Feuille de TD n^o 5 : Minimisation

Correction

Exercice 1 : Minimisation d'un automate

Pour chacun des automates suivants :

1. Calculer l'équivalence de Nérode.
2. En déduire l'automate minimal équivalent.

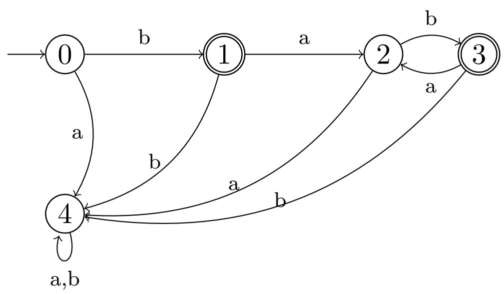


FIGURE 1 – Automate $\mathcal{A}_1$

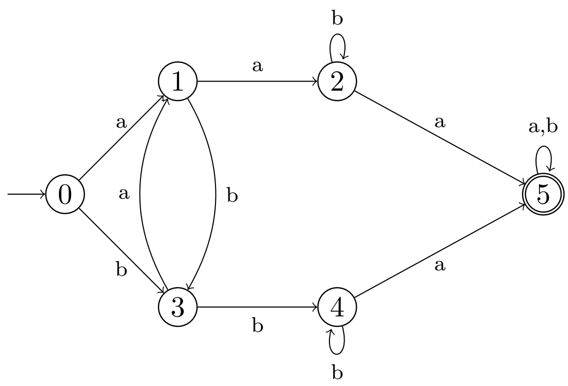


FIGURE 2 – Automate $\mathcal{A}_2$

Automate $\mathcal{A}_1$:

— Equivalence 0 : on commence toujours avec deux classes, celle des états finaux et celle des états non finaux.

$$A = \{0, 2, 4\} \qquad \text{et} \qquad B = \{1, 3\}.$$

On a :

	a	b
A	A	$A, B!$
B	A	A

Il faut donc séparer la classe A en :

$$\{0, 2\} \xrightarrow{b} B$$

et

$$\{4\} \xrightarrow{b} A.$$

On obtient donc :

— Equivalence 1 :

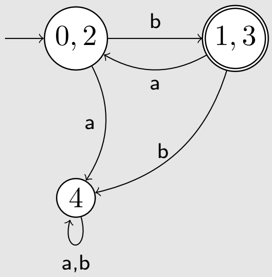
$$A = \{0, 2\} \qquad B = \{1, 3\}, \qquad C = \{4\}.$$

on refait le tableau (il n'est pas nécessaire de regarder d'où on va de C qui contient un seul état et ne peut donc pas être séparé en 2).

	a	b
A	C	B
B	A	$C.$

Il n'y a donc plus de classes d'équivalence à séparer : nous avons trouvé l'équivalence de Nérode.

L'automate déterministe minimal est donc obtenu en fusionnant 0 et 2, 1 et 3 :



Automate $\mathcal{A}_2$:

— Equivalence 0 :

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4\} \text{ le groupe des états non finaux et } B = \{5\} \text{ l'état final.}$$

On fait le tableau des transitions :

	a	b
A	A, B	B
B	B	$B.$

Il faut donc séparer A en :

$$\{0, 1, 3\} \xrightarrow{a} A$$

et

$$\{3, 4\} \xrightarrow{a} B.$$

On obtient donc :

— Equivalence 1 :

$$A = \{0, 1, 3\}, B = \{2, 4\}, C = \{5\}.$$

On fait le tableau (pour les groupes A et B ; C ne peut pas être "plus" séparé).

	a	b
A	A, B	A, B
B	C	$B.$

On a là une nouveauté : A doit être séparé *pour deux raisons* : le comportement est différent *en lisant a, et en lisant b* ! On peut alors avoir jusqu'à 4 comportements :

- les états où en lisant a on va en A, en lisant b on va en A.
- les états où en lisant a on va en A, en lisant b on va en B.
- les états où en lisant a on va en B, en lisant b on va en A.
- les états où en lisant a on va en B, en lisant b on va en B.

Ici, on peut séparer A en :

$$\{0\} \xrightarrow{a} A, \xrightarrow{b} A,$$

$$\{3\} \xrightarrow{a} A, \xrightarrow{b} B,$$

et

$$\{1\} \xrightarrow{a} B, \xrightarrow{b} A.$$

On obtient donc l'équivalence

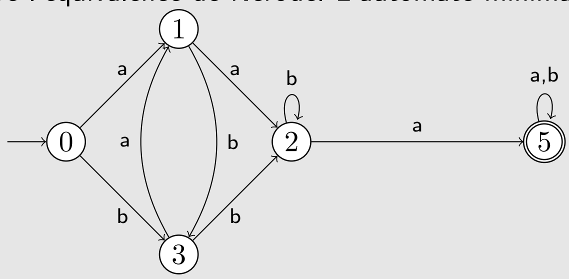
- Equivalence 2 :

$$A = \{0\}, B = \{1\}, C = \{3\}, D = \{2, 4\}, E = \{5\}.$$

On vérifie, avec le tableau des transitions, si D doit être séparé :

	a	b
D	E	D.

Nous avons donc trouvé l'équivalence de Nérode. L'automate minimal s'obtient donc en fusionnant 2 et 4,



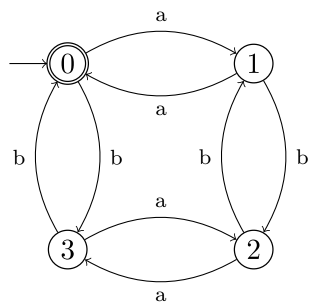


Figure 3 – Automate $\mathcal{A}_3$

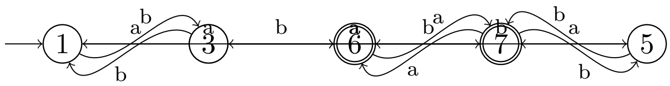
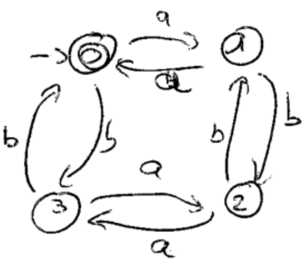


Figure 4 – Automate $\mathcal{A}_4$

Automate 3 :

Automate $\mathcal{A}_3$:



	A	B
$\sim_0$:	$\{1,2,3\}$,	$\{0\}$

Calcul de $\sim_1$:

	a	b
$\{1,2,3\}$	A, B ⊗	A, B ⊗

on

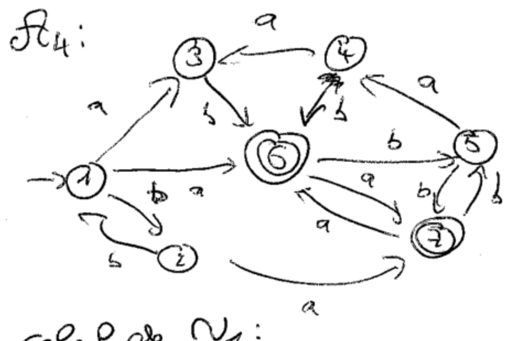
→ On sépare $\{1,2,3\}$ en

$\{1\}$: $\xrightarrow{a} B$, $\xrightarrow{b} A$ | $\{2\}$: $\xrightarrow{a,b} A$ | $\{3\}$ $\xrightarrow{a} A$, $\xrightarrow{b} B$

Donc $\sim_1$: $\{1\}$ $\{2\}$ $\{3\}$ $\{4\}$. L'automat $\mathcal{A}_3$ était donc déjà minimal.

Automate 4 :

$\mathcal{A}_4$:



	A	B
$\sim_0$:	$\{1,2,3,4,5\}$,	$\{6,7\}$

Calcul de $\sim_1$:

	a	b	
$\{1,2,3,4,5\}$	A, B ⊗	A, B ⊗	
$\{6,7\}$	B	A	OK

On sépare $\{1,2,3,4,5\}$ en $\{1,2\}$ $\xrightarrow{a} B$, $\xrightarrow{b} A$ | $\{3,4,5\}$ $\xrightarrow{a} A$, $\xrightarrow{b} B$

Donc $\sim_1 = \underbrace{\{1,2\}}_{A}, \underbrace{\{3,4,5\}}_{B}, \underbrace{\{6,7\}}_{C}$

Calcul de $\sim_2$:

	a	b	
{1,2}	C	A	OK
{3,4,5}	A, B ⊗	C	→ on sépare B en {3} et {4,5}
{6,7}	C	B	OK

$\{3\} \xrightarrow{a} A$, $\{4,5\} \xrightarrow{a} B$

$\sim_2 = \underbrace{\{1,2\}}_{A} \underbrace{\{3\}}_{B} \underbrace{\{4,5\}}_{C} \underbrace{\{6,7\}}_{D}$

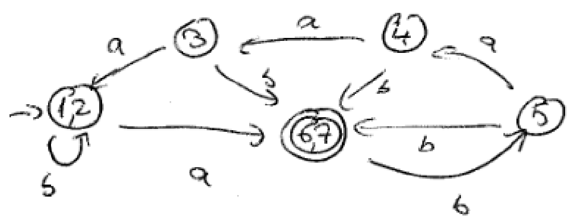
Calcul de $\sim_3$:

	a	b	
{1,2}	D	A	
{6,7}	D	C	
~~{3}~~ {4,5}	B, C ⊗	D	→ on sépare {4} et {5}

On vérifie que

$\sim_3 = \{1,2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6,7\} = \sim_4$

→ Automate minimal :



Exercice 2 : Application : égalité d'expressions rationnelles

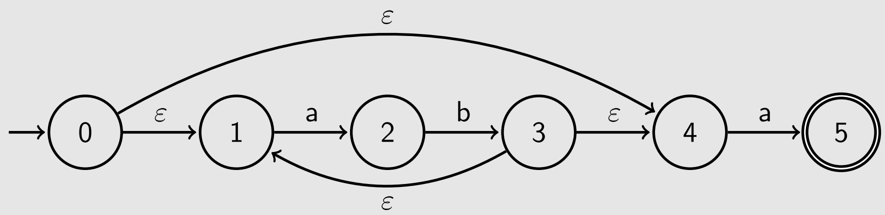
On veut vérifier "automatiquement" que les langages $\mathcal{L}_1 = (ab)^*a$ et $\mathcal{L}_2 = a(ba)^*$ sont égaux.

L'idée dans cet exercice est que pour vérifier si deux expressions sont équivalentes, il faut se ramener à la seule forme où nous savons qu'il y a unicité : l'automate déterministe minimal.

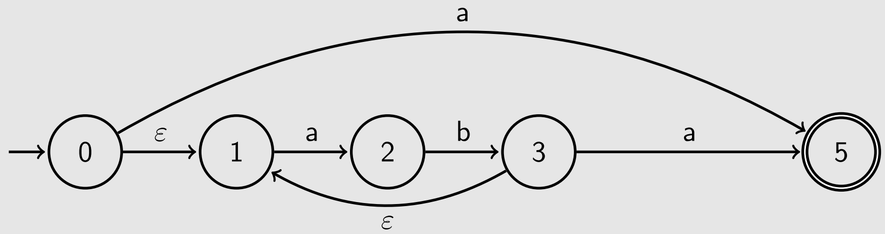
Deux expressions sont équivalentes si et seulement si elles donnent le même automate déterministe minimal (au nom des états près).

1. Construire des automates déterministes complets pour $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$. On pourra construire les automates de thompson, les synchroniser, les déterminiser et les compléter.
2. Minimiser les automates obtenus.
3. Conclure.
4. Montrer similairement que les langages $\mathcal{L}_3 = (a^*ba^*)^*$ et $\mathcal{L}_4 = (a+b)^*$ sont différents

Commençons avec $\mathcal{L}_1 = (ab)^*a$.
L'automate de Thompson est :

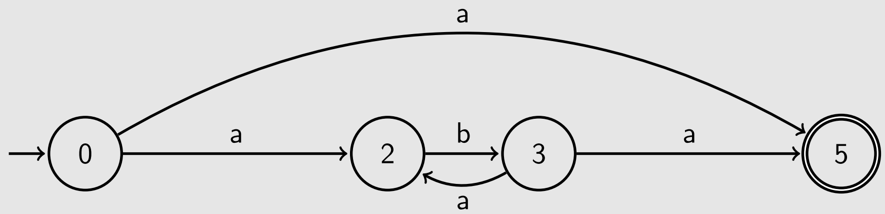


On supprime les ε-transitions qui rentrent dans 4 : à la place, on va directement en 5 en lisant a. On peut donc supprimer l'état 4 et on obtient

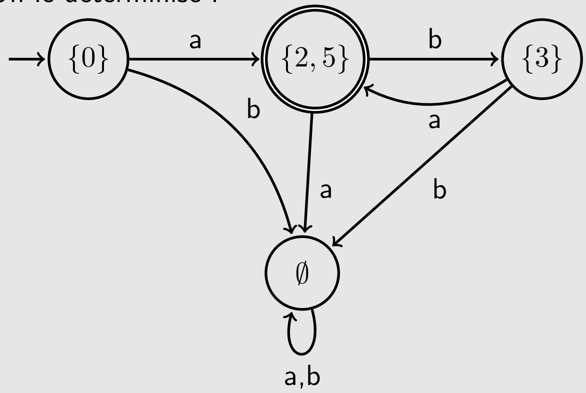


De même, on supprime les ε-transitions qui rentrent dans 1 et on supprime cet état 1 : à la place, on va directement en 2 en lisant a.

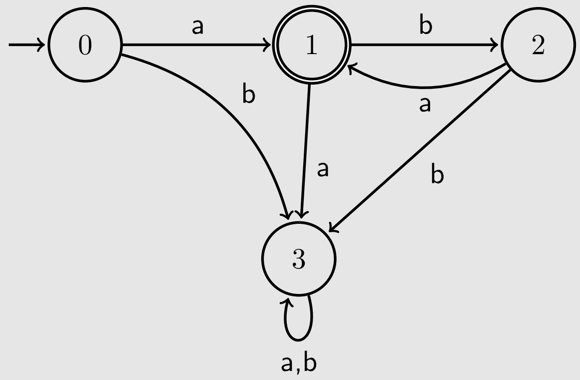
On obtient l'autmate synchronisé suivant :



On le déterminise :



Avant de pouvoir minimiser l'automate, on renomme ses états pour plus de clarté :



Calcul de l'équivalence de Nérode :

0. Equivalence 0 :

$$A = \{0, 2, 3\} \text{ les états non finaux, et } B = \{1\} \text{ la classe des états finaux.}$$

On a :

	a	b
A	$A, B!$	A
B	A	A

Il faut donc séparer la classe A en :

$$\{0, 2\} \xrightarrow{a} B$$

et

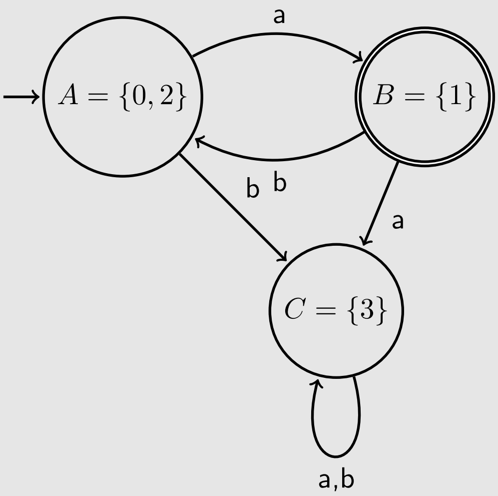
$$\{3\} \xrightarrow{a} A.$$

1. Equivalence 1 :

$$A = \{0, 2\},\ B = \{1\} \text{ et } C = \{3\}.$$

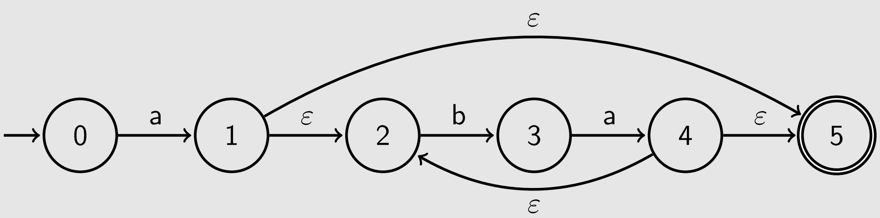
	a	b
A	B	C
B	C	A
C	C	C

On a trouvé l'équivalence de Nérode, et on peut tracer le graphe déterministe complet du langage :

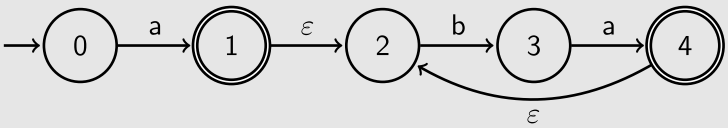


On fait maintenant pareil avec le langage $\mathcal{L}_2 = a(ba)^*$.

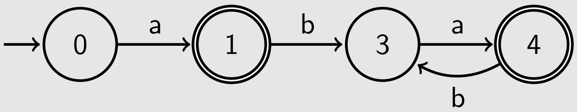
Automate de Thompson :



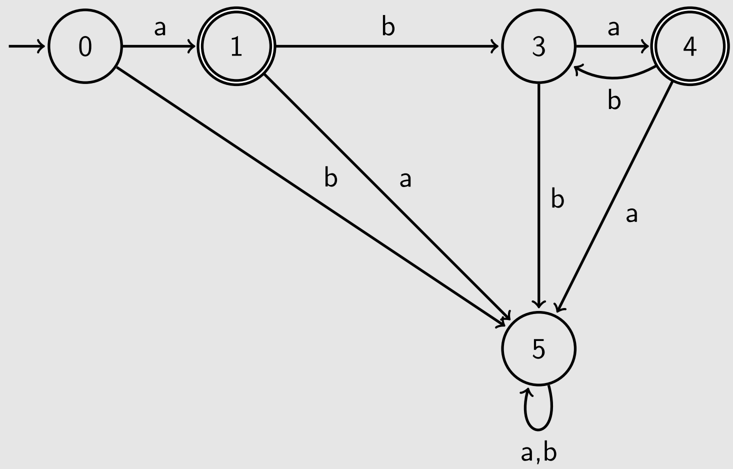
On synchronise : on supprime les transitions vers 5 (et on supprime l'état 5), 1 et 4 deviennent finaux :



On supprime les ε-transitions vers 2 : à la place, de 1 et 4 on va directement à 3 en lisant b.



L'automate est déjà déterministe, mais on le complète en ajoutant un état puits (que l'on appelle 5).



Calcul de l'équivalence de Nérode :

— Equivalence 0 :

$$A = \{0, 3, 5\}, B = \{1, 4\}$$

On a le tableau des transitions suivant :

	a	b
A	B, A	A
B	A	$A.$

On sépare A en :

$$\{0, 3\} \xrightarrow{a} B, \text{ et } \{5\} \xrightarrow{a} A.$$

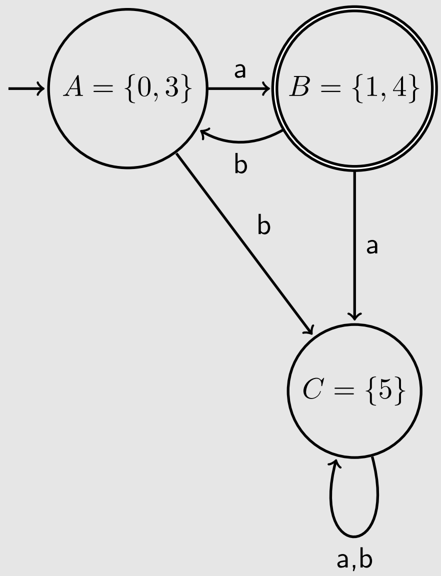
— Equivalence 1 :

$$A = \{0, 3\}, B = \{1, 4\}, C = \{5\}.$$

Cette fois-ci, rien à séparer :

	a	b
A	B	C
B	C	$A.$

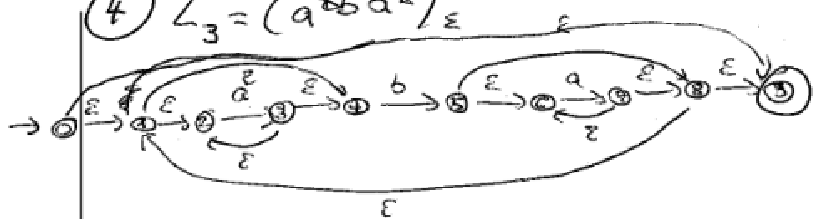
Il n'y a plus de séparations à effectuer, on peut donc fusionner 0 et 3, 1 et 4. On obtient l'automate minimal suivant :



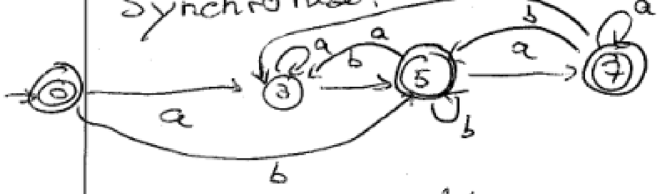
On remarque que cet automate est le même que l'automate déterministe complet minimal obtenu pour le langage $(ab)^*a$: les deux expressions sont donc équivalentes ! !

Question 4 :

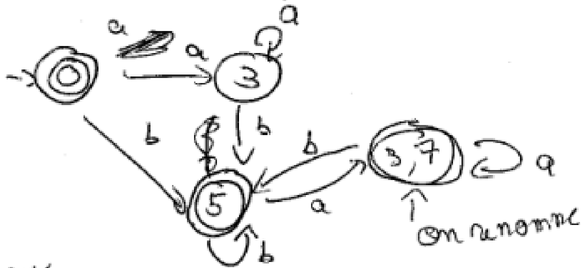
4) $L_3 = (a^* b a^*)^*_{\varepsilon}$



Synchronisé :



Déterminisé complété :



on renomme en 7 pour la minimisation

~~Dét~~ Minimisation :

$\sim_0 = \underbrace{\{0,5,7\}}_{A}, \underbrace{\{3\}}_{B}$

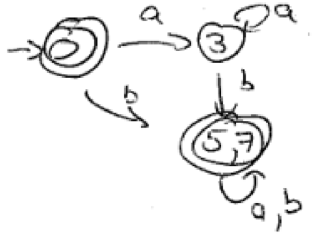
Calcul de $\sim_1$:

	a	b
$\{0,5,7\}$	A,B ⊗	A

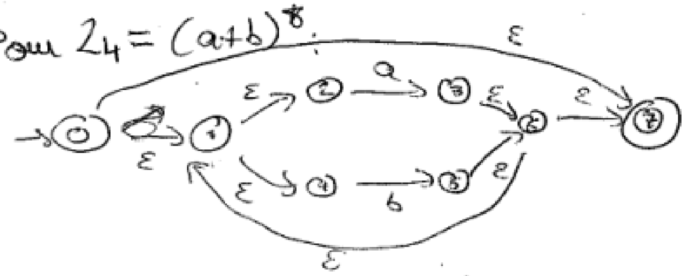
⊗ : on sépare $\{0\} \xrightarrow{a} B$ et $\{5,7\} \xrightarrow{a} A$

$\sim_1 = \{0\},\{5,7\},\{3\}$.

on vérifie que $\sim_2 = \sim_1$ est l'équivalence de Nérode :



Pour $L_4 = (a+b)^*$:



Devient après synchronisation

déjà déterministe complet.

minimisation:

$\sim_0 = \{0,3,5\} = \sim_1$, donc

Automate minimal:

(on pouvait deviner cet automate)

Les automates minimaux de L_3 et L_4 sont différents.
Par unicité de l'automate minimal, $L_3 \neq L_4$.