动态规划(上篇)
Dynamic Programming I

课程版本 3.4　　主讲 令狐冲

扫描二维码关注微信/微博
获取最新面试题及权威解答

微信: ninechapter
微博: http://www.weibo.com/ninechapter
知乎: http://zhuanlan.zhihu.com/jiuzhang
官网: http://www.jiuzhang.com

大纲 Outline

- 通过一道经典题理解动态规划
  - 递归与动规的联系与区别
  - 记忆化搜索
- 什么时候使用动态规划
  - 适用动态规划的三个条件
  - 不适用动态规划的三个条件
- 动规四要素
  - vs 递归三要素
- 面试中常见动态规划的分类
- 坐标(矩阵)动态规划

Triangle

- http://www.lintcode.com/problem/triangle/
- http://www.jiuzhang.com/solutions/triangle/

- 解决方法:
- DFS: Traverse
- DFS: Divide Conquer
- Divide Conquer + Memorization
- Traditional Dynamic Programming

DFS: Traverse

- 时间复杂度？
- A - O(n^2)
- B - O(2^n)
- C - O(n!)
- D - I don't know

```
void traverse(int x, int y, int sum) {
    if (x == n) {
        // found a whole path from top to bottom
        if (sum < best) {
            best = sum;
        }
        return;
    }

    traverse(x + 1, y, sum + A[x][y]);
    traverse(x + 1, y + 1, sum + A[x][y]);
}

best = MAXINT;
traverse(0, 0, 0);
// best is the answer
```


DFS: Divide Conquer

- 时间复杂度？
- A - O(n^2)
- B - O(2^n)
- C - O(n!)
- D - I don't know

```
// return minimum path from (x, y) to bottom
int divideConquer(int x, int y) {
    if (x == n) {
        return 0;
    }
    return A[x][y] + Math.min(
        divideConquer(x + 1, y),
        divideConquer(x + 1, y + 1)
    );
}

divideConquer(0, 0);
```


DFS: Divide Conquer + Memorization

- 时间复杂度？
- A - O(n^2)
- B - O(2^n)
- C - O(n!)
- D - I don't know

```
// return minimum path from (x, y) to bottom
int divideConquer(int x, int y) {
    // row index from 0 to n-1.
    if (x == n) {
        return 0;
    }

    // if we already got the minimum path from (x, y) to bottom.
    // just return it
    if (hash[x][y] != Integer.MAX_VALUE) {
        return hash[x][y]
    }

    // set before return
    hash[x][y] = A[x][y] + Math.min(divideConquer(x + 1, y),
                                    divideConquer(x + 1, y + 1));

    return hash[x][y];
}

initialize: hash[*][*] = Integer.MAX_VALUE;
answer: divideConquer(0, 0);
```

记忆化搜索的本质：动态规划

动态规划为什么会快？

动态规划与分治的区别？

重复计算！

多重循环 vs 记忆化搜索

优点：正规，大多数面试官可以接受，存在空间优化可能性。

缺点：思考有难度。

优点：容易从搜索算法直接转化过来。有的时候可以节省更多的时间。

缺点：递归。

多重循环：自底向上

- 时间复杂度？
- 空间复杂度？

```
A[][]

// 状态定义
f[i][j] 表示从i,j出发走到最后一层的最小路径长度

// 初始化，终点先有值
for (int i = 0; i < n; i++) {
    f[n-1][i] = A[n-1][i];
}

// 循环递推求解
for (int i = n - 2; i >= 0; i--) {
    for (int j = 0; j <= i; j++) {
        f[i][j] = Math.min(f[i + 1][j], f[i + 1][j + 1]) + A[i][j];
    }
}

// 求结果：起点
f[0][0]
```


多重循环：自顶向下

- 时间复杂度？
- 空间复杂度？

```
// 初始化，起点
f[0][0] = A[0][0];

// 初始化三角形的左边和右边
for (int i = 1; i < n; i++) {
    f[i][0] = f[i - 1][0] + A[i][0];
    f[i][i] = f[i - 1][i - 1] + A[i][i];
}

// top down
for (int i = 1; i < n; i++) {
    for (int j = 1; j < i; j++) {
        f[i][j] = Math.min(f[i - 1][j], f[i - 1][j - 1]) + A[i][j];
    }
}

Math.min(f[n - 1][0], f[n - 1][1], f[n - 1][2] ...);
```


自底向上 vs 自顶向下

两种方法没有太大优劣区别

思维模式一个正向，一个逆向

为了方便教学，后面我们统一采用 **自顶向下** 的方式

什么情况下使用动态规划？

- 满足下面三个条件之一：
  - 求最大值最小值
  - 判断是否可行
  - 统计方案个数
- 则 **极有可能** 是使用动态规划求解

什么情况下不使用动态规划？

- 求出所有 **具体** 的方案而非方案 **个数**
  - http://www.lintcode.com/problem/palindrome-partitioning/
- 输入数据是一个 **集合** 而不是 **序列**
  - http://www.lintcode.com/problem/longest-consecutive-sequence/
- **暴力**算法的复杂度已经是**多项式**级别
  - 动态规划擅长与优化指数级别复杂度(2^n,n!)到多项式级别复杂度(n^2,n^3)
  - 不擅长优化n^3到n^2
- 则 **极不可能** 使用动态规划求解

动规四要素 vs 递归三要素

- **状态 State**
- 灵感，创造力，存储小规模问题的结果
- **方程 Function**
- 状态之间的联系，怎么通过小的状态，来算大的状态
- **初始化 Initialization**
- 最极限的小状态是什么，起点
- **答案 Answer**
- 最大的那个状态是什么，终点

递归三要素：

- 定义（状态）
  - 接受什么参数
  - 做了什么事
  - 返回什么值
- 拆解（方程）
  - 如何将参数变小
- 出口（初始化）
  - 什么时候可以直接 return

面试中常见的动态规划类型

- **坐标型动态规划 15%**
- **序列型动态规划 30%**
- **双序列动态规划 30%**
- 划分型动态规划 10%（算法强化班）
- 背包型动态规划 10%（算法强化班）
- 区间型动态规划 5%（算法强化班）

Take a break

5 minutes

坐标型动态规划

- state:
- f[x] 表示我从起点走到坐标x……
- f[x][y] 表示我从起点走到坐标x,y……

- function: 研究走到x,y这个点之前的一步
- initialize: 起点
- answer: 终点

Minimum Path Sum

http://www.lintcode.com/problem/minimum-path-sum/

http://www.jiuzhang.com/solutions/minimum-path-sum/

Minimum Path Sum

- state: f[x][y]从起点走到x,y的最短路径
- function: f[x][y] = min(f[x-1][y], f[x][y-1]) + A[x][y]
- intialize: f[i][0] = sum(0,0 ~ i,0)
-               f[0][i] = sum(0,0 ~ 0,i)
- answer: f[n-1][m-1]

独孤九剑 —— 破枪式

初始化一个二维的动态规划时
就去初始化**第0行**和**第0列**

Unique Path

http://www.lintcode.com/problem/unique-paths/
http://www.jiuzhang.com/solutions/unique-paths/

Unique Path

- state: f[x][y]从起点到x,y的路径数
- function: (研究倒数第一步) f[x][y] = f[x - 1][y] + f[x][y - 1]
- initialize: f[0][i] = 1
-               f[i][0] = 1
- answer: f[n-1][m-1]

- Related Question: Unique Path II

Climbing Stairs

http://www.lintcode.com/problem/climbing-stairs/
http://www.jiuzhang.com/solutions/climbing-stairs/

Climbing Stairs

- state: f[i]表示跳到第i个位置的方案总数
- function: f[i] = f[i-1] + f[i-2]
- initialize: f[0] = 1
- answer: f[n] // index from 0~n

Jump Game

http://www.lintcode.com/problem/jump-game/
http://www.jiuzhang.com/solutions/jump-game/

Jump Game

- 最优算法：贪心法，时间复杂度 O(n)
- 次优算法：动态规划，时间复杂度 O(n^2)
- state: f[i]代表我能否跳到第i个位置
- function: f[i] = OR(f[j]) 其中 j < i && j能够跳到i
  - 解释：什么是 OR 运算？
  - 比如满足 j < i && j 能够跳到 i 的 j 有 0, 1, 4, 7
  - 那么 f[i] = f[0] || f[1] || f[4] || f[7]
- initialize: f[0] = true;
- answer: f[n-1]

Jump Game II

http://www.lintcode.com/problem/jump-game-ii/
http://www.jiuzhang.com/solutions/jump-game-ii/

Jump Game II

- 最优算法：贪心法 O(n)
- 次优算法：动态规划 O(n^2)
- state: f[i]代表我跳到第 i个位置最少需要几步
- function: f[i] = MIN{f[j]+1} 其中 j < i && j能够跳到i
- initialize: f[0] = 0;
- answer: f[n-1]

Longest Increasing Subsequence

http://www.lintcode.com/problem/longest-increasing-subsequence/
http://www.jiuzhang.com/solutions/longest-increasing-subsequence/

Longest Increasing Subsequence

- 将n个数看做n个木桩，目的是从某个木桩出发，从前向后，从低往高，看做多能踩多少个木桩。
- state: f[i] 表示（从任意某个木桩）跳到第i个木桩，最多踩过多少根木桩
- function: f[i] = max{f[j] + 1}, j必须满足 j < i && nums[j] <= nums[i]
- initialize: f[0..n-1] = 1
- answer: max{f[0..n-1]}

动态规划(上)总结

- 动态规划的实质
  - 记忆化搜索
  - 避免重复的中间结果计算
- 动态规划与递归的关系
  - 动规四要素 vs 递归三要素
- 什么时候使用动态规划
  - 最优, 可行, 方案数
- 什么时候不用动态规划
  - 所有方案而不是方案数
  - 集合而非序列
  - 暴力算法已经是多项式级别复杂度
    - 动态规划擅长优化指数级别(2^n)到多项式级别(n^2)

动态规划(上)总结

- 动态规划四要素
  - 状态, 方程, 初始化, 答案
- 三种常见的动态规划类型
  - 坐标, 序列, 双序列
- 动态规划经典题 —— 坐标动态规划的代表
  - Longest Increasing Subsequence (LIS)