Introduction aux graphes

Concepts essentiels

Mathilde Vernet
mathilde.vernet@univ-avignon.fr

Licence Informatique, CERI
Licence Mathématiques, Institut AgES
Avignon Université

Automne 2025

Plan

Définition : Graphe non orienté

Un graphe non orienté G, noté $G = (V, E)$, est défini par :

- V : ensemble des sommets *(appelés vertices en anglais)*
- E : ensemble des arêtes *(appelés edges en anglais)*

Définition : Arête

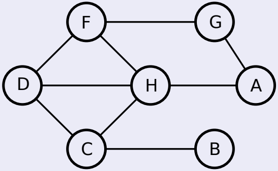
Une arête $e \in E$ dans un graphe $G = (V, E)$ est une paire de sommets :

$$e = (u, v) \text{ avec } u \in V \text{ et } v \in V$$

Remarque sur les arêtes

L'ordre des sommets d'une arête n'a pas d'importance : une arête peut être noté (u, v) ou (v, u)

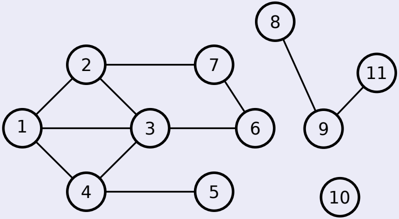
Exemple



Graphe $G = (V, E)$ avec :

- $V = \{A, B, C, D, F, G, H\}$
- $E = \{(A, H), (A, G), (B, C), (C, D), (C, H), (D, H), (D, F), (H, F), (F, G)\}$

Autre exemple



Graphe $G = (V, E)$ avec :

- $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$
- $E = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 7), (3, 4), (3, 6), (4, 5), (6, 7), (8, 9), (9, 11)\}$

Nombre de sommets et d'arêtes

On se place dans un graphe non orienté $G = (V, E)$

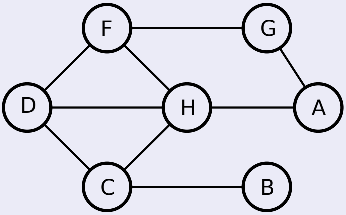
Définition : Ordre d'un graphe

Le nombre de sommets d'un graphe est appelé ordre et est noté n : $|V| = n$

Définition : Taille d'un graphe

Le nombre d'arêtes d'un graphe est appelé taille et est noté m : $|E| = m$

Exemple



Dans ce graphe :

- $n = 7$
  Ce graphe a 7 sommets
  C'est un graphe d'ordre 7
- $m = 9$
  Ce graphe a 9 arêtes
  C'est un graphe de taille 9

Incidence

On se place dans un graphe non orienté $G = (V, E)$

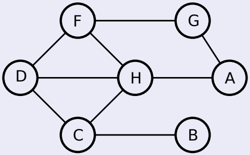
Définition : Extrémité

Les extrémités d'une arête $e = (u, v)$ sont les sommets u et v

Définition : Incidence

- Le sommet u est incident à une arête e si u est une extrémité de e
- L'arête e est incidente au sommet u si e possède u comme extrémité
- Les arêtes incidentes à u sont notées $\delta(u) = \{e \in E | e = (u, v)\}$
- L'ensemble des arêtes incidentes à l'ensemble V' sont notées $\delta(V') = \left\{(u, v) \in E | u \in V', v \notin V'\right\}$

Exemple



Dans ce graphe :

- C et H sont les extrémités de l'arête (H, C)
- Le sommet G est incident aux arêtes (A, G) et (F, G)
- $\delta(D) = \{(D, F), (D, H), (D, C)\}$

Arêtes particulières

On se place dans un graphe non orienté $G = (V, E)$

Définition : boucle

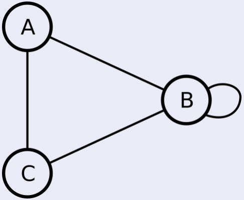
Une boucle est une arête ayant le même sommet à chaque extrémité : une arête de la forme $e = (u, u)$ avec $u \in V$

Définition : Arête multiple

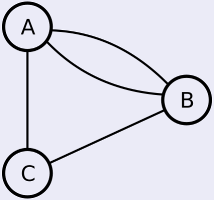
Une arête multiple est un ensemble d'arête qui possèdent les mêmes extrémités : des arêtes de la forme e, e', e'' telles que $e = (u, v)$, $e' = (u, v)$, $e'' = (u, v)$ avec $u, v \in V$

Exemple

Il y a une boucle sur le sommet B



Il y a une arête multiple entre les sommets A et B



Graphes simples et multiples

On se place dans un graphe non orienté $G = (V, E)$

Définition : Graphe simple

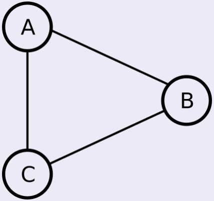
Un graphe simple est un graphe qui ne possède ni boucles ni arêtes multiples

Définition : Graphe multiple

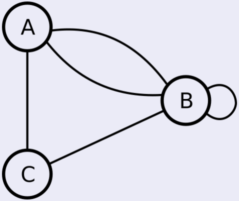
Un graphe multiple est un graphe qui possède au moins une boucle ou une arête multiple

Exemple

Un graphe simple



Un graphe multiple



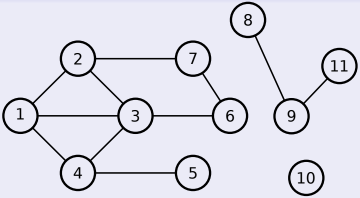
Degré

On se place dans un graphe non orienté $G = (V, E)$

Définition : Degré

Le **degré** d'un sommet u, noté $d(u)$, est le nombre d'arêtes incidentes à u :
$d(u) = |\delta(u)|$

Exemple



Dans ce graphe :

- Le degré du sommet 3 est 4
- Le degré du sommet 8 est 1 : $d(8) = 1$
- Le degré du sommet 10 est 0 : $d(10) = 0$

Propriété

La somme des degrés des sommets du graphe vaut deux fois le nombre d'arêtes :

$$\sum_{u \in V} d(u) = 2 \cdot m$$

Corollaire de la somme des degrés

Le nombre de sommets de degré impair est pair

Démonstration.

On a $\sum_{u \in V} d(u) = 2 \cdot m$
Séparons les sommets de degré pair et ceux de degré impair. Ainsi, on pose :
$V_P = \{u \in V | d(u) = 2 \cdot k_u\}$ et $V_I = \{u \in V | d(u) = 2 \cdot k_u + 1\}$

$$2 \cdot m = \sum_{u \in V} d(u) = \sum_{u \in V_P} d(u) + \sum_{u \in V_I} d(u)$$

$$2 \cdot m = \sum_{u \in V_P} 2 \cdot k_u + \sum_{u \in V_I} (2 \cdot k_u + 1)$$

$$2 \cdot m = 2 \cdot \sum_{u \in V_P} k_u + 2 \cdot \sum_{u \in V_I} k_u + |V_I|$$

$$|V_I| = 2 \cdot (m - \sum_{u \in V_P} k_u - \sum_{u \in V_I} k_u)$$

□

Voisinage

On se place dans un graphe non orienté $G = (V, E)$

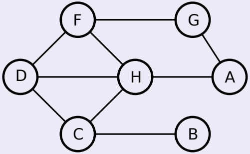
Définition : Adjacence

Un sommet u est adjacent à un sommet v si $\exists (u, v) \in E$

Définition : Voisinage

- Le sommet u est un voisin du sommet v si u est adjacent à v
- Le voisinage du sommet u est l'ensemble des sommets adjacents à u
- Le voisinage de u est noté $\mathcal{N}(u) = \{v \in V | (u, v) \in E\}$

Exemple



Dans ce graphe :

- Le sommet C est adjacent au sommet H
- Les sommets A et F sont les voisins de G
- $\mathcal{N}(D) = \{F, H, C\}$

Définition : Graphe orienté

Un graphe orienté G, noté $G = (V, A)$, est défini par :

- V : ensemble des sommets *(appelés vertices en anglais)*
- A : ensemble des arcs *(appelés arcs en anglais)*

Définition : Arc

Un arc $e \in A$ dans un graphe $G = (V, A)$ est une paire orientée de sommets :

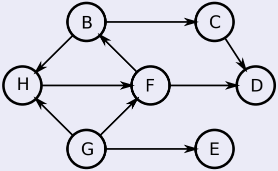
$$e = (u, v) \text{ avec } u, v \in V$$

Remarque sur les arcs

L'ordre des sommets d'un arc est importance :

l'arc (u, v) est différent de l'arc (v, u)

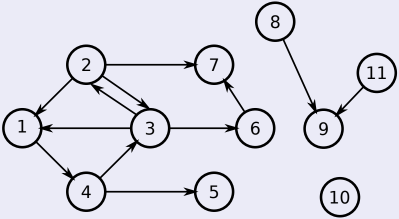
Exemple



Graphe $G = (V, A)$ avec :

- $V = \{B, C, D, E, F, G, H\}$
- $A = \{(B, C), (B, H), (C, D), (F, B), (F, D), (G, E), (G, F), (G, H), (H, F)\}$

Autre exemple



Graphe $G = (V, A)$ avec :

- $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$
- $A = \{(1, 4), (2, 1), (2, 3), (2, 7), (3, 1), (3, 2), (3, 6), (4, 3), (4, 5), (6, 7), (8, 9), (11, 9)\}$

Nombre de sommets et d'arcs

On se place dans un graphe orienté $G = (V, A)$

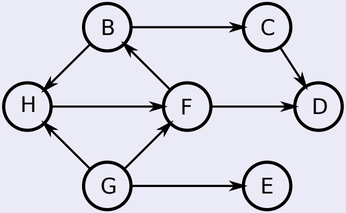
Définition : Ordre d'un graphe

Comme dans un graphe non orienté, le nombre de sommets d'un graphe orienté est appelé ordre et est noté n : $|V| = n$

Définition : Taille d'un graphe

Comme dans un graphe non orienté, le nombre d'arcs d'un graphe orienté est appelé taille et est noté m : $|A| = m$

Exemple



Dans ce graphe :

- $n = 7$
  Ce graphe a 7 sommets
  C'est un graphe d'ordre 7
- $m = 9$
  Ce graphe a 9 arcs
  C'est un graphe de taille 9

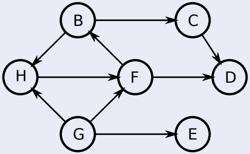
Incidence

On se place dans un graphe orienté $G = (V, A)$

Définition : Extrémité

- Comme dans un graphe non orienté, les extrémités d'un arc $e = (u, v)$ sont les sommets u et v
- L'extrémité initiale (origine) d'un arc $e = (u, v)$ est le sommet u
- L'extrémité finale (destination) d'un arc $e = (u, v)$ est le sommet v

Exemple



Dans ce graphe :

- F et H sont les extrémités de l'arc (H, F)
- H est l'origine de l'arc (H, F)
- F est la destination de l'arc (H, F)

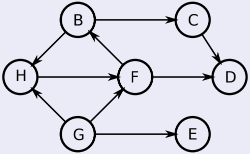
Incidence

On se place dans un graphe orienté $G = (V, A)$

Définition : Incidence

- Le sommet u est incident à un arc e si u est une extrémité de e
- L'arc e est un arc (incident) sortant du sommet u si e possède u comme extrémité initiale
- Les arcs sortants de u sont notés $\delta^+(u) = \{e \in A | e = (u, v)\}$
- L'arc e est un arc (incident) entrant du sommet u si e possède u comme extrémité finale
- Les arcs entrants sont notés $\delta^-(u) = \{e \in A | e = (v, u)\}$

Exemple



Dans ce graphe :

- L'arc (F, B) est un arc sortant du sommet F
- L'arc (G, F) est un arc entrant du sommet F
- $\delta^-(B) = \{(F, B)\}$
  $\delta^+(B) = \{(B, C), (B, H)\}$

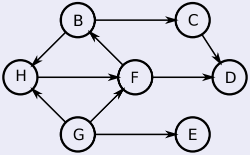
Incidence

On se place dans un graphe orienté $G = (V, A)$

Définition : Incidence d'ensemble de sommets

- Les arcs entrants d'un ensemble $V' \in V$ sont notés $\delta^-(V') = \left\{(u, v) \in A | u \notin V', v \in V'\right\}$
- Les arcs sortants d'un ensemble $V' \in V$ sont notés $\delta^+(V') = \left\{(u, v) \in A | u \in V', v \notin V'\right\}$

Exemple



Dans ce graphe :

- Les arcs sortants de l'ensemble $V' = \{B, C\}$ sont : $\delta^+(V') = \{(B, H), (C, D)\}$
- Les arcs entrants de l'ensemble $V' = \{B, C\}$ sont : $\delta^-(V') = \{(F, B)\}$

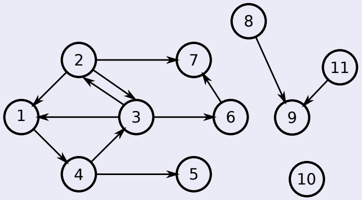
Degré

On se place dans un graphe orienté $G = (V, A)$

Définition : Degré

- Le degré sortant du sommet u est le nombre d'arcs sortants de u
- Le degré sortant d'un sommet u est noté $d^+(u) = |\delta^+(u)|$
- Le degré entrant du sommet u est le nombre d'arcs entrants de u
- Le degré entrant du sommet u est noté $d^-(u) = |\delta^-(u)|$
- Le degré d'un sommet u correspond l'ensemble des arcs incidents entrants et sortants : $d(u) = d^-(u) + d^+(u)$

Exemple



Dans ce graphe :

- Le degré sortant du sommet 3 est 3 : $d^+(3) = 3$
- Le degré entrant du sommet 11 est 0 : $d^-(11) = 0$
- Le degré du sommet 2 est 4 : $d(2) = d^-(2) + d^+(2) = 1 + 3 = 4$

Voisinage

On se place dans un graphe orienté $G = (V, A)$

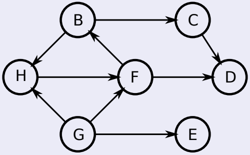
Définition : Adjacence

Un sommet u est adjacent à un sommet v si $\exists(u, v) \in A \vee \exists(v, u) \in A$

Définition : Voisinage

- Un sommet u est un voisin entrant du sommet v si $(u, v) \in A$
- Un sommet u est un voisin sortant du sommet v si $(v, u) \in A$
- Le voisinage entrant du sommet u est $\mathcal{N}^-(u) = \{v \in V | (v, u) \in A\}$
- Le voisinage sortant du sommet u est $\mathcal{N}^+(u) = \{v \in V | (u, v) \in A\}$

Exemple



Dans ce graphe :

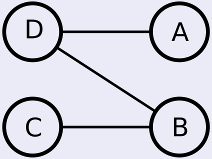
- Le sommet C est adjacent aux sommets B et D
- Les sommets C et F sont les voisins entrants de D
- $\mathcal{N}^+(F) = \{B, D\}$

Définition : Graphe complémentaire

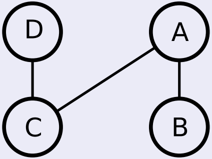
Le graphe complémentaire, noté $\bar{G}$, d'un graphe $G = (V, E)$ est le graphe $\bar{G} = (V, \bar{E})$ tel que $\forall u, v \in V$:

$$(u, v) \in E \Leftrightarrow (u, v) \notin \bar{E}$$

Exemple



G



$\bar{G}$

Remarque

Le complémentaire du complémentaire de G est G : $\bar{\bar{G}} = G$

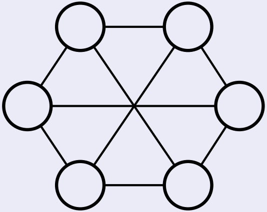
Définition : Graphe régulier

Un graphe régulier est un graphe $G = (V, E)$ dont tous les sommets ont le même degré.
C'est-à-dire $\forall u, v \in V$ alors $d(u) = d(v)$

Définition : Graphe Δ-régulier

Un graphe Δ-régulier est un graphe $G = (V, E)$ dont tous les sommets sont de degré Δ.
C'est-à-dire $\forall u \in V$ alors $d(u) = \Delta$

Exemple



- C'est un graphe régulier où tous les sommets sont de degré 3
- C'est donc un graphe 3-régulier

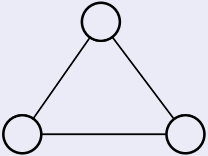
Graphes complets

Définition : Graphe complet

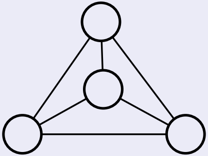
Un graphe complet $G = (V, E)$ est un graphe possédant tous les arêtes possibles. C'est-à-dire $\forall u, v \in V$ alors $(u, v) \in E$.

- Un graphe complet de n sommets est noté K_n et possède $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$ arêtes

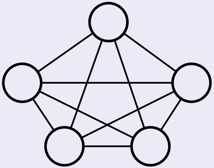
Exemple



K_3



K_4



K_5

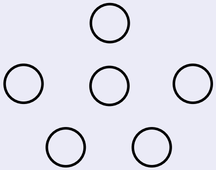
Graphes nuls

Définition : Graphe nul

Un graphe nul $G = (V, E)$ est un graphe sans arêtes. C'est-à-dire $E = \emptyset$.

- Un graphe nul de n sommets est noté N_n

Exemple



N_6

- Graphe nul à 6 sommets
- Il s'agit de N_6

Remarque

Le complémentaire d'un graphe complet est un graphe nul, on a donc $\bar{K}_n = N_n$

Sous-graphe et sous-graphes induits

Définition : Sous-graphe

$G' = (V', E')$ est un sous-graphe de $G = (V, E)$:

- $V' \subseteq V$
- $E' \subseteq E$
- $\forall e = (u, v) \in E' \Rightarrow u, v \in V'$

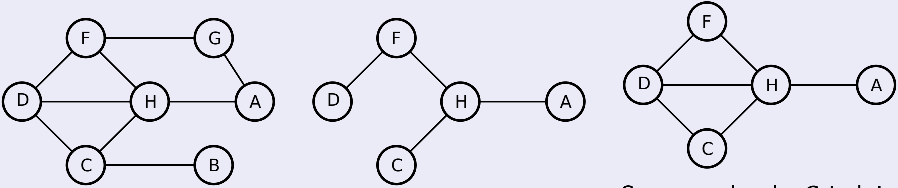
Définition : Sous-graphe induit

$G' = (V', E')$ est un sous-graphe de $G = (V, E)$ induit par V' :

- $V' \subseteq V$
- $E' \subseteq E$
- $\forall u, v \in V'$ et $e = (u, v) \in E \Rightarrow e \in E'$

Le sous-graphe de G induit par V' est noté $G[V']$

Exemple



Graphe G

Sous-graphe de G

Sous-graphe de G induit par $\{A, C, D, F, H\}$

Cliques et stables

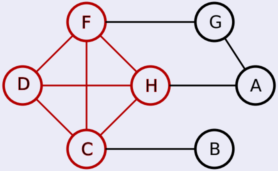
Définition : Clique

Une clique est un sous-graphe complet

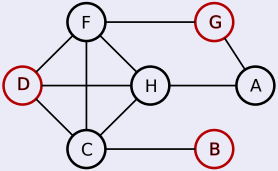
Définition : Stable

Un stable est un sous-graphe induit nul

Exemple



L'ensemble $\{C, D, F, H\}$ forme une clique



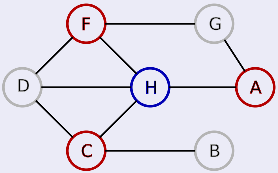
L'ensemble $\{B, D, G\}$ forme un stable

Stables

Remarques

- La partition des sommets en stables s'appelle aussi coloration
- Le nombre minimum de stables d'un graphe G est son nombre chromatique noté $\chi(G)$
- Les graphes biparti ont un nombre chromatique qui vaut 2

Exemple



- $\{A, C, F\}$ est un stable
- $\{B, D, G\}$ est un stable
- $\{H\}$ est un stable
- Le nombre chromatique de ce graphe est 3

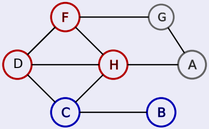
Partition des sommets

Définition : Partition

On parle de partition des sommets d'un graphe $G = (V, E)$ lorsque l'on considère des ensembles V_1, V_2, V_3, ... de sommets tels que :

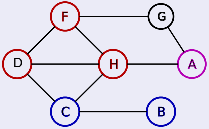
- $V_i \cap V_j = \emptyset \ \forall i, j$
- $\cup_i V_i = V$

Exemple



- Ensemble $V_1 = \{D, F, H\}$ en rouge
- Ensemble $V_2 = \{C, B\}$ en bleu
- Ensemble $V_3 = \{A, G\}$ en gris
- V_1, V_2 et V_3 forment une partition des sommets du graphe

Exemple



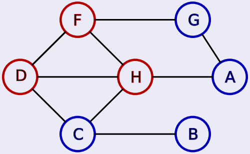
- Ensemble $V_1 = \{D, F, H, A\}$ en rouge
- Ensemble $V_2 = \{C, B, A\}$ en bleu
- $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$ et $V_1 \cup V_2 \neq V$
- V_1 et V_2 ne forment une partition des sommets du graphe

Coupes

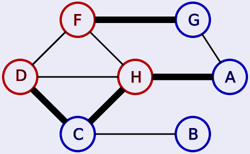
Définition : Coupe

- Une coupe est une partition des sommets en deux sous-ensembles S et $V \setminus S$
- Par extension, l'ensemble des arêtes incidentes à S, noté $\delta(S)$ est appelé coupe

Exemple



$S = \{D, F, H\}$ en rouge



$\delta(S)$ en gras

Remarque

Si toutes les arêtes du graphe sont dans la coupe ($\delta(S) = E$), on dit que le graphe est biparti.

Graphe biparti

Définition : graphe biparti

Un graphe biparti est un graphe pour lequel il existe une bi-partition $\{S, T\}$ de V tel que $E \subseteq \{(u, v) | u \in S, v \in T\}$.
On a $V = S \cup T$ et $S \cap T = \emptyset$.
Les graphes $G[S]$ et$G[T]$ forment des stables.

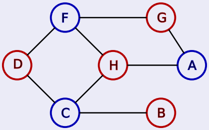
Définition : graphe biparti complet

Un graphe biparti complet K_{n_S, n_T} est un graphe biparti $G = (S \cup T, E)$ tel que

$$|S| = n_S, \ |T| = n_T \text{ et } \forall u \in S, v \in T, \text{ alors } (u, v) \in E$$

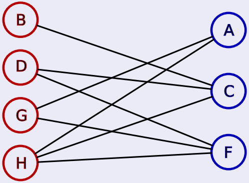
Graphe biparti

Exemple



Graphe biparti

$S = \{B, D, G, H\}$ en rouge, $T = \{A, C, F\}$ en bleu

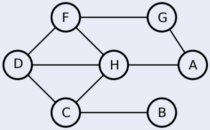


Même graphe, réarrangé

Théorème

Un graphe est biparti si et seulement si il ne contient pas de cycle de longueur impaire

Exemple



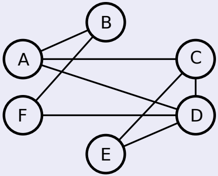
- Graphe non biparti
- L'ensemble $\{D, F, H\}$ forme un cycle impair

Graphes planaires

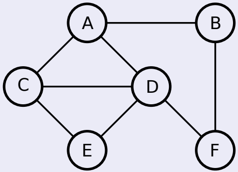
Définition : Graphe planaire

Un graphe planaire est un graphe qui peut se dessiner de telle manière que ses arêtes ne se croisent pas.

Exemple



Ce graphe est planaire

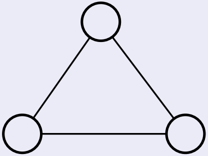


On l'observe plus facilement en redistribuant les sommets

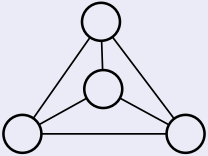
Graphes planaires et complets

Graphes complets et planaires

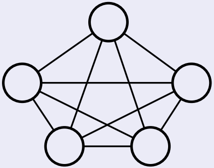
- Le plus grand graphe complet planaire est K_4
- Les graphes complets de 5 sommets et plus ne sont pas planaires



K_3 est planaire



K_4 est planaire



K_5 n'est pas planaire

Graphes planaires et coloration

Théorème des 4 couleurs

Le nombre chromatique d'un graphe planaire est au plus 4

Remarques

- Tous les graphes 4-coloriables ne sont pas planaires
- Une carte (type géographique) peut être modélisée par un graphe planaire et est donc coloriable avec au plus 4 couleurs

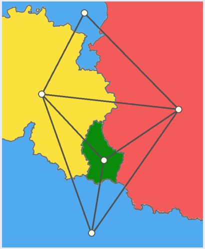


Figure – Coloration de quelques pays européens

Chaines

Définition : Chaine

Dans un graphe $G = (V, E)$, une chaine P est une suite ordonnée de sommets $P = v_1, \dots v_k$ où $v_i \in V$ et $(v_i, v_{i+1}) \in E$

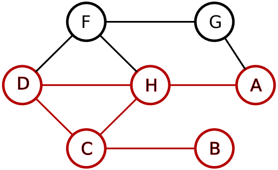
Vocabulaire en plus

- Si les arêtes d'une chaine sont empruntées au plus une fois, on parle de chaine simple
- Si les sommets d'une chaine sont empruntés au plus une fois, on parle de chaine élémentaire
- Le nombre d'arête d'une chaine est appelé longueur

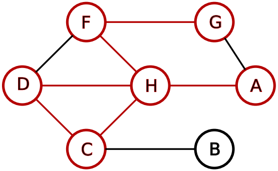
Remarque

- Si une chaine est élémentaire alors elle simple
- Une chaine simple n'est pas forcément élémentaire
- De toute chaine peut être extraite une chaine élémentaire

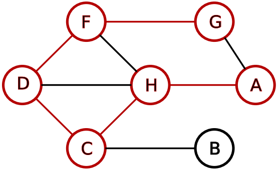
Exemples



- $P = A, H, C, D, H, C, B$ est une chaine de longueur 6



- $P = A, H, C, D, H, F, G$ est une chaine simple de longueur 6



- $P = A, H, C, D, F, G$ est une chaine élémentaire de longueur 5

Cycles

Définition : Cycle

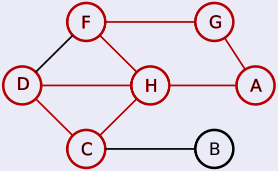
Un cycle est une chaine simple où l'arête (v_k, v_1) existe

Vocabulaire en plus

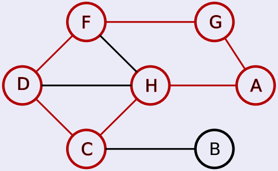
- Un cycle élémentaire est une chaine élémentaire où l'arête (v_k, v_1) existe
- Un graphe qui ne contient pas de cycles est appelé acyclique

Exemples

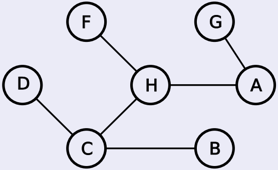
$P = A, H, C, D, H, F, G$ est un cycle



$P = A, H, C, D, F, G$ est un cycle élémentaire



Graphe acyclique



Chaines et chemins

Définition : Chaine

Dans un graphe $G = (V, A)$, une chaine P est une suite ordonnée de sommets $P = v_1, \dots v_k$ où $v_i \in V$ et $(v_i, v_{i+1}) \in A$ ou $(v_{i+1}, v_i) \in A$

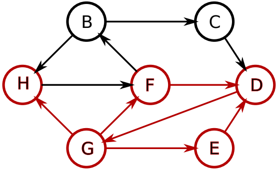
Définition : Chemin

Dans un graphe $G = (V, A)$, un chemin P est une suite ordonnée de sommets $P = v_1, \dots v_k$ où $v_i \in V$ et $(v_i, v_{i+1}) \in A$

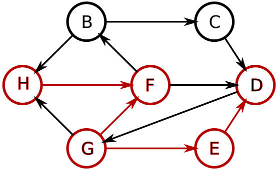
Vocabulaire en plus

- Si les sommets d'une chaine sont empruntés au plus une fois, on parle de chaine élémentaire
- Si les sommets d'un chemin sont empruntés au plus une fois, on parle de chemin élémentaire

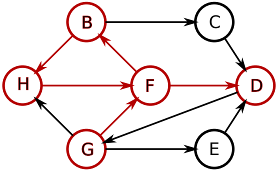
Exemples



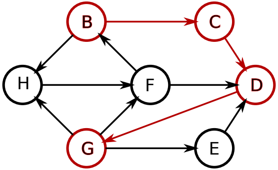
$P = H, G, F, D, E, G, D$ est une chaine



$P = H, F, G, E, D$ est une chaine élémentaire



$P = G, F, B, H, F, D$ est une chemin



$P = B, C, D, G$ est un chemin élémentaire

Cycles et circuits

Définition : Cycle

Un cycle est une chaine simple où l'arc (v_1, v_k) ou l'arc (v_k, v_1) existe

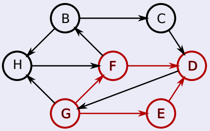
Définition : Circuit

Un circuit est un chemin où l'arc (v_k, v_1) existe

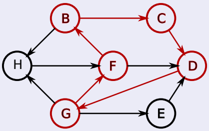
Vocabulaire en plus

- Un sommet r tel qu'il existe un chemin de r vers tous les autres sommets du graphe est appelé racine

Exemples



$P = F, D, E, G$ est un cycle



$P = B, C, D, G, F$ est un circuit

Graphes hamiltoniens

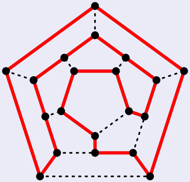
Définition : Chaine et cycle hamiltonien

- Une chaine hamiltonienne est une chaine qui passe par tous les sommets du graphe exactement une fois
- Un cycle hamiltonien est un cycle qui passe par tous les sommets du graphe exactement une fois

Définition : Graphe hamiltonien

Un graphe hamiltonien est un graphe qui possède un cycle hamiltonien

Exemple



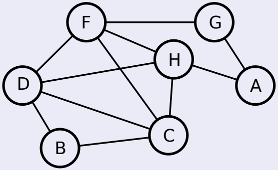
- Graphe hamiltonien
- Supprimer n'importe quelle arête du cycle hamiltonien donne une chaine hamiltonienne

Graphes eulériens

Définition : Cycles et graphes eulériens

- Un cycle eulérien est un cycle qui passe par toutes les arêtes du graphe exactement une fois
- Un graphe eulérien est un graphe qui possède un cycle eulérien

Exemple



- Graphe Eulérien
- (H, D) ; (D, C) ; (C, F) ; (F, D) ; (D, B) ; (B, C) ; (C, H) ; (H, A) ; (A, G) ; (G, F) ; (F, H) ;

Théorème

Un graphe est eulérien si et seulement si tous les sommets sont de degré pair.

Graphes chaines

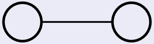
Définition : Graphe chaine

Un graphe chaine est un graphe composé uniquement d'une chaine

- Un graphe chaine de n sommets est noté P_n

Exemple

- P_2



- P_3

- P_n

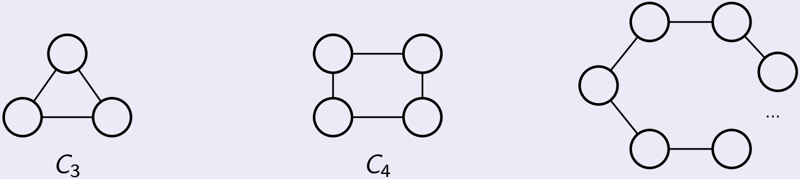
Graphes cycles

Définition : Graphe cycle

Un graphe cycle est un graphe composé uniquement d'un cycle

- Un graphe cycle de n sommets est noté C_n

Exemple



C_3 C_4 C_n

Remarques

- Un graphe cycle est 2-régulier
- $C_3 = K_3$

DAG

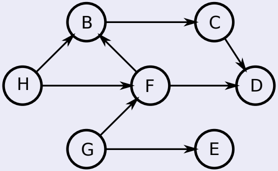
Définition : Graphe orienté sans circuit

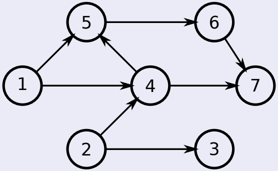
Un graphe orienté sans circuit, aussi appelé DAG pour *directed acyclic graph*, est un graphe orienté qui ne possède pas de circuits

Propriété

Un DAG possède un ordre topologique, c'est-à-dire que les sommets peuvent être numérotés de telle façon que pour chaque arc, le sommet origine a un numéro plus petit que le sommet destination

Exemple





Connexité dans un graphe non orienté

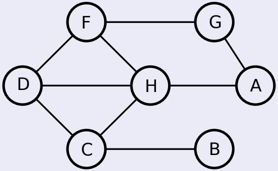
Définition : Graphe connexe

Un graphe $G = (V, E)$ est connexe s'il existe une chaine entre chaque paire de sommets de V

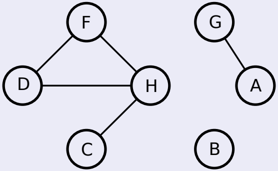
Définition : Composante connexe

Une composante connexe de G est un sous-graphe induit connexe maximal (au sens de l'inclusion) de G

Exemple



Graphe connexe



Graphe non connexe possédant 3 composantes connexes

Faible connexité dans un graphe orienté

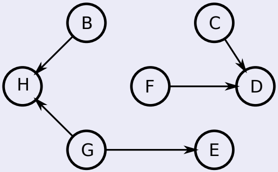
Définition : Graphe faiblement connexe

Un graphe $G = (V, E)$ est faiblement connexe s'il existe une chaine entre chaque paire de sommets de V

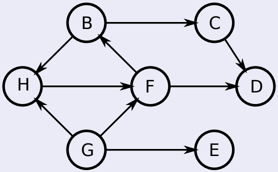
Définition : Composante faiblement connexe

Une composante faiblement connexe de G est un sous-graphe induit faiblement connexe maximal (au sens de l'inclusion) de G

Exemple



Graphe non faiblement connexe



Graphe faiblement connexe

Forte connexité dans un graphe orienté

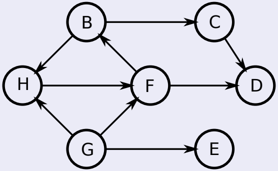
Définition : Graphe fortement connexe

Un graphe $G = (V, E)$ est fortement connexe s'il existe un chemin entre chaque paire orientée de sommets de V

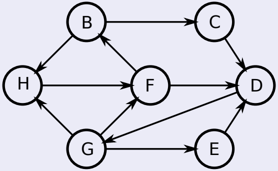
Définition : Composante fortement connexe

Une composante fortement connexe de G est un sous-graphe induit fortement connexe maximal (au sens de l'inclusion) de G

Exemple



Graphe faiblement connexe et non fortement connexe



Graphe fortement connexe

Remarques sur la connexité

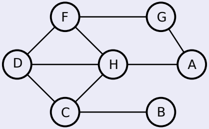
Connexité et composante connexes

Un graphe est $\begin{cases}\text{connexe}\\ \text{faiblement connexe}\\ \text{fortement connexe}\end{cases}$ lorsqu'il possède une $\begin{cases}\text{composante connexe}\\ \text{composante faiblement connexe}\\ \text{composante fortement connexe}\end{cases}$

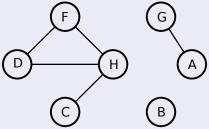
Composante connexe et partition

Les composantes (•/faiblement/fortement) connexes d'un graphe forment une partition des sommets du graphe

Exemple



Graphe connexe : il possède une seule composante connexe



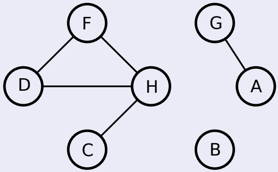
Graphe non connexe : ses 3 composantes connexes forment une partition des sommets du graphe

Maximal VS. Maximum

Ensemble maximal ou maximum ?

- Une composante (•/faiblement/fortement) connexe est un ensemble maximal de sommets car ajouter y un sommet *casse* la connexité
- Un ensemble maximum de sommets est un ensemble de sommets tel qu'il n'en existe pas d'autre avec plus de sommets

Exemple



- L'ensemble $V' = \{F, D, H\}$ n'est pas maximal car en y ajoutant le sommet C, on conserve la connexité de $G[V']$
- La composante maximum est *la plus grande* (celle qui possède le plus grand nombre de sommets) : $\{C, F, D, H\}$