un método alternativo para obtenerlos más fácilmente.

El problema de obtenerlos está relacionado con el conjunto de polinomios de Legendre, un conjunto $\{P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x)\}$ con las siguientes propiedades:

1. Para cada n , $P_n(x)$, es un polinomio de grado n .
2. $\int_{-1}^1 P(x)P_n(x)dx = 0$ siempre que $P(x)$ sea un polinomio de un grado menor que n .



Los primeros polinomios de Legendre son:

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = x^2 - \frac{1}{3},$$
$$P_3(x) = x^3 - \frac{3}{5}x \quad y \quad P_4(x) = x^4 - \frac{6}{7}x^2 + \frac{3}{35}.$$

Las raíces de estos polinomios son diferentes, se encuentran en el intervalo $(-1, 1)$ tienen simetría con respecto del origen y, lo más importante de todo, es la opción correcta para determinar los parámetros que resuelven el problema planteado.

Los nodos x_1, x_2, \dots, x_n necesarios para producir una fórmula de la aproximación a la integral, que proporcione resultados exactos para cualquier polinomio de un grado menor que $2n$ son las raíces del polinomio de Legendre de grado n .

Esto se establece por medio del siguiente teorema.

TEOREMA DE LA INTEGRAL DEL POLINOMIO DE LEGENDRE

Suponiendo que x_1, x_2, \dots, x_n son las raíces del polinomio de Legendre $P_n(x)$ de n -ésimo grado y que para cada $i = 1, 2, \dots, n$, los números c_i están definidos por

$$c_i = \int_{-1}^1 \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} dx$$

Si $P(x)$ es un polinomio cualquiera de un grado menor que $2n$,

$$\text{entonces } \int_{-1}^1 P(x) dx = \sum_{i=1}^n c_i P(x_i).$$

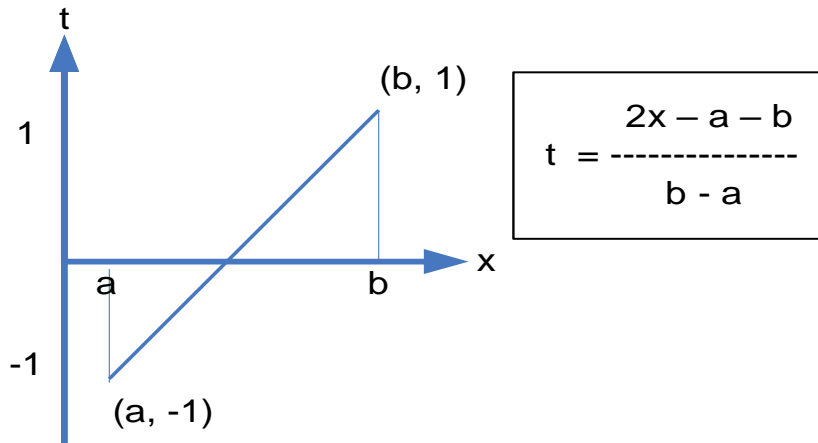


Las constantes c_i necesarias para que la cuadratura funcione, pueden generarse a partir de la ecuación del teorema anterior, pero ambas constantes y las raíces de los polinomios de Legendre se tabulan ampliamente. La tabla siguiente contiene estos valores para $n = 2, 3, 4$ y 5 (Existen tablas con $n > 5$).

n	Raíces $r_{n,i}$	Coeficientes $c_{n,i}$
2	0.5773502692	1.0000000000
	-0.5773502692	1.0000000000
3	0.7745966692	0.5555555556
	0.0000000000	0.8888888889
	-0.7745966692	0.5555555556

n	Raíces $r_{n,i}$	Coeficientes $c_{n,i}$
4	0.8611363116	0.3478548451
	0.3399810436	0.6521451549
	-0.3399810436	0.6521451549
	-0.8611363116	0.3478548451
5	0.9061798459	0.2369268851
	0.5384693101	0.4786286705
	0.0000000000	0.5688888889
	-0.5384693101	0.4786286705
	-0.9061798459	0.2369268851

Una integral $\int_a^b f(x)dx$ en un intervalo arbitrario $[a,b]$ se puede transformar, en otra en $[-1, 1]$ usando el cambio de variables, así:



$$t = \frac{2x - a - b}{b - a} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}[(b - a)t + a + b].$$

Esto permite aplicar la cuadratura gaussiana a cualquier intervalo $[a, b]$, ya que

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{-1}^1 f\left(\frac{((b-a)t + a + b)}{2}\right) \frac{b-a}{2} dt \quad (*1*)$$

EJEMPLO 1: Considerando el problema de obtener

aproximaciones a $\int_1^{1.5} e^{-x^2} dx$. La tabla siguiente contiene los valores de las fórmulas de Newton-Cotes.

El valor exacto de la integral con siete decimales es 0.1093643.

n	0	1	2	3	4
Fórmulas cerradas		0.1183197	0.1093104	0.1093404	0.1093643
Fórmulas abiertas	0.1048057	0.1063473	0.1094116	0.1093971	

El procedimiento de la cuadratura gaussiana aplicado a este problema requiere transformar primero la integral en un problema cuyo intervalo de integración sea $[-1, 1]$. Al usar la ecuación (*1*) se tiene:

$$\int_1^{1.5} e^{-x^2} dx = \int_{-1}^1 e^{-\left(\frac{1}{2}([1.5-1.0]t+1.5+1)\right)^2} \left(\frac{1.5-1.0}{2}\right) dt = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 e^{-\frac{(t+5)^2}{16}} dt.$$



Al utilizar los valores de la tabla, se obtiene mejores aproximaciones de la cuadratura gaussiana en este problema.

$$n = 2$$

$$\int_1^{1.5} e^{-x^2} dx = \frac{1}{4} \left[e^{-(5+0.5773502692)^2/16} - e^{-(5-0.5773502692)^2/16} \right] = 0.1094003.$$

$$n = 3$$

$$\int_1^{1.5} e^{-x^2} dx = \frac{1}{4} \left[\begin{aligned} &(0.5555555556)e^{-(5+0.7745966692)^2/16} + \\ &(0.8888888889)e^{-(5)^2/16} + \\ &(0.5555555556)e^{-(5-0.7745966692)^2/16} \end{aligned} \right] = 0.1093642.$$

6. ENLACES SUGERIDOS

[https://es.wikipedia.org/wiki/Integral de Gauss](https://es.wikipedia.org/wiki/Integral_de_Gauss)

https://en.wikipedia.org/wiki/Gauss%E2%80%93Legendre_algorithm

7. BIBLIOGRAFÍA

- Análisis Numérico, *Richard L. Burden/J. Douglas Faires*, Editorial Thomson Learning Inc.
- Métodos Numéricos Con SCILAB, *Héctor Manuel Mora Escobar*, Abril 2010

8. GLOSARIO

9. PREGUNTAS DE AUTOEVALUACIÓN

1. ¿Qué es la Cuadratura Gaussiana?
2. ¿Su fórmula es:?
3. ¿Qué es la técnica de Gauss-Legendre?
4. ¿Cuál es el objetivo de la cuadratura de Gauss?