PROBLEMAS DE MATEMÁTICA DISCRETA

Lista 3 - Bases; Congruências, Aritmética Modular

3.1 Resolva os seguintes problemas de mudança de base.
  (a) Escreva os números 37 e 73 na base 2.
  (b) Considere $a = 10101$, $b = 1111$ na base 2. Determine $a + b$ na base 2 e na base 10.

3.2 Resolva os seguintes problemas de mudança entre representação fraccionária/decimal.
  (a) Escreva em notação decimal as fracções $\frac{53}{16}$, $\frac{1}{7}$.
  (b) Escreva na forma de fracção irredutível $0,36$; $3,235$; $0,(23)$; $0,(9)$.

3.3 Calcule os valores das seguintes expressões algébricas em $\mathbb{Z}_{13}$:
  (a) $4 \times (11^2 + 12 - 7)$,
  (b) 10^{34},
  (c) $4^{-1} \times (25 - 12)$.

3.4 Diga, justificando, se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas.
  (a) $35 - 4^3 \equiv -1 \mod 5$,
  (b) Se $a \equiv b, \mod m$, então $b + 3a \equiv 4a + mb, \mod m$,
  (c) Se $a \equiv b, \mod m$, então $a^k \equiv b^{k+m}, \mod m$.

3.5 Diga, justificando, se algum dos seguintes elementos 7, 22, 3, 49 são invertíveis em $\mathbb{Z}_{60}$ e calcule o seu inverso, em caso afirmativo. Quantos elementos de $\mathbb{Z}_{60}$ são invertíveis?

3.6 Encontre um inverso de 89 módulo 232.

3.7 Seja $n = [a_k \cdots a_1 a_0]_{10} \in \mathbb{N}$ (isto é, a representação decimal tem os dígitos $a_k, \cdots, a_0 \in \{0, \cdots, 9\}$). Mostre que n é múltiplo de 11 se e só se a soma alternada dos dígitos também é. Ou seja, $11 \mid n$ se e só se $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots \equiv 0 (\mod 11)$ [Sugestão: $10^k \equiv (-1)^k (\mod 11)$, para todo o inteiro $k \geq 0$].

3.8 Seja $n = 6k + 5$ com $k \in \mathbb{Z}$. Mostre que existe um divisor primo p de n tal que $p \equiv 5 \pmod{6}$. Deduza que existem infinitos primos que verificam $p \equiv 5$ módulo 6.

3.9 Mostre que se p é um número primo, então $\binom{p}{k} \equiv 0 \mod p$, para qualquer $k \in \{1, \cdots, p - 1\}$. A mesma afirmação é verdadeira caso p não seja primo?

3.10 [Relação entre módulos múltiplos] Sejam $m, n, d \in \mathbb{N}$ tais que $m = nd$. Se $x \equiv a \mod n$, mostre que x é congruente, módulo m, com um elemento do conjunto $\{a,\, a + n,\, a + 2n, \cdots,\, a + (d - 1)n\}$.

3.11 Prove que qualquer que seja $a \in \mathbb{Z}$ se verifica $a^2 \equiv 0, 1, 2$ ou 4 módulo 7. Mostre que, se $a^2 + b^2 \equiv 0$, mod 7, então a e b são múltiplos de 7.

3.12 A que classes de congruência, módulo 8, pertencem os quadrados perfeitos? O número 6834923 pode ser um quadrado perfeito, ou a soma de 2 quadrados perfeitos?

3.13 Numa ilha há 13 camaleões verdes, 15 camaleões castanhos e 17 camaleões encarnados. Se dois camaleões de cores diferentes se encontram mudam ambos para a terceira cor (não mudam de cor em nenhuma outra situação). Será possível que a certa altura os camaleões fiquem todos da mesma cor? [Sugestão: analise o resultado do encontro de dois camaleões de cor diferente, módulo 3].