



UNIDAD V

TÉCNICAS DE SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS CON PROBLEMAS DE VALOR INICIAL

5. 6 MÉTODOS MULTIPASO

1. INTRODUCCIÓN

Los métodos lineales multipaso se utilizan para la resolución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias. Conceptualmente, los métodos numéricos comienzan tras la elección de un punto inicial y a continuación realizan un paso de aproximación para encontrar el siguiente punto que permita seguir acercándose a la solución. El proceso continúa con los siguientes pasos para reconocer la solución.

Los métodos de un solo paso (como el método de Euler) se refieren solo a un punto anterior y a su derivada para determinar el valor buscado.

Métodos como el de Runge–Kutta utilizan un paso más (por ejemplo, un paso intermedio) para obtener un método de orden superior, para luego descartar la información anterior antes de dar un segundo paso. Los métodos de varios pasos intentan obtener eficiencia manteniendo y utilizando la información de los pasos anteriores, en lugar de descartarla.

Por consiguiente, se refieren a distintos puntos anteriores y a los valores de sus derivadas.

En el caso de los métodos lineales "multipaso", se utiliza una combinación lineal de los puntos anteriores y de los valores de sus derivadas.

2. OBJETIVO

Estudiar los métodos matemáticos del método de multipaso, en base a los criterios de eficiencia, precisión y tolerancia. Identificar el método idóneo que debe aplicarse a una muestra de datos de un problema real. Implementar los métodos de multipaso en la herramienta informática. Elaborar una lista de conclusiones sobre la idoneidad de aplicar los métodos.



3. MÉTODOS MULTIPASO

Los métodos de Euler, Heun, Taylor y Runge-Kutta se llaman método de un paso porque en el cálculo de cada punto sólo se usa la información del último punto. Los métodos multipaso utilizan la información de los puntos previos a saber, $y_i, y_{i-1}, \dots, y_{i-m+1}$ para calcular y_{i+1} .

Por ejemplo, en un método de tres pasos para calcular y_{i+1} , se necesita conocer y_i, y_{i-1}, y_{i-2} . El principio que subyace en un método multipaso es utilizar los valores previos para construir un polinomio interpolante que aproxime a la función $f(t, y(t))$.

El número de valores previos considerados para determinar el polinomio interpolante nos determina el grado del polinomio. Por ejemplo, si se consideran tres puntos previos, el polinomio de aproximación es cuadrático; si se usan cuatro puntos previos, el polinomio es cúbico.

Los métodos que hemos analizado hasta ahora son monopaso, o de paso sencillo. El valor de y_{i+1} se calcula a partir de la información de un único punto.

Los multipaso utilizan la información de más puntos anteriores con el objetivo de hacer menos evaluaciones de la función para el mismo orden de error.

Los métodos que hemos analizado hasta ahora son monopaso, o de paso sencillo. El valor de y_{i+1} se calcula a partir de la información de un único punto.

Los multipaso utilizan la información de más puntos anteriores con el objetivo de hacer menos evaluaciones de la función para el mismo orden de error.

Necesitan la ayuda de otros para dar los primeros pasos y no se adaptan bien a discontinuidades en la solución: discontinuidades en las fuerzas aplicadas, impactos, enlaces que aparecen o desaparecen, etc.

Los métodos de **Euler** y de **Runge-Kutta** que se han expuesto son métodos de un paso. Esto es, para calcular la aproximación y_{i+1} de $y(t_{i+1})$, hacen uso solamente de la aproximación y_i

Se puede mejorar el funcionamiento de los métodos si al calcular la aproximación y_{i+1} , se utilizan otras aproximaciones, $y_i, y_{i-1}, \dots, y_{i-k}$, calculadas previamente. Los métodos que hacen uso de estas aproximaciones se llaman métodos multipaso.

Los métodos explícitos calculan y_{i+1} haciendo uso de $f(t_i, y_i)$ así como de la función f evaluada en la solución correspondiente a instantes anteriores.



Los métodos multipaso explícitos se llaman también métodos de **Adams-Bashforth**. Algunos de estos métodos son:

Los métodos explícitos calculan **y_{i+1}** haciendo uso de **$f(t_i, y_i)$** así como de la función f evaluada en la solución correspondiente a instantes anteriores.

Los métodos multipaso explícitos se llaman también métodos de **Adams-Bashforth**. Algunos de estos métodos son:

Método de Adams-Bashforth de dos pasos

$$y_0 = \alpha_0, y_1 = \alpha_1,$$

$$y_{i+1} = y_i + h/2 (3f(t_i, y_i) - f(t_{i-1}, y_{i-1})).$$

Método de Adams-Bashforth de tres pasos

$$y_0 = \alpha_0,$$

$$y_1 = \alpha_1, y_2 = \alpha_2, y_{i+1} = y_i + h/12 (23f(t_i, y_i) -$$

$$16f(t_{i-1}, y_{i-1}) + 5f(t_{i-2}, y_{i-2})).$$

Método de Adams-Bashforth de cuatro pasos

$$y_0 = \alpha_0,$$

$$y_1 = \alpha_1, y_2 = \alpha_2, y_3 = \alpha_3,$$

$$y_{i+1} = y_i + h/24 (55f(t_i, y_i) - 59f(t_{i-1}, y_{i-1}) + 37f(t_{i-2}, y_{i-2}) - 9f(t_{i-3}, y_{i-3})).$$

A los métodos multipaso implícitos se les llama métodos de **Adams-Moulton**. Para el cálculo de **y_{i+1}** , estos métodos hacen uso de **$f(t_{i+1}, y_{i+1})$** . Estos métodos son los siguientes:



Método de Adams-Moulton de un paso

$$y_0 = \alpha_0,$$

$$y_{i+1} = y_i + h \left(\frac{1}{2} (f(t_{i+1}, y_{i+1}) + f(t_i, y_i)) \right).$$

Este método es conocido como el trapecoidal, aunque se corresponde también con un método **RK** implícito de orden 2.

Método de Adams-Moulton de tres pasos

$$y_0 = \alpha_0, y_1 = \alpha_1, y_2 = \alpha_2,$$

$$y_{i+1} = y_i + h \left(\frac{9}{24} f(t_{i+1}, y_{i+1}) + \frac{19}{24} f(t_i, y_i) - \right.$$

$$\left. \frac{5}{24} f(t_{i-1}, y_{i-1}) + \frac{1}{24} f(t_{i-2}, y_{i-2}) \right)$$

Método de Adams-Moulton de cuatro pasos

$$y_0 = \alpha_0, y_1 = \alpha_1, y_2 = \alpha_2, y_3 = \alpha_3,$$

$$y_{i+1} = y_i + h \left(\frac{251}{720} f(t_{i+1}, y_{i+1}) + \frac{646}{720} f(t_i, y_i) - \right.$$

$$\left. \frac{264}{720} f(t_{i-1}, y_{i-1}) + \frac{106}{720} f(t_{i-2}, y_{i-2}) - \frac{19}{720} f(t_{i-3}, y_{i-3}) \right)$$

ALGORITMO

% $y' = f(t, y)$

% Método Adams-Moulton de 3 pasos y de orden 4

% Se inicializa con el método RK4 global cont = 0;

% Tiempo inicial, final y número de divisiones t0=0; tf=10; Npasos = 300;

% Tamaño del paso de integración h = (tf-t0)/Npasos;

% Condiciones iniciales y = [4 ; 1];

% R4 almacena las soluciones obtenidas en cada instante R4 = [t y' eps];

% Magnitud conservada

I0 = y(1) - 2*log(y(1)) + y(2) - log(y(2)); t = t0;



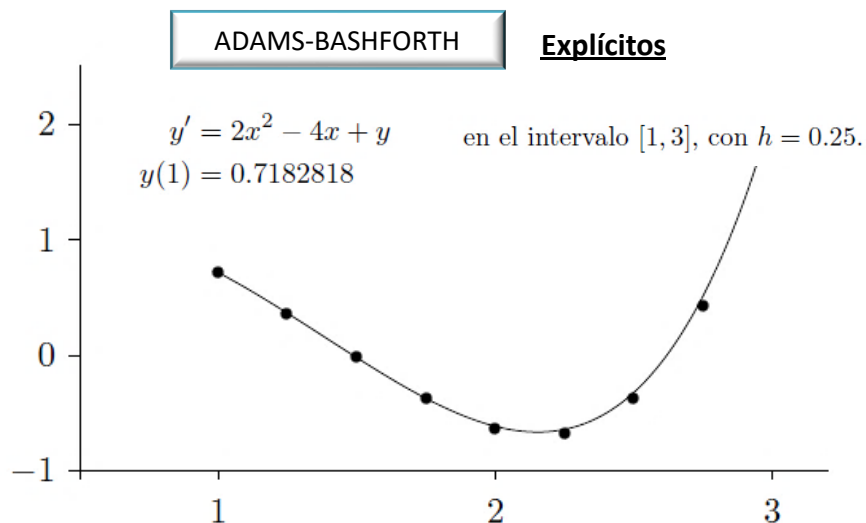
```
for i2 = 1:2;
    t1 = t + h/2; t2 = t + h/2; t3 = t + h;
    %%%% Metodo RK-4 estandar
    K1 = fVolt(t,y);
    K2 = fVolt(t1,y+h*K1/2);
    K3 = fVolt(t2,y+h*K2/2);
    K4 = fVolt(t3,y+h*K3); y = y + ((K1 + 2*(K2 + K3) + K4)*h/6);
    t = t + h; R4 = [R4 ; t y' eps];
end
```

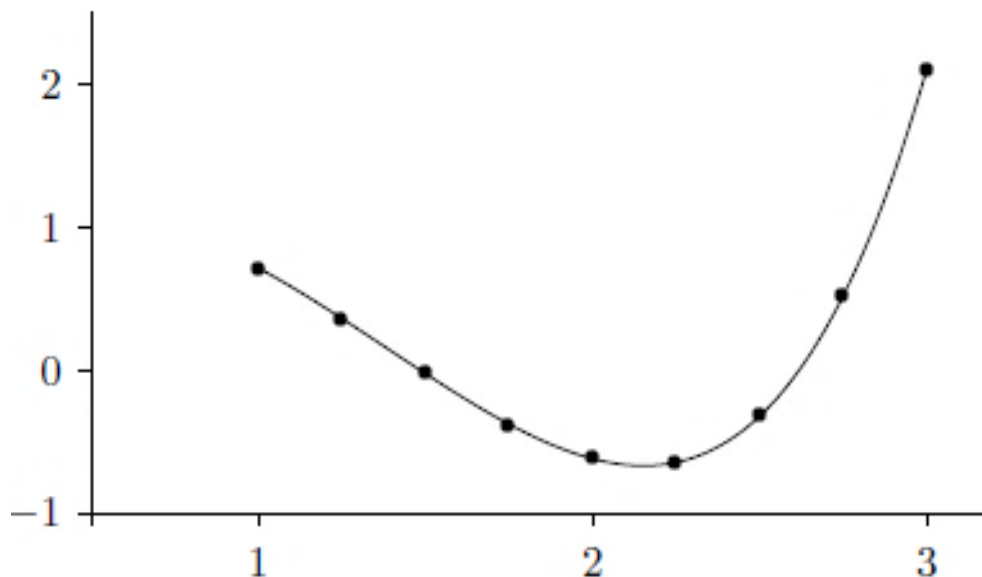
% Predictor con el Adams-Bashforth de 3 pasos

```
y0 = R4(1,2:3)'; f0 = fVolt(t0,y0);
y1 = R4(2,2:3)'; f1 = fVolt(t0+h,y1);
y2 = R4(3,2:3)'; f2 = fVolt(t0+2*h,y2);
```

```
for i3 = 3:Npasos;
    y2p = y2 + h*(23*f2 - 16*f1 + 5*f0)/12; %Predictor
    f2p = fVolt(t,y2p);
    y2 = y2 + h*(9*f2p + 19*f2 - 5*f1 + f0)/24; %Corrector
    t = t + h;
    f0 = f1; f1 = f2; f2 = fVolt(t,y2);
    ln = y2(1) - 2*log(y2(1)) + y2(2) - log(y2(2));
    lerror = log10(abs(ln-l0))
    R4 = [R4 ; t y2' lerror];
end
```

end





ADAMS-MOULTON

Implícitos

4. ENLACES SUGERIDOS

https://es.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9todo_lineal_multipaso

5. BIBLIOGRAFÍA

- Análisis Numérico, *Richard L. Burden/J. Douglas Faires*, Editorial Thomson Learning Inc.
- Métodos Numéricos Con SCILAB, Héctor Manuel Mora Escobar, Abril 2010

6. GLOSARIO

7. PREGUNTAS DE AUTOEVALUACIÓN

1. ¿Qué son los métodos multipaso?
2. ¿Cuáles son los métodos multipaso más conocidos?
3. ¿Según lo visto en clase cual es el mejor por su exactitud?