SAYISAL ANALİZ DERS NOTLARI

YRD. DOÇ. DR. MUSTAFA SÖNMEZ

İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ BÖLÜMÜ

AKSARAY ÜNİVERSİTESİ

İÇINDEKILER

1. SAYISAL ANALİZ VE SAYISAL HATALAR

1.1. GIRIŞ

Sayısal analiz (nümerik analiz veya sayısal çözümleme) matematik problemlerinin bilgisayar yardımı ile çözümlenme tekniğidir. Genellikle analitik olarak çözümleri çok zor veya imkânsız olan matematik problemleri belli hata aralıklarında çözümlemek için kullanılır.

Sayısal çözümün vazgeçilmez parçalarından biri de elektronik araçlardır. Bilgisayar teknolojisi ile sayısal analiz metotları birbirine paralel olarak gelişmiştir. Bunun en güzel örneği günümüzün en popüler nümerik analiz metotlarından biri olan sonlu elemanlar metodunun teorisi 1930'larda olmasına rağmen; yöntem el ile işlem yapmaya uygun olmadığından dolayı gerekli ilgiyi o yıllarda görmemiş ve gelişen bilgisayar teknolojisiyle birlikte kullanım alanı bulmuştur. Bunun yanında analitik işlemlerin bilgisayar ortamında yapılabilmesi yine sayısal analizin metotları kullanılma zorunluluğu vardır bu da sayısal analiz metotlarının gelişmesine neden olmuştur.

1.2 NİYE HESAP TABLOLARI?

Elektronik araçlar sayısal analizin ayrılmaz bir parçasıdır. Sayısal işlemler için süper bilgisayarlar kullanılabileceği gibi bunun yanında küçük hesap makineleri de kullanılabilir. Hangisi kullanılırsa kullanılsın, işlem yapılabilmesi için her ortamın kendine özgü yazım kurallarının bilinmesi gereklidir. Bilgisayarlarda problemlerin modellenmesi ve çözümleri için BASIC, Fortran, Pascal, C, C++, C#, Pyhton gibi genel amaçlı programlama dillerinden bir kullanılabilir. Ama bilgisayar programı yazmak zahmetli bir iş olduğu için matematiksel işlemler yapabilen ticari paket programları, örnek olarak Mathematica, MatLab veya MathCAD, kullanılabileceği gibi ücretsiz olarak internet ortamında bulunan SciLab ve Octava, gibi matematiksel işlemler yapmak için geliştirilmiş programlarda kullanılabilir. Bu programlar çok pahalı, yaygın olarak kullanımı olmadığından veya kendilerine özgü bir kullanım şekli olduğundan dolayı her ofis/kullanıcı için uygun olamayabilir. Buların yerine ofis paket programların değişmez parçası olan Elektronik Hesap Tablo (Spread Sheet) programları da sayısal işlemleri yapmak için günlük kullanıma elverişli olabilir.

Elektronik Hesap tablo programları, günlük mühendislik hesapları için kullanılabilecek güçlü bir araçtır. Bu tür programlar başlangıçta muhasebe kayıtlarını yapmak için geliştirilmiş olsa da bugün mühendislik, istatistik ve veri tabanı fonksiyonları içermektedirler. Bu programların avantajlarında biride kolayca amaca uygun işlemler yapabilmek ve bunu değiştirmektir. Diğer taraftan bu programların en büyük dezavantajı hücrelerde yapılan hesaplamaların görülmemesi ve sadece hücrenin hesap değerinin görülmesiydi. Ama bu dezavantaj yeni çıkan sürümlerde çözülmüştür.

Diğer taraftan bu hazır elektronik hesap tabloları ve matematik programları genel amaçlı kullanımlar için geliştirildiklerinden dolayı her kullanıcının gereksinimlerini bire bir karşılamayabilir.

Bu durumlarda sayısal çözümleme yapacak kişinin programlama dillerinden birini kullanarak program yazmaktan başka çaresi kalmayabilir. Burada yine elektronik hesap tablolarının kendi içinde programlama yapmaya yardımcı araçları kullanılabilir. Bu araçlar kullanıcıya VisualBasic formatında programlama yapma imkânı vermektedir. Fakat bu yazılan programların en büyük dezavantajı tek başlarına kullanılamıyor olmalarıdır, bu programlar her zaman hangi program içinde geliştirildi iseler o programların içinde çalışabilirler. Yani "exe" uzantılı halde getirilemezler.

Piyasada birçok Elektronik hesap tablo programları vardır. Bunlardan bazıları: Microsoft Ofisin bir parçası olan EXCEL, Coral Ofisin bir parçası olan Coral Lotus 1-2-3, OpenOffice ve StrarOffice programlarıdır. Bunlardan belki de en yaygın kullanılanı MS EXCEL'dir. Bundan dolayı problemlerin uygulamalarında MS EXCEL e göre işlemler yapılacaktır.

1.3. HATALAR VE HATALARIN KAYNAKLARI

Fiziksel veya sosyal olayların matematiksel olarak çözülmelerinde yapılan hatalar genellikle üç ana başlıkta toplanır. Bunlar modelleme hataları, ölçme hataları ve sayısal hatalardır.

- Modelleme hatası bir olayın formüle edilmesi esnasında varsayımlardan kaynaklanan hatalardır. Örnek olarak serbest düşme problemlerinin modellenmesinde, hava ile cisim arasındaki sürtünme kuvvetinin ihmal edilmesinden dolayı meydana gelen hatalar bu tür hatalar grubuna girer.

- Ölçme hatası, deney ve gözlemede ölçmelerden dolayı meydana gelen hatalardır. Yukarıdaki örnekte eğer serbest düşme yapan cismin, düştüğü mesafe veya havada düşerken gecen süre eğer yanlış ölçülürse bu tür hatalar ölçme hatası olarak tanımlanabilir.

- Sayısal hatalar veya diğer bir deyimle modelin çözümlemesinde yapılan hatalardır.

Bu bölümde sayısal hatalardan bahsedilecektir. Genel olarak sayısal hataları iki ana gruba ayırabiliriz: kesme hatalar (truncation error) ve yuvarlama hataları (roudn off). Bun hatalara başlamadan önce sayıların bilgisayarda hafızada saklanma şekli ve bunda kaynaklanan hataları neler olduğunun incelenecektir.

1.3.1 SAYILARIN TEMSİL EDİLMESİ

Sayılar günlük hayatta onluk sisteme göre işlemler yapılır. Örnek olarak 298 sayısı

$$\begin{aligned} 298 &= 2*100+9*10+8*1 \\ &= 2*10^2+9*10^1+8*10^0 \end{aligned}$$

Şeklinde işlemler yapılır. Bunun yanında bazı 12 lik 16 sistemlerde mevcuttur. Bilgisayarlarda ise işler 2 ilk (binary) sistemler üzerine kurulduğu için ikilik sistem kullanılır yani 298 sayısı bilgisayar hafızasında

$$\begin{aligned} 298 &= 1*2^8+0*2^7+0*2^6+1*2^5+0*2^4+1*2^3+0*2^2+1*2^1+0*2^0 \\ &= 1*256+0*128+0*64+1*32+0*16+1*8+0*4+1*2+0*1 \\ &= (100101010)_2 \end{aligned}$$

Şeklide hafızda tutulur. Yukarıda anlatılanlar tamsayıların hafızda tutuluş şeklini gösterir, eğer sayı kesirli sayılarda ise aynı mantıkla fakat biraz daha farklıdır. Bu işlem kullanılan bilgisayarların donanımları ve rakamları tanımlamaları ile ilgilidir. Örnek olarak 1/3 kesrini bilgisayar 0.33333... gibi belli adet hane kullanarak yazar. Sayıların tanımlanması için kaç hane kullanılacağı rakamların nasıl tanımlandığı ve bilgisayarın mimarisi ile ilgilidir. Bu tür hatalara *yuvarlama hatası* (round-off error) denir.

Örnek olarak bir integral işlemini analitik olarak yapmak yerine nümerik olarak yapmak için sürekli bir f(x) fonksiyonu yerine, bu fonksiyonun alanını kolay yoldan bulabilecek biçimde küçük parçacıklara bölünerek süreksiz hale getirilir. Bu süreksizlikler hatalara neden olur; bu tür hatalara kesme hatası denir.

Örnek olarak $\sin(x)$ fonksiyonunun değeri yaklaşık olarak Denklem (1-1) kullanılarak hesaplanabilir.

$$p(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \qquad (1\text{-}1)$$

Fakat $sin(x)$ fonksiyonunun gerçek değeri bu değildir. Fonksiyonunun gerçek değerini hesaplamak için Denk. (1-1) de verildiği gibi sonsuz bir seri kullanılmalıdır.

$$\sin(x) = p(x) + \sum_{n=5}^{\infty} \frac{x^{(2n+1)}}{(2n+1)!} \qquad (1\text{-}2)$$

Görüldüğü gibi $sin(x)$ fonksiyonun yaklaşık değerini bulmak için kullanılan ilk dört terim doğru cevabı vermemektedir. Bu hatanın nedeni, sinüs serisinin belli sayıdaki elemanının kullanılmasıdır. Yinemeli metotlarda, bu hatanın miktarı yineleme sayısına göre azaltılabilir, fakat sonsuz sayıda terim kullanılarak gerçek sonuca ulaşmak mümkün olmadığı için belli terim sayısı kullanılarak gerçek sonuca çok yakın bir değer bulunabilir. Belli sayıda terim kullanılmasından dolayı meydana gelen bu tür hatalara *'kesme hatası'* denir.

Kesme hatalarına ilaveten diğer bir problem bilgisayarların rakamları belli hassasiyetteki büyüklüklerde hafızalarında tutmalarıdır. Aşağıdaki örnek kesme hatasının nasıl oluştuğunu göstermektedir.

Örnek 1-1: Denklem 1-2' de verilen $sin(x)$ açılımını kullanarak $sin(\pi/7)$ fonksiyonunun değerini hesaplanması.

Terim. S.	Fonksiyon	Değeri
1	$\frac{\pi}{7}$	= 0.4487989505
2	$\frac{\pi}{7}+\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{7}\right)^3$	= 0.4337327325
3	$\frac{\pi}{7}+\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{7}\right)^3-\frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{7}\right)^5$	= 0.4338844648
4	$\frac{\pi}{7}+\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{7}\right)^3-\frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{7}\right)^5+\frac{1}{7!}\left(\frac{\pi}{7}\right)^7$	= 0.4338837371
5	$\frac{\pi}{7}+\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{7}\right)^3-\frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{7}\right)^5+\frac{1}{7!}\left(\frac{\pi}{7}\right)^7-\frac{1}{9!}\left(\frac{\pi}{7}\right)^9$	= 0.4338837391

6	$\frac{\pi}{7}+\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{7}\right)^{3}-\frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{7}\right)^{5}+\frac{1}{7!}\left(\frac{\pi}{7}\right)^{7}-\frac{1}{9!}\left(\frac{\pi}{7}\right)^{9}+\frac{1}{11!}\left(\frac{\pi}{7}\right)^{11}$	= 0.4338837391

Yukarıda görüldüğü gibi kullanılan terim sayısı artıkça, fonksiyon analitik değerine yaklaşacaktır. Eğer terim sayısı azaltılırsa hata miktarı büyür. Bilgisayar işlemlerinde sonsuz sayıda adım kullanılmayacağı için, belli sayıda terim kullanıldıktan sonra veya belli bir hata aralığına gelince işlemin durdurulması gerekir. Bu hata miktarları genellikle üç tür ölçek kullanılarak tanımlanır. Bunlar:

1. Mutlak Hata (Absolute Error, e_m): Analitik olarak bulunan veya doğru olarak kabul edilen değer ile nümerik olarak bulunan değerin farkının mutlak değeri mutlak hata olarak tanımlanır. Matematiksel olarak denklem (1-3) ile gösterilir.

$$e_m = \left|f(x)_{analitik} - f(x)_{sayısal}\right| \tag{1-3}$$

2. Bağıl Hata (Relative Error, e_b) : Gerçek değer ile yaklaşık değerin farklarının, gerçek değere oranı olarak tanımlanır. Matematiksel olarak denklem (1-4) ile gösterilebilir. Bağıl hata boyutsuz olduğu için, mutlak hatadan daha anlamlıdır. Ama fonksiyonun gerçek değeri sıfıra eşit olduğunda bağıl hata tanımsız olacağından dolayı her problem için kullanışlı değildir.

$$e_b = \left|\frac{f(x)_{analitik} - f(x)_{sayısal}}{f(x)_{analitik}}\right| \tag{1-4}$$

3. Anlamlı Basamak (Signiticant Digits): Mutlak ve bağıl hataları hesaplamak için fonksiyonun gerçek değerlerinin bilinmesi gereklidir. Fakat çoğu zaman analizden önce fonksiyonun gerçek değeri bilinmediğinden dolayı bu hata tanımları kullanılamaz. Bundan dolayı başka bir hata tanımlama ölçeği kullanılması gereklidir. Son iki yineleme arasındaki rakamların kaç tanesinin tekrar ettiğine bakılarak fonksiyonun gerçek değerine hangi ölçüde yakınsadığı kontrol edilebilir. Denklem (1.5) ve (1.6) de verilen değerler *(i-1)*. Adımdaki ve *i*. adımdaki fonksiyon değerleri ve Denk.(1.7) de fonksiyonun gerçek değeri olduğu varsayılırsa. Burada görüldüğü gibi 7 basamaklı bir sayının gerçek değeri işlemden önce bilinemez. Buna karşılık yinelemeler arasında bir ilişkiden söz edilebilir. Son iki yineleme x_{i-1} ve x_i arasında ilk 2 sayı tekrarlandığı için 2 anlamlı basamağı vardır denir.

$$f(x) = d_1 d_2 e_1 e_2 e_3 e_4 \tag{1-5}$$

$$f(x) = d_1 d_2 d_3 e_1 e_2 e_3 \tag{1-6}$$

$$f(x) = d_1 d_2 d_3 d_4 e_1 e_2 \tag{1-7}$$

Bu hata tanımlarını nasıl kullanıldığınızı bir örnekle göstermeden önce sırası gelmişken *doğruluk* ve *hassalık* terimlerini açıklamakta fayda vardır. Doğruluk bir hesaplanılan veya ölçülen değerin gerçek değere ne kadar yaklaştığını ifade eder. Bunun yanına hassaslık ise bir ölçüm veya hesabın kendi aralarında ne kadar uyumlu olduğunu gösterir. Örnek olarak n adet numunesi test edilmiş ve n farklı sonuç elde edilmiş olsun. Eğer sonuçlar bir birine yakınsa ölçüm hassastır denebilir ama sonucun doğruluğu tartışılabilir. Testin doğruluğunu kanıtlamak için ise kullanılan cihazın doğru olarak ölçme yaptığı kanıtlanmalıdır.

Örnek 1.2: Bir önceki örnekteki tabloyu kullanarak sin(π/6) nin değeri, terim sayısına göre mutlak hata, bağıl hata ve anlamlı basak sayılarının belirlenmesi. Sonuçlar aşağıda verilmiştir.

TS	Sonuç	Mutlak Hata	Bağıl Hata	An. Bas.
1	0,44879895050	1,49E-02	3,44E-02	
2	0,43373273250	1,51E-04	3,48E-04	1
3	0,43388446480	7,26E-07	1,67E-06	3
4	0,43388373710	2,02E-09	4,65E-09	5
5	0,43388373910	1,76E-11	4,05E-11	8
6	0,43388373910	1,76E-11	4,05E-11	10
n	0,43388373912	0	0	

ÇÖZÜMLÜ PROBLEMLER

1. $f(x)=\ln(x)$ Fonksiyonunun açılımı aşağıdaki gibi biliniyor, buna göre f(5) değerini hesaplayınız. İşlemleri 3 anlamlı basamak elde edene kadar devam ettiriniz.

$$\ln(x)=2\left\{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5+....\right\} \qquad x>0$$

1 terim $\ln(5)=2\left(\frac{5-1}{5+1}\right)=1.33333$

2 terim $\ln(5)=1.333333+2\left\{\frac{1}{3}\left(\frac{5-1}{5+1}\right)^3\right\}=1.53086$, 1 anlamlı basamak var

3 terim $\ln(5)=1.53086+2\left\{\frac{1}{5}\left(\frac{5-1}{5+1}\right)^5\right\}=1.58353$, 2 anlamlı basamak var

4 terim $\ln(5)=1.58353+2\left\{\frac{1}{7}\left(\frac{5-1}{5+1}\right)^7\right\}=1.60025$, 1 anlamlı basamak var

5 terim $\ln(5)=1.60025+\left\{\frac{1}{9}\left(\frac{5-1}{5+1}\right)^9\right\}=1.60603$, 3 anlamlı basamak var

$\ln(5) = 1.0694379$ dir

PROBLEMLER

1. $f(x) = \cos(\pi / 7)$ Fonksiyonunun değerini de verilen Taylor açılımının ilk beş terimini kullanarak hesaplayınız. Daha sonra bulunan değerler için mutlak hata, bağıl hata ve tanımlı basamak sayısını bulunuz. $f(x) = f(x_o) + h\, f^{(1)}(x_o) + \frac{h^2}{2!} f^{(2)}(x_o) + \frac{h^3}{3!} f^{(3)}(x_o) + ... + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_o)$

2. Aşağıda bazı fonksiyonlarının açılımı verilmiştir bu fonksiyonların x=3 ve x=5 için değerlerini hesaplayınız. En az 8 adet terim veya 5 anlamlı basamak elde edene kadar devam ediniz.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!}$$

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

3. $f(x) = x^2 \cos(x)$ Fonksiyonunun ilk beş terimini Taylor açılımını kullanarak değerini hesaplayınız. Daha sonra bulunan değerler için mutlak hata, bağıl hata ve anlamlı basamak sayısını bulunuz. (x=π/4).

4. $f(x) = \sin(x)$ Fonksiyonunun ilk üç terimini kullanarak π/5 değerini hesaplayınız. Daha sonra buluna değerler için mutlak, bağıl hataları ve anlamlı basamak sayısını bulunuz.

5. Aşağıdaki işlemleri: i) Analitik olarak (kesir işlemleri ile), ii) Virgülden sonra üç rakam kullanarak (yuvarlama yapmayınız), ve iii)Virgülden sonra en az üç rakam kullanarak (yuvarlama yapabilirsiz.)

   a. $\frac{4}{7} - \frac{5}{6}$
   b. $\left(\frac{2}{5}\right) * \left(\frac{3}{5}\right)$
   c. $\frac{4}{7} - \frac{5}{6} + \frac{3}{10}$

6. Aşağıda iki bilinmeyenli iki denklem veriliyor;

   i. Virgülden sonra 2 basamak kullanarak x ve y değerleri bulunuz.
   ii. Virgülden sonra 3 basamak kullanarak x ve y değerleri bulunuz.

$$0.461x - 0.311y = 0.150$$
$$0.209x - 0.141y = 0.068$$

2. EŞİTLİKLERİN KÖKLERİNİN BULUNMASI

2.1 GİRİŞ

Bu bölüm uygulamalı matematiğin en önemli problemlerinden biri olan tek değişkenli eşitliklerin köklerinin bulunması ile ilgilenecektir.

Bazı tek değişkenli eşitlikler çok kolay çözümlenebilir. Eşitlik eğer doğrusal ise; örnek $3x-7=0$, çözüm kolayca $x=7/3$ olarak hesaplanabilir. Eğer eşitlik ikinci dereceden bir polinom ise o halde ikinci dereceden denklemin köklerinin bulunması yöntemi ile çözüm yapılabilir. Örnek olarak; ikinci dereceden bir $ax^2+bx+c=0$ fonksiyonu var ise bu fonksiyonun kökleri $x_{1,2}=(-b\mp(b^2-4ac)^{0.5})/(2a)$ dir. Burada görüleceği gibi eğer kök içindeki terim $(b^2-4ac)>0$ ise iki gerçek kök vardır. $(b^2-4ac)<0$ Durumunda x için gerçek kök yoktur. Eğer üçüncü veya dördüncü dereceden bir polinomun kökleri aranıyorsa, bunların hazır formüller yardımı ile çözümlenmesi mümkündür ama çok karmaşık bir hal alacakları için tercih edilmezler. Beşinci veya daha yüksek dereceden polinomların kök hesapları için formül kullanılarak çözüm yapmak mümkün değildir. Bunlara ilaveten eşitlikler sin(), cos() ve $e^{()}$ terimleri de içerebilir. Bu durumda eşitliğin köklerini analitik olarak hesaplamak mümkün olamayacağından dolayı, eşitliklerin köklerini bulmak için sayısal metotlardan birisini kullanmak zorunlu bir hal alır. Bu bölümde bu metotlardan en popüler olanlarından bazıları anlatılacaktır.

Eşitliklerin köklerinin bulunması için kullanılan metotları anlatmadan önce bazı hatırlatmalarda bulunmak gereklidir. Fonksiyon değerini sağlamayan herhangi bir x değeri olmayabilir. Yani f(x) fonksiyonu x eksenini kesmeyebilir. Bu durumda f(x) fonksiyonun kökleri sanaldır. Eğer fonksiyon x eksenini bir noktadan keserse $3x-7=0$ da olduğu gibi, bir tane gerçek kök vardır. Aynı şekilde eğer fonksiyon x eksenini iki veya daha fazla noktada keserse fonksiyonun birden fazla gerçek kökü vardır denir.

Bu bölümde sadece gerçek köklerin bulunması için geliştirilen yöntemler ele alınacaktır. Sanal köklerin nasıl bulunacağı konuyu dağıtmamak için anlatılmayacaktır. Ayrıca bu bölümde verilen yöntemler tek bir kök bulmak için geliştirilmiş yöntemlerdir. Eğer istenirse yöntemler biraz değiştirilerek varsa diğer kökleri de bulunabilir.

Eşitliklerin köklerini bulmak için en çok kullanılan beş yöntem üzerinde durulacaktır, bunlar: i) Grafik yöntemi, ii) Yarılama yöntemi, iii) Kiriş yöntemi, iv)Yineleme (iterasyon) yöntemi ve v) Newton yöntemi. Bu yöntemler kullanılarak elektronik hesap tablolarında uygulamaları anlatılacaktır. Şimdi bu yöntemlerin nasıl kullanıldığına bakalım.

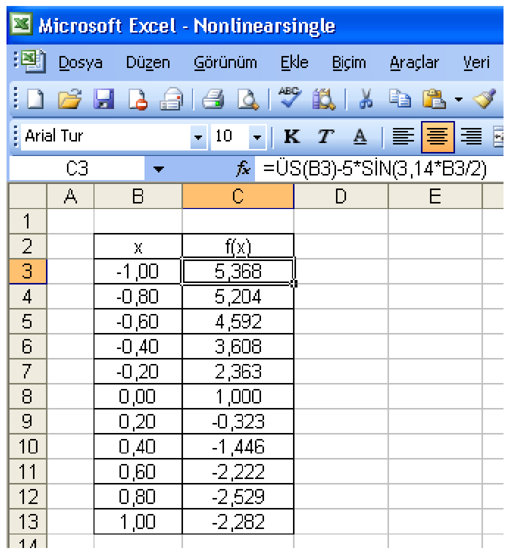
2.2 GRAFİK YÖNTEMİ

Bu yöntem ilkel olmasına rağmen, fonksiyonun davranışını ve köklerinin yerlerini kabaca belirlemekte kullanılabilir. En basit hali ile verilen fonksiyonu $f(x)=0$ haline getirdikten sonra, *x* değerlerine karşılık gelen fonksiyon değerleri istenen aralıkta çizilir. Fonksiyonunu sıfır (0) yapan *x* değeri bu fonksiyonun kökleridir. Eğer bulunan değerden daha hassas bir sonuca gereksinim varsa, grafiğin sınırları daraltılarak tekrar çizilebilir.

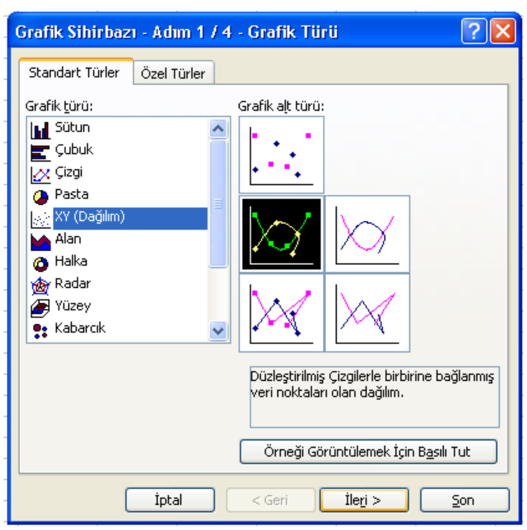
Grafik normal matematik derslerinde öğrenildiği gibi çizileceği gibi eğer istenirse elektronik hesap tabloları programlarında da çizilebilir. Örnek olması bakımından $e^x - 5\sin(\pi x/2) = 0$ fonksiyonunun köklerini yaklaşık olarak grafik metodu kullanarak [-1, 1] Aralığında bulalım.

EXCEL'de grafik çizmek için uygulanması gereken 5 adımı yukarıdaki örnek kullanarak anlatılacaktır.

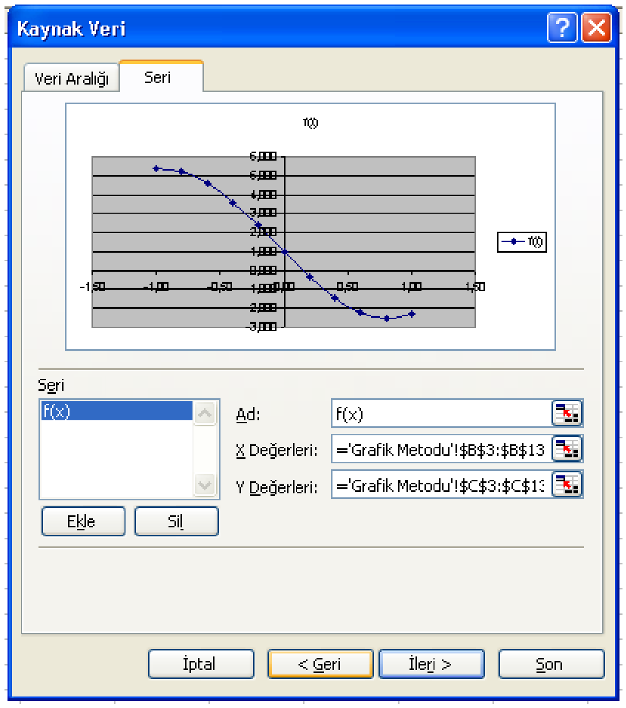
1. Boş bir Excel sayfasının herhangi bir hücresine (Excel de her hücre, kolon ve satır olarak tasarlanmıştır. Kolonlar harflerle ve satırlar ise sayılar ile isimlendirilmiştir) ilk önce *x* değerleri bir kolona yazılır, daha sonra başka bir kolona bu *x* değerlere karşı gelen *f(x)* fonksiyonu yazılır. Aşağıdaki şekilde bunun nasıl yapılacağı gösterilmiştir.



2. Menü çubuğundaki Ekle komutunun altından Grafik seçilir. Bu komut seçildiğinde ara yüzü ekranda görünür. Bu grafik sihirbazının birinci adımıdır. Bu adımda Grafik türü ve alt türü sorulur. Örneğimize *x* ve buna karşılık *f(x)* grafiği çizileceğinden dolayı grafik sihirbazındaki standart türlerden XY (Dağılım) grafiği seçilir ve ileri tuşu ile bir sonraki adıma gidilir.



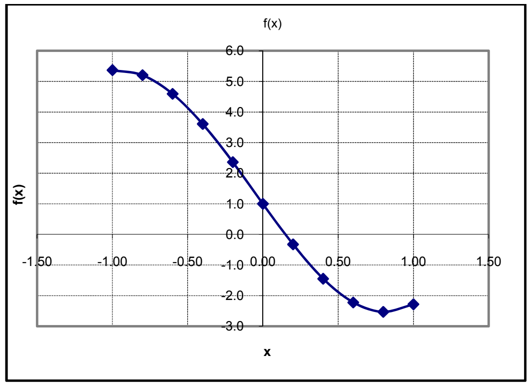
3. Grafik Sihirbazının ikinci adımı ekranda görünür. Bu adımda verilecek *x* ve *f(x)* değerlerinin grafiği çizileceği anlatılmalıdır. Bunun için Grafik Sihirbazındaki seri ara yüzü seçilir Şekil 2-3 ve daha sonra seri eklemek için seri kısmına Ekle komutuna tıklayarak elde edilir. Burada serinin adı, *x* değerleri yerine ='Grafik Metodu'!$B$3:$B$13 ve y değeri yerine de ='Grafik Metodu'!$C$3:$C$13 yazılır. Buradaki tırnak içindeki isim çalışma sayfasının ismi ve $B$3:$B$13 ise hücrenin 3 başlayarak 13 satıra kadar devam edeceğini gösterir. Genel anlamda yapılan ise *x* ve *f(x)* değerlerin adreslerinin bildirilmesidir. Bunları yazmak zor ise bu durumda kırmızı oklar seçilirse grafik sihirbazı küçülür ve bunun x ve y değerlerinin yazıldığı hücreler fare yardım ile de belirtilirse, Excel x ve y değerlerin adresini otomatik olarak algılayacaktır.



4. Kaynak verilerini girdikten sonra, İleri tuşu ile Grafik çiziminin üçüncü adımına geçilir, bu adımda grafik ile ilgili seçenekler işaretlerin.

5. Grafik Sihirbazının dördüncü ve en son adımda ise grafiği yeni bir sayfada veya sayfa içinde mi görmek istediğimize karar verdikten sonra işlem sona erdirilir. Şekil 2-4'da grafiğin en son hali verilmiştir.

6. İşlem biter ve grafik aşağıdaki şekil deki gibi elde edilmiş olur.

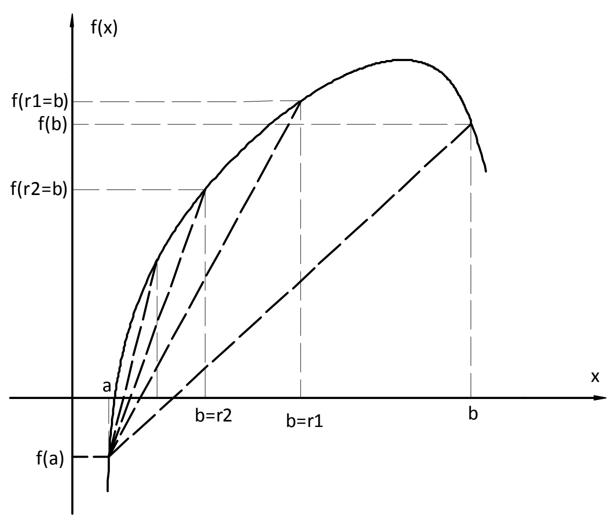


2.3 YARILAMA (İKİYE BÖLME VEYA BİSECTİON) YÖNTEMİ

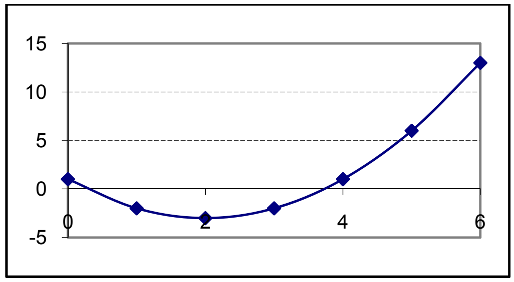
Yarılama yöntemi *f(x)=0* fonksiyonunun kökün bulunacağı tahmin edilen veya verilen aralığı ikiye bölerek kök arama işlemidir. Şekil 2-7 de görüleceği gibi, fonksiyonun kökü bir [a,b] aralığında da aranıyorsa ve f(a).f(b)<0 ise bu aralıkta en az bir kök vardır.

Yarılama yönteminin işleyişini [a,b] aralığında sürekli ve tanımlı bir f(x) fonksiyonunu inceleyerek maddeler halinde verelim:

1. Eğer *f(a).f(b)*<0 ise fonksiyonun [a,b] aralığında en az bir kökü vardır.
2. Eğer *f(a).f(b)*=0 ise fonksiyonun kökü ya *x=a* veya *x=b* dir. Çünkü ya *f(a)*=0 veya *f(b)*=0 dır.
3. Kökün bulunacağı ara ikiye bölünür; bu değer r=*(a+b)/2*. Fonksiyonun x=r deki değeri bulunur. Eğer *f(r)*=0 ise veya belli bir hata değerinden küçükse, x=r dir ve işlem biter. Eğer *f(r).f(a)*<0 ise kök [a,r] aralığındadır, değilse kök [r,b] aralığındadır.
4. Eğer kök [a,r] aralığında ise yeni aralık b=r; değilse a=r ye atanarak ve 3. adım tekrar edilir.
5. Bu işlem belli bir hata aralığına, kadar veya belli bir adım tekrar edildikten sonra durdurulur.



Bu yöntem kullanılmadan önce verilen aralıkta kök var mı varsa kaç adet kök vardır soruları cevaplamak gerekir. Örnek olara eğer $f(x)=(x-2)^2-3$ fonksiyonunun kökü [0,6] aralığında aranıyor ise yukarıda verilen algoritmanın birinci adımındaki $f(a=0)=(0-2)^2-3=1$ ve $f(b=5)=(5-2)^2-3=6$ bulunur ve f(a).f(b)>0olduğundan dolayı bu aralıkta kök yoktur denemez. Şekil 2-8 dede görüleceği gibi bu fonksiyonun verilen aralıkta iki adet kökü vardır. Bunda dolayı bu metot kullanılırken yaklaşık olarak verilen fonksiyonun, grafiği çizildikten sonra işlem yapılması önerilir.



Örnek 2.1: $e^x - 5\sin(\pi x/2) = 0$ fonksiyonunun kökünü yarılama metodunu kullanarak [-1, 1] Aralığında bulunuz. İşlemleri |(b-a)/2)|<0.001 olana kadar devam ediniz.

İlk adımda sınır değerler a=-1 ve b=1 olarak seçilerek *f(a)* ve *f(b)* değerleri bulunur. Eğer *f(a)*=0 veya *f(b)*=0 olursa kök bunlardan biridir. Değilse *r=(a+b)/2* değeri bulunur ve f(r) hesaplanır. f(r).f(a) ve *f(r).f(b)* nin negatif olma durumlarına göre sınır değerler değiştirilerek yeni adıma atlanır. Bu yineleme işlemi göreceli hata verilen değerin altına düşene kadar devam eder.

Verilen fonksiyonun kökünün yarılama metodu kullanılarak Excel de hesaplanması için aşağıdaki adımlar yapılır.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	**a**	**b**	**f(a)**	**f(b)**	**r=(a+b)/2**	**f (r)**	**f(r)*f(a)**	**f(r)*f(b)**	**|b-a|/2**
2	-1.0000	1.0000	5.3679	-2.2817	0.0000	1.0000	5.3679	-2.2817	1.00000
3	0.0000	1.0000	1.0000	-2.2817	0.5000	-1.8879	-1.8879	4.3077	0.50000
4	0.0000	0.5000	1.0000	-1.8879	0.2500	-0.6301	-0.6301	1.1896	0.25000
5	0.0000	0.2500	1.0000	-0.6301	0.1250	0.1573	0.1573	-0.0991	0.12500
6	0.1250	0.2500	0.1573	-0.6301	0.1875	-0.2458	-0.0387	0.1549	0.06250
7	0.1250	0.1875	0.1573	-0.2458	0.1563	-0.0463	-0.0073	0.0114	0.03125
8	0.1250	0.1563	0.1573	-0.0463	0.1406	0.0551	0.0087	-0.0025	0.01563
9	0.1406	0.1563	0.0551	-0.0463	0.1484	0.0043	0.0002	-0.0002	0.00781
10	0.1484	0.1563	0.0043	-0.0463	0.1523	-0.0210	-0.0001	0.0010	0.00391
11	0.1484	0.1523	0.0043	-0.0210	0.1504	-0.0084	0.0000	0.0002	0.00195
12	0.1484	0.1504	0.0043	-0.0084	0.1494	-0.0021	0.0000	0.0000	0.00098

1. İlk adımda ilk sınır değerleri *a* ve *b* nin değerleri A2 den B2 hücrelerine yazılmıştır, daha sonra bu değerlere karşılık gelen fonksiyon değerleri C3 ve D3 hesaplanır. C3 hücresine =ÜS(A3)-5*sin(22/7*A3/2) yazılır. Buradaki A3 a değerinin sayısal büyüklüğüdür. Aynı şekilde b değerine karşılık gelen fonksiyon değeri de D3 hücresine =ÜS(B3)-5*sin(22/7*B3/2)şeklinde yazılır. Aynı işlem F3 içinde yapılabilir.

2. Daha sonra *f(a)*f(r)* ve *f(a)*f(b)* değerleri G3 ve H3 hücrelerinde hesaplanır. Bu G3 hücresi için =C3*E3 ile ve I3 hücresi için =D3*F3 yazılır. En son satırda ise hata miktarını kontrol etmek için iki sınır değer arasındaki farkın mutlak değerinin yarısı hesaplanmıştır.

3. İkinci satırda sınır değerlerin değiştirmesi yapılmalıdır. Bunun için A3 hücresine =EĞER(G2<0;E2;A2) ifadesi yazılır. Yani eğer G2 hücresindeki değer *f(a)*f(r)* ye karşılık gelir. Sıfırdan büyük ise a' nın değeri E2 olsun değilse A2 (a' nın ilk değeri) olsun. Bunun anlamı eğer G2 değeri sıfırdan büyükse sınırı değiştir r olarak değiştir eğer G2 sıfırdan küçükse bu durumda A2 değerini yaz anlamı vardır. B3 hücresinde aynı şekilde =EĞER(H3<0;E2;B2) yazılır. Böylece yeni sınır değerler hesaplanmış olur.

4. İkinci satırın diğer kalan kolonları doldurmak için C2 ile D2 hücreleri seçilerek C3 ile D3'e kopyalanır.

5. Bundan sonraki adımlar B4 ile J4 seçilir ve istenen hassasiyette bulana kadar kopyalanır.

Şekil 2-3 deki tablo incelendiğinde fonksiyonun kökünün yaklaşık olarak 0.1494 olduğu görülür.

2.4 KİRİŞ (SECAND) YÖNTEMİ

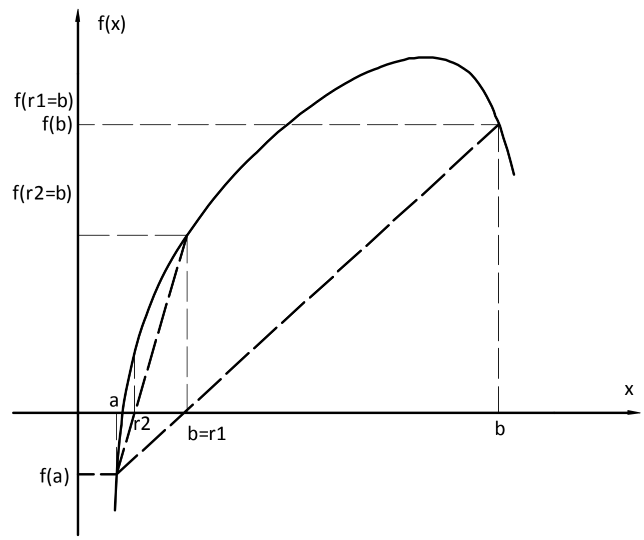
Bu metot yarılama metoduna benzemekle birlikte ondan daha fazla sayıda yineleme yapılarak sonuca varması bir dezavantaj olarak kabul edilse de, diğer taraftan bu metodun yarılama metodunda olduğu gibi aranan kökün verilen [a,b] arasında gerekli olmaması bir avantajdır.

Bu metoda en genel (bak Şekil 2-10) hali ile; fonksiyonun sınır değerlerinde aldığı değerler hesaplanır (*f(a)* ve *f(b)*) ve bu sınır değerleri birleştiren kirişin *x* eksenini kestiği yer *r* olarak kabul edilir. Bundan sonra *f(a)* ve *f(b)* fonksiyonlarının mutlak değerinin en büyük olanı a veya b yerine r atanır. Bulunan r değerine karşılık gelen f(r)≃0 sonuca yaklaşılana kadar işlem devam eder. Bu işlemin adımları aşağıdaki şekilde yazılabilir.

1. a ve b değerlerine karşılık gelen *f(a)* ve *f(b)* nin değerleri hesaplanır. *f(a)* ve *f(b)* birleştiren kirişin x ekenini kestiği nokta aşağıdaki denklem vasıtası ile hesaplanır.
$$r_i = a - \frac{a-b}{f(a)-f(b)} f(a)$$

2. f(a) ve f(b) nin mutlak değerinin büyük olanı iptal edilir ve hangi fonksiyon iptal edildi ise onun yerine r_i değeri yazılır.

3. f(r)≤ε veya maksimum adım sayısına gelindiyse işlem durdurulur. Eğer bu şartlar sağlanmadı ise işlem birinci adıma gider ve devam eder.



Örnek 2-2: $f(x)=e^{x}-5\sin(x\pi/2)$ kökünü [-1,1] Aralığında kiriş metodu kullanarak bulunuz. Kabul edilebilir maksimum hata $e_r=\left|(r_n-r_{n-1})/r_{n-1}\right|<0.001$ olsun.

İlk adımda sınır değerler a=-1 (B3 hücresine) ve b=1 (C3 hücresine) yazılır. Daha sonra f(a) ve f(b) değerleri sıra D3 ve E3 hücrelerine =ÜS(B3)-5*SİN(22/7*B3/2) ve =ÜS(C3)-5*SİN(22/7*C3/2)değerleri yazılır. Eğer f(a)=0 veya f(b)=0 olursa kök bunlardan biridir. Değilse F3 hücresine Denk.(9)'da verilen değer yazılır. Buda =B3-(B3-C3)/(D3-E3)*D3 dir. f(a) ve f(b) değerlerin hangisi daha büyükse o atılarak yerine r alınır. Yeni adımda a=r_1 olarak seçilir ve bu işlem müsaade edilen hata oranına ulaşıncaya kadar devam eder. Nümerik işlemler aşağıdaki tabloda verilmiştir.

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		a	b	f(a)	f(b)	r	f(r)
3		-1,000000	1,000000	5,367878	-2,281717	0,403441	-1,4648086
4		0,403441	1,000000	-1,464809	-2,281717	-0,666256	4,8431945
5		0,403441	-0,666256	-1,464809	4,843195	0,155042	-0,0384653
6		0,403441	0,155042	-1,464809	-0,038465	0,148343	0,0048833
7		0,148343	0,155042	0,004883	-0,038465	0,149098	-0,0000091
8		0,148343	0,149098	0,004883	-0,000009	0,149097	0,0000000
9		0,149097	0,149098	0,000000	-0,000009	0,149097	0,0000000
10		0,149097	0,149097	0,000000	0,000000	0,149097	0,0000000
11							

2.5 NEWTON YÖNTEMİ

Newton Metodu kök bulmak için kullanılan en popüler yöntemlerden biridir.

Daha önceden gösterilen yöntemlerden daha hızlı yakınsadığı için diğerlerine göre daha avantajlıdır. Kiriş metodu verilen fonksiyonun lineer olarak modellemesi yapılırken Newton Metodunda doğrusal modelleme yerine fonksiyonun türevi alınarak işlem yapılır. Verilen fonksiyonun herhangi bir noktaya yakın olan kökünü bulmak için; bu noktada fonksiyonun türevi alınarak, o noktadaki fonksiyonun teğeti bulunur. Bu teğetin x eksenini kestiği yer Denklem (2-1) yardımı ile bulunabilir. Burada f′(x) fonksiyonun birinci türevini gösterir. Bu işlemler belli sayıda veya belli yakınsaklık değerine ulaşıncaya kadar devam eder.

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x)}{f'(x)} \qquad (2\text{-}1)$$

Newton yönteminin kullanılması için iki önemli nokta şunlardır: birincisi kökü bulunacak fonksiyonun o noktadaki türevinin değeri sıfır olmamalıdır. İkincisi ise ardı ardana yapılan yinelemenin değerlerinin aynı olmamasıdır. Eğer f′(x)=0 ise Denk.(2.1) nun ikinci terimi kullanılamaz. Ve ikincisi ise ardı arda bulunan eğimlerin aynı olmasının anlamı ise bu işlemin sonsuz bir döngü oluşturacağından sonuca yakınsamayacağıdır.

Newton metodunun işleyişinin maddeler halinde gösterimi.

1. f′(x_0) fonksiyon birinci türevi ilk verilen nokta için bulunur. Bulunan bu değer sıfırdan farklı ise işleme devam edilir. Eğer sıfıra eşitse başka bir x_0 seçilir.
2. Denklem kullanılarak ilk tahmini değer x_{i+1}_bulunur.
3. İşlem maksimum yineleme sayısına veya hata miktarına kadar devam eder.

Örnek 2-3: $f(x) = e^x - 5\sin(x\pi/2)$ fonksiyonunun x=0.5 a yakın kökünü bulunuz. f(x)<0.00001 değerine ulaşıncaya kadar devam ediniz.

Şekilde görüleceği gibi sonuç x=0.1490 olarak bulunur.

x_o	$f(x_o)$	$f'(x_o)$	x=x-f(x)/f'(x)
0.5000	-1.8879	-3.9054	0.01657989
0.0166	0.8865	-6.8378	0.14622213
0.1462	0.0186	-6.4932	0.14909410
0.1491	0.0000	-6.4817	0.14909664

Örnek 2-4: $y_1 = x^3 - x + 1$ ile $y = 2x^2$ eğrilerinin *x*=1 e yakın kesiştiği noktayı Newton metodunu kullanarak bulunuz. Son iki yineleme arasındaki 3 anlamlı basamak elde edene kadar işlemlere devam ediniz. Burada kullanılacak *f(x)*=y_1-y_2=0 yazılabilir. $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 1$ ve $f'(x) = 3x^2 - 4x - 1$ bulunur. Bunun için bir EXCEL sayfası aşağıdaki gibi olur.

x	f(x)	f'(x)	xi=xo-f(x)/f'(x)
1	-1	-2	0.50000
0.5	0.125	-2.25	0.55556
0.5555556	-0.001372	-2.296296	0.55496

2.6 SABİT NOKTA YİNELEMESİ (X=G(X))

Bu yöntemde verilen f(x) fonksiyonunun içinde bulunan bilinmeyen x yalnız bırakılarak x=g(x) şekline getirilir. Elbette lineer olmayan bir fonksiyonu birçok şekilde x=g(x) halinde dönüştürülebilir. Daha sonra x'e değerler verilerek buna karşılık gelen g(x) değerleri bulunur. Verilen değer ile bulunan değerin aynı olması istendiğinden dolayı bu sonuç bulunana kadar yinelemeye devam edilir. Birinci adımda x_o değerine karşı bulunan $g(x_o)$ değeri ikinci adımda x_1 değeri olarak adlandırılır. Bu $x_i \approx g(x_i)$ oluncaya kadar devam eder. Bu yöntemin nasıl işlediğini bir örnekle gösterelim.

Örnek olarak $f(x) = 3x^2 - 4x - 5 = 0$ verilen bir fonksiyonun köklerini *x*=4 e yakın noktada bulalım. Bu fonksiyon farklı şekillerde x=g(x) haline getirilebilir. Bunlar

(i) $x = g_1(x) = \sqrt{(5+4x)/3}$

(ii) $x = g_2(x) = 5/(3x-4)$

(iii) $x = g(x) = (3x^2 - 5)/4$

Burada bulunan g(x) fonksiyonlarından hangisi veya hangilerinin doğru sonucu vereceğini araştıralım.

i) $x = g_1(x) = \sqrt{(5+4x)/3}$ olduğunda

[redacted]

İkinci durum için $x = g_2(x) = 5/(3x-4)$

[redacted]

Üçüncü durumda ise $x = g(x) = (3x^2 - 5)/4$

Görüldüğü gibi üçüncü durumda herhangi bir yakınsama olmamıştır. Bu nedenden dolayı denklem $x = g_3(x)$ de uygun parçalara ayrılmamıştır denir. Basit itarasyon yönteminde bulunan denklemlerin uygun parçalara ayrılıp ayrılmadığı $|dg(x_0)/dx| < 1$ işleminin sonucuna göre karar verilir. Eğer $|dg(x_0)/dx| < 1$ ise, yakınsama olur yani çözüm vardır, değilse yakınsama olmayacağından dolayı bir kök bulunamaz. Örnek olarak g_3(x) fonksiyonu için $|dg_3(4)/dx| = 6 \geq 1$ olduğundan dolayı yakınsama olmayacağı görülür. Fakat eğer ilk tahmin değeri xo değiştirilirse o halde fonksiyonun türevinin birden küçük bir sayı elde edilirse fonksiyon köklerden birine yakınsayacağı görülür.

2.7 EXCEL İN HAZIR FONKSİYONLARIN KULLANARAK DENKLEM ÇÖZME

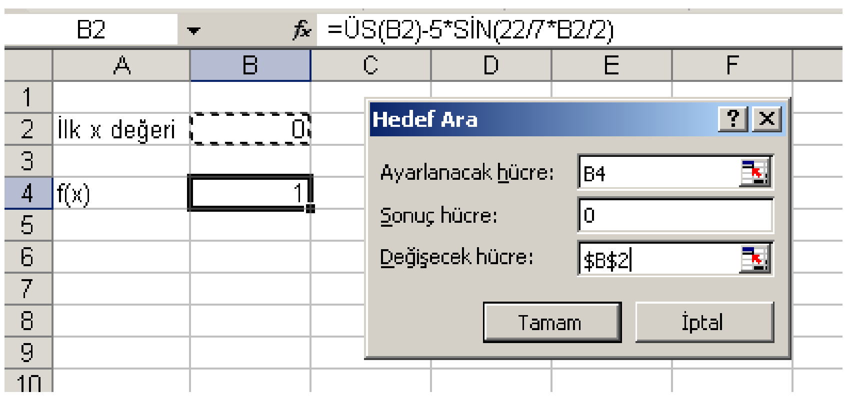
EXCEL hazır yazılmış iterasyon programları hazır olarak programlarla birlikte gelir. Bunlardan birisi de Hedef Ara komutudur. HEDEF ARA komutu ile çözmek için aşağıdaki adımlar takip edilir.

1. Herhangi bir hücreye f(x) denklemin çözümü olabilecek ilk tahmin değerini girilir,
2. Çözümünü aradığınız denklemi herhangi bir hücreye f(x)=0 formatında yazılır. (denklemi yazarken bilinmeyen x için ilk tahmin değerinin adresini yazılır).
3. Araçlar menusundan Hedef Ara yı seçilir,
4. Hedef Ara ara yüzü ekranda görününce aşağıdaki bilgileri giriniz
    a. Ayarlanacak Hücre ye denklemin bulunduğu yerin adresini yazılır.
    b. Sonuç Hücresi ine f(x) fonksiyonunun hangi rakama eşit olduğunu yazılır.
    c. Değişecek Hücre ye ilk tahminin yapıldığı hücrenin adının yazılır.

5. Çözümüm bulunup bulunamamasına göre EXCEL yeni bir ara yüz açacak ve sonucu eğer varsa bunun üzerinde gösterecektir.

Örnek: $f(x) = e^x - 5\sin(x\pi/2)$ fonksiyonunun -1<x<1 arasındaki kökünün EXCEL'de Heder Ara komutunu kullanarak bulunuz. Aşağıdaki adımlar takip edilerek sonuç elde edilebilir.

- Fonksiyonun kökü olabilecek ilk tahmini değer herhangi bir hücreye (burada B2 hücresi) yazılır. Burada 0 (sıfır) kullanılacaktır.
- Fonksiyon herhangi bir hücreye yazılır, burada B4 hücresine yazılmıştır.
- Araçlar menüsünden Hedef Ara komutu seçilir.
- Heder Ara formundaki üç hücreyi gerekli bilgilerle şekil 15 deki gibi doldurulur ve Tamam tıklanır.
- Tamam tıklandıktan sonra aşağıdaki arayüz görünecektir. Bu arayüz denklemin çözümü olan 1.404083 değerini verir.



PROBLEMLER

1. $f(x) = xe^{-x} + x^3 + 1$ fonksiyonunun [-1,0] Aralığındaki kökünü dört anlamlı basamak elde edene kadar devam ederek bulunuz.

2. $f(x) = 10e^{-x/2}(\cos 6x - \sin 8x)$ fonksiyonunun [1,2] Aralığındaki kökünü bulunuz. İşlemlerinizi dört anlamlı basamak bulana kadar devam ediniz. (Not: [1,2] Aralığında bu fonksiyonun iki kökü vardır. İlk önce aralıkları seçin ve ikinci adımda kökleri bulunuz.)

3. $f(x) = x^4 - 9x^3 - 2x^2 + 120x - 130$ fonksiyonunun [1,2] aralığındaki kökünü bulunuz İşlemlerinizi iki yineleme arasındaki farkın 0.06 dan küçük olana kadar devam ediniz.

4. $4e^{-0.5x} - x = 0$ fonksiyonunun x_0=2 civarındaki kökünü Newton Metoduna göre hesaplayınız. En az yineleme kullanınız.

5. $2x^3 + 4x^2 - 2x - 5 = 0$ denkleminin [0, 2] aralığında en az bir kökünün olduğu biliniyor ise bu kökü yarılama metoduna göre bulunuz.

6. $f(x) = \sin 2x - e^{x-1}$ fonksiyonunun x=1 e yakın kökünü bulunuz. (x=0.947)

7. Zorlanmasız serbest sönümlü salınım yapan bir mekanizma ki; böyle mekanizmalar genellikle yapı dinamiğinde yapıların hareketini incelerken kullanılır. Denge denklemleri kullanılarak $x = x_o e^{-bt}(\cos wt - b/t * \sin wt)$ eşitliği bulunmuş olsun. B ve w yapının elastikliği ve sonumu ile ilgi kat sayılarıdır. Özel bir durum için x_{o}=8 cm, β=0.1sn^{-1} ve w=0.5sn^{-1} dir. Bu verilenlere göre EXCEL de;

   a. 0 ile 30 saniye arasındaki zamana-yer değiştirme grafiğini çiziniz.(t-x grafiği),

   b. İlk deplasman x=0 olduğunda zamanı (t) yi bulunuz. Mümkün olduğunca hassas hesaplayınız.

   c. ikinci kez x=0 olduğu zamanı bulunuz.

   d. Eğer x_o ile orijinal değerlerinde tutulur, ve x=0 ve t=2.5 saniye seçilirse w nun değeri ne olur. Cevaplar b) t=3,536 sn c) t=9,81956 sn, d) w=0.686203sn^{-1}

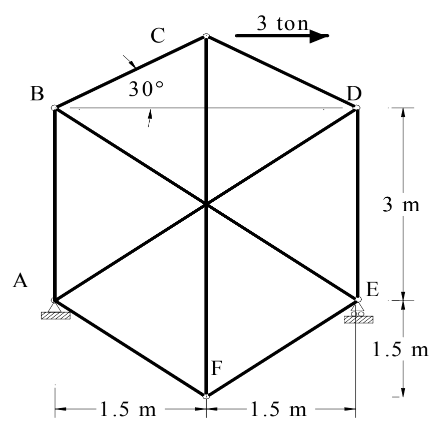
8. $f(x) = x^3 + 4x^2 + 2x - 3 = 0$ Fonksiyonunun köklerinden biri [-6,0] Aralığında olduğu biliniyor ise bu kökü yarılama metodu ile hesaplayınız. Diğer köklerini istediğiniz bir metot ile çözünüz. (x=-3, x=0.618 ve x=-1.6818)

3. DOĞRUSAL DENKLEM TAKIMLARIN ÇÖZÜM METOTLARI

3.1 GİRİŞ

Birçok mühendislik alanında, olaylar veya sistemler analitik olarak çoklu denklem takımlar ile ifade edilir. Denklem takımlar genel anlam ile bir sistemdeki bilinenler ve bilinmeyenlerin eşitliklerle ifade edilmesidir. Kullanılan birbirinden bağımsız eşitlik sayısı ile bilinmeyen saylar eşit ise deterministlik bir çözümden bahsetmek mümkündür. Bilinmeyenlerin nasıl bulunacağı bu bölümün konusudur. Bu bölümün ilk kısmında denklem takımların nasıl matris formunda yazılacağı üzerinde durulacak daha sonra matrislerdeki matematiksel işlemlerin nasıl yapılacağı anlatılacak. İkinci kısmında ise matris tersi alma ve denklem takımlardın çözümleri üzerinde durulacakta. Çoklu denklem takımlar doğrusal veya doğrusal olmayan formlarda olabilirler. Bu bölümde doğrusal denklem takımları anlatılacaktır.

Doğrusal denklem takımlarına örnek olması bakımından inşaat ve makine mühendisliğinde sıkça kullanılan kafes yap sistemi kullanılmaktır. Şekilde görüleceği gibi bu kafes siteminin elemanlarına etkiyen kuvvetleri bulmak için düğüm noktası yöntemi kullanılabilir. Her düğüm noktası için $\sum F_x = 0$ ve $\sum F_y = 0$ denklemleri yazılırsa aşandaki 12 eşitlik elde edilir. Bu 12 denklem yardım ile 3 tane mesnet tepkimesi ve 9 tane de eleman kuvveti bulunabilir. Yani burada 12 tane denklem ve 12 tane de bilinmeyen vardır. Bu 12 bilinmeyeni bulmak için bilinenleri bilinmeyenlerin yererine yazılarak çözüme ulaşılabilir, ama bu çok zahmetli, zordur ve bilgisayar hesaplar için uygun değildir.



Şimdi bu 12 adet denklemi her bir düğüm noktasındaki denge için yazılırsa:

$\sum F_{Ax} = 0$ için $\quad R_{Ax} + \frac{\sqrt{2}}{2} AD + \frac{\sqrt{2}}{2} AF = 0$

$\sum F_{Ay} = 0$ için $\quad R_{Ay} + AB + \frac{\sqrt{2}}{2} AD - \frac{\sqrt{2}}{2} AF = 0$

$\sum F_{Bx} = 0$ için $\quad \frac{\sqrt{2}}{2} BE + \frac{\sqrt{3}}{2} BC = 0$

$\sum F_{By} = 0$ için $\quad -AB - \frac{\sqrt{2}}{2} BE + \frac{1}{2} BC = 0$

$\sum F_{Cx}=0$ için $\quad \frac{\sqrt{3}}{2}CD-\frac{\sqrt{3}}{2}BC+3^t=0$

$\sum F_{Cy}=0$ için $\quad CF+\frac{1}{2}BC+\frac{1}{2}DC=0$

$\sum F_{Dx}=0$ için $\quad \frac{\sqrt{2}}{2}AD+\frac{\sqrt{3}}{2}CD=0$

$\sum F_{Dy}=0$ için $\quad -DE-\frac{\sqrt{2}}{2}AD+\frac{1}{2}DC=0$

$\sum F_{Ex}=0$ için $\quad \frac{\sqrt{2}}{2}EB+\frac{\sqrt{2}}{2}EF=0$

$\sum F_{Ey}=0$ için $\quad DE+\frac{\sqrt{2}}{2}EB-\frac{\sqrt{2}}{2}EF+R_{Ey}=0$

$\sum F_{Fx}=0$ için $\quad \frac{\sqrt{2}}{2}AF-\frac{\sqrt{2}}{2}FE=0$

$\sum F_{Fy}=0$ için $\quad CF+\frac{\sqrt{2}}{2}AF+\frac{\sqrt{2}}{2}FE=0$

Bu denklemler kullanılarak 3 adet mesnet tepkimesi ve 9 adet eleman kuvveti elektronik araçlar kullanılarak daha kolay nasıl çözümlenebileceği üzerinde durulacaktır. Bunun için bu denklemler önce matris olarak nasıl ifade edilir, ve daha sonrada bilinmeyeler nasıl hesaplanır üzerinde durulacaktır.

3.2 MATRİS NOTASYONLARI

Yukarıdaki 12 adet denklem ve bu denklemlerde 12 adet bilinmeyen vardır. Bu denklem takımlar en genel matris formatında aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\cdots+a_{1n}x_n&=b_1\\
a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+\cdots+a_{2n}x_n&=b_2\\
a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3+\cdots+a_{3n}x_n&=b_3\\
\cdots&=\cdots\\
a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+a_{m3}x_3+\cdots+a_{mn}x_n&=b_m
\end{aligned}$$

veya **A*x=b** olarak gösterilebilir. Burada **A,x**,ve **b** aşağıdaki verildiği gibi ifade edilebilir.

$$A_{m\times n}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}=\left[a_{ij}\right],\ x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\\cdots\\x_n\end{bmatrix}=\left[x_j\right],\ b=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\\\cdots\\b_m\end{bmatrix}=\left[b_i\right]$$

Burada i=1,2,3,…n satır sayısı ve j=1,2,3,…n ise matrisin kolon sayısın verir. Burada; $\mathbf{A}_{\mathbf{m\times n}}$ ya (iki boyutlu) matris, **b** ve **x** e ise *kolon matris* veya *vektör* adı verilir.

Örnek 3-1: $x_1+3x_2=4$ ve $2x_1+4x_2=5$ gibi iki denklemi matris formatında yazınız

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad ve \quad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Matris gösterimleri ile skaler gösterimlerin karışmaması için Matrisler ifade edilirken kalın olarak (bold) kullanılacaktır.

3.3 ÖZEL MATRİSLER

3.3.1 KARE MATRİS

Matrisin satır ve kolon sayısı eşit olduğunda kare matris denir. Yani $A_{m\times n}$ matrisinde m=n ise **A** matrisi kare matristir. Örnek 3-1 deki A matrisi bir kare matristir.

3.3.2 BİRİM MATRİS

Kare matrisin diyagone elemanlar bir (1) ve diğer her eleman sıfır ise buna *birim matris* denir. Yani bir $[a_{ij}]$ matrisinin $i = j$ olduğunda $a_{ij} = 1$ ve $i \neq j$ ise $a_{ij} = 0$ dir ve birim matris **I** ile gösterilir ve birim matris

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

3.3.3 BAND MATRİS (KUŞAK MATRİSİ)

Matrisin sadece diyagonale yakın elemanların sıfırdan farklı olduğu matrise denir.

Aşağıdaki matris bir kuşak matristir ve kuşak genişliği 2 dir.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 9 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 9 & 5 \end{bmatrix}$$

3.3.4 ÜST ÜÇGEN MATRİS VE ALT ÜÇGEN MATRİS

Bir kare matrisin diyagonal elemanların altıda kalan her eleman sıfıra eşitse üst üçgen matris ve eğer diyagonal elamanların üstünde kalan her eleman sıfıra eşitse buna da alt üçgen matris denir. Tanıma göre aşağıda gösterilen **U** matrisine üst üçgen matris (Upper triangler matrix) ve **L** matrisine de alt üçgen matris (Lower triangle matris) denir. Genelliklerde bunlar **U ve L** notasyonlar ile gösterilirler.

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 5 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \quad ve \quad L = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -6 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -5 & 3 \end{bmatrix}$$

3.3.5 SİMETRİK MATRİS

Simetrik matris deki şart sağlayan kare matrislere simetrik matris denir.

$$\left[a_{ij}\right]=\left[a_{ji}\right],\quad i=1,2,\cdots,n \qquad j=1,2,\cdots,n$$

3.4 MATRİSLERDE MATEMATİKSEL İŞLEMLER

Matrislerde matematiksel işlemler skaler işlemlerden farklı olarak yapılır. Bunlar aşağıdaki kurallara göre olur:

3.4.1 TOPLAMA VE ÇIKARMA İŞLEMİ

Matrislerde çıkarma ve toplama işlemeleri aynı sayıda kolon ve aynı sayıda satırdan oluşan matrisler arasında yapabilir. Aynı boyuttaki $\mathbf{A}=\left[a_{ij}\right]$ ve $\mathbf{B}=\left[b_{ij}\right]$ matrisleri için toplama ve çıkarma işlemleri + ve - de gösterilmiştir.

$$C=A+B=\left[a_{ij}\right]+\left[b_{ij}\right]$$
$$C=A-B=\left[a_{ij}\right]-\left[b_{ij}\right]$$

Matrislerin toplama ve çıkarma işlemlerinin yer değiştirme ve birleşme özellikleri vardır. Bu özellikler mattoplamabirles1 ve mattoplamabirles2 de sırası ile verilmiştir.

$$A+B=B+A$$
$$(A+B)+C=A+(B+C)$$

Örnek: $D=A-B$ ve $E=A+B$ ve $G=A+C$ işlemeleri yapılabiliyorsa gerçekleştiriniz.

$$A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 5 & 3\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}9 & 9\\ -2 & 0\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}0 & 2\end{bmatrix}$$

3.4.2. EXCEL DE TOPLAMA VE ÇIKARMA İŞLEMLERİ

Toplanacak ve çıkartılacak iki matris yazılır ve sonucun yazılacağı matrisin yeri seçilir. Formül çubuğuna = a11-(+)b11 yazılır ve sonuç bulunur. Diğer elemanlarda kes kopyala ile hesaplanır. Aşağıdaki örnekte bir **A** ve **B** matrislerin EXCEL de çıkarma işlemi görülüyor.

L2 fx =B2-G2

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1														
2		1	-2	3			2	6	2			-1	-8	1
3	A=	3	1	-2		B=	4	5	-2		C=A-B=	-1	-4	0
4		2	3	1			1	7	4			1	-4	-3
5														

3.4.3 MATRİSİN BİR KATSAYI İLE ÇARPIMI

Bir **A** matrisinin bir skaler k ile çarpılması A matrisinin tüm elemanlarının k ile çarpılması gerektirir. Matematiksel olarak aşağıdaki denklem ile verilmiştir.

$$\left[c_{ij}\right]=\left[k*a_{ij}\right]$$

ile ifade edilir.

$$A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 5 & 3\end{bmatrix} \text{ ve } k=3 \text{ ise } C=k\cdot A \text{ hesaplayın.}$$

$$C=\begin{bmatrix}2*3 & -1*3\\ 5*3 & 3*3\end{bmatrix} \text{ Olacaktır.}$$

3.4.4 MATRİS ÇARPIM

İki matrisin çarpımı (**$A_{m\times n}$, $B_{n\times m}$)** matrislerinin boyutlarına uygun olması halinde yapılabilir. Boyutlarının uygun olması; **A** matrisinin kolon sayısının **B** matrisinin satır sayısına eşit olması demektir ve çarpma işlemi aşağıdaki denklemdeki gibi yapılır.

$$[c_{ij}]=[a_{ij}]\cdot[b_{ji}]=\sum_{k=1}^{m} a_{ik}\cdot b_{kj}, \quad i=1,2\cdots n, \quad ,j=1,2\cdots,m$$

$$A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix}-3 & 1 & -9\\ 1 & 0 & 8\end{bmatrix} \text{ ve } C=\begin{bmatrix}2\\ 4\end{bmatrix} \text{ olarak veriliyor ise}$$

$A\cdot B,\ B\cdot A,\ A\cdot A,\ B\cdot A,\ A\cdot C$ ve $B\cdot C$ çarpımlar yapılabiliyor ise yapınız.

- $A_{2\times2}\cdot B_{2\times3}=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-3 & 1 & -9\\ 1 & 0 & 8\end{bmatrix}= =\begin{bmatrix}-2*3-1*1 & 2*1+-1*0 & -2*9-1*8\\ -3*3+1*1 & 3*1+1*0 & -3*9+1*8\end{bmatrix}$

- $B_{2\times3}\cdot A_{2\times2}=\begin{bmatrix}-3 & 1 & -9\\ 1 & 0 & 8\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\end{bmatrix}$, çarpıma için uygun değildir çünkü birinci matrisin kolon sayısı ikinci matrisin satır sayısına eşit değildir.

- $A_{2\times2}\cdot A_{2\times2}=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2*2-1*3 & -2*1-1*1\\ 3*2+1*3 & -3*1+1*1\end{bmatrix}$

- $A_{2\times2}\cdot C_{2\times1}=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2\\ 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2*2-1*4\\ 3*2+1*4\end{bmatrix}$

- $B_{2\times3}\cdot C_{2\times1}=\begin{bmatrix}-3 & 1 & -9\\ 1 & 0 & 8\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2\\ 4\end{bmatrix}$, bu işlem yapılamaz çünkü birinci matrisin kolon sayısı ikinci matrisin satır sayısına eşit değildir.

Burada görüldüğü gibi birinci matrisin kolon sayısı ikinci matrisin satır sayısına eşitse çarpma işlemi yapılabilir, aksi halde çarpma işlemi yapılamaz. Bundan dolay matris çarpma işlemlerinde yer değiştirme özelliği yoktur. Fakat matris çarpımının dağılma özelliği vardır. Matris çarpım için aşağıdaki özellikler yazılabilir.

$$A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$$
$$(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$$
$$A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$$

3.4.5 DEVRİK MATRİS (MATRİS TRANSPOZESİ)

Matrisin kolon ve satırlarının yer değiştirilerek yazılmasına matrisin transpozu veya devriği denir ve $\mathbf{A^T}$ veya **A'** ile gösterilir. Devriği alınmadan önce boyutlar m×n olan matrisin devriği alındıktan sonra boyutlar **n×m** olur.

$$A_{m\times n}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},\quad A^T_{n\times m}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

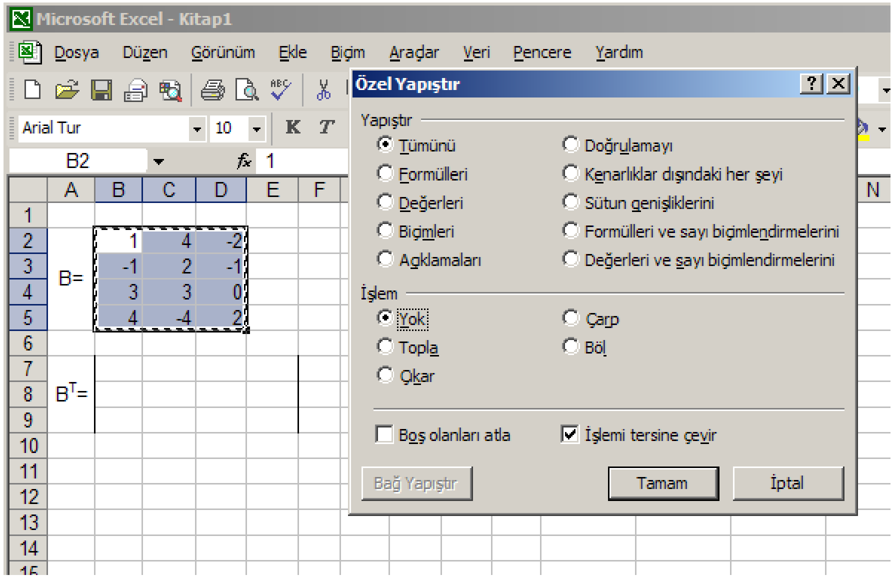
Tranpoz işlemlerinde bazı özellikler dikkate alınmalıdır. Toplama ve çarpma işlemlerinin tranpoz işleminin üzerinde aşağıda verilen özellikleri vardır. (Daha sonra matrislerde çarpma ve toplama özellikleri hakkında bilgi verilecektir)

$$(A+B)^T=A^T+B^T$$
$$(A\cdot B)^T=B^T\cdot A^T$$
$$\left(A^T\right)^T=A$$
$$(kA)^T=kA^T$$

Eğer bir matrisin transpozu kendisine eşitse veya başka bir ifade ile $\left[a_{ij}\right]=\left[a_{ji}\right]$ ise matrise simetrik matris denir.

3.4.6 EXCEL DE MATRİSLERİN TRANSPOZESİ (EVRİĞİ)

Tranposesi alınacak matris her hücreye bir eleman yazılır. Daha sonra yazlan matris seçilerek Menü çubuğundaki Düzenden kopyala komutu ile kopyalanır. Daha sonra Excel'de tranpozesi alınacak hücrelerin en üst sağındaki hücre seçilir ve Menü çubuğundaki Düzenden özel yapıştır seçilir. Özel yapıştırılan görünümü Şekil 3-3 deki yerler seçilerek Tamam Komutu tıklanır ve B matrisin Transpozesi bulunmuş olur.



3.5. MATRİSLERİN DETERMİNANTI

Herhangi bir fonksiyonun değerini bulmak için nasl değişkenlerini yerine koyarak fonksiyonun değeri hesaplanıyorsa aynı şekilde, matrisler için de gerçek değerleri bulunabilir. Matrislerin gerçek değerlerine *determinant* denir ve bir kare A matrisinin determinant *det(**A**)* veya |**A**| ile gösterilir ve skaler bir büyüklüktür.

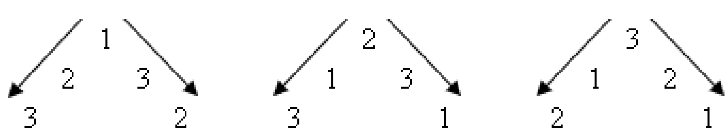
Bir matrisin determinantının nasıl bulunacağına geçmeden önce bazı tanımlar yapılması gereklidir.

Teorem 3-1: Bir grubun permütasyonu grup içindeki elemanların tekrar edilmeden ve hepsi kullanılarak dizilmesine denir. Kaç farklı şekilde yazılacağı ise elemanı adetinin faktöriyeli ile (**n!)** ile hesaplanır.

Örnek 3-3: $\{a,b,c\}$ gibi üç tam sayıdan oluşan bir grubun permütasyonu hesaplayanız.

$n! = 3! = 6$ Farklı permütasyonu vardır. $\{a,b,c\}$ ise bunların tekrarsız diziliş şekli (abc), (acb), (bac), (bca),(cab) ve (cba) dır.

Bir grubun permutasyonu en kolay şekilde bulmak için; gruptaki her say aralıklı şekilde birinci satıra yazılır, ikinci satıra birinci satırdaki rakamın altına yine aralıklara kendinden başka bütün saylar yazılır ve bu say kalmayana kadar devam eder. Aşağıdaki şekilde bu verilmiştir.



Teorem 3-2: Sıralı bir gruptaki elemanların {1,2,3,4,5} yerlerinin değiştirtmesi ile elde edilen yeni gruptaki elemanlarının sıralarının değiştirilmesine inversion veya tersinirlik denir ve aşağıdaki gibi hesaplanır.

Örnek 3-4: (2431) grubunun tersliğini (inversion) bulunuz.

İlk terim 2 dir ve kendinden sonra küçük say sadece 2 dir.

İkinci eleman 4 den 3 ve 1 küçük olduğundan tersinirlik 2 .

Üçüncü terim 3 için ise 1 dir.

Toplam tersinirlik 1+2+1=4 olur.

Terslik says $0, 2, 4, 6, \cdots 2n$ için çift say denir ve *pozitif*tir.

Terslik says $1, 3, 5, 7, \cdots 2n-1$ için tek say denir ve *negatif*tir.

Teorem 3-3: Bir kare matristeki her kolon veya satırdan bir eleman alınarak yapılan çarpma işlemine Matrisinin basit (Elementary) çarpma denir. Bir matriste basit çarpma âdeti matris boyutunun permutsayonu kadardır. Bu işlemin nasıl yapıldığın aşağıdaki örnekte görelim.

$A_{2\times2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ için her kolon veya satırdan bir eleman alınırsa bu $a_{1?}.a_{2?}$ veya $a_{?1}.a_{?2}$ soru işaretlerinin yerlerine 1 ve 2 sayısının değişik permutasyonlar yazılır. Bunlar 12 veya 21 dir. Böylece basit çarpımlar $a_{11} * a_{22}$ ve $a_{12} * a_{21}$ olur.

Teorem 3-4: İşaretli basit çarpım ise basit çarpımda bulunan değerlerin inversion kuralına göre işaretlerinin belirlenmesi ile elde edilir.

$a_{11} * a_{22}$ ve $a_{12}.a_{21}$ basit çarpımın işaretli çarpım haline dönüştürünüz.

(12) ve (21)'in tersliğine bakılır. Bakılacak saylar 12 için 0 yani pozitif ve 21 için 1 yani negatiftir. Sonuç olarak $a_{11} * a_{22}$, ve $-a_{12} * a_{21}$ elde edilir.

Teorem 3-5: Eğer **A** bir kare matris ise, **A'**nn determinantı bütün işaretli basit çarpımların toplamdır diye ifade edilebilir ve bir matrisin determinant *det(**A**)* olarak gösterilir.

Örnek 3-5: **A$_{3x3}$** matrisinin determinantını yazılması.

Burada önce çarpımlar yazılır.bunun için verilen bütün kolon veya satır elemanlar bir kez çarpım halinde yazılır. Daha sonra soru işaretlerinin yerine (123) saylarının permütasyonu yazılır. Bunlar (123), (132), (132), (213), (231), (321) ve (312)' dır. Yani Elemantary Çarpım aşağıdaki gibi elde edilir.

Elemantary Çarp	Permutasyon	İşaret	İşaretli Elm. Çarp
$a_{11}.a_{22}.a_{33}$	$1,2,3$	$+$	$a_{11}.a_{22}.a_{33}$
$a_{11}.a_{23}.a_{32}$	$1,3,2$	✍	$-a_{11}.a_{23}.a_{32}$
$a_{12}.a_{21}.a_{33}$	$2,1,3$	✍	$-a_{12}.a_{21}.a_{33}$
$a_{12}.a_{23}.a_{31}$	$2,3,1$	🗏	✍$a_{12}.a_{23}.a_{31}$
$a_{13}.a_{21}.a_{32}$	$3,1,2$	🗏	$a_{13}.a_{21}.a_{32}$
$a_{13}.a_{22}.a_{31}$	$3,2,1$	✍	$a_{13}.a_{22}.a_{31}$

det(A) işaretli basit çarpımlarının toplamdır yani

$$\det(A)=\left(a_{11}.a_{22}.a_{33}+a_{13}.a_{21}.a_{32}+a_{13}.a_{22}.a_{31}\right)-\left(a_{11}.a_{23}.a_{32}+a_{12}.a_{21}.a_{33}+a_{12}.a_{23}.a_{31}\right)$$

Yukarda verilen tanımlar kullanılarak bir kare matrisin determinantın nasıl hesaplanabileceği anlatıldı. Bu teorik olarak determinantı nasıl bulunacağın göstermektedir. Bu adımdan sonra daha determinant ile ilgili diğer özelliklere bakalım.

1) Eğer bir matrisin herhangi bir satır veya sütunu sıfırsa determinantı da sıfırıdır.

2) Bir matrisin determinant yine aynı matrisin transpozunun (devriğinin) determinantına eşittir.

3) Eğer bir matrisin iki satır veya sütununun elamanlar belli oran içinde eşitse, bu matrisin determinant sıfırıdır denir.

4) Eğer bir matris üçgen matris haline getirilebiliyorsa matrisin determinant değeri diyagonal elemanlarının çarpım kadardır.

5) Bir **A** matrisinin bir sütununu veya satırın bir k sayısı ile çarparsak oluşan matris **A’** ise $\det(A')=k*\det(A)$ dır.

6) Eğer **A matrisinin** herhangi iki satırının yer değiştirmesinden oluşan matris A' ise $\det(A')=-\det(A)$ ilişkisi vardır.

7) Bir matrisin satır veya sütununu herhangi bir sayı ile çarpıldıktan sonra başka bir satır veya sütuna eklenirse değeri değişmez.

Verilen herhangi bir kare matrisin determinantı yukarda verilen özellikler kullanılarak hesaplanabilir.

3.5.1. ÖZEL MATRİSİNLERİN DETERMİNANTININ BULUNMASI.

Birinci adımda ikinci satır ile birinci satırın yerlerini değiştirelim. Bu durumda matrisin işaretinin değişmemesi için önüne işareti yazılır. İkinci adımda birinci satır üç parantezine alalım. Üçüncü adımda birinci satır -2 ile çarpıp üçüncü satıra ekleyelim. Dördüncü adımda ikinci satır -10 ile çarpıp üçüncü satıra ekleyelim. Beşinci adımda üçüncü satır -55 parantezine alınırsa, sonuç $\det(A)=165$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} \overset{1.Adım}{\Rightarrow} -1 \begin{vmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{2.Adım}{\Rightarrow} -3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} \overset{3.Adım}{\Rightarrow} -3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 10 & -5 \end{vmatrix}$$

$$\overset{4.Adım}{\Rightarrow} -3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -55 \end{vmatrix} = -3 * -55 = 165$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 4 \\ 4 & -4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$, ise $\det(A) = 51$

3.5.2 ÖZEL MATRİSLERİN DETERMİNANT

2×2 ve 3×3 matrislerin determinant özel bir yöntemle de bulunabilir. Bu matrislerin determinant diyagonal elemanlarının çarpımların toplam şeklinde yazılabilir. Bir **A** matrisinin determinant sol üst köşeden sağ alt köşeye elemanların çarpımlarının toplamından sağ üst köşeden sol alt köşeye elemanların çarpımlarının toplamın çıkararak bulunur. Yani

- 2×2 boyutlu sistem için

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11} * a_{22} - a_{21} * a_{12}$$

- 3×3 Matris için ise

$$\det(A) =$$
$$= \left(a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{13}.a_{12}.a_{32}\right)$$
$$-\left(a_{13}.a_{22}.a_{31} + a_{11}.a_{23}.a_{32} + a_{12}.a_{21}.a_{33}\right)$$

3.5.3. KOFAKTÖRLER YARDIM İLE DETERMİNANT BULMA İŞLEMİ

Kare matrisin determinant sadece sütun ve kolon işlemleri yapılarak bulunabileceği gibi, kofaktörler yardım ile de bulunabilir. Bunun için ilk önce kofaktör açılım tanımlanması gereklidir.

Teorem 3-6: Bir kare **A** matrisinin aij inci elemanının kofaktörü $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ formülü ile hesaplanır. Burada Mij ya **A** matrisinin minörü denir ve A matrisinin i satır ve j kolonun iptal edilmesi ile oluşan matrisin determinantına eşittir.

$$A=\begin{bmatrix}3 & 6 & -9\\ 0 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 5\end{bmatrix}$$ Matrisinin C_{11} ve C_{32} elemanlarının kofaktörleri nedir?

$$C_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}0 & -2\\ 1 & 5\end{vmatrix}=1*2=2$$

$$C_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}3 & -9\\ 0 & -2\end{vmatrix}=-1*-6=6$$

3x3 bir matrisin determinantı daha önceden verilmişti, bunu bir kez daha yazılırsa;

$$\begin{aligned}\det(A)&=a_{11}.a_{22}.a_{33}+a_{13}.a_{21}.a_{32}+a_{13}.a_{22}.a_{31}\\ &\quad -a_{11}.a_{23}.a_{32}-a_{12}.a_{21}.a_{33}-a_{12}.a_{23}.a_{31}\\ &=a_{11}(a_{22}.a_{33}-a_{23}.a_{32})-a_{21}(a_{12}.a_{33}-a_{13}.a_{32})\\ &\quad +a_{31}(a_{13}.a_{22}-a_{12}.a_{23})\end{aligned}$$

Yukarıdaki denklem yeniden düzenlenirse;

$$\det(A)=C_{11}a_{11}+C_{21}a_{21}+C_{31}a_{31}$$

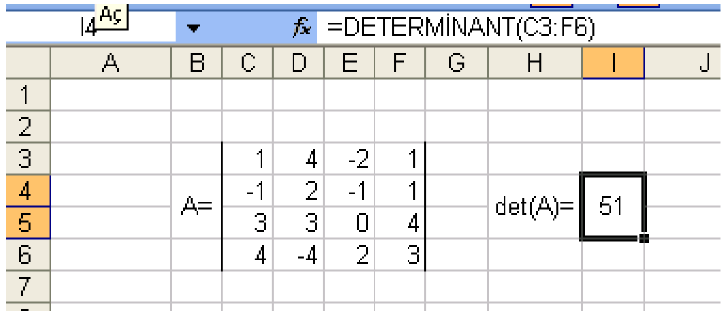
Burada görüleceği gibi bu değerler kofaktörler ile buna karşılık gelen değerlerin çarpımlarının toplam olduğu görülür.

$$A=\begin{bmatrix}3 & 1 & 0\\ -2 & -4 & 3\\ 5 & 4 & -2\end{bmatrix}$$, ise det(A) kofaktörler yardım ile hesaplayınız.

$$\begin{aligned}\det(A)&=a_{11}C_{11}+a_{21}C_{21}+a_{31}C_{31}\\ &=3*(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-4 & 3\\ 4 & -2\end{vmatrix}-2*(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 4 & -2\end{vmatrix}+5*(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1 & 0\\ -4 & 3\end{vmatrix}\\ &=3*(-4)+2*(-2)+5*3\\ &=-1\end{aligned}$$

3.5.4. EXCELİN HAZIR FONKSİYONLAR KULLANARAK DETERMİNANT BULMA

Excel'de matrislerin determinantı bulmak için ilk önce kare matris her bir eleman bir hücreye gelecek şekilde yazılır Şekil 3-2 deki gibi yazılır. Daha sonra formül çubuğuna =DETERMİNANT(Hücrenin Adresi) yazılarak işlem yapılır.



3.6. MATRİS TERSİ (MATRİS EVRİĞİ)

Sadece kare ve determinantı sıfırdan farklı olan matrislerin tersi vardır.

$$A_{n\times n} * B_{n\times n} = B_{n\times n} * A_{n\times n} = I$$

Eşitliğini sağlayan ve boyutlar $n{\times}n$ olan **B** matrisi varsa **B** matrisine **A** matrisinin tersi denir ve $\mathbf{A}^{-1}$ ile gösterilir. Bir kare matrisin tersi birçok şekilde hesaplanabilir. Bu metotlardan bazları ele alınacaktır. Matris tersinin nasıl alınacağına bakmadan önce bazı matris özelliklerine bakalım

Eğer **A** ve **B** tersi alınabilir ve aynı boyutlarda matrisler ise ve **AB**'nin tersi var ise

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

eşitliği yazılabilir

Eğer **A** kare matris ise ve *n* bir tam say ise

$$A^0 = I \qquad A^n = AA.....A$$

3.6.1 ADJOİNT YARDIM İLE MATRİS TERSİ BULMA

A matrisinin tersi aşağıdaki denklem yardım ile bulunabilir. Bu metoda Adjoint matrisi kullanıldığından dolay bu metoda Adjoint matris yöntemi ile matris tersi alma denir.

$$A^{-1} = \frac{adjo\,\mathrm{int}(A)}{\det(A)}$$

Denklem adjointa deki $adjo\,\mathrm{int}(A) = kofakt\ddot{o}r(A)^T$ ifadesi ile belirlenir. Aşağıda verilen **A** matrisinin tersini adjoint metodu ile hesaplayınız.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$kofakt\ddot{o}r(A)=\begin{bmatrix} +\begin{vmatrix}-4 & 3\\ 4 & -2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 5 & -2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}-2 & -4\\ 5 & 4\end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix}1 & 0\\ 4 & -2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}3 & 0\\ 5 & -2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}3 & 1\\ 5 & 4\end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix}1 & 0\\ -4 & 3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}3 & 0\\ -2 & 3\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}3 & 1\\ -2 & -4\end{vmatrix}\end{bmatrix}$$

$$kofakt\ddot{o}r(A)=\begin{bmatrix} 8-12 & -(4-15) & -8+20 \\ 2+0 & -6 & -(12-5) \\ 3 & -9 & -12+2\end{bmatrix}$$

$$kofakt\ddot{o}r(A)=\begin{bmatrix} -4 & 11 & 12 \\ 2 & -6 & -7 \\ 3 & -9 & -10\end{bmatrix}, \quad \det(A)=-1$$

$$A^{-1}=\frac{adjo\,\mathrm{int}(A)}{\det(A)}=\frac{kofakt\ddot{o}r(A)^T}{\det(A)}=\frac{\begin{bmatrix} -4 & 2 & 3 \\ 11 & -6 & -9 \\ 12 & -7 & -10\end{bmatrix}}{-1}=\begin{bmatrix} 4 & -2 & -3 \\ -11 & 6 & 9 \\ -12 & 7 & 10\end{bmatrix}$$

3.6.2. DOĞRUDAN (ELİMİNASYON) YÖNTEMİ İLE MATRİS TERSİ BULMA

Görüldüğü gibi Adjoint metodu kullanarak bir kare matrisin tersini almak için önce kofaktörler matrisini bulmak, daha sonra verilen matrisin determinantına bölünmesi gereklidir. Bu da küçük boyutlu matrisler için kolay olur, fakat matris boyutlar büyüdüğü zaman çok geniş bilgisayar hafızası gerektirir. Bundan dolay tercih edilen bir yöntem değildir. Bunun yerine daha az bilgisayar hafızası gerektiren eliminasyon yöntemi ile de matris tersi hesaplanabilir. Bu yöntemde tersi alınacak matris ile aynı boyutlarda bir birim matris yan yana yazılır ve aşağıdaki denklem deki gibi bir augmented (genişletilmiş) matris yazılır ve tersi alınacak matris yerine birim matris olana kadar satır ve sütun işlemleri yapılır.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & 1 & 0 & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & 1 & b_{31} & b_{32} & b_{33}\end{array}\right]$$

Satır ve sütun işlemleri aynı determinant bulunurken yapılan işlemler gibidir. Yapılacak işlem ilk önce a_{11} elemanın bir (1) şekline dönüştürülmek istendiğinden dolay birinci satır a_{11} elemanına bölünür daha sonra $-a_{21}$ ile çarpılarak ikinci satıra $-a_{31}$ ile çarpılarak 3. satıra eklenir. Bu işlem birinci kolondaki tüm elemanlar sıfır değeri alıncaya kadar devam eder. Daha sonra ikinci satıra geçilir ve a_{22} terimi hariç tüm 2. kolon elemanlar sıfır oluncaya kadar birinci satıra yapılan işlemler yapılır. Bu işlem tüm satırlar için yapılılığında matrisin tersi bulunmuş olur. Bu işlemler yapılırken matrisin diyagonal elemanlar hesap esnasında sıfırdan farklı olmalıdır.

Eğer diyagonal elemanlardan herhangi biri sıfır ise genişletilmiş matris yazıladıktan sonra satırların yerleri diyagonal elemanlar sıfır olmayacak şekilde değiştirilir. Bu işlem matris tersi işlemlerini etkilemez. Birinci matrisin birim matris haline getirmek için yapılan satır ve sütun işlemleri aynı determinant işlemleri yapılırken uygulanan adımlar gibi yapılır. Bunu bir örnekle gösterelim.

Örnek 3-15: $A=\begin{bmatrix}3 & 6 & -9\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 5\end{bmatrix}$ matrisinin tersini doğrudan yöntemle bulunuz.

Birinci matris ile birim matrisin yerini değiştirmek için aşağıdaki işlemler yapılır.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}3 & 6 & -9 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\begin{array}{c}(a)\\(b)\\(c)\end{array}$$

$$\xrightarrow[c=-b+c]{a=-6b+a}\left[\begin{array}{ccc|ccc}3 & 0 & -3 & 1 & -6 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 6 & 0 & -1 & 1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[b=c/6+b]{a=-c/2+a}\left[\begin{array}{ccc|ccc}3 & 0 & 0 & 1 & -13/2 & 1/2\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5/6 & 1/6\\ 0 & 0 & 6 & 0 & -1 & 1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{3.adım}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1/3 & -13/6 & 1/6\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5/6 & 1/6\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/6 & 1/6\end{array}\right]$$

$A^{-1}=\begin{bmatrix}1/3 & -13/6 & 1/6\\ 0 & 5/6 & 1/6\\ 0 & -1/6 & 1/6\end{bmatrix}$ olarak hesaplanır.

3.6.3. CHOLESKİ METODU İLE MATRİS TERSİ BULMA

Tersi alınacak matrisin determinantının sıfıra yakın olması durumunda doğrudan yöntemle matris tersi almak sakıncalı olur. Özellikle diyagonal elemanlar sıfıra yaklaşacağdan dolay yuvarlama hatalar artacaktır. Bu hatalardan kurtulmak için Choleski metodu kullanılır. Bu metodla tersi alınacak matris aşağıdaki denklemde görüldüğü gibi bir üst üçgen (**U**) ve bir alt üçgen matris (**L**) halinde yazılır. Denkleme dikkat edilecek olursa **L** matrisinin diyagonal elemanlar 1 olarak seçilmiştir. Bu zorunlu değildir bunun yerine **U** matrisin diyagonal elemanlar da bire eşit seçilebilirdi. **L** ve **U** matris elemanlarının değerleri matris çarpımlar yazılılıktan sonra bulunabilir.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & 0 & U_{33} \end{bmatrix}$$

Çarpma işlemi yapılırsa;

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ L_{21}U_{11} & L_{21}U_{12} + U_{22} & L_{21}U_{13} + U_{23} \\ L_{31}U_{11} & L_{31}U_{12} + L_{32}U_{22} & L_{31}U_{13} + L_{32}U_{23} + U_{33} \end{bmatrix}$$

Eşitliği elde edilmiş olur. Birinci satır için aşağıdaki denklemler kolayca yazılır.

$$U_{11} = a_{11}, \;\; U_{12} = a_{12}, \;\; U_{13} = a_{13}$$

İkinci satır için

$$L_{21} = \frac{a_{21}}{U_{11}}$$
$$U_{22} = a_{22} - L_{21}U_{12}$$
$$U_{23} = a_{23} - L_{21}U_{13}$$

En son üçüncü satırdan ise

$$L_{31} = \frac{a_{21}}{U_{11}}$$
$$L_{32} = \frac{a_{32} - L_{31}U_{12}}{U_{22}}$$
$$U_{33} = a_{33} - L_{31}U_{13} - L_{32}U_{23}$$

sonuçlar elde edilir. Bu işlemleri genelleştirmek ve bilgisayar programlamaya uygun hale dönüştürmek için Denklemler upper1 ve lower1'da verilen;

$$U_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{ik}U_{kj}, \quad i \le j$$

$$L_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k}^{j-1} L_{ik}U_{kj}}{U_{ij}}, \;\; i > j$$

formülleri ile hesaplanabilir. Daha sonrada **L** ve **U** matrislerinin her birinin tersi kolaylıkla alınabilir. Bu da Denk 3-1 ve 3-2 de ki şartlar sağlamalıdır.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t_{21} & 1 & 0 \\ t_{31} & t_{32} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3-1}$$

$$\begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & 0 & U_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ 0 & s_{22} & s_{23} \\ 0 & 0 & s_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3-2}$$

Bu **L** ve **U** matrislerinin tersi Denklem (3-3) ve (3-4)'de gösterilen formüllerle de bulunabilir.

$$i > j \text{ için } t_{ij} = -\sum_{k=j}^{i=1} L_{ik} * t_{kj} \tag{3-3}$$

$$j > i \text{ için } s_{ij} = -\sum_{k=i}^{j-1} \frac{s_{ik}.u_{kj}}{u_{ij}} \quad \text{ve } j = i \ \text{ için } s_{ii} = \frac{1}{u_{ii}} \tag{3-4}$$

Daha sonra **A** matrisinin tersinin $A^{-1} = U^{-1}.L^{-1}$ olduğu görülür.

Örnek 3-16: $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ matrisinin tersini ayrıştırma yöntemi ile hesaplayınız.

Denklem (3-1) ve (3-2)'i kullanılarak

$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ve $U = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ bulunabilir. Daha sonra alt üçgen ve üst üçgen matrislerinin tersi Denklem (3-3) ve (3-4) ile bulunabilir.

Bunlar $L^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ ve $U^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -2 & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$ olarak bulunur.

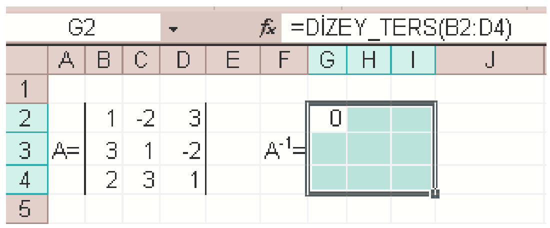
En son adım olarak **A** matrisin tersi $A^{-1} = U^{-1}L^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & -13/6 & 1/6 \\ 0 & 5/6 & 1/6 \\ 0 & -1/6 & 1/6 \end{bmatrix}$ hesaplanabilir.

Örnek 3-17: $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ matrisini $A = LU$ şeklinde yazınız.

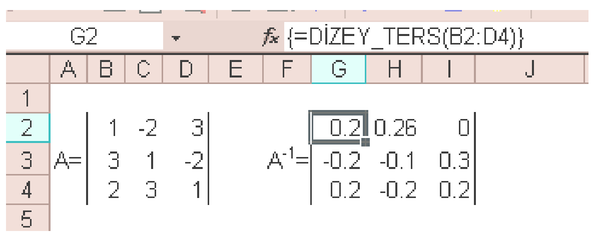
$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & \frac{4}{7} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

3.6.4 EXCEL YARDIM İLE MATRİS TERSİ BULMA

Tersi alınacak kare **A** matrisi yazılır. Daha sonra **A** martinin tersi nereye yazılacak ise o bölge matrisin boyutlar kadar kısım taranır ve formül çubuğuna =DİZEY_TERS(A matrisinin Alan adresi) yazılır. Son hali aşağıdaki gibi olur.



Daha Sonra Ctrl+Shift basılı tutulurken Enter düğmesine basılarak, matrisin tersi elde edilmiş olur. Sonuç aşağıda verilmiştir.



3.7. DENKLEM TAKMALARININ ÇÖZÜMÜ

Denklem takımlar yukarda anlatıldığı gibi matrisin önce tersi bulunup daha sonrada bilinmeyenler için çözümlenebilir. Fakat zorunlu olmadığı sürece matrislerin tersi alınarak denklem takımlarının çözümlemesi yapılmamalıdır. Eğer amaç denklem takımlar çözümlemek ise bunun yerine daha az sayısal işlem yaparak denklem takımlar çözümlenebilir. Bu bölümde bu metotlar anlatılacaktır. Denklem takımılar direkt metotlar veya yineleme metotlar kullanılarak çözümlenebilir. Bu bölümde direkt metotlar dan Cramer Kanunu, Gauss-Jourdan ve ayrıştırma metotlar anlatılacak. Diğer taraftan yineleme metotlarından ise sadece Gauss-Seidel ve Conjeguate Gradent metodu üzerinde durulacaktır.

3.7.1. CRAMER KURAL

Bu metot denklem takımların çözmek için geliştirilen sayısal analiz metotlarından biri değildir. Özellikle çözülecek denklem takımlarının sayısı fazla olduğu durumlarda bu metot bilgisayar zaman bakımından masraflı olacağından dolay tercih edilmez. Ama iki ve üç boyutlu denklemlerin elle çözümü için uygundur. Genel olarak bu yöntemin nasıl işlediğini anlatmak için *n* adet ve *n* bilinmeyenli denklem takım ***Ax***=***b*** gibi olsun. Burada bilinmeyenlerin bulunduğu **x** vektörünün değerini bulmak için **A** matrisindeki **x** değerine karşılık gelen kolonun yerine **b** vektörü yazılarak oluşturulan matrisin determinantının **A** matrisin determinantına oran olarak tanımlanabilir.

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)} \tag{3-5}$$

Cramer Kanununun tanımından da anlaşılacağı gibi bu metodun kullanılması için **A** matrisinin determinantının sıfırdan farklı olması gerekmektedir. Tanım matematiksel olarak gösterilmek istenirse: **Ax**=**b** ile ifade edilebilir. **A**, **b** ve **x** değerleri aşağıda verilmişidir.

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \cdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Denk. (3-5) deki $\det(A_i)$ aşağıda verilmiştir.

$$\det(A_i) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Örnek 3-18: Aşağıda **Ax**=**b** olarak verilen denklem takımlarının köklerinin Cramer Kuralın kullanarak bulunuz.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 1 & -2 & 0 & 5 \\ -3 & 0 & 7 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 13 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

İlk adımda daha önceden anlatılan metotlardan birini kullanarak **A** matrisin determinantı bulunmalıdır. Eliminasyon metodu kullanılarak **A** matrisin determinantı **|A|**=-136 bulunur. Daha sonra Denklem (3-5) kullanılarak x'ler bulunabilir. Yani

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} -7 & 0 & 0 & -4 \\ 13 & -2 & 0 & 5 \\ 5 & 0 & 7 & 4 \\ 4 & 2 & -2 & 3 \end{vmatrix}}{-136} = \frac{-136}{-136} = 1$$

$$x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -7 & 0 & -4 \\ 1 & 13 & 0 & 5 \\ -3 & 5 & 7 & 4 \\ 0 & 4 & -2 & 3 \end{vmatrix}}{-136} = \frac{136}{-136} = -1$$

$$x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -7 & -4 \\ 1 & -2 & 13 & 5 \\ -3 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}}{-136} = \frac{0}{-136} = 0 \;,$$

$$x_4 = \frac{|A_4|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -7 \\ 1 & -2 & 0 & 13 \\ -3 & 0 & 7 & 5 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{vmatrix}}{-136} = \frac{-272}{-136} = 2$$

Örnek 3-19: Aşağıdaki denklem takımının çözüm kümesini bulunuz.

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 1 \\ 3x + y - 2z &= 2 \\ 2x + 3y + z &= -3 \end{aligned}$$

3.7.2. GAUSS-JORDAN

Gauss-Jordan metodu daha önce matris tersini almak için kullanılan direkt metoda benzemektedir. Bu metodun eğer "bir eşitliğin iki taraf sıfırdan farklı bir say ile çarpılırsa veya bir eşitliğin her iki tarafına aynı sayı eklenirse değeri değişmez" mantığı çerçevesinde işlemler yapılarak denklem takımların kökleri bulunmaya çalışılır. Bunun için verilen denklem takımlar ilk önce genişletilmiş halde yazılırlar. Yani **Ax**=**b** denklem takım aşağıdaki şekilde yazılır.

$$[A,b] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{n1} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{n2} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix}$$

Daha sonra, **A** matrisi üst üçgen matris haline dönüştürülmeye çalışılır. Bunun için ilk önce birinci kolondaki, birinci satır eleman (a_{11}) hariç, bütün elemanlar (a_{12}, a_{13},…a_{n1}) sıfır yapmak için birinci satır istenen saylar ile çarpılarak diğer satırlara eklenir. Daha sonra ikinci satır istenen saylarla çarpılarak ikinci satırın altındaki satırlara eklenir. Bu işlemler **A** matrisi üst üçgen matris olana kadar devam eder. Buna "Gauss İleri Eliminasyon" denir. Daha sonra *n* denklemden başlanarak 1inci denkleme kadar bilinmeyenler bulunur. N'inci denklemden başlanmasının nedeni ise o denklemde sadece x_n bilinmeyen olarak kalmıştır. İlk x_n bulunduktan daha sonra (*n-1*) denkleme geçilir. Burada ise bilinmeyen sadece x_{n-1} dir. Bu işlemler birinci denkleme gelene kadar devam eder. Bu işlemede "Gauss eliminasyonunda geriye doğru yerine konma" denir. Bu işlemler esansında diyagonal elemanlara "Pivot" denir. Dikkat edilecek olursa bu Pivotlardan herhangi biri sıfır olma durumumda işlem yapılamayacaktır. Bu problemden kurtulmak için tam veya yarım pivot seçimleri yapılarak işlemlere devam edilebilir.

Örnek 3-21: Aşağıda verilen denklem takımının çözüm kümesini bulunuz.

$$\begin{aligned} 3x - 6y + 2z &= 15 \\ -4x + y - z &= -2 \\ x - 3y + 7z &= 22 \end{aligned}$$

İzlenecek yol:

$$\begin{bmatrix} 3 & -6 & 2 & 15 \\ -4 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & -3 & 7 & 22 \end{bmatrix} \begin{matrix} (a) \\ (b) \\ (c) \end{matrix} \xrightarrow[c=-a/3+c]{b=4a/3+b} \begin{bmatrix} 3 & -6 & 2 & 15 \\ \frac{3*4}{3}-4 & \frac{-6*4}{3}+1 & \frac{2*4}{3}-1 & \frac{15*4}{3}-2 \\ \frac{-1*3}{3}+1 & \frac{-6*-1}{3}-3 & \frac{2*-1}{3}+7 & \frac{15*-1}{3}+22 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -6 & 2 & 15 \\ 0 & -7 & \frac{5}{3} & 18 \\ 0 & -1 & \frac{19}{3} & 17 \end{bmatrix} \xrightarrow{c=-b/7+c} \begin{bmatrix} 3 & -6 & 2 & 15 \\ 0 & -7 & \frac{5}{3} & 18 \\ 0 & \frac{-7*-1}{7}-1 & \frac{5*-1}{3*7}+\frac{19}{3} & \frac{-1*18}{7}+17 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -6 & 2 & 15 \\ 0 & -7 & \frac{5}{3} & 18 \\ 0 & 0 & \frac{128}{21} & \frac{101}{7} \end{bmatrix}$$

elde edilmiş olur bu bundan sonra 3. denklem den itibaren sonuçlar bulunmaya başlana bilir.

1) Son satırdan başlayarak $\frac{128}{21} z = \frac{101}{7}$ olduğu görülür ve $z = \frac{303}{128}$.

2) Daha sonra

$$-7y + \frac{5}{3} * \frac{303}{128} = 18 \;\Rightarrow\; y = -\frac{257}{128}$$

3) 1 numaralı denklemden

$$3x - 6 * \frac{-257}{128} + 2 * \frac{303}{128} = 15 \;\Rightarrow x = -\frac{19}{32}$$

Örnek 3-21: Aşağıda veriline denklem takımın çözümünü Gauss-Eliminsayon yöntemi ile bulunuz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 3 & 5 \\ -3 & -2 & 7 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 13 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

3.7.4. CHOLESKİ METODU

Daha önceden “Choleski Metodu ile Matris Tersi Bulma” bölümünde Denklem (3-1) ve (3-2)' den faydalanarak bir matrisin nasıl üst üçgen ve alt üçgen matris hallerine dönüştürüleceği anlatılmıştı. Bu bölümde ise aynı metodu kullanarak denklem takımların nasıl çözüleceği üzerinde durulacaktır. **Ax=b** denklem takım (3-1) ve (3-2) kullanılarak

$$A\;x = b \quad \rightarrow L\underbrace{Ux}_{y} = b \rightarrow Ly = b$$

Burada **L** bir üst üçgen matris olduğundan dolay **Ly=b** denklemi **y**' ye göre çözümlenebilir. Daha sonrada bulunan bu **Ux=y** yazılarak x değerleri hesaplanır.

Örnek 3-22: Choleski metodu kullanarak aşağıdaki denklem takımların çözüm kümesini bulunuz.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 1 & -2 & 0 & 5 \\ -3 & 0 & 7 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 13 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

İlk yapılması gerekli iş **A** matrisini **LU** şeklinde yazmaktır.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 1 & -2 & 0 & 5 \\ -3 & 0 & 7 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -\frac{2}{7} & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 7 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{68}{7} \end{bmatrix}$$

Daha sonra Denklem (ly) kullanarak y matrisin değerleri bulunabilir.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -\frac{2}{7} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 13 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Kullanılarak $y_1 = -7$, $y_2 = 20$, $y_3 = -16$ ve $y_4 = 136/7$ bulunur daha sonra *Ux=b* formülü

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 7 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{68}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 20 \\ -16 \\ \frac{136}{7} \end{bmatrix}$$

yazılabilir. Burada $x_4 = \frac{136}{68} = 2$ üçündü satırdan gelen sonuç $7x_3 - 8x_4 = -16$ dan $x_3 = (-16 + 8 * 2)/7 = 0$ ikinci satırdan $x_2 = -1$ ve $x_1 = 1$ elde edilir.

3.7.5. GAUSS-SİDİEL-YİNELEME METODU

Bilgisayarın denklem takımların çözümlemek için harcadığı zaman program algoritmasına bağlıdır ama yaklaşık olarak denklem sayısının küpü ile orantılıdır. Bundan dolay eğer denklem sayısı çok fazla ise buna karşılık olarak gereken zaman da artacaktır. Denklem takımlarının çözümü için kullanılan zaman azaltmak amacı ile yineleme metotlar geliştirilmiştir. Burada bu metotlardan ikisi ele alınacaktır.

Daha önceki konularda direkt olarak denklem takımların köklerinin nasıl bulunacağı anlatılmıştı. Bu anlatılanlara alternatif olması bakımdan yineleme metotları anlatılacaktır. Çünkü bazı durumlarda özellikle eğer **Ax=y** gibi bir denklem takımındaki **A** matrisinin boyutlar büyük ve bir çok eleman sıfır (0) ise bu durumlarda direkt metotlar kullanışlı olmaz. Bunun yerine yineleme metotlar geliştirilmiştir. Yineleme metotlar daha az bilgisayar hafızasına ve daha az zamana ihtiyaç duyarlar.

Yineleme yöntemleri ile denklem takımların nasıl çözüleceğini bir örnek üzerinde gösterimi:

$$5x_1 - x_2 + 3x_3 = -6$$
$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 = -7$$
$$-x_1 + 7x_2 - x_3 = 16$$

Bu denklem takımının çözüm kümesi $x_1 = 1,\ x_2 = 2 \text{ ve } x_3 = 3$ dur. Şimdi bu çözümüm kümesini bulmak için ilk adımda en büyük katsayısı olan göre denklemler çözümlenir. Yani birinci denklemden

$$x_1 = \frac{1}{5} * (-6 + x_2 - 3x_3)$$

Üçünü denklemden

$$x_2 = \frac{1}{7} * (16 + x_1 + x_3)$$

ve ikinci denklemden

$$x_3 = \frac{1}{4} * (-7 - x_1 - 2 * x_2)$$

Daha sonra $x_1^0,\ x_2^0 \text{ ve } x_3^0$ için ilk tahmin değerleri yazılarak işleme başlanır. Eğer daha önceden sonuçlar yaklaşık olarak biliniyor ise bunlar kullanılabilir ama herhangi bir tahmin yoksa en kolay olacak şekilde 0 değerleri yazılabilir. Yani sonuç olarak

$$x_1^1 = \frac{1}{5} * (-6 + 0 - 3 * 0) = -\frac{6}{5}$$
$$x_2^1 = \frac{1}{7} * (16 + 0 + 0) = \frac{16}{7}$$
$$x_3^1 = \frac{1}{4} * (-7 - 0 - 2 * 0) = \frac{-7}{4}$$

Yani ilk sonuçlar $x_1^1 = -\frac{6}{5},\ x_2^1 = \frac{16}{7} \text{ ve } x_3^1 = \frac{-7}{4}$ bulunmuş olur. Daha sonra son bulunan değerler tekrar denklemlerde yerine konarak ikinci tahmin değerleri bulunabilir.

$$x_1^2 = \frac{1}{5} * (-6 + \frac{16}{7} - 3 * \frac{-7}{4}) = \frac{43}{140}$$
$$x_2^2 = \frac{1}{7} * (16 + \frac{-6}{5} + \frac{-7}{4}) = \frac{261}{140}$$
$$x_3^2 = \frac{1}{4} * (-7 - \frac{-6}{5} - 2 * \frac{16}{7}) = -\frac{363}{140}$$

Daha sonra aynı mantıkla dokuz kere bu işlem devam ederse. Dokuzuncu yinelemenin sonunda $x_1^9 = 0.99786,\ x_1^9 = 2.0,\ \text{ve}\ x_1^9 = -2.9989$ olarak kökler bulunabilir.

Gauss-Siedel Yöntemi incelendiğinde daha önceden anlatılan sabit nokta yinelemesi yöntemine benzediği görülecektir. Sabit nokta yineleme metodunda denklemin köklerinin bulunana bilmesi için hatırlanacağı üzere verilen $f(x) = 0$ fonksiyonu $x = g(x)$ şekline getirilir ve daha sonra eğer $\left|\frac{dg(x_o)}{dx_o}\right| < 1$ ise, **x'** bir noktaya yakın sayacağı söylenmişti. Daha önceden söylenen bu şartların bezerleri Gauss-Siedel Yöntemi içinde geçerlidir. Gauss-Siedel Yönteminde yapılan iterasyonun yakınsaması için diyagonal elemanların dominant olması gerekir. Bunu sağlamak için

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

veriliyor ise

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1,\ j\neq i}^{n} |a_{ij}| \quad i\ ve\ j = 1,2,3,..n$$

şart sağlanmalıdır. Eğer bu şart sağlanırsa denklem takımının kesin çözümü vardır. Eğer şart sağlanmıyor ise o halde denklem takımının için bir çözüm bulunabilir ama her zaman bir çözüm bulunacağı anlam çıkarılmamalıdır. Yukarıda verilen şart sağlanması için denklem takımların yerleri değiştirilebilir.

Örnek 3-23: Aşağıdaki denklem takımın Gauss-Siedel metodu ile çözünüz.

$$3x_1 - 0.2x_2 + 4x_3 = 5$$
$$5x_1 - 0.5x_2 - 3x_3 = 9$$
$$4x_1 - 5x_2 - 0.2x_3 = 1$$

Sonuçlar $x_2 = 1.3041,\ x_1 = 1.8755,\ x_3 = -0.09145$

PROBLEMLER

1. Aşağıda bazı matrisler tanımlanmıştır, buna göre aşağıdaki sorular cevaplayınız:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 4\\ 1 & 3\end{bmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 3\\ 2 & 1 & -1\end{bmatrix},\ \mathbf{C}=\begin{bmatrix}1 & 3 & 4 & 0\end{bmatrix},\ \mathbf{K}=[2\ \ 4\ \ 0\ \ -1]^T$$

1. Matrislerin boyutlar nedir?
2. Matrislerden hangisi, kare matris, kolon matris ve satır matrisidir?
3. Aşağıda yapılabilecek işlemleri yapınız. Eğer yapılamıyorsa nedenini açıklayınız.
   $\mathbf{A}\times\mathbf{B},\ \mathbf{A}^T\times\mathbf{B}^T,\ \mathbf{C}\times\mathbf{K},\ \ \mathbf{K}\times\mathbf{A},$

2. Aşağıda verilen matrislerin determinantların bulunuz.

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}4 & 2 & 6\\ 3 & 0 & 7\\ -2 & -1 & -3\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 3 & 4 & 5\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\quad \mathbf{C}=\begin{bmatrix}2 & -1 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 2\\ 3 & -1 & 4 & 3\\ 2 & 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

3. Yukarıdaki problemlerde verilen matrislerin tersini Direct, Adjoint ve ayrıştırma metotların kullanarak bulunuz.

4. Aşağıda verilen matrislerin hangilerin tersi alınabiliyor ise matrislerin tersini hesaplayınız.

$$A=\begin{bmatrix}4 & 2 & 6\\ 3 & 0 & 7\\ -2 & -1 & -3\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 3 & 4 & 5\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}2 & -1 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 2\\ 3 & -1 & 4 & 3\\ 2 & 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

5. Aşağıdaki denklem takımlarının köklerini

Birinci denklem takımı

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 6 & 2 & 2\\ -3 & 4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ -3\\ 2\end{bmatrix}$$

İkinci denklem takımı

$$\begin{aligned}3x_2+4x_1&=-1\\ x_1+4x_3+x_4&=0\\ x_2+10x_3&=9\\ x_4+x_1&=10\end{aligned}$$

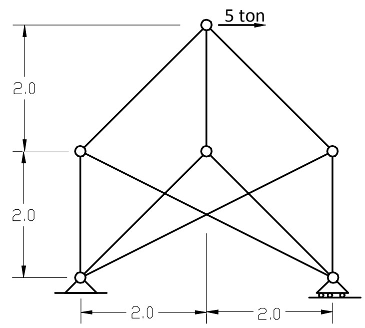
a) Gauss-Jordan ,

b) Gauss-Siedel,

c)Cheloski ve

d) Cramer metotların kullanarak bulunuz.

6. Aşağıda verilen kafes siteminin çubuk kuvvetlerini ve mesnet tepkilerini bulunuz.



4. DOĞRUSAL OLMAYAN DENKLEM TAKIMLARIN ÇÖZÜMÜ

4.1. GİRİŞ

Lineer olmayan denklem takımlarının çözümleri lineer denklem takımlıların çözmekten daha zordur. Lineer olmayan denklem takımlılarının analitik olarak çözümlemesi bazı özel durumlar dışında mümkün değildir. Bundan dolay lineer olamayan denklem takımları genellikle yineleme yönteminden biri kullanılarak çözümlenebilirler. Burada lineer olmayan denklemlerin çözümü için kullanılan Newton metoduna benzer bir metot kullanılarak çözümler anlatılacaktır. Hatırlanacağı gibi Bölüm 1'de Taylor açılım tek değişkenli bir $f(x)$ fonksiyon için yazılmıştı. Bu denklem iki değişkenli bir $f(x,y)$ fonksiyonu için ise aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta x) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\frac{\Delta x}{1!} + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\frac{\Delta y}{1!}$$
$$+\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}\frac{\Delta x^2}{2!} + \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}\frac{\Delta y^2}{2!} + ...$$

İki bağımsız değişkeni bulmak için en az iki adet denklem olması gereklidir. Örnek olarak bunlar $f_1(x,y)=0$ ve $f_2(x,y)=0$ olsun. Taylar açılımdaki ikinci dereceden terimleri ihmal edilir $f_1(x,y)=0$ ve $f_2(x,y)=0$ fonksiyonlar aşağıdaki denklemler elde edilirler.

$$f_1(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta x) = f_1(x_0,y_0) + \frac{\partial f_1(x_0,y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f_1(x_0,y_0)}{\partial y}\Delta y = 0$$
$$f_2(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta x) = f_2(x_0,y_0) + \frac{\partial f_2(x_0,y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f_2(x_0,y_0)}{\partial y}\Delta y = 0$$

Bu elde edilen denklemler matris formatında yazılırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x_0,y_0)}{\partial x} & \frac{\partial f_1(x_0,y_0)}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2(x_0,y_0)}{\partial x} & \frac{\partial f_2(x_0,y_0)}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_1(x_0,y_0) \\ -f_2(x_0,y_0) \end{bmatrix}$$

Bu denklem eğer Gauss eliminasyon yöntemi veya Crammer Kural kullanılarak Δx ve Δy bulunur daha sonrada ilk kabul edilen x ve y değerleri güncelleştirilir. Bu işlemler $\Delta x \approx 0$ ve $\Delta y \approx 0$ olana kadar işlemler devam eder.

Lineer olmayan denklem takımlarının çözümü için izlenecek adımlar:

1. x_0 ve y_0 için ilk tahmin değerleri yerine konarak $f_1(x_0,y_0)$ ve $f_2(x_0,y_0)$ hesaplanır.
2. $\frac{\partial f_1(x_0,y_0)}{\partial x}$, $\frac{\partial f_1(x_0,y_0)}{\partial y}$, $\frac{\partial f_2(x_0,y_0)}{\partial x}$ ve $\frac{\partial f_2(x_0,y_0)}{\partial y}$ değerleri bulunur.
3. Bulunan değerler denklemde yerine konduktan sonra Δx ve Δy değerleri bulunur.

4. $x_{i+1} = x_i + \Delta x$ ve $y_{i+i} = y_i + \Delta y$ kullanılarak x ve y değerleri güncelleştirilir.

5. Eğer Δx ve Δy belli hata aralığından daha küçükse işlem durdurulur. Eğer hata aralığından daha büyükse 1. Adıma gidilerek işlem tekrar edilir.

Örnek 4-1: $x^2 + y^2 = 9$ ve $e^x + 5x - y = 0$ denklem takımının $x_0 = 0.5$ ve $y_0 = 3$ değerlerine yakın kökünü hesaplayınız. İşlemleri iki anlamlı basamak bulana kadar devam ediniz.

1. Döngü:

1. Adım $f_1(x_0 = 0.5,\ y_0 = 3) = (0.5)^2 + (3)^2 - 9 = 0.25$

$f_2(x_0 = 0.5,\ y_0 = 3) = e^{0.5} + 5 * 0.5 - 3 = 1.15$

2. Adım $\frac{\partial f_1(x_0, y_0)}{\partial x} = 2x = 1 \quad \frac{\partial f_1(x_0, y_0)}{\partial y} = 2y = 6$

$\frac{\partial f_2(x_0, y_0)}{\partial x} = e^{0.5} + 5 = 6.6487 \quad \frac{\partial f_2(x_0, y_0)}{\partial y} = -1$

3. Adım $\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 6.65 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.25 \\ -1.15 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1750 \\ -0.0125 \end{bmatrix}$

4. Adım $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_o \\ y_o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.1750 \\ -0.0125 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.325 \\ 2.9875 \end{bmatrix}$

2. Döngüye ihtiyaç var çünkü işlemi durdurma kıstas yerine gelmemiştir.

1. Adım: $f_1(x_1 = 0.325,\ y_0 = 2.9875) = (0.325)^2 + (2.9875))^2 - 9 = 0.0308$

$f_2(x_1 = 0.325,\ y_0 = 2.9875) = e^{0.325} + 5 * 0.325 - 2.9875 = 0.02153$

2. Adım: $\frac{\partial f_1(x_1, y_1)}{\partial x} = 2x_1 = 2 * 0.325 = 0.65 \quad \frac{\partial f_1(x_1, y_1)}{\partial y} = 2y_1 = 2 * 2.9875 = 5.975$

$\frac{\partial f_2(x_1, y_1)}{\partial x} = e^{x_i} + 5 = e^{0.325} + 5 = 6.384 \quad \frac{\partial f_2(x_1, y_1)}{\partial y} = -1$

3. Adım: $\begin{bmatrix} 0.65 & 5.975 \\ 6.384 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0308 \\ 0.02153 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0041 \\ -0.0047 \end{bmatrix}$

4. Adım: $\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.325 \\ 2.9875 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.0041 \\ -0.0047 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3209 \\ 2.9828 \end{bmatrix}$

3. Anlamı basamak sayısına ulaşıldığı için işleme durdurulabilir.

Eğer ikiden daha fazla bilinmeyen varsa iki bilinmeyen için yapılan işlemlerin hepsi aynı adımlar takip edilerek yapılır. Lineer olamayan denklemlerin çözümlemeleri yapılırken dikkat edilmesi gereken en önemli nokta ilk tahmin değerlerin iyi seçilmesidir. Eğer iyi bir ilk tahmin değeri seçilmez ise fonksiyon büyük olasılıkla yakınsamayacaktır ve bir sonuç bulunamayacaktır.

Örnek 4-2: Aşağıda iki adet doğrusal olamayan denklem verilmiştir. Bu denklem takmn istediğiniz bir metot ile çözünüz. İik değerler olarak x=1 ve y=-1 kullanınız. Sadece 4 yineleme yapınız.

$$x^3 + 3y^2 = 15$$
$$2x^2 + 3y = -1$$

Bu denklem takım istenirse bir bilinmeyenli formata getirilebilir. O halde ikinci denklemden $y = -\frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{3}$ bulunur. Bulunan bu değer birinci denklemde yerine konursa $x^3 + 1/3\left(2x^2+1\right)^2 - 15 = 0$ eşitliği bulunur. Daha sonra istenen herhangi bir metotla çözüm yapılır.

Eğer çözüm olarak Newton Metodu kullanılacak ise

$$f(x) = x^3 + \frac{1}{3}(2x^2+1)^2 - 15$$
$$f'(x) = 3x^2 + \frac{2}{3}(2x^2+1)*4x$$

1. $$x^{(1)} = 1 - \frac{f(x)}{f'(x)} = 1 - \frac{1^3 - \frac{1}{3}(2*1^2+1)^2 - 15}{3*1^2 + \frac{2}{3}(2*1^2+1)*4*1} = 2$$

2. $$x^{(2)} = 2 - \frac{f(x)}{f'(x)} = 1 - \frac{2^3 - \frac{1}{3}(2*2^2+1)^2 - 15}{3*2^2 + \frac{2}{3}(2*2^2+1)*4*2} = 1.67$$

3. $$x^{(2)} = 1.67 - \frac{f(x)}{f'(x)} = 1 - \frac{1.67^3 - \frac{1}{3}(2*1.67^2+1)^2 - 15}{3*1.67^2 + \frac{2}{3}(2*1.67^2+1)*4*1.67} = 1.67$$

4. $$x^{(2)} = 1.56 - \frac{f(1.56)}{f'(1.56)} = 1 - \frac{1.56^3 - \frac{1}{3}(2*1.56^2+1)^2 - 15}{3*1.56^2 + \frac{2}{3}(2*1.56^2+1)*4*1.56} = 1.55$$

5. x &=&2-=2-=1.67 x &=&1.67-=1.67-=1.562 x &=&1.562-=1.562-=1.5515

Eğer çözümde Denklem takıları kullanılacak ise Birinci deneme için işlemler

1. Adım: $f_1(x_o = 1{,}0,\ y_o = -1) = x^3 + 3y^2 - 15 = -11$

   $f_2(x_o = 1{,}0,\ y_o = -1) = 2x^2 + 3y + 1 = 0$

2. Adım $\frac{\partial f_1(1{,}0)}{\partial x} = 3*x^2 = 3$ $\quad \frac{\partial f_1(1{,}0)}{\partial y} = 6y = -6$

   $\frac{\partial f_2(1{,}0)}{\partial x} = 4*x = 4$ $\quad \frac{\partial f_2(1{,}0)}{\partial y} = 3 = 3$

3. Adım : $\begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1.33 \end{bmatrix}$

4. Adım: $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_o \\ y_o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1.33 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2.333 \end{bmatrix}$

2. deneme için işlemler

1. Adım: $f_1(x_1 = 2,\ y_1 = -2.33) = x^3 + 3y^2 - 15 = -9.33$

$f_2(x_1 = 2,\ y_1 = -2.33) = 2x^2 + 3y + 1 = 2$ %

2. Adm $\frac{\partial f_1(2,\ -2,3)}{\partial x} = 3 * x^2 = 12 \quad \frac{\partial f_1(2,\ -2.33)}{\partial y} = 6y = -14$ &

$\frac{\partial f_1(2,\ -2,3)}{\partial x} = 3 * x^2 = 12 \quad \frac{\partial f_1(2,\ -2.33)}{\partial y} = 6y = -14$

3. Adm: $\begin{bmatrix} 12 & 14 \\ 8 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9.33 \\ -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = \begin{matrix} -0.378 \\ 0.342 \end{matrix}$

4. Adm: $\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2.333 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.378 \\ 0.342 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.622 \\ -1.991 \end{bmatrix}$

Yukarıdaki işlemlerde üçünü denemenden sonra $x \cong 1,5514$ ve $y \cong -1,938$ olur. Dikkat edilirse birinci ve ikinci yöntem sonuçların aynı olduğu görülür.

4.2 . EXCEL YARDIM İLE DOĞRUSAL OLAMAYAN DENK. TAKI. ÇÖZÜMÜ

Lineer ve lineer olmayan denklem takımların çözmek için EXCEL ile birlikte gelen ÇÖZÜÇÜ komutu da kullanılabilir. Lineer veya lineer olmayan denklem takımlar eğer

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n) &= 0 \\ f_3(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n) &= 0 \\ \cdots &= 0 \\ f_n(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n) &= 0 \end{aligned}$$

Şeklinde yazılırsa n denklemli *n* bilinmeyen olur. *x*' lerin gerçek değerlerini bulunduğu zaman denklemlerinin sonucu 0 değerinin sağalar. Yani bütün fonksiyonların toplam $f_1 + f_2 + ... + f_n = 0$ olacaktır. Ama eğer işaretlerden etkilenilmesi istenmiyor is bu takdirde doğal olarak fonksiyonların karelerinin toplamda sıfır değerini vermesi gerekecektir. Matematiksel olarak

$$f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + ... + f_n^2 = 0$$

Şimdi çözücünün nasıl kullanıldığına bakalım.

1. Sırası ile fonksiyonun bağımsız değişkenlerin ilk değerleri EXCEL de sırası ile bir kolona yazılır.
2. Yine sırası ile *f(x)=0* fonksiyonlar yukarıdaki ilk değerlerin adresi kullanılarak bir kolona yazılır.
3. Araçlar menusundan ÇÖZÜCÜ seçilir. (Eğer araçlar menusun de çözücü yoksa eklentilerden eklenmelidir.

4. ÇÖZÜCÜ ara yüzü çıkınca, aşağıdaki bilgiler girilir.

5. Hedef Hücre ye denklemin bulunduğu hücrenin adresi yazılır.

6. Eşittir bölgesindeki yere f(x) fonksiyonunun hangi rakama eşit olduğunu, büyük veya küçük olma durumuna göre bir değer girilir.

7. Değişen Hücreler kısmına ilk tahminin yapıldığı hücrenin adresi yazılır.

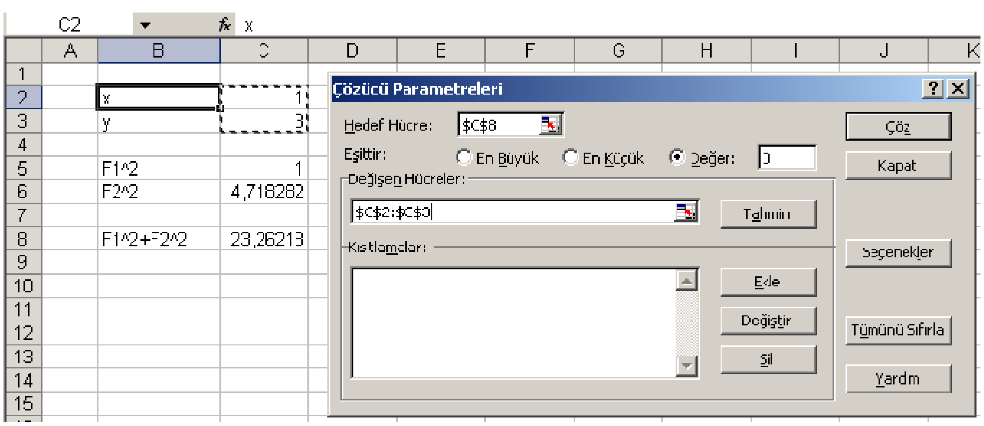
8. Eğer değişken x in değerlerini belli aralılarda tutmak istenirse. kısıtlamalar kısmına bunlar yazılabilir.

9. Çöz tıklanarak işlem sonlandırılır.

Çözümüm olup olmadığına göre EXCEL yeni bir diyalog kutusu açacak ve sonucu gösterecektir. Çözücü komutu bir kez kullanıldıktan sonra yine kullanılacak ise yeni değerler girmeden Çözücü ara yüzündeki TÜMÜNÜ SIFIRLA düğmesi ile önceki bilgiler silinmelidir. Eğer bu yapılmasa ÇÖZÜÇÜ çalışmayabilir.

Örnek4-3: Aşağıdaki lineer olamayan denklem takımlarının EXCEL deki çözücü komutunu kullanarak hesaplayınız. İlk değerler olarak *x=0.5* ve *y=3* i kullanınız

$$x^2 + y^2 = 9$$
$$e^x + 5x = y$$



Yukarda verilen denklemler EXCEL şekildeki gibi x'lere ilk tahminler yapılarak yazılır. Daha sonra aralardan ÇÖZÜZ seçilir ve gerekli yerler daha önce anlatıldığı gibi doldurulursa C2 ve C3 hücresindeki x ve y değerlerin karşılıklar bulunmuş olur.

Örnek: $f(x,y) = x^2 + x - y$ ve $g(x,y) = y - \sin(x)^2$ fonksiyonların *x=1* ve y=1'e yakın köklerini bulunuz.

1.1.1.($x \approx 0.382$ ve $y \approx 0.146$).

5. ENTERPOLASYON

5.1 GİRİŞ

Fiziksel veya sosyal olayların sonuçlar bazı durumlarda tablolar yardımı ile verilir. Örnek olarak bir ülkedeki nüfus beş yılda bir ölçülür ve tablolara gösterilebilir. Başka bir örnek: bir beton numunesinin mukavemet kazanma hızın belirlemek için bir grup beton numunesi üretilip daha sonra bunlar belli günlerde kırılarak mukavemetleri bulunup daha sonrada bunlar tablolarda verilebilir. Yani tabloda verilen değerler arasında sürekli bir ilişki olmayabilir veya bilinmeyebilir. Tablolarda bağımsız değişkenlere karşılık bunlara bağlı bağımlı değişken(ler) bulunur. Aranan değer(ler) tabloda olmadığı durumlarda, Enterpolasyon yöntemleri kullanılarak istenen değerler hesaplanabilir. Enterpolasyonun Türkçe karşılığı olarak *ara değer* bulma da denilir. Örnek olarak aşağıdaki tabloda bağımsız değişken x ve bağımlı değişken $f(x)$ değerleri 5 nokta için verilmiştir.

İstasyon No	0	1	2	3	4
x	2.3	4.5	6.7	8.0	10.6
$y(x)$	1.2	4.1	9.0	12.8	22.5

Bu tabloya bakarak *x*' in istasyonlardaki herhangi bir değeri için *y(x)* değerleri rahatlıkla tablodan okunabilir. Enterpolasyonun amacı tabloda olamayan bir x değerinin karşılığın bulmaktır. Örnek olarak $x = 5.0$ değerine karşılık gelen $y(x)$ değerini farklı metotlar kullanılarak bulunabilir. Bu bölümde bu metotlar anlatılacaktır. Birinci kısımda *Lagrangian polinom enterpolasyon metotlar ve ikinci kısımda da bölünmüş farklar anlatılacaktır.*

5.2 LAGRANGIAN POLİNOM

Bu kısımda verilen noktaların hatasız olduğu ve bunlardan bilinmeyen bir polinomun geçtiği varsayılacaktır. Bilinmeyen bu polinomun katsayılarının bulunuşu anlatılacaktır. Bunun için üç farklı metot kullanılabilir. Bunlar Doğrusal Enterpolasyon, *n*. dereceden Lagrangian Polinom Enterpolasyonu ve Nevill Enterpolasyonudur.

5.2.1 DOĞRUSAL ENTERPOLASYON

Doğrusal enterpolasyon iki noktası bilenen bir doğrunun denklemin yazılmasıdır. Eğer $[x_i, x_j]$ aralığındaki x değerine karşılık gelen f(x) değeri aranıyor ise bu değer $F(x)$ ile tahmin edilebilir. (y_i, x_i) ve (y_j, x_j) noktalar bilindiğinden dolay değerleri yerine yazılarak elde edilir.

$$F(x) = ax + b$$
$$f(x_i) = ax_i + b$$
$$f(x_j) = ax_j + b$$

Yukarıdaki denklemleri matris formunda tekrar yazılırsa

$$\begin{bmatrix} x_i & 1 \\ x_j & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_i) \\ f(x_j) \end{bmatrix}$$

Denklemlerde verilen matris a ve b için çözümlenirse. a ve b değerleri aşağıda verilmiştir.

$$a = \frac{y_j - y_i}{x_j - x_i}, \quad b = \frac{y_i \cdot x_j - y_j \cdot x_i}{x_j - x_i}$$

Bunlar yardımı ile aşağıdaki denklemler elde edilmiş olur.

$$F(x) = \frac{y_j - y_i}{x_j - x_i} x + \frac{y_i \cdot x_j - y_j \cdot x_i}{x_j - x_i}$$
$$= \frac{x_j - x}{x_j - x_i} y_i + \frac{x - x_i}{x_j - x_i} y_j$$

Tahmin $F(x)$ değeri bulunmuş olur ve fonksiyonun gerçek değeri $f(x)$ çoğu zaman bilinmez, fakat eğer biliniyor ise; hata miktar ise gerçek değer ile yaklaşık değer arasındaki fark olarak yazılabilir. Yani $R(x) = |f(x) - F(x)|$ denklemi ile ifade edilir. Elbette birçok zaman f(x) bilmediğinden dolay hata miktar önceden kestirilemez.

Örnek 5-1: Yukarda verilen tabloyu kullanarak *x=5* için gerekli olan kuvveti doğrusal interpolasyon yardım ile bulunuz.

Birinci nokta $f(x_i = 4.5) = 4.1$ ve ikinci nokta için $f(x_j = 6.7) = 9$ ise

$$F(x) = \frac{6.7 - 5}{6.7 - 4.5} \cdot 4.1 + \frac{5 - 4.5}{6.7 - 4.5} \cdot 9.0 = 5.2136$$

Verilen $x = 5.0$ için fonksiyonun yaklaşık değeri 5.1236 olarak bulunmuştur. Burada sadece iki nokta kullanılarak interpolasyon yapılmıştır. Eğer verilen bütün noktalar kullanılmış olsaydı. Acaba sonuç nasıl olurdu? Bunu araştırmak için verilen 5 noktadan geçen bir polinom kullanılmalıdır. Verilen 5 nokta için 4. dereceden bir denklem yazılabilir. Tahmini F(*x*) fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

$$F(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$$

Tabloda verilen değerler polinomda yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} 1.2 &= a + 2.3b + 2.3^2 c + 2.3^3 d + 2.3^4 e \\ 4.1 &= a + 4.5b + 4.5^2 c + 4.5^3 d + 4.5^4 e \\ 9.0 &= a + 6.7b + 6.7^2 c + 6.7^3 d + 6.7^4 e \\ 12.8 &= a + 8.0b + 8.0^2 c + 8.0^3 d + 8.0^4 e \\ 22.5 &= a + 10.6b + 10.6^2 c + 10.6^3 d + 10.6^4 e \end{aligned}$$

Denklemleri matris formatında yazılırsa

$$\begin{bmatrix} 1 & 2.3 & 2.3^2 & 2.3^3 & 2.3^4 \\ 1 & 4.5 & 4.5^2 & 4.5^3 & 4.5^4 \\ 1 & 6.7 & 6.7^2 & 6.7^3 & 6.7^4 \\ 1 & 8.0 & 8.0^2 & 8.0^3 & 8.0^4 \\ 1 & 10.6 & 10.6^2 & 10.6^3 & 10.6^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2 \\ 4.1 \\ 9.0 \\ 12.8 \\ 22.5 \end{bmatrix}$$

$a = 0.58746$, $b = -0.3334$, $c = 0.27892$, $d = -0.008482$ ve $e = 0.0003285$ bulunur. Buna göre

$$F(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$$
$$F(5) = 0.58746 - 0.3334 * 5 + 0.27892 * 5^2 - 0.008482 * 5^3 + 0.0003285 * 5^4$$

$$F(5) = 5.0536$$

Bulunur. Verilen her noktayı kullanılarak polinomu yazmak çok zor ve zahmetli olduğundan dolay bu işlemler yukarda anlatıldığı gibi yapılmaz. Her yeni denklem takım için matris oluşturmak ve bu denklem takımların çözümünü bulmak pratik bir işlem değildir. Bundan dolay bu yapılan işleri kısaltmak için Lagrangian Enterpolasyon Polinomu geliştirilmiştir.

5.2.2. N. DERECEDEN LAGRANGİAN POLİNOMU

Lagrangian polinomun da daha önce beş noktası bilinen bir eğri için yapılmıştır. Şimdi bunu daha genel hali ile nasıl yazılabileceğine bakalım. Örnek olarak m adet nokta olsun bu *m* adet nokta için *n.* dereceden bir Lagrangian Polinom yazılırsa. Elbette yazılacak polinomum en fazla *n=m-1* dereceden olacağı açıktır. Lagrangian polinom denklemi

$$F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$
$$F(x) = [x][a]$$

Burada verilen [*a*] ve [*x*] vektörlerinin açık yazılmalar aşağıda verilmiştir.

$$[a] = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{bmatrix}^T$$
$$[x] = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^{n-1} & x^n \end{bmatrix}$$

Verilenler sonucunda bulunan *n* adet nokta için elde edilen fonksiyonda nokta değerleri yerine konarak aşağıdaki elde edilir.

$$[y] = [A][a]$$

Burada verilen [*A*] matrisi ve [*y*] vektörü

$$[A]=\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} & x_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} & x_n^n \end{bmatrix}$$

$$[y]=\begin{bmatrix} y_0 & y_1 & y_2 & \cdots & y_{n-1} & y_n \end{bmatrix}^T$$

Sonuç olarak

$$F(x)=\left([x][A]^{-1}\right)[y]$$

$$F(x)=[L][y]$$

Burada verilen [*L*] Lagrangian polinomu olarak bilinir ve her zaman aşağıdaki formülde verildiği gibidir.

$$L_i=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_{n-1})}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_{n-1})}=\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}$$

Lagrangian interpolasyon polinomu L_i en büyük avantaj her verilen noktalar kümesine göre farklı bir [*A*] matrisi oluşturmak ve daha sonra bu [*A*] matrisinin tersini almak yerine; doğrudan tek bir fonksiyon yazarak tahmini *F*(*x*) değerinin elde edilebilmesidir. Eğer Lagrangian polinomu incelendiğinde görülecektir ki $L_1+L_2+L_3+\cdots..+L_{n-1}=1$ dir.

Örnek 5-2: Yukarda verilen tabloyu kullanarak *x=5* için gerekli olan kuvveti Lagrangian interpolasyon yardım ile bulunuz. Polinom kullanırken ilk *5* terimi kullanılabilir.

$$L_0=\frac{(5-4.5)(5-6.7)(5-8.0)(5-10.6)}{(2.3-4.5)(2.3-6.7)(2.3-8.0)(2.3-10.6)}=-0.031182$$

$$L_1=\frac{(5-2.3)(5-6.7)(5-8.0)(5-10.6)}{(4.5-2.3)(4.5-6.7)(4.5-8.0)(4.5-10.6)}=0.74624$$

$$L_2=\frac{(5-2.3)(5-4.5)(5-8.0)(5-10.6)}{(6.7-2.3)(6.7-4.5)(6.7-8.0)(6.7-10.6)}=0.46213$$

$$L_3=\frac{(5-2.3)(5-4.5)(5-6.7)(5-10.6)}{(8.0-2.3)(8.0-4.5)(8.0-6.7)(8.0-10.6)}=-0.19059$$

$$L_4=\frac{(5-2.3)(5-4.5)(5-6.7)(5-8)}{(10.6-2.3)(10.6-4.5)(10.6-6.7)(10.6-8)}=0.013411$$

$$\begin{aligned} y&=[L][y]\\ &=-0.0312*1.2+0.746*4.1+0.462*9.0-0.191*12.8+0.013411*22.5\\ &=5.0361 \end{aligned}$$

Sonuç olarak *x=5* deki *y=5.0361* elde edilir. Burada görüldüğü gibi bu değer tüm noktalar kullanılarak bulunan değerden biraz daha farklıdır. Bunun nedeni matris tersi alırken yapılan yuvarlama hatalarından kaynaklanmış olabilir.

Örnek: Yukarda verilen tabloyu kullanarak x=5 için gerekli olan kuvveti Lagrangian polinomu yardım ile bulunuz. Polinom kullanırken ilk 3 terimi kullanınız.

$$L_0 = \frac{(5-4.5)(5-6.7)}{(2.3-4.5)(2.3-6.7)} = -0.8781$$
$$L_1 = \frac{(5-2.3)(5-6.7)}{(4.5-2.3)(4.5-6.7)} = 0.94835$$
$$L_2 = \frac{(5-2.3)(5-4.5)}{(6.7-2.3)(6.7-4.5)} = 0.13946$$

$$\begin{aligned} F(x) &= [L][y] \\ F(5) &= -0.8781 * 1.2 + 0.94835 * 4.1 + 0.13946 * 9.0 \\ &= 4.0897 \end{aligned}$$

Yukarda verilen tabloyu kullanarak *x=5* için gerekli olan kuvveti Lagrangian interpolasyon yardım ile bulunuz. Polinom kullanırken 1, 2 ve 3 noktaları kullanılarak;

$$L_1 = \frac{(5-6.7)(5-8.0)}{(4.5-6.7)(4.5-8.0)} = 0.66234$$
$$L_2 = \frac{(5-4.5)(5-8.0)}{(6.7-4.5)(6.7-8.0)} = 0.52448$$
$$L_3 = \frac{(5-4.5)(5-6.7)}{(8.0-4.5)(8.0-6.7)} = -0.18681$$

$$\begin{aligned} F(x) &= [L][y] \\ F(5) &= 0.66234 * 4.1 + 0.52448 * 9.0 - 0.191 * 12.8 \\ &= 4.9911 \end{aligned}$$

Örnek 5-3: Lagrangian polinomu kullanarak $x = 0$ 'daki tahmini $f(x)$ yani *F*(*x*) değerini bulunuz (Verilen *x* noktasına en yakın 4 nokta kullarınınız.

i	0	1	2	3
x	–0.85	–0.7	0.3	0.4
y	0.8	1.0	0.9	0.5

Aşağıdaki eşitlikler *i=0'* dan *i=3* kadar yazılabilir.

$$L_0=\frac{(0-(-0.70))(0-0.3)(0-0.4)}{(-0.85-(-0.70))(-0.85-0.3)(-0.85-0.4)}=-0.38957$$
$$L_1=\frac{(0-(-0.85))(0-0.3)(0-0.4)}{(-0.7-(-0.85))(-0.7-0.3)(-0.7-0.4)}=0.61818$$
$$L_2=\frac{(0-(-0.85))(0+0.7)(0-0.4)}{(0.3-(-0.85))(0.3-(-0.7))(0.3-0.4)}=2.0696$$
$$L_3=\frac{(0+0.85))(0+0.7)(0-0.3)}{(0.4-(-0.85))(0.4-(-0.7))(0.4-0.3)}=-1.2982$$

daha sonra $F(x=0)=L_o y_o+L_1 y_1+L_2 y_2+L_3 y_3$ denkleminden
$F(x=0)=-0.38957*0.8+0.61818*1.0+2.0696*0.9-1.2982*0.5=1.5201$

Bu örneklerden görüleceği gibi Lagrangian polinomu kullanılarak yapılan işlemlerde kaç tane nokta kullanılacağı bilinemediğinden ve kullanıcıya bırakıldığından dolay yanlış sonuçlar verebilir. Eğer seçilen polinomun derecesi küçük ise bu durumda sonuçlar yanlış olur. Eğer çok büyük seçilirse bu seferde gereksiz işlemler yapılacaktır. Bunu dezavantajlar önlemek amaç ile Neville Enterpolasyon yöntemi geliştirilmiştir.

5.2.3. NEVILLE ENTERPOLASYON METODU

Neville Metodu yukarda sözü edilen problemlerinin üstesinde gelmek için geliştirilmiştir. Bu metot basit hali ile doğrusal enterpolasyon yapılırken kullanılan iki nokta yerine bütün noktalar kullanılarak yapılan halidir.

$$F(x)=\frac{y_j-y_i}{x_j-x_i}x+\frac{y_i\cdot x_j-y_j\cdot x_i}{x_j-x_i}$$
$$F(x)=\frac{(x-x_j)y_i-(x-x_i)y_j}{x_i-x_j}$$

NevillEnterpoasyon1 Neville enterpolasyon için kullanılacaktır. Neville Enterpolasyonu aşağıdaki örnek üzerinde gösterelim.

Örnek 5-4: Deney sonuçlar aşağıdaki tabloda verilmiş olsun. Burada verilen *x=5* iken bu değere karşılık tahmini y değerini araştıralım.

İstasyon No	0	1	2	3	4
x	2.3	4.5	6.7	8.0	10.6
$y=f(x)$	1.2	4.1	9.0	12.8	22.5

Verilen tablo aranan değer *x=5'* dir. Bu tabloyu $|x-x_i|$ değerlerine göre yeniden düzenlenirse aşağıdaki tablo edilir.

İs	**x**	**y**	**|x-xi|**

0	2.3	1.2	|5-2.3|	2.7
1	4.5	4.1	|5-4.5|	0.5
2	6.7	9	|5-6.7|	1.7
3	8	12.8	|5-12.8|	3
4	10.6	22.5	|5-22.5|	5.6

Bu adımdan sonra peş peşe gelen her iki nokta için doğrusal enterpolasyon aşağıdaki tablo elde edilir. Tablodan da anlaşılacağı gibi en son kolon x=5 değeri için doğrusal Enterpolasyan değerlerini verir. Yani enterpolasyon yapılırken i=0 ile 1, 1 ile 2, 2 ile 3 ve benzeri şeklinde yapılır ve kolon F_{i1} elde edilmiştir. Buradaki *i* satır sayısın ve 1'de yineleme sayısın gösterir.

	|x-xi|	x_i	$y_i=F_{i0}$	F_{i1}
0	0.5	4.5	4.1	$\frac{(5-6.7)4.1-(5-4.5)9}{4.5-6.7}=5.2136$
1	1.7	6.7	9	$\frac{(5-2.3)9-(5-6.7)1.2}{6.7-2.3}=5.9864$
2	2.7	2.3	1.2	$\frac{(5-8)1.2-(5-2.3)12.8}{2.3-8}=6.6947$
3	3	8	12.8	$\frac{(5-10.6)12.8-(5-8)22.5}{8-10.6}=1.6077$
4	5.6	10.6	22.5	

Daha sonra birinci kolondan sonraki kolan için i=0 ile 2, 1 ile 3, 2 ile 4 değerleri kullanılarak aşağıdaki tablo elde edilmiş olur.

i	x_i	F_{i0}	F_{i1}	F_{i2}
0	4.5	4.1	5.2136	$\frac{(5-2.3)5.2136-(5-4.5)5.9864}{4.5-2.3}=5.038$
1	6.7	9.0	5.9864	$\frac{(5-8)5.9864-(5-6.7)6.6947}{(6.7-8)}=5.0602$
2	2.3	1.2	6.6947	$\frac{(5-10.6)6.6947-(5-2.3)1.6077}{2.3-10.6}=5.0374$
3	8	12.8	1.6077	....
4	10.6	22.5	....	....

Yukarıdaki tabloda görüleceği gibi en son satırın en üst değer *x=5* için F(x)=5,038 değeri bulunmuştur. Eğer istenirse bir adım daha yazılabilir.

i	x_i	F_{i0}	F_{i1}	F_{i2}	F_{i3}
0	4.5	4.1	5.2136	5.038	$\frac{(5-8)5.038-(5-4.5)5.0602}{4.5-8}=5.0412$
1	6.7	9.0	5.9864	5.0602	$\frac{(5-10.6)5.0602-(5-6.7)5.0399}{6.7-10.6}=5.0702$
2	2.3	1.2	6.6947	5.0399	....
3	8	12.8	1.6077	....	
4	10.6	22.5	....	....	

En son adım olarak F_{i4} yazılır

i	x_i	F_{i0}	F_{i1}	F_{i2}	F_{i3}	F_{i4}
0	4.5	4.1			5.0412	$\frac{(5-10.6)5.0412-(5-4.5)5.0690}{4.5-10.6}=5.0435$
1	6.7	9.0			5.0690	
2	2.3	1.2			....	
3	8	12,8		...		
4	10.6	22.5	....	.....		

Yukarıdaki örnekteki tablolar oluşturmak için gerekli olan formül en genel hali aşağıda verilmiştir.

$$F_{i,j}=\frac{(x-x_i)*F_{i+1,j-1}-(x-x_{i+j})*F_{i,j-1}}{x_{i+j}-x_i}$$

Örnek 5-5: Aşağıdaki tabloyu kullanarak y(x=0) değerini Nevill interpolasyon kullanarak bulunması. Hesaplarda sadece ilk üç nokta kullanılacaktır.

i	0	1	2	3	4	5
x	-1.2	-0.96	-0.85	-0.7	0.3	0.4
y	-1	-0.20	0.8	1.0	0.9	0.5

İlk önce x=0 için verilen tablo yeniden düzenlenir. Daha sonra genel formül kullanılarak aşağıdaki tablo oluşturulur.

i	x	$y=F_{i0}$	F_{i1}	F_{i2}
0	0.3	0.5	$\frac{(0-0.3)0.9-(0-0.4)0.5}{(0.4-0.3)}=-0.7$	$\frac{(0-0.3)0.93636+(0+0.7)0.7}{(-0.7-0.3)}=-0.21$
1	0.4	0.9	$\frac{(0-0.4)1-(0+0.7)0.9}{(-0.7-0.4)}=0.936$	....
2	-0.7	1	....	

5.3. BÖLÜNMÜŞ FARKLAR (DİVİDED DİFFERENCES)

Lagrangian polinom enterpolasyonunun iki önemli dezavantaj vardır. Bunlar:

- Çok fazla aritmetik işlemler içermesi ve
- Verilen noktalara bir nokta daha eklendiğinde bütün işlemlerin baştan yapılması gerekmesidir.

Bundan dolay Langrangain polinomun ve Nevill metodundan daha kullanışlı metotlar vardır. Bunlardan biri olan *Bölünmüş farklar* metodu başlığı altında verilecektir.

Bölünmüş farklar işlemlerine örnek olarak *n* adet nokta verilmiş olsun bunlar. (x_0, f_0) (x_1, f_1) (x_2, f_2) ve (x_n, f_n). Bu noktalardan kullanarak *n-1* dereceden bir $F_n(x)$ bir polinom bolunmusfarklar1 gibi yazılabilir.

$$
\begin{aligned}
F_n(x) = a_o + (x-x_0)a_1 + \\
&(x-x_0)(x-x_1)a_2 + \\
&(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)a_2 + ... \\
&(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})a_n
\end{aligned}
$$

Bu formüldeki *a*'lar polinom katsayılarıdır ve bu katsayılar bölünmüş farklar tablolar kullanıla bulunabilir. Bölünmüş farklar tabloların kullanmak için baz tanımlar yapılmalıdır. Bunun için ilk önce standart notasyon olarak.

$$f[x_o, x_1] = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} = f_0^{[1]}$$

olarak gösterilir. Burada yazlan alt simge 0 başlangıç noktasın üst simge [1] ise kaçınıcı bölünmüş fark olduğunu gösterir. Eğer ikinci bölünmüş farklar yazılacak ise o halde

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = f_0^{[2]}$$

Daha genel hali ile aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$f[x_0, x_1, x_2, ...x_n] = \frac{f[x_1, x_2, ..x_n] - f[x_0, x_1, x_2, ..x_n]}{x_n - x_0} = f_0^{[n]}$$

Örnek 5-5: Deney sonuçlar aşağıdaki tabloda verilmiş olsun. Bu tablonun bölünmüş farklar tablosunu yapınız.

İstasyon No	0	1	2	3	4
x	2.3	4.5	6.7	8.0	10.6
$y = f(x)$	1.2	4.1	9.0	12.8	22.5

Tablodaki değerlerin aşağıdaki tablodaki gibi yazılabilir ise bölünmüş farklar tablosu oluşturulmuş olur.

i	x	y	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, \cdots, x_{i+2}]$	$f[x_i, .., x_{i+3}]$	$f[x_i, .., x_{i+4}]$
0	2.3	1.2				
			$\frac{4.1-1.2}{4.5-2.3} = 1.3182$			
1	4.5	4.1		$\frac{2.2273-1.318}{6.7-2.3} = 0.2067$		
			$\frac{9-4.1}{6.7-4.5} = 2.2273$		-0.001379	
2	6.7	9.0		$\frac{2.9231-2.2273}{8.0-4.5} = 0.1988$		0.00033
			$\frac{12.8-9}{8-6.7} = 2.9231$		0.0013607	
3	8.0	12.8		$\frac{3.7308-2.9231}{10.6-6.7} = 0.2071$		
			$\frac{22.5-12.8}{10.6-8.0} = 3.7308$			
4	10.6	22.5				

Bölünmüş farklar tablolarındaki değerler kullanılarak bilinmeyen $a_o, a_1, \cdots, a_{n-1}$ ler bulunabilir. Bunun için ilk önce $x = x_o$ ise bolunmusfarklar1

$$
\begin{aligned}
&x = x_o; \quad F(x) = a_o = f_0 \\
&x = x_1; \quad F(x) = a_o + (x_1 - x_0)a_1 = f_1 \\
&x = x_2; \quad F(x) = a_o + (x_1 - x_0)a_1 + (x_2 - x_0)(x_2 - x_1)a_2 = f_3 \\
&\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Yukarıdaki denklemleri $a_o, a_1, \cdots, a_{n-1}$ ler için çözümlenirse kolayca görülecektir ki.

$$
\begin{aligned}
a_o &= f[x_o] \\
a_1 &= f[x_0, x_1] \\
a_2 &= f[x_0, x_{1,} x_2] \\
&\ldots\ldots\ldots \\
a_n &= f[x_{0,} x_1, \ldots, x_n]
\end{aligned}
$$

Yukarıdaki denklemde bulunan *a*'lar yerlerine konursa bu sefer, aşağıdaki yeni formatında yazılabilir.

$$
\begin{aligned}
F_n(x) = f_0^{[0]} &+ (x - x_0) f_0^{[1]} + \\
&(x - x_0)(x - x_1) f_0^{[2]} + \\
&(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) f_0^{[3]} + \ldots \\
&(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_{n-1}) f_0^{[n]}
\end{aligned}
\tag{5-1}
$$

Bu denklem sayesinde herhangi bir noktanın istenen tahmini değeri bulunabilir. Bu Bölünmüş farklar tablosunun avantaj istenen miktarda nokta kullanılması ve kullanılacak nokta adetinin daha sonradan değiştirilebiliyor olmasıdır. Yani verilen noktaların sıralı olmasına gerek yoktur.

Yukarıdaki tabloyu kullanarak *x=5* deki fonksiyonun değerini hesaplayız.

$$
\begin{aligned}
y(5) &= 1.2 + (x - x_0)1.3182 + (x - x_0)(x - x_1)0.20666 \\
&\quad -(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)0.0013789 \\
&\quad +(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)3.3007 \times 10^{-4} \\
&= 1.2 + (5 - 2.3)1.3182 + (5 - 2.3)(5 - 4.5)0.20667 \\
&\quad -(5 - 2.3)(5 - 4.5)(5 - 6.7)0.00138 \\
&\quad +(5 - 2.3)(5 - 4.5)(5 - 6.7)(5 - 8)0.00033 \\
&= 5.0434
\end{aligned}
$$

Aşağıda verilen noktalar kullanarak *x=3* değerini 3 ve 4 nokta kullanarak hesaplayız.

i	0	1	2	3	4
x	1	-1.5	2.1	2.4	3.4
y	-3	-1.625	8.605	19.12	92.52

Verilen noktalar için farklar tablosu EXCEL Sayfası

i	*x*	*f*	*f[x0,x1]*	*f[x0,x1,x2]*	*f[x0,..,x3]*	*f[x0,…,x4]*	*f[x0,..,x5]*
0	1	-3.000					
			17.7500				
1	-1.5	-47.375		-0.5000			
			17.0500		5.000		
2	2.4	19.120		11.5000		0.00	
			73.4000		5.000		0.00
3	3.4	92.520		29.5000		0.00	
			64.5500		5.000		
4	2.1	8.605		17.5000			
			5.0500				
5	0	-2.000					

elde edilir. Eğer x=3 yerine yazılırsa;

$$F_3(x) = -3 + (3-1)17.75 - (3-1)(3+1.5)0.5 + (3-1)(3+1.5)(3-2.4)5 = 55.0$$

Elde edilir. Dikkat edilecek olursa burada sadece 3 nokta kullandık eğer 4 nokta kullanmak istenseydi bu sonucu değiştirmeyecekti. Bunun nedeni bu elemanların değerinin 0 olduğudur. Burada kullanılana veri gruplar $5x^3 - 10x^2 + 4x - 2$ fonksiyonundan türetilmiştir. Yani üç fark yani 3. dereceden bir polinom çözüm için yeterlidir.

5.4. EŞİT ARALIKLI VERİLER

Yukarıdaki Bölünmüş farklar tablolar oluşturulurken verilen noktalar arasında eşit aralıklarında olması gerekmemektedir. Eğer bağımsız değişkenler arasında eşit mesafeler var ise bu durumda *bölünmüş farklar* yerine (*sonlu) farklar tablolar* oluşturulabilir. Farklar tablolar bölünmüş farklardan tablolarından daha kolay elde edilirler. Bunlar sadece verilen bağımsız değişken arasındaki farktan yararlanılarak yazılırlar yani bölme işlemleri içermez. Hatırlanacağı gibi bölünmüş farklar tabloların oluşturulmasında Denklem (5-1). Bu denklemdeki veriler arasında *h* kadar mesafe olduğu varsayılarak yazılırsa. Denklem (5-1) aşağıdaki formatta yeniden yazılabilir.

$$F_n(x) = f_0 + (x-x_0)\frac{f[x_1]-f[x_0]}{h} +$$
$$(x-x_0)(x-x_1)\frac{f[x_1,x_2]-f[x_1,x_0]}{2h} +$$
$$(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\frac{f[x_1,x_2,x_3]-f[x_0,x_1,x_2]}{3h} + \ldots$$
$$(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})\frac{f[x_1,x_2,..x_n]-f[x_0,x_1,x_2,..x_n]}{nh}$$

esitaralik1 deki s$s = \frac{x-x_0}{h}$ yazılır ve denklem yeniden düzenlenirse denklem aşağıdaki hali alır.

$$F_n(x) = f_0 + s(\Delta f_o) + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{s(s-1)(s-2)}{3!}\Delta^3 f_0 + \cdots$$
$$\frac{s(s-1)(s-2)\cdots(s-n+1)}{n!}\Delta^n f_0$$

Bu formüller verilen $\Delta^n f_0$ ler değerleri aşağıda verilen kısımdaki gibi hesaplanabilirler.

$$\Delta^1 f_o = f_1 - f_0$$
$$\Delta^2 f_0 = \Delta(\Delta f_0) = \Delta(f_1 - f_0) = f_2 - 2f_1 + f_0$$
$$\Delta^3 f_0 = \Delta(\Delta^2 f_0) = \Delta(f_2 - 2f_1 + f_0) = f_3 - 3f_2 + 3f_1 - f_0$$
$$\Delta^4 f_0 = \Delta(\Delta^3 f_0) = \Delta(f_3 - 3f_2 + 3f_1 + f_0) = f_4 - 4f_3 + 6f_2 - 4f_1 + f_0$$

Bu hesaplama işlemine ileri farklar tablosu denir. Bu ileri farklar tablosu verinin bulunduğu nokta ile bir ileri noktasın kullanıldığı için bu ismi alınmıştır. Eğer istenirse aynı tabloların geri farklar ve merkezi farklarda yazılabilir. Geri farklar tablolarında kendisi ile bir önceki arasındaki farklar kullanılır ve $\nabla f_i = f_i - f_{i-1}$ ile gösterilir. Merkezi farklar da ise kenendisinden önceki ve bir kendisinden sonraki kullanılır ve $\delta f_i = f_{i+1} - f_{i-1}$ ile gösterilir.

Şimdi bir örnekle eşit aralıklı verilerle nasıl işlem yapılacağına bakalım.

Örnek 5-6: Aşağıda verilen tablodaki değerler göre x=1.2 iken değerini bulunuz.

i	0	1	2	3	4	5
x	0	0.5	1.0	1.5	2	2.5
f	1.0	1.6487	2.7183	4.4817	7.3891	12.182

İlk adımda ileri farklar tablosunu oluşturulur.

i	x	f	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$	$\Delta^5 f$
0	0	1.0					

			0.64				
1	0.5	1.64		0.43			
			1.07		0.81		
2	1.0	2.71		1.24		−1.44	
			2.31		−0.63		3.34
3	1.5	4.48		0.61		1.9	
			2.92		1.27		
4	2.0	7.4		1.88			
			4.8				
5	2.5	12.2					

Daha sonra *s* değeri $\frac{x-x_0}{h}$ dan bulunması gerekir. $s=\frac{x-x_0}{h}=\frac{1.2-0}{0.5}=2.4$ olarak arak bulunur. Tablodaki değerleri ve s'i yerine konursa

$$
\begin{aligned}
P_5 &= 1+2.4*0.64+\frac{2.4(2.4-1)}{2!}0.43+\frac{2.4(2.4-1)(2.4-2)}{3!}0.81 \\
&\quad -\frac{2.4(2.4-1)(2.4-2)(2.4-3)}{4!}1.44+ \\
&\quad \frac{2.4(2.4-1)(2.4-2)(2.4-3)(2.4-4)}{5!}3.34 \\
&= 3.5241
\end{aligned}
$$

elde edilir. Burada seçilen x_0 işleme göre değişir. Eğer biri $x_0=1$ seçmiş olsa idi bu $s=\frac{x-x_0}{h}=\frac{1.2-1}{0.5}=0.4$ durumda. Bulunan P değeri aşağıdaki gibi olacaktır.

$$
\begin{aligned}
P_3 &= 2.7183+0.4*1.7634+\frac{0.4(0.4-1)}{2!}1.144+\frac{0.4(0.4-1)(0.4-2)}{3!}0.7415 \\
&= 3.3338
\end{aligned}
$$

Birinci durumda (x_o=0) ve ikinci durumda (x_o=0) değerleri kullanıldığında sonlu farklı tablosundaki kullanılan değerlerin sayısı değişmiştir. Fakat her ikisinde de birbirine yakın sonuçlar verir. x ve buna karşılık gelen f değerleri yazılırken aslında $f(x)=e^x$ kullanılmıştır. Fonksiyonun $x=1.2$ olduğu zaman $f(1.2)=3.3201$ gerçek değerine ulaşacaktır. Bu değer P_5 değerine P_3 den daha yakınıdır. Bunun nedeni P_5 fonksiyonunu hesaplanırken daha fazla sayıda eleman kullanılmasıdır.

PROBLEMLER

1) Aşağıdaki noktalardan geçen Lagrangian polinomun yazınız. Daha sonra $x=9$ değeri için $F(x=9)$ hesaplayız.

i	0	1	2

x	1.3	5	10
y	20	25	45

2) Aşağıda verilen data noktalar kullanarak $x=4$ ve $x=-3$ için Neville Tablolara oluşturunuz

i	0	1	2	3	4	5
x	-2	2	0	4	5	13
y	20	25	45	60	50	12

3) Yukarı verilen problem için Faklar tablosunu oluşturunuz. Daha sonra $x=-4$ ve $x=4$ için tahmini değerlerini bulunuz.
4) Aşağıda verilen eşit aralıklı veriler için eşit aralıklar tablosu oluşturunuz.

i	0	1	2	3	4	5
x	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5
y	-10	-7	-6	0	5	15

5) 4. sorudaki tabloyu kullanarak $f(x=1.66)$ değerini bulunuz.

5. EĞRİ UYDURMA

Bilimin sanattan farkı; olayların (deneylerin) gözlenebilir ve tekrar edilebilir olmasıdır. Bundan dolayı bilimsel gerçeklerin ispatı için deneyler veya gözlemler yapılır. Deneylerden elde edilen sonuçlar giriş değerleri (bağımsız değişkenler) ve bu giriş değerlerine karşılık gelen çıkış değerleri vardır. Bu çıkış değerlerine bağımlı değişken de denebilir. Bu giriş ve çıkış değerleri arasında sürekli bir fonksiyon ile nasıl tanımlanacağı bu bölümde ele alınacaktır.

Şekil 5-1 bir deney sonucunda elde edilen (x_i, y_i) noktalarını göstermektedir. Eğer bu noktalar bir sürekli bir fonksiyon ile ifade edilmesi istenirse; bir önceki konudaki Lagrangian Enterpolasyonu kullanılabilir yapılabilir. Eğer deney onlarca veya yüzlerce nokta türetti ise o halde bütün verilen noktalarda geçen bir fonksiyonu Lagrangian formülleri ile yazmak kullanışlı ve kolay olamayacaktır. Örnek olarak eğer bir deney sonucunda 100 adet nokta bulunsa ve bunları hepsi Lagrangian polinamunda yerlerine yazılsa bu duruma da 99. dereceden bir polinom elde edilir ki bu matematiksel olarak yapmak zaman alıcı hem de kullanışlı değildir. Daha önemlisi deney ve gözlemler sırasında ölçmeden dolayı meydana gelen yanlış değerlerde polinoma eklenmiş olacaktır. Bunun yerine bu verilen noktaların mümkün olduğunca yanından geçen sürekli bir fonksiyon ile ifade etmek daha kolay ve gerçekçi olmayacaktır. Böyle bir fonksiyonu bulma işlemine eğri uydurma denir.

Eğri uydurma işleminde, deney sonuçlarına uydurulacak eğrinin formatı önceden tahmin edilemiyor olabilir. Yani kullanılacak formatlar: doğrusal, ikinci ve üçüncü dereceden polinomlar, üslü, üstlü veya logaritmik den biri veya başka bir formatta olabilir.

$$y = a + bx \tag{5-1}$$

$$y = a + bx + cx^2 \tag{5-2}$$

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 \tag{5-3}$$

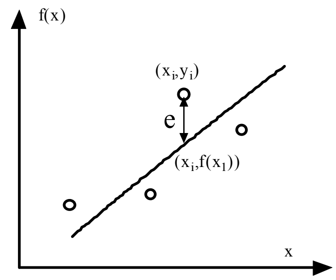
$$y = ae^{bx} \tag{5-4}$$

$$y = ax^b \tag{5-5}$$

$$y = a + bln(x) \tag{5-6}$$

Yukarıda verilen fonksiyonlardan hangisi daha iyi sonuç vereceği bilinmediğinden dolayı fonksiyonlardan bir seçilir ve daha sonra r^2 uyumu gözlenir. r^2 olarak kullanılacak değer gözlem sonuçları ile tahmin edilen değer arsasındaki ilişkiyi gösterir. Buna göre kullanılan formatın ve deney sonucu hakkında yorum yapılabilir. Bu uyum kontrolü başlığı altında anlatılacaktır.

Eğri uydurma işleminde genellikle iki farklı metot kullanılır. Bunlar; en küçük kareler metodu ve matris metodudur. Burada ilk önce en küçük kareler metodu daha sonra matris çözüm metodu üzerinde durulacaktır. Aslında her iki metoda birbirinin aynıdır fakat sadece formülizasyonları farklıdır.



Şekil 5-1: Gerçek değer ile tahmini değer, f(x), arasındaki hatalar

6.1. EN KÜÇÜK KARELER YÖNTEMI (LEAST SQUARE METHOD)

Eğri uydurma için kullanılan en popüler metot en az kareler metodudur. En az kareler metodu; bağımlı değişkenin değerleri ile tahmin edilen değerlerinin arasındaki farkın yani hatanın karelerinin toplamının en küçük olmasını amaçlayan bir yöntemdir.

En küçük kareler metodu birçok farklı tipteki fonksiyonları kullanılarak veriye uygun eğri uydurma için kullanılabilir. Bunun anlamı, en az kareler metodunun istenen formattaki eğri kullanılabileceğidir. Gerçekde mühendislik problemlerin sonucunun çoğu üs, üstel, logaritmik veya polinomlar yardımı ile ifade edilebilir. (5-1) ile (5-6) eşitliklerine bakılacak olursa en basit fonksiyon $y = a + bx$ 'yi dir. Dolayı ilk önce doğrusal polinom ele alınacak daha sonrada daha karmaşık problemlerin çözümleri anlatılacaktır.

6.1.1. LİNEER DENKLEM UYDURMA

Örnek olarak bir deney düzeneği hazırlanmış olsun. Deneyin amacı uzama ile uygulanan kuvvet arasındaki ilişki arasında bir bağıntı bulunacak olsun. Bunun için bir metal parçası eksensel kuvvet uygulanır ve buna karşılık gelen uzamalar ölçülerek aşağıdaki tablo oluşturulmuş olsun. Burada kuvvet bağımsız değişken ve uzama ise bağımlı değişken olur.

No	Kuvvet (kN),$\boldsymbol{x_i}$	Uzama (µm), $\boldsymbol{y_i}$
1	0.00	0.00
2	1.00	12.90
3	2.39	26.60
4	4.36	35.50
5	8.09	43.00
6	15.84	118.00

Bu tabloda birçok kuvvet (bağımlı değişken, x) ve uzama (bağımsız değişken, y) değerleri vardır. Bunlar arasında bir doğrusal ilişki olduğunu varsayılırsa $F(x_i) = a + bx_i$ denklem yazılabilir. Burdaki *a* ve *b* birer kat sayıdır ve eğri uydurmanın amacı hatanın en küçük olması için *a* ve *b* kat sayıları bulmalıdır.

Tabloda verilen uzama y_i değerleri ile uyum fonksiyonu $F(x_i)$ kullanarak bulunan değer arasındaki fark hata miktarını verir. Bu matematiksel olarak

$$e_i = F(x_i) - y_i = (a + bx_i) - y_i$$

Eğer tüm noktalardaki hataların karelerin toplanması bulmak istenirse kullanılabilir.

$$SSE = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (a + bx_i - y)^2$$

(x_i, y_i) deney sonuçlarıdır ve sabittir. Bu denklemdeki *a* ve *b* ise değişkendir ve aranan değerdir. Hataların karelerinin toplamımın minimum yapmak için SSE deki *a* ve *b* değişkenlerine göre türevleri alınarak sıfıra eşitlenirler. Bu matematiksel olarak

$$\left(\frac{\partial SSE}{\partial a}\right) = \sum_{i=1}^{n} 2[(a + bx_i\ ) - y_i\ ] = 0$$

$$\frac{\partial SSE}{\partial b} = \sum_{i=1}^{n} 2[(a + bx_i) - y_i]x_i = 0$$

Gerekli sadeleştirmeler yapılır ve toplama işlemi dağıtılırsa sonuç matris formatında aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} yx_i \end{bmatrix}$$

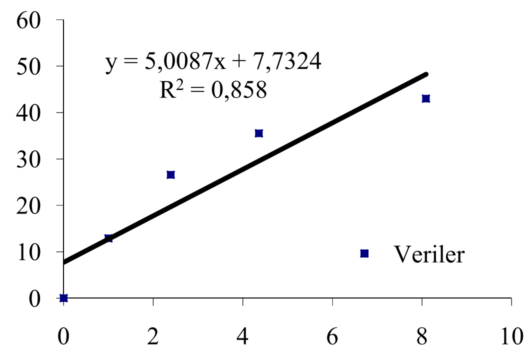
Değişkenler *a* ve *b* matris işlemleri kullanılarak hesaplanabilir. Ve daha sonra $F(x) = a + bx$ şeklinde bir denklem elde edilir. Bu denklem en küçük kareler metodu kullanılarak kuvvet x değişkeni ile uzmama arasındaki ilişkiyi sürekli doğrusal bir fonksiyon ile tanımlamış olur.

Örnek 5-1: Yukarıda verilen tablodaki kuvvet ile uzama arasındaki ilişkiyi $F(x) = a + bx$ şeklide ifade ediniz. İlk önce tabloda verilen değerleri kullanarak aşağıdaki değerler bukunur.

No	$\boldsymbol{x_i}$	$\boldsymbol{y_i}$	$\boldsymbol{x_i^2}$	$\boldsymbol{y_i * x_i}$
1	0.00	0.00	0.00	0.00
2	1.00	12.90	1.00	12.90
3	2.39	26.60	5.71	63.57
4	4.36	35.50	19.01	154.78
5	8.09	43.00	65.45	347.87
∑	15.84	118.00	91.17	579.12

$$\begin{bmatrix} 5 & 15.84 \\ 15.84 & 91.17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 118 \\ 579.12 \end{bmatrix}$$

elde edilir, eğer çözüm yapılırsa sonuç $a = 7.732516$ ve $b = 5.008676$ elde edilir. Verilen noktaların yeri ve uydurulan doğru Şekilde verilişştir.



Şekil 5-2: Verilen noktalar ve uydurulan doğrunun denklemi

6.1.2. UYUMUN KONTROLÜ

Eğri uydurma işlemi yapıldıktan sonra bulunan eğrinin bu noktaları ne kadar temsil ettiğini belirlemek amacı ile uyumu kontrol edilmelidir. Bunun için ise genellikle hataların karelerinin toplamı kontrol edilir. Daha önceden kullanılan toplam hataların nasıl bulunacağını esaplanmıştı. Yani hataların toplamların karesi (Sum of the Squers of the Errors)

SSE terim uydurulan eğrinin kalitesini göstergesidir. Yani bu terim ne kadar küçükse hatalar o kadar küçük olacaktır. Diğer taraftan bu terimim boyuttan bağımsız olmaması dolayısı ile tercih edilen bir yaklaşım değildir. Bunun yerine r^2 göstergesi daha yaygın olarak kullanılır. r^2 göstergesi matematiksel olarak

$$r^2 = 1 - \left(\frac{SSE}{SST}\right)$$

Bu denklemdeki SST (the Sum of the squres of the deviations) y_i değerinin ile y nin otalamasının ($\bar{y} = \left(\frac{\sum y_i}{n}\right)$ farkların karelerin toplamdır ve

$$SST = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (a + bx_i - \bar{y})^2$$

ile gösterilir. Dikkat edilirse r^2 nin boyutsuz olduğu gözlenir ve değeri 0 ile 1 arasında değişir. Fark edileceği gibi r^2 nin değerinin 1 olması için SSE değerinin sıfır olması yani hataların sıfır olmasını gerektir. Yani r^2 nin değerinin 1 yaklaşmasının anlamı; hataların karelerin küçük olduğu ve uydurulan eğri ile verilen noktaların iyi bir uyumda olduğunu göstergesidir.

Örnek 5-3: Bir önceki örnekte veriler kullarılar $F(x_i) = 6.3416 + 5.4477x$ denklemi elde edilmişti, bu deklemin göre r^2 yi hesaplayınız.

No	x_i	y_i	$F(x_i)$	$(F(x_i) - y_i)^2$	$(F(x_i) - \bar{y})^2$
1	0.00	0.00	6.34	40.21	556.96
2	1.00	12.90	11.79	1.233	114.49
3	2.39	26.60	19.36	52.39	9.00
4	4.36	35.50	30.09	29.23	141.61
5	8.09	43.00	50.41	54.96	376.36

∑	15.84	118.00	118	178.03	1198

$r^2 = 1 - SSE/SST = 1 - 178.03/1198 = 0.85139$. r^2 görüldüğü gibi 1 den uzak olduğu için verilen noktaları iyi temsil ettiğini söylemek zordur.

6.1.2 POLİNOM FONKSİYONLAR (K-DERECEDEN)

En küçük kareler metodu birinci dereden polinomlar (doğrusal fonksiyonlar) için değil aynı zamanda polinomlar için kullanılabilir. Ama polinon fonksiyonu uydurmazının zayıf yanı k-dereceden bir eğri uyduruluyorsa k+1 dereceden bir doğrusal denklem takımı çözme zorunluluğudur. Ayrıca dikkat edilmesi gereken nokta kullanılabilecek polinomun derecesi her zaman için verilen noktaların sayısında bir eksik olmalıdır. Yani n adet nokta varsa, uydurulacak eğrinin derecesi k her zaman k≤ n-1olmaldır.

n. dereceden bir polinoma verilen bir grup noktalar uydurulmak isteniyorsa

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_kx\hat{\ }k$$

gibi polinom yazılabilir. En küçük kareler metodun tanımından hataların minimum olması için hataların karelerin türevleri alınır ve sıfıra eşitlenirse aşağıdaki denklem takımları kolayca bulunabilir.

$$\begin{aligned}
a_0\sum_{i=1}^{n}1 + a_1\sum_{i=1}^{n}x_i^1 + a_2\sum_{i=1}^{n}x_i^2 + \ldots + a_k\sum_{i=1}^{n}x_i^k &= \sum_{i=1}^{n}y_i \\
a_0\sum_{i=1}^{n}x_i^1 + a_1\sum_{i=1}^{n}x_i^2 + a_2\sum_{i=1}^{n}x_i^3 + \ldots + a_k\sum_{i=1}^{n}x_i^{k+1} &= \sum_{i=1}^{n}y_ix_i \\
a_0\sum_{i=1}^{n}x_i^2 + a_1\sum_{i=1}^{n}x_i^3 + a_2\sum_{i=1}^{n}x_i^4 + \ldots + a_k\sum_{i=1}^{n}x_i^{k+2} &= \sum_{i=1}^{n}y_ix_i^2 \\
&= \\
&= \\
a_0\sum_{i=1}^{n}x_i^k + a_1\sum_{i=1}^{n}x_i^{k+1} + a_2\sum_{i=1}^{n}x_i^{k+2} + \ldots + a_k\sum_{i=1}^{n}x_i^{k+k} &= \sum_{i=1}^{n}y_ix_i^k
\end{aligned}$$

matris formatında yazılacak olursa.

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n}x_i^1 & \ldots & \sum_{i=1}^{n}x_i^k \\ \sum_{i=1}^{n}x_i^1 & \sum_{i=1}^{n}x_i^2 & \ldots & \sum_{i=1}^{n}x_i^{k+1} \\ \sum_{i=1}^{n}x_i^2 & \sum_{i=1}^{n}x_i^3 & \ldots & \sum_{i=1}^{n}x_i^{k+2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sum_{i=1}^{n}x_i^{k+1} & \sum_{i=1}^{n}x_i^{k+2} & \ldots & \sum_{i=1}^{n}x_i^{k+k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \ldots \\ a_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n}y_i \\ \sum_{i=1}^{n}y_ix_i \\ \sum_{i=1}^{n}y_ix_i^2 \\ \ldots \\ \sum_{i=1}^{n}y_ix_i^k \end{bmatrix}$$

Sonuç olarak den k+1 tane bilinmeyen $(a_0, a_1, a_2, .., a_k)$ vardır. Bu denklem takımım bir çok çözüm metodu vardır. Bilinmeyen a_0,a_1,a_2,...a_{k}, lar denklem takımlarının çözüm metotlarından biri kullanılarak çözümlenebilir.

Bir önceki doğrusal eğri uydurma kısmı polinom eğri uydurmanın bir özel durumudur. Yani sadece iki bilinmeyen için üstteki denklem yazılırsa bu ile aynı olduğu görülür. Eğer üç bilinmeyen için yazılsa bu durumda da 2. dereceden bir eğri için işlem yapılmış olacaktır.

Örnek 6-Bir önceki problemde kullanılan kuvvet ile uzama arsındaki ilişkiyi $f(x_i) = a + bx + cx^2$ şeklide ifade ediniz.

İlk önce tabloda verilen değerleri kullanarak deki değerlerin karşılıklarını bulunur.

No	x_i	y_i	${x_i}^2$	x_i^3	x_i^4	$y_i * x_i$	$y_i * x_i^2$
1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
2	1.00	12.90	1.00	1.00	1.00	12.90	12.90
3	2.39	26.60	5.71	13.65	32.63	63.57	151.94
4	4.36	35.50	19.01	82.88	361.36	154.78	674.84
5	8.09	43.00	65.45	529.48	4283.45	347.87	2814.27
∑	15.84	118.00	91.17	627.01	4678.45	579.12	3653.95

Bu tabloyu elde edildikten sonra tablo ile elde edilen değerler kolayca yerine konabilir.

$$\begin{bmatrix} 5 & 15.84 & 91.17 \\ 15.84 & 91.17 & 627.01 \\ 91.17 & 627.01 & 4678.45 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 118.00 \\ 579.12 \\ 3653.95 \end{bmatrix}$$

Yukarıda ki denklem a,b ve c için çözülürse a=1.0313,b=12.004 ve c=-0.84788 elde edilir. Ve $F(x)=1.0313+12.004x-0.84788x^2$elde edilir.

Uydurulan eğrinin uygunluğunu kontrol etmek için SSE ve SST değerleri bulunmalıdır. Bunları aşaıdıdaki tablo yardımı ile bulabiliriz.

No	x_i	y_i	$f(x_i)$	$[y_i - f(x_i)]^2$	$[y_i - \bar{y}]^2$
1	0.00	0.00	1.03	1.060	557.9
2	1.00	12.90	12.19	0.5090	114.5
3	2.39	26.60	24.88	2.967	9.0
4	4.36	35.50	37.25	3.067	141.6
5	8.09	43.00	42.65	0.123	376.4
∑	15.84	118.00	117.99	7.725	1198.0

$r^2 = 1 - ((SSE)/(SST)) = 1 - ((7.725)/(1198)) = 0.9936$. r^2 görüldüğü gibi 1e çok yakın bir değer aldığından dolayı bulunan F(x) fonksiyonunun noktaları çok iyi temsil ettiğini söylenebilir.

6.1.4. ÜSLÜ (e^x) FONKSİYONLAR

Aşağıda verilen üslü fonksiyon tipini gösterir, burada tekrarlamak gerekirse

$$y = ae^{bx}$$

yazılır. Eğer eşitliğinün her iki tarafın doğal logaritması alırsa, aşağıdaki gibi yeniden yazılabilir.

$$ln\, y = ln(ae^{bx}) = ln(a) + ln(e^{bx})$$

Eğer yukarıdaki denklemdeki $ln\, y = u$ ve ln $a = v$ olarak tanımlanırsa bu durumda, ve yeniden aşağıdaki formatta yazılabilir.

$$u \ = v + bx$$

Dikkat edilecek olursa yukarıdaki denklem bir doğru denklemdi. Daha öncede yapıldığı gibi, doğrusal eğri uydurmada kullanılan yöntemle yani hataların karelerinin en az olması için hataların değişkenlere göre türevinin alınması ve sıfıra eşitlenmesi ile bulunabilir. Hataların toplamı, matris formatında aşağıdaki gibi olur.

$$\begin{bmatrix} n & \sum x \\ \sum x & \sum x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum u \\ \sum xu \end{bmatrix}$$

Eğer yukarıdaki denklem çözümlenirse, v ve b değerleri bulunabilir dan $v = ln(a)$ veya $a = e^v$ olarak sonuç bulunur.

Örnek: Aşağıda verilen tablodaki x ve y arasındaki ilişkiyi $y = ae^{bx}$ şeklide ifade ediniz.

İlk önce tabloda verilen değerleri kullanarak üslü matris deki değerlerin karşılıkları bulunur.

No	x	y	x^2	u=lny	x*lny
1	0.00	4.00	0.00	1.39	0.00
2	1.80	2.00	3.24	0.69	1.25
3	4.38	18.00	19.18	2.89	12.66
4	6.27	67.00	39.31	4.20	26.36
5	8.71	200.00	75.86	5.30	46.15
∑	21.16	291.00	137.60	14.47	86.42

Eğer çözümlenirse, v ve b değerleri bulunabilir.

$$\begin{bmatrix} 5 & 121{,}16 \\ 21{,}16 & 137{,}60 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14{,}47 \\ 86{,}46 \end{bmatrix}$$

$v = 0.6778$ ve $b = 0.5238$ değerleri bulunur. Daha sonra $a = e^{0.6778}$ formülünden bulunur. Denklem olarak ise $F = 1.969e^{0.524x}$ olarak ifade edilir. Bulunan fonksiyonunun uygunluğunu kontrol için SST ve SSE değerleri de bulunmalıdır. Burada verilen noktalar kullanılarak uydurulan eğrinin iyi olduğu sonucuna varılabilir

No	x_i	y_i	$F(x)$	$[F(x_i) - y_i]^2$	$[F(x_i) - y_i]^2$
1	0.0	4	1.97	4.12	2937.6
2	1.8	2	5.06	9.34	3158.4
3	4.38	18	19.53	2.35	1616.0
4	6.27	67	52.56	208.41	77.4
5	8.71	200	188.70	127.95	20107.8
∑	21.16	291	267.80	352.16	27896.8

$r^2 = 1 - ((SSE)/(SST)) = 1 - ((352.16)/(27896.80)) = 0.98738$ bulunur. Buradan verilen noktalar kullanılarak uydurulan eğrinin iyi oluğu sonucuna varılabilir.

6.1.5. ÜSTEL (ax^b) FONKSİYONLAR

Bir önceki kısımda anlatılanlar üstel fonksiyonlar içinde geçerlidir. $y = ax^b$ gibi üstel fonksiyonlarda eğri uydurmak için her iki tarafın doğal logaritması alınırsa, üstel fonksiyon aşağıdaki forma dönüşür.

$$\ln y \;=\; \ln a + b \ln x$$

Bu ise aynı şekilde $\ln y = u$, ve $\ln a = v$ ve $\ln x = w$ yazılırsa. Doğrusal denkleme dönüşebilir. Sonuç olarak

$$u = v + bw$$

formatına dönüşür. Toplam hataların karelerinin toplamının v ve b ye göre türevleri alınırsa

$$\begin{bmatrix} n & \sum w \\ \sum w & \sum w^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum u \\ \sum wu \end{bmatrix}$$

Şekilde yazılabilir. Buradan v ve b bulunarak fonksiyon oluşturulmuş olur.

Örnek: Aşağıda verilen tablodaki x ve y arasındaki ilişkiyi y=ax^{b} şeklide ifade ediniz.

İlk önce tabloda verilen değerleri kullanarak u,vve w değerlerin bulunur.

No	x_i	y_i	$w_i = \ln x_i$	$w_i^2 = (\ln x_i)^2$	u_i	$u_i w_i$
1	2.0	10	0.69	0.48	2.30	1.60
2	3.0	20	1.10	1.21	3.00	3.29
3	4.0	30	1.39	1.92	3.40	4.72
4	6.0	60	1.79	3.21	4.09	7.34
5	7.0	90	1.95	3.79	4.50	8.76
6	9.0	120	2.20	4.83	4.79	10.52
$\sum$	31.00	330	9.11	15.43	22.08	36.21

Denklemde yerlerine yazılacak olursa

$$\begin{bmatrix} 7 & 10{,}15 \\ 10{,}15 & 18{,}185 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9{,}84 \\ 16{,}002 \end{bmatrix}$$

denklemi v ve b için çözülürse v=1.1286 ve b=1.680 değerleri bulunur. Daha sonra $v = lna$ formülünden $a = e^{1.1286} = 3.091453313$ bulunur. Denklem olarak ise $F(x) = 3.0915x^{1.68}$ olarak ifade edilir. Bulunan $F(x)$ fonksiyonunun uygunlugunu kontrol için SST ve SSE değerleri de bulunmalıdır. Bunun için aşağıdaki tablo oluşturulmuştur.

No	x_i	y_i	$F(x\_i) = ax^b$	$[F(x_i) - y_i]^2$	$[F(x_i) - y_i]^2$
1	2.0	10	9.9093	0.008	2025.0
2	3.0	20	19.5868	0.171	1225.0
3	4.0	30	31.7632	3.109	625.0
4	6.0	60	62.7835	7.748	25.0
5	7.0	90	81.3485	74.847	1225.0
6	9.0	120	124.0986	16.799	4225.0
∑	31.00	330	329.4902	102.682	9350.0

$r^2 = 1 - ((SSE)/(SST)) = 1 - ((102.682)/(9350)) = 0.989$ bulunur. Bulunan eğrini denklemiminin noktaları iyi temsil ettiği düşünülebilir.

6.1.6. LOGARİTMİK ($y = a + blnx$) FONKİSYONLAR

Logaritmik fonksiyonlar diğer üs ve üstel fonksiyonlarda olduğu gibi verilen $y = a + blnx$ fonksiyonu doğrusal fonksiyon formatına dönüştürülerek yapılabilir. Bunun için lnx yerine w yazılırsa y=a+bw doğrusal fonksiyon elde edilir. Bu doğrusal fonksiyona göre hataların karelerinin toplamların türevleri alınacak olursa aşağıdaki denklem takımı elde edilir.

$$\begin{bmatrix} n & \sum w \\ \sum w & \sum w^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y \\ \sum yw \end{bmatrix}$$

elde edilir.

Aşağıda verilen tablodaki x ve y arasındaki ilişkiyi y=a+bln x şeklide ifade ediniz.

İlk önce tabloda verilen değerleri kullanarak u,vve w değerlerin bulunur.

No	x_i	y_i	$w_i = ln\, x_i$	$w_i{}^2 = (ln\, x_i)^2$	$y_i * w_i$
1	2.0	10	0.69	0.48	6.93
2	3.0	20	1.10	1.21	21.97
3	4.0	30	1.39	1.92	41.59
4	6.0	60	1.79	3.21	107.51
5	7.0	90	1.95	3.79	175.13
6	9.0	120	2.20	4.83	263.67
∑	31.00	330	9.11	15.43	616.80

de değerler yerine yazılırsa

$$\begin{bmatrix} 6 & 9{,}11 \\ 9{,}11 & 15{,}43 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 330 \\ 2621 \end{bmatrix}$$

denklemi a ve b için çözülürse $a = -54..9778$ ve $b = 72.4331$ değerleri bununur. Denklem olarak ise $F(x) = 72.4331ln\, x - 54.9778$ olarak ifade edilir. Bulunan F(x) fonksiyonunun uygunlugunu kontrol için SST ve SSE değerleri de bulunmalıdır. Bunun için aşağıdaki tablo oluşturulmuştur.

No	x_i	y_i	$F(x\_i) = ax_i^b$	$[F(x_i) - y_i]^2$	$[F(x_i) - \overline{y}_i]^2$
1	2.0	10	-4.7953	218.902	2025
2	3.0	20	24.5725	20.908	1225
3	4.0	30	45.4093	237.447	625
4	6.0	60	74.7771	218.368	25
5	7.0	90	85.9422	16.465	1225
6	9.0	120	104.1450	251.382	4225
∑	31.00	330	330.0508	963.467	9350

$r^2 = 1 - \left(\frac{SSE}{SST}\right) = 1 - \left(\frac{963.467}{9350}\right) = 0.897$ bulunur. Bulunan eğrini denklemimin noktaları bir önceki örnekteki kadar iyi temsil etmediği düşünülebilir.

6.2. MATRİS YÖNTEMİ KULLANARAK EĞRİ UYDURMA

Matris yöntemleri kullanarak eğri uydurma ile en küçük kareler metodu kullanarak eğri uydurma aynı sonuçları verir. Fakat matris metodu daha pratik olduğu için seçilebilir. Örnek olması bakımında örnek olarak bir seri (x_{i},y_{i}) noktaları verilmiş olsun. Bu noktalardan kullanarak bir doğru denklemi else edilmesi isteniyor ise bu takdirde. İstenen fonksiyon F(x)=a+bx olacaktır. Başlangıç olarak Velen noktalar F(x) fonksiyonunda yerine konur sa aşaıdaki denklem elde edilir.

$$y_1 = a + bx_1$$

$$y_2 = a + bx_2$$

$$y_3 = a + bx_3$$

..

$$y_n = a + bx_n$$

Bu denklem takımları matris formatında

$$[Y] = [A]\{x\}$$

Yukarıdaki denklemdeki tek bilinmeyen [c] kolon matrisidir. Eğer [A] matrisi kare matris olsa idi [c]i kolon matrisi kolayca hesaplanabilirdi. Şimdi ise hesaplanamaz. Bundan dolay [c] kolon matrisini hesaplamak için her iki tarafını [A] matrisini tranposesi ile çarpılsa. Yani matematiksel olarak

$$[y] = [A][c]$$
$$[A]^T[y] = [A]^T[A][c]$$
$$\begin{bmatrix} \sum y \\ \sum xy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum x \\ \sum x & \sum x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

elde edilir. Eğer [A] matrisin değerleri <ref>curfitmatyont2</ref> yerin konursa elde edilir. Dikkat edilecek olursa <ref>curfitmatyont3</ref> ile <ref>curfittinglinear</ref> arasında hiç bir fark yoktur. Hatta deklemin oluşturulması çok daha kolay ve pratiktir. Bu yöntemin bir başka özelliğide çok karmaşık probleri çok daha kolayca eledede edilebilmesidir.

Örnek: Aşağıda verilen tablodaki değerlerden geçen bir eğri denklemi hesaplanacaktır. Uydurulacak eğrinin formatı $1 = ax^2 + by^2$ şeklindedir.

i	0	1	2	3	4	5
x	-1.2	-0.96	-0.85	-0.7	0.3	0.4
y	-1	-0.20	0.8	1.0	0.9	0.5

Matris formatında yazılacak olursa

No	x	y
1	-1.20	-1.00
2	-0.96	-0.20
3	-0.85	0.80
4	-0.70	1.00
5	0.30	0.90
6	0.40	0.50

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 1.44 & 1.00 \\ 0.92 & 0.04 \\ 0.72 & 0.64 \\ 0.49 & 1.00 \\ 0.09 & 0.81 \\ 0.16 & 0.25 \end{vmatrix}}_{A} * \underbrace{\begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix}}_{c} = \underbrace{\begin{vmatrix} 1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \end{vmatrix}}_{y}$$

$$A^T = \begin{vmatrix} 1.44 & 0.922 & 0.723 & 0.49 & 0.09 & 0 \\ 1 & 0.04 & 0.64 & 1 & 0.81 & 0 \end{vmatrix}$$

$$A^T A = \begin{vmatrix} 3.719 & 2.543 \\ 2.542 & 3.13 \end{vmatrix}$$

$$(A^T A)^{-1} = \begin{vmatrix} 0.604 & -0.491 \\ -0.491 & 0.718 \end{vmatrix}$$

$$A^I y = \begin{vmatrix} 3.825 \\ 3.74 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} a= \\ b= \end{matrix} \begin{vmatrix} 0.476 \\ 0.809 \end{vmatrix}$$

elde edilir. Bu sonuçtan $1=0.47732x^2+0.80725y^2$ elde edilir.

6.4. EXCEL DEN EN KÜÇÜK KARELER YÖNTEMİ İLE EĞRİ UYDURMA

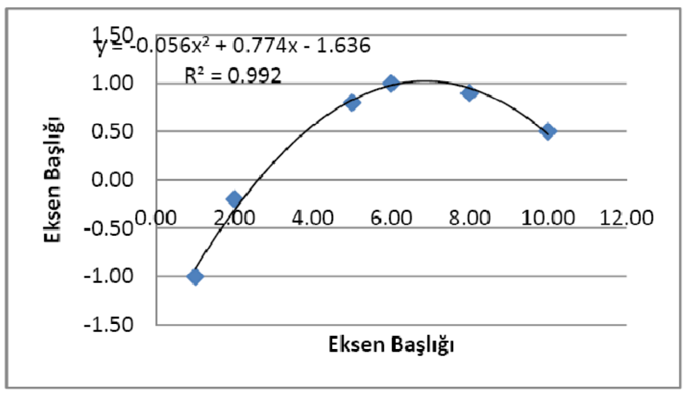
Yukarıda anlatılan eğri uydurma işlemlerinin bir çoğu çok hızlı ve kolay olarak Excel de hiçbir hesaba gerek kalmadan yapılabilir. Bunun için ilk önce verilen noktalar kullanılır XY Dağılım grafiği çizilir daha sonrada bu EXCEL'in Eğilim Çizgisi Ekle komutu yardımı ile yapılır. Eğilim çizgisi ekle komutu otomatik olarak en küçük kareler metodunu kullanacak ve sonuçları grafiksel olarak ve numerik olarak verecektir.

EXCEL de Eğri uydurma işlemi için izlenmesi gerek yol aşağıda sırası ile verilmiştir.

1. Excel de yeni bir sayfa ya bağımsız x değişkenleri ve bağımlı y değişkenlerini kolonlar halinde yazınız.
2. Birinci satırda girilen x ve y değerlerini kullanarak Grafik sihirbazı kullanılarak XY (Dağılım) grafiği çizilir.
3. Çizilen grafiğin üzerinde herhangi bir veri noktası seçilir. Eğer işlem doğru yapıldı ise tüm girilen veri noktaları seçili duruma gelecektir.
4. Noktalar seçili durumda iken farenin sağ tuşu ile grafik menüsü bulunur. Buradan Eğim Çizgisi Ekle komutu kulunlanılarak seçilir. Eğim çizgisi ekle menüsünde eğim çizgisinin türü ve seçeneklerinde kullanılarak istenen eğri ve bu eğrinin denklemi ve uyum kontrolü göster seçenekleri işaretlenir.
5. Okey tuşuna basılarak Eğri Çizgisi Eklem işlemi yapılır ve sonuçlar otomatik olarak çalışma sayfasında görüntülenir.

Bir örnekle gösterelim

No	x	y
1	1.00	-1.00
2	2.00	-0.20
3	5.00	0.80
4	6.00	1.00
5	8.00	0.90
6	10.00	0.50



Örnekte verilen veri noktaları kullanılarak ikinci derecen bir polinom uydurma işlemi yapalım.

Bunun için veri noktaları boş bir EXCEL sayfasına yazılır ve grafik sihirbazı kullanılarak grafik çizilir. Veri noktalarında bir üzerine çift tıklayarak tüm noktalar seçili hale getirilir. Şekil 5-3 ü noktaları seçildikten sonra alınmıştır. Daha sonra farenin sağ tuşu ile Eğim Çizgisi Ekle komutu seçildiğinde Şekil 5-4 ekranı görünür. Bu ekranda eklenecek Eğrinin Türü ve Seçenekler seçilebilir. Dikkat edilecek olursa Şekil 5-4 Eğilim türü kısmındaki üst, üstel ve logaritmik ifadeler kısmı aktif değildir. Bunun nedeni veri noktalarında x=0 ve y=0 değerleri vardır. Bu noktaların Logaritmik değerleri olmadığı için bu seçenekler pasif hale gelmiştir. Daha sonra eğim çizgisi Ekle diyalog kutusundaki seçenekler penceresindeki Grafik Üzerinde denklem görüntüle ve Grafik üzerinde R-kare değerini görüntüle kontrol kutuları seçildikten sonra okey tuşuna basarak Şekil 5-5 elde edildi. elde edilir. Burada görüleceği gibi uydurulan eğrinin denklemi ve R-kare şekilde görülmektedir.

EXCEL'in hazır Eğri Uydurma formatları kullanılarak işlem yapmak çok pratik ve kolay olsa da en büyük problemi sınırlı sayıda format sunmadır. Eğer uydurulacak eğri verilen formatlardan biri ile ifade edilemiyor ise bu durumda En küçük kareler yöntemi teorisini ve kullanarak çözüm yapmaktan başka çare kalmayabilir. Örnek olarak yukarı verilen örnekte uydurulacak eğri y=ax+bx² şeklide bir formatta ifade edilmek istense idi. bu durumda çözüm EXCELin hazır fonksiyonları yardımı ile yapılamayacak. Bu durumu bir örnekle gösterelim.

PROBLEMLER

1. Bir kuvvet ile bu kuvvete ait yer değiştirme arsındaki ilişki aşağıdaki tablo verilmiştir. Bu tabloyu kullanarak doğusal, ikinci ve üçüncü dereceden polinom kullanarak eğri uydurunuz. Şeklinde ifade ediniz ve bu eğrilerden hangisinin verilen noktaları en iyi temsil ettiğini bulunuz.

No	1	2	3	4	5	6	7	8	9
u	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
p	0.0	0.2	0.6	1.0	1.4	2.0	3.0	4.6	9.0

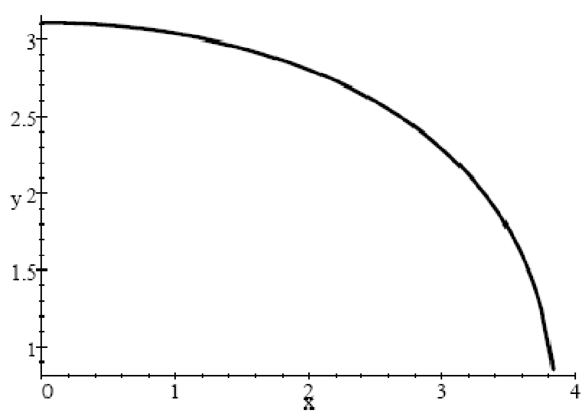
.

2.Birinci problemde verilen işlemleri EXCEL'in stantart kütüphanesindeki Eğri uydurma formatların kullanarak yapınız.

3.Aşağıda verilen grafiğe bakarak soruları cevaplayınız.

a.Bu grafiği temsil edecek en iyi fonksiyon hangi formatta olabilir.

b.Eğer fonksiyonunun formatı $ax^{n} + by^{m} = c$ şeklinde olsaydı a, b, n ve m neleri nasıl bulunabilir.



7. SAYISAL TÜREV

7.1. GİRİŞ

Türev ve integral matematiğin temel işlemleridir. Bilindiği gibi matematikte fonksiyonların analitik türev ve integral işlemleri fonksiyonuna bağlı hesaplanabilir. Ama analitik olarak integral veya türev almak mümkün olamadığı durumlarda sayısal türev ve sayısal integral işlemleri kullanılması gereklidir. Birçok olayda değişim oranları kullanılır. Örnek olarak bir arabanın bir saatte aldığı yol veya bir akarsuda bir saniyede akan su miktarı, bir ülkenin yıllık nüfus artış hızı gibi. Bu örneklerde görüldüğü gibi iki farklı değişken arasında bir oran yapılmaktadır. Burada bağımsız değişkenler (x) saat, saniye veya yıl ve bağımlı değişkene yol, su miktarı, nüfusa, f(x), oranlanmaktadır. Bu tanım matematiksel olarak aşağıda verilmektedir.

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{(x_i + h) - (x_i)}$$

Yukarıda h→0 ’a sonsuz yaklaştığı andaki oran Türev olarak adlandırılır ve matematiksel olarak aşağıdaki gibi yazılır

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{(x_i + h) - (x_i)} = f'(x)$$

Bu verilen tanımdan hareketle verilen fonksiyonları veya veri noktalarını kullanılarak sayısal türev hesaplanabilir. Bölüm 4 de Enterpolasyon konusunda eşit aralıklı olmayan verilerden bir polinom geçirebilmek için Denk (4-13)' in kullanılabileceği gösterilmişti.

$$\begin{aligned} F_n(x) = {} & f[x_0] + (x - x_0) f[x_o, x_1] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_o, x_1, x_2] \\ & (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) f[x_o, x_1, x_2, x_3] + \ldots\ldots \end{aligned}$$

Eğer F_n(x) fonksiyonun türevi bağımsız değişken *x* e göre türevi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} F_n'(x) = {} & f[x_o, x_1] + \{(x - x_1) + (x - x_0)\} f[x_o, x_1, x_2] \\ & \{(x - x_1)(x - x_2) + (x - x_0)(x - x_2) + (x - x_0)(x - x_1)\} f[x_o, \ldots, x_3] + .. \end{aligned}$$

Bu denklem daha basit hali ile;

$$\begin{aligned} F_n'(x) = {} & f_o^{[1]} + \{(x - x_1) + (x - x_0)\} f_o^{[2]} \\ & \{(x - x_1)(x - x_2) + (x - x_0)(x - x_2) + (x - x_0)(x - x_1)\} f_o^{[3]} + .. \end{aligned}$$

bulunur.

Verilen tabloyu kullanarak x=0 ve x=0.12 deki birinci dereceden türevini sadece üç nokta kullanarak bulunuz.

x	$f(x)$	$f^{[1]}$	$f^{[2]}$	$f^{[3]}$	$f^{[4]}$	$f^{[5]}$
0.000	5.000	3.973	-1.584	-10.245	3.504	7.777
0.050	5.199	3.815	-2.813	-9.719	5.059	
0.100	5.389	3.618	-3.785	-8.960		
0.120	5.462	3.429	-4.681			
0.150	5.565	3.054				
0.200	5.717					

$$\begin{aligned} F_3'(0) &= 3.9734 + (0 - 0.05)(-1.5845) + (0 - 0.05)(0 - 0.12) * (-10.245) \\ &= 4.0526 \\ F_3'(0.12) &= 3.618 + (0.12 - 0.10)(-3.785) + ((0.12 - 0.10) + (0.12 - 0.15))(-8.96) \\ &= 3.6319 \end{aligned}$$

bulunur. $F_3'(x = 0)$ seçilmiş fakat $F_3'(x = 0.12)$ kullanılırken $x_0 = 0.10$ kullanılmıştır. Gerçekte farklar tablosunda verilen değerler $y = sin(4x) + 5$ denkleminden elde edilmiştir. Ve analitik sonuçlar

$$y'(0) = 4 * \cos(4 * 0) = 4$$

$$y'(0) = 4 * \cos(4 * 0.12) = 3.548$$

ile bulunan değerler birbirlerine yakındır. Bunun en büyük nedeni noktalar arasındaki mesafenin küçük olmasıdır.

7.2. EŞİT ARALIKLI VERİLER İÇİN SAYISAL TÜREV

Hatırlanacağı gibi eşit aralıklı veriler kullanılarak eşit aralık deki gibi fonksiyon tanımlanacağı gösterilmişti: Bu verilen denklemi s değişkenine göre birinci dereceden türevi aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned} F_n(x) = {} & f_i + s(\Delta f_i) + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 f_i + \frac{s(s-1)(s-2)}{3!}\Delta^3 f_i + \cdots \\ & \frac{s(s-1)(s-2)\cdots(s-n-1)}{3!}\Delta^n f_i \end{aligned}$$

$$F'(x) = s'\Delta f_i + \frac{s'}{2}(2s-1)\Delta^2 f_i + \frac{s'}{6}(3s^2 - 6s + 2)\Delta^3 f_i + \ldots$$

yukarıdaki fonksiyonda $s = (x - x\_o)/h$ dır ve $\frac{ds}{dx} = \frac{1}{h}$ yazılabilir. Bu durumda denklem aşağıdaki gibi yazılır.

$$F_n'(x) = \frac{1}{h}\Delta^1 f_i + \frac{(2s-1)}{2h}\Delta^2 f_i + \frac{(3s^2 - 6s + 2)}{6h}\Delta^3 f_i + \ldots \pm \frac{1}{n}\Delta^n f_i$$

Olarak bulunabilir. Yukarıdaki verilen denklemdeki türevi aranan nokta $x = x_o$ ise bu durumda denklem aşağıdaki gibi yeniden düzenlenebilir.

$$F_n'(x_i) = \frac{1}{h}\left[\Delta^1 f_i - \frac{1}{2}\Delta^2 f_i + \frac{1}{3h}\Delta^3 f_i - \frac{1}{4h}\Delta^4 f_i + \dots\right]$$

deki denklemi oluşturmak için farklar tablosunun bilinmesi gereklidir. Ama eğer fonksiyonun kendisi biliyor ise bu takdirde farklar tablosunu oluşturmaya gerek olmayabilir. Bu durumda;

$$\Delta^1 f_i = f_{i+1} - f_i$$

$$\Delta^2 f_i = \Delta(\Delta f_i) = \Delta f_{i+1} - \Delta f_i = f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i$$

esitaralik3 yerine konursa;

$$2 \text{ nokta} \Rightarrow F_1'(x_i) = \frac{f_{i+1} - f_i}{h}$$

$$3 \text{ nokta} \Rightarrow F_2'(x_i) = \frac{-f_{i+2} + 4f_{i+1} - 3f_i}{h}$$

Burada dikkat edilmesi gerek husus ise sayısal türev alınırken sadece türevi alınacak noktadaki f(x) değerleri ve bu noktadan sonraki noktalar kullanılmıştır. Yani $f(x_1), f(x_2), f(x_3)$ ve $s = 0$ kullanıldığında. Bu hesaplama işlemine ileri farklar kullanılarak türev alınmasını gösterir. Eğer istenirse s=1 olarak kabul edilirse

$$F_n'(x_{i+1}) = \frac{1}{h}\left[\Delta^1 f_i + \frac{1}{2}\Delta^2 f_i\right] + ..$$

$$F_n'(x_{i+1}) = \frac{1}{h}\left(\frac{f_{i+2} - f_i}{2}\right)$$

merkezi farklar metodu olarak bilinir, bu ismi almasının nedeni türevi aran noktanın bir önceki ve bir sonraki değerlerin türev işleminde kullanılmasıdır. Aynı formülasyonla geri farklar kullanılarak türev de bulunabilir. Geri farklar tablolarında kendisi ile bir önceki arasındaki farklar kullanılır ve $\nabla f_i = f_i - f_{i-1}$ ile gösterilir. Merkezi farklarda ise kendisinden bir önceki ve sonraki noktalar kullanılarak türev hesaplanır $\partial f_i = f_{i+1} - f_{i-1}$ ile gösterilir. Bunlar grafiksel olarak aşağıdaki şekilde gösterilebilir.

Örnek: $f(x) = 4xe^x$ fonksiyonu için F'(1.5) değerini $h = 0.1$ için ileri farklar, geri fraklar ve merkezi farklar kullanarak hesaplayınız.

Analitik sonuç $f(x) = 4xe^x, \quad f'(x) = 4e^x(1 + x) = 4e^{1.5}(1 + 1.5) = 44.817$

İleri farklar $F_1'(x = 1.5) = \frac{1}{0.1}(4.8093) = 48,093$

Geri farklar $F_1'(x = 1.5) = \frac{1}{0.1}(4.181) = 41.81$

Merkezi farklar $F_1'(x = 1.5) = \frac{1}{2*0.1}(8.990) = 44.95$

Yukarıdaki örneği $h = 0.05$ için tekrarlayınız.

İleri farklar tablosu $F_1'(x = 1.5) = \frac{1}{0.05}(2.321) = 46.42$

Geri farklar tablosu $F_1'(x = 1.5) = \frac{1}{0.05}(2.1641) = 43.282$

Merkezi farklar tablosu $F_1'(x = 1.5) = \frac{1}{0.1}(4.485) = 44.85$

$f(x) = x^2 + \cos(x)$ fonksiyonunun $x = \pi / 2$ deki ileri, geri, ve merkezi farklar teoremini kullanarak birinci dereceden türevlerini hesaplayınız. ($h = \pi / 10$).

$$f'(x) = \frac{\Delta f}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{f(\pi/2 + \pi/10) - f(\pi/2)}{\pi/10} = 2.4721$$

$$f'(x) = \frac{\nabla f}{h} = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} = \frac{f(\pi/2) - f(\pi/2 - \pi/10)}{\pi/10} = 1.8438$$

$$f'(x) = \frac{\delta f}{h} = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = \frac{f(\pi/2 + \pi/10) - f(\pi/2 - \pi/10)}{2\pi/10} = 2.158$$

7.3 YÜKSEK DERECELİ TÜREVLER

İkinci ve üçüncü dereceden sayısal türevler kolayca esitaralik2 kullanılarak bulunabilir. Burada $s = 0$ olarak kabul edilmiştir.

$$F_n'(x) = \frac{1}{h}\Delta^1 f_i + \frac{(2s-1)}{2h}\Delta^2 f_i + \frac{(3s^2 - 6s + 2)}{6h}\Delta^3 f_i + \ldots \pm \frac{1}{n}\Delta^n f_i$$

$$F''(x) = \frac{1}{h^2}\Delta^2 f_i - \frac{1}{6h^2}(6s - 6)\Delta^3 f_i + \ldots\ldots$$

$$F''(x = x_i) = \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 f_i + \Delta^3 f_i - \frac{11}{12}\Delta^4 f_i + \ldots\ldots\right)$$

Eğer sadece ilk terimini kullanılırsa $F''(x = x_i)$

$$F''(x = x_i) = \frac{1}{h^2}(f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i)$$

Bu değerler ileri fraklar tablolarına göre ikinci mertebeden türevdir. Aynı yöntemle merkezi farklar kullanılarak

$$F_n''(x_i) = \frac{1}{h^2}(f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1})$$

$f(x) = 4xe^x$ Fonksiyonun ikinci mertebeden türevi $x = 1.5$ için bulunuz $h = 0.05$ kullanınız.

Analitik sonuç $f''(x) = 4e^{1.5}(2 + 1.5) = 62.744$

İleri farklara $f_1(x = 1.5) = \frac{1}{0.05^2}[f(1.6) - 2 * f(1.55) + f(1.50)] = 66.925$

Geri farklar $f_1(x = 1.5) = \frac{1}{0.05^2}[f(1.40) - 2 * f(1.45) + f(1.50)] = 58.85$

Merkezi farklara $f_1(x = 1.5) = \frac{1}{0.05^2}[f(1.45) - 2 * f(1.50) + f(1.55)] = 62.764$

8. Sayısal İntegral

$\int_a^b f(x)dx$ integralini analitik olarak çözme yerine sayısal olarak çözme işlemine sayısal integral denir. Sayısal integral kullanmanın nedeni verilen $f(x)$ fonksiyonun integrali kolayca hesaplanamayan veya çözümü olamayan formatta olabilir. Sayısal integralin temel prensibi verilen fonksiyonu bilinen bir şeklin alanına benzeterek işlem yapmaktır. Genellikle de benzetilen fonksiyonlar türev işlemlerinde de kullanıldığı gibi polinomlardır. Bu amaç için f(x) fonksiyonunun [a,b] aralığındaki yerine tahmini bir $F_n(x)$ fonksiyonu yazılır.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_1} F_n(x)dx$$

Daha önceki kısımda görüldüğü gibi $F_n(x)$ fonksiyonu eşit aralıklı veriler için aşağıdaki gibi yazılabiliyordu.

$$F_n(x) = f_i + s(\Delta f_i) + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 f_i + \frac{s(s-1)(s-2)}{3!}\Delta^3 f_i + \cdots$$
$$\frac{s(s-1)(s-2)\cdots(s-n-1)}{3!}\Delta^n f_i$$

N=1 için yukarıdaki denklemde yeniden yazılırsa ($s = \frac{x-x_o}{h}$, $ds = dx/h, s(x) = 1$)

$$\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx &= \int_0^1 (f_0 + s(\Delta f_1))hds \\
&= h\left(f_o + \frac{s^2}{2}(\Delta f_1)\right)\Bigg|_0^1 \\
&= h\left(f_i + \frac{1}{2}(\Delta f_1\right)\Bigg|_0^1 \\
&= h\frac{f_0 + f_1}{2} + H_1
\end{aligned}$$

$n = 2$ için yeniden yazılırsa (not $s = \frac{x-x_o}{h} \Rightarrow ds = \frac{dx}{h}, s(x_2) = 2,$ ve $s(x_0) = 0$)

$$\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx &= \int_0^2 \left(f_0 + s(\Delta f_0) + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 f_0\right)hds \\
&= 2hf_0 + 2h\Delta f_0 + \frac{1}{3}h\Delta^2 f_0 \\
&= 2hf_i + 2h(f_1 - f_0) + \frac{h}{3}(f_2 - 2f_1 + f_0) \\
&= \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2) + H_2
\end{aligned}$$

:aynı şekilde $n = 3$

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx = \frac{3h}{8}(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3) + H_2$$

Şeklinde 2 3 ve 4 nokta kullanarak herhangi bir integral işlemi yapılabilir. Bu metoda Newton-Cotes Formulasyonu nedir.

8.1. TRAPEZ KURALI

Newton-Cotes' un [x_o, x_1] aralığındaki $f(x)$ fonksiyonunun lineer olduğu varsayılarak yapılan yaklaşım aynı zamanda Trapez kuralı olarak da bilinir. Bu formülizasyonda polinomun ardışık iki noktası arasında lineer olduğu kabul edilerek işlem yapılır (bak şekil 6-1)

Eğer $\int_a^b f(x)$ aranıyor ise

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(x) &= \sum_{i=1} A_i \\
&= h\frac{f_0+f_1}{2} + h\frac{f_1+f_2}{2} h\frac{f_2+f_3}{2} + h\frac{f_3+f_4}{2}. \\
&= \frac{h}{2}(f_o + 2f_1 + 2f_2 + 2f_3 + 2f_4 + 2f_5 + \ldots + f_n)
\end{aligned}
$$

olarak hesaplanır. Burada atomlar arası uzaklık $h = \frac{b-a}{n}$ olarak hesaplanabilir.

Aşağıda x ve $f(x)$ değerleri verilmiştir. $f(x)$ fonksiyonunun altına kalan alanın 0 ile 1.5 arasındaki değerini bulunuz.

No	1	2	3	4	5
X	0	0,25	0,5	0,75	1
F(x)	0	0,6375	1,2071	1,6739	2,00

Bunun için trapez kuralı kullanılmalıdır. Bu denklemdeki h değerini bulmak için $h = 1/h$ den aralıklarının genişliği bulunur. Daha sonra denklemde yerine konarak

$I = \int_0^1 f(x) = \frac{0.250}{2}(0 + 2 * 0.6327 + 2 * 1.2071 + 2 * 1.6739 + 2.00) = 1.1284$ bulunur.

Yukarda türetilen noktalar $f(x) = sin(\frac{\pi}{20}) + x$ den türetilmiştir. Analitik olarak bu fonksiyon çözümlenirse

$$\int_0^1 (\sin(\frac{\pi x}{2}) + x)dx = 1.1366$$

bulunur. Aradaki fark trapez kuralına göre fonksiyonun lineerleştirilmesinden oluşan farktır.

8.3. SİMPSON 1/3 KURALI

Simpson 1/3 kuralı Newton-Cotes formülünde $n = 2$ kullanıldığı zaman elde edilen formüller kullanarak bulunur. Eğer $\int_a^b f(x)$ aranıyor ise

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(x) &= \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2) + \frac{h}{3}(f_2 + 4f_3 + f_4) + \frac{h}{3}(f_5 + 4f_6 + f_7) + \\
&= \frac{h}{2}(f_o + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + 4f_5 + \ldots 4f_{n-1} + f_n)
\end{aligned}
$$

bulunabilir. Bu metotta dikkat edilmesi gereken nokta kullanılacak nokta sayısının tek olması veya kullanılacak aralık sayısının çift olmasıdır. Eğer kullanılacak nokta sayısı tek değilse bu durumda tek noktaya kadar olanlar bu kuralla diğerlerinin de Trapez kuralı kullanılarak hesaplanması gerekir.

Bir önceki problemde verilen noktalar kullanarak $f(x)$ fonksiyonun altında kalan alan 0 ile 1.0 arasındaki değerini Simpson 1/3 kuralını kullanarak bulunuz.

$$I = \int_0^1 f(x) = \tfrac{0.250}{3}(0 + 4 * 0.6327 + 2 * 1.2071 + 4 * 1.6739 + 2.00) = 1.1367$$

Görüldüğü gibi bu Simpson 1/3 kuralı analitik değerler için daha yakın sonuçlar vermektedir.

8.4. SİMPSON 3/8 KURALI

Bu metotta daha önceden anlatılan integral hesaplama metotlarında olduğu gibi Newton-Cotes formülizasyonlarına göre işlem yapılır. Tek fark bu metotta $n = 3$ olan durumu kullanılır. Çözmenin amacı farklı olabilir.

$$\int_a^b f(x) = \frac{3h}{8}(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3) + \frac{3h}{8}(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3) + \ldots$$
$$= \frac{8h}{3}(f_o + 3f_1 + 3f_2 + 2f_3 + 3f_4 + 3f_5 + 2f_6 + \ldots 3f_{n-1} + f_n)$$

bulunabilir.

Aşağıda x ve $f(x)$ değerleri verilmiştir. $f(x)$ fonksiyonunun altında kalan alanın 0 ile 1.5 arasındaki değerini bulunuz.

No	1	2	3	4	5	6	7
x	0	0.25	0.5	0.75	1	1.25	1.5
$f(x)$	0	0.6327	1.2071	1.6739	2.00	2.174	2.2071

Bunun için trapez kuralı kullanılmalıdır. Bu denklemdeki h değerini bulmak için $h = \frac{1-1.25}{5} = 0.25$ de aralıkların genişliği bulunur. Daha sonra denklemde yerine konarak

$$\int_1^{1.5} f(x) = \frac{3 * 0.25}{8}(0 + 3 * 0.6327 + 3 * 1.2071 + 2 * 1.6739 + 3 * 2.00 + 3 * 2.174 + 2.2071) = 2.2122$$

bulunur. Yukarıda türetilen noktalar $f(x) = sin(\frac{\pi}{20}) + x$ den türetilmiş olduğundan. Soru analitik olarak çözümlenirse

$$\int_0^{1.5} (\sin(\frac{\pi x}{2}) + x)dx = 2.2118$$

elde edilir. Aradaki fark nümerik olarak çözülmesinden kaynaklanmaktadır.

$I = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+x^4+\sin(x/3)}$ fonksiyonunun integralini $Simson 1/3$ kuralına göre 5 istasyon kullanarak hesaplayınız.

$$h = \frac{\pi/2}{4} = \frac{\pi}{8}$$

i	1	2	3	4	5
x	0	$\frac{1}{4}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8}$	$\frac{2}{4}\frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{8}$	$\frac{3}{4}\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{8}$	$\frac{4}{4}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$
$f = \frac{1}{1+x^4+\sin(x/3)}$	1	0.866	0.610	0.302	0.302

Sonuç olarak

$$I = \frac{1}{3}\frac{\pi}{8}\left(f_1 + 4f_2 + 2f_3 + 4f_4 + f_5\right)$$

$$I = \frac{1}{3}\frac{\pi}{8}\left(1 + 4 * 0.866 + 2 * 0.610 + 4 * 0.302 + 0.13179\right)$$

$$= 0.91941$$

Bu soru nümerik olarak çözümlenirse 0.91987 bulunur.

PROBLEMLER

1) Trapez kuralını kullanarak aşağıdaki integral işlemlerini $n = 4$ nokta kullanarak hesaplayınız

   a) $\int_2^3 x * \ln(2x) dx,$

   b) $\int_{-3}^{2} x^2 * e^x dx,$

   c) $\int_0^{\pi} x^2 \cos x dx,$

   d) $\int_2^{10} \frac{x}{x^2+2} dx,$

2) Simpson 1/3 kuralını kullanarak $n=5$ için Problem 1 deki sorular çözünüz

3) Simpson 3/8 kuralını kullanarak $n = 7$ için Problem 1 deki sorular çözünüz.