Feuille de TD n° 1

A désigne un alphabet fini. Le mot vide est noté ε.

1 Mots et langages

Exercice 1 : Généralités

1. Compter les occurrences des lettres a et b dans les mots suivants : a^3cbbca, $aabgjdd$, $titi$, $babc$.
2. Donner l'ensemble des couples (u, v) tels que $u \cdot v = abaac$.
3. Un mot u est un *facteur* d'un mot v si u apparaît à l'intérieur de v : v s'écrit $w_1 \cdot u \cdot w_2$ pour certains mots w_1 et w_2. Un mot u est un *sous-mot* d'un mot v si on peut obtenir u à partir de v par 'effacement' de certaines lettres (pas forcément consécutives) de v. Le nombre d'*occurrences* d'un facteur (resp. sous-mot) u dans le mot v est le nombre de façons de voir u comme facteur (resp. sous-mot) de v.

   Donner le nombre d'occurrences du facteur aba dans le mot $v = ababab$. Donner le nombre d'occurrences du sous-mot aba dans le même mot v.

Exercice 2 : Opérations sur les langages

1. Calculer $\mathcal{L} \cdot \mathcal{M}$ pour les ensembles suivants :
   - $\mathcal{L} = \{a, ab, bb\}$ et $\mathcal{M} = \{\varepsilon, b, a^2\}$;
   - $\mathcal{L} = \emptyset$ et $\mathcal{M} = \{a, ba, bb\}$;
   - $\mathcal{L} = \{\varepsilon\}$ et $\mathcal{M} = \{a, ba, bb\}$;
   - $\mathcal{L} = \{aa, ab, ba\}$ et $\mathcal{M} = A^*$.
2. Montrer que le produit est une opération distributive par rapport à l'union, c'est-à-dire que, pour tous langages $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$, on a : $\mathcal{L} \cdot (\mathcal{M} \cup \mathcal{N}) = (\mathcal{L} \cdot \mathcal{M}) \cup (\mathcal{L} \cdot \mathcal{N})$. Montrer que le produit n'est pas distributif par rapport à l'intersection.
3. Parmi les égalités suivantes, lesquelles sont correctes (prouvez ou donnez un contre-exemple) ?
   - $\mathcal{M}^* = \mathcal{M}^* \cdot \mathcal{M}^*$
   - $\mathcal{M}^* = (\mathcal{M} \cdot \mathcal{M})^*$
   - $\mathcal{M}^* = \mathcal{M} \cdot \mathcal{M}^*$
   - $\mathcal{M}^* = (\mathcal{M}^*)^*$
   - $\mathcal{M} \cdot (\mathcal{N} \cdot \mathcal{M})^* = (\mathcal{M} \cdot \mathcal{N})^* \cdot \mathcal{M}$
   - $(\mathcal{M} \cup \mathcal{N})^* = \mathcal{M}^* \cup \mathcal{N}^*$
   - $(\mathcal{M} \cap \mathcal{N})^* = \mathcal{M}^* \cap \mathcal{N}^*$
   - $(\mathcal{M} \cup \mathcal{N})^* = (\mathcal{M}^* \cdot \mathcal{N}^*)^*$

- $(\mathcal{M} \cup \mathcal{N})^* = (\mathcal{M}^* \cdot \mathcal{N})^* \cdot \mathcal{M}^*$

Exercice 3 : Commutation (*pour aller plus loin*)

Soient u et v deux mots. On dit que u et v *commutent* si $u \cdot v = v \cdot u$.

Montrer que u et v commutent si et seulement s'il existe un mot w et deux entiers positifs ou nuls m et n tels que $u = w^m$ et $v = w^n$. Pour le sens $\Rightarrow$, on pourra procéder par récurrence sur $|u| + |v|$.

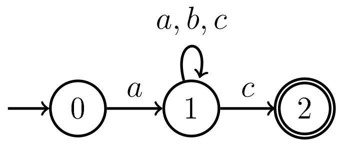
Exercice 4 : Conjugaison (*pour aller plus loin*)

Deux mots u et v sont dits *conjugués* s'il existe deux mots w_1 et w_2 tels que $u = w_1 \cdot w_2$ et $v = w_2 \cdot w_1$. En d'autres termes, v s'obtient à partir de u par permutation cyclique de ses lettres.

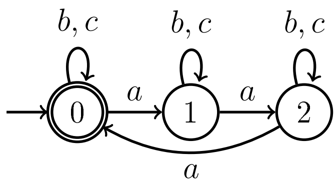
1. Montrer que la conjugaison est une relation d'équivalence, c'est-à-dire :
   — tout mot u est conjugué à lui-même ;
   — si u est conjugué à v, alors v est conjugué à u ;
   — si u est conjugué à v et v est conjugué à w, alors u est conjugué à w.
2. Montrer que u et v sont conjugués si et seulement s'il existe un mot w tel que $u \cdot w = w \cdot v$.

2 Automates

Exercice 5 : Langages reconnus par des automates



(a) Automate $\mathcal{A}_1$



(b) Automate $\mathcal{A}_2$

1. Décrire pour chacun des deux automates les ensembles d'états initiaux et finaux, et l'ensemble des transitions.
2. Les mots *abc*, *abbbc* et *abacabcc* sont-ils reconnus par l'automate $\mathcal{A}_1$? Sont-ils reconnus par l'automate $\mathcal{A}_2$?
3. Décrire les langages reconnus par chacun des automates.

Exercice 6 : Construction d'automates

Montrer que les langages suivants sont reconnaissables en donnant pour chaque langage un automate qui le reconnait :

- $\mathcal{L}_1 = \{u \in A^* :$ toute occurrence de b dans u est immédiatement suivie d'au moins deux occurrences de $a\}$,
- $\mathcal{L}_2 = \{u \in A^* : u$ ne contient pas deux a successifs$\}$,
- $\mathcal{L}_3 = \{u \in A^* :$ le nombre d'occurrences de a dans u est pair$\}$,
- $\mathcal{L}_4$ l'ensemble des mots sur l'alphabet $\{/, \star, a, LF\}$ correspondant à des commentaires en C[1]. Tout commentaire soit :
  — Commence par $//$, finit par un de saut de ligne LF.
  — Commence par $/\star$ et fini par $\star/$. Le commentaire peut contenir des $/$ et des $\star$, mais il ne peut pas contenir le motif $\star/$.
  Exemples :

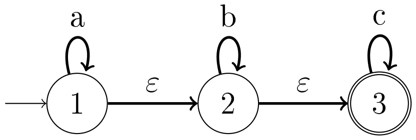
$$/\star\star aaaaa/\star LF\, aaa\star/$$

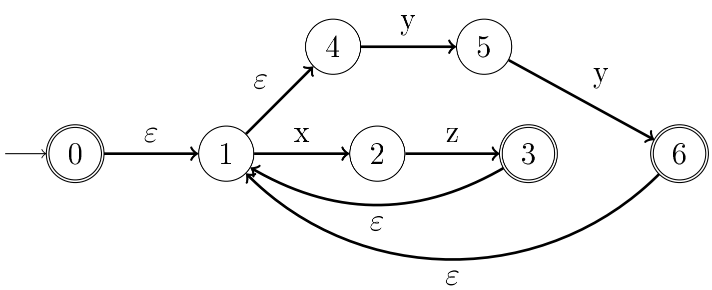
$$//aa/\star\star\ aaa\ \star/\ aaa\ \star/LF$$

- $\mathcal{L}_5 = \{u \in A^* :$ les blocs de a dans u sont alternativement de longueur paire et impaire$\}$.

Exercice 7 : ε-transitions

Éliminer les ε-transitions des automates suivants en appliquant l'algorithme vu en cours. Émonder les automates obtenus.





1. La lettre a représentera tout autre caractère ; LF est un seul caractère : le saut de ligne (Line Feed), de code ASCII 10.