UNIDAD II

2.5 METODO DEL PUNTO FIJO

1. INTRODUCCIÓN

Un punto fijo de una función *g: R → R* es un número real r para el cual *g(r) = r*. Los problemas de búsqueda de raíces y los de punto fijo son clases equivalentes en el siguiente sentido:

- Dado el problema de hallar una solución r de la ecuación *f(x) = 0*, es posible definir una función g(x) que tenga a r como punto fijo.
- Si r es un punto fijo de la función *g(x),* entonces el número r es un cero de la función *f(x) = x – g(x).*

Para poder determinar si una función tiene un punto fijo, es necesario verificar el siguiente teorema que contiene las condiciones suficientes para la existencia y unicidad de un punto fijo.

- *Si g Є C[a, b] y g(x) Є [a, b] " x Є [a, b*], entonces g tiene un punto fijo en ese intervalo.
- Si además existe g'(x) en (a, b) y existe una constante positiva k < 1 tal que *|g'(x)| ≤ k " x Є (a b),* entonces el punto fijo de f en [a, b] es único.

De esta manera, es posible definir una fórmula recursiva que permita aproximar el valor de la raíz r de la ecuación f(x)=0:

$$r_{n+1} = g(r_n) \quad n \geq 0$$

en donde x_0 es la aproximación inicial.

Si se grafica los dos miembros de la ecuación x = g(x) como las funciones *y = x* e *y = g(x),* la raíz buscada r es la abscisa del punto de intersección de dichas funciones.

2. OBJETIVO

Definir y Comparar el método matemáticos del Punto Fijo con sus diferentes posibilidades de convergencia o en su defecto si hay divergencia. Se Analizara una muestra de datos empleando cada uno de los métodos matemáticos de Bisección con otros métodos

3. MÉTODO DEL PUNTO FIJO

Los métodos vistos se aplican a la solución de la ecuación $f(x) = 0$. El método de punto fijo sirve para resolver la ecuación

$$g(x) = x$$

Se busca un x^* tal que su imagen, por medio de la función g, sea el mismo x^*. Por tal motivo se dice que x^* es un punto fijo de la función g.

La aplicación del método es muy sencilla. A partir de un x_0 dado, se aplica varias veces la formula

$$x_{k+1} = g(x_k).$$

Se espera que la sucesión $\{x_k\}$ construida mediante la fórmula anterior converja hacia x^*. En algunos casos el método, además de ser muy sencillo, es muy eficiente; en otros casos la eficiencia es muy pequeña, finalmente, en otros casos el método definitivamente no sirve.

Ejemplo. Resolver $x^3 + x^2 + 6x + 5 = 0$. Esta ecuación se puede escribir en la forma

$$x = -\frac{x^3 + x^2 + 5}{6}$$

Aplicando el método de punto fijo a partir de $x_0 = -1$ se tiene:

$$\begin{aligned}
x_0 &= -1\\
x_1 &= -0.833333\\
x_2 &= -0.852623\\
x_3 &= -0.851190\\
x_4 &= -0.851303\\
x_5 &= -0.851294\\
x_6 &= -0.851295\\
x_7 &= -0.851295\\
x_8 &= -0.851295
\end{aligned}$$

Entonces se tiene una aproximación de una raíz, $x^* \approx -0.851295$. En este caso el método función´ muy bien. Utilicemos ahora otra expresión para $x = g(x)$:

$$x = -\frac{x^3 + 6x + 5}{x}.$$

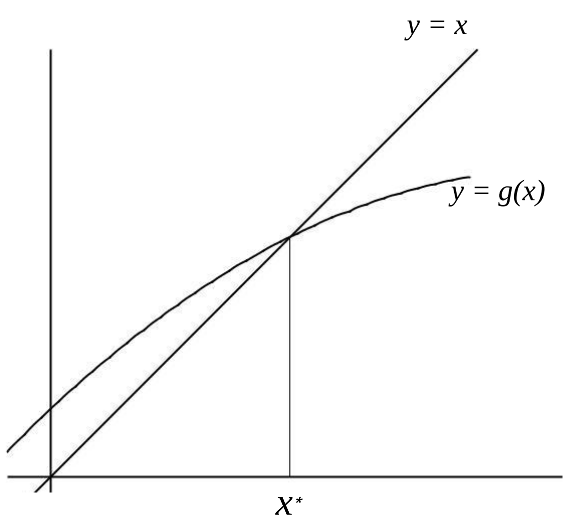
Aplicando el método de punto fijo a partir de $x_0 = -0.851$, muy buena aproximación de la raíz, se tiene:

x_0 = -0.8510
x_1 = -0.8488
x_2 = -0.8294
x_3 = -0.6599
x_4 = 1.1415
x_5 = -11.6832
x_6 = -142.0691
x_7 = -2.0190e+4

En este caso se observa que, aun partiendo de una muy buena aproximación de la solución, no hay convergencia.

Antes de ver un resultado sobre convergencia del método de punto fijo, observemos su interpretación gráfica. La solución de $g(x) = x$ está determinada por el punto de corte, si lo hay, entre las gráficas $y = g(x)$ y $y = x$.

Después de dibujar las dos funciones, la construcción de los puntos x_1, x_2, x_3... se hace de la siguiente manera. Después de situar el valor x_0 sobre el eje x, para obtener el valor x_1, se busca verticalmente la curva $y = g(x)$. El punto obtenido tiene coordenadas (x_0, $g(x_0)$), o sea, (x_0, x_1). Para obtener $x_2 = g(x_1)$ es necesario inicialmente resituar x_1 sobre el eje x, para lo cual basta con buscar horizontalmente la recta $y = x$ para obtener el punto.



Método Punto fijo

(x_1, x_1). A partir de este punto se puede obtener x_2 buscando verticalmente la curva y = g(x). Se tiene el punto (x_1, $g(x_1)$), o sea, (x_1, x_2). Con desplazamiento horizontal se obtiene (x_2, x_2).

En resumen, se repite varias veces el siguiente procedimiento: *a partir de* (x_k , x_k) *buscar verticalmente en la curva* $y = g(x)$ *el punto* (x_k , x_{k+1}), *y a partir del punto obtenido buscar* *horizontalmente en la recta* y = x *el punto* (x_{k+1}, x_{k+1}). Si el proceso converge, los puntos obtenidos tienden hacia el punto (x^*, $g(x^*)) = (x^*, x^*)$.

En las siguientes graficas muestran gráficamente la utilización del método; en los dos primeros casos hay convergencia; en los otros dos no hay, aun si la aproximación inicial es bastante buena.

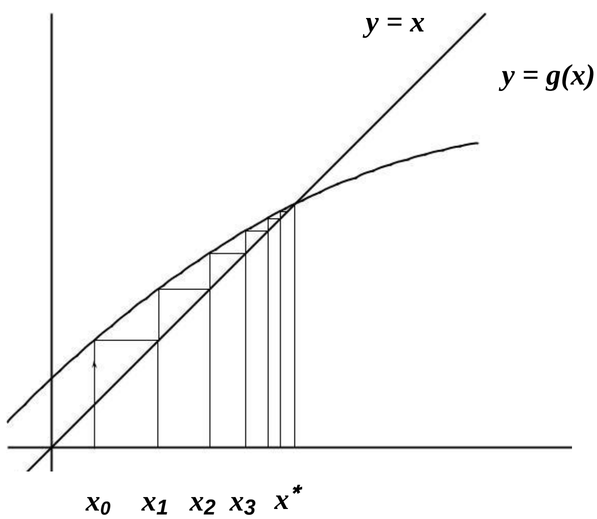
En seguida se presentan dos teoremas sobre la convergencia del método de punto fijo; el primero es más general y más preciso, el segundo es una simplificación del primero, de más fácil aplicación para ciertos problemas.

Teorema . *Sea g continuamente diferenciable en el intervalo* [a, b]*, tal que*

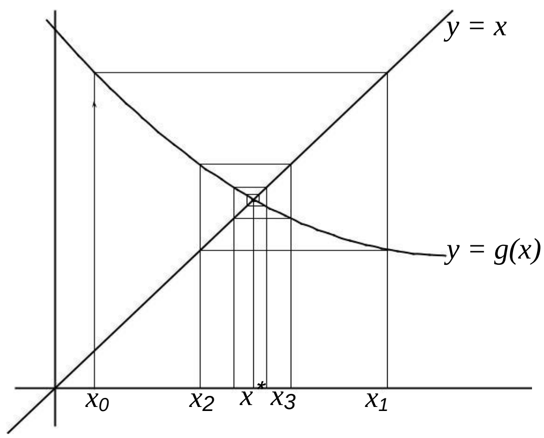
$$g([a, b]) \subseteq [a, b],$$

$$|g'(x)| < 1, \text{ para todo } x \in [a, b].$$

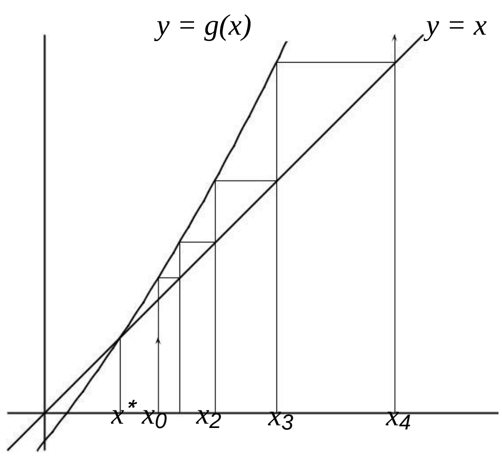
Entonces existe un único x^* *en* [a, b] *solución de* $x = g(x)$ *y la iteración de punto fijo converge a* x^* *para todo* $x_0 \in [a, b]$



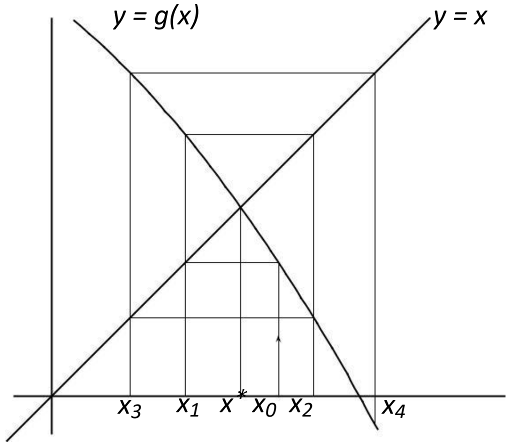
Método de punto fijo (a)



Método de punto fijo (b)



Método de punto fijo (c)



Método de punto fijo (d)

Teorema: Sea x^* solución de $x = g(x)$, g continuamente diferenciable en un intervalo abierto I tal que $x^* \in I$, $|g'(x^*)| < 1$. Entonces la iteración de punto fijo converge a x^* para todo x_0 suficientemente cerca de x^*.

El caso ideal (la convergencia es más rápida) se tiene cuando $g'(x^*) \approx 0$.

En los dos ejemplos numéricos anteriores, para resolver x3+x2+6x+5 = 0, se tiene: x = g(x) = −(x3 + x2 + 5)/6, g′(−0.8513) = −0.0786. Si se considera x = g(x) − (x3 + 6x + 5)/x, g′(−0.8513) = 8.6020. Estos resultados numéricos concuerdan con el ´ultimo teorema.

Dos de los ejemplos gráficos anteriores muestran justamente que cuando $|g'(x^*)| < 1$ el método converge.

Ejemplo. Resolver $x^2 = 3$, o sea, calcular $\sqrt{3}$

$$x^2 = 3,$$
$$x^2 + x^2 = x^2 + 3,$$
$$x = \frac{x^2 + 3}{2x}$$
$$x = \frac{x + 3/x}{2}$$

$$x_0 = 3$$
$$x_1 = 2$$
$$x_2 = 1.75000000000000$$
$$x_3 = 1.73214285714286$$

x_4 = 1.73205081001473
x_5 = 1.73205080756888
x_6 = 1.73205080756888

Se observa que la convergencia es bastante rápida. Este método es muy utilizado para calcular raíces cuadradas en calculadoras de bolsillo y computadores.

Aplicando el teorema anterior y teniendo en cuenta que $g'(x^*) = g'(\sqrt{3}) = 1/2 - 1.5/x^{*2} = 0$, se concluye rápidamente que si x^0 está suficientemente cerca de √3 entonces el método converge.

4. ENLACES SUGERIDOS

https://es.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9todo_del_punto_fijo

5. BIBLIOGRAFÍA

- Análisis Numérico, *Richard L. Burden/J. Douglas Faires*, Editorial Thomson Learning Inc.
- Métodos Numéricos Con SCILAB, Héctor Manuel Mora Escobar, Abril 2010

6. GLOSARIO

7. PREGUNTAS DE AUTOEVALUACIÓN

1. ¿Cuál es la característica más importante del método el punto fijo?
2. ¿Cuál considera una desventaja o la dificultad con este método?

UNIDAD II

2.5 METODO DEL PUNTO FIJO

1. PREGUNTAS DE AUTOEVALUACIÓN

1. ¿Cuál es la característica más importante del método el punto fijo?

   Respuesta: Buscar una función equivalente *g(x)* y converger a la intercepción con *f(x).,* en donde en dicha intercepción reflejado en *x* se encuentra la raíz.

2. ¿Cuál considera una desventaja o la dificultad con este método?

   Respuesta: es encontrar adecuadamente la función *f(x)* a partir de la función dada *f(x)*