UNIDAD III

3.5 -3.6 DIFERENCIAS DIVIDIDAS CENTRADAS Y FINITAS

1. INTRODUCCIÓN

En la ecuación es una representación de las diferencias centrales (o centradas) de la primera derivada. Nótese que el error de truncamiento es del orden de en contraste con las diferencias divididas hacia adelante y hacia atrás, las cuales fueron de orden h. Por lo tanto, el análisis de la serie de Taylor ha llevado a la información práctica de que la diferencia central es la representación más exacta de la derivada. Por ejemplo, si se parte el tamaño del paso a la mitad usando diferencias hacia atrás o hacia adelante, el error se reducirá aproximadamente a la mitad, mientras que para diferencias centrales, el error se reduce a la cuarta parte.

Una **diferencia finita** es una expresión matemática de la forma $f(x + b) - f(x + a)$. Si una diferencia finita se divide por $b - a$ se obtiene una expresión similar al cociente diferencial, que difiere en que se emplean cantidades finitas en lugar de infinitesimales. La aproximación de las derivadas por diferencias finitas desempeña un papel central en los métodos de diferencias finitas del análisis numérico para la resolución de ecuaciones diferenciales.

2. OBJETIVO

Comparar los métodos matemáticos de Diferencias divididas en base a los criterios de eficiencia, precisión y tolerancia. Analizar una muestra de datos empleando cada uno de los métodos matemáticos de diferencias divididas Centradas y Finitas.

3. DIFERENCIAS CENTRADAS Y FINITAS

3.5. DIFERENCIAS CENTRADAS

Supongamos que la distancia entre dos argumentos (abscisas) consecutivas cualquiera es igual, en toda la función tabular y sea “*h*”.

Las condiciones generales de este método de diferencias centradas:

- ✓ Se debe tener un número impar de nodos.

- ✓ Si el número de nodos es par, se debe descartar un nodo. Generalmente, se descarta el nodo que esté más alejado del nodo de interpolación.

  Por ejemplo, si se tienen los nodos:

  1.1, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8 2.0

Y se desea interpolar en **1.5**. Se debe descartar el nodo **2.0,** ya que la distancia de **1.5** a **1.1** es **0.4** y la de **1.5 *a* 2.0** es **0.5.**

Los nodos se deben renombrar o reenumerar.

El nodo del centro será el x_0 el siguiente mayor será el x_1, el siguiente mayor el x_2 ,… Y el anterior menor al centro (x_0) será el x_{-1}, el anterior siguiente será el x_{-2}, y así sucesivamente.

En el ejemplo anterior, luego de haber eliminado el nodo **2.0** se tendrá que:

$x_0=1.4$, $x_1=1.6$, $x_2=1.8$, $x_{-1}=1.2$ **y** $x_{-2}=1.1$

Si el número de nodos es **impar** sólo se reenumeran los nodos, no se elimina ninguno.

A continuación se muestra el diagrama en forma triangular de los nodos calculados en la que se señala la parte del medio o central en forma horizontal hasta el extremo derecho o sea lo que reconocemos como la punta.

i	x_i	$f(x_i)$	1ª Dif. Div	2ª Dif. Div	3ª Dif. Div	4ª Dif. Div
-2	x_{-2}	$f[x_{-2}]$				
			$f[x_{-2},x_{-1}]$			
-1	x_{-1}	$f[x_{-1}]$		$f[x_{-2},x_{-1},x_0]$		
			$f[x_{-1},x_0]$		$f[x_{-2},x_{-1},x_0,x_1]$	
0	x_0	$f[x_0]$		$f[x_{-1},x_0,x_1]$		$f[x_{-2},x_{-1},x_0,x_1,x_2]$
			$f[x_0,x_1]$		$f[x_{-1},x_0,x_1,x_2]$	
1	x_1	$f[x_1]$		$f[x_0,x_1,x_2]$		
			$f[x_1,x_2]$			
2	x_2	$f[x_2]$				

Construya la tabla de diferencias centradas para los siguientes **8** nodos equidistantes de la función ***f(x)*** se interpolará en ***x*=1.7.**

x_0=1.0, x_1=1.3, …, x_7 = 3.4.

Recuerde debe re-nombrar los nodos.

Ahora construya un formato general para una tabla que use **11** nodos de cualquier función, sean los nodos:

x_0, x_1, …, x_{10}.

Utilice la tabla resultante para comprender la siguiente fórmula para puntos no equidistantes:

$$
\begin{aligned}
&P_n(x) = f[x_0] + \frac{x-x_0}{2}\left(f[x_{-1},x_0] + f[x_0,x_1]\right) + (x-x_0)^2 f[x_{-1},x_0,x_1] + \\
&\frac{x-x_0}{2}(x-x_{-1})(x-x_1)\left(f[x_{-2},x_{-1},x_0,x_1] + f[x_{-1},x_0,x_1,x_2]\right) + \\
&(x-x_0)^2(x-x_{-1})(x-x_1) f[x_{-2},x_{-1},x_0,x_1,x_2] + \\
&\frac{x-x_0}{2}(x-x_{-2})(x-x_{-1})(x-x_1)(x-x_2) * \\
&\left(f[x_{-3},x_{-2},x_{-1},x_0,x_1,x_2,] + f[x_{-2},x_{-1},x_0,x_1,x_2,x_3]\right) + \\
&(x-x_0)^2(x-x_{-2})(x-x_{-1})(x-x_1)(x-x_2) f[x_{-3},x_{-2},x_{-1},x_0,x_1,x_2,x_3] + \ldots + \\
&\frac{x-x_0}{2}(x-x_{-2m+1})(x-x_{-2m+2})\ldots(x-x_{2m-2})(x-x_{2m-1}) * \\
&\left(f[x_{-2m},\ldots,x_{2m-1}] + f[x_{-2m+1},\ldots,x_{2m}]\right) + \\
&(x-x_0)^2(x-x_{-2m+1})(x-x_{-2m+2})\ldots(x-x_{2m-3})(x-x_{2m-2})(x-x_{2m-1}) * \\
&f[x_{-2m},x_{-2m+1},\ldots,x_{2m-1},x_{2m}]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_n(x) = {} & f[x_0] \\
& + \frac{x-x_0}{2}\left(f[x_{-1},x_0]+f[x_0,x_1]\right) \\
& + (x-x_0)^2 f[x_{-1},x_0,x_1] \\
& + \frac{x-x_0}{2}(x-x_{-1})(x-x_1)\left(f[x_{-2},x_{-1},x_0,x_1]+f[x_{-1},x_0,x_1,x_2]\right) \\
& + (x-x_0)^2(x-x_{-1})(x-x_1)f[x_{-2},x_{-1},x_0,x_1,x_2] \\
& + \frac{x-x_0}{2}(x-x_{-2})(x-x_{-1})(x-x_1)(x-x_2)\left(f[x_{-3},x_{-2},x_{-1},x_0,x_1,x_2,]+f[x_{-2},x_{-1},x_0,x_1,x_2,x_3]\right) \\
& + (x-x_0)^2(x-x_{-2})(x-x_{-1})(x-x_1)(x-x_2)f[x_{-3},x_{-2},x_{-1},x_0,x_1,x_2,x_3] \\
& + \ldots.. \\
& + \frac{x-x_0}{2}(x-x_{-2m+1})(x-x_{-2m+2})\ldots(x-x_{2m-2})(x-x_{2m-1})\left(f[x_{-2m},\ldots,x_{2m-1}]+f[x_{-2m+1},\ldots,x_{2m}]\right) \\
& + (x-x_0)^2(x-x_{-2m+1})(x-x_{-2m+2})\ldots(x-x_{2m-3})(x-x_{2m-2})(x-x_{2m-1})f[x_{-2m},x_{-2m+1},\ldots,x_{2m-1},x_{2m}]
\end{aligned}
$$

Para puntos equidistantes se tiene:

$$
\begin{aligned}
P_n(x) = f[x_{2m+1}] = f[x_0] & \\
& + \frac{sh}{2}\left(f[x_{-1},x_0]+f[x_0,x_1]\right) \\
& + s^2h^2 f[x_{-1},x_0,x_1] \\
& + \frac{s(s^2-1)h^2}{2}\left(f[x_{-2},x_{-1},x_0,x_1]+f[x_{-1},x_0,x_1,x_2]\right) \\
& + \ldots \\
& + s^2(s^2-1)(s^2-4)\ldots(s^2-(m-1)^2)h^{2m} f[x_{-m},\ldots,x_m] \\
& + \frac{s(s^2-1)\ldots(s^2-m^2)h^{2m+1}}{2} f[x_{-m-1},\ldots,x_{m+1}]
\end{aligned}
$$

$n = 2m+1,$ pero si $n = 2m,$ se elimina el primero o el último x_i

$$h = x_{i+1} - x_i \qquad \text{y} \qquad s = \frac{x-x_0}{h}$$

El algoritmo ALG032 presenta sólo los valores de

$$f[x_0], f[x_0, x_1], f[x_0, x_1, x_2] + \ldots + f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$$

Pero las fórmulas descritas anteriormente requieren el uso de las otras Diferencias Divididas Calculadas en el algoritmo. Por lo tanto, es necesario que el algoritmo imprima todas las diferencias divididas.

Para ello, se usará el algoritmo ALG032_DIF_DIV.m y se modificará el ALG032_MOD, para obtener la tabla completa junto con la evaluación del nodo.

Considere la tabla para interpolar en **0.3333**

i	*xi*	*f(xi)*
0	0.0	1.101
1	0.25	0.3349375
2	0.5	-0.02475
3	0.75	-0.0718125

Se debe usar la tabla:

i	*xi*	*f(xi)*
-1	0.0	1.101
0	0.25	0.3349375
1	0.5	-0.02475

Al ejecutar el programa, con dichos valores se obtienen los siguientes resultados:

INTERPOLACION POLINOMIAL DE NEWTON

Los datos de entrada son:

X (0) = 0.00000000 F(X(0)) = 1.10100000

X (1) = 0.25000000 F(X(1)) = 0.33493750

X (2) = 0.50000000 F(X(2)) = -0.02475000

********* MATRIZ ********

1.10100000

0.33493750 **-3.06425000**

-0.02475000 **-1.43875000** **3.25100000**

También es posible usar el algoritmo ALG032.m, si se ingresan los valores en el orden: centro, positivo y luego negativo,

$$x_0, x_1, x_{-1}, x_2, x_{-2}, \ldots$$

Es decir la tabla de datos a ingresar es:

i	*xi*	*f(xi)*
-1	0.0	1.101
0	0.25	0.3349375
1	0.50	-0.02475

El orden de ingreso de los nodos será: **0.25** , **0.5** y por último **0.0** Y siempre será primero los positivos y luego los negativos

Al ejecutar el programa, con dichos valores se obtienen los siguientes resultados:

NEWTONS INTERPOLATION POLYNOMIAL

Input data follows:

X(0) =   0.25000000 F(X(0)) =   0.33493750

X(1) =   0.50000000 F(X(1)) = -0.02475000

X(2) =   0.00000000 F(X(2)) =   1.10100000

The coefficients Q(0,0), ..., Q(N,N) are:

0.33493750

-1.43875000

3.25100000

Aquí ***h*=0.25**, y como ***x*=0.3333**, se puede calcular s como: **s=(0.3333-0.25)/0.25 = 0.3332**.

La Tabla del alg032.m me da solo tres valores $Q_{0,0}$, $Q_{1,1}$ y $Q_{2,2}$, y se necesita el $Q_{-1,-1}$, este valor se obtiene realizando la operación: $Q_{-1,-1}=Q_{1,1}-2hQ_{2,2}$ resultando el valor : **-3.06425**. Así que:

$$
\begin{aligned}
P_n(x) &= P_{2m+1}(x_0 + sh) \\
&= Q_{0,0} + \frac{sh}{2}\left(Q_{1,1} + Q_{-1,-1}\right) + s^2h^2Q_{2,2} \\
P_3(0.3333) &= 0.3349375 \\
&\quad + (0.3332 * 0.25/2) * (-1.43875 - 3.0645) \\
&\quad + (0.3332)\ ^\wedge 2 * (0.25)\ ^\wedge 2 * 3.251 \\
&= 0.16993546889
\end{aligned}
$$

Conclusión del ejemplo usado:

Como puede verse dado que el punto de interpolación **0.333** esta más al centro que en alguno de los extremos, el método regresivo da una respuesta no muy cercana a la que el método progresivo y centrado provee.

Si tiene que decidir entre el centrado y el progresivo, se debe elegir al centrado ya que el valor de interpolación está más apropiado para dicho método.

3.6. DIFERENCIAS FINITAS

Cuando los puntos

$(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)), (x_3, f(x_3)), \ldots, (x_n, f(x_n)),$

Están igualmente espaciados en x, es decir, existe un

$h > 0$ tal que :

$x_i = x_{i-1} + h$, i = 2, ..., n

$x_i = x_1 + (i - 1)h$, i = 1, ..., n

Entonces se pueden utilizar las diferencias finitas, definidas por

$$\begin{aligned} \Delta^0 f_i &= f_i \\ \Delta f_i &= f_{i+1} - f_i \\ \Delta^{k+1} f_i &= \Delta^k(\Delta f_i) = \Delta^k f_{i+1} - \Delta^k f_i \end{aligned}$$

Algunas propiedades interesantes de las diferencias finitas son:

$$\begin{aligned} \Delta^k f_i &= \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} f_{i+k-j}\,, \\ f_{i+k} &= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \Delta^j f_i\,. \end{aligned}$$

Para valores igualmente espaciados, las diferencias finitas y las divididas están estrechamente relacionadas.

$$
\begin{aligned}
D^0 f[x_i] = f[x_i] &= f_i = \Delta^0 f_i \\
D^1 f[x_i] = f[x_i, x_{i+1}] &= \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{\Delta^1 f_i}{h} \\
D^2 f[x_i] = f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] &= \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i} = \cdots = \frac{\Delta^2 f_i}{2h^2} \\
D^m f[x_i] = f[x_i, ..., x_{i+m}] &= \frac{\Delta^m f_i}{m!\, h^m}
\end{aligned}
$$

La tabla de diferencias finitas tiene una estructura análoga a la tabla de diferencias divididas. Se usa para ejemplos pequeños hechos a mano.

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$
x_1	f_1			
		Δf_1		
x_2	f_2		$\Delta^2 f_1$	
		Δf_2		$\Delta^3 f_1$
x_3	f_3		$\Delta^2 f_2$	
		Δf_3		$\Delta^3 f_2$
x_4	f_4		$\Delta^2 f_3$	
		Δf_4		
x_5	f_5			

La elaboración de la tabla es muy sencilla. Las dos primeras columnas corresponden a los datos.

A partir de la tercera columna, para calcular cada elemento se hace la resta de dos elementos consecutivos de la columna anterior.

Por ejemplo: $\boldsymbol{\Delta f_3 = f_4 - f_3}$**.** Obsérvese que este valor se coloca en medio de la fila de $\boldsymbol{f_3}$ y de la fila de $\boldsymbol{f_4}$.

Por ejemplo: $\boldsymbol{\Delta^2 f_1 = \Delta f_2 - \Delta f_1}$**.**

De manera semejante, $\boldsymbol{\Delta^3 f_2 = \Delta^2 f_3 - \Delta^2 f_2}$

Ejemplo:

Construir la tabla de diferencias finitas, hasta el orden 3, a partir de los seis puntos siguientes:

(0, 0),(0.5, 0.7071),(1, 1),(1.5, 1.2247),(2,1.4142),(2.5, 1.5811).

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$
0	0.0000			
		0.7071		
.5	0.7071		−0.4142	
		0.2929		0.3460
1	1.0000		−0.0682	
		0.2247		0.0330
1.5	1.2247		−0.0352	
		0.1895		0.0126
2	1.4142		−0.0226	
		0.1669		
2.5	1.5811			

El valor 0.1895 es simplemente 1.4142 − 1.2247.

El valor 0.0330 es simplemente

−0.0352 − (− 0.0682. 3)

<u>Algoritmo</u> para calcular la tabla de diferencias finitas hasta el orden *m* es el siguiente:

Para i = 1, ..., *n*

$\Delta^0 fi = f(xi)$

fin-para i

Para j = 1, ...,m

para i = 1, ..., n − j

$\Delta^j f_i = \Delta^{j-1} f_{i+1} - \Delta^{j-1} fi$

fin-para i

fin-para j

Ejemplo:

Tabular las diferencias finitas correspondiente a los siguientes valores :

(1,5), (1.5,7),(2,10), (2.5,8)

Calculo de Diferencias finitas en Matlab o Scilab

i	x_i	f_i	$\Delta^1 f_i$	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$
0	1.0	5	2	1	-6
1	1.5	7	3	-5	
2	2.0	10	-2		
3	2.5	8			

```
--> f=[5 7 10 8]
 f  =
    5.   7.   10.   8.
--> d1=diff(f)
 d1  =
      2.   3.  -2.
--> d2=diff(d1)
  d2  =
      1.  -5.
--> d3=diff(d2)
  d3  =
      -6.
```

4. ENLACES SUGERIDOS

https://es.wikipedia.org/wiki/Diferencia_finita

5. BIBLIOGRAFÍA

- Análisis Numérico, *Richard L. Burden/J. Douglas Faires*, Editorial Thomson Learning Inc.
- Métodos Numéricos Con SCILAB, Héctor Manuel Mora Escobar, Abril 2010

6. GLOSARIO

7. PREGUNTAS DE AUTOEVALUACIÓN

1. ¿Qué son las diferencias divididas Centradas?

2. ¿Qué son las diferencias divididas Finitas?

UNIDAD III

3.5 -3.6 DIFERENCIAS DIVIDIDAS CENTRADAS Y FINITAS

3. PREGUNTAS DE AUTOEVALUACIÓN

1. ¿Qué son las diferencias divididas Centradas?

   Respuesta: Es un método de interpolación que utiliza varios nodos y su nombre es debido a a que en el cálculo hay diferencias o resta de los dos nodos más próximo así como la división entre la imagen ($f(x)$) de estos nodos, y de la forma triangular que forman los nuevos nodos tomando los de las parte central del triángulo generado.

2. ¿Qué son las diferencias divididas Finitas?

   Respuesta: es una expresión matemática de la forma $f(x + b) - f(x + a)$. Si una diferencia finita se divide por $b - a$ se obtiene una expresión similar al cociente diferencial, que difiere en que se emplean cantidades finitas en lugar de infinitesimales.