Feuille de TD n° 3

Exercice 1 : Union, intersection, complémentaire ...

Soit $\Sigma = \{a, b\}$, et soient deux langages

$$\mathcal{L}_1 = \{u \in \Sigma^* \ : \ |u| \equiv 0 \mod 3\}$$
$$\text{et } \mathcal{L}_2 = \{u \in \Sigma^* \ : \ u \text{ ne contient pas le facteur } a^2\}.$$

En utilisant les constructions vues en cours, construire des automates reconnaissant les langages suivants :

$$\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \{u \in \Sigma^* \ : \ |u| \equiv 0 \mod 3 \text{ et } u \text{ ne contient pas le facteur } a^2\}$$
$$\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2 = \{u \in \Sigma^* \ : \ |u| \equiv 0 \mod 3 \text{ ou } u \text{ ne contient pas le facteur } a^2\}$$
$$\mathcal{L}_2 \backslash \mathcal{L}_1 = \{u \in \Sigma^* \ : \ |u| \not\equiv 0 \mod 3 \text{ et } u \text{ ne contient pas le facteur } a^2\}$$

ex $u = abaab$ $\bar{u} = baaba$ ok ?

Exercice 2 : Langage Miroir $\bar{u}$ = ?

10 min

Le langage miroir d'un langage $\mathcal{L}$ est le langage $\overline{\mathcal{L}} = \{\overline{u}, \ u \in \mathcal{L}\}$, où $\overline{u} = x_n \dots x_1$ si $u = x_1 \dots x_n$.

1. Décrire un procédé permettant de construire l'automate reconnaissant $\overline{\mathcal{L}}$ connaissant celui de $\mathcal{L}$. processus/process/protocole les étapes.
2. Calculer ainsi le langage miroir du langage $\mathcal{L}$ formé des mots commençant par *baa*

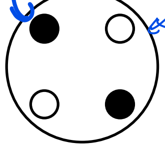
$(a+b)^*aab$.

Exercice 3 : Problème du barman aveugle ***(pour aller plus loin)***

On dispose 4 verres sur un plateau, disposés aux quatre sommets d'un carré. Chaque verre peut être soit à l'endroit, soit à l'envers. Par exemple avec deux verres à l'endroit, deux verres à l'envers, on pourra avoir la configuration :

à l'envers '0' à l'endroit '1'

2 états: '0' et '1'



OK ?

1) 1 ou 2 verres.
2) 1 ou 2 verres ...

On joue au jeu suivant avec un barman aveugle, avec des gants de boxe : il ne peut pas savoir dans quel sens sout les verres.

- A chaque tour, le barman retourne 1 ou 2 verres de son choix.
- Ensuite, on fait tourner le plateau de 0, 1/4, 1/2 ou 3/4 de tours, sans que le barman sache quelle rotation on a fait.

Problème : le barman peut-il arriver à mettre tous les verres dans le même sens (soit tous retournés, soit tous ı ıversé

Nous allons répondre à ce problème à l'aide d'automates.

1. Proposer des états pour modéliser les différentes situations. L'idée est d'avoir *le moins d'état possible* : en particulier, comme le barman ne maîtrise pas quelle rotation a été faite, on définiera les situations *a rotation près*.

close

OK ?

2. Quels sont les différents *coups* que peut jouer le barman ? Encore une fois, on ne définit les coups qu'à une rotation près.

   Complétez l'automate en ajoutant, pour chaque état, la liste de toutes les transitions possibles pour chaque coup.
3. Déterminer l'automate obtenu. En déduire une stratégie gagnante pour le barman aveugle.

Exercice 4 :

Donner des expressions rationnelles décrivant les langages ci-dessous :

— $Ł_1 = \{u \in A^* :$ toute occurrence de b est immédiatement suivie de deux occurrences de $a\}$,

— $Ł_2 = \{u \in A^* : u$ ne contient pas deux a successifs$\}$,

— $Ł_3 = \{u \in A^* :$ le nombre d'occurrences de a dans u est pair$\}$,

— $Ł_4 = \{u \in A^* :$ les blocs de a dans u sont alternativement de longueur paire et impaire$\}$.

Exercice 5 :

On rappelle le lemme de l'étoile :

Lemme de l'étoile

Soit L un langage rationnel. Alors il existe une constante N telle que tout mot w de longueur supérieure à N peut se décomposer en $w = xyz$ tel que

1. $0 < |y|$
2. $|xy| \leqslant N$ [1]
3. $\forall i \in \mathbb{N}$, $xy^iz \in L$.

Parmi les langages suivants, lesquels sont reconnaissables ? Justifier.

Méthode :

- **Pour montrer qu'un langage est reconnaissable**, on peut donner un automate (déterministe ou non) ou une expression rationnelle, puisque c'est équivalent (même si ce n'est pas encore démontré en cours).
- **Pour montrer qu'un langage n'est pas reconnaissable**, on peut montrer qu'il ne vérifie pas le lemme de l'étoile, ou montrer que si on le reconnaissait, on pourrait reconnaitre un langage dont on sait déjà qu'il n'est pas reconnaissable.

1. $\mathcal{L}_1 = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$
2. $\mathcal{L}_2 = \{a^p b^q \mid (p, q) \in \mathbb{N}^2\}$
3. $\mathcal{L}_3 = \{a^p b^q \mid p \geqslant q\}$
4. $\mathcal{L}_4 = \{a^p b^q \mid p \geqslant q \text{ et } q \leqslant 5\}$
5. $\mathcal{L}_5 = \{a^p b^q \mid p \neq q\}$
6. $\mathcal{L}_6 = \{u \in A^* \mid |u|_a = |u|_b\}$
7. $\mathcal{L}_7 = \{u \in A^* \mid |u|_a < |u|_b\}$
8. $\mathcal{L}_8 = \{u \in A^* \mid |u|_a \equiv |u|_b \mod 7\}$
9. $\mathcal{L}_9 = \{a^n \mid n \text{ est un nombre premier}\}$

1. On peut aussi supposer $|xy| \geqslant N$. Pourquoi ?

10. $\mathcal{L}_{10} = \{uu \mid u \in A^*\}$
11. $\mathcal{L}_{11} = \{u \in A^* \mid \text{u est un palindrome}\}$
12. $\mathcal{L}_{12}$ l'ensemble des mots sur l'alphabet $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ représentant des nombres divisibles par 3 [2].
13. $\mathcal{L}_{13}$ l'ensemble des expressions bien parenthésées sur l'alphabet $\{a, (,), \}$.

2. on rappelle qu'un nombre est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3 ; par exemple, 273 est divisible par 3 car $2 + 7 + 3 \equiv 12 \pmod 3$. Question tirée de l'examen 2017