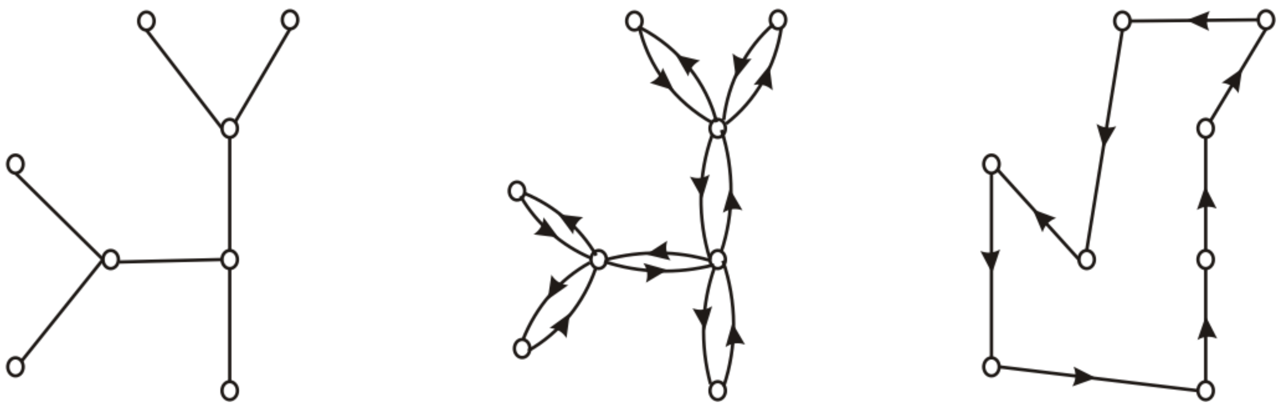
# 最小生成树法

针对满足三角不等式的货郎问题

**最小生成树法MST:** 首先, 求图的一棵最小生成树$T$. 然后, 沿着 $T$ 走两遍得到图的一条欧拉回路. 最后, 顺着这条欧拉回路, 跳过已走过的顶点, 抄近路得到一条哈密顿回路.

例



求最小生成树和欧拉回路都可以在多项式时间内完成, 故算法是多项式时间的.

# 最小生成树法的性能

**定理** 对货郎问题的所有满足三角不等式的实例 $I$,

$$\mathrm{MST}(I) < 2\mathrm{OPT}(I)$$

证 因为从哈密顿回路中删去一条边就得到一棵生成树, 故 $T$ 的权小于OPT($I$). 沿 $T$ 走两遍的长小于2OPT($I$). 因为满足三角不等式, 抄近路不会增加长度, 故

$$\mathrm{MST}(I) < 2\mathrm{OPT}(I).$$

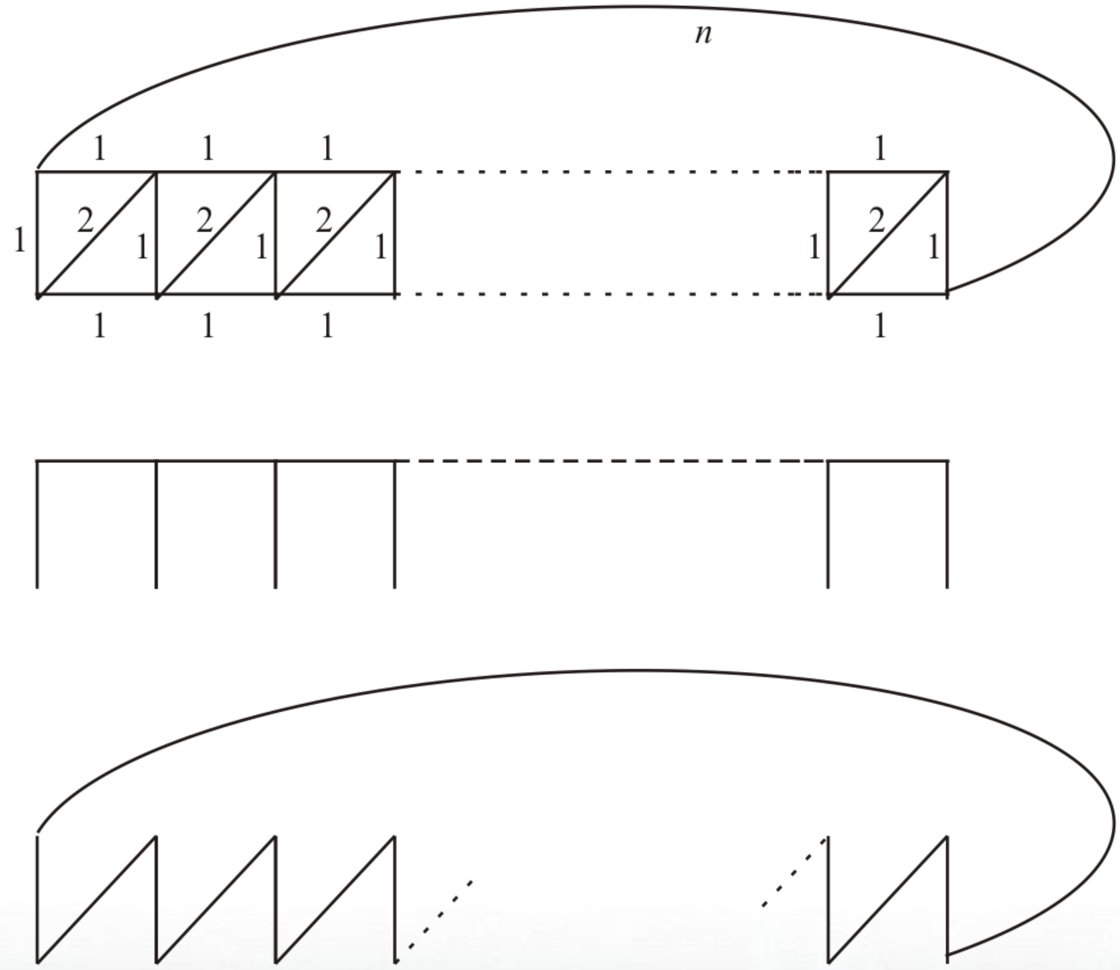
MST是2-近似算法.

# 紧实例

$\mathrm{OPT}(I) = 2n$

$\mathrm{MST}(I) = 4n\text{-}2$

$$= \left(2 - \frac{1}{n}\right)\mathrm{OPT}(I)$$

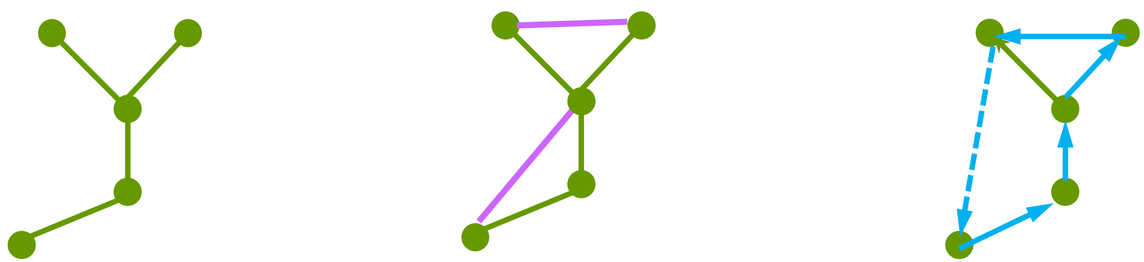


# 最小权匹配法

**最小权匹配法 MM:**

首先求图的一棵最小生成树$T$.

记 $T$ 的所有奇度顶点在原图中的导出子图为 $H$, $H$ 有偶数个顶点, 求 $H$ 的最小匹配 $M$. 把 $M$ 加入 $T$ 得到一个欧拉图, 求这个欧拉图的欧拉回路; 最后, 沿着这条欧拉回路, 跳过已走过的顶点, 抄近路得到一条哈密顿回路.



求任意图最小权匹配的算法是多项式时间的, 因此 MM 是多项式时间的.

# 最小权匹配法的性能

**定理** 对货郎问题的所有满足三角不等式的实例 $I$,

$$\mathrm{MM}(I) < \frac{3}{2}\mathrm{OPT}(I)$$

证 由于满足三角不等式, 导出子图 $H$ 中的最短哈密顿回路 $C$ 的长度不超过原图中最短哈密顿回路的长度 OPT($I$). 沿着$C$ 隔一条边取一条边, 得到 $H$ 的一个匹配. 总可以使这个匹配的权不超过 $C$ 长的一半. 因此, $H$ 的最小匹配 $M$ 的权不超过 OPT($I$)/2, 求得的欧拉回路的长小于 (3/2)OPT($I$). 抄近路不会增加长度, 得证

$$\mathrm{MM}(I) < (3/2)\mathrm{OPT}(I).$$

MM是3/2 -近似算法

北京大学

# 货郎问题的难度

**定理** 货郎问题(不要求满足三角不等式) 是不可近似的, 除非 P = NP.

证 假设不然, 设A是货郎问题的近似算法, 其近似比 $r \le K$, $K$是常数. 任给图 $G = \langle V,E\rangle$, 如下构造货郎问题的实例 $I_G$:
城市集$V$, $\forall u,v \in V$,

若 $(u,v)\in E$, 则令 $d(u,v)=1$; 否则令 $d(u,v)=Kn$,

其中 $|V| = n$. 若$G$ 有哈密顿回路, 则

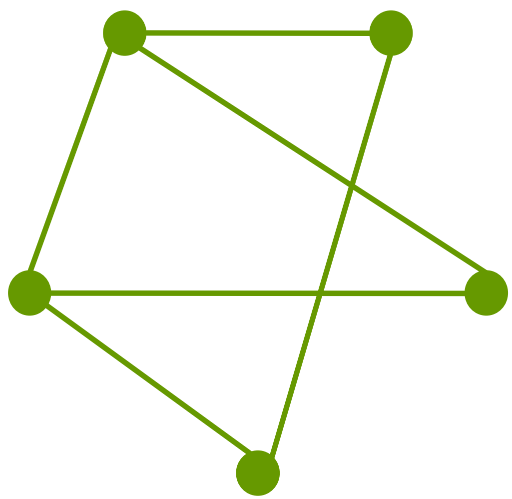
$$\mathrm{OPT}(I_G) = n, \qquad \mathrm{A}(I_G) \le r\,\mathrm{OPT}(I_G) \le Kn$$

否则

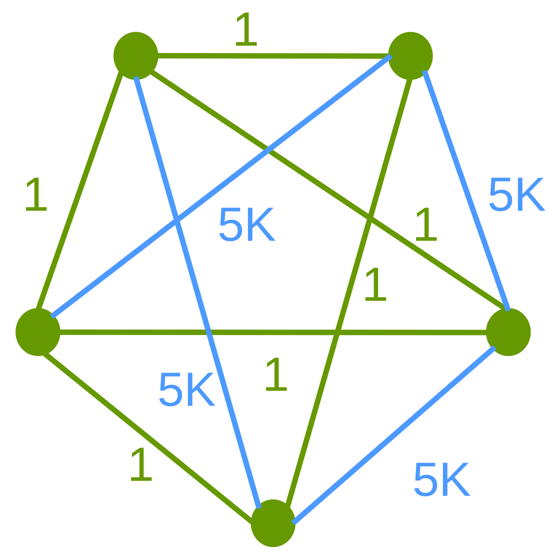
$$\mathrm{OPT}(I_G) > Kn, \quad \mathrm{A}(I_G) \ge \mathrm{OPT}(I_G) > Kn$$

所以, $G$ 有哈密顿回路当且仅当 $\mathrm{A}(I_G) \le Kn$

# 实例



HC




货郎问题

**HC实例有哈密顿回路，则货郎问题实例有长度不超过 *n* 的旅行，即近似算法的解不超过 *Kn*. 若HC实例没有哈密顿回路，则货郎实例的旅行路线长度大于 *Kn*.**

# 证明

下述算法可以判断图 $G$ 是否有哈密顿回路.

算法

1. 由 $I$ 构造货郎问题的实例 $I_G$
2. 对$I_G$ 运用近似算法 A
3. 若A($I_G$) $\le Kn$, 则输出“Yes”；否则输出“No”

由于$K$是固定的常数, 构造 $I_G$ 可在 $O(n^2)$ 时间内完成且

$|I_G| = O(n^2)$. A是多项式时间的，A 对 $I_G$ 可在 $n$ 的多项式时间内完成计算，所以上述算法是 HC 的多项式时间算法. 而 HC 是 NP 完全的，推得 P=NP.

# 0-1背包问题

**0-1背包问题的优化形式:**

任给 $n$ 件物品和一个背包，物品 $i$ 的重量为 $w_i$，价值为 $v_i$，$1 \le i \le n$，背包的重量限制为 $B$，其中 $w_i$，$v_i$ 以及 $B$ 都是正整数.

把哪些物品装入背包才能在不超过重量限制的条件下使得价值最大？ 即，求子集 $S^* \subseteq \{1,2,\ldots,n\}$ 使得

$$\sum_{i \in S^*} v_i = \max\left\{ \sum_{i \in S} v_i \;\middle|\; \sum_{i \in S} w_i \le B,\ S \subseteq \{1,2,\ldots,n\} \right\}.$$

下面不妨设所有物品的重量 $w_i \le B$
否则将这个物品排除在外

# 一个简单的贪心算法

贪心算法G-KK

1. 按单位重量的价值从大到小排列物品. 设

$$v_1/w_1 \geq v_2/w_2 \geq \ldots \geq v_n/w_n.$$

2. 顺序检查每一件物品, 只要能装得下就将它装入背包, 设装入背包的总价值为 $V$.
3. 求 $v_k = \max\{ v_i \mid i = 1, 2, \ldots, n \}$.
   若$v_k > V$, 则将背包内的物品换成物品 $k$.

实例 $(w_i,v_i)$: (3,7), (4,9), (5,9), (2,2); $B$=6.

G-KK给出的解是装入(3,7)和(2,2), 总价值为9.
若把第3件物品改为(5,10), 则装入第3件, 总价值为10.
这两个实例的最优解都是装入(4,9)和(2,2), 总价值为11.

# G-KK的性能

**定理** 对0-1背包问题的任何实例 $I$, 有

$$\mathrm{OPT}(I) < 2\text{G-KK}(I).$$

证 设物品 $l$ 是第一件未装入背包的物品, 由于物品按单位重量的价值从大到小排列, 故有

$$\begin{aligned}\mathrm{OPT}(I) &< \text{G-KK}(I) + v_l \\ &\le \text{G-KK}(I) + v_{\max} \\ &\le 2\,\text{G-KK}(I).\end{aligned}$$

G-KK是2-近似算法.

# 多项式时间近似方案

**算法 PTAS** 输入 $\varepsilon > 0$和实例 $I$.

1. 令 $m = \lceil 1/\varepsilon \rceil$.
2. 按单位重量的价值从大到小排列物品. 设

$$v_1/w_1 \geq v_2/w_2 \geq \ldots \geq v_n/w_n.$$

3. 对每一个 $t = 1,2,\ldots,m$ 和 $t$ 件物品，检查这 $t$ 件物品的重量之和. 若它们的重量之和不超过$B$, 则接着用 G-KK把剩余的物品装入背包.
4. 比较得到的所有装法, 取其中价值最大的作为近似解.

PTAS是一簇算法. 对每一个固定的 $\varepsilon > 0$, PTAS是一个算法, 记作 $\text{PTAS}_\varepsilon$ .

# 例子

取$\varepsilon$=0.1，*m*=10.

*t*=1: 尝试 *n*次，装入背包物品集分别为{1},{2},…,{*n*}，再使用 G-KK算法

*t*=2: 尝试 *n*(*n*-1)/2次，装入物品集分别是是{1, 2},{1, 3}, … ,{*n*-1, *n*}，再使用 G-KK算法.

…

*t*=10: 尝试 $C_n^{10}$ 次，装入物品集为 {1,…9,10}, {1,…9,11}, …, {*n*-9,*n*-8,…,*n*-1,*n*}，再用G-KK算法.

总计运行G-KK算法次数：

$$C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{10}$$

# PTAS的性能

**定理** 对每一个$\varepsilon > 0$和 0-1 背包问题的实例 $I$,

$$\mathrm{OPT}(I) < (1+\varepsilon)\,\mathrm{PTAS}_{\varepsilon}(I),$$

且 $\mathrm{PTAS}_{\varepsilon}$ 的时间复杂度为$O(n^{1/\varepsilon+2})$.

证 设最优解为$S^*$. 若 $|S^*| \le m$, 则算法必得到 $S^*$. 设$|S^*| > m$. 考虑计算中以 $S^*$中 $m$ 件价值最大的物品为基础, 用G-KK得到的结果 $S$. 设物品 $l$ 是 $S^*$ 中第一件不在 $S$ 中的物品, 在此之前 G-KK 装入不属于 $S^*$ 的物品 (肯定有这样的物品, 否则应该装入物品 $l$ ) 单位重量的价值都不小于 $v_l/w_l$, 当然也不小于 $S^*$ 中所有没有装入的物品的单位重量的价值, 故有

$$\mathrm{OPT}(I) < \sum_{i\in S} v_i + v_l$$

$S$ 包括 $S^*$ 中 $m$ 件价值最大的物品, 它们的价值都不小于 $v_l$,

$$v_l \le \sum_{i\in S} v_i/m$$

# 多项式时间近似方案

$$\begin{aligned}\mathrm{OPT}(I) &< \textstyle\sum_{i\in S} v_i + v_l \\ &\le \textstyle\sum_{i\in S} v_i + \sum_{i\in S} v_i/m \\ &\le (1+1/m)\ \mathrm{PTAS}_\varepsilon(I) \\ &\le (1+\varepsilon)\ \mathrm{PTAS}_\varepsilon(I)\end{aligned}$$

时间复杂度. 从 $n$ 件物品中取 $t$ 件( $t$ =1,2,…,$m$), 所有可能取法的个数为

$$c_n^1 + c_n^2 + \cdots + c_n^m \le m \cdot \frac{n^m}{m!} \le n^m .$$

对每一种取法, G-KK的运行时间 为$O(n)$, 故算法的时间复杂度为 $O(n^{m+1}) = O(n^{1/\varepsilon+2})$.

多项式时间近似方案: 以$\varepsilon$>0和问题的实例作为输入 $I$, 对每一个固定的 $\varepsilon$ > 0, 算法是 1+$\varepsilon$- 近似的.

# 伪多项式时间算法与完全多项式时间近似方案

完全多项式时间近似方案: 以 $\varepsilon > 0$和问题的实例 $I$ 作为输入, 时间复杂度为二元多项式 $p(|I|, 1/\varepsilon)$, 且对每一个固定的$\varepsilon > 0$, 算法的近似比为 $1+\varepsilon$.

动态规划算法A 记$G_k(d)$: 当只考虑前 $k$ 件物品时, 为了得到不小于 $d$ 的价值, 至少要装入的物品重量

$$G_k(d) = \min\left\{\sum_{i=1}^{k} w_i x_i \mid \sum_{i=1}^{k} v_i x_i \geq d,\ x_i = 0\text{或}1,\ 1 \leq i \leq k\right\},$$

$0 \leq k \leq n,\ 0 \leq d \leq D,\ D = v_1+v_2+\ldots+v_n,$

约定: $\min\varnothing=+\infty$.

$\mathrm{OPT}(I) = \max\{\, d \mid G_n(d) \leq B \,\}$

北京大学

# 动态规划算法

递推公式

$$G_0(d)=\begin{cases}0, & 若 d=0,\\ +\infty, & 若 d>0,\end{cases}$$

$$G_{k+1}(d)=\begin{cases}\min\{G_k(d), w_{k+1}\}, & 若 d\le v_{k+1},\\ \min\{G_k(d), G_k(d-v_{k+1})+w_{k+1}\}, & 若 d>v_{k+1},\end{cases}$$

$$0\le k\le n\text{-}1,\ \ 0\le d\le D.$$

A的时间复杂度为$O(nD)=O(n^2v_{max})$, 是伪多项式时间算法.

# 完全多项式时间近似方案

算法FPTAS (Fully Polynomial-Time Approximation Scheme)

输入 $\varepsilon > 0$和实例 $I$.

1. 令 $b = \max\left\{\left\lfloor \dfrac{v_{\max}}{(1+1/\varepsilon)n} \right\rfloor, 1\right\}$.
2. 令 $v_i' = \lceil v_i/b \rceil$, $1 \le i \le n$. 把所有 $v_i$ 换成 $v_i'$, 记新得实例为$I'$.
3. 对 $I'$应用算法 A 得到解 $S$, 把 $S$ 取作实例 $I$ 的解.

定理　对每一个$\varepsilon > 0$和 0-1背包问题的实例 $I$,

$$\mathrm{OPT}(I) < (1+\varepsilon)\ \mathrm{FPTAS}\ (I),$$

并且 FPTAS 的时间复杂度为 $O(n^3(1+1/\varepsilon))$ .

# 证明

$$b = \max\left\{\left\lfloor \frac{v_{\max}}{(1+1/\varepsilon)n} \right\rfloor, 1\right\}. \quad v_i' = \lceil v_i/b \rceil$$

证　由于

$$(v_i'-1)b < v_i \le v_i'b \qquad (1)$$

对任意的 $T \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$

$$0 \le b\sum_{i\in T} v_i' - \sum_{i\in T} v_i < b|T| \le bn \qquad (2)$$

设 $I$ 的最优解为 $S^*$, 注意到 $S$ 是 $I'$ 的最优解, 故有

$$\mathrm{OPT}(I) - \mathrm{FPTAS}(I) = \sum_{i\in S^*} v_i - \sum_{i\in S} v_i$$

$= (\sum_{i\in S^*} v_i - b\sum_{i\in S^*} v_i')$　（$\le 0$，由式(1) $v_i \le v_i'b$）

$+ (b\sum_{i\in S^*} v_i' - b\sum_{i\in S} v_i')$　($\le 0$，$S$是关于输入$v_i'$的最优解)

$+ (b\sum_{i\in S} v_i' - \sum_{i\in S} v_i)$

$\le (b\sum_{i\in S} v_i' - \sum_{i\in S} v_i) < bn$　（由式(2))

# 证明

$$b=\max\left\{\left\lfloor \frac{v_{\max}}{(1+1/\varepsilon)n} \right\rfloor, 1\right\} \quad v_i'=\lceil v_i/b \rceil$$

$\mathrm{OPT}(I)-\mathrm{FPTAS}(I) < bn$

对每一个$\varepsilon > 0$, 若 $b$=1, 则 $I'$就是 $I$, $S$是 $I$ 的最优解.

设 $b$>1, 则

$$\mathrm{OPT}(I)-\mathrm{FPTAS}(I)$$

$$< v_{\max}/(1+1/\varepsilon)$$

$$\leq \mathrm{OPT}(I)/(1+1/\varepsilon)$$ (因为所有物品的重量都小于等于背包限重, $v_{\max} \leq \mathrm{OPT}(I)$)

得 $\mathrm{OPT}(I) < (1+\varepsilon)\mathrm{FPTAS}(I)$.

时间：主要是 A对$I'$的运算，时间复杂度为

$$O(n^2 v_{\max}/b) = O(n^3(1+1/\varepsilon))$$