# UNIDAD IV

# 4.0 DERIVACIÓN E INTEGRACIÓN NUMÉRICA

## 4.4 INTEGRACION NUMERICA
## 4.5 FORMULAS DE NEWTON COTES

## 4.4 INTEGRACION NUMERICA

## 1. INTRODUCCIÓN.

Consideremos una función *f(x)* de la cual se conoce un conjunto discreto de valores $(x_0,y_0)$, $(x_1,y_1)$,.....$(x_n,y_n)$. El problema que vamos a abordar es el de calcular la derivada de la función en un punto x que en principio no tiene por qué pertenecer a los datos de que disponemos. La forma más sencilla de resolver el problema de la diferenciación numérica consiste en estimar la derivada utilizando fórmulas obtenidas mediante la aproximación de Taylor, que se denominan fórmulas de diferencias finitas.

Básicamente, en una solución por diferencias finitas, las derivadas son reemplazadas por aproximaciones en diferencias finitas, convirtiendo entonces un problema de ecuaciones diferenciales en un problema algebraico que fácilmente se puede resolver por medios comunes.

Es importante mencionar que los errores que tengan los datos, por ejemplo los cometidos en la adquisición de los mismos o los debidos al redondeo aumentan en el proceso de diferenciación.

## 2. OBJETIVO.

En los objetivos para esta clase tenemos: el comparar los métodos de integración numérica y otros métodos en base a los criterios de eficiencia, precisión y tolerancia.

## 3. INTEGRACIÓN NUMÉRICA

Para evaluar la integral definida de una función se usa el método llamado: "Cuadratura Numérica"

Que usa $\sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i) = a_0 f(x_0) + a_1 f(x_1) + \ldots + a_n f(x_n)$

para aproximar a $\int_a^b f(x)dx$

Sean $\{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ un conjunto de nodos distintos en el intervalo $[a,b]$. Si se integra el polinomio :

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x) \\ &= f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + \ldots + f(x_n)L_n(x) \end{aligned}$$

Y su término de error de truncamiento en $[a,b]$ se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \int_a^b \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x) dx + \int_a^b \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} dx \\ &= \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i) + \frac{1}{(n+1)!} \int_a^b \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)\, f^{(n+1)}(\xi(x)) dx \end{aligned}$$

donde:

$a \le \xi(x) \le b$ y

$\boxed{a_i = \int_a^b L_i(x)\,dx}$, para cada $i = 0, 1, \cdots, n$

Por lo tanto la fórmula de cuadratura es:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i) = a_0 f(x_0) + a_1 f(x_1) + \ldots + a_n f(x_n)}$$

El error asociado viene dado por:

$$E(f) = \frac{1}{(n+1)!} \int_a^b \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)\, f^{(n+1)}(\xi(x)) dx$$

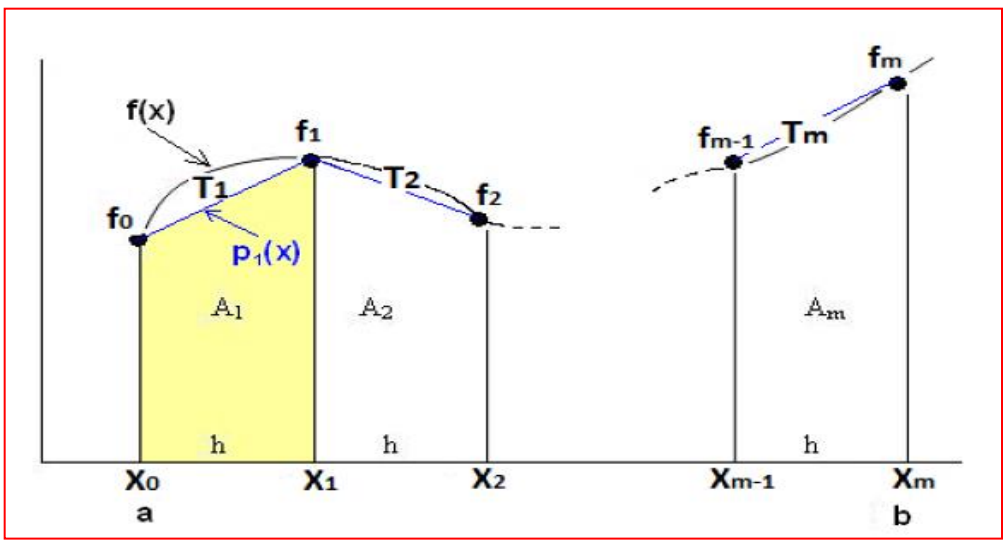
La fórmula que surge de usar el primer Polinomio de Lagrange con nodos igualmente espaciados recibe el nombre de "Regla del Trapecio"

La fórmula que surge de usar el segundo Polinomio de Lagrange con nodos igualmente espaciados recibe el nombre de "Regla de Simpson".

## FÓRMULAS DE INTEGRACIÓN

REGLA DEL TRAPECIO: Con $h = x_1 - x_0$

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + f(x_1)\right] - \frac{h^3}{12} f''(\xi) \quad \text{con } x_0 < \xi < x_1$$



REGLA DE SIMPSON:

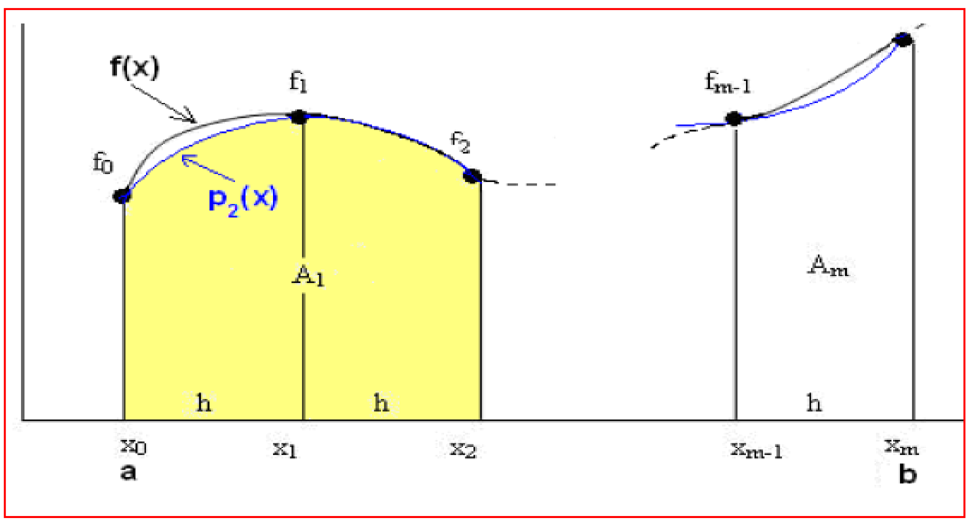
$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \frac{h}{3}\left[ f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right] - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi)$$

con $x_0 < \xi < x_2$

y

$$h = \frac{b-a}{2}, \qquad a = x_0, \qquad b = x_2,$$

$$h = x_2 - x_1 = x_1 - x_0.$$




EJEMPLO:

Use la Regla del trapecio y la Regla de Simpson para calcular las integrales de las siguientes funciones en el intervalo de [0,2]:

| $f(x)$ | $x^2$ | $x^4$ | $\frac{1}{(x+1)}$ | $\sqrt{1+x^2}$ | $\sin(x)$ | $\exp(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *Valor Exacto* | 2.667 | 6.4 | 1.099 | 2.958 | 1.416 | 6.389 |

$$Trapecio: \int_0^2 f(x)dx \approx \frac{2}{2}[f(0)+f(2)]$$

$$Simpson: \int_0^2 f(x)dx \approx \frac{1}{3}[f(0)+4f(1)+f(2)]$$

| $f(x)$ | $x^2$ | $x^4$ | $\frac{1}{(x+1)}$ | $\sqrt{1+x^2}$ | $\sin(x)$ | $\exp(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *Valor Exacto* | 2.667 | 6.4 | 1.099 | 2.958 | 1.416 | 6.389 |
| *Trapecio*: | 4 | 16 | 1.333 | 3.236 | 0.909 | 8.389 |
| *Simpson*: | 2.667 | 6.667 | 1.111 | 2.964 | 1.421 | 6.421 |

<u>Definición de Precisión de una fórmula de Cuadratura:</u>

El grado de exactitud o precisión de una fórmula de cuadratura es el entero positivo más grande *n*, tal que la fórmula sea exacta para $x_k$, cuando $k=0,1,2,\ldots,n$.

Según esta definición la regla del <u>Trapecio</u> tiene el grado de precisión <u>uno</u> .

La regla de <u>Simpson</u> tiene el grado de precisión <u>tres</u>.

Dado que la integración y la suma son operaciones lineales.

El grado de precisión de una fórmula de cuadratura será *n, y* el error *E(P(x)) = 0* para todos los polinomios *P(x)* de grado *k=0,...,n* pero *E(P(x))≠0* para algún *P(x)* de grado *n+1*.

## 4.5 FORMULAS DE NEWTON COTES

Son los tipos de integración numérica más comunes, su estrategia es remplazar a la función complicada o de datos tabulados por un polinomio de aproximación que es fácil de integrar.

Es decir supongamos que nos interesa determinar $I = \int_a^b f(x)\,dx$ ; entonces, tenemos:

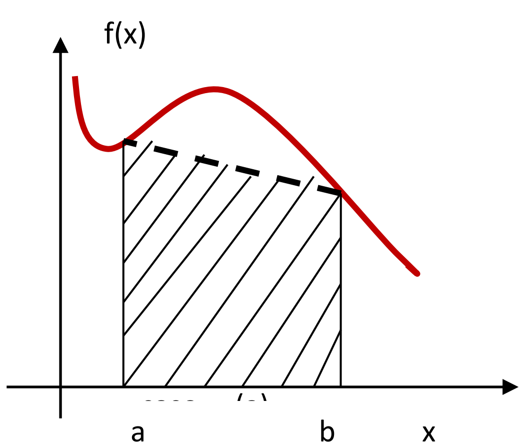
$$I = \int_a^b f(x) \cong \int_a^b p_n(x)dx,$$

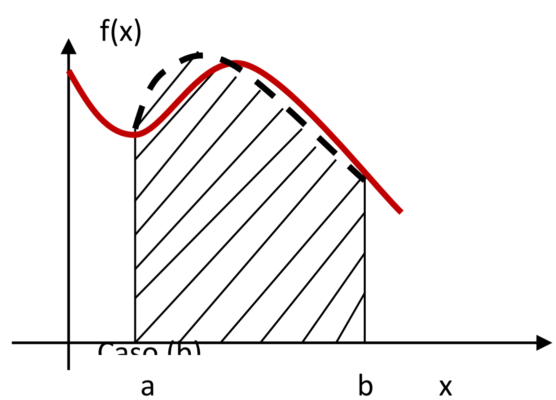
En donde $p_n(x)$ es el polinomio aproximación :

$$p_n(x) = a_0x + a_1x^2 + a_2x^n + \cdots + a_nx^n,$$

Donde *n* es el grado del polinomio el método en estudio lo realiza en general en dos pasos.

Observemos que cuando el polinomio de aproximación es lineal se trata de una línea recta como observamos en el caso (a) y cuando se trata de un polinomio de segundo orden tenemos el caso (b)

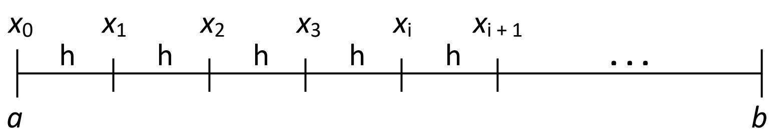


En otros términos:

**Primero:** Dividir el intervalo [*a*, *b*] en "*n*" intervalos de igual magnitud en donde sus valores extremos son:

$x_i = x_0 + i\left(\frac{b-a}{n}\right), i = 0,1,2, \dots, n,$ siendo $x_0 = a;\ \ x_n = b,$ (1)




**Segundo:** Se aproxima *f* (*x*) por un polinomio de grado "*n*", $P_n$ (*x*) y se integra para obtener la aproximación de f(x).

## 1. OBJETIVO.

En los objetivos para esta clase tenemos: Comparar los métodos de integración numérica y Newton Cotes en base a los criterios de eficiencia, precisión y tolerancia y analizar una muestra de datos empleando cada uno de los métodos de integración numérica y Newton Cotes.

## 2. FORMULAS DE NEWTON COTES

Las fórmulas de Newton-Cotes se pueden clasificar en abiertas y cerradas. Las formulas del trapecio y de Simpson son casos particulares de las formulas cerradas. En ellas se aproxima la integral en el intervalo [$x_0$, $x_m$] usando el polinomio de interpolación, de grado menor o igual a m, construido a partir de los puntos ($x_0$, $y_0$), (*x1, y1*), ..., (*xm*−*1, ym*−*1*), (*xm, ym*), igualmente espaciados en x.

$$\int_{x_0}^{x_m} f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_m} p_m(x)dx.$$

Las reglas del Trapecio y Simpson, son casos del Método llamado **Fórmula de Newton-Cotes**.

Existen dos categorías de fórmulas de Newton-Cotes: Abiertas y Cerradas.

Las fórmulas **cerradas** incluyen los extremos del intervalo **[*a*,*b*]** como parte de los nodos.

La fórmula cerrada de $(n+1)$ puntos de Newton-Cotes utiliza los nodos $x_i = x_0 + ih$ para $i = 0, 1, \cdots, n$ donde $x_0 = a, \quad x_n = b, \quad$ y $\quad h = \frac{(b-a)}{n}$

Entonces $\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i)$

donde $a_i = \int_{x_0}^{x_n} L_i(x)dx = \int_{x_0}^{x_n} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} dx$

El siguiente teorema detalla el análisis de error asociado a las fórmulas cerradas para el método llamado newton Cotes :

Teorema : Supongamos que $\sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i)$ denota la fórmula cerrada de $(n+1)$ puntos de Newton - Cotes con $x_0 = a$, $x_n = b$ y $h = \frac{(b-a)}{n}$. Existe un $\xi \in (a,b)$ para el cual

Si n es par y si $f \in C^{n+2}[a,b]$

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i) + \frac{h^{n+3} f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!}\int_0^n t^2 (t-1)(t-2)\cdots(t-n)\,dt$$

Y Si n es impar y si $f \in C^{n+1}[a,b]$

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i) + \frac{h^{n+2} f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\int_0^n t(t-1)(t-2)\cdots(t-n)\,dt$$

Nótese que, cuando $n$ es un entero par, el grado de precisión es $n+1$ aunque el polinomio de interpolación es a lo sumo de grado *n*.
En el caso que $n$ es impar el grado de precisión es *n*.

Fórmulas cerradas más comunes de Newton-Cotes:

**n = 1**, Regla del Trapecio:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left[ f(x_0) + f(x_1)\right] - \frac{h^3}{12} f''(\xi) \quad \text{con } x_0 < \xi < x_1$$

**n = 2**, Regla de Simpson:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[ f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right] - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi) \quad \text{con } x_0 < \xi < x_2$$

**n = 3**, Regla de $\frac{3}{8}$ de Simpson:

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)\,dx = \frac{3h}{8}\left[ f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)\right] - \frac{3h^5}{80} f^{(4)}(\xi)$$

con $x_0 < \xi < x_3$

**n = 4**

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x)dx = \frac{2h}{45}\left[7f(x_0)+32f(x_1)+12f(x_2)+32f(x_3)+7f(x_4)\right]$$
$$-\frac{8h^7}{945}f^{(6)}(\xi) \quad \text{donde } x_0<\xi<x_4$$

La fórmula abierta de $(n+1)$ puntos de Newton - Cotes utiliza los nodos $x_i = x_0 + ih$ para $i = 0,1,\cdots,n$ donde $x_0 = a+h,\quad x_n = b-h,\quad$ y $\quad h = \dfrac{(b-a)}{n+2}$

Y para los extremos se tiene $x_{-1} = a$ y $x_{n+1} = b$

Las fórmulas <u>abiertas</u> contienen todos los nodos usados para hacer las aproximaciones dentro del intervalo abierto *(a,b)*. Las fórmulas se convierten en:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_{-1}}^{x_{n+1}} f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i) \quad \text{donde una vez más}$$

$$a_i = \int_a^b L_i(x)dx$$

Teorema : Supongamos que $\sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i)$ denota la fórmula abierta de $(n+1)$ puntos de Newton - Cotes con $x_{-1} = a$, $x_{n+1} = b$ y $h = \dfrac{(b-a)}{n+2}$. Existe un $\xi \in (a,b)$ para el cual

Si $n$ es par y si $f \in C^{n+2}[a,b]$

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i) + \frac{h^{n+3} f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!} \int_{-1}^{n+1} t^2(t-1)(t-2)\cdots(t-n)dt$$

Y Si $n$ es impar y si $f \in C^{n+1}[a,b]$

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i) + \frac{h^{n+2} f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \int_{-1}^{n+1} t(t-1)(t-2)\cdots(t-n)dt$$

**n = 0**, Regla del Punto Medio:

$$\int_{x_{-1}}^{x_1} f(x)\,dx = 2h\left[f(x_0)\right] + \frac{h^3}{3} f''(\xi) \quad \text{con } x_{-1} < \xi < x_1$$

**n = 1**:

$$\int_{x_{-1}}^{x_2} f(x)\,dx = \frac{3h}{2}\left[f(x_0) + f(x_1)\right] + \frac{3h^3}{4} f''(\xi) \quad \text{con } x_{-1} < \xi < x_2$$

**n = 2**:

$$\int_{x_{-1}}^{x_3} f(x)\,dx = \frac{4h}{3}\left[2f(x_0) - f(x_1) + 2f(x_2)\right] + \frac{14h^5}{45} f^{(4)}(\xi)$$

con $x_{-1} < \xi < x_3$

**n = 3**

$$\int_{x_{-1}}^{x_4} f(x)dx = \frac{5h}{24}\left[11f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + 11f(x_3)\right]$$

$$+\frac{95h^5}{144} f^{(4)}(\xi) \quad \text{donde } x_{-1} < \xi < x_4$$

Ejercicio: Aplicar las fórmulas abiertas y cerradas para ***n***=0,1,2,3 y 4 para aproximar:

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} Sin(x)dx = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.29289322$$

| n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| **Cerradas** | N/A | 0.27768018 | 0.29293264 | 0.2929107 | 0.29289318 |
| **Error** | | 0.01521303 | 0.00003942 | 0.00001748 | 0.0000004 |
| **Abiertas** | 0.30055887 | 0.29798754 | 0.29285866 | 0.29286923 | N/A |
| **Error** | 0.00766565 | 0.00509432 | 0.00003456 | 0.00002399 | |

El algoritmo en funcionamiento seria como a continuación se muestra:

> newtoncot

APROXIMACION DE INTEGRALES MEDIANTE NEWTON-COTES

Recuerde que:

En las formulas cerradas,

si n=1: Regla trapezoidal,

si n=2: De Simpson,

si n=3: Regla de tres octavos de Simpson.

En las formulas abiertas,

si n=0: Regla del punto medio.

Ingrese el tipo de formula

1. Cerrada

2. Abierta

1

Ingrese n (entre 1 y 4):

3

Ingrese x0:

0

Ingrese x3:

pi/4

Ingrese f(x) en terminos de x:

Por ejemplo: sin(x)

'sin(x)'

Seleccione el tipo de salida

1. En pantalla

2. En archivo de texto

3. En pantalla y archivo de texto:  1

*** Aproximaciones con algunas fórmulas abiertas y cerradas de Newton-Cotes ***

Formula cerrada con ***n* = 3**

Aproximación = 2.9291070255e-001

Error  = 1.7483735719e-005

## 3. ENLACES SUGERIDOS

https://metodosnumericosisc.wikispaces.com/UNIDAD+4.-+Diferenciaci%C3%B3n+e+integraci%C3%B3n+num%C3%A9ricas.

https://es.wikipedia.org/wiki/F%C3%B3rmulas_de_Newton%E2%80%93Cotes

## 4. BIBLIOGRAFÍA

- Análisis Numérico, *Richard L. Burden/J. Douglas Faires*, Editorial Thomson Learning Inc.
- Métodos Numéricos Con SCILAB, Héctor Manuel Mora Escobar, Abril 2010

## 5. GLOSARIO

## 6. PREGUNTAS DE AUTOEVALUACIÓN

1. ¿En qué consiste el método del trapecio?

2. ¿En qué consiste el método de Simpson?

3. ¿Cuál método de los anteriores es mejor y porque?

4. ¿Cuáles son sus fórmulas, que son las que se utilizan en el algoritmo?

5. ¿ Las fórmulas de Newton-Cotes se pueden clasificar en :?

6. ¿ Cuáles son las fórmulas cerradas más comunes de Newton-Cotes :?

7. ¿Mencionar una característica de las fórmulas abiertas?