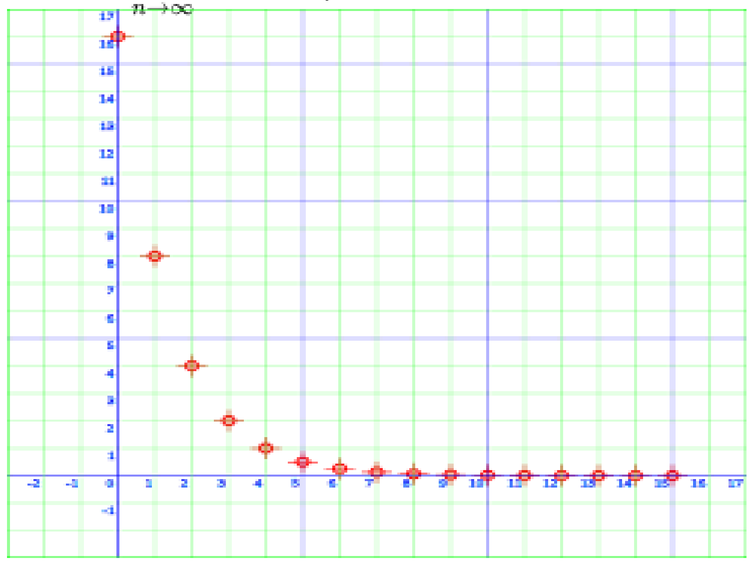
UNIDAD I

ORDEN DE CONVERGENCIA

1. INTRODUCCIÓN

El límite de una sucesión es uno de los conceptos más antiguos del análisis matemático. Es el valor al que tienden los términos de la sucesión cuando toma valores muy grandes.

Se representa mediante $\lim_{n\to\infty} a_n$ y se lee *límite cuando tiende a más infinito de sub*



Este concepto está estrechamente ligado al de convergencia, una sucesión de elementos de un conjunto es convergente si y solo si en el mismo conjunto existe un elemento (al que se le conoce como límite) al cual la sucesión se aproxima tanto como se desee a partir de un momento dado. Si una sucesión tiene límite, se dice que es una sucesión convergente, y que la sucesión converge o tiende al límite. En caso contrario, la sucesión es divergente.

La definición significa que eventualmente todos los elementos de la sucesión se aproximan tanto como queramos al valor límite. La condición que impone que los elementos se encuentren arbitrariamente cercanos a los elementos subsiguientes *no* implica, en general, que la sucesión tenga un límite

Se entiende por convergencia de un método numérico la garantía de que, al realizar un buen número de repeticiones (iteraciones), las aproximaciones obtenidas terminan por acercarse cada vez más al verdadero valor buscado.

En la medida en la que un método numérico requiera de un menor número de iteraciones que otro, para acercarse al valor numérico deseado, se dice que tiene una mayor rapidez de convergencia.

Se entiende por estabilidad de un método numérico el nivel de garantía de convergencia, y es que algunos métodos numéricos no siempre convergen y, por el contrario divergen; es decir, se alejan cada vez más y más del resultado deseado.

En la medida en la que un método numérico, ante una muy amplia gama de posibilidades de modelado matemático, es más seguro que converja que otro, entonces se dice que tiene una mayor estabilidad.

Normalmente se puede encontrar métodos que convergen rápidamente, pero son demasiado inestables y, por el contario, modelos muy estables, pero de lenta convergencia.

En métodos numéricos la velocidad con la cual una sucesión converge a su límite es llamada orden de convergencia. Este concepto es, desde el punto de vista práctico, muy importante si necesitamos trabajar con secuencias de sucesivas aproximaciones de un método iterativo. Incluso puede hacer la diferencia entre necesitar diez o un millón de iteraciones.

Supongamos que la secuencia $\{x_k\}$ converge al número ξ. decimos que la sucesión converge con orden q a ξ, si el número q es llamado orden de convergencia.

En particular, convergencia de orden 1 es llamada convergencia lineal, la de orden 2 convergencia cuadrática y la convergencia de orden 3 convergencia cúbica.

En matemática computacional, un método iterativo trata de resolver un problema (como una ecuación un sistema de ecuaciones) mediante aproximaciones sucesivas a la solución, empezando desde una estimación inicial. Esta aproximación contrasta con los métodos directos, que tratan de resolver el problema de una sola vez (como resolver un sistema de ecuaciones $Ax=b$ encontrando la inversa de la matriz A). Los métodos iterativos son útiles para resolver problemas que involucran un número grande de variables (a veces del orden de millones), donde los métodos directos tendrían un coste prohibitivo incluso con la potencia del mejor computador disponible.

Dado que estos métodos forman una base, el método converge en N iteraciones, donde N es el tamaño del sistema. Sin embargo, en la presencia de errores de redondeo esta afirmación no se sostiene; además, en la práctica no puede ser muy grande, y el proceso iterativo alcanza una precisión suficiente mucho antes. El análisis de estos métodos es difícil, dependiendo de lo complicada que sea la función del espectro del operador.

2. DEFINICIÓN

Sea $\{X_k\}$ una sucesión de números reales con limite L. Se dice que la convergencia tiene orden de convergencia p ≥ 1, si p es el mayor valor tal que el siguiente limite existe

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1} - L|}{|x_k - L|^p} = \beta < \infty$$

En este caso se dice que β es la tasa de convergencia. Cuando el orden es 1, se dice que la convergencia es lineal. La convergencia se llama superlineal si

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1} - L|}{|x_k - L|} = 0.$$

Cuando el orden es 2, se dice que la convergencia es cuadrática.

Lo ideal es tener ´ordenes de convergencia altos con tasas pequeñas. Una convergencia lineal con tasa 1 es una convergencia muy lenta. Una convergencia cuadrática es muy buena, por ejemplo, el método de Newton que se verá más adelante

Ejemplo $x_k = \pi + \frac{1}{k}.$ Esta sucesión converge a π. Veamos qué pasa con p = 1.

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1} - L|}{|x_k - L|} &= \lim_{k\to\infty} \frac{|\pi + \frac{1}{k+1} - \pi|}{|\pi + \frac{1}{k} - \pi|} \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k+1}}{\frac{1}{k}} \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{k}{k+1} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Luego la sucesión tiene orden de convergencia por lo menos igual a 1. Veamos qué pasa con $p > 1$. Se puede suponer que $p = 1 + \varepsilon$, con $\varepsilon > 0$.

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1}-L|}{|x_k-L|^{1+\varepsilon}} &= \lim_{k\to\infty} \frac{\dfrac{1}{k+1}}{\dfrac{1}{k^{1+\varepsilon}}} \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{k^{1+\varepsilon}}{1+k} \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{k\ k^{\varepsilon}}{1+k} \\
&= \left(\lim_{k\to\infty} \frac{k}{1+k}\right)\left(\lim_{k\to\infty} k^{\varepsilon}\right) \\
&= (1)(+\infty).
\end{aligned}$$

Entonces p no puede ser superior a 1 y podemos decir que la convergencia es lineal con tasa 1.

Ejemplo $x_k = \dfrac{1}{2^k}$

Esta sucesión converge a 0. Directamente veamos qué pasa con p = 1 + ε, con $\varepsilon \geq 0$

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1}-L|}{|x_k-L|^{1+\varepsilon}} &= \lim_{k\to\infty} \frac{\dfrac{1}{2^{k+1}}}{\dfrac{1}{(2^k)^{1+\varepsilon}}} \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{(2^k)^{1+\varepsilon}}{2^{k+1}} \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{2^k\ 2^{k\varepsilon}}{2^{k+1}} \\
&= \left(\lim_{k\to\infty} \frac{2^k}{2^{k+1}}\right)\left(\lim_{k\to\infty} 2^{k\varepsilon}\right) \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\lim_{k\to\infty} 2^{k\varepsilon}\right)
\end{aligned}$$

Si $p = 1$ ($\varepsilon = 0$) hay convergencia hacia 1/2. Si p > 1 no hay convergencia. Entonces la sucesión tiene convergencia lineal con tasa 1/2.

Ejemplo :

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{69}{10} \\
x_n &= 6 + (x_{n-1}-6)^2, \qquad n \geq 2.
\end{aligned}$$

Los primeros valores son los siguientes:

1	6.900000000000000
2	6.810000000000000
3	6.656100000000000
4	6.430467210000001

5	6.185302018885185
6	6.034336838202925
7	6.001179018457774
8	6.000001390084524
9	6.000000000001933
10	6.000000000000000

Se puede mostrar que

$$x_n = 6 + y_n\,, \quad n = 1, 2, \ldots$$
$$y_1 = \frac{9}{10}$$
$$y_n = y_{n-1}^2\,, \quad n = 2, 3, \ldots$$
$$y_n = \left(\frac{9}{10}\right)^{2^{n-1}}\,, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Como $y_n \to 0$, entonces $x_n \to 6$.

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1} - L|}{|x_k - L|^p} &= \lim_{k\to\infty} \frac{y_{k+1}}{y_k^p} \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{y_k^2}{y_k^p} \\ &= \lim_{k\to\infty} y_k^{2-p} \end{aligned}$$

Si p = 1 el lımite es 0, es decir, la convergencia es por lo menos lineal y se puede afirmar que es superlineal. Si p = 2 el lımite es 1, luego la convergencia es por lo menos cuadrática. Si p = 2 + ε, con $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1} - L|}{|x_k - L|^p} &= \lim_{k\to\infty} y_k^{2-(2+\varepsilon)} \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{y_k^{\varepsilon}} \\ &= +\infty \end{aligned}$$

Luego la convergencia es cuadrática con tasa 1.

La Eficiencia de los métodos.

En los métodos numéricos para hallar una raíz α de una ecuación $f(x)= 0$ consisten en generar una sucesión $\{x_n\}$ tal que $\lim_{n \to \infty} x_n = \alpha$

La eficiencia cada método numérico depende de:

- Condiciones de convergencia: La característica de la ecuación en cercanías a la raíz condiciona la eficacia del método.
- Orden de convergencia: Velocidad de convergencia con la cual la sucesión $\{x_n\}_n$ converge a α, $O(h^m)$.
- Número n mínimo de iteraciones necesarias para que $|x_n - \alpha| < \varepsilon$ para algún $\varepsilon > 0$ dado.
- Cantidad de operaciones realizadas en cada iteración.

Conclusiones:

- Lo ideal es tener órdenes de convergencia altos con tasas pequeñas.
- Una convergencia lineal con tasa 1 es una convergencia muy lenta.
- Una convergencia cuadrática es muy buena, por ejemplo, el método de Newton que se estudiara más adelante. Así como se estudiara más ampliamente en el tema de la convergencia acelerada.

3. ENLACES SUGERIDOS

https://es.wikipedia.org/wiki/Orden_de_convergencia

4. BIBLIOGRAFÍA

Métodos Numéricos Con SCILAB, Héctor Manuel Mora Escobar, Abril 2010.

5. GLOSARIO

Orden Convergencia: es el grado o potencia al cual esta elevado la función, puede ser 1 lineal, 2 cuadrada, asociada a la aceleración de convergencia.

6. PREGUNTAS DE AUTOEVALUACIÓN

1. ¿Qué es la orden de convergencia?
2. ¿Cómo se define la orden de convergencia?
3. ¿Cómo debe ser la orden de convergencia, para que sea buena, alta o baja?