



课程总结



北京大学



考试范围

数学基础：

估计函数的阶、递推方程求解、求和技术

算法设计技术：

分治策略、动态规划、贪心法、回溯与分支限界、线性规划、平摊分析、网络流、近似算法、随机算法、在线算法，理解给定例题的算法并能简单应用

算法分析技术：

能估计简单伪码程序的基本运算次数（最坏或平均）
简单问题的计算复杂度估计

计算复杂性理论：

NP完全理论的基本概念、几个基本NP完全问题的定义、简单的归约





算法设计技术解题说明

指明所用的设计技术，用一段简单文字说明算法设计思想。如果题目没有要求，可以不写伪码。

- 使用分治策略，说明划分子问题的方法，递归计算的结束条件，给出最坏情况下的时间复杂度的递推方程及初值并求解。
- 使用动态规划，需要说明子问题边界、优化函数及其迭代计算的递推方程，并根据需要给出标记函数及解的追踪方法，给出最坏情况下的时间复杂度估计。
- 使用回溯技术需要说明搜索树、解向量、判定是否回溯的约束条件等，给出最坏情况下时间复杂度估计。
- 熟悉网络流、线性规划的基本模型及主要算法，并能简单应用



北京大学



函数的阶

- 阶的概念

$$f(n)=O(g(n))$$

$$f(n)=\Theta(g(n)) \Leftrightarrow f(n)=O(g(n)) \wedge g(n)=O(f(n))$$

- 阶的高低

指数级: $2^n, 3^n, n!, \dots$

多项式级: $n, n^2, n \log n, n^{1/2}, \dots$

$\log n$ 的多项式级: $\log n, \log^2 n, \dots$

- 注意:

阶反映的是大的 n ($n > n_0$) 的情况, 可以忽略有限项.
连续趋势, 不允许在不同的值之间抖动.



北京大学



递推方程求解

- 迭代归纳法——求和技术
- 递归树——树的生成，各结点工作量的求和方法
- 主定理——条件判定和一些常用方程的解

熟悉常用递推方程的解



北京大學



常用的求和公式

- 有限项等比级数的求和

$$a_1(1 + q + q^2 + \dots + q^k) = \frac{a_1(1 - q^{k+1})}{1 - q}$$

- 无限等比序列的收敛值

$$a_1(1 + q + q^2 + \dots) = \frac{a_1}{1 - q}, \quad q < 1$$

- 调和级数的估计值

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \dots = O(\log n)$$

- 对数函数和的估计值

$$\log 1 + \log 2 + \dots + \log n = O(n \log n)$$





主定理

设 $a \geq 1, b > 1$ 为常数, $f(n)$ 为函数, $T(n)$ 为非负整数

$$T(n) = aT(n/b) + f(n),$$

则有以下结果:

1. $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon}), \varepsilon > 0$, 那么 $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$
2. $f(n) = \Theta(n^{\log_b a}),$ 那么 $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n)$
3. $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon}), \varepsilon > 0$, 且对于某个常数 $c < 1$ 和所有的充分大的 n 有 $af(n/b) \leq cf(n)$, 那么

$$T(n) = \Theta(f(n))$$

注意: case3. 不存在 $\varepsilon > 0$, 使得 $n \log n = \Omega(n^{1+\varepsilon})$





重要结果

$$f(n) = af\left(\frac{n}{b}\right) + d(n)$$

当 $d(n)$ 为常数时

$$f(n) = \begin{cases} O(n^{\log_b a}) & a \neq 1 \\ O(\log n) & a = 1 \end{cases}$$

当 $d(n) = cn$ 时

$$f(n) = \begin{cases} O(n) & a < b \\ O(n \log n) & a = b \\ O(n^{\log_b a}) & a > b \end{cases}$$



北京大学



算法设计技术

- 分治策略
- 动态规划
- 贪心法
- 回溯和分支限界
- 线性规划模型
- 平摊分析
- 网络流模型
- 近似算法
- 随机算法
- 在线算法





分治策略

- 分治策略的适用条件
- 子问题的划分**
 - 均衡划分原则
 - 子问题类型与原问题相同
- 递归算法分析——递推方程**
- 减少子问题的技术（了解）
- 典型问题：搜索、排序、选择





动态规划

- 适用条件
 - 优化问题、多阶段决策、优化原则、子问题重叠
- 关于目标函数的递推方程**
- 自底向上的计算
- 表格存储
- 解的追踪
- 典型问题：矩阵链相乘、最长公共子序列、背包、最大子段和、图像压缩、最优二分检索树等





贪心法

- 适用条件
 - 组合优化、多步判断、贪心选择性质
- 局部优化策略的确定
- 贪心选择性质的证明**
- 近似解的估计（了解）
- 典型问题：活动选择、最优装载、最小延迟调度、最优前缀码、最小生成树、单源最短路径





回溯和分支限界

- 适用条件
 - 搜索问题、多步判断、多米诺条件
- 解向量的确定
- 分支条件的确定**
 - 约束条件
 - 代价函数的确定（了解）
- 搜索树节点数的估计
 - Monte Carlo方法
- 典型问题： n 后放置、背包问题、货郎问题、最大团问题、圆排列问题等





线性规划

- 线性规划模型
- 标准形
- 单纯形法
- 对偶性
- 整数线性规划的分支限界算法





平摊分析

- 平摊分析的概念
- 平摊分析的三种方法
 - 聚集分析
 - 记账法
 - 势能法
- 动态表及其上的平摊分析





网络流

网络流：

- 流网络的建模：源点 s 与汇点 t 、流 f 满足的容量条件与守恒条件、最大 s - t 流
- 最大流算法及其时间复杂度
- 最大流-最小割定理
- 简单应用





近似算法

- 近似算法及其近似比
- 多机调度问题
 - 贪心的近似算法
 - 改进的贪心近似算法
- 货郎问题
 - 最邻近法
 - 最小生成树法
 - 最小权匹配法
- 背包问题
 - 一个简单的贪心算法
 - 多项式时间近似方案
 - 伪多项式时间算法与完全多项式时间近似方案





随机算法

Las Vegas 型随机算法

随机快速排序

随机选择

随机 n 后放置

Monte Carlo 型随机算法

主元素测试

串相等测试

模式匹配

素数测试

随机算法的分类与局限性



北京大學



算法分析技术

- 评价算法的因素
 - 正确性、工作量、占用空间、简单性、最优性
- 算法的两种复杂度
 - 最坏情况下复杂度、平均情况下复杂度
- 问题下界的分析技术
 - 直接计数工作量
 - 决策树
 - 根据算法构造最坏情况下的输入
 - 归约
- 检索、排序、选择问题的下界分析结果





计算复杂性理论

- P、NP、NPC、NP-hard 的基本概念
- 基本NPC问题的定义：SAT、HC、TSP、VC、独立集、团、子集和、背包、双机调度
- NPC问题的证明
 - (1) 证明 $\Pi \in \text{NP}$;
 - (2) 找到一个已知的NP完全问题 Π' , 并证明 $\Pi' \leq_p \Pi$.





期末考试

- 时间：6月12日周一上午8：30-10：30
- 考试地点：二教203
- 请提前15分钟到达考场，迟到15分钟不能进入考场
- 带学生证
- 闭卷考试
- 答疑：[发邮件至tt.jiang@pku.edu.cn](mailto:tt.jiang@pku.edu.cn)



北京大学