

动态规划(下篇) Dynamic Programming II

课程版本 v3.3 主讲 令狐冲

不允许录像与传播录像, 否则将追究法律责任和经济赔偿



扫描二维码关注微博/微信
获取最新面试题及权威解答

微信: ninechapter
微博: <http://www.weibo.com/ninechapter>
知乎: <http://zhuanlan.zhihu.com/jiuzhang>
官网: <http://www.jiuzhang.com>

大纲 Outline

- 复习上一节课的内容
- 单序列动态规划
- 双序列动态规划

什么情况下使用动态规划？

- 满足下面三个条件之一：
 - 求最大值、最小值
 - 判断是否可行
 - 统计方案个数
- 则 **极有可能** 是使用动态规划求解

什么情况下不使用动态规划？

- 满足下面三个条件之一：
- 求出所有 **具体** 的方案而非方案 **个数**
 - <http://www.lintcode.com/problem/palindrome-partitioning/>
- 输入数据是一个 **集合** 而不是 **序列**
 - <http://www.lintcode.com/problem/longest-consecutive-sequence/>
- **暴力**的算法已经是多项式级别
 - $2^n n \rightarrow n^2$ 是DP擅长的事
- 则 **极不可能** 使用动态规划求解

动态规划的四点要素

- **状态 State**
- 灵感, 创造力, 存储小规模问题的结果
- **方程 Function**
- 状态之间的联系, 怎么通过小的状态, 来算大的状态
- **初始化 Initialization**
- 最极限的小状态是什么, 起点
- **答案 Answer**
- 最大的那个状态是什么, 终点

面试中常见的动态规划类型

- **坐标型动态规划** 15%
- **序列型动态规划** 30%
- **双序列动态规划** 30%
- 划分型动态规划 10%
- 背包型动态规划 10%
- 区间型动态规划 5%

坐标型动态规划



- state:
- $f[x]$ 表示我从起点走到坐标x.....
- $f[x][y]$ 表示我从起点走到坐标x,y.....
- function: 研究走到x,y这个点之前的一步
- initialize: 起点
- answer: 终点

单序列动态规划



- state: $f[i]$ 表示前i个位置/数字/字符,第i个...
- function: $f[i] = f[j]$... j 是i之前的一个位置
- initialize: $f[0]$..
- answer: $f[n]$..
- 一般answer是 $f(n)$ 而不是 $f(n-1)$
 - 因为对于n个字符, 包含前0个字符(空串), 前1个字符.....前n个字符。

独孤九剑 —— 破鞭式

- 如果不是跟坐标相关的动态规划
- 一般有N个数/字符, 就开N+1个位置的数组
- 第0个位置单独留出来作初始化

Word Break

- <http://www.lintcode.com/problem/word-break/>
- <http://www.jiuzhang.com/solutions/word-break/>

Word Break



- state: $f[i]$ 表示“前i”个字符能否被完美切分
- function: $f[i] = \text{OR}(f[j])$ 其中 $j < i$ && $j+1 \sim i$ is a word
 - OR 运算的意思
 - 假如 $j = 0, 1, 3, 5$ 时满足 $j < i$ && $j+1 \sim i$ is a word
 - 那么 $f[i] = f[0] \parallel f[1] \parallel f[3] \parallel f[5]$
- initialize: $f[0] = \text{true}$
- answer: $f[n]$
- 注意: 切分位置的枚举->单词长度枚举 $O(NL^2)$
 - N: 字符串长度
 - L: 最长的单词的长度

n vs n+1



- N: $f[i]$ 表示的是下标从0 ~ i
 - N+1: $f[i]$ 表示的是前i个字符 (下标从0~i-1)
- ```
// state f[i]表示下标0~i这段子字符串是否可以被完美划分
boolean[] f = new boolean[n];

// initialize
for (int i = 0; i < n; i++) {
 String word = s.substring(0, i + 1);
 f[i] = dict.contains(word);
}

// function
for (int i = 1; i < n; i++) {
 for (int j = 0; j < i; j++) {
 String word = s.substring(j + 1, i + 1);
 f[i] = f[j] || f[i] && dict.contains(word);
 }
}

// answer
return f[n - 1];
```
- ```
// state f[i]表示前i个字符组成的子字符串是否可以被完美划分
boolean[] f = new boolean[n + 1];

// initialize
f[0] = true;

// function
for (int i = 1; i <= n; i++) {
    for (int j = 0; j < i; j++) {
        String word = s.substring(j, i);
        f[i] = f[j] || f[i] && dict.contains(word);
    }
}

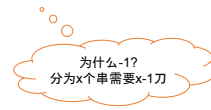
// answer
return f[n];
```

Palindrome Partitioning II

<http://www.lintcode.com/problem/palindrome-partitioning-ii/>
<http://www.jiuzhang.com/solutions/palindrome-partitioning-ii/>

Palindrome Partitioning II

- state: $f[i]$ 表示前 i 个字符组成的子串能被分割为最少多少个回文串
- function: $f[i] = \min\{f[j] + 1\}$, $j < i$ && $j + 1 \sim i$ 这一段是一个回文串
- initialize: $f[i] = i$ ($f[0] = 0$)
- answer: $f[n] - 1$



如何快速判断某一段子字符串是不是回文串

- 区间型动态规划
- State: $f[i][j]$ 表示index从 i 到 j 这一段是不是一个回文串
- Function: $f[i][j] = f[i+1][j-1] \&\& (s[i] == s[j])$
- Initialize: $f[i][i] = \text{true}$
- Answer: $f[x][y]$ // x, y 是你想查询的那一段区间

Take a break

5 minutes

双序列动态规划

- state: $f[i][j]$ 代表了第一个sequence的前 i 个数字/字符, 配上第二个sequence的前 j 个...
- function: $f[i][j]$ = 研究第 i 个和第 j 个的匹配关系
- initialize: $f[i][0]$ 和 $f[0][i]$
- answer: $f[n][m]$
- $n = s1.length()$
- $m = s2.length()$

Longest Common Subsequence

<http://www.lintcode.com/problem/longest-common-subsequence/>
<http://www.jiuzhang.com/solutions/longest-common-subsequence/>

求Max

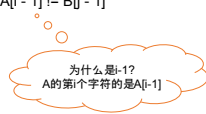
Longest Common Subsequence



- state: $f[i][j]$ 表示前 i 个字符配上前 j 个字符的LCS的长度
- function: $f[i][j] = \text{MAX}(f[i-1][j], f[i][j-1], f[i-1][j-1] + 1) // A[i-1] == B[j-1]$
 $= \text{MAX}(f[i-1][j], f[i][j-1]) // A[i-1] != B[j-1]$
- initialize: $f[i][0] = 0, f[0][j] = 0$
- answer: $f[n][m]$

• Related Question:

- <http://www.lintcode.com/problem/longest-common-substring/>



Edit Distance

<http://www.lintcode.com/problem/edit-distance/>

<http://www.jiuzhang.com/solutions/edit-distance/>

求Min

Edit Distance



- state: $f[i][j]$ 表示A的前 i 个字符最少要用几次编辑可以变成B的前 j 个字符
- function: $f[i][j] = \text{MIN}(f[i-1][j]+1, f[i][j-1]+1, f[i-1][j-1]) // A[i-1] == B[j-1]$
 $= \text{MIN}(f[i-1][j]+1, f[i][j-1]+1, f[i-1][j-1]+1) // A[i-1] != B[j-1]$
- initialize: $f[i][0] = i, f[0][j] = j$
- answer: $f[n][m]$



Distinct Subsequence

<http://www.lintcode.com/problem/distinct-subsequences/>

<http://www.jiuzhang.com/solutions/distinct-subsequences/>

求方案总数

Distinct Subsequence



- state: $f[i][j]$ 表示 S 的前 i 个字符中选取 T 的前 j 个字符, 有多少种方案
- function: $f[i][j] = f[i-1][j] + f[i-1][j-1] // S[i-1] == T[j-1]$
 $= f[i-1][j] // S[i-1] != T[j-1]$
- initialize: $f[i][0] = 1, f[0][j] = 0 (j > 0)$
- answer: $f[n][m] (n = \text{sizeof}(S), m = \text{sizeof}(T))$



Interleaving String

<http://www.lintcode.com/problem/interleaving-string/>

<http://www.jiuzhang.com/solutions/interleaving-string/>

求是否可行

Interleaving String



- state: $f[i][j]$ 表示 $s1$ 的前 i 个字符和 $s2$ 的前 j 个字符能否交替组成 $s3$ 的前 $i+j$ 个字符
- function: $f[i][j] = (f[i-1][j] \ \&\& \ (s1[i-1] == s3[i+j-1]) \ || \ (f[i][j-1] \ \&\& \ (s2[j-1] == s3[i+j-1]))$
- initialize: $f[i][0] = (s1[0..i-1] == s3[0..i-1])$
- $f[0][j] = (s2[0..j-1] == s3[0..j-1])$
- answer: $f[n][m]$, $n = \text{sizeof}(s1)$, $m = \text{sizeof}(s2)$

动态规划(下)总结



- **什么情况下可能使用/不用动态规划？**
 - 最大值最小值/是否可行/方案总数
 - 求所有方案/集合而不是序列/指数级到多项式
- **解决动态规划问题的四点要素**
 - 状态、方程、初始化、答案
- **三种面试常见的动态规划类别及状态特点**
 - 坐标、单序列、双序列
- **两招独孤九剑**
 - 二维DP需要初始化第0行和第0列
 - n 个字符的字符串要开 $n+1$ 个位置的数组

其他类型的动态规划(算法强化班)



- 背包类:
 - <http://www.lintcode.com/problem/backpack/>
 - <http://www.lintcode.com/problem/backpack-ii/>
 - <http://www.lintcode.com/problem/minimum-adjustment-cost/>
 - <http://www.lintcode.com/problem/k-sum/>
- 区间类:
 - <http://www.lintcode.com/problem/coins-in-a-line-iii/>
 - <http://www.lintcode.com/problem/scramble-string/>
- 划分类:
 - <http://www.lintcode.com/problem/best-time-to-buy-and-sell-stock-iv/>
 - <http://www.lintcode.com/problem/maximum-subarray-iii/>