2023年算法设计与分析期中考试试卷

**答题要求：解答算法设计题目时，请先用一段话描述算法思想。若用动态规划算法，请写出递推方程、边界条件、标记函数等设计要素；贪心法需给出证明；回溯法需给出解向量、搜索树、约束条件、优化算法等；各种算法需分析时间复杂度。阅卷时会根据算法的正确性和效率评分。**

1. **（10分）求解递推方程，要求给出求解过程。**

（1）

根据主定理，a = 4, b = 2, , 属于第二种情况，所以T(n) =

评分标准：答案正确给3分，分析过程正确给2分。

（2）



评分标准：答案正确给2分，分析过程正确给3分。没有考虑不等式扣2分。

1. **（10分）面试**

某公司计划面试 人，每个人面试一次，面试的地点有A和B两个城市可选。假设第 人飞往 A 市的费用为 ，飞往 B 市的费用为。请设计一个面试方案，使得每个城市都有个人面试，并且总飞行费用最低。

算法设计：

方法一：（满分10分）

按照cost[i][0]-cost[i][1]从大到小排序，前N个人去B市，其他人去A市。

算法时间复杂度为2Nlog2N=O(NlogN)。

正确性证明方法一：反证法，假设有两个人i和j，cost[i][0]-cost[i][1] 比 cost[j][0]-cost[j][1]大，但是i去了A，j去了B，那么交换这两个人之后费用降低。说明贪心法是最优解。

正确性证明方法二：先将2N个人全选择飞往A地，所需费用为，按题目要求，其中选择N个人改飞往B地，使得总费用最小，

即求，

即，

即求}，故按cost[i][1]-cost[i][0]从小到大排序即为最优。

评分标准：算法设计正确 +4分

复杂度分析正确 +1分

正确性证明 +5分

方法二：（满分10分）

按方法一贪心，令d[i] = cost[i][0]-cost[i][1]，用Select算法选择d[i] 第N大的i，遍历数组，若d[j]<d[i]，则j去A市，否则去B市。

证明方法同上。

方法三：（满分10分）

对所有i遍历，cost[i][0]<cost[i][1]则放入A集合，cost[i][0]>cost[i][1]则放入B集合。

若|A|=|B|=N，则结束，A中人全去A地，B中人全去B地。

否则，不妨设|A|=N+k,k>0，则使用Select算法找到A集合中d[i] = cost[i][0]-cost[i][1]第N小的元素x，A中d[i]>d[x]的k个数全放入B集合中。

算法结束，A中人全去A地，B中人全去B地。

时间复杂度：O(N)或O(NlogN)

证明：同法一交换论证。

方法四：（满分10分）

令d[i] = abs(cost[i][0]-cost[i][1])，将所有人按d[i]从大到小排序，

遍历，若cost[i][0]<cost[i][1]，则i去A地，否则去B地。

若有一方满N人，则剩下所有人全去另一方。

时间复杂度：O(NlogN)

证明：类似法一交换论证。

方法五：（满分8分）

动态规划法。

令dp[i][j]表示前i个人中，有j个人去A市，剩下的人去B市的最小费用。（2分）

递推方程：（2分）

dp[i][j] = min{dp[i-1][j-1]+cost[i][0],dp[i-1][j]+cost[i][1]},1<=i<=2N,1<=j<=min(i,N)

边界条件：（1分）

dp[0][0] = 0，dp[i][0] = ,1<=i<=2N

标记函数：（2分）

bt[i][j] =

求方案的时候反推回去。

时间复杂度：（1分）O(

更高时间复杂度的动规酌情扣分。

方法五：线性规划（满分6分）

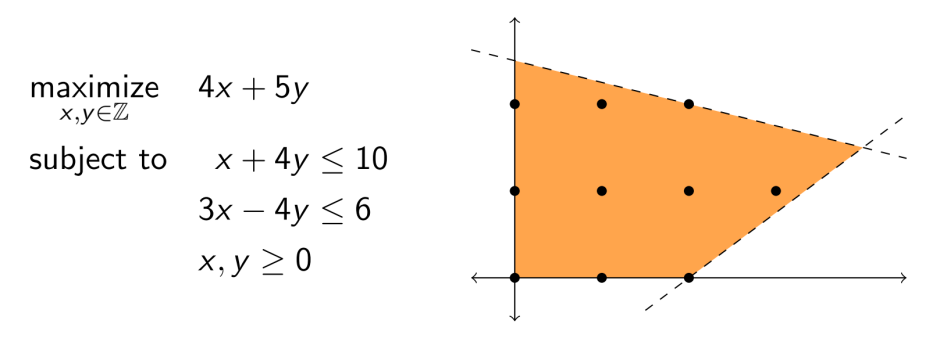
略

方法刘：回溯（满分3分）

略，O(

1. **（10分）线性规划**

求解下列整数线性规划：



解法1： 利用图解法，画出目标函数所对应的斜线，应该是x=2, y=2为最优解，目标函数值为18。

解法2： 分支限界法

解法3： 枚举法，将所有可行整数解都算出来取最大值。

评分标准：答案正确得3分

过程正确给7分

写的不是整数线性规划给2分

1. **（15分）分派问题**

给个人分配 件工作，给第个人分配第 件工作的成本是，每人最多分配1件工作，每件工作都需要有人完成。求成本最小的工作分配方案。

解法1：回溯



评分标准：

1. 描述解向量正确+2分
2. 分支约束条件+2分
3. 代价函数+4
4. 复杂度分析+2分

解法2：费用流

解法3：线性规划

1. **（15分）最小队列**

队列是一个先进先出线性表，支持O(1)时间复杂度的进队、出队操作。但是在队列中查找当前的最小元素需要O(*n*)的时间复杂度，即遍历当前的整个队列。

下面设计一个辅助的单调队列完成求最小值操作。

在原有的队列基础上增加一个单调队列，，保证。下面讨论三种操作时辅助队列的相应操作;

1. 元素入队：设入队元素为，原有队列按照队列基本操作入队。比较辅助队列的最后一个元素与的大小关系，若，则从辅助队列中删除；继续比较，直至当前辅助队列不存在大于的队尾元素为止。将加入辅助队列末尾。（原理：当前元素比从辅助队列中删除的元素小，且比它们后出队，因此在 出队以前，这些元素都不会成为最小值元素，可以直接删除）
2. 元素出队：原有队列按照队列基本操作出队。若当前出队元素是辅助队列队首元素，则辅助队列队首元素出队。
3. 求最小值：当前辅助队列队首元素即为当前队列的最小值。

请证明上述每一种操作的均摊时间复杂度为O(1)。

方法一（满分15分）

势函数（6分）：辅助队列长度

元素入队（3分）：

元素出队（3分）：=1-1=0

求最小值（3分）：=1+0=1

方法二（满分15分）

记账法（6分）：在辅助队列对象上多收1元钱

元素入队（3分）：元素出队（3分）：

求最小值（3分）：

方法三（满分15分）

聚集法（6分）：说明清楚对于入队操作的删除而言，只有可能删掉已经进入过队列的元素，所以最终的删除次数一定小于等于入队元素个数，据此进行整体的聚集分析（若意思基本达到，但是表达不严谨，或没有分析到位，灼情扣2-3分）

元素入队（3分）：按上述说法表达清楚进行计算

元素出队（3分）：说明单次操作O(1)

求最小值（3分）：说明单次操作O(1)

整体评分标准：记账法or势能分析法的定义及相关的分析只要能够完全合理即可，可以增加对比较次数的分析或者加上对原队列操作的分析，言之有理前后逻辑一致即可。

表达清楚复杂度的算法设计，并进行相关的分析占6分，将三种操作分别说明并获得均摊时间复杂度为O(1)各3分。

对于分析部分的6分，

若分析过程基本正确，但是不够严谨全面，或者过于简略，灼情扣2-3分

若分析过程存在明显问题，但是有部分正确，灼情扣4-5分

对于三种操作的各3分，

分析了操作本身的实际代价，可以获得各1分

分析过于简略或没有操作单独说明，扣1分

1. **（20分）硬盘快递**

您是一家云计算服务提供商，为大客户提供高带宽的数据地理位置转移服务。数据地理位置转移服务通过快递硬盘来实现，转包给市场上的普通快递公司执行。基于硬盘快递量的预测，您计划与快递公司签订优惠合同，以降低快递总成本。

市场上有两家长期合作的快递公司，它们都提供跟地理位置和距离无关、只跟运量或时长相关的优惠合同。公司甲按硬盘的吨数收取快递费用（每吨元），但要求您承诺每次服务都需要将本周内所有的快递需求包给公司甲。公司乙按周数收取快递费用（每周元），但要求您承诺每次服务都需要将本周开始连续四周的所有快递需求包给公司乙。

快递总成本是支付给公司甲和公司乙的总金额。已知公司甲的快递费用是每吨元，公司乙的快递费用是每周元，需要满足上述快递合同的附加条件。给定连续周的硬盘快递吨数预测 (,,...,)，请设计一个多项式时间算法，求解最低的快递总成本及快递合同签约方案。（上述数字均为正整数。如有多个方案实现最低成本，求解其中一个即可。）

例如，假设和，连续10周的硬盘快递吨数预测是(11, 9, 9, 12, 12, 12, 12, 9, 9, 11)，最低的快递总成本是(11+9+9)\*1000+4\*10000+(9+9+11)\*1000=98000元，方案是前3周选择公司甲，然后连续4周选择公司乙，最后3周选择公司甲。

方法一（满分20分）

解释（2分）

：只考虑前周时，最优解对应的费用值，且包月乙公司不存在浪费（第周在包月期间时，是包月乙公司的第4周）。

：只考虑前周时，在第周选公司甲(当)，或在第周选公司乙(当)条件下，最优方案对应的费用值。

递推方程（8分）：

初始条件（4分）：

求：

标记函数（3分）：记录的选择结果，基于

的选择追踪最优方案。

复杂度（3分）：

方法二（满分20分）

（2分）：只考虑前周时，最优解对应的费用值

递推方程（6分）：

初始条件（4分）：

求：

标记函数（3分）：记录的选择结果，追踪最优方案。

复杂度（3分）：

需证明递推方程的正确性（2分）：与方法一相比，递推方程的正确性不是显然的。

对于最优解，乙公司包月未用完，当且仅当从未选择过甲公司。否则，考虑最优方案最后一次选择甲公司在第周，且在第周还未到最后一次包月乙公司的第4周。则将第周以后的包月都提前一周，得到一个更优的解，与原方案是最优方案矛盾。所以，最优解不需要考虑包月服务未用完的情形。

在全包月乙公司的情形下，的值始终是不包括最后一次包月费用的最优值。（无论最后一次包月是否服务未用完）

1. **（20分）网格极小值**

在带权网格图中，个顶点排列为行列，每个顶点都有非负权值。假设它们的权值互不相等。如果一个顶点的权值比其相邻顶点的权值都小，则称该顶点为一个极小值点。在已知极小值点存在的情况下，请设计一个尽可能高效的算法，在带权网格图中找出一个极小值点。

方法一（满分20分）

时间复杂度 或的分治算法（时间复杂度未显示说明，扣2分）

在第行以及第列上找最小值点P；

如果点P是极小值点，返回P，算法结束；

否则，必有一个相邻点Q的值比点P的值小，取点Q所在的行以及列，得到一个规模的子问题，且极小值点也一定存在。递归求解并返回极小值点。

也可以在第行（或第列(如果)）上找最小值点，分解为一个规模的子问题，再递归求解。

方法二（满分15分）

在第行上找最小值，如果不是极小值，再分解为一个规模的子问题递归求解。

时间复杂度 （时间复杂度未显示说明，扣2分）

方法三（满分10分）

在第行上找最小值，如果不是极小值，再分解为两个规模的子问题递归求解。

时间复杂度 （时间复杂度未显示说明，扣2分）

方法四（满分10分）

蛮力搜索：任取一个点，如果不是极小值点，取最小的相邻点，继续判断，直到找到极小值点为止（因为极小值点存在，算法一定会结束）

时间复杂度 （时间复杂度未显示说明，扣2分）