NN02 - Lineare Regression und Gradientenabstieg

Canan Yıldız (Türkisch-Deutsche Universität)

Videos

- NN2.1 - Lineare Regression - Intro
- NN2.2 - Vergleich Perzeptron und Bsp
- NN2.3 - Kostenfunktiion und Gradientenvektor
- NN2.4 - Berechnung Gradientenvektor - Beispiel
- NN2.5 - Berechnung Gradientenvektor - Allgemein
- NN2.6 - Skalierung der Merkmale

Weitere Unterlagen

- NN02-Lineare_Regression.pdf

1 Kurze Übersicht

1.1 Formalisierung (original)

- Ausgabe y ist reelle Zahl aus einem stetigen Bereich (zum Beispiel Hauspreis)
- Die **Hypothesenfunktion** ist eine gewichtete Summe der Merkmale x_i plus eine Konstante w_0:

$$h(\mathbf{x}) = \mathbf{w}^T\mathbf{x} = w_0 + w_1x_1 + w_2x_2 + \ldots + w_nx_n$$

- Der **Verlust** (engl. loss) für einen Datenpunkt $\mathbf{x}$ ist das **Fehlerquadrat**:

$$\mathcal{L} = (\hat{y} - y)^2 = (h(\mathbf{x}) - y)^2$$

- Die Kosten (engl. cost) sind der durchschnittliche Verlust über alle Datenpunkte:

$$J = \frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{m}(\hat{y} - y)^2 = \frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{m}(h(\mathbf{x}) - y)^2$$

1.2 Formalisierung (ohne inline math)

- Ausgabe y ist reelle Zahl aus einem stetigen Bereich (zum Beispiel Hauspreis)
- Die **Hypothesenfunktion** ist eine gewichtete Summe der Merkmale x_i plus eine Konstante w_0:

$$h(\mathbf{x}) = \mathbf{w}^T\mathbf{x} = w_0 + w_1x_1 + w_2x_2 + \ldots + w_nx_n$$

- Der **Verlust** (engl. loss) für einen Datenpunkt x ist das **Fehlerquadrat**:

$$\mathcal{L} = (\hat{y} - y)^2 = (h(\mathbf{x}) - y)^2$$

- Die Kosten (engl. cost) sind der durchschnittliche Verlust über alle Datenpunkte:

$$J = \frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{m}(\hat{y}-y)^2 = \frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{m}(h(\mathbf{x})-y)^2$$

1.3 Formalisierung (mit inline math, block math ausgerückt)

- Ausgabe y ist reelle Zahl aus einem stetigen Bereich (zum Beispiel Hauspreis)
- Die **Hypothesenfunktion** ist eine gewichtete Summe der Merkmale x_i plus eine Konstante w_0:

$$h(\mathbf{x}) = \mathbf{w}^T\mathbf{x} = w_0 + w_1x_1 + w_2x_2 + \ldots + w_nx_n$$

- Der **Verlust** (engl. loss) für einen Datenpunkt x ist das **Fehlerquadrat**:

$$\mathcal{L} = (\hat{y}-y)^2 = (h(\mathbf{x})-y)^2$$

- Die Kosten (engl. cost) sind der durchschnittliche Verlust über alle Datenpunkte:

$$J = \frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{m}(\hat{y}-y)^2 = \frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{m}(h(\mathbf{x})-y)^2$$

1.4 Der Gradient

- Der **Gradientenvektor** $\nabla J(\mathbf{w})$ setzt sich zusammen aus den partiellen Ableitungen der Kostenfunktion J nach den Gewichten w_i und zeigt in jedem Punkt $\mathbf{w}$ in die **Richtung des steilsten Aufstiegs**:

$$\nabla J = [\partial J/\partial w_0 \quad \partial J/\partial w_1 \quad \ldots \quad \partial J/\partial w_n]^T$$

- **Schlussfolgerung**: In die entgegengesetzte Richtung, i.e. in Richtung $-\nabla J(\mathbf{w})$ geht es am *steilsten bergab!*
- **IDEE**: Bewege $\mathbf{w}$ in Richtung $-\nabla J(\mathbf{w})$, um die Kosten J möglichst schnell zu senken.

1.5 Der Gradientenabstieg (engl. Gradient Descent)

1. Starte mit zufälligen Gewichten $\mathbf{w}$
2. Berechne den Gradientenvektor im aktuellen Punkt $\mathbf{w}$
3. **Gewichtsaktualisierung**: Gehe einen *kleinen* Schritt in Richtung $-\nabla J(\mathbf{w})$

$$\mathbf{w}_{neu} := \mathbf{w}_{alt} - \alpha \cdot \nabla J(\mathbf{w}_{alt})$$

   (α: Lernrate/Schrittweite).
4. Wiederhole Schritte 2-3, bis das globale Minimum von J erreicht ist.

Lernziele

- k2: Lineare Regression aus Sicht neuronaler Netze: Graphische Darstellung, Vergleich mit Perzeptron
- k2: Formalisierung
- k2: Verlust- und Kostenfunktion
- k2: Gradientenvektor
- k2: Lernrate
- k3: Gradientenabstieg

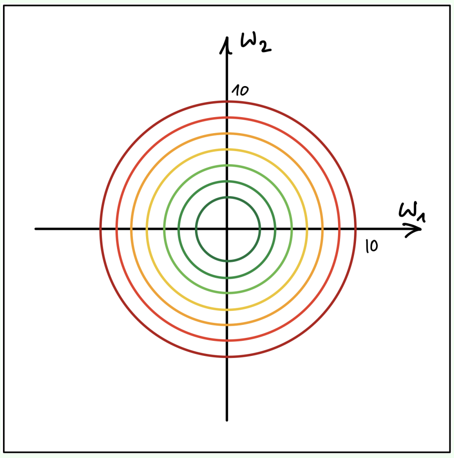
Quizzes

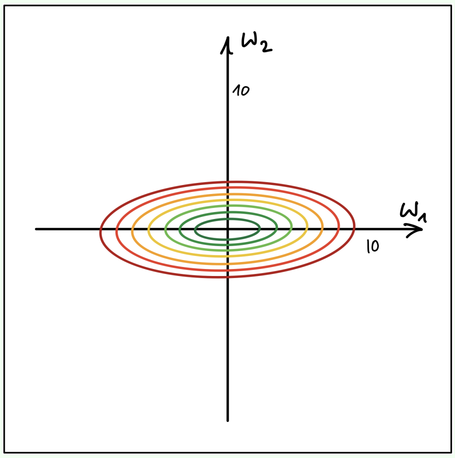
- Selbsttest Lineare Regression (ILIAS)

Challenges

Skalierung der Merkmale

Abbildung 1 und Abbildung 2 zeigen die Höhenlinien (Contour Lines) von zwei Kostenfunktionen.





- Erklären Sie, welcher der beiden Fälle nachteilhaft für den Gradientenabstieg Algorithmus ist. Wo liegt der Nachteil? Wie kann die Merkmalskalierung dem genannten Nachteil entgegenwirken?
- Zeigen Sie unter Verwendung Ihrer eigenen, zufällig generierten Datenpunkte aus dem Bereich $[100, 300] \times [0, 2]$, wie sich Standardisierung, Min-Max Skalierung und Normalisierung auf die Daten auswirken. Vergleichen Sie dazu die jeweiligen Streudiagramme (scatterplots). Sie können hierzu das folgende **Jupyter Notebook** als Startpunkt benutzen.

> **Last modified:** f7ac9d2 (reformat using shorter lines, 2025-08-09)