Organización de la Presentación

Organización de la Presentación

Sistemas Continuos y Ecuaciones Diferenciales

- Llamaremos Sistemas Continuos a los sistemas cuyas variables evolucionan continuamente en el tiempo.
- Los sistemas continuos se describen típicamente mediante ecuaciones diferenciales, ya sea ordinarias o en derivadas parciales.

Veremos a continuación algunos ejemplos de sistemas continuos correspondientes a distintos dominios de aplicación.

Organización de la Presentación

Evolución de la concentración de una droga en el estómago

El modelo más simple de la evolución de la concentración de un fármaco en el estómago supone que la cantidad de droga que se absorve por unidad de tiempo es proporcional a la concentración de la misma [1].

Llamando $c_e(t)$ a la concentración de la droga en el estómago en el instante t, se cumplirá la ecuación:

$$\frac{\mathrm{d}c_e(t)}{\mathrm{d}t} = -r_a \cdot c_e(t) \tag{1.1}$$

- Es una Ecuación Diferencial Ordinaria (ODE) de primer orden.
- La variable $c_e(t)$ se denomina variable de estado.
- Se trata de un modelo lineal y estacionario.

Evolución de la concentración de una droga en el estómago

En general, utilizaremos la notación $\dot{x}$ para referirnos a la derivada temporal $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$. Es decir, reescribiremos la Ec.(1.1) como:

$$\dot{c}_e(t) = -r_a \cdot c_e(t) \tag{1.2}$$

Velocidad de una masa puntual en el aire.

El esquema de la Fig.1.1 muestra el diagrama de fuerzas que actúan sobre una masa puntual bajo la acción de la gravedad y el rozamiento con el aire.

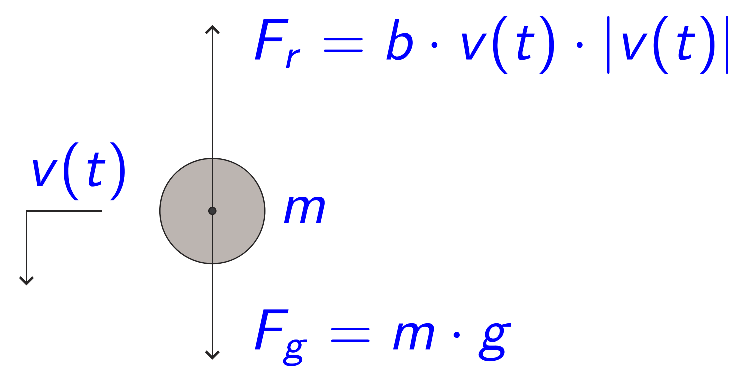

Figura 1.1: Sistema mecánico elemental.

Aplicando la segunda ley de Newton, se llega a la ecuación:

$$\dot{v}(t) = g - \frac{b}{m} v(t)|v(t)| \tag{1.3}$$

que corresponde a un sistema de primer orden cuya variable de estado es $v(t)$, no lineal y estacionario.

Sistema hidráulico. I

La Figura 1.2 representa un tanque de agua

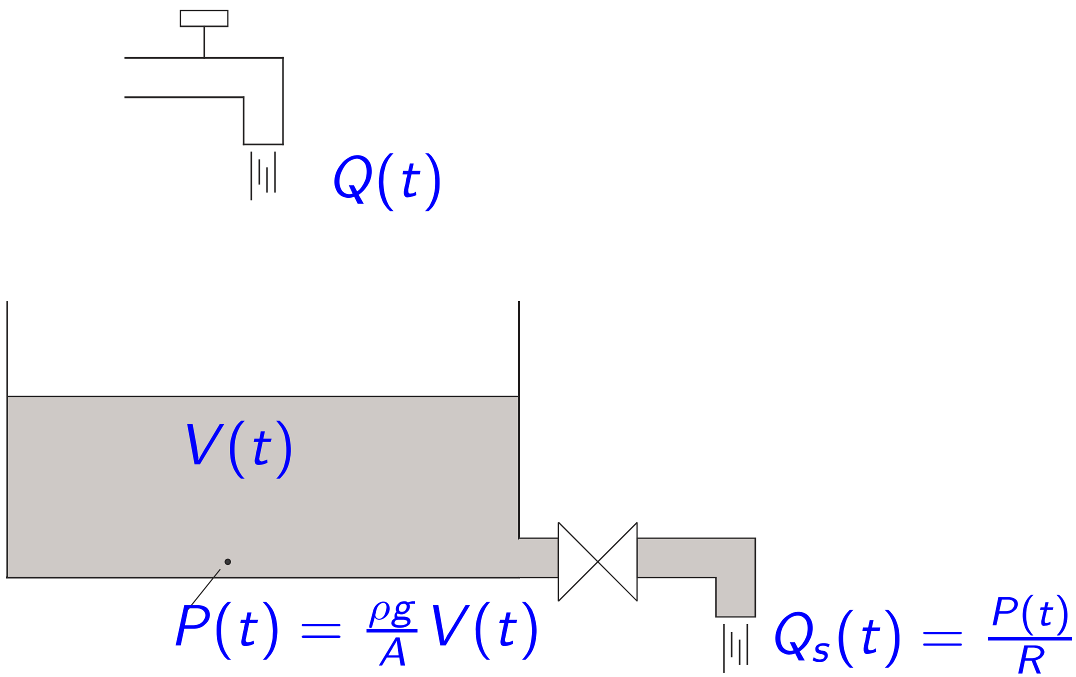

Figura 1.2: Sistema hidráulico elemental.

- El caudal de líquido que ingresa es $Q(t)$.
- El líquido acumulado en el tanque tiene un volumen $V(t)$.
- La presión en el fondo del tanque es $P(t)$.
- Hay una estricción que consideramos lineal.

Un modelo simple de este sistema está dado por:

$$\dot{V}(t) = -\frac{\rho \cdot g}{A \cdot R} V(t) + Q(t) \tag{1.4}$$

Sistema hidráulico. II

- Este sistema es de primer orden
- La variable de estado es el volumen $V(t)$.
- El sistema es lineal y estacionario.
- Además, el sistema tiene una señal de entrada $Q(t)$.

En este ejemplo podemos agregar las ecuaciones de salida:

$$P(t) = \frac{\rho \cdot g}{A} V(t)$$
$$Q_s(t) = \frac{\rho \cdot g}{A \cdot R} V(t)$$

que calculan la presión en el fondo del tanque y el caudal de salida.

Una observación muy importante es que el modelo dado por la ecuación (1.4) sólo es válido cuando $V(t) > 0$.

Evolución de la concentración de una droga entre el estómago y la sangre.

El Ejemplo de la Ec.(1.2) puede completarse considerando ahora que la droga que se absorve del estómago pasa a la sangre, y que la cantidad de fármaco en la sangre se elimina también con una velocidad proporcional a su concentración.

Ahora necesitamos una nueva variable de estados que tenga en cuenta la concentración de fármaco en la sangre $c_s(t)$, con lo que el modelo resulta

$$\begin{aligned} \dot{c}_e(t) &= -r_a \cdot c_e(t) \\ \dot{c}_s(t) &= r_a \cdot c_e(t) - r_e \cdot c_s(t) \end{aligned} \tag{1.5}$$

Este sistema es lineal, de segundo orden (hay dos variables de estado), estacionario y autónomo (no hay entradas).

Sistema masa resorte. I

La Figura 1.3 muestra un sistema *masa–resorte*, donde se considera además la presencia de fricción lineal y de una fuerza externa $F(t)$.

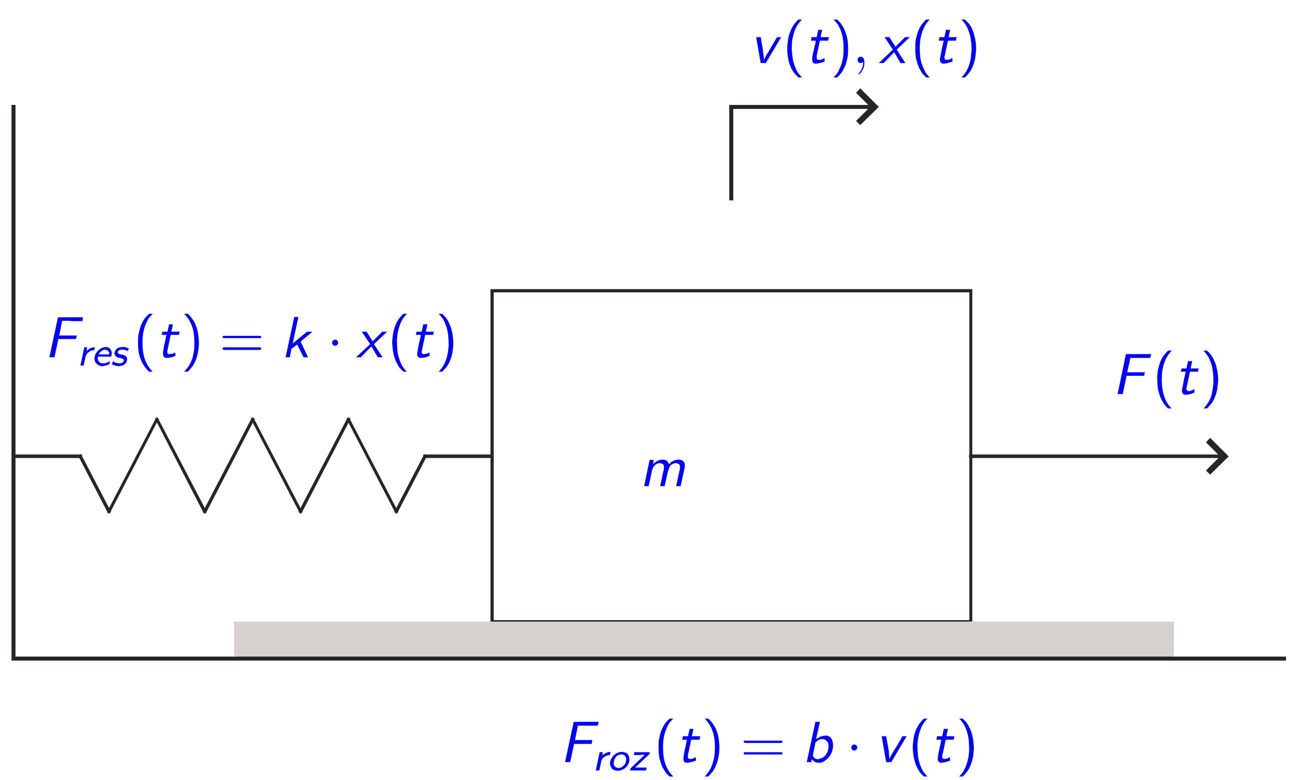

Figura 1.3: Sistema masa–resorte.

Sistema masa resorte. II

Un modelo de la evolución de la posición $x(t)$ en este sistema está dado por

$$m \cdot \ddot{x}(t) + b \cdot \dot{x}(t) + k \cdot x(t) = F(t) \tag{1.6}$$

- Aunque hay sólo una variable ($x(t)$), debido a la presencia de la derivada segunda, el sistema es de segundo orden.
- Podemos pasar a la forma de ecuaciones de estado utilizando como variables de estado a $x(t)$ y a $v(t) = \dot{x}(t)$, resultando el sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= v(t) \\ \dot{v}(t) &= -\frac{k}{m}x(t) - \frac{b}{m}v(t) + \frac{1}{m}F(t) \end{aligned} \tag{1.7}$$

que es claramente un sistema lineal y estacionario, de segundo orden, con una entrada $F(t)$.

Sistema masa resorte. III

Los sistemas expresados como una ecuación diferencial con derivadas hasta orden n, tales como la Ecuación (1.6), pueden siempre reducirse a n sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden. Para esto basta con utilizar como variables de estado la variable de la ecuación diferencial original y sus $n-1$ derivadas.

En el curso vamos a trabajar casi exclusivamente con sistemas representados mediante ecuaciones de estado, es decir, n sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden.

Modelo de Lotka–Volterra

Uno de los modelos más simple y difundidos de la dinámica de poblaciones es el de Lotka–Volterra [2], desarrollado en la década de 1920 para describir la evolución de dos especies: presa y depredador:

$$\begin{aligned} \dot{p}(t) &= r \cdot p(t) - a \cdot p(t) \cdot d(t) \\ \dot{d}(t) &= b \cdot p(t) \cdot d(t) - m \cdot d(t) \end{aligned} \tag{1.8}$$

- $p(t)$ y $d(t)$ representan el número de presas y depredadores respectivamente.
- Los coeficientes r, a, b, m expresan tasas de crecimiento, depredación, y mortalidad.

Como puede verse, se trata de un sistema no lineal de segundo orden.

Circuito Eléctrico. I

El circuito eléctrico de la Fig. 1.4 consiste en una fuente de tensión $U(t)$, dos resistencias (R_1 y R_2), una inductancia L y un capacitor C.

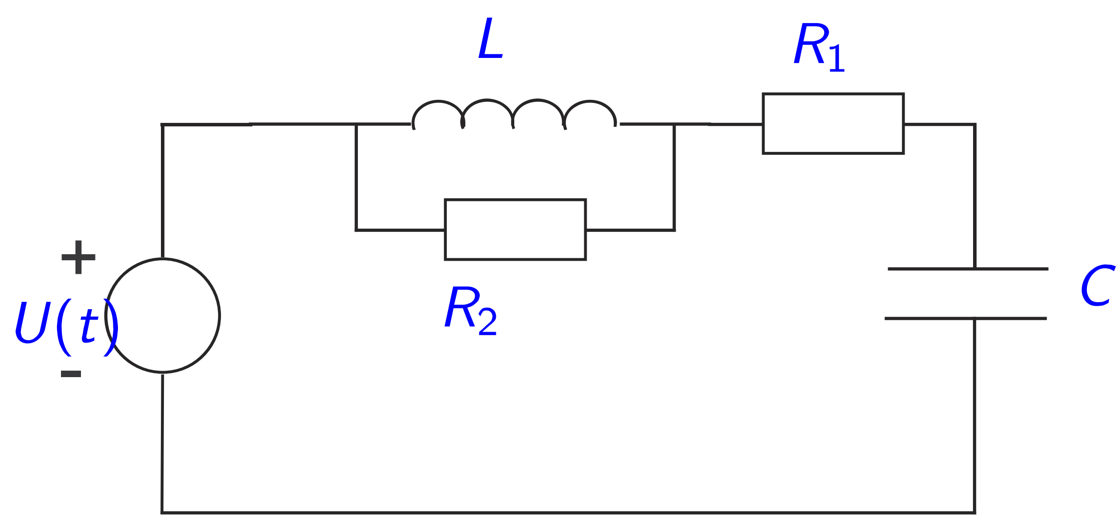

Figura 1.4: Circuito eléctrico simple.

Las ecuaciones que rigen la dinámica de dicho circuito son las siguientes:

$$\begin{aligned} \dot{u}_C(t) &= \frac{1}{C} i_L(t) + \frac{1}{R_2 C} u_L(t) \\ \dot{i}_L(t) &= \frac{1}{L} u_L(t) \end{aligned} \qquad (1.9)$$

Circuito Eléctrico. II

- las variables de estado $u_C(t)$ e $i_L(t)$ representan la tensión en el capacitor y la corriente en la inductancia.
- Además, aparece una variable $u_L(t)$ (tensión en la inductancia) que debe cumplir:

$$U(t) - R_1 i_L(t) - u_C(t) - (1 + \frac{R_1}{R_2})u_L(t) = 0 \tag{1.10}$$

El sistema total, formado por las ecuaciones (1.9)–(1.10), es una Ecuación Diferencial Algebraica (DAE).

El sistema es lineal, de segundo orden, y en este caso puede transformarse en una ODE despejando $u_L(t)$ de (1.10) y reemplazando en (1.9).

Sin embargo, si la característica de alguna de las resistencias fuera no lineal, esto sería en general imposible.

Organización de la Presentación

Modelado

- Recordemos que cuando hablamos de modelado nos referimos a la obtención de modelos matemáticos tales como los expresados por las Ecuaciones (1.2)–(1.10), a partir de descripciones similares a las de los ejemplos tratados.
- El Modelado de un sistema, salvo casos muy simples como los vistos, implica generalmente el uso de técnicas y herramientas específicas para los distintos dominios y aplicaciones.

A lo largo del curso, abarcaremos algunas de las distintas técnicas y herramientas de modelado que se utilizan principalmente en el modelado de sistemas continuos de parámetros concentrados.

Simulación de Sistemas Continuos

- Recordemos que cuando nos referimos a simulación, hablamos en general de un experimento que se realiza sobre un modelo.
- En el caso de los sistemas continuos, dado que las variables evolucionan continuamente en el tiempo, hacer una simulación equivale a obtener datos sobre las trayectorias que describen dichas variables.
- Más precisamente, lo que buscaremos obtener a través de las simulaciones son soluciones de las ecuaciones diferenciales que describen los sistemas a partir de condiciones iniciales conocidas.

En otras palabras, lo que haremos será resolver Problemas de Valor Inicial.

Problemas de Valor Inicial

- Uno de los objetivos del curso es el de estudiar métodos numéricos que permitan resolver de manera aproximada sistemas de ODEs.
- Sin embargo, en algunos casos las ODEs pueden resolverse de manera analítica.
- Por ejemplo, La Ec.(1.2) tiene solución:

$$c_s(t) = e^{-r_a \cdot t} c_s(0) \tag{1.11}$$

donde $c_s(0)$ es la condición inicial (cantidad de fármaco que hay originalmente en el estómago).

- La Ec.(1.4) tiene solución analítica

$$V(t) = e^{\lambda \cdot t} V(0) + \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} Q(\tau) d\tau \tag{1.12}$$

donde $\lambda \triangleq -\frac{\rho \cdot g}{A \cdot R}$. En este caso, $V(0)$ representa el volumen inicial de líquido en el tanque.

Veremos que en los sistemas lineales y estacionarios es relativamente facil encontrar la solución analítica.

Problemas de Valor Inicial

- Uno de los objetivos del curso es el de estudiar métodos numéricos que permitan resolver de manera aproximada sistemas de ODEs.
- Sin embargo, en algunos casos las ODEs pueden resolverse de manera analítica.
- Por ejemplo, La Ec.(1.2) tiene solución:

$$c_s(t) = e^{-r_a \cdot t} c_s(0) \tag{1.11}$$

donde $c_s(0)$ es la condición inicial (cantidad de fármaco que hay originalmente en el estómago).

- La Ec.(1.4) tiene solución analítica

$$V(t) = e^{\lambda \cdot t} V(0) + \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} Q(\tau) d\tau \tag{1.12}$$

donde $\lambda \triangleq -\frac{\rho \cdot g}{A \cdot R}$. En este caso, $V(0)$ representa el volumen inicial de líquido en el tanque.

Sin embargo, esto no es en general posible en los sistemas no lineales.

Organización de la Presentación

Ecuaciones de Estado

Hasta aquí, los ejemplos vistos los escribimos en la forma de Ecuaciones de Estado, que en el caso general de orden n resultan:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= f_1(x_1(t), \ldots, x_n(t), u_1(t), \ldots, u_m(t), t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(t) &= f_n(x_1(t), \ldots, x_n(t), u_1(t), \ldots, u_m(t), t) \end{aligned} \tag{1.13}$$

donde $x_1, \ldots, x_n$ son las variables de estado y $u_1, \ldots, u_m$ son las variables de entrada.

La Ec.(1.13) puede reescribirse utilizando notación vectorial:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \tag{1.14}$$

donde $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados y $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 & \ldots & u_m \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^m$ es el vector de entradas.

Ecuaciones de Salida

Cuando interesan algunas variables del sistema en particular (no necesariamente variables de estado), tal como en el caso del ejemplo del tanque, suelen completarse los modelos con Ecuaciones de Salida de la forma:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= g_1(x_1(t), \ldots, x_n(t), u_1(t), \ldots, u_m(t), t) \\ &\vdots \\ y_p(t) &= g_p(x_1(t), \ldots, x_n(t), u_1(t), \ldots, u_m(t), t) \end{aligned} \tag{1.15}$$

donde $y_1, \ldots, y_p$ son denominadas variables de salida. Las ecuaciones de salida también pueden escribirse en forma vectorial:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \tag{1.16}$$

Organización de la Presentación

Sistemas Lineales y Estacionarios

Un caso particular de la Ecuación de Estados (1.14) se da cuando el lado derecho es lineal en los estados y entradas y no hay dependencia explícita del tiempo. En tales casos, la Ec.(1.14) toma la forma:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(t) \tag{1.17}$$

donde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ son las matrices de evolución y de entrada respectivamente.

Para comenzar, trataremos de manera particular el caso autónomo, es decir,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) \tag{1.18}$$

ya que las principales propiedades de las soluciones se analizan en base a este caso.

Organización de la Presentación

Solución de las Ecuaciones de Estado I

A continuación resolveremos la ecuación (1.18) a partir de una condición inicial genérica $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$.

Para esto, comenzaremos haciendo un cambio de variables a través de una transformación lineal:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{V} \cdot \mathbf{z}(t) \tag{1.19}$$

donde $\mathbf{V}$ es una matriz invertible. Reemplazando en (1.18) y operando obtenemos el sistema:

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{A} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{z}(t) = \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{z}(t) \tag{1.20}$$

con la condición inicial $\mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0 = \mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{x}_0$.

Solución de las Ecuaciones de Estado II

Cuando todos los autovalores de la matriz $\mathbf{A}$ son distintos, es siempre posible elegir $\mathbf{V}$ tal que la matriz $\mathbf{\Lambda}$ sea diagonal. En ese caso, la matrices $\mathbf{\Lambda}$ (matriz de autovalores) y $\mathbf{V}$ (matriz de autovectores) toman la forma

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 & \mathbf{V}_2 & \dots & \mathbf{V}_n \end{bmatrix} \tag{1.21}$$

donde los λ_i son los autovalores y los $\mathbf{V}_i$ los correspondientes autovectores.

Recordemos que los autovalores son soluciones de la ecuación característica

$$\det(\lambda \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0 \tag{1.22}$$

Solución de las Ecuaciones de Estado III

y los autovectores satisfacen

$$\lambda_i \cdot \mathbf{V}_i = \mathbf{A} \cdot \mathbf{V}_i \tag{1.23}$$

Teniendo en cuenta la Ec.(1.21), el sistema (1.20) puede reescribirse como

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) &= \lambda_1 \cdot z_1(t) \\ &\vdots \\ \dot{z}_n(t) &= \lambda_n \cdot z_n(t) \end{aligned} \tag{1.24}$$

lo que consiste en un sistema de n ecuaciones diferenciales de primer orden desacopladas, y que puede resolverse de manera trivial. La solución es

$$\begin{aligned} z_1(t) &= e^{\lambda_1 \cdot t} \cdot z_1(0) \\ &\vdots \\ z_n(t) &= e^{\lambda_n \cdot t} \cdot z_n(0) \end{aligned} \tag{1.25}$$

Solución de las Ecuaciones de Estado IV

Utilizando notación matricial, podemos reescribir la solución

$$\mathbf{z}(t) = e^{\mathbf{\Lambda}\cdot t} \cdot \mathbf{z}(0) \tag{1.26}$$

donde definimos

$$e^{\mathbf{\Lambda}\cdot t} \triangleq \begin{bmatrix} e^{\lambda_1\cdot t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2\cdot t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n\cdot t} \end{bmatrix} \tag{1.27}$$

Finalmente, utilizando la Ecuación (1.19) en la Ec.(1.26), y recordando que $\mathbf{z}(0) = \mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{x}(0)$, podemos obtener la solución de la Ec.(1.18):

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{V} \cdot e^{\mathbf{\Lambda}\cdot t} \cdot \mathbf{V}^{-1}\mathbf{x}(0) = e^{\mathbf{A}\cdot t} \cdot \mathbf{x}(0) \tag{1.28}$$

donde definimos

$$e^{\mathbf{A}\cdot t} \triangleq \mathbf{V} \cdot e^{\mathbf{\Lambda}\cdot t} \cdot \mathbf{V}^{-1} \tag{1.29}$$

Solución de las Ecuaciones de Estado V

- La matriz $e^{\mathbf{A}\cdot t}$ se denomina matriz de transición, y permite calcular la solución de (1.18) en un instante cualquiera.
- Esta denominación se debe a que si conocemos el valor del estado $\mathbf{x}(t_1)$ en un instante cualquiera t_1, al premultiplicar dicho estado por la matriz de transición $e^{\mathbf{A}\cdot t}$ obtenemos el valor del estado en el instante $t + t_1$.

En presencia de señales de entrada habíamos visto que un sistema lineal y estacionario tomaba la forma de la Ec.(1.17). En tal caso, la solución puede escribirse como

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}\cdot t}\cdot\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}\cdot(t-\tau)}\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{u}(\tau)\mathrm{d}\tau \qquad (1.30)$$

Organización de la Presentación

Propiedades Cualitativas de la Solución I

Las componentes de $\mathbf{x}(t)$ en la Ec.(1.30) verifican:

$$x_i(t) = c_{i,1} \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + \ldots + c_{i,n} \cdot e^{\lambda_n \cdot t} \tag{1.31}$$

donde los coeficientes $c_{i,j}$ dependen de $\mathbf{x}(0)$ y de $\mathbf{V}$.

Independientemente de cuanto valgan estos coeficientes, la forma cualitativa de las soluciones dependerá totalmente de los autovalores y los correspondientes modos dados por las funciones $e^{\lambda_j \cdot t}$.

- Un autovalor real negativo aportará un modo correspondiente a una exponencial convergente.
- Un par de autovalores imaginarios puros (conjugados) aportarán un modo oscilante (senoidal puro).
- Un par de autovalores complejos conjugados con parte real positiva aportarán un modo oscilante modulado por una exponencial divergente.

Propiedades Cualitativas de la Solución II

Una diferenciación fundamental entre los posibles modos de un sistema está dada por la parte real de los autovalores.

Modos Estables

Si $\mathbb{R}\mathrm{e}(\lambda_i) < 0$ resulta $\lim_{t\to\infty} e^{\lambda_i \cdot t} = 0$, es decir, el modo se extingue a medida que avanza el tiempo. Esto es, se trata de un modo estable.

Modos Inestables

En cambio, cuando $\mathbb{R}\mathrm{e}(\lambda_i) > 0$ ocurre que $\lim_{t\to\infty} |e^{\lambda_i \cdot t}| = \infty$, por lo que se trata de un modo *inestable*.

Modos Marginalmente Estables

El caso $\mathbb{R}\mathrm{e}(\lambda_i) = 0$ (suponiendo que no hay autovalores repetidos) corresponde a modos *marginalmente estables*.

Propiedades Cualitativas de la Solución III

Estabilidad de un punto de equilibrio

Para que el punto de equilibrio de un sistema lineal y estacionario sea estable, todos los modos deben ser estables, es decir, todos los autovalores deben tener parte real negativa. Por el contrario, si uno o más autovalores tienen parte real positiva el sistema será inestable.

Es importante remarcar que no hace falta calcular la solución $\mathbf{x}(t)$ para tener información cualitativa sobre la solución, ya que para conocer los modos del sistema y/o la estabilidad es suficiente con calcular los autovalores de la matriz $\mathbf{A}$.

Referencias I

Donald Erdman.
Study of Kinetics: The Estimation and Simulation of Systems of First-Order Differential Equations.
In *SUGI Proceedings*, 1995.

Alexei Sharov.
Quantitative Population Ecology.
On-line Lecture Course. Department of Entomology Virginia Tech, Blacksburg, VA, 1996.
http://www.gypsymoth.ento.vt.edu/~sharov/PopEcol/popecol.html.