PROBLEMAS DE MATEMÁTICA DISCRETA

Lista 2 - Indução, Teorema Fundamental da Aritmética

2.1 Use o crivo de Erastótenes para listar todos os números primos entre 1 e 200.

2.2 Determine o conjunto $A = \{4m + 7n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$ mostrando, em particular, que se $a \geq 29$, então $a \in A$.

2.3 Sejam $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{N}$ e $d = \text{mdc}(a_1, \cdots, a_n)$. Prove que existem inteiros $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{Z}$ tais que

$$d = x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n.$$

2.4 Determine uma fórmula para a soma dos primeiros n cubos, $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3$, em função de $n \in \mathbb{N}$, e por indução.

2.5 Seja $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ o coeficiente binomial, com $n \geq k \geq 0$ inteiros. Mostre, por indução, a igualdade:

$$\binom{2n}{n} = \frac{2^n}{n!} \prod_{k=1}^{n} (2k - 1).$$

2.6 Seja P um polígono convexo (pode assumir que é regular - todos os lados iguais, e vértices à mesma distância do centro). Uma diagonal de P é um segmento de recta que une dois vértices não consecutivos. Mostre que, se P tem n lados, $n \geq 3$, o número de diagonais de P é $\frac{1}{2}n(n-3)$.

2.7 Mostre que, se $n \geq 2$ e n não é primo então existe um primo p que divide n e tal que $p^2 \leq n$. Use este resultado para mostrar que 467 é primo.

2.8 Um número $n \in \mathbb{N}$ chama-se perfeito se n é igual à soma de todos os seus divisores distintos de n (por exemplo 6 é perfeito porque $6 = 1 + 2 + 3$).
(a) Dê um exemplo de um número perfeito distinto de 6.
(b) Mostre que, se p é primo e $2^p - 1$ também, então $2^{p-1}(2^p - 1)$ é um número perfeito

2.9 Seja $\Delta(n)$ a cardinalidade do conjunto dos divisores positivos de n. Por exemplo, $\Delta(6) = 4$, uma vez que $\text{Div}(6) = \{1, 2, 3, 6\}$. Seja $n = p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}$ a factorização de n em primos distintos. Prove que $\Delta(n) = (k_1 + 1) \cdots (k_r + 1)$.

2.10 Com a mesma notação do problema anterior, prove que $\Delta(n)$ é ímpar se e só se n é um quadrado, isto é existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $m^2 = n$.

2.11 Considere a factorização de $n \in \mathbb{N}$ em primos *não necessáriamente distintos*, e seja p o menor primo que divide n. Mostre que o número de factores é, no máximo, $\log_p n$.

2.12 Prove que se $n \in \mathbb{N}$ não é um quadrado, então $\sqrt{n}$ é um número irracional.

2.13 Um *triplo pitagórico* é $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$ de tal forma que $x^2 + y^2 = z^2$.
(a) Mostre que, se $n > m > 0$ são primos entre si, e não ambos ímpares, então $(n^2-m^2,\ 2nm,\ n^2+m^2)$ é um triplo pitagórico, e que mdc$(n^2-m^2,\ 2nm,\ n^2+m^2) = 1$.
(b) Prove que todos os triplos pitagóricos são múltiplos da forma indicada na alínea (a), ou seja, da forma $(a(n^2-m^2),\ 2amn,\ a(n^2+m^2))$ com $a, m, n \in \mathbb{N}$ e $n > m > 0$ não ambos ímpares.

2.14 Seja $\phi(n)$ a função de Euler, e $\Delta(n)$ a cardinalidade do conjunto dos divisores de n. Mostre que $\Delta(n) + \phi(n) \leq n + 1$. Para que valores de n há igualdade?