UNIDAD II

2.9 CONVERGENCIA ACELERADA

2.10 CEROS DE POLINOMIOS

1. INTRODUCCIÓN

En la resolución de ecuaciones no lineales nos aparecen muchos problemas en forma natural, con la necesidad de calcular el valor de *x* donde una función *f* se anula, es decir, una raíz de *f*. En general, con las herramientas analíticas que se usan para estudiar y graficar funciones suaves (derivables) sólo podemos analizar si hay un intervalo [*a,b*] donde el gráfico de *f* cruza el eje *x*. En muchas ocasiones, sólo tiene sentido encontrar una solución aproximada. A veces, el cálculo exacto no es posible ya sea porque se trata de una raíz irracional ($f(x)= x^2-2$) o porque la función viene dada por coeficientes cuyos valores se conocen sólo en forma aproximada. Lo importante al utilizar métodos que estimen el valor deseado es poder controlar el error que se comete al utilizar un valor aproximado en lugar del exacto.

2. OBJETIVO

Definir y comparar los métodos de convergencia acelerados y aprender sobre los ceros del polinomio en sus diferentes enfoques.

3. 2.9 CONVERGENCIA ACELERADA

3.1. METODO AITKEN

Dada una sucesión de número $x_0, x_1, x_2,\dots$ a partir de ella se genera una nueva sucesión $x_0', x_1', x_2'\dots$con la ecuación 5.

Si se emplea la notación

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i \qquad\qquad i = 0, 1, 2 \dots$$

Donde Δ es un operador de diferencias cuyas potencias (o más propiamente su orden) se pueden obtener así

$$\Delta(\Delta x_i) = \Delta^2 x_i = \Delta(x_{i+1} - x_i) = \Delta x_{i+1} - \Delta x_i$$

o

$$\Delta^2 x_i = x_{i+2} - 2x_{i+1} + x_i$$

La ecuación adquiere la forma simplificada

$$x'_i = x_i - \frac{(\Delta x_i)^2}{\Delta^2 x_i}$$

EJEMPLO 01 :

Acelerar la convergencia de la sucesión de la tabla presentada, mediante el método de *Aitken.*

i	x_i	$\lvert x_{i+1} - x_i \rvert$	$\lvert g'(x_i) \rvert$
0	1.00000		0.47337
1	1.53846	0.53846	0.42572
2	1.29502	0.24344	0.45100
3	1.40183	0.10681	0.44047
4	1.35421	0.04762	0.44529
5	1.37530	0.02109	0.44317
6	1.36593	0.00937	0.44412
7	1.37009	0.00416	0.44370
8	1.36824	0.00184	0.44389
9	1.36906	0.00082	0.44380

Solución.-

Con la ecuación 5 o 6 con $x_0 = 1$, $x_1 = 1.53846$, $x_2 = 1.29502$ se tiene:

$$x'_0 = 1 - \frac{(1.53846 - 1)^2}{1.29502 - 2(1.53846) + 1} = 1.37081$$

Ahora con la ecuación 5 y con $x_1 = 1.53846$, $x_2 = 1.29502$, $x_3 = 1.40183$, resulta:

$$x'_1 = 1.53846 - \frac{(1.29502 - 1.40183)^2}{1.40183 - 2(1.29502) + 1.53846} = 1.36566$$

En una tercera iteración se obtiene:

$$x'_2 = 1.36889$$

Obsérvese que x_1' se encuentra muy cerca a la raíz real.

Se ha encontrado que el método *Aitken* es de segundo orden y se emplea normalmente para acelerar la convergencia de cualquier sucesión de valores que converge linealmente, cualquiera que sea su origen. La aplicación del método de *Aitken* a la iteración de punto fijo da el procedimiento conocido como método *Steffensen,* que se ilustra a continuación (ejemplo 02).

EJEMPLO 02

Encuentre una raíz real de la ecuación

$$\mathrm{f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0}$$

Con el método Steffensen, usando $\varepsilon = 10^{-3}$ aplicado a $|f(x'_i)|$.

Solución.-

Se pasa primero la ecuación $\mathrm{f(x) = 0}$ a la forma $\mathrm{g(x) = x}$. Al igual que en el ejemplo anterior se factoriza x en la ecuación y luego se "despeja".

$$\mathrm{x = \frac{20}{x^2 + 2x + 10}}$$

** Primera iteración*

Se elige un valor inicial $\mathrm{x_0 = 1}$ y se calcula $\mathrm{x_1}$y $\mathrm{x_2}$

$$x_1 = 1.53846$$

$$x_2 = 1.29502$$

Se aplica ahora la ecuación 5 para acelerar la convergencia:

$$x'_0 = 1 - \frac{(1.53846 - 1)^2}{1.29502 - 2(1.53846) + 1} = 1.37081$$

Como $|f(x'_i)| = 1.37081^3 + 2(1.37081)^2 + 10(1.37081) - 20 = 0.04234 > 10^{-3}$, se pasa a la:

** Segunda iteración*

Con el valor de $\mathrm{x'}_0$ que ahora se denota como x_3 y con la g(x) que se tiene, resulta

$$x_4 = 1.36792$$

$$x_5 = 1.36920$$

Aplicando nuevamente la ecuación 5 a x_3, x_4, x_5 se llega a:

$$x'_1 = x_6 = 1.37081 - \frac{(1.36792 - 1.37081)^2}{1.36920 - 2(1.36792) + 1.37081} = 1.36881$$

Luego, con el criterio de exactit*ud se tiene:*

$$|f(x_6)| = 0.0000399 < 10^{-3}$$

Y el problema queda resuelto.

ALGORITMO DE AITKEN

Algoritmo. Método de Aitken
Dado: f: función asociada a la ecuación $f(x) = 0$ a resolver, x_0: aproximación inicial a la solución, ϵ: tolerancia del error, y *m*: número máximo de iteraciones.
Entrega: x^*: la solución aproximada a la ecuación $f(x) = 0$, o bien el mensaje "sin solución aceptable en *m* iteraciones". MÉTODO AITKEN (f, x_0, ϵ, m) 2: $n \leftarrow 0$ **repeat** 4: $x_{n+1} \leftarrow f(x_n)$ $x_{n+2} \leftarrow f(x_{n+1})$ 6: $x_{n+3} \leftarrow f(x_{n+2})$

$x'_n \leftarrow x_n - (x_{n+1} - x_n)^2 / (x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n)$

$x'_{n+1} \leftarrow x_{n+1} - (x_{n+2} - x_{n+1})^2 / (x_{n+3} - 2x_{n+2} + x_{n+1})$

$n \leftarrow n + 1$

until $|x'_n - x'_{n+1}| \leq \epsilon \ o \ n > m$

if $|x'_n - x'_{n+1}| \leq \epsilon$ **then**

  return x'_{n+1}

else

  return "sin solución en *m* iteraciones"

end if

end

3.2. METODO STEFFENSEN

Se puede considerar como una combinación del método del punto fijo y del método de Aitken. Para construir la sucesión de las aproximaciones $\{X^n\}$, en todo tercer paso se usa la fórmula de Aitken, y en los demás pasos se aplica la fórmula $X_n = g(x_n\text{-}1)$

x_0	$x_1 := g(x_0)$	$x_2 := g(x_1)$
$x_3 := x_0 - \frac{(\Delta x)_0^2}{(\Delta^2 x)_0}$	$x_4 := g(x_3)$	$x_5 := g(x_4)$
$x_6 := x_3 - \frac{(\Delta x)_3^2}{(\Delta^2 x)_3}$	$x_7 := g(x_5)$	$x_8 := g(x_6)$

Hay casos en los que la convergencia de la sucesión (X_n) obtenida mediante un método iterado es demasiado lenta *y*, en consecuencia, no resulta de utilidad en situaciones prácticas. Así, es preciso transformar dicha sucesión en otra que converja más rápidamente al mismo límite α (raíz).

Teorema

Sea $X_n = \{ X_0$ si $n = 0$ / $g(x_n)$ si $n \geq 0$ el esquema de la sucesión de punto fijo

$g: [a,b] \longrightarrow c$

Existe q tal que $0 \leq q < 1$ y $|q'(x)| \leq q < 1$ para todo $x \in\ ]a,b[$

$q'(x) \neq 0$ para x el punto fijo de g. Entonces (x_n) cuando $n \rightarrow \infty$

EJEMPLO :

Teniendo los puntos *xi, yi, zi* reemplazamos en la fórmula general de Steffensen

$$\boxed{xi+1 = Zi - \frac{(Zi-Yi)2}{Zi} - 2Yi + Xi}$$

Dada la función: $f(x) = x^3 - x - 1$ y el punto inicial $x_0 = 1$ calcular

La raíz de la ecuación con error absoluto de 0,005.

1er Paso: Se debe calcular el *G(x).* Para obtener *G(x)* se debe despejar *F(x)* la variable de mayor exponente, en el presente caso sería x^3
Igualando la ecuación a 0 (cero) $x^3 - x - 1 = 0$

Despejamos x^3 tenemos

$$x = \sqrt[3]{x+1} = G(x)$$

2do Paso: Dado el punto inicial $x0 = 1$, calculamos $y0$ reemplazando *G(x).* En el valor de *xi*

$y_0 = G(1).$

$y_0 = \sqrt[3]{x+1}$

$y_0 = 1.312293837$

3er Paso: Con y_0 calculamos z_0, reemplazando el valor y_0 en *G(x).*

$Z_0 = G(y_o)$

$z_0 = 1.312293837$

4to Paso: Calculamos x_i+1 con la fórmula:

$$xi+1 = Zi - \frac{(Zi-Yi\ )2}{Zi} - 2Yi + Xi$$

5to Paso: Calculamos error relativo porcentual con la formula correspondiente:

$$E_r = \frac{V_r - V_a}{V_a} * 100$$

Repetimos desde el 2do Paso las iteraciones que sea necesarias Para satisfacer la condición que de error que nos dan

i	x_i	y_i	z_i	$x_{(i+1)}$	ε%
0	1	1,25992165	1,322293873	1,325509316	– – –
1	1,325509316	1,324868256	1,324746505	1,324717961	0,06
2	1,324717961	1,324717958	1,324717957	1,324717957	0,000003

Algoritmo :
El pseudocódigo es:

Entrada: N, Tol, x_0, g

Salida: Aproximación de x o mensaje de error

Paso 1. $i \leftarrow 2$

Paso 2. Mientras $i \leq N$, siga los pasos 3 – 6

Paso 3. $x_1 = g(x_0)$

$x_2 = g(x_1)$

$$x = x_0 - \frac{(x_1 - x_0)^2}{x_2 - 2x_1 + x_0}$$

Paso 4. Si $|x - x_0| < Tol$

Salida (x)
Parar

Paso 5. $i \leftarrow i+1$

Paso 6. $x_0 \leftarrow x$

Paso 7. Salida ("Número máximo de iteraciones excedido")

Parar

El Método de Steffensen se puede considerar como una combinación del método de punto fijo y del método de Aitken. Como el método de Aitken esencialmente acelera la convergencia de otro método, se puede definir este método como el método de punto fijo acelerado

Ventajas: El método presenta una convergencia rápida y no requiere, como en el caso del método de la secante, la evaluación de derivada alguna. Presenta además, la ventaja adicional de que el proceso de iteración sólo necesita un punto inicial.

La eficiencia de un método numérico depende, en parte, de la "rapidez" con la cual la sucesión $[X_n]$ converge a ∞, donde "rapidez" significa el número mínimo de iteraciones N necesarias para tener X_n , a una distancia dada de la raíz ∞, es decir, tal que $| X_n - \propto| < \mathcal{E}$ para algún $\mathcal{E} > 0$

Desventajas: Si lo aplicamos en algoritmos de orden cuadrático puede que no lo acelere o que haga que una función que era divergente la transforme en convergente

2.10 METODO DE MULLER

1. INTRODUCCIÓN

Los polinomios tienen muchas aplicaciones en ciencia e ingeniería, como es el caso de su utilización en ajuste de curvas. Sin embargo, se considera que una de las aplicaciones más interesantes y potentes es en los sistemas dinámicos, particularmente en los lineales.

El polinomio más conocido en el mundo científico, es el denominado, ecuación característica, que es de la forma:

$$a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

Donde las raíces de este polinomio satisfacen:

$$x_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_0}$$

También denominados *eigenvalores* del sistema. Los *eigenvalores* pueden utilizarse para analizar un sistema, para nuestro caso es muy útil en lo concerniente a la estabilidad. Con base en lo anterior, encontrar las raíces en sistemas de segundo orden es prácticamente sencillo, pero para sistemas de orden superior, puede resultar en un arduo trabajo.

2. OBJETIVO

Definir y Comparar el método matemáticos de la Bisección, con otros métodos, en base a los criterios de eficiencia, precisión y tolerancia. Se Analizara una muestra de datos empleando cada uno de los métodos matemáticos de Bisección con otros métodos Estudiar los métodos matemáticos modificados en base a los criterios de eficiencia, precisión y tolerancia. Aprender y aplicar el método acelerado de Müller.

3. MÉTODO DE MULLER

Un predecesor del método de Müller, es el método de la secante, el cual obtiene raíces, estimando una proyección de una línea recta en el eje *x*, a través de dos valores de la función (Figura 1). El método de Müller toma un punto de vista similar, pero proyecta una parábola a través de tres puntos (Figura 2).

El método consiste en obtener los coeficientes de los tres puntos, sustituirlos en la fórmula cuadrática y obtener el punto donde la parábola intercepta el eje *x*. La aproximación es fácil de escribir, en forma conveniente esta sería:

$$f_2(x) = a(x - x_2)^2 + b(x - x_2) + c$$

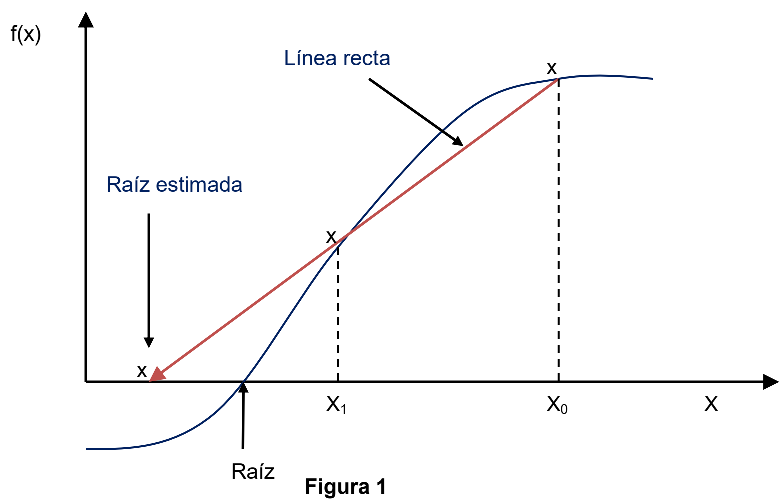

Figura 1

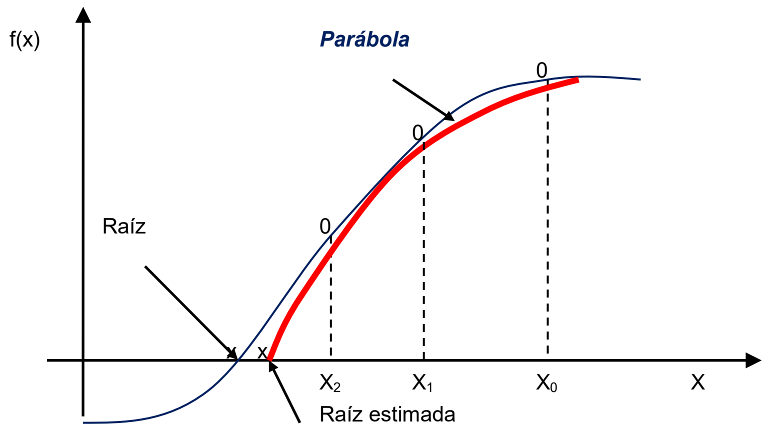

Figura 2

Así, se busca esta parábola para intersectar los tres *puntos* $[x_0, f(x_0)]$, $[x_1, f(x_1)]$ y $[x_2, f(x_2)]$.
Los coeficientes de la ecuación anterior se evalúan al sustituir uno de esos tres puntos para dar:

$$
\begin{aligned}
f(x_0) &= a(x_0 - x_2)^2 + b(x_0 - x_2) + c \\
f(x_1) &= a(x_1 - x_2)^2 + b(x_1 - x_2) + c \\
f(x_2) &= a(x_2 - x_2)^2 + b(x_2 - x_2) + c
\end{aligned}
$$

La última ecuación genera que, $f(x_2) = c$, de esta forma, se puede tener un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$
\begin{aligned}
f(x_0) - f(x_2) &= a(x_0 - x_2)^2 + b(x_0 - x_2) \\
f(x_1) - f(x_2) &= a(x_1 - x_2)^2 + b(x_1 - x_2)
\end{aligned}
$$

Definiendo de esta forma:

$$h_0 = x_1 - x_0 \qquad h_1 = x_2 - x_1$$

$$\delta_0 = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_0} \qquad \delta_1 = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Sustituyendo en el sistema:

$$
\begin{aligned}
(h_0 - h_1)b - (h_0 + h_1)^2 a &= h_0\delta_0 + h_1\delta_1 \\
h_1 b - h_1{}^2 a &= h_1\delta_1
\end{aligned}
$$

Teniendo como resultado los coeficientes:

$$a = \frac{\delta_1 - \delta_0}{h_1 + h_0} \quad b = ah_1 + \delta_1 \quad c = f(x_2)$$

Encontrando la raíz, se implementar la solución convencional, pero debido al error de redondeo potencial, se usará una formulación alternativa:

$$x_3 - x_2 = \frac{-2c}{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}} \text{ despejando } x_3 = x_2 + \frac{-2c}{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

La gran ventaja de este método es que se pueden localizar tanto las raíces reales como las imaginarias.
Hallando el error este será:

$$E_a = \left| \frac{x_3 - x_2}{x_3} \right| \cdot 100\%$$

Al ser un método de aproximación, este se realiza de forma secuencial e iterativamente, donde x_1, x_2, x_3 reemplazan los puntos x_0, x_1, x_2 llevando el error a un valor cercano a cero

Programa
Por ser un método que trabaja de forma lineal, es posible una aplicación computacional en forma sencilla, la cual sería:

```
SubMuller (xr, h, eps, maxit)
    x2 = xr
    x1 = xr + h*xr
    x0 = xr – h*xr
    Do
        iter = iter + 1
        h0  = x1 + x0
        h1 = x2 – x1
        d0 = (f(x1)-f(x0))/h0
        d1 = (f(x2)-f(x1))/h1
        a = (d1 – d0)/(h1 + h0)
        b = a*h1 +d1
        c = f(x2)
        rad = sqrt (b*b – 4*a*c)
        if l b+ rad l > l b - rad l then
            den = b + rad
        Else
            den = b – rad
        End if
```

```
        dxr = -2*c/den
        xr = x2 + dxr
        Print iter, xr
        IF (|dxr|<eps*xr or iter>maxit) exit
        x0 = x1
        x1 = x2
        x2 = xr
    End do
End Muller
```

Ejemplo:

$f(x) = x^3 - 13x - 12$ h = 0,1

$x_2 = 5$ $x_1 = 5{,}5$ $x_0 = 4{,}5$

Con un análisis previo, las raíces son –3, -1 y 4

Solución

$f(4{,}5) = 20{,}625$ $f(5{,}5) = 82{,}875$ $f(5) = 48$

Calculando

$$h_0 = 5{,}5 - 4{,}5 = 1 \quad h_1 = 5 - 5{,}5 = -0{,}5$$

$$\delta_0 = \frac{82{,}875 - 20{,}625}{5{,}5 - 4{,}5} = 62{,}25 \qquad \delta_1 = \frac{48 - 82{,}875}{5 - 5{,}5} = 69{,}75$$

Hallando los coeficientes

$$a = \frac{69{,}75 - 62{,}25}{-0{,}5 + 1} = 15 \; b = 15(-0{,}5) + 69{,}75 = 62{,}25 \qquad c = 48$$

La raíz cuadrada del discriminante es:

$$\sqrt{62{,}25^2 - 4 \cdot 15 \cdot 48} = 31{,}544$$

Así $$x_3 = 5 + \frac{-2 \cdot 48}{62{,}25 + 31{,}544} = 3{,}9765$$

Y el error estimado

$$E_a = \left| \frac{-1{,}0235}{x_3} \right| \cdot 100\% = 25{,}74\%$$

Ahora $x_2 = 3{,}9765$ $x_1 = 5$ $x_0 = 5{,}5$

Haciendo uso de un programa y realizando diferentes iteraciones:

i	x_r	E_a **%**
0	5	
1	3,9465	25,740
2	4,0011	0,614
3	4,0000	0,026
4	4,0000	0,000

4. ENLACES SUGERIDOS

- https://es.wikipedia.org/wiki/Proceso_%CE%94%C2%B2_de_Aitken
- https://es.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9todo_de_Steffensen
- https://pt.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9todo_de_Muller

5. BIBLIOGRAFÍA

- Análisis Numérico, *Richard L. Burden/J. Douglas Faires*, Editorial Thomson Learning Inc.
- Métodos Numéricos Con SCILAB, Héctor Manuel Mora Escobar, Abril 2010

6. GLOSARIO

Muller: es un método rápido de convergencia para encontrar las raíces de una función polifónica

7. PREGUNTAS DE AUTOEVALUACIÓN

1. ¿Qué Ventajas tiene el método de Steffensen?
2. ¿Cuál es una desventaja de este método?
3. ¿Cuál método es mejor *Aitken o Steffensen*? Por Qué?
4. ¿Cuántos puntos necesita el Método de Müller para converger?
5. ¿Cuál puede ser una desventaja del Método de Müller?

UNIDAD II

2.9 CONVERGENCIA ACELERADA
2.10 CEROS DE POLINOMIOS

1. PREGUNTAS DE AUTOEVALUACIÓN

1. ¿Qué Ventajas tiene el método de Steffensen?

   Respuesta: Un método acelerado, convergencia rápida y ventaja adicional de que el proceso de iteración sólo necesita un punto inicial.

2. ¿Cuál es una desventaja de este método?

   Respuesta: Puede fallas en sistemas cuadráticos

3. ¿Cuál método es mejor *Aitken o Steffensen*? Por Qué?

   Respuesta: Es el método de Steffensen

4. ¿Cuántos puntos necesita el Método de Müller para converger?

   Respuesta: Utiliza tres puntos iniciales, con los que tiene más información para aproximarse en forma acelerada al cero del polinomio.

5. ¿Cuál puede ser una desventaja del Método de Müller?

   Respuesta: Que es necesario conocer tres puntos iniciales para que el método arranque y que puede ser en algunos casos no ser conocido.