Matemática Inicial

Examen, 23 de julio de 2025.

N° Lista	Apellido y Nombre	Cédula	Grupo

Importante: en esta prueba evaluaremos fundamentalmente el desarrollo de las resoluciones más que los resultados. Por lo tanto, es importante que las respuestas estén debidamente justificadas y que lo que escriban sea legible y comprensible.

Ejercicio 1 (25 puntos) 1. *Resolver la siguiente inecuación en* $\mathbb{R}$*:*

$$|2x+3| < 5$$

Solución. *Tenemos que* $|2x+3| < 5$ *si y solo si* $-5 < 2x+3 < 5$.

Resolviendo primero la inecuación $-5 < 2x+3$ *obtenemos que* $-4 < x$. *De la segunda inecuación que es* $2x+3 < 5$ *llegamos a que* $x < 1$. *En conclusión el conjunto solución de esta inecuación es:*

$$A = (-4, +\infty) \cap (-\infty, 1) = (-4, 1)$$

2. *Resolver la siguiente inecuación en* $\mathbb{R}$*:*

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2} \geq \left(\frac{4}{9}\right)^{3x}$$

Solución. *Comenzaremos reescribiendo* $\left(\frac{4}{9}\right)^{3x}$. *Tenemos que:*

$$\left(\frac{4}{9}\right)^{3x} = \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\right)^{3x} = \left(\frac{2}{3}\right)^{6x} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-6x}$$

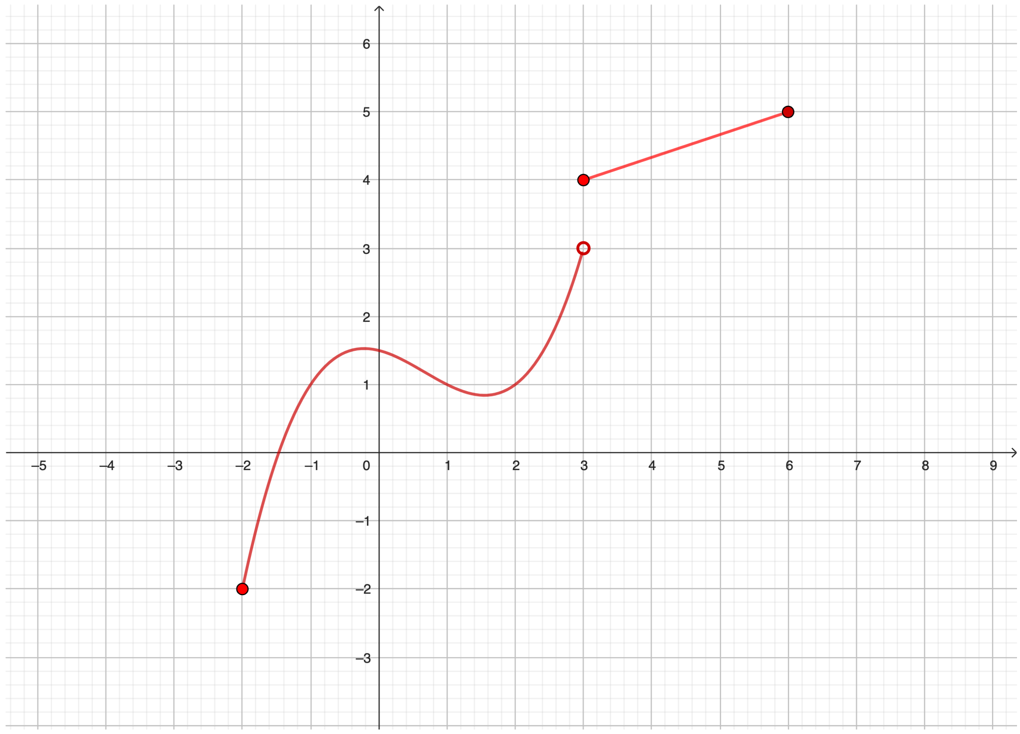
Entonces de la inecuación $\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{-6x}$ *(al ser* $\frac{3}{2} > 1$*) obtenemos la inecuación* $x^2 \geq -6x$ *que es equivalente a* $x^2 + 6x \geq 0$. *Hallando el signo del polinomio* $x^2 + 6x$ *(las raíces son* 0 *y* -6*) concluimos que* $x^2 + 6x \geq 0$ *si y solo si* $x \geq 0$ *o* $x \leq -6$ *y por lo tanto el conjunto solución de la inecuación es:*

$$B = (-\infty, -6] \cup [0, +\infty)$$

3. *Si A es el conjunto solución de la inecuación de la parte 1 y B es el conjunto solución de la parte 2, hallar* $A \cap B$.
Solución.

$$A \cap B = (-4, 1) \cap ((-\infty, -6] \cup [0, +\infty)) = [0, 1)$$

Ejercicio 2 (25 puntos) *Dado el gráfico de la función* $g : [-2, 6] \to \mathbb{R}$*:*



1. *Hallar el conjunto de preimágenes de 1.*
   Solución. *El conjunto de preimágenes de 1 es* $\{-1, 1, 2\}$

2. *Hallar el conjunto imagen* $Im(g)$.
   Solución. *La imagen de la función* g *es* $[-2, 3) \cup [4, 5]$

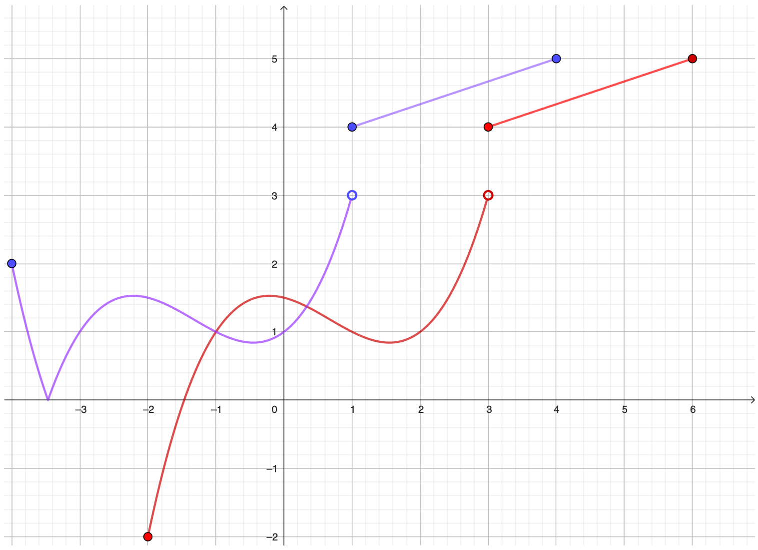
3. *Hallar* $\lim\limits_{x \to 3^-} g(x)$ *y* $\lim\limits_{x \to 3^+} g(x)$. *¿Es* g *continua en* $x = 3$*? Justifique.*
   Solución. $\lim\limits_{x \to 3^-} g(x) = 3$ *y* $\lim\limits_{x \to 3^+} g(x) = 4$. *Al tener límites laterales distintos cuando* x *tiende a* 3 *esta función no es continua en* 3.

4. *Ordenar de menor a mayor los elementos del siguiente conjunto* $\{g'(1), g'(3/2), g'(5/2), g'(4)\}$
   Solución. *El orden de las derivadas es el siguiente:* $g'(1) < g'(3/2) < g'(4) < g'(5/2)$

5. *Graficar* $h(x) = |g(x+2)|$ *indicando su dominio.*
   Solución. *Aqui podemos ver el gráfico de* h *a partir del gráfico de* g. *Observar que al evaluar en* $x + 2$ *lo que hacemos es una traslación a la izquierda de dos unidades. Luego al tomar valor absoluto el gráfico dónde la función es positiva queda igual y dónde es negativa pasa a ser positiva (simetrizar respecto al eje* x*). El dominio de* h *es* $[-4, 4]$.

Matemática Inicial

Examen, 23 de julio de 2025.



Ejercicio 3 (24 puntos) *Dado un parámetro $b \in \mathbb{R}$ se considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que:*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3+x^2-2x}{x^2-2x} & si\ x < 0, \\ b & si\ x = 0, \\ (1+x^2)\cos(x) & si\ x > 0. \end{cases}$$

1. *¿Existe un valor de b de modo que f resulte continua? En caso afirmativo hallarlo. Justificar.*
   Solución. *La función es claramente continua en todo $x \neq 0$. Para $x = 0$ tenemos que ver que:*

   $$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$$

   Por un lado,

   $$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^3+x^2-2x}{x^2-2x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x(x^2+x-2)}{x(x-2)} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2+x-2}{x-2} = 1.$$

   Por otro lado,

   $$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (1+x^2)\cos(x) = 1.$$

   Por lo tanto , para que f sea continua, $b = f(0) = 1$.

2. *Hallar $f'(-1)$ y $f'(\frac{\pi}{2})$.*
   Solución. *Para calcular $f'(-1)$ calcularemos $\left(\frac{x^3+x^2-2x}{x^2-2x}\right)'$ y luego evaluaremos en $x = -1$.*

   $$\left(\frac{x^3+x^2-2x}{x^2-2x}\right)' = \frac{(3x^2+2x-2)(x^2-2x)-(x^3+x^2-2x)(2x-2)}{(x^2-2x)^2}.$$

   Luego $f'(-1) = \frac{-1(3)-(2)(-4)}{3^2} = \frac{5}{9}$.
   Para calcular $f'(\frac{\pi}{2})$ calcularemos $((1+x^2)\cos(x))'$ y luego evaluaremos en $x = \frac{\pi}{2}$.

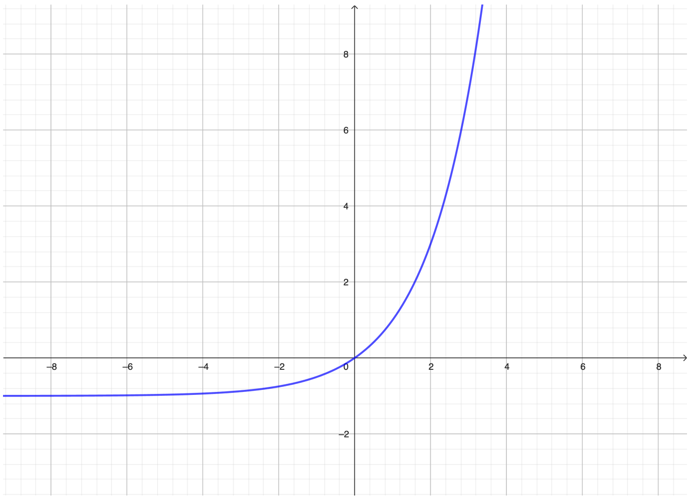
   $$((1+x^2)\cos(x))' = 2x(\cos(x)) - (1+x^2)\sin(x)$$

   Luego, $f'(\frac{\pi}{2}) = 2\frac{\pi}{2}\cos(\frac{\pi}{2}) - (1+(\frac{\pi}{2})^2)\sin(\frac{\pi}{2}) = -1 - \frac{\pi^2}{4}$. Usamos que $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ y que $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$.

Ejercicio 4 (26 puntos) *Se consideran las siguientes funciones:*

- $f : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = \log_2(x^2 - 1)$
- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por* $g(x) = 2^x - 1$

1. *Bosquejar la función g.*
   Solución. *El bosquejo de g es el siguiente:*



2. *¿La función compuesta $f \circ g$ está bien definida? Justifique su respuesta.*
   Solución. *La función $f \circ g$ no queda bien definida ya que $Im(g) = (-1, +\infty)$ no está contenida en el dominio de f que es $(1, +\infty)$.*

3. *Justificar que la composición $g \circ f$ está bien definida y hallar la función compuesta $h = g \circ f$ indicando su dominio.*
   Solución. *La función $g \circ f$ sí queda bien definida ya que el domino de g es todo $\mathbb{R}$ por lo tanto se va a verificar $Im(f) \subset Dom(g)$. El domino de $g \circ f$ es igual al dominio de f que es $(1, +\infty)$. La función compuesta nos queda:*

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2^{\log_2(x^2-1)} - 1 = x^2 - 2$$

4. *Calcular la función derivada h'.*
   Solución. $h'(x) = 2x$.

5. *¿Es la función h inyectiva? Justifique su respuesta.*
   Solución. *Como el dominio de h es $(1, +\infty)$ y $h'(x) = 2x$ tenemos que $h'(x) > 0$ en todo su dominio por lo tanto la función es estrictamente creciente lo que implica que es inyectiva.*