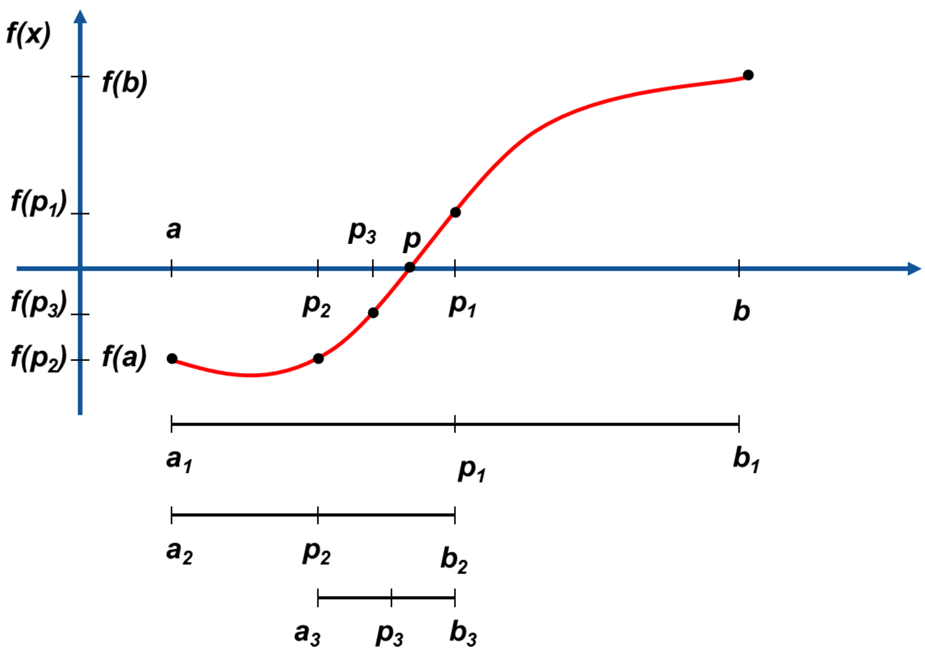
UNIDAD II

2.4 MÉTODO DE BISECCIÓN Y REGULA FALSI

1. INTRODUCCIÓN

Supongamos que se tiene una función continua en el intervalo [a,b] y de tal manera que *f(a)*f(b)* < 0 esto quiere decir que *f(x)* tiene un cero en el intervalo abierto (a,b). Por la razón que el producto del valor de la función en a y b es negativo es decir cambia de signo en el intervalo [a,b], lo que afirma es una consecuencia del teorema del valor medio.

Pues el método en análisis explota el hecho anterior para su fundamento, pues dicho método determina c = *(a+b)*/2 y averigua si *f(a) f(c)* <0 si esto resulta siendo cierto entonces *f(x)* tiene una raíz en el intervalo [a,c]. En seguida tomamos el valor de c como b y realizamos el mismo análisis anterior.



2. OBJETIVO

Definir y Comparar el método matemáticos de la Bisección, con otros métodos, en base a los criterios de eficiencia, precisión y tolerancia. Se Analizara una muestra de datos empleando cada uno de los métodos matemáticos de Bisección con otros métodos

3. MÉTODO DE LA BISECCION

El método de bisección consiste en dividir el intervalo en 2 subintervalos de igual magnitud, reteniendo el subintervalo en donde f cambia de signo, para conservar al menos una raíz o cero, y repetir el proceso varias veces.

Por ejemplo, suponga que f tiene un cero en el intervalo $[a,b]$.

Primero se calcula el punto medio del intervalo Si f es una función continua sobre el intervalo $[a,b]$ y si $f(a)\,f(b)<0$, entonces f debe tener un cero en (a,b). Dado que $f(a)f(b)<0$, la función cambia de signo en el intervalo $[a,b]$ y por lo tanto tiene por lo menos un cero en el intervalo.

Esta es una consecuencia del teorema del valor intermedio para funciones continuas, que establece que si f es continua en $[a,b]$ y si k es un número entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe por lo menos un $c \in (a,b)$ tal que $f(c)=k$. (para el caso en que $f(a)f(b)<0$ se escoge $k=0$, luego $f(c)=0$, $c \in (a,b)$).

; $c = \frac{a+b}{2}$ Después se averigua sí $f(a)f(c)<0$. Si lo es, entonces f tiene un cero en $[a,c]$.

A continuación se renombra a ***c*** como ***b*** y se comienza una vez más con el nuevo intervalo $[a,b]$, cuya longitud es igual a la mitad del intervalo original.

Si $f(a)f(c)>0$, entonces $f(c)f(b)<0$ y en este caso se renombra a ***c*** como ***a***.

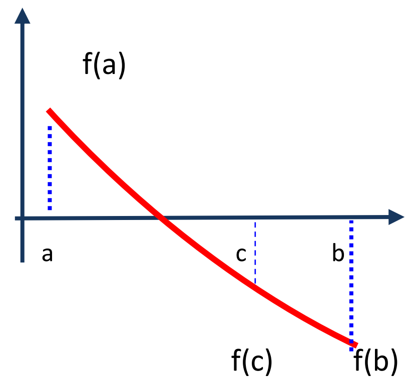
En ambos casos se ha generado un nuevo intervalo que contiene un cero de f, y el proceso puede repetirse.

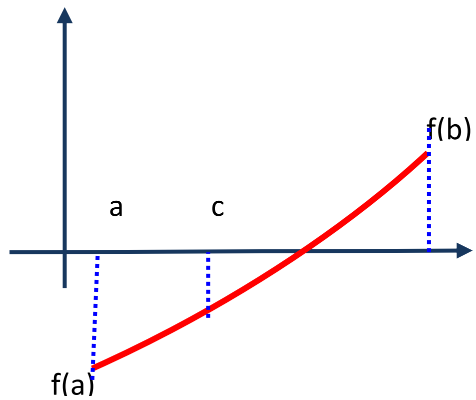
Si ocurriera que $f(a)\ f(c) >0$ entonces $f(c)\ f(b) < 0$ en este caso redefinimos a ***c =a*** En ambos caso a sucedido que se a determinado un nuevo intervalo que contiene una raíz de la función y el proceso puede repetirse.

Si $\boldsymbol{f(a)*\ f(c) = 0}$, o $\boldsymbol{f(c)*\ f(b) = 0}$; entonces $\boldsymbol{f(c) = 0}$ y con esto se ha determinado una raíz del polinomio, pero vale aclarar que este caso no sucede en general puesto que los redondeos en una computadora difícil es cero. Por esta razón es que para concluir se debe realizar con una tolerancia de 10^{-3}.

Este método también se le conoce con el nombre de método de la bipartición, pero debemos destacar este método es el más sólido y seguro que los otros métodos para encontrar una raíz en un intervalo.

INTERPRETACIÓN GRÁFICA





Caso a) f(a)*f(c)<0¸ **Caso b) f*(c)f(b)<0**

Ejemplo.

La función *f(x) = x senx* – 1 tiene un cero en el intervalo [0,2], porque *f(0) = -1 y f(2)*=0.818595.

Si se denota con $a_1 = a = 0, b_1 = b = 2$ y $c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$, entonces c1 = 1. Ahora *f(c1) = f(1)* = -0.158529, luego la función tiene un cero en el intervalo [c1, b1] = [1,2] ; se renombra *a2=c1 y b2=b1* .

El nuevo punto medio es $c_2 = \frac{a_2 + b_2}{2} = \frac{1+2}{3} = 1.5$ y *f(c2) = f(1.5)* = 0.496242, el cero está en el intervalo [a_2, c_2] y se renombra como [a_3,b_3].

En la tabla de abajo se muestran las primeras nueve iteraciones del método de bisección para *f(x)= x senx* –1 con *a=0 b*=2.

n	Extremo izquierdo a_n	Extremo derecho b_n	Punto medio c_n	Valor de la función $f(c_n)$	Erro Relativo $\left\lvert\frac{c_n - c_{n-1}}{c_n}\right\rvert$
1	0	2	1	-0.158529	
2	1	2	1.5	0.496242	0.333333
3	1	1.5	1.25	0.186231	0.2
4	1	1.25	1.125	0.015051	0.111111
5	1	1.125	1.0625	-0.071827	0.0588235
6	1.0625	1.125	1.09375	-0.028362	0.0285714
7	1.09375	1.125	1.109375	-0.006643	0.0140845

8	1.1093750	1.125	1.1171875	0.004208	0.0069930
9	1.1093750	1.1171875	1.11328125	-0.001216	0.0035087

(c = 1.114157141 es el cero de $f(x) = x\operatorname{sen}x - 1$)

Para detener el método de bisección y dar una aproximación del cero de una función se pueden usar varios criterios (llamados **criterios de parada**).
Uno de los criterios de parada consiste en examinar si $|f(c_n)| < \varepsilon$, donde ε es una tolerancia previamente establecida (por ejemplo $\varepsilon = 10^{-3}$). Otro criterio que puede utilizarse es examinar

Sí $\frac{|b_n - a_n|}{2} < \varepsilon$. También se puede usar como criterio de parada el error relativo entre dos aproximaciones del cero de f, $\left|\frac{c_n - c_{n-1}}{c_n}\right| < \varepsilon$

En el ejemplo anterior si $\varepsilon = 0.005$, el procedimiento se pararía en la octava iteración con el criterio $|f(c_n)| < \varepsilon$, ya que:

$$|f(c_8)| = |f(1.1171875)| = 0.004208 < \varepsilon = 0.005,$$

pero si se usa el criterio , $\left|\frac{c_n - c_{n-1}}{c_n}\right| < \varepsilon$ el procedimiento se detendría en la novena iteración porque:

$$\left|\frac{c_9 - c_8}{c_9}\right| = \left|\frac{1.11328125 - 1.1171875}{1.11328125}\right| = 0.0035087 < \varepsilon = 0.005$$

Cuando se generan aproximaciones por medio de una computadora, se recomienda fijar un número máximo de iteraciones N que debería realizar la máquina. Esto con el fin de contar con un resguardo para evitar la posibilidad de que el proceso de cálculo caiga en un ciclo infinito cuando la sucesión diverge (o cuando el programa no está codificado correctamente).

Un algoritmo para el método de bisección es:

```
BEGIN
Input a1, b1
Repeat
    c ← (a+b)/2
    If f(c) f(a) > 0
        b ← c
    Else
        a ← c
    End If
Until
    |b − a|/2 < ε  or  f(c) = 0
END
```

Teorema. (*Error en el método de bisección*).
Si f es continua en [*a*, *b*] *y f*(*a*) *f*(*b*) < 0, *el método de bisección genera una sucesión* $\{c_n\}$ *que aproxima un cero c de f con la propiedad que:* $|c - c_n| \le \frac{b-a}{2^n}$, *n* ≥ 1

Ejemplo.

Para determinar el número de iteraciones necesarias para aproximar el cero de *f*(*x*) = *x* sen *x* - 1 con una exactitud de 10^{-2}en el intervalo [0,2], se debe hallar un número *n* tal que:

$|c - c_n| \le \frac{b-a}{2^n}$ < 10^{-2}, es decir, $\frac{2-0}{2^n} < 10^{-2}$ *n* > 7.643...

Se necesitan aproximadamente unas 8 iteraciones.

Observe en la tabla de aproximaciones que el cero de *f*(*x*) = *x*sen *x* - 1 es *c*=1.114157141 y c_8=1.1171875.

El error real es $|c - c_8|$ = 0.003030359 ≈ 3x10^{-3}. El error real es menor que el error dado por el teorema; en la mayoría de casos la cota de error dada por el teorema es mayor que el número de iteraciones que realmente se necesitan. Para este ejemplo, $|c - c_7|$ = 0.004782141<10^{-2} = 0.01

Notas:

- El método de bisección tiene la desventaja que es lento en cuanto a convergencia (es decir que se necesita un *n* grande para que $|c - c_n|$ pequeño). Otros métodos requieren menos iteraciones para alcanzar la misma exactitud, pero entonces no siempre se conoce una cota para la precisión.

- El método de bisección suele recomendarse para encontrar un valor aproximado del cero de una función, y luego este valor se refina por medio de métodos más eficaces. La razón es porque la mayoría de los otros métodos para encontrar ceros de funciones requieren un valor inicial cerca de un cero; al carecer de dicho valor, pueden fallar por completo.

- Resolver una ecuación en una variable como por ejemplo: $xe^x=1$ es equivalente a resolver la ecuación $xe^x-1=0$, o a encontrar el cero de la función $f(x) = xe^x-1$. Para aproximar el cero de f o la raíz de la ecuación se puede hacer la gráfica de f en una calculadora o usar Matlab para determinar un intervalo donde f tenga un cero. También se pueden ensayar números a y b de tal manera que $f(a)f(b)<0$. Para el caso de $f(x) = xe^x-1$ por ejemplo $f(0) = -1$, $f(1) = e-1 \approx 1.71828$ entonces f tiene un cero en el intervalo [0,1].

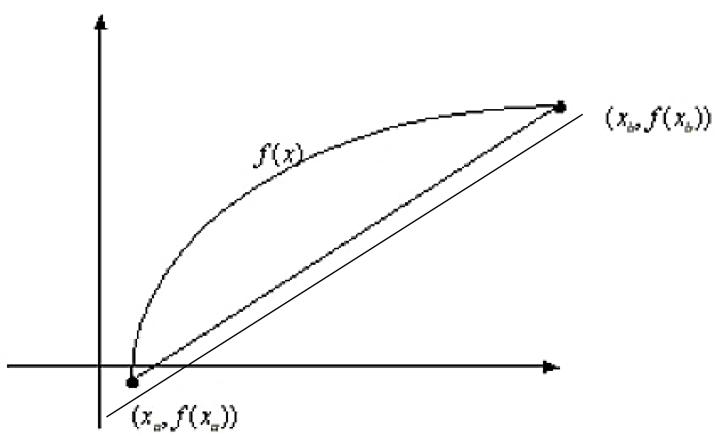
- Cuando hay raíces múltiples, el método de bisección quizá no sea válido, ya que la función podría no cambiar de signo en puntos situados a cualquier lado de sus raíces. Una gráfica es fundamental para aclarar la situación. En este caso sería posible hallar los ceros o raíces trabajando con la derivada $f'(x)$, que es cero en una raíz múltiple.

METODO DE LA REGULA FALSI

1. INTRODUCCIÓN

Él método de la Regula falsi o falsa posición, es un método iterativo de resolución numérica de ecuaciones no lineales. Este método combina el método de bisección y el método de la secante.

Como se mencionó en el método de bisección, conviene considerar que la raíz de una ecuación está localizada más cerca de alguno de los extremos del intervalo. Consideremos nuevamente una gráfica de la función *f(x)*



Donde hemos agregado la línea recta que une los puntos extremos de la gráfica en el intervalo [*a, b*].

Es claro que si en lugar de considerar el punto medio del intervalo, tomamos el punto donde cruza al eje *X* esta recta, nos aproximaremos mucho más rápido a la raíz; ésta es en sí, la idea central del método de la regla falsa y ésta es realmente la única diferencia con el método de bisección, puesto que en todo lo demás los dos métodos son prácticamente idénticos.

2. OBJETIVO

Definir y Comparar el método matemáticos de la Regula Falsi . Se analizara una muestra de datos empleando cada uno de los métodos matemáticos de Bisección con otros métodos.

3. MÉTODO DE LA REGULA FALSI

Supongamos que tenemos una función f(x) que es continua en el intervalo [Xa , X b].y además f(Xa) y f(Xb) , tienen signos opuestos. Calculemos la ecuación de la línea recta que une los puntos (Xa, f(Xa)), (Xb, f(Xb)) . Sabemos que la pendiente de esta recta está dada por:

$$m = \frac{f(x_b) - f(x_a)}{x_b - x_a}$$

Por lo tanto la ecuación de la recta es:

$$y - f(x_a) = \frac{f(x_b) - f(x_a)}{x_b - x_a}(x - x_a)$$

Para obtener el cruce con el eje *X*, hacemos *Y = 0*

$$-f(x_a) = \frac{f(x_b) - f(x_a)}{x_b - x_a}(x - x_a)$$

Multiplicando por X_a , X_b nos da:

$$-f(x_a)(x_b - x_a) = (f(x_b) - f(x_a))(x - x_a)$$

Finalmente, de aquí despejamos *X :*

$$x = x_a - \left[\frac{f(x_a)(x_b - x_a)}{f(x_b) - f(x_a)} \right]$$

Este punto es el que toma el papel de X_r en lugar del punto medio del método de bisección.

Así pues, el método de la regla falsa sigue los siguientes pasos:

Sea *f(x)* continua,

i) Encontrar valores iniciales X_a , X_b , tales que $f(X_a)$ y $f(X_b)$ tengan signos opuestos, es decir,

$$f(X_a) * f(X_b) < 0$$

ii) La primera aproximación a la raíz se toma igual a:

$$x_r = x_a - \left[\frac{f(x_a)(x_b - x_a)}{f(x_b) - f(x_a)} \right]$$

iii) Evaluar $f(X_r)$. Forzosamente debemos caer en uno de los siguientes casos:

$$f(X_a) * f(X_r) < 0$$

En este caso, tenemos que $f(X_a)$ y $f(X_r)$ tienen signos opuestos, y por lo tanto la raíz se encuentra en el intervalo $[X_a , X_r]$.

$$f(X_a) * f(X_r) > 0$$

En este caso, tenemos que $f(X_a)$ y $f(X_r)$ y tienen el mismo signo, y de aquí que $f(X_r)$ y $f(X_b)$ tienen signos opuestos. Por lo tanto, la raíz se encuentra en el intervalo $[X_r , X_b]$

$$f(X_a) * f(X_r) = 0$$

En este caso $f(X_r) = 0$ se tiene que y por lo tanto ya localizamos la raíz. El proceso se vuelve a repetir con el nuevo intervalo, hasta que: $|\epsilon_a| < \epsilon$

Ejemplo 1

Usar el método de la regla falsa para aproximar la raíz de $e^x - \ln x$, comenzando en el intervalo [1,2] y hasta que $|\epsilon_a| < 1\%$

Solución

Así pues esta función es continua en el intervalo dado y que toma signos opuestos en los extremos de dicho intervalo. Por lo tanto podemos aplicar el método de la regla falsa.

$$x_r = x_a - \left[\frac{f(x_a)(x_b - x_a)}{f(x_b) - f(x_a)}\right] = x_b - \left[\frac{f(x_b)(x_a - x_b)}{f(x_a) - f(x_b)}\right]$$

Calculamos la primera aproximación:

$$x_{r_1} = x_b - \frac{f(x_b)[x_a - x_b]}{f(x_a) - f(x_b)} = 2 - \frac{f(2)\cdot[1-2]}{f(1) - f(2)} = 1.397410482$$

Puesto que solamente tenemos una aproximación, debemos seguir con el proceso. Así pues, evaluamos

$$f(x_{r_1}) = e^{-1.397410482} - \ln(1.397410482 = -0.087384509 < 0$$

$f(1)$	$f(1.397410482)$	$f(2)$
+	−	−

Observar el cambio de signo

De donde vemos que la raíz se encuentra en el intervalo [1,1.397410482],. Con este nuevo intervalo, calculamos la nueva aproximación:

$$x_{r_2} = x_b - \frac{f(x_b)[x_a - x_b]}{f(x_a) - f(x_b)} = 1.397410482 - \frac{f(1.397410482)\cdot[1 - 1.397410482]}{f(1) - f(1.397410482)}$$

$$x_{r_2} = 1.321130513$$

En este momento, podemos calcular el primer error aproximado:

$$|\epsilon_a| = \left|\frac{1.321130513 - 1.397410482}{1.321130513} \times 100\%\right| = 5.77\%$$

Puesto que no se cumple el objetivo seguimos con el proceso. Evaluamos $f(X_{r2}) = f(1,321130513) = -0.011654346 < 0$, y hacemos la tabla de signos:

$f(1)$	$f(1.397410482)$	$f(1.321130513)$
+	−	−

De donde vemos que la raíz se encuentra en el intervalo [1,1.321130513] , con el cual, podemos calcular la nueva aproximación:

$$x_{r_3} = x_b - \frac{f(x_b)[x_a - x_b]}{f(x_a) - f(x_b)} = 1.321130513 - \frac{f(1.321130513)\cdot[1 - 1.321130513]}{f(1) - f(1.321130513)}$$

$$x_{r_3} = 1.311269556$$

Y el error aproximado:

$$|\epsilon_a| = \left|\frac{1.311269556 - 1.321130513}{1.311269556}\times 100\%\right| = 0.75\%$$

Como se ha cumplido el objetivo, concluimos que la aproximación buscada es:

$X_{r3} = 1.311269556$

Observe la rapidez con la cual converge el método de la regla falsa a la raíz, a diferencia de la lentitud del método de la bisección.

Ejemplo 2

Usar el método de la regla falsa para aproximar la raíz de $f(x) = arctang(x) + x - 1$ comenzando en el intervalo [0,1] y hasta que $|\epsilon_a| <.1\%$.

Solución

Este es el mismo ejemplo 2 del método de la bisección. Así pues, ya sabemos que se cumplen las hipótesis necesarias para poder aplicar el método, es decir *f(x)*, que sea continua en el intervalo dado y que *f(x)* tome signos opuestos en los extremos de dicho intervalo.

Calculamos pues, la primera aproximación:

$$x_{r_1} = x_b - \frac{f(x_b)[x_a - x_b]}{f(x_a) - f(x_b)} = 1 - \frac{f(1)\cdot[0-1]}{f(0) - f(1)} = 0.5600991535$$

Como solamente tenemos una aproximación, debemos avanzar en el proceso. Evaluamos

$$f(\,x_{r1}) = arctang(0.5600991535) + 0.5600991535 = 0.070662953 > 0$$

Y hacemos nuestra tabla de signos:

$f(0)$	$f(0.5600991535)$	$f(1)$
$-$	$+$	$+$

De lo cual vemos que la raíz se localiza en el intervalo [0, 0.5600991535] . Así pues, calculamos la nueva aproximación:

$$x_{r_2} = 0.5600991535 - \frac{f(0.5600991535)\cdot[0 - 0.5600991535]}{f(0) - f(0.5600991535)} = 0.5231330281$$

Y calculamos el error aproximado:

$$|\in_a| = \left|\frac{0.5231330281 - 0.5600991535}{0.5231330281}\times 100\%\right| = 7.06\%$$

Puesto que no se cumple el objetivo, seguimos avanzando en el proceso. Evaluamos $f(\,x_{r1}) = arctang(0.5231330281) + 0.5231330281 - 1 = 0.00511533 > 0$. Y hacemos nuestra tabla de signos:

$f(0)$	$f(0.5231330281)$	$f(0.5600991535)$
$-$	$+$	$+$

De los cual vemos que la raíz se localiza en el intervalo [0, 0.5231330281], con el cual podemos calcular al siguiente aproximación:

$$x_{r_3} = 0.5231330281 - \frac{f(0.5231330281)\cdot[0 - 0.5231330281]}{f(0) - f(0.5231330281)} = 0.5204706484$$

Y el siguiente error aproximado:

$$|\in_a| = \left|\frac{0.5204706484 - 0.523133081}{0.5204706484}\times 100\%\right| = 0.51\%$$

Como se ha cumplido el objetivo, concluimos que la aproximación buscada es:

X_{r3} = 0.5204706484

Nuevamente observamos el contraste entre la rapidez del método de la regla falsa contra la lentitud del método de la bisección. Por supuesto que puede darse el caso en el que el método de la regla falsa encuentre la aproximación a la raíz de forma más lenta que el método de la bisección. Como ejercicio, el estudiante puede aplicar ambos métodos a la función $f(X) = X^6 - 1$, comenzando en el intervalo [0, 1.5], donde notará que mientras que el método de bisección requiere de 8 aproximaciones para lograr que $|\epsilon_a| < 1\%$, el método de la regla falsa necesita hasta 16 aproximaciones.

4. ENLACES SUGERIDOS

https://es.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9todo_de_bisecci%C3%B3n
https://es.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9todo_de_la_regla_falsa

5. BIBLIOGRAFÍA

- Análisis Numérico, *Richard L. Burden/J. Douglas Faires*, Editorial Thomson Learning Inc.
- Métodos Numéricos Con SCILAB, Héctor Manuel Mora Escobar, Abril 2010

6. GLOSARIO

7. PREGUNTAS DE AUTOEVALUACIÓN

1. ¿Explique brevemente el método de la Bisección?
2. ¿Cuál considera las desventajas del Método de la Bisección?
3. ¿Qué es el método de la regla falsa?