



UNIDAD II

MÉTODOS ITERATIVOS PARA LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES NO LINEALES Y ACELERACIÓN DE LA CONVERGENCIA

2.1 SOLUCIÓN DE ECUACIONES NO LINEALES

2.2 MÉTODO DE NEWTON

1. INTRODUCCIÓN

Uno de los problemas en matemáticas consiste en resolver una ecuación, es decir, encontrar un valor $x^* \in \mathbb{R}$ que satisfaga $f(x) = 0$, donde f es una función de variable y valor real, es decir,

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Este x^* se llama solución de la ecuación $f(x) = 0$

Pero también se le conoce como “raíz” o “cero” de la ecuación. f debe ser continua en el intervalo donde se busca la solución. Algunos métodos requieren que f sea derivable. A continuación se muestran algunos ejemplos de ecuaciones No Lineales.

Lo mínimo que se le exige a f es que sea continua. Si no es continua en todo \mathbb{R} , por lo menos debe ser continua en un intervalo $[a, b]$ donde se busca la raíz.

Algunos métodos requieren que f sea derivable. Para la aplicación de algunos teoremas de convergencia, no para el método en sí, se requieren derivadas de orden superior.

Los métodos generales de solución de ecuaciones sirven únicamente para hallar **raíces reales**. Algunos métodos específicos para polinomios permiten obtener raíces complejas.

Los métodos presuponen que la ecuación $f(x) = 0$ tiene solución. Es necesario, antes de aplicar mecánicamente los métodos,

- 1) **Estudiar la función (Analizar)**
- 2) **Averiguar si tiene raíces (Graficar)**
- 3) **Ubicarlas aproximadamente (Método)**

En algunos casos muy difíciles no es posible hacer un análisis previo de la función, entonces hay que utilizar de manera mecánica uno o varios métodos, pero sabiendo que podrían ser



ineficientes o, simplemente, no funcionar. La mayoría de los métodos parten de x_0 , aproximación inicial de x^* , a partir del cual se obtiene x_1 .

A partir de x_1 se obtiene x_2 , después x_3 , y así sucesivamente se construye la sucesión $\{x_k\}$ con el objetivo, no siempre cumplido, de que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$$

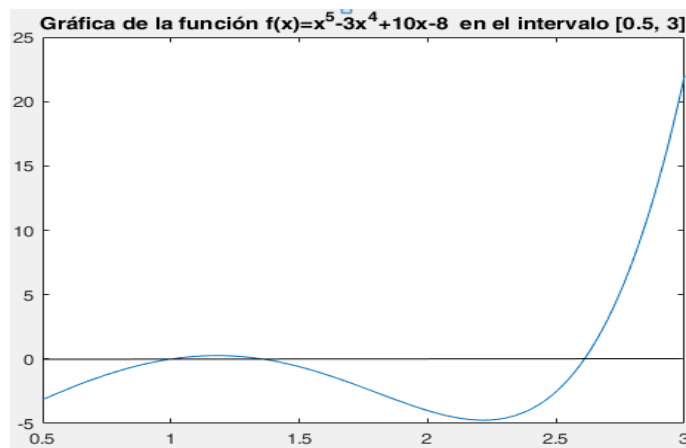
El proceso anterior es teóricamente infinito, y obtendría la solución después de haber hecho un número infinito de cálculos. En la práctica el proceso se detiene cuando se obtenga una aproximación suficientemente buena de x^* . Esto querría decir que el proceso se detendría cuando :

$$|x_k - x^*| \leq \varepsilon$$

Para un ε dado. El anterior criterio supone el conocimiento de x^* , que es justamente lo buscado. Entonces se utiliza el criterio, 'este si aplicable,

$$|f(x_k)| \leq \varepsilon$$

En la mayoría de los casos, cuanto más cerca está x_0 de x^* , más rápidamente se obtendrá una buena aproximación de x^*



En análisis numérico, el método de Newton (conocido también como el método de Newton-Raphson o el método de Newton-Fourier) es un algoritmo eficiente para encontrar aproximaciones de los ceros o raíces de una función real. También puede ser usado para encontrar el máximo o mínimo de una función, encontrando los ceros de su primera derivada.

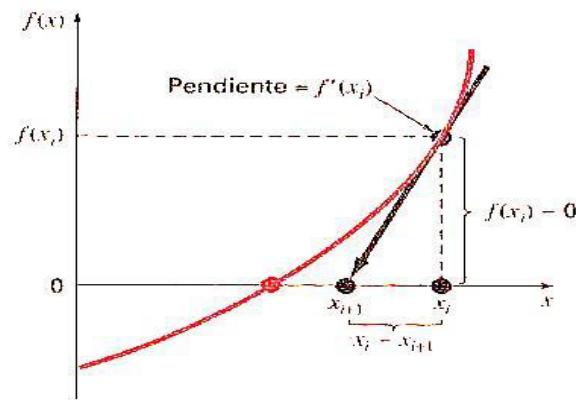
Entre los métodos de aproximaciones sucesivas para encontrar algunas de las raíces de una ecuación algebraica o trascendente, el de Newton-Raphson es el que presenta mejores

características de eficiencia, debido a que casi siempre converge a la solución y lo hace en un número reducido de iteraciones.

Este método es aplicable tanto en ecuaciones algebraicas como trascendentes y con él es posible obtener raíces complejas.

Tal vez, de las fórmulas para localizar raíces, la fórmula de Newton-Raphson sea la más ampliamente utilizada. Si el valor inicial para la raíz es x_i , entonces se puede trazar una tangente desde el punto $[x_i, f(x_i)]$ de la curva. Por lo común, el punto donde esta tangente cruza el eje x representa una aproximación mejorada de la raíz.

El método de Newton-Raphson se deduce a partir de esta interpretación geométrica.



El método de Newton-Raphson, como todos los de aproximaciones sucesivas, parte de una primera aproximación y mediante la aplicación de una fórmula de recurrencia se acercara a la raíz buscada, de tal manera que la nueva aproximación se localiza en la intersección de la tangente a la curva de la función en el punto y el eje de las abscisas.

De la figura se tiene que la primera derivada en x es equivalente a la pendiente:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - 0}{x_i - x_{i+1}} \quad \text{Que se reordena para obtener:}$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \quad \text{La cual se conoce como fórmula de Newton-Raphson.}$$

Historia



El método de Newton fue descrito por Isaac Newton en *De analysi per aequationes número terminorum infinitas* (escrito en 1669, publicado en 1711 por William Jones) y en *De methodis fluxionum et serierum infinitarum* (escrito en 1671, traducido y publicado como Método de las fluxiones en 1736 por John Colson). Sin embargo, su descripción difiere en forma sustancial de la descripción moderna presentada más arriba: Newton aplicaba el método solo a polinomios, y no consideraba las aproximaciones sucesivas x_n , sino que calculaba una secuencia de polinomios para llegar a la aproximación de la raíz x . Finalmente, Newton ve el método como puramente algebraico y falla al no ver la conexión con el cálculo.

Isaac Newton probablemente derivó su método de forma similar aunque menos precisa del método de François Viète. La esencia del método de Viète puede encontrarse en el trabajo del matemático persa Sharaf al-Din al-Tusi.

El método de Newton-Raphson es llamado así por el matemático inglés Joseph Raphson (contemporáneo de Newton) se hizo miembro de la Royal Society en 1691 por su libro "Aequationum Universalis", publicado en 1690, que contenía este método para aproximar raíces. Newton en su libro Método de las fluxiones describe el mismo método, en 1671, pero no fue publicado hasta 1736, lo que significa que Raphson había publicado este resultado 46 años antes. Aunque no fue tan popular como los trabajos de Newton, se le reconoció posteriormente.

2. OBJETIVO DE LA UNIDAD

Analizar y Aplicar los algoritmos correctamente para la solución de las ecuaciones no lineales en una variable y establecer conveniencias de utilización de los diferentes métodos de solución.

3. MÉTODO DE NEWTON

Es un método abierto, en el sentido de que su convergencia global no está garantizada. La única manera de alcanzar la convergencia es seleccionar un valor inicial lo suficientemente cercano a la raíz buscada. Así, se ha de comenzar la iteración con un valor razonablemente cercano al cero (denominado punto de arranque o valor supuesto). La relativa cercanía del punto inicial a la raíz depende mucho de la naturaleza de la propia función; si ésta presenta múltiples puntos de inflexión o pendientes grandes en el entorno de la raíz, entonces las probabilidades de que el algoritmo diverja aumentan, lo cual exige seleccionar un valor supuesto cercano a la raíz. Una vez que se ha hecho esto, el método linealiza la función por la recta tangente en ese valor supuesto. La abscisa en el origen de dicha recta será, según el método, una mejor aproximación de la raíz que el valor anterior. Se realizarán sucesivas iteraciones hasta que el método haya convergido lo suficiente.



Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ función derivable definida en el intervalo real $[a, b]$. Empezamos con un valor inicial x_0 y definimos para cada número natural n

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \quad \text{Donde } f' \text{ denota la } \underline{\text{derivada}} \text{ de } f.$$

Nótese que el método descrito es de aplicación exclusiva para funciones de una sola variable con forma analítica o implícita conocida. Existen variantes del método aplicables a sistemas discretos que permiten estimar las raíces de la tendencia, así como algoritmos que extienden el método de Newton a sistemas multivariados, sistemas de ecuaciones, etc.

Obtención del Algoritmo

Tres son las formas principales por las que tradicionalmente se ha obtenido el algoritmo de Newton-Raphson.

La primera de ellas es una simple interpretación geométrica. En efecto, atendiendo al desarrollo geométrico del método de la secante, podría pensarse en que si los puntos de iteración están lo suficientemente cerca (a una distancia infinitesimal), entonces la secante se sustituye por la tangente a la curva en el punto. Así pues, si por un punto de iteración trazamos la tangente a la curva, por extensión con el método de la secante, el nuevo punto de iteración se tomará como la abscisa en el origen de la tangente (punto de corte de la tangente con el eje X). Esto es equivalente a linealizar la función, es decir, f se reemplaza por una recta tal que contiene al punto $(x_0, f(x_0))$ y cuya pendiente coincide con la derivada de la función en el punto, $f'(x_0)$. La nueva aproximación a la raíz, x_1 , se logra de la intersección de la función lineal con el eje X de abscisas. Matemáticamente:

$$f'(x_n) = \frac{f(x_n)}{x_n - x_{n+1}}$$

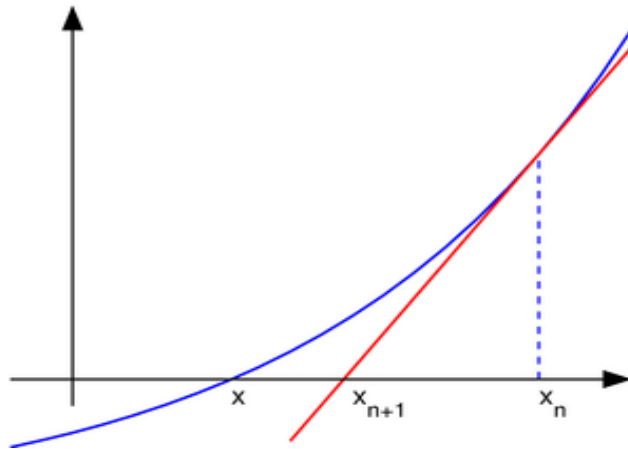


Ilustración de una iteración del método de Newton (la función f se muestra en azul y la línea de la tangente en rojo). Vemos que x_{n+1} es una aproximación mejor que x_n para la raíz x de la función f .

En la ilustración adjunta del método de Newton se puede ver que x_{n+1} es una mejor aproximación que x_n para el cero (x) de la función f .

Una forma alternativa de obtener el algoritmo es desarrollando la función $f(x)$ en serie de Taylor, para un entorno del punto x_n :

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + (x - x_n)^2 \frac{f''(x_n)}{2!} + \dots$$

Si se trunca el desarrollo a partir del término de grado 2, y evaluamos en x_{n+1} :

$$f(x_{n+1}) = f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n)$$

Si además se acepta que x_{n+1} tiende a la raíz, se ha de cumplir que $f(x_{n+1}) = 0$, luego, substituyendo en la expresión anterior, obtenemos el algoritmo.

Finalmente, hay que indicar que el método de Newton-Raphson puede interpretarse como un método de iteración de punto fijo. Así, dada la ecuación $f(x) = 0$, se puede considerar el siguiente método de iteración de punto fijo:

$$g(x) = x + h(x)f(x)$$

Se escoge $h(x)$ de manera que $g'(r)=0$ (r es la raíz buscada). Dado que $g'(r)$ es:

$$g'(r) = 1 + h'(r)f(r) + h(r)f'(r) = 1 + h(r)f'(r)$$



Entonces:

$h(r) = \frac{-1}{f'(r)}$ Como $h(x)$ no tiene que ser única, se escoge de la forma más sencilla:

$h(x) = \frac{-1}{f'(x)}$ Por tanto, imponiendo subíndices:

$g(x_n) = x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ Expresión que coincide con la del algoritmo de Newton-Raphson

Convergencia del Método

El orden de convergencia de este método es, por lo menos, cuadrático. Sin embargo, si la raíz buscada es de multiplicidad algebraica mayor a uno (i.e., una raíz doble, triple, ...), el método de Newton-Raphson pierde su convergencia cuadrática y pasa a ser lineal de constante asintótica de convergencia $1-1/m$, con m la multiplicidad de la raíz.

Existen numerosas formas de evitar este problema, como pudieran ser los métodos de aceleración de la convergencia tipo Δ^2 de Aitken o el método de Steffensen.

$$x_{n+1} = x_n - m \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Evidentemente, este método exige conocer de antemano la multiplicidad de la raíz, lo cual no siempre es posible. Por ello también se puede modificar el algoritmo tomando una función auxiliar $g(x) = f(x)/f'(x)$, resultando:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)}.$$

Su principal desventaja en este caso sería lo costoso que pudiera ser hallar $g(x)$ y $g'(x)$ si $f(x)$ no es fácilmente derivable.

Por otro lado, la convergencia del método se demuestra cuadrática para el caso más habitual en base a tratar el método como uno de punto fijo: si $g'(r)=0$, y $g''(r)$ es distinto de 0, entonces la convergencia es cuadrática. Sin embargo, está sujeto a las particularidades de estos métodos.

Nótese de todas formas que el método de Newton-Raphson es un método abierto: la convergencia no está garantizada por un teorema de convergencia global como podría estarlo en los métodos de falsa posición o de bisección. Así, es necesario partir de una aproximación



inicial próxima a la raíz buscada para que el método converja y cumpla el teorema de convergencia local.

Teorema de Convergencia Local del Método de Newton

Sea $f \in \mathcal{C}^2([a, b])$. Si $p \in [a, b]$, $f(p) = 0$ y $f'(p) \neq 0$,

Entonces existe un $r > 0$ tal que,

si $|x_0 - p| < r$, entonces la sucesión x_n con $n \in \mathbb{N}$ verifica que:

$|x_n - p| < r$ para todo n y x_n tiende a p cuando n tiende a infinito.

Si además $f \in \mathcal{C}^3([a, b])$, entonces la convergencia es cuadrática.

Teorema de Convergencia Global del Método de Newton

Sea $f \in \mathcal{C}^2[a, b]$ verificando :

1. $f(a)f(b) < 0$
2. $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in [a, b]$
3. $f''(x)f''(y) \geq 0$ para todo $x, y \in [a, b]$
4. $\max \left\{ \frac{|f(a)|}{|f'(a)|}, \frac{|f(b)|}{|f'(b)|} \right\} \leq b - a$

Entonces existe un único $s \in [a, b]$ tal que $f(s) = 0$ por lo que la sucesión converge a s .

Estimación del Error

Se puede demostrar que el método de Newton-Raphson tiene convergencia cuadrática: si α es raíz, entonces:

$$|x_{k+1} - \alpha| \leq C|x_k - \alpha|^2$$

Para una cierta constante C . Esto significa que si en algún momento el error es menor o igual a 0,1, a cada nueva iteración doblamos (aproximadamente) el número de decimales exactos. En la práctica puede servir para hacer una estimación aproximada del error:

Error relativo entre dos aproximaciones sucesivas:



$$E = \frac{|x_{k+1} - x_k|}{|x_{k+1}|}$$

Con lo cual se toma el error relativo como si la última aproximación fuera el valor exacto. Se detiene el proceso iterativo cuando este error relativo es aproximadamente menor que una cantidad fijada previamente.

Ejemplo :

Consideremos el problema de encontrar un número positivo x tal que $\cos(x) = x^3$. Podríamos tratar de encontrar el cero de $f(x) = \cos(x) - x^3$.

Sabemos que $f'(x) = -\sin(x) - 3x^2$. Ya que $\cos(x) \leq 1$ para todo x y $x^3 > 1$ para $x > 1$, deducimos que nuestro cero está entre 0 y 1. Comenzaremos probando con el valor inicial $x_0 = 0,5$

$$\begin{array}{llll} x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} &= 0,5 - \frac{\cos(0,5) - 0,5^3}{-\sin(0,5) - 3 \times 0,5^2} &= 1,112141637097 \\ x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} &\vdots &= \underline{0,909672693736} \\ x_3 &\vdots &\vdots &= \underline{0,867263818209} \\ x_4 &\vdots &\vdots &= \underline{0,865477135298} \\ x_5 &\vdots &\vdots &= \underline{0,865474033111} \\ x_6 &\vdots &\vdots &= \underline{0,865474033102} \end{array}$$

Los dígitos correctos están subrayados. En particular, x_6 es correcto para el número de decimales pedidos. Podemos ver que el número de dígitos correctos después de la coma se incrementa desde 2 (para x_3) a 5 y 10, ilustrando la convergencia cuadrática. En general el error es:

$$E_{t,i+1} \cong \frac{-f''(x_r)}{2f'(x_r)} E_{t,i}^2$$

Implementación en Excel

EJEMPLO UTILIZANDO EXCEL CON EL METODO DE NEWTON-RAPHSON				
ITERACION	X	F'(X)	F(X)	ERROR
1	2	-3,32507524	0,05	
2	2,01503725	-3,30026181	0,04664187	0,00746252
3	2,02917003	-3,27727612	0,04353109	0,00696481
4	2,04245274	-3,25596298	0,04064667	0,00650331
5	2,0549365	-3,23618296	0,03796974	0,00607501



6	2,06666938	-3,21781053	0,0354833	0,00567719
7	2,07769653	-3,20073234	0,03317202	0,0053074
8	2,08806042	-3,18484582	0,03102201	0,0049634
9	2,09780092	-3,17005795	0,02902069	0,0046432
10	2,10695555	-3,15628419	0,02715662	0,00434495
11	2,11555953	-3,14344758	0,02541937	0,004067
12	2,12364599	-3,1314779	0,02379945	0,00380782
13	2,13124606	-3,12031098	0,02228817	0,00356602
14	2,13838899	-3,1098881	0,02087759	0,00334033
15	2,14510229	-3,10015542	0,01956041	0,00312959
16	2,15141178	-3,09106353	0,01832996	0,00293272
17	2,15734176	-3,08256698	0,01718008	0,00274875
18	2,16291507	-3,07462396	0,0161051	0,00257675
19	2,16815314	-3,06719593	0,01509983	0,00241591
20	2,17307615	-3,06024734	0,01415944	0,00226546
21	2,17770304	-3,05374533	0,01327949	0,00212467
22	2,18205163	-3,04765955	0,01245587	0,00199289
23	2,18613866	-3,04196189	0,01168477	0,00186952
24	2,18997986	-3,03662633	0,01096268	0,00175399
25	2,19359001	-3,03162873	0,01028633	0,00164577
26	2,19698301	-3,0269467	0,00965269	0,00154439
27	2,20017193	-3,02255946	0,00905894	0,0014494
28	2,20316904	-3,01844768	0,00850247	0,00136036
29	2,20598588	-3,01459341	0,00798085	0,00127691
30	2,20863328	-3,01097993	0,00749182	0,00119866
31	2,21112145	-3,00759168	0,00703327	0,0011253
32	2,21345996	-3,00441418	0,00660324	0,00105649
33	2,21565781	-3,00143392	0,00619991	0,00099196
34	2,21772345	-2,9986383	0,00582156	0,00093143

Ejemplo de un algoritmo

Algoritmo para el método de Newton (N = Número máximo de iteraciones, E = Tolerancia o margen de error).



```
BEGIN
Input  $X_0, N, E$ 
 $V \leftarrow f(X_0)$ 
Output  $\emptyset, X_0, V$ 
If  $|V| < E$  then END
Else
  For  $K = 1, 2, \dots, N$  do
     $X_1 \leftarrow X_0 - \frac{V}{f'(X_0)}$ 
     $V \leftarrow f(X_1)$ 
    Output  $K, X_1, V$ 
    If  $|X_1 - X_0| < E$  or  $|V| < E$  Then END
  Else
     $X_0 \leftarrow X_1$ 
  END If
END For
END
```

4. ENLACES SUGERIDOS

https://es.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9todo_de_Newton

5. BIBLIOGRAFÍA

- Análisis Numérico, *Richard L. Burden/J. Douglas Faires*, Editorial Thomson Learning Inc.
- Métodos Numéricos Con SCILAB, Héctor Manuel Mora Escobar, Abril 2010

6. GLOSARIO

7. PREGUNTAS DE AUTOEVALUACIÓN

1. Los métodos presuponen que la ecuación $f(x) = 0$ tiene solución. Es necesario, antes de aplicar mecánicamente los métodos, estos son: ?
2. ¿El método de Newton-Raphson tiene convergencia de orden?



3. ¿Las desventajas del método de Newton-Raphson a su criterio son?



UNIDAD II

MÉTODOS ITERATIVOS PARA LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES NO LINEALES Y ACELERACIÓN DE LA CONVERGENCIA

2.1 SOLUCIÓN DE ECUACIONES NO LINEALES

2.2 MÉTODO DE NEWTON

2.1. 2.2 PREGUNTAS DE AUTOEVALUACIÓN

1. Los métodos presuponen que la ecuación $f(x) = 0$ tiene solución. Es necesario, antes de aplicar mecánicamente los métodos, estos son: ?

Respuesta

- 1) Estudiar la función (Analizar)
 - 2) Averiguar si tiene raíces (Graficar)
 - 3) Ubicarlas aproximadamente (Método)
2. ¿El método de Newton-Raphson tiene convergencia de orden?

Respuesta: cuadrática

3. ¿Las desventajas del método de Newton-Raphson a su criterio son?

Respuesta: No es de los métodos más rápidos y sobre todo en algunos casos no es fácil o accesible encontrar la derivada de la función.

2.3 MÉTODO DE LA SECANTE

2.3 PREGUNTAS DE AUTOEVALUACIÓN

4. ¿Cuál es la característica principal o requisito inicial del Método de la Secante?



Respuesta: Requiere de dos puntos iniciales de X , para iniciar el proceso de convergencia a la raíz.

5. ¿El método de la Secante que tipo de convergencia tiene?

Respuesta: cuadrática