



UNIDAD III

3. INTERPOLACIÓN NUMÉRICA

3.1 POLINOMIO DE INTERPOLACIÓN DE LAGRANGE

1. INTRODUCCIÓN

En el campo de la matemática aplicada es de gran importancia la manera como determinar una función o funciones a partir de un conjunto de datos discretos, puntos tabulados, situación que siempre se enfrenta cualquier investigador, para decir generalmente un Ingeniero siempre tiene al frente esta problemática fenómeno que será el objetivo de este ítem.

Pues es común encontrar datos con valores discretos, y sin embargo nosotros queremos encontrar valores entre estos puntos discretos, y esto es lo que lo llamamos ajuste de curvas y, generalmente se usa el procedimiento de mínimos cuadrados.

Cuando existe un conjunto de datos muy precisos, en este caso se usa lo que se llama interpolación.

Las funciones de aproximación generalmente es obtenida por combinación lineal de funciones elementales, que toman la forma de:

En donde:

a_i : Son constantes que deseamos encontrar, $i=1,2,\dots,n$

$g_i(x)$: Son funciones elementales específicas, $i=1,2,\dots,n$

2. OBJETIVO

Conceptualizar los métodos matemáticos que resuelven ecuaciones polinomiales. Describir y Comprender el método matemáticos de *Lagrange*. Analizar una muestra de datos empleando el método matemático de *Lagrange*.

3. INTERPOLACIÓN DE LAGRANGE

Podemos decir que la interpolación lineal es el eje para muchos métodos numéricos y de gran relevancia en la ingeniería, puesto que una gran información se encuentra en su forma tabular como veremos más adelante y es usado por una diversidad de métodos numéricos, por ejemplo si integramos este método tendremos el método de integración trapezoidal.



¿En qué consiste este método?

Supongamos que tenemos los siguientes cuadros:

Puntos	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	56	78	113	144	181	205	214
x	1	2	5	10	20	30	40

Cuadro 1

Puntos	0		1	2	3
$f(x)$	56	¿-?	113	181	214
x	1	2	5	20	40

Cuadro 2

Supongamos por un instante que sólo se dispone del cuadro 2 y que queremos el valor de la variable “ $y=f(x)$ ” cuando x tiene un valor de 2 unidades. Una manera muy común es considerar la ecuación de una línea recta así:

$p(x) = a_0 + a_1x$, y sustituirlos valores de los puntos 0 y 1, obteniendo dos ecuaciones con variables a_0 y a_1

Punto “0” = (1,56); punto 1: (5,113); ($x, f(x)$)

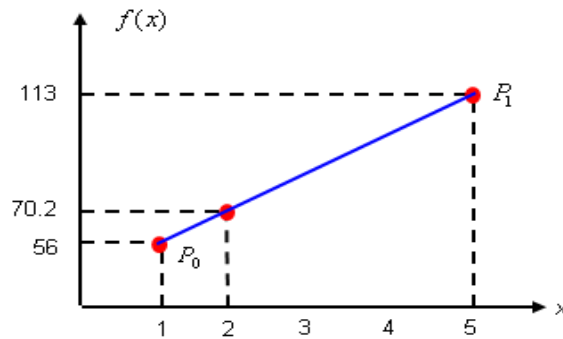
$$\begin{aligned}\Rightarrow -4a_1 &= -57 \Rightarrow a_1 = \frac{57}{4} = 14.2 \\ a_0 &= 56 - 14.2 = 41.8\end{aligned}$$

Luego la ecuación de la función lineal:

$$p(x) = 41.8 + 14.2x$$

Esta ecuación puede ser usado para calcular $f(x)$ cuando $x = 2$

$$f(2) = 41.8 + (14.2)2 = 41.8 + 28.4 = 70.2$$



Entre estos métodos tendremos la aproximación polinomial de LaGrange. El método que consiste en:

Primero: Supongamos una función desconocida $f(x)$ dada en forma tabular y se asume un polinomio de primer grado es decir una línea recta el cual se puede escribir de la siguiente manera:

1. Supongamos que la ecuación de una recta se escribe así:

$$P(x) = a_0(x - x_1) + a_1(x - x_0)$$

En donde:

x_0, x_1 : Son valores de la función en puntos conocidos $[x_0, f(x_0)]$, $[x_1, f(x_1)]$

a_0, a_1 : Coeficientes por determinar, y lo encontramos haciendo las consideraciones siguientes:

Determinando a_0 para ello consideramos

$$x = x_0 \Rightarrow P(x_0) = a_0(x_0 - x_1) \Rightarrow a_0 = \frac{P(x_0)}{x_0 - x_1} = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1}$$

Determinando a_1 para ello hacemos:

$$x = x_1 \Rightarrow P(x_1) = a_1(x_1 - x_0) \Rightarrow a_1 = \frac{P(x_1)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0}$$

Luego

$$P(x) = \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)}(x - x_1) + \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_0)}(x - x_0)$$

$$P(x) = f(x_0) \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} + f(x_1) \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}$$

$$P(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1)$$



2. Supongamos un polinomio de segundo grado

$$P_2(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2) + a_1(x - x_0)(x - x_2) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$

En donde:

x_0, x_1, x_2 son los valores de los puntos conocidos $[x_0, f(x_0)], [x_1, f(x_1)], [x_2, f(x_2)]$

$$\text{Si } x = x_0 \Rightarrow a_0 = \frac{P_2(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$$

$$\text{Si } x = x_1 \Rightarrow a_1 = \frac{P_2(x_1)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$$

$$\text{Si } x = x_2 \Rightarrow a_2 = \frac{P_2(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

Luego:

$$P_2(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2)$$

En donde:

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}; L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}; L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

3. Podemos suponer un polinomio de grado n:

$$P_n(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + \dots + L_i(x)f(x_i) + \dots + L_n(x)f(x_n)$$

En donde:



$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_i) \dots (x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots (x_0 - x_i) \dots (x_0 - x_n)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2) \dots (x - x_i) \dots (x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \dots (x_1 - x_i) \dots (x_1 - x_n)}$$

$$\vdots$$

$$L_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}$$

Que en general el polinomio se puede escribir:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n L_i(x) f(x_i) \quad , \text{ polinomio LaGrange}$$

En donde:

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \quad ,$$

La aproximación polinomial de LaGrange, es la combinación lineal de $f(x_i)$ y de los coeficientes $L_i(x)$.

Ejemplo:

Supongamos que tenemos la función tabular

i	0	1	2	3
$F(x_i)$	-3	0	5	7
x_i	0	1	3	6

a) Determinar la aproximación polinomial de LaGrange usando todos los puntos

b) Determinar el valor aproximado de $f(x)$ para $x = 1.8$



Solución:

Debemos destacar que la tabla presenta cuatro puntos lo que induce la existencia de un polinomio de tercer orden

$$P_3(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2) + L_3(x)f(x_3)$$

$$P_3(x) = L_0(x)(-3) + L_1(x)(0) + L_2(x)(5) + L_3(x)(7)$$

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(x-1)(x-3)(x-6)}{(0-1)(0-3)(0-6)} = \frac{(x-1)(x-3)(x-6)}{-18}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(x-0)(x-3)(x-6)}{(1-0)(1-3)(1-6)} = \frac{x(x-3)(x-6)}{10}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{(x-0)(x-1)(x-6)}{(3-0)(3-1)(3-6)} = \frac{x(x-1)(x-6)}{-18}$$

$$L_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{x(x-1)(x-3)}{6(6-1)(6-3)} = \frac{x(x-1)(x-3)}{90}$$

Operando tenemos:

$$P_3 = -\frac{x^3}{30} - \frac{x^2}{30} + \frac{46}{15}x - 3$$

El valor aproximado de la función cuando $x = 1.8$

$$P_3(1.8) = -\frac{(1.8)^3}{30} - \frac{(1.8)^2}{30} + \frac{46}{15}(1.8) - 3 = 2.2176$$

4. ENLACES SUGERIDOS

https://es.wikipedia.org/wiki/Interpolaci%C3%B3n_polin%C3%B3mica_de_Lagrange

5. BIBLIOGRAFÍA

- Análisis Numérico, *Richard L. Burden/J. Douglas Faires*, Editorial Thomson Learning Inc.
- Métodos Numéricos Con SCILAB, *Héctor Manuel Mora Escobar*, Abril 2010



6. GLOSARIO

7. PREGUNTAS DE AUTOEVALUACIÓN

1. ¿Qué es la interpolación?
2. ¿Cuál es una desventaja de este método?
3. ¿Qué es la interpolación de Lagrange?



UNIDAD III

3. INTERPOLACIÓN NUMÉRICA

3.1 POLINOMIO DE INTERPOLACIÓN DE LAGRANGE

1. PREGUNTAS DE AUTOEVALUACIÓN

1. ¿Qué es la interpolación?

Respuesta: Es la obtención de nuevos puntos partiendo del conocimiento de un conjunto discreto de puntos dados, es disponer de un cierto número de puntos obtenidos por muestreo o a partir de un experimento y pretender construir una función o polinomio que los ajuste.

2. ¿Cuál es una desventaja de este método?

Respuesta: Si se aumenta el número de puntos a interpolar (o nodos) con la intención de mejorar la aproximación a una función, también lo hace el grado del polinomio interpolador así obtenido, por norma general. De este modo, aumenta la dificultad en el cálculo, haciéndolo poco operativo manualmente a partir del grado 4.

3. ¿Qué es la interpolación de Lagrange?

Respuesta: es una forma de presentar el polinomio que interpola un conjunto de puntos dado. También llamado polinomio de Lagrange