PROBLEMAS DE MATEMÁTICA DISCRETA

Lista 1 - Divisibilidade, Algoritmo de Euclides, Equação de Bézout

1.1 Considere as expressões matematicamente correctas: $53 = 11 \cdot 5 - 2$, $53 = 10 \cdot 5 + 3$ e $53 = 11 \cdot 4 + 9$. (a) Qual delas representa a divisão de 53 por 5? (b) Determine o resto e o quociente das divisões de 340 e de 625 por 13.

1.2 (a) Seja $\{1, 2, 4, 7, 8, a, b, c\}$ o conjunto dos divisores de um dado natural n. Determine n e a, b, c.
(b) Determine o conjunto dos números inteiros que têm 3, 5 e 6 (todos os 3 números) como divisores.

1.3 Suponha que dispõe de dois conjuntos de folhas de papel com as seguintes dimensões. Conjunto A: 5 cm de largura, 22 cm de comprimento; Conjunto B: 6 cm de largura e 22 cm de comprimento.
(a) Usando apenas um tipo de folhas, consegue medir um objecto com 1 cm? Em que caso e como?
(b) Para medir um objecto com 8 cm, com qual dos conjuntos usa menos folhas?

1.4 Suponha que dispõe de vários azulejos com dimensões de 21cm $\times$ 15cm. Qual o tamanho do lado do menor quadrado que se pode formar com estes azulejos? Quantos azulejos compõem esse quadrado?

1.5 Calcule (a, b) e exprima-o como combinação linear inteira de a e b nos seguintes casos:
(a) $a = 35$, $b = 8$
(b) $a = 114$, $b = 39$
(c) $a = 1534$, $b = 123$

1.6 Encontre o máximo divisor comum d, de 2163 e 910, e inteiros x, y que satisfaçam

$$d = 2163\,x + 910\,y,$$

com $0 < x < \frac{910}{d}$.

1.7 Encontre uma solução em inteiros $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ da equação

$$325\,x + 26\,y = 91.$$

1.8 Determine todas as soluções da equação diofantina:

$$54x + 21y = 906.$$

1.9 Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 23 & 5 \\ x & y \end{pmatrix}.$$

Mostre que existem $x, y \in \mathbb{Z}$ tais que $\det A = 1$ e determine uma tal matriz A, com $0 < x,\, y < 23$.

1.10 Considere a matriz

$$B = \begin{pmatrix} 72 & 30 \\ x & y \end{pmatrix}.$$

Mostre que, para quaisquer $x, y \in \mathbb{Z}$, o determinante de B é múltiplo de 6.

1.11 Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações, onde $a, b \in \mathbb{N}$:

(a) Se $17 \mid ab$ então $17 \mid a$ ou $17 \mid b$

(b) Se $16 \mid ab$ então $16 \mid a$ ou $16 \mid b$

(c) Se $(a, b) = 1$ e $d \in \mathbb{N}$ divide ab então $d \mid a$ ou $d \mid b$

1.12 Mostre que, se a é par e b é impar, então $(a, b) = (\frac{a}{2}, b)$.

1.13 Prove que para quaisquer $a, b \in \mathbb{Z}$ se tem $(a, a + b) \mid b$. Mostre que dois naturais conseutivos são primos entre si.

1.14 Mostre que, para todo o inteiro a e todo natural n temos $a - 1|(a^n - 1)$ [Sugestão: comece pelo caso $n = 2$]

1.15 Considere a sucessão de Fibonacci F_n, $n \in \mathbb{N}$, definida por $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, $n \in \mathbb{N}$ e $F_1 = F_2 = 1$. (a) Mostre que $(F_{n+1}, F_n) = 1$. (b) Prove que, se $4 \mid n$ então $3 \mid F_n$.

1.16 Determine a factorização em primos dos naturais (a, b) e $[a, b]$, sendo $a = 2^3 \cdot 5^7 \cdot 13^{12}$ e $b = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 13^7$.