算法设计与分析

蒋婷婷

上节课内容回顾

- 分治策略的基本思想
- 实例
  - 芯片测试
  - 数幂乘法
- 降低递归算法复杂性的途径
  - 代数变换减少子问题个数（位乘问题、矩阵乘法）
  - 预处理减少递归的操作（平面最近点对）
- 典型实例分析
  - 快速排序

元素选择问题

问题：从给定的集合 L 中选择第 i 小的元素
不妨设 L 为 n 个不等的实数

i=1, 称为最小元素；
i=n，称为最大元素；
位置处在中间的元素，称为中位元素
　　当n为奇数时，中位数只有1个，i=(n+1)/2;
　　当n为偶数时，中位数有2个，i=n/2, n/2+1.

选最大

输入：*n* 个不等的数

输出：*max*

算法4　**Findmax**

```
max←L[1];
for i←2 to length[L]
    do if max <L[i]
        then max←L[i]
return max
```

算法最坏情况下的时间复杂性为$O(n)$

找最大和最小

通常算法：顺序比较

复杂性：$W(n)=2n-3$

算法5 FindMaxMin

1．将n个元素两两一组分成$\lfloor n/2 \rfloor$组

2．每组比较，得到$\lfloor n/2 \rfloor$个较小和$\lfloor n/2 \rfloor$个较大

3．在$\lceil n/2 \rceil$个(n为奇数，是$\lfloor n/2 \rfloor+1$)较小中找最小min

4．在$\lceil n/2 \rceil$个(n为奇数，是$\lfloor n/2 \rfloor+1$)较大中找最大max

复杂性：行2 比较$\lfloor n/2 \rfloor$次，行3--4 比较至多$2\lceil n/2 \rceil-2$次，

$$W(n) = \lfloor n/2 \rfloor + 2\lceil n/2 \rceil - 2 = n + \lceil n/2 \rceil - 2 = \lceil 3n/2 \rceil - 2$$

找第二大

通常算法：顺序比较

1．顺序比较找到最大 ***max*;**

2．从剩下的 $n-1$ 个数中找最大，就是第二大 ***second***

复杂性：$W(n)=n-1+n-2=2n-3$

锦标赛算法：

两两分组比较，大者进入下一轮

每个元素用数表记录每次比较时小于自己的元素

锦标赛算法

1. $k \leftarrow n$
2. 将 k 个元素两两一组，分成 $\lfloor k/2 \rfloor$ 组
3. 每组的2个数比较，找到较大的数
4. 将被淘汰的较小的数在淘汰它的数所指向的链表中做记录
5. if k 为奇数 then $k \leftarrow \lfloor k/2 \rfloor + 1$
6. else $k \leftarrow \lfloor k/2 \rfloor$
7. if $k>1$ then goto 2
8. $max \leftarrow$ 最大数
9. $second \leftarrow max$ 的链表中的最大

复杂性:

$$W(n)=n-1+\lceil \log n \rceil -1= n+\lceil \log n \rceil -2$$

一般性选择问题

问题描述

输入：数组 L, L的长度 n, 正整数 k, $1 \le k \le n$.

输出：第 k 小的数

通常算法

1．排序

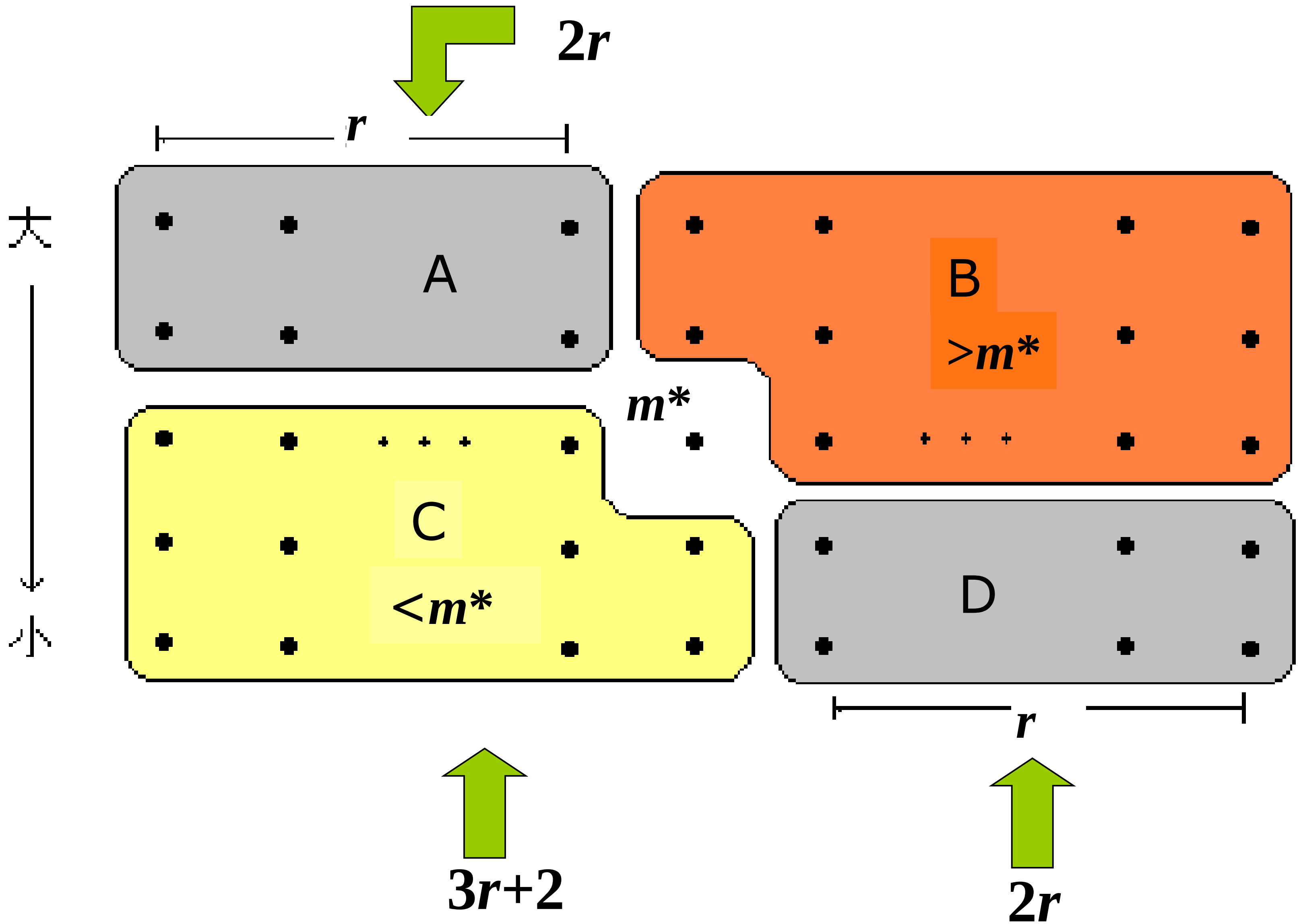
2．找第 k 小的数

时间复杂性：$O(n\log n)$

分治选择算法

算法 Select(S,k)

1. 将S 划分成5个一组，共 $n_M = \lceil n/5 \rceil$ 个组
2. 每组找中位数，n_M 个中位数放到集合 M.
3. $m^* \leftarrow$Select(M,$\lceil |M|/2 \rceil$) 将S中的数划分成 A,B,C,D 四个 集合
4. 把 A 和 D 中的每个元素与 m^* 比较，小的构成 S_1, 大的 构成 S_2;
5. $S_1 \leftarrow S_1 \cup C$; $S_2 \leftarrow S_2 \cup B$;
6. if $k = |S_1|+1$ then 输出 m^*
7. else if $k \le |S_1|$
8. then Select(S_1,k)
9. else Select(S_2,$k-|S_1|-1$)



最坏情况：子问题大小为 $2r + 2r + 3r + 2 = 7r + 2$

复杂度估计 $W(n)=O(n)$

不妨设 $n=5(2r+1)$, $|A|=|D|=2r$, $r=\dfrac{\frac{n}{5}-1}{2}=\dfrac{n}{10}-\dfrac{1}{2}$

算法工作量

行2: $O(n)$

行3: $W(n/5)$

行4: $O(n)$

行8-9: $W(7r+2)$

$$W(7r+2)=W(7(\frac{n}{10}-\frac{1}{2})+2)$$

$$=W(\frac{7n}{10}-\frac{3}{2})\le W(\frac{7n}{10})$$

用递归树做复杂度估计

$$W(n)\le W(\frac{n}{5})+W(\frac{7n}{10})+cn\le cn+\frac{9}{10}cn+\frac{81}{100}cn+\ldots=O(n)$$

递归树

$$tn \qquad\qquad tn$$

$$\frac{tn}{5} \quad \frac{7tn}{10} \qquad\qquad 0.9tn$$

$$\frac{tn}{25} \quad \frac{7tn}{50} \quad \frac{7tn}{50} \quad \frac{49tn}{100} \qquad\qquad 0.81tn$$

……

分治策略应用：卷积

- 向量计算：

给定向量 $a = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$和 $b = (b_0, b_1, \ldots, b_{n-1})$

向量和 $a + b = (a_0+b_0, a_1+b_1, \ldots, a_{n-1}+b_{n-1})$

内积 $a \cdot b = a_0b_0 + a_1b_1 + \ldots + a_{n-1}b_{n-1}$

卷积 $a * b = (c_0, c_1, \ldots, c_{2n-2})$，其中

$$c_k = \sum_{\substack{i+j=k \\ i,j<n}} a_i b_j, \quad k = 0,1,\ldots,2n-2$$

a_0b_0	a_0b_1	……	a_0b_{n-2}	a_0b_{n-1}
a_1b_0	a_1b_1	……	a_1b_{n-2}	a_1b_{n-1}
……	……	……	……	……
$a_{n-1}b_0$	$a_{n-1}b_1$	……	$a_{n-1}b_{n-2}$	$a_{n-1}b_{n-1}$

卷积等价于多项式相乘

多项式乘法：

给定多项式

$$A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{m-1} x^{m-1}$$

$$B(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_{n-1} x^{n-1}$$

计算 $C(x) = A(x)\, B(x)$

$$= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)\, x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)\, x^2 + \ldots + a_{m-1} b_{n-1}\, x^{m+n-2}$$

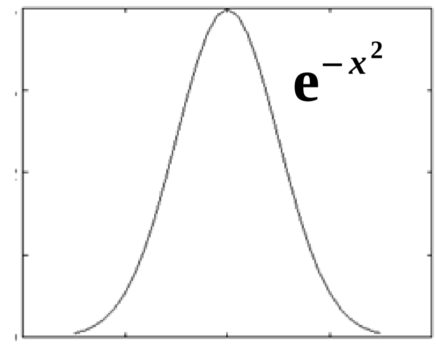
其中 x^k 的系数

$$c_k = \sum_{\substack{i+j=k \\ i \in \{0,1,\ldots,m-1\} \\ j \in \{0,1,\ldots,n-1\}}} a_i b_j, \quad k = 0,1,\ldots,m+n-2$$

卷积应用：信号处理

给定序列$a=(a_0,a_1,\ldots,a_{m-1})$，表示信号在时刻0,1,…,$m$-1的度量值，由于噪音干扰，需要平滑处理, 即对值 a_i，用其前后k步内的值进行加权平均. 离a_i越近权值越大，处理结果为 a_i’.

高斯滤波的权值函数为



$$w_s = \frac{1}{z} e^{-s^2}, \quad s = 0, \pm 1, \ldots, \pm k$$

$$w = (w_{-k}, \ldots, w_{-1}, w_0, w_1, \ldots, w_k)$$

其中z用于归一化处理，使得所有的权值之和为1.

处理结果为

$$a_i' = \sum_{s=-k}^{k} a_{i+s} w_s$$

实例

$a=(a_0,a_1,\ldots,a_8)$, $k=2$, $w=(w_{-2},w_{-1},w_0,w_1,w_2)=(b_4,b_3,b_2,b_1,b_0)$

$a_i'=a_{i-2}b_4+a_{i-1}b_3+a_ib_2+a_{i+1}b_1+a_{i+2}b_0$， 下标之和为 $i+k$

a_0b_0	a_0b_1	a_0b_2	a_0b_3	a_0b_4	a_2'
a_1b_0	a_1b_1	a_1b_2	a_1b_3	a_1b_4	a_3'
a_2b_0	a_2b_1	a_2b_2	a_2b_3	a_2b_4	a_4'
a_3b_0	a_3b_1	a_3b_2	a_3b_3	a_3b_4	a_5'
a_4b_0	a_4b_1	a_4b_2	a_4b_3	a_4b_4	a_6'
a_5b_0	a_5b_1	a_5b_2	a_5b_3	a_5b_4	
a_6b_0	a_6b_1	a_6b_2	a_6b_3	a_6b_4	
a_7b_0	a_7b_1	a_7b_2	a_7b_3	a_7b_4	
a_8b_0	a_8b_1	a_8b_2	a_8b_3	a_8b_4	

平滑处理

定义向量

$$a=(a_0, a_1, \ldots, a_{m-1})$$

$$b=(b_{2k}, b_{2k-1}, \ldots, b_0)$$

$$=(w_{-k}, w_{-k+1}, \ldots, w_k)=w$$

$$a_i'=\sum_{s=-k}^{k} a_{i+s}b_{k-s}=\sum_{s=-k}^{k} a_{i+s}w_s$$

把权向量 $b=w$ 看作$2k+1$长度的窗口

在a上移动计算卷积.

卷积计算

给定向量 $a = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$和 $b = (b_0, b_1, \ldots, b_{n-1})$

直接计算：$O(n^2)$

快速算法：卷积计算等价于多项式相乘.

$$A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{m-1}x^{m-1}$$

$$B(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_{n-1}x^{n-1}$$

$$C(x)=A(x)B(x)= a_0b_0 + (a_0b_1+a_1b_0)\, x + (a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)\, x^2$$

$+$ （$\ldots + a_{m-1}b_{n-1}$）x^{m+n-2}， $C(x)$的系数向量就是$a * b$.

设计思想：

1. 选择值$x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$，求出$A(x_j)$和$B(x_j)$，$j=1,2,\ldots,2n$
2. 对每个j，计算$C(x_j)$
3. 利用多项式插值方法，根据$C(x)$在$x=x_1,x_2,\ldots, x_{2n}$的值求出多项式$C(x)$

$2n$个数的选择：1 的$2n$次根

$$\omega_j = e^{\frac{2\pi j}{2n}i} = e^{\frac{\pi j}{n}i} = \cos\frac{\pi j}{n} + i\sin\frac{\pi j}{n} \qquad j=0,1,\ldots,2n-1$$

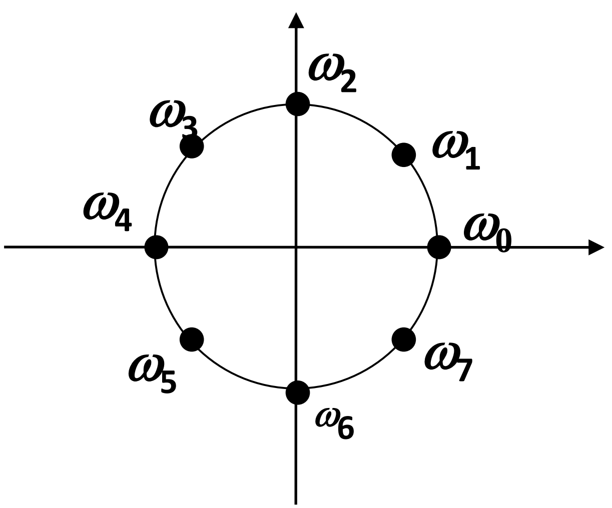
例如n=4, 1的8次方根是：

$$\omega_0 = 1, \qquad \omega_1 = e^{\frac{\pi}{4}i} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i,$$

$$\omega_2 = e^{\frac{\pi}{2}i} = i, \quad \omega_3 = e^{\frac{3\pi}{4}i} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i,$$

$$\omega_4 = e^{\pi i} = -1, \ \omega_5 = e^{\frac{5\pi}{4}i} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i,$$

$$\omega_6 = e^{\frac{3\pi}{2}i} = -i, \ \omega_7 = e^{\frac{7\pi}{4}i} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$



多项式求值算法

给定多项式： $A(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_{n-1}x^{n-1}$

设 x 为1 的 $2n$ 次方根，对所有的 x 计算 $A(x)$ 的值.

算法1：对每个 x 做下述运算：

依次计算每个项 $a_i x^i$，对 i 求和得到 $A(x)$，

$T_1(n)=O(n^3)$

算法2：$A_1(x)= a_{n-1}$

$A_2(x)= a_{n-2}+ xA_1(x)$

$A_3(x)= a_{n-3}+ xA_2(x)$

…

$A_n(x)= a_0+ xA_{n-1}(x)=A(x)$

$T_2(n) = O(n^2)$

分治法：多项式求值

原理：

$A_{even}(x)=a_0+a_2x+a_4x^2+\ldots+a_{n-2}x^{(n-2)/2}$

$A_{odd}(x)=a_1+a_3x+a_5x^2+\ldots+a_{n-1}x^{(n-2)/2}$

$A(x)=A_{even}(x^2)+x\,A_{odd}(x^2)$， x^2 为1 的 n 次根

算法3：

1. 计算1 的所有的 $2n$ 次根
2. 分别计算 $A_{even}(x^2)$ 与 $A_{odd}(x^2)$
3. 利用步2 的结果计算 $A(x)$

复杂度分析：$T(n)=T_1(n)+f(n)$， $f(n)=O(n)$计算$2n$次根时间

$T_1(n)=2T_1(n/2)+g(n)$, $g(n)=O(n)$,

$T_1(1)=O(1)$

$T(n)=O(n\log n)$

卷积计算的时间分析

步1：求值$A(\omega_j)$和 $B(\omega_j)$，$j=0,1,\ldots,2n-1$. $O(n\log n)$

步2：计算$C(\omega_j)$，$j=0,1,\ldots,2n-1$. $O(n)$

步3：构造多项式

$$D(x)=C(\omega_0)+C(\omega_1)x+\ldots+C(\omega_{2n-1})x^{2n-1}$$

可以证明： $D(\omega_0)=2nc_0$

$$D(\omega_j)=2nc_{2n-j}\,,\quad j=1,\ldots,2n-1$$

即只要计算出所有的 $D(\omega_j)$，就得到所有的c_{2n-j}，$j=0,1,\ldots,2n-1$. $O(n\log n)$

总的时间为$O(n\log n)$

平面点集的凸包

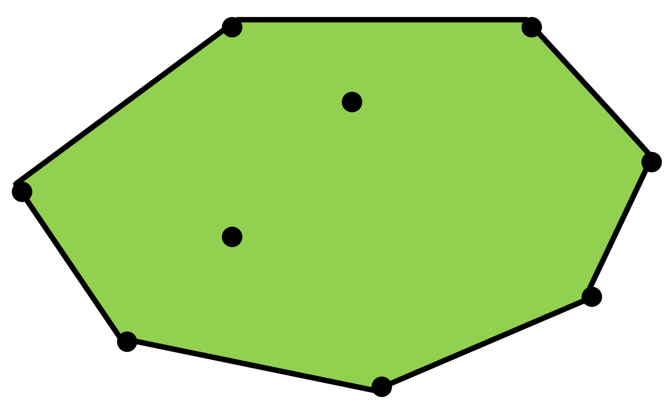
- **背景**

  图形处理中用于形状识别：字形识别、碰撞检测

  平面凸包算法是核心算法

- **问题（平面凸包）**

  给定大量离散点的集合Q，求一个最小的凸多边形，使得Q中的点在该多边形内或者边上.



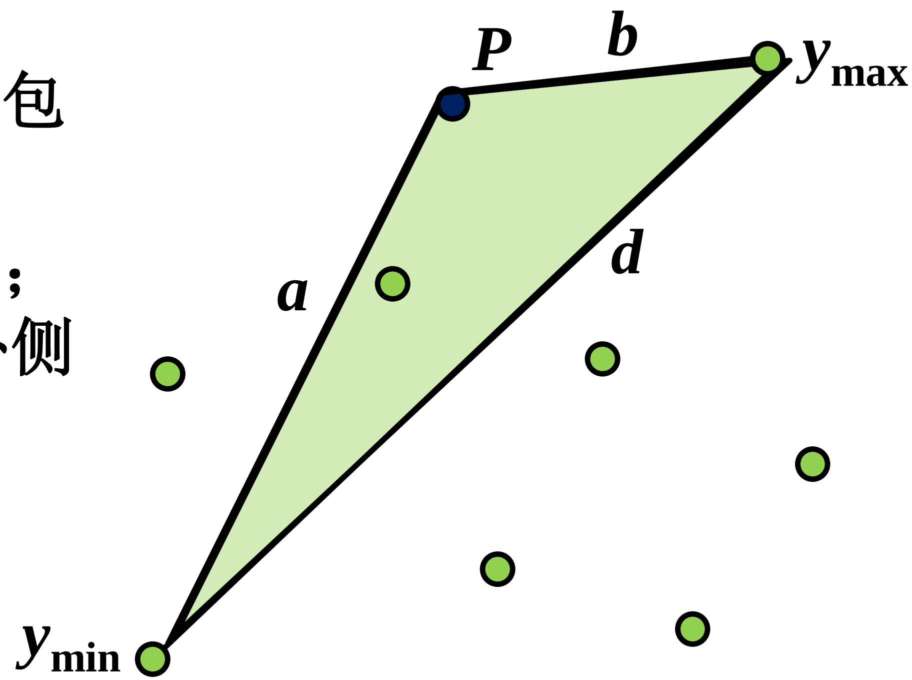
分治算法

算法设计思想

1. 以$d=\{y_{max}, y_{min}\}$划分Q为左点集 *L* 和右点集 *R*
2. **Deal(*L*)；Deal(*R*)**

Deal(*L*)

1. 把距离 *d* 最远点 *P* 加入凸包
2. 检查 *L*中其他点是否在三角形内；在则从 *L*中删除；否则根据在 *a* 或 *b* 边的外侧划分在两个子问题中
3. **Deal(*a*)**
4. **Deal(*b*)**



算法分析

- 初始用 d 划分 $O(n)$
- Deal 递归调用
  - 找凸包顶点 P $O(n)$
  - 确定点是否在三角形内部 $O(n)$

$$W(n) = W(n-1) + O(n)$$
$$W(1) = 1$$

  - 最坏情况为 $O(n^2)$
- $T(n)=O(n)+W(n)=O(n^2)$