UNIDAD III

3.3-3.4 DIFERENCIAS DIVIDIDAS PROGRESIVAS Y REGRESIVAS

1. INTRODUCCIÓN

Se le denomina polinomio de interpolación, polinomio interpolante o polinomio de colocación para los puntos (datos) dados. En este contexto los números $x_0, x_1 \dots x_n$ son llamados nodos. Cuando $n = 1$, es decir, sólo tenemos dos puntos, el polinomio de interpolación correspondiente se denomina también polinomio de interpolación lineal.

El caso de mayor interés para nosotros es aquel en el cual $y_k = f(x_k)$ siendo f una cierta función de la que posiblemente no se conoce una fórmula explícita, o bien es muy complicada para evaluarla, derivarla, integrarla, hallarle ceros, etc. En este caso el polinomio de interpolación $p_n(x)$ puede usarse como aproximación de la función f y, en particular, para aproximar valores de la función f en puntos intermedios entre los nodos $x_0, x_1, \dots, x_n$. Nos , referiremos a esta manera de aproximar una función dada, mediante un polinomio de interpolación, como interpolación polinomial; cuando usemos sólo dos nodos, nos referiremos a la correspondiente interpolación como interpolación lineal. En este contexto el polinomio de interpolación $p_n(x)$, se dirá el polinomio que interpola a la función f en los nodos $x_0, x_1, \dots, x_n$.

2. OBJETIVO

Conceptualizar los métodos matemáticos que resuelven ecuaciones polinomiales. Comparar los métodos matemáticos de Diferencias divididas progresivas y regresivas en base a los criterios de eficiencia, precisión y tolerancia. Analizar una muestra de datos empleando cada uno de los métodos matemáticos de Diferencias divididas progresivas y regresivas

3.3 DIFERENCIAS DIVIDIDAS PROGRESIVAS

Supongamos que la distancia entre dos argumentos (abscisas) consecutivas cualquiera es igual, en toda la función tabular y sea "*h*".

El polinomio de aproximación de Newton se puede escribir de manera más simple, para nuestro propósito, consideremos otro punto S; definido por:

$x = x_0 + sh$ x: Es el valor que se quiere interpolar

Pero:

$$x_1 = x_0 + h,\ x_2 = x_0 + 2h,\ x_3 = x_0 + 3h, \ldots, x_i = x_0 + ih \qquad i = 1, 2, \ldots., n$$

Qué ocurre si restamos x_i en ambos miembros

$$\boxed{\begin{aligned} x - x_i &= x_0 + sh - xi \\ &= x_0 + sh - x_0 - ih \\ x - x_i &= h(s - i) \\ &Para; i = 1,2,\ldots,n \\ x - x_1 &= h(s-1); x - x_2 = h(s-2); x - x_3 = h(s-3);\ \ldots.\ ; x - x_n = h(s-n) \end{aligned}}$$

Si consideramos el desarrollo general del polinomio de Newton, i.e.:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})$$

$$\begin{aligned} P_n(x_0 + sh) = f[x_0] &+ f[x_0, x_1]hs + f[x_0, x_1, x_2]h^2 s(s-1) + f[x_0, x_1, x_2, x_3]h^3 s(s-1)(s-2) \\ &+ \ldots + f[x_0, x_1, \ldots, x_n]h^3 s(s-1)(s-2) + ..+ f[x_0, x_1, \ldots, x_n]h^n s(s-1)\ldots(s-(n-1)) \end{aligned}$$

ó:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k h^k \prod_{i=0}^{k-1}(s - i) \qquad (1)$$

Observemos que la última relación de aproximación se puede simplificar si hacemos ingresar los operadores lineales ∇ y, conocidos como:

$\triangle$: Operador lineal en diferencias hacia delante

∇: Operador lineal en diferencias hacia atrás

En donde:

Primera Diferencia $\Delta f(x)$

$$\Delta f(x) = f(x + h) - f(x)$$

La segunda diferencia: $\Delta^2 f(x)$

$$\begin{aligned}\Delta(\Delta f(x)) = \Delta^2 f(x) &= \Delta(f(x+h) - f(x)) = \Delta f(x+h) - \Delta f(x) \\ &= f(x+h+h) - f(x+h) - f(x+h) + f(x) \\ &= f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)\end{aligned}$$

La tercera diferencia: $\Delta^3 f(x)$

$$\begin{aligned}\Delta(\Delta^2 f(x)) &= \Delta(f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)) = \Delta f(x+2h) - 2\Delta f(x+h) + \Delta f(x) \\ &= f(x+2h+h) - f(x+2h) - 2(f(x+h+h) - f(x+h)) + f(x+h) - f(x) \\ &= f(x+3h) - 3f(x+2h) + 3f(x+h) - f(x)\end{aligned}$$

En general:

$$\boxed{\Delta^i f(x) = \Delta(\Delta^{i-1} f(x))}$$

De manera análoga para el operador lineal de diferencia hacia atrás

Primera Diferencia: $\nabla f(x)$

$$\nabla f(x) = f(x) - f(x-h)$$

Segunda Diferencia: $\nabla^2 f(x)$

$$\begin{aligned}\nabla(\nabla f(x)) &= \nabla(f(x) - f(x-h)) = \nabla f(x) - \nabla f(x-h) \\ &= f(x) - f(x-h) - f(x-h) + f(x-2h) \\ &= f(x) - 2f(x-h) + f(x-2h)\end{aligned}$$

En general:

$$\nabla^i f(x) = \nabla(\nabla^{i-1} f(x)$$

Qué ocurre si aplicamos Δ al primer valor funcional $f[x_0]$ de una tabla proporcionada.

$$\Delta f[x_0] = f[x_0+h] - f[x_0] = \left(\frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}\right)(x_1-x_0) = h\,f[x_0,x_1]$$

$$ie:\ \Delta f(x_0) = h\,f[x_0,x_1] \Rightarrow f[x_0,x_1] = \frac{1}{h}\Delta f(x_0)$$

$Para$

$$f[x_0,x_1,x_2] = \frac{f[x_2]-2f[x_1]+f[x_0]}{2h^2} = \frac{\Delta^2 f[x_0]}{2h^2}$$

$para$

$$f[x_0,x_1,x_2,x_3] = \frac{f[x_3]-3f[x_2]+3f[x_1]+f(x_0)}{2\times 3h^3} = \frac{\Delta^3 f[x_0]}{3!h^3}$$

En general:

$$f[x_0,x_1,\ldots,x_n] = \frac{\Delta^n f(x_0)}{n!\ h^n}$$

De manera análoga para el operador de diferencias hacia atrás

$$f[x_n,x_{n-1},\ldots,x_1,x_0] = \frac{\nabla^n f(x_n)}{n!\ h^n}$$

Consecuentemente al sustituir $f[x_0,x_1,\ldots,x_n]$, $i=0,1,2,\ldots,n$ en 1

$$P_n(x_0+sh) = f[x_0] + s\Delta f[x_0] + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 + f[x_0] + \ldots + \frac{s(s-1)(s-2)\ldots(s-(n-1))}{n!}\Delta^n f(x_0)$$

Es conocido como el polinomio de Newton en diferencia finita hacia delante.

Ejemplo:

Supongamos que tienen las siguientes tabulaciones:

Puntos	0	1	2	3	4	5
x	50	60	70	80	90	100
$f(x)$	24.94	30.71	36.05	42.84	50.57	59.30

Aproximar la función tabulada usando el polinomio de Newton en diferencias finitas hacia delante e interpole para 64

Solución

- En este conjunto de datos tenemos que h = 10, el valor por interpolares 64
- El valor de $s = \dfrac{x - x_0}{h} = \dfrac{64 - 50}{10} = 1.4 \quad \Rightarrow \quad S = 1.4$

PARA UN POLINOMIO DE PRIMER ORDEN

Para $n = 1$

$$\begin{aligned} P_1(x) &= f[x_0] + s\Delta f[x_0] \\ &= 24.94 + 1.4(5.17) = 32.17 \end{aligned};$$

en donde

$$\Delta f[x_0] = f[x_0 + h] - f[x_0] = f[x_1] - f[x_0]$$
$$\Delta f[x_0] = 30.11 - 24.94 = 5.17$$

$Punto$	x_i	$f[x_i]$	$\Delta f[x_i]$	$\Delta^2 f[x_i]$	$\Delta^3 f[x_i]$	$\Delta^4 f[x_i]$
0	50	24.94	$\Delta f[x_0] = 5.17$	$\Delta^2 f[x_0] = 0.77$	$\Delta^3 f[x_0] = 0.08$	$\Delta^4 f[x_0] = 0.01$
1	60	30.11	$\Delta f[x_1] = 5.94$	$\Delta^2 f[x_1] = 0.85$	$\Delta^3 f[x_1] = 0.09$	$\Delta^4 f[x_1] = -0.03$
2	70	36.05	$\Delta f[x_2] = 5.79$	$\Delta^2 f[x_2] = 0.94$	$\Delta^3 f[x_2] = 0.06$	
3	80	42.84	$\Delta f[x_3] = 7.73$	$\Delta^2 f[x_3] = 1$		
4	90	50.57	$\Delta f[x_4] = 8.73$			
5	100	59.30				

Progresivo

Regresivo

- Es preciso destacar que en realidad se está extrapolando, pues el valor de x queda fuera del intervalo de los puntos que se usan para formar el polinomio de aproximación.
- Debemos observar que el polinomio de aproximación descrita en 1 fue estructurado considerando x_0 como pivote y luego si queremos aplicar para los puntos (1) y (2) debemos modificar 1 así:

$$P_n(x) = f[x_1 + sh] = f[x_1] + s\Delta f[x_i] + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 f[x_1] + \ldots + \frac{s(s-1)\ldots(s-(n-1))}{n!}\Delta^n f[x_1] \qquad (2)$$

$P(x) = f[x_1] + s\Delta f[x_1]$ en donde:

$s = \frac{x - x_1}{h} = \frac{64 - 60}{10} = 0.4$ Luego tenemos:

$f(64) = 30.11 + 0.4(5.94) = 32.49$

- Debemos resaltar que si deseamos aproximar con un polinomio de segundo grado se requieren tres puntos, tendríamos dos alternativas, tomar como puntos (0), (1) y (2) ó (1), (2) y (3), en este caso tomaría la primera serie por que el valor a interpolar está más al centro, luego tendríamos:

$$P_2(x) = f[x_0] + s\Delta f[x_0] + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 f[x_0] \quad ; \quad s = 1.4$$

$$P_2(64) = 24.94 + 1.4(5.17) + \frac{1.4(1.4-1)}{2!}0.77 = 32.385$$

3.4 DIFERENCIAS DIVIDIDAS REGRESIVAS

Supongamos *n* = 2 y asumamos que el polinomio sea de 2º grado:

$$P_2(x) = a_0 + a_1(x - x_n) + a_2(x - x_n)(x - x_{n-1})$$

En donde:

$x_n ; x_{n-1}$: Son abscisas de los puntos "*n*" y "*n* – 1"

$a_0 \;\; y \;\; a_1, a_2$: Son las constantes por determinar

Si:

$$\boxed{\begin{aligned}
&x = x_n \Rightarrow a_0 = P_2(x_n) \Rightarrow a_0 = f[x_n] \\
&x = x_{n-1} \Rightarrow a_1 = \frac{P_2[x_{n-1}] - a_0}{x_{n-1} - x_n} \Rightarrow a_1 = \frac{f[x_{n-1}] - f[x_n]}{x_{n-1} - x_n} = f[x_n, x_{n-1}] \\
&x = x_{n-2} \Rightarrow a_2 = \frac{f[x_{n-2}] - f[x_n] - f[x_n, x_{n-1}]}{(x_{n-2} - x_n)(x_{n-2} - x_{n-1})} \Rightarrow a_2 = f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}]
\end{aligned}}$$

Luego tendremos que:

$$P_2(x) = f[x_n] + f[x_n, x_{n-1}](x - x_n) + f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}](x - x_n)(x - x_{n-1})$$

Generalizar

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_n) + a_2(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \ldots + a_n(x - x_n)(x - x_{n-1})\ldots(x - x_1)$$

En donde:

$$a_0 = f[x_n]\ ;\ a_1 = f[x_n, x_{n-1}]\ ;\ a_2 = f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}]\ ;\ \ldots\ ;\ a_n = f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0]$$

Considerando la diferencia de las abscisas consecutivas igual a *h* e introducimos una variable paramétrica “s” definida como:

$s = \dfrac{x - x_n}{h}$;   *x*:   el valor a interpolar

$$\boxed{\begin{aligned}
&x - x_n = sh \\
&x - x_{n-1} = x_n - x_{n-1} + sh = h + sh \quad = h(s+1) \\
&x - x_{n-2} = x_n - x_{n-2} + sh = 2h + sh \quad = h(s+2) \\
&\vdots \\
&x - x_0 = x_n - x_0 + sh = nhsh \quad = h(s+n)
\end{aligned}}$$

Luego tenemos:

$$P_n(x_n + sh) = f[x_n] + 3\nabla f[x_n] + \frac{s(s+1)}{2!}\nabla^2 f[x_n] + \ldots + \frac{s(s+1)(s+2)\ldots(s+(n-1))}{n!}\nabla^n f[x_n]$$

Ecuación de Newton en diferencias hacia atrás

Ejemplo:

En el ejemplo realice la interpolación para *x* = 98 usando el polinomio de Newton

- Si usamos un polinomio de primer grado tenemos

$$P_1(x) = f[x_5] + s\nabla f[x_5] \quad ; \quad s = \frac{x - x_n}{10} = \frac{98 - 100}{10} = -0.2$$

$$p_1(98) = 59.30 - 0.2(8.73) = 57.55$$

- Si usamos un polinomio de segundo grado tenemos

$$P_2(98) = f[x_5] + s\nabla f[x_5] + \frac{s(s+1)}{2!}\nabla^2 f[x_5]$$

$$= 59.3 - .2(8.73) + \frac{-0.2(-0.2+1)}{2!}(1) = 57.63$$

Progresivo

$Punto$	x_i	$f[x_i]$	$\Delta f[x_i]$	$\Delta^2 f[x_i]$	$\Delta^3 f[x_i]$	$\Delta^4 f[x_i]$
0	50	24.94				
			$\Delta f[x_0] = 5.17$			
1	60	30.11		$\Delta^2 f[x_0] = 0.77$		
			$\Delta f[x_1] = 5.94$		$\Delta^3 f[x_0] = 0.08$	
2	70	36.05		$\Delta^2 f[x_1] = 0.85$		$\Delta^4 f[x_0] = 0.01$
			$\Delta f[x_2] = 5.79$		$\Delta^3 f[x_1] = 0.09$	
3	80	42.84		$\Delta^2 f[x_2] = 0.94$		$\Delta^4 f[x_1] = -0.03$
			$\Delta f[x_3] = 7.73$		$\Delta^3 f[x_2] = 0.06$	
4	90	50.57		$\Delta^2 f[x_3] = 1$		
			$\Delta f[x_4] = 8.73$			
5	100	59.30				

Regresivo

3. ENLACES SUGERIDOS

https://es.wikipedia.org/wiki/Interpolaci%C3%B3n_polin%C3%B3mica

4. BIBLIOGRAFÍA

- Análisis Numérico, *Richard L. Burden/J. Douglas Faires*, Editorial Thomson Learning Inc.
- Métodos Numéricos Con SCILAB, Héctor Manuel Mora Escobar, Abril 2010

5. GLOSARIO

6. PREGUNTAS DE AUTOEVALUACIÓN

1. ¿Qué son las diferencias divididas Progresivas?

2. ¿Qué son las diferencias divididas Regresivas?

3. Cual es la diferencia entre las dos? Cual es mejor? Porque?

UNIDAD III

3.3-3.4 DIFERENCIAS DIVIDIDAS PROGRESIVAS Y REGRESIVAS

1. PREGUNTAS DE AUTOEVALUACIÓN

1. ¿Qué son las diferencias divididas Progresivas?

   Respuesta: Es un método de interpolación que utiliza varios nodos y su nombre es debido a que en el cálculo hay diferencias o resta de los dos nodos más próximo así como la división entre la imagen ($f(x)$) de estos nodos, y de la forma triangular que forman los nuevos nodos tomando los de las parte superior del triángulo.

2. ¿Qué son las diferencias divididas Regresivas?

   Respuesta: Es un método de interpolación que utiliza varios nodos y su nombre es debido a a que en el cálculo hay diferencias o resta de los dos nodos más próximo así como la división entre la imagen ($f(x)$) de estos nodos, y de la forma triangular que forman los nuevos nodos tomando los de las parte inferior del triángulo.

3. Cuál es la diferencia entre las dos? Cual es mejor? Porque?
   a. En la fórmula que considera los elementos de la parte superior
   b. Progresivas
   c. Es mas rápida y los cálculos son más acertados .