UNIDAD II

2.6 MÉTODO DEL PUNTO FIJO MODIFICADO Y
2.7 MÉTODO DE PUNTO FIJO Y MÉTODO DE NEWTON
2.8 MÉTODO DE NEWTON MODIFICADO

1. INTRODUCCIÓN

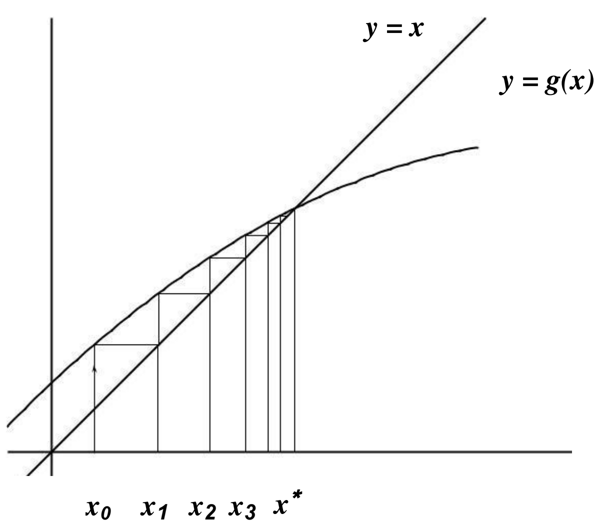
Para comprender mejor este material de clase debemos retomar el siguiente Teorema, que define el método del punto Fijo:

Teorema. *Sea g continuamente diferenciable en el intervalo* [*a, b*]*, tal que*

$$g([a, b]) \subseteq [a, b],$$

$$|g'(x)| < 1, \text{ para todo } x \in [a, b].$$

Entonces existe un único x^* *en* [a, b] *solución de* $x = g(x)$ *y la iteración de punto fijo converge a* x^* *para todo* $x_0 \in [a, b]$



Método de punto fijo (a)

2. OBJETIVO

Definir y Comparar el método matemáticos del método del punto fijo con el modificado, así también el método de Newton con el Punto Fijo.

3. 2.6 MÉTODO DEL PUNTO FIJO MODIFICADO

La convergencia del método de punto fijo se puede tratar de mejorar re-tomando las ideas del método de la secante. Consideremos la ecuación $x = g(x)$ y los puntos $(x_i, g(x_i)), (x_j , g(x_j))$, sobre la gráfica de g.

Es-tos puntos pueden provenir directamente o no del método de punto fijo.

Es decir, se puede tener que $x_{i+1} = g(x_i)$ y que $x_{j+1} = g(x_j)$, pero lo anterior no es obligatorio.

La idea consiste simplemente en obtener la ecuación de la recta que pasa por esos dos puntos y buscar la intersección con la recta y = x.

La abscisa del punto dar´ un nuevo valor x_k..

$$y = mx + b$$

$$m = \frac{g(xj) - g(xi)}{x_j - x_i}$$

$$g(x_i) = mx_i + b$$

$$b = g(x_i) - mx_i$$

$$x_k = mx_k + b$$

$$x_k = b/(1-m)$$

Ahora se usan los puntos $(x_j , g(x_j)), (x_k , g(x_k)),$ para obtener un nuevo x_m, y así sucesivamente. Usualmente, $j = i + 1$ y $k = j + 1$.

A continuación se muestra el programa del Método del Punto Fijo, como una base para que sea adecuado por parte del estudiante al método del punto fijo modificado y probarlo ya que será un contenido a evaluarse.

% PROGRAMA DE ITERACION DEL METODO DEL PUNTO FIJO
%
% Para encontrar una solución a $p = g(p)$, dada una

```
% aproximación inicial p0
%
% ENTRADA: Aproximación inicial p0; tolerancia TOL;
%         máximo numero de iteraciones NO.
%
% SALIDA: solución aproximada de p o un mensaje
%        un mensaje de que el método fallo.
syms('OK', 'P0', 'TOL', 'NO', 'BANDERA', 'NOMBRE', 'OUP', 'I', 'P');
syms('x','s');
TRUE = 1;
FALSE = 0;
fprintf(1,'Este es el Método del Punto Fijo.\n');
fprintf(1,'Ingrese la función G(x) en términos de x\n');
fprintf(1,'Por ejemplo: cos(x) \n');
s = input(' ');
G = inline(s,'x');
OK = FALSE;
fprintf(1,'Ingrese la aproximación inicial\n');
P0 = input(' ');
while OK == FALSE
      fprintf(1,'Ingrese tolerancia\n');
      TOL = input(' ');
      if TOL <= 0
          fprintf(1,'Tolerancia debe ser positiva\n');
      else
          OK = TRUE;
      end
end
OK = FALSE;
     while OK == FALSE
        fprintf(1,'Ingrese el máximo numero de iteraciones - sin punto decimal\n');
        NO = input(' ');
        if NO <= 0
                fprintf(1,'Debe ser un entero positivo\n');
        else
          OK = TRUE;
     end
end
if OK == TRUE
          fprintf(1,'Seleccione el destino de la salida\n');
          fprintf(1,'1. Pantalla\n');
          fprintf(1,'2. Archivo de Texto\n');
```

```
        fprintf(1,'Digite 1 o 2\n');
        BANDERA = input(' ');
        if BANDERA == 2
                fprintf(1,'Ingrese el nombre del archivo de la forma - Unidad:\\nombre.ext\n');
                fprintf(1,'Por ejemplo:   A:\\SALIDA.DTA\n');
                NOMBRE = input(' ','s');
                OUP = fopen(NOMBRE,'wt');
        else
               OUP = 1;
end
```

4. 2.7 MÉTODO DE PUNTO FIJO Y MÉTODO DE NEWTON

Supongamos que c = 6, 0 es una constante y que x^* es solución de la ecuación $f(x) = 0$. Esta se puede reescribir

$$0 = c\,f(x),$$
$$x = x + c\,f(x) = g(x).$$

Si se desea resolver esta ecuación por el método de punto fijo, la convergencia es más rápida cuando $g'(x^*) = 0$, o sea,

$$1 + c\,f'(x^*) = 0,$$
$$c = -\frac{1}{f'(x^*)}$$

Entonces al aplicar el método de punto fijo a se tiene la formula

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x^*)}$$

Para aplicar esta fórmula se necesitaría conocer $f'(x^*)$ e implícitamente el valor de x^*, que es precisamente lo que se busca. La fórmula del método de Newton , puede ser vista simplemente como la utilización y reemplazando $f'(x^*)$ por la mejor aproximación conocida en ese momento: $f'(x_k)$.

2.8 MÉTODO DE NEWTON MODIFICADO

4. INTRODUCCIÓN

El método de Newton modificado consiste en aplicar el método de Newton univariable dos veces (para el caso de un sistema de n ecuaciones no lineales con n incógnitas, se aplicará n veces), un para cada variable.

Cuando la cantidad de raíces es impar, la función cruza al eje; cuando la cantidad es par, no lo cruza. Una raíz múltiple corresponde a un punto donde una función es tangencial al eje x, y varios valores de x hacen que *f(x)* sea cero.

El Método de Newton es ampliamente utilizado para encontrar las raíces de la ecuación *f(x)=0*, ya que converge rápidamente, la contra es que uno debe conocer la derivada de *f(x)* y se necesita una aproximación inicial a la raíz.

Permite aproximar las primeras *n* iteraciones en el método de Newton- modificado aplicado a la función f tomando como aproximación inicial x_0 . Observe que no requiere construir la función M definida en el método de Newton modificado.

5. OBJETIVO

Identificar las variantes de mejora entre el método de Newton modificado. Analizar una muestra de datos empleando cada los métodos matemáticos para este método.

6. MÉTODO DE NEWTON MODIFICADO

La dificultad del método de Newton Raphson mejorado en el comportamiento de una función con raíces múltiples obliga a considerar una modificación del método discutido por Ralston. Como primero se desean encontrar las raíces de una función *f(x).* Definimos una función nueva *U(x),* dada por:

$$U(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Se observa que la función *U(x)* tiene las mismas raíces que *f(x),* entonces *U(x)* se vuelve cero en cualquier punto que *f(x)* es cero.

Suponiendo ahora que *f(x)* tiene una raíz múltiple en x = c de multiplicidad *r*. Esto podría ocurrir, por ejemplo, si *f(x)* contiene un factor *(x-c).*

Entonces, podría fácilmente demostrarse que *U(x)* tiene una raíz en *x = c* de multiplicidad r, o una raíz simple. Puesto que el método de Newton es efectivo para raíces simples, podemos aplicar el método de Newton para resolver U(x) en lugar de *f(x).*

De esta manera, la ecuación recursiva de este método queda:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{U(x_n)}{U'(x_n)}$$

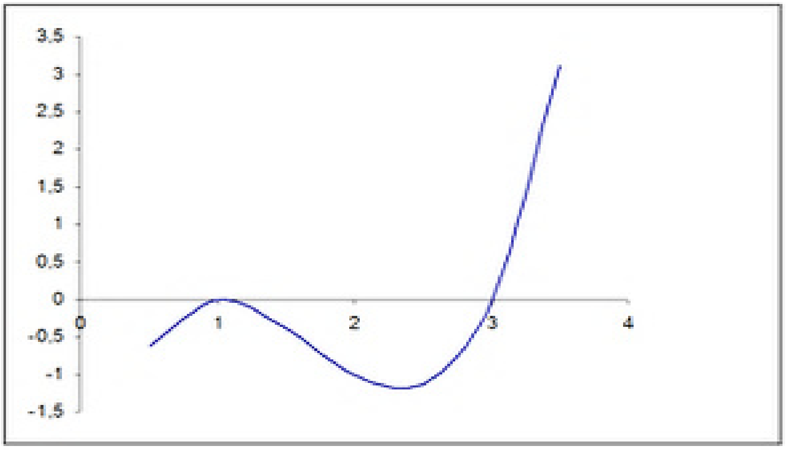
Derivando la función auxiliar *U(x)* queda:

$$U'(x) = 1 - \frac{f(x_n).f''(x)}{\left[f'(x)\right]^2}$$

Esto puede producir convergencia en alguno de los arreglos y divergencia en el otro es posible saber de antemano si la primera o la segunda forma convergirán para el caso de sistemas de dos ecuaciones, pero cuando 3 <= *n* las posibilidades son varias (*n!*) y es imposible conocer cuál de estos arreglos tiene viabilidad de convergencia, por lo cual la elección se convierte en un proceso aleatorio.

Esta aleatoriedad es la mayor desventaja de este método.

Para una ecuación polinómica de grado *n*, se tienen *n* raíces (entre complejas y reales).



- Se dice que hay una raíz doble, cuando 2 términos de la ecuación son iguales a cero a un valor de x.
- Se dice que hay una raíz triple, cuando 3 términos de la ecuación son iguales a cero a un valor de x.

Cuando la cantidad de raíces es impar, la función cruza al eje; cuando la cantidad es par, no lo cruza.

"Una raíz múltiple corresponde a un punto donde una función es tangencial al eje x, y varios valores de x hacen que f(x) sea cero."

$$X_{i+1} = X_i - \frac{f(X_i) f'(X_i)}{[f'(X_i)]^2 - f(X_i) f''(X_i)}$$

Para este método en particular son necesarios los siguientes parámetros:

1) *xi*
2) *f(Xi)*
3) *f'(Xi)*
4) *f''(Xi)*

Ya que este método está significativamente relacionado con el método de Newton-Raphson, cuando la derivada tiende a cero, tiene problema con la convergencia.

Cuando se tiene existencia de raíces múltiples, tanto el método de Newton-Raphson como el de la secante convergen linealmente.

ALGORITMO

1.- Inicio.
2.- Pedir la función al usuario.
3.- Pedir el valor inicial.
4.- Pedir el porcentaje de error.
5.- El usuario deberá seleccionar el método con el que se calculara la raíz (Newton-Raphson o Newton-Raphson mejorado).
6.- Se guardaran en el programa los valores de entrada.
7.- El programa calculara la primera derivada y la segunda derivada.
8.- Dependiendo de la elección para calcular la raíz, graficara la función desde un intervalo a otro.
9.- Los cálculos seguirán hasta que l error aproximado sea menor que el error limite, y la raíz se imprimirá.
10.- Fin

EJEMPLO DE CÓDIGO DE NEWTON MODIFICADO EN MATLAB

```
%  Método de Newton Modificado

clear;

clc;
fprintf('\n metodo de Newton Rapson Modificado\n\n');
funcion=input('Dame la funcion f(x) : ','s');
dfuncion=input('Dame la derivada de funcion f(x) : ','s');
d2funcion=input('Dame la segunda derivada de función f(x) : ','s');
xi=input('Dame el valor inicial de x : ');
e=input('Dame el porciento del error : ');
ea=1000;
c=1;
x=xi;
while ea>e
  g=eval(funcion);
```

```
     h=eval(dfuncion);
     k=eval(d2funcion);
     j=x-(g*h)/(h^(2)-(g*k));
    ea=abs((j-x)/j*100);
    x=j;
    c=c+1;
  end
  fprintf('\n\n\n\nLa raiz exacta es: %d',j)
  fprintf('\n\nNumero de iteraciones: %d',c);
```

7. ENLACES SUGERIDOS

- https://es.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9todo_de_Newton

8. BIBLIOGRAFÍA

- Análisis Numérico, *Richard L. Burden/J. Douglas Faires*, Editorial Thomson Learning Inc.
- Métodos Numéricos Con SCILAB, Héctor Manuel Mora Escobar, Abril 2010

9. GLOSARIO

10. PREGUNTAS DE AUTOEVALUACIÓN

1. ¿El método modificado del punto fijo se basa en el método de?
2. ¿En el método del Punto Fijo y Newton, cuál es su similitud?
3. A su criterio cual puede ser una dificultad o desventaja en este método de Newton Modificado?
4. ¿La mayor ventaja del método a su criterio en Newton Modificados es?

UNIDAD II

2.6 MÉTODO DEL PUNTO FIJO MODIFICADO Y
2.7 MÉTODO DE PUNTO FIJO Y MÉTODO DE NEWTON
2.8 METODO DE NEWTON MODIFICADO

1. PREGUNTAS DE AUTOEVALUACIÓN

1. ¿El método modificado del punto fijo se basa en el método de?

   Respuesta: El método de la secante. la ecuación de la recta que pasa por esos dos puntos y buscar la intersección con la recta $y = x$

2. ¿En el método del Punto Fijo y Newton, cuál es su similitud?

   Respuesta: en la ecuaciones $0 = cf(x)$, $x = x + cf(x) = g(x)$, al resolver esta ecuación por el método de punto fijo, la convergencia es más rápida cuando $g'(x*) = 0$, que es un elemento importante de Newton, para acelerar la convergencia y que conlleva a su fórmula.

3. A su criterio cual puede ser una dificultad o desventaja en este método de Newton Modificado?
   Respuesta: Una dificulta es , el obtener o calcular la segunda derivada de una función dada, que a veces resulta difícil su obtención o no la tiene.

4. ¿La mayor ventaja del método de newton modificado a su criterio es?

   Respuesta: Es más rápido su convergencia, en mucho mayar que el método normal de Newton.