PROBLEMAS DE MATEMÁTICA DISCRETA

Lista 0 - Revisões de Conjuntos e Funções

0.1 Considere o conjunto $A = \{x \in \mathbb{Z} : x^2 < 16\}$ e $B = \{1, 3, a, b, 7\}$
- (a) Descreva em extensão os conjuntos A, $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ e $A \Delta B$.
- (b) Quantos elementos tem cada um dos conjuntos da alínea anterior?
- (c) Considere os conjuntos $A^2 = A \times A$, B^2, $A \times B$ e $B \times A$. Determine as suas cardinalidades. A quais destes conjuntos pertencem os pares $(-8, a)$, $(3, a)$, $(3, 7)$, $(3, 3)$, $(2, 3)$ e $(a, -2)$?

0.2 Indique o número de elementos de cada um dos seguintes conjuntos:
- (a) $\emptyset$, $\{\emptyset\}$
- (b) $\{n \in \mathbb{N} : n = 2k + 1$ para algum $k \in \mathbb{Z}\} \cap [100]$
- (c) $\{$palavras de 3 letras só com vogais$\}$
- (d) $\{n \in \mathbb{Z} : n = \pm\sqrt{k},\ k \in [50]\}$

0.3 Se A e B são conjuntos com $|A| = 4$ e $|B| = 7$ o que pode dizer sobre:
- (a) $|A|^2$, $|A^2|$, $|A \times B|$?
- (b) $|A \cap B|$, $|A \cup B|$ e $|A \Delta B|$?
- (c) $|\mathcal{P}(A)|$ e $|\mathcal{P}_i(A)|$ para $i = 0, \cdots, 4$?

0.4 Seja $a \in \mathbb{N}$. O conjunto de todos os múltiplos inteiros de a denota-se por $a\mathbb{Z}$:

$$a\mathbb{Z} := \{an : n \in \mathbb{Z}\}.$$

Diga, justificando, se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:
- (a) $7 \in 2\mathbb{Z}$
- (b) $-10 \in 2\mathbb{Z}$
- (c) $2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z} = 6\mathbb{Z}$
- (d) $2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$
- (e) $6\mathbb{Z} \subset 3\mathbb{Z}$
- (f) $3\mathbb{Z} \setminus 2\mathbb{Z} = \{3 + 6k : k \in \mathbb{Z}\}$
- (g) $ab\mathbb{Z} \subset a\mathbb{Z}$, para quaisquer $a, b \in \mathbb{N}$

0.5 Se A e B são conjuntos com $|A| = 5$ e $|B| = 8$, diga quais das seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:
- (a) Não existe nenhuma aplicação injectiva de B para A.
- (b) Qualquer aplicação $A \to B$ é injectiva.
- (c) Existe uma aplicação $A \to B$ injectiva.
- (d) Existe uma aplicação $A \to B$ sobrejectiva.
- (e) Qualquer aplicação $B \to A$ é sobrejectiva.

0.6 Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$ duas aplicações. Mostre que:
- (a) Se f e g são injectivas, $g \circ f$ também o é.

(b) Se f e g são sobrejectivas, $g \circ f$ também o é.

0.7 Seja $f : X \to Y$ uma função entre X e Y e sejam $Z, W \subset Y$. Prove que
(a) $f^{-1}(Z \cap W) = f^{-1}(Z) \cap f^{-1}(W)$;
(b) $f^{-1}(Z \cup W) = f^{-1}(Z) \cup f^{-1}(W)$.

0.8 Dados conjuntos A, B e C, mostre que $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$. Indique se a igualdade $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ é válida.

0.9 Considere as seguintes expressões de funções $f(x) := 3x - 2$; $g(x) := |x|$; $h(x) := x^3$; $j(x) = \cos x$.
(a) Se considerarmos $f, g, h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, quais são injectivas, sobrejectivas, e bijectivas?
(b) Responda à mesma questão, considerando agora que $f, g, h, j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

0.10 (a) Dê exemplos de subconjuntos diferentes $A, B \subset \mathbb{Z}$, e uma função $g : A \to B$ bijectiva.

(b) Dado $a \in \mathbb{N}$ (arbitrário) encontre uma bijeção entre $\mathbb{Z}$ e $a\mathbb{Z}$.

0.11 Dê exemplos de uma função em cada uma das condições:
(a) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ injectiva mas não sobrejectiva;
(b) $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sobrejectiva mas não injectiva;
(c) $h : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ bijectiva.

0.12 Denotamos por Y^n o produto cartesiano de Y por si próprio $n \in \mathbb{N}$ vezes, e por $\mathcal{F}(X, Y)$, o conjunto das funções de X em Y. Seja X um conjunto finito de cardinal $|X|$. Determine uma bijecção natural entre $\mathcal{F}(X, Y)$ e o conjunto $Y^{|X|}$.

0.13 Considere, no conjunto dos seres humanos, as relações $\to$ e $\wedge$ definidas por:
- $x \to y$, sempre que x é pai de y;
- $x \wedge y$, sempre que x é irmão gémeo de y, ou $x = y$.

(a) Para a relação $\to$ indique se alguma das propriedades - reflexiva, simétrica ou transitiva - se verifica.
(b) Mostre que $\wedge$ é uma relação de equivalência.

0.14 Seja $\equiv_3$ uma relação definida em $\mathbb{Z}$ da seguinte forma:

$$a \equiv_3 b \quad \text{se e só se} \quad a - b \in 3\mathbb{Z}$$

Mostre que $\equiv_3$ é uma relação de equivalência. Quantas classes de equivalência existem?

0.15 Seja $A = \{1, 2, \cdots, n\}$ e considere a seguinte relação $\sim$ definida no conjunto $A^2 = A \times A$, por $(a, b) \sim (c, d)$ se e só se $(a, b) = (c, d)$ ou $(a, b) = (d, c)$. Mostre que $\sim$ é uma relação de equivalência. Quantas classes de equivalência existem?