



ANÁLISIS NUMÉRICO

ANS115

UNIDAD III

INTERPOLACION NUMERICA



ANÁLISIS NUMÉRICO

ANS115

TEMA

- Diferencias Divididas

Agenda

- Diferencias Divididas
 - Descripción del Método
 - Tablas
 - Ejemplos

Objetivos

- Conceptualizar los métodos matemáticos que resuelven ecuaciones polinomiales.
- Comparar los métodos matemáticos de Lagrange y Diferencias divididas en base a los criterios de eficiencia, precisión y tolerancia.
- Analizar una muestra de datos empleando cada uno de los métodos matemáticos de Diferencias divididas.

Diferencias Divididas

Suponga que tenemos los siguientes datos tomados durante la observación de un experimento:

i	x_i	$f(x_i)$
0	1.0	0.7651977
1	1.3	0.6200860
2	1.6	0.4554022
3	1.9	0.2818186
4	2.2	0.1103623



Tabla de Diferencias Divididas

<i>i</i>	<i>x_i</i>	<i>f(x_i)</i>	1ª Dif. Div	2ª Dif. Div	3ª Dif. Div	4ª Dif. Div
0	1.0	0.7651977				
			$\frac{0.620086 - 0.7651977}{1.3 - 1.0}$			
1	1.3	0.6200860				
				$\frac{-}{1.6 - 1.0}$		
			$\frac{0.4554022 - 0.620086}{1.6 - 1.3}$			
					$\frac{-}{1.9 - 1.0}$	
2	1.6	0.4554022				
				$\frac{-}{1.9 - 1.3}$		$\frac{-}{2.2 - 1.0}$
			$\frac{0.2818186 - 0.4554022}{1.9 - 1.6}$		$\frac{-}{2.2 - 1.3}$	
3	1.9	0.2818186				
				$\frac{-}{2.2 - 1.6}$		
			$\frac{0.1103623 - 0.2818186}{2.2 - 1.9}$			
4	2.2	0.1103623				

Diferencias Divididas

Supongamos que $P_n(x)$ es el n – *ésimo* Polinomio de Lagrange que concuerda con f en los nodos distintos x_0, x_1, \dots, x_n .

Las Diferencias Divididas de f respecto a x_0, x_1, \dots, x_n se usan para expresar $P_n(x)$ en la forma :

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots \\ + a_n(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})$$

para las constantes apropiadas $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$

Para determinar el valor de las constantes comenzamos con a_0 :

Note que al evaluar $P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots \\ + a_n(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})$ en $x = x_0$ resulta que

$P_n(x_0) = a_0$ pero a su vez se tiene que $P_n(x_0) = f(x_0)$.

Así que $a_0 = f(x_0)$.

Diferencias Divididas

Para encontrar a_1 , siguiendo el mismo proceso :

$$P_n(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) = f(x_0) + a_1(x_1 - x_0) = f(x_1)$$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)}$$

Se define la Diferencia Dividida Cero de f respecto a x_i que se denota por $f[x_i]$, simplemente como el valor $f(x_i)$.

La Primera Diferencia Dividida de f respecto a x_i y x_{i+1} se denota por $f[x_i, x_{i+1}]$, y se define por :

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i}.$$

Diferencias Divididas

La Segunda Diferencia Dividida de f respecto a x_i , x_{i+1} y x_{i+2} se denota por $f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$, y se define por :

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}.$$

De manera análoga luego de haber definido las primeras $k - 1$ Diferencias Divididas

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k-1}] \text{ y } f[x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}, \dots, x_{i+k-1}, x_{i+k}]$$

la $k - \text{ésima}$ Diferencia Dividida relativa a $x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}$

$$\text{es: } f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k}] =$$

$$\frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}, \dots, x_{i+k-1}, x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$$

Diferencias Divididas

Con esta nueva notación, $P_n(x)$ se puede re - escribir como :

$$P_n(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^n f[x_0, x_1, \dots, x_k](x - x_0) \cdots (x - x_{k-1}).$$

En el ejemplo anterior:

i	x_i	$f(x_i)$	1ª Dif. Div	2ª Dif. Div	3ª Dif. Div	4ª Dif. Div
0	1.0	0.7651977				
			-0.4837057			
1	1.3	0.6200860		-0.1087339		
			-0.548946		0.0658784	
2	1.6	0.4554022		-0.0494433		0.0018251
			-0.578612		0.0680685	
3	1.9	0.2818186		0.0118183		
			-0.571521			
4	2.2	0.1103623				

c
o
e
f
i
c
i
e
n
t
e
s

Diferencias Divididas

Si se pidiera por ejemplo interpolar en $x = 1.5$, entonces se tendrá en :

$$\begin{aligned} P_4(x) = & 0.7651977 - 0.4837057(x - 1.0) \\ & - 0.1087339(x - 1.0)(x - 1.3) \\ & + 0.0658784(x - 1.0)(x - 1.3)(x - 1.6) \\ & + 0.0018251(x - 1.0)(x - 1.3)(x - 1.6)(x - 1.9) \end{aligned}$$

Al sustituir se tiene que :

$$P_4(x) = 0.51182$$

Diferencias Divididas

Algoritmo:

Entrada: los nodos x_0, x_1, \dots, x_n ; los valores $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$ como $F_{0,0}, F_{1,0}, \dots, F_{n,0}$.

Salida: Los números $F_{0,0}, F_{1,1}, \dots, F_{n,n}$. Donde

$$P(x) = \sum_{i=0}^n F_{i,i} \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)$$

Paso 1: Para $i = 1, 2, \dots, n$

Para $j = 1, 2, \dots, i$

$$\text{Hacer } F_{i,j} = \frac{F_{i,j-1} - F_{i-1,j-1}}{x_i - x_{i-j}}$$

Paso 2: SALIDA $(F_{0,0}, F_{1,1}, \dots, F_{n,n})$; PARAR.

(Aquí $F_{i,i}$ es $f[x_0, x_1, \dots, x_i]$)

Diferencias Divididas

Ejemplo: Use un programa para construir polinomios interpolantes de grados **1, 2 y 3** para **$x = 8.4$** con los siguientes datos:

$$f(8.1) = 16.9441$$

$$f(8.3) = 17.56492$$

$$f(8.6) = 18.50515$$

$$f(8.7) = 18.82091$$

Note que para este ejemplo los nodos NO SON igualmente espaciados , a continuación la ejecución el programa.

>> **ALG032**

Newtons form of the interpolation polynomial

Choice of input method:

- 1. Input entry by entry from keyboard**
- 2. Input data from a text file**
- 3. Generate data using a function F**

Choose 1, 2, or 3 please

1

Input n

3

Input $X(0)$ and $F(X(0))$ on separate lines

8.1

16.9441

Input $X(1)$ and $F(X(1))$ on separate lines

8.3

17.56492

Diferencias Divididas

Input X(2) and F(X(2)) on separate lines

8.6

18.50515

Input X(3) and F(X(3)) on separate lines

8.7

18.82091

NEWTONS INTERPOLATION POLYNOMIAL

Input data follows:

$X(0) = 8.100000000$ $F(X(0)) = 16.94410000$

$X(1) = 8.300000000$ $F(X(1)) = 17.56492000$

$X(2) = 8.600000000$ $F(X(2)) = 18.50515000$

$X(3) = 8.700000000$ $F(X(3)) = 18.82091000$

Diferencias Divididas

The coefficients $Q(0,0)$, ..., $Q(N,N)$ are:

16.94410000

3.10410000

0.06000000

-0.00208333

Ya que se pide interpolar en $x = 8.4$, entonces se tendrá en:

$$\begin{aligned} P_3(x) = & 16.9441 + 3.1041(x - 8.1) \\ & + 0.0600(x - 8.1)(x - 8.3) \\ & - 0.00208333(x - 8.1)(x - 8.3)(x - 8.6) \end{aligned}$$

Al sustituir se tiene que:

$$\underline{P_3(8.4) = 17.87714249998000}$$

Diferencias Divididas

>> *ALG032_DIF_DIV*

Forma del polinomio de interpolación de NEWTON

Elija el método de entrada:

- 1. Ingresar entrada por medio del teclado**
- 2. Ingresar datos desde un archivo de texto**
- 3. Generar datos usando una función F**

Escoja 1, 2, o 3 por favor

1

Ingrese n

3

Ingrese $X(0)$ y $F(X(0))$ en líneas separadas

8.1

16.9441

Ingrese $X(1)$ y $F(X(1))$ en líneas separadas

8.3

17.56492

Ingrese X(2) y F(X(2)) en líneas separadas

8.6

18.50515

Ingrese X(3) y F(X(3)) en líneas separadas

8.7

18.82091

Seleccione el tipo de salida

1. Pantalla

2. Archivo de texto

Ingrese 1 o 2

1

INTERPOLACION POLINOMIAL DE NEWTON

Los datos de entrada son:

$$X(0) = 8.10000000 \quad F(X(0)) = 16.94410000$$

$$X(1) = 8.30000000 \quad F(X(1)) = 17.56492000$$

$$X(2) = 8.60000000 \quad F(X(2)) = 18.50515000$$

$$X(3) = 8.70000000 \quad F(X(3)) = 18.82091000$$

***** **MATRIZ** *****

16.94410000

17.56492000 3.10410000

18.50515000 3.13410000 0.06000000

18.82091000 3.15760000 0.05875000 -0.00208333

Gracias por su atención !!