

**Feuille de TD n° 4 :**  
**Equivalence langages reconnus/langages rationnels**

## 1 Passage d'une expression rationnelle à un automate

### Exercice 1 : Expression Rationnelle vers Automate

Répondre aux questions suivantes pour les expressions rationnelles  $(a^*b^*)^*$ ,  $b(ab)^* + (ba)^*b$  et  $(a + bb)^*(b + aa)^*$  :

1. Donner l'automate obtenu par les constructions de Thompson correspondant à cette expression rationnelle,
2. Supprimer les  $\varepsilon$ -transitions. On pourra utiliser l'algorithme vu en cours, ou éliminer les  $\varepsilon$ -transitions une à une.
3. Déterminer l'automate obtenu.
4. L'automate obtenu après détermination vous semble-t-il être minimal ?

## 2 Passage d'un automate à une expression rationnelle

On rappelle le lemme d'Arden

Lemme d'Arden

Soient  $A$  et  $B$  deux langages, tels que  $\varepsilon \notin A$ . L'équation  $L = AL + B$  d'inconnue  $L$  a pour unique solution le langage  $L = A^*B$ .

### Exercice 2 : Echauffement

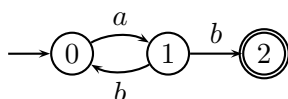
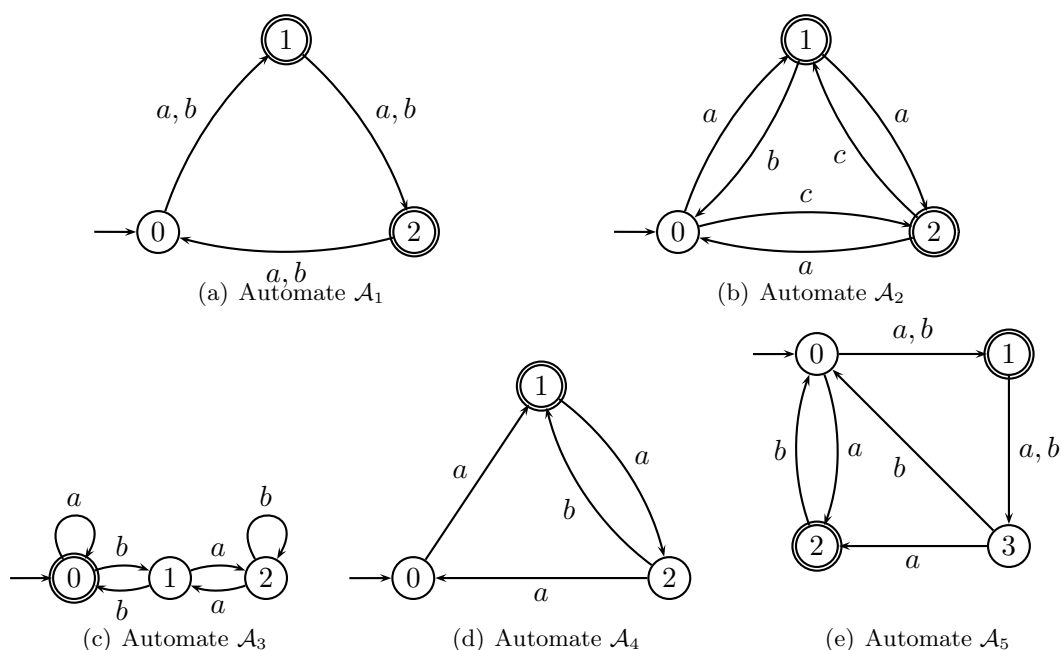


FIGURE 1 – Automate  $\mathcal{A}_0$

1. Ecrire les équations des langages  $L_0$ ,  $L_1$ ,  $L_2$  reconnus par  $\mathcal{A}_0$  en commençant dans l'état 0, 1 et 2 respectivement.
2. Résoudre de deux façons ce système d'équations : en appliquant le lemme d'Arden au langage  $L_0$ , puis au langage  $L_1$ . En déduire deux expressions rationnelles pour le langage reconnu par  $\mathcal{A}_0$ .

### Exercice 3 : Automate vers Expression Rationnelle

Grâce au Lemme d'Arden, donnez une expression régulière représentant les langages reconnus par les automates suivants.



$\mathcal{A}_6$	0	1	2
$a$	$\emptyset$	$\{0\}$	$\{1, 2\}$
$b$	$\{2\}$	$\{0, 1\}$	$\emptyset$
initial	oui	non	non
terminal	oui	non	non

$\mathcal{A}_7$	0	1	2	3	4	5
$a$	$\{4, 3\}$	$\{4, 2\}$	$\{0\}$	$\{1, 5\}$	$\emptyset$	$\{4\}$
$b$	$\{1\}$	$\{5\}$	$\{1, 2\}$	$\emptyset$	$\{4\}$	$\{3\}$
initial	oui	non	non	non	oui	non
terminal	non	non	non	oui	non	oui

### 3 Propriétés

#### Exercice 4 : Conséquences

Pourquoi peut-on dire que

1. L'intersection de deux langages rationnels est rationnelle ?
2. L'ensemble des préfixes d'un langage rationnel forme un langage rationnel ?
3. Le complémentaire d'un langage rationnel est rationnel ?