Automates - CM8

Clément Agret
clement.agret@cyu.fr

CY Cergy Paris Université

Théorème de Kleene

Theorem (Kleene)

$$REC(\mathcal{A}) = RAT(\mathcal{A}).$$

Preuve (constructive) du théorème

Nous allons montrer :

- $RAT(A) \subseteq REC(A)$:

- $REC(A) \subseteq RAT(A)$:

Conséquences du théorème de Kleene

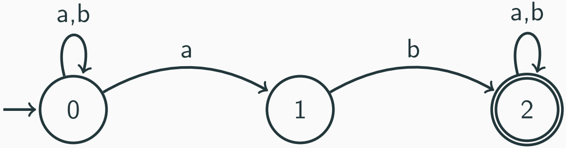
Proposition 1

L'intersection, le complémentaire, le miroir de langages rationnels sont rationnels.

Plan du cours

Minimisation

Exemple introductif

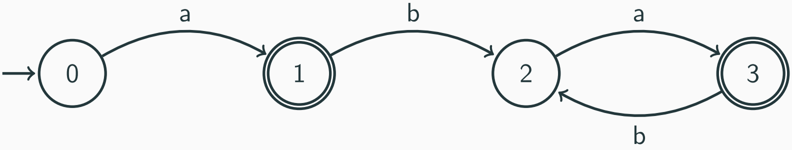


Proposition 2

Pour tout langage rationnel, il existe un unique automate déterministe complet avec un nombre minimal d'états.

Idée

On considère un automate déterministe complet.



Depuis chaque état, un certain langage est reconnu :

Définition 1: Équivalence de Nérode

Deux états p et q sont équivalents si $L_p = L_q$.

Dans l'automate précédent :

Automate minimal

Proposition 3

L'automate quotient obtenu en fusionnant les états équivalents pour l'équivalence de Nérode est l'automate déterministe minimal pour ce langage.

Proposition 4

Soit $\sim$ l'équivalence de Nérode : alors pour tous états q et q',

1. $q \sim q' \implies (q \in F \Leftrightarrow q' \in F)$
2. $q \sim q'$

Calcul de l'équivalence de Nérode

Idée :

- Calculer des équivalences $\sim_0, \sim_1, \ldots$ de plus en plus précises.

- $\sim_0$:

- $q \sim_{n+1} q' \Leftrightarrow$

Résultat

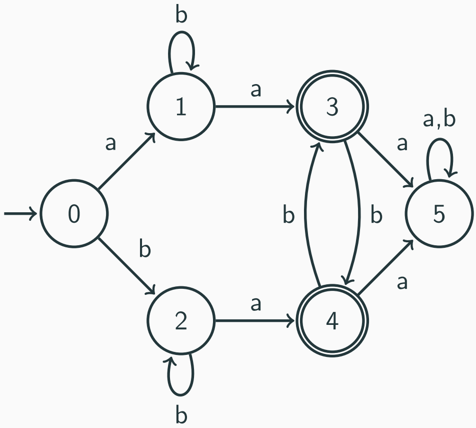
Proposition 5

Au bout d'un certain rang n, $\sim_n = \sim_{n+1}$.

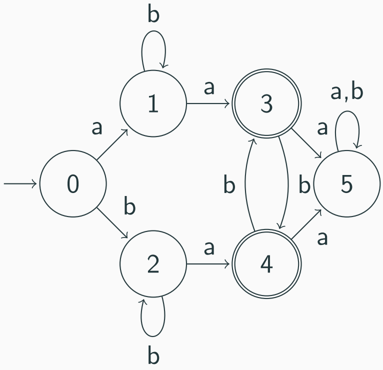
Alors $\sim_n$ est l'équivalence de Nérode.

Résumé

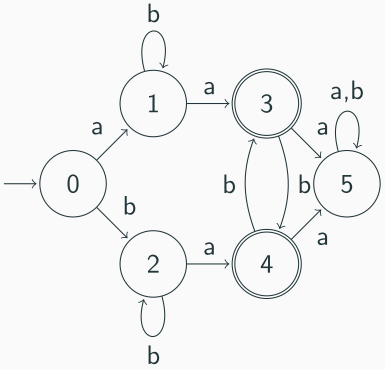
Exemple 1



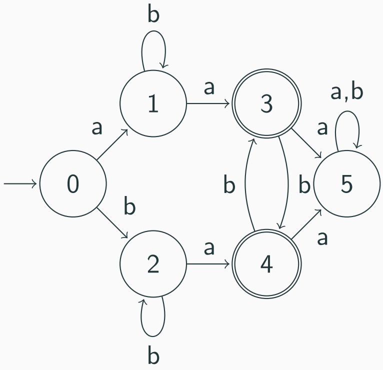
Exemple 1 (2)



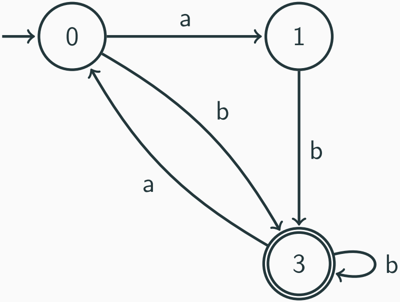
Exemple 1 (3)



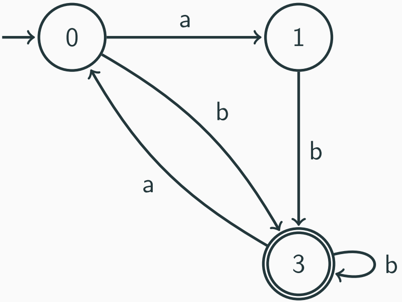
Exemple 1 (4)



Exemple 2 : automate qui n'est pas complet



Exemple 2 : automate qui n'est pas complet (2)



Application :

L'automate minimal est unique!

Proposition 6

Deux automates, ou expressions rationnelles, sont équivalentes si on obtient le même automate minimal à partir d'elles.

Exemple : est-ce que $a(ba)* = (ab)^*a$?