

# Langages formels

Clément AGRET  
[clement.agret@cyu.fr](mailto:clement.agret@cyu.fr)

CY Cergy Paris Université





# Plan du cours

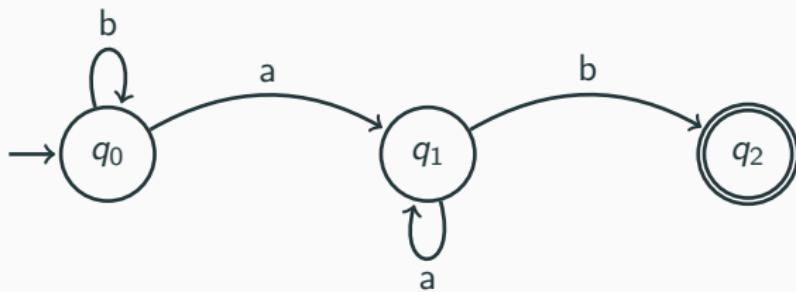
---

Pourquoi les automates?

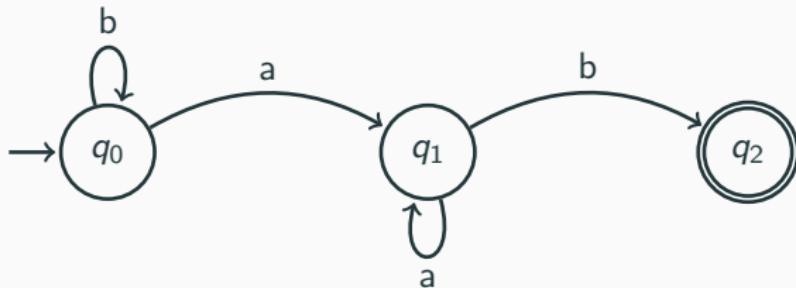
Langages

Automates

# Qu'est-ce qu'un automate?



# Qu'est-ce qu'un automate?



C'est un modèle de calcul capable de reconnaître des langages

# Qu'est-ce qu'un automate?

Un modèle de calcul simple.

- Peu puissant,
- Très efficace;
- Très bien compris :

# Algorithmique du texte

- Langage : ensemble de mots.
- un automate reconnâit un langage.
- Trouver un automate, c'est trouver un algorithme en une passe pour ce langage.

## Quelques applications

- Analyse syntaxique : `find`, `grep`, `sed`... utilisent des algorithmes venant des automates.
- compilation :
- Génétique

## Théorème 1

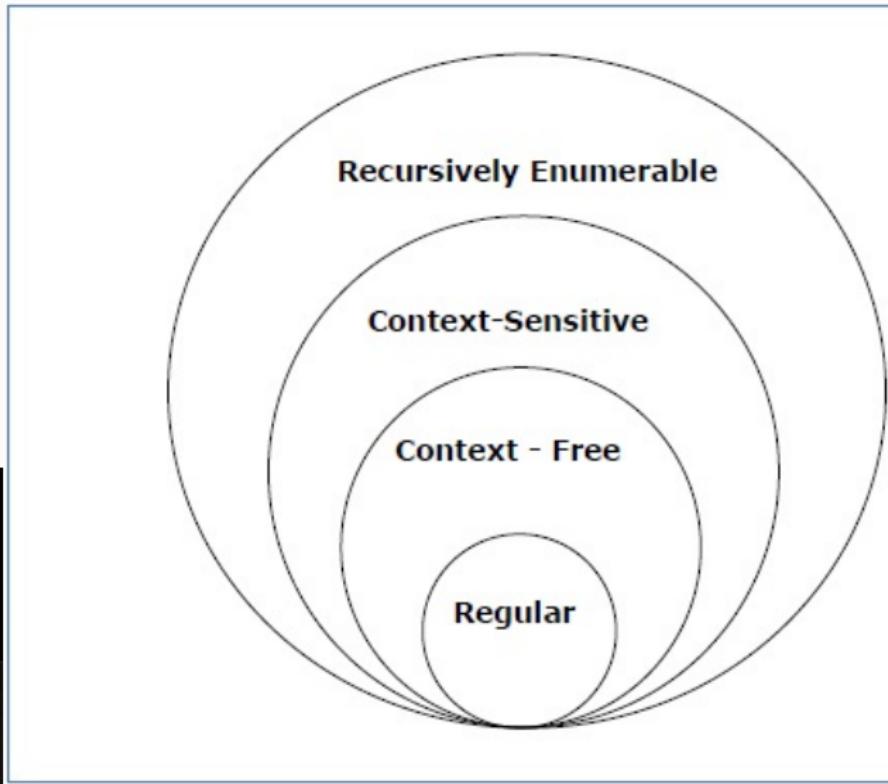
Les langages reconnaissables par automates sont les langages rationnels.

## Nous verrons dans ce cours :

---

- Comment construire un automate pour un langage donné,
- Comment simplifier un automate,
- Comment passer d'une expression rationnelle à un automate, d'un automate à une expression rationnelle,
- Les limites des automates :

# Hierarchie de Chomsky



# Plan du cours

---

Pourquoi les automates?

Langages

Mots

Langages

Automates

# Plan du cours

---

Pourquoi les automates?

Langages

Mots

Langages

Automates

## Définition 1: Alphabet

On appelle alphabet tout ensemble non vide  $A$ . Les éléments de  $A$  sont appelés les lettres.

# Definitions

## Définition 2: Mot

On appelle mot toute suite finie de lettres.

- Longueur du mot :

- Mot vide  $\varepsilon$  :



### Définition 3

On note  $A^*$  l'ensemble de tous les mots sur l'alphabet  $A$ .

# Concaténation

Si  $u = a_1 \dots a_n$  et  $v = b_1 \dots b_m$  sont deux mots, on note

$$u \cdot v = uv = a_1 \dots a_n b_1 \dots b_m$$

## Proposition 1

- Associativité :
- $\varepsilon$  est élément neutre :
- $u =$

# Puissance

---

## Définition 4

- $u$  est un facteur de  $v$  si
- $u$  est préfixe de  $v$  si
- $u$  est suffixe de  $v$  si

# Plan du cours

---

Pourquoi les automates?

Langages

Mots

Langages

Automates

## Définition 5: Langage

On appelle langage toute partie  $L \subseteq A^*$ .

Si  $L_1$  et  $L_2$  sont deux langages,

$$L_1 \cdot L_2 =$$

## Définition 6: Langage

On peut noter  $L_1 + L_2$  l'union des deux langages  $L_1 \cup L_2$ .

## Définition 7

- On note  $L^n := L \cdot L \cdot \dots \cdot L$

- On note

$$L^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L^n =$$

- et

$$L^+ = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L^n =$$

## Exemples

---



# Propriétés

❶  $L^* = L^+ \cup \{\varepsilon\}$

❷  $L \cdot L^* =$

❸ Si  $L_1 \subseteq L_2$ , alors  $L_1^* \subseteq L_2^*$

❹  $(L^*)^* =$



## Propriétés 2

---

$$(L_1 L_2)^* = \{\varepsilon\} + L_1 (L_2 L_1)^* L_2$$

## Propriétés 3

---

$$(a + b)^* = a^*(b \cdot a^*)^* = (a^* b)^* a^*.$$





# Plan du cours

---

Pourquoi les automates?

Langages

Automates

Définition

# Plan du cours

---

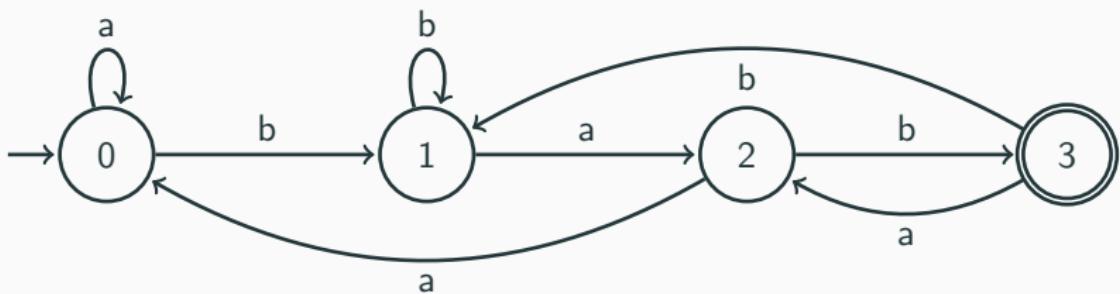
Pourquoi les automates?

Langages

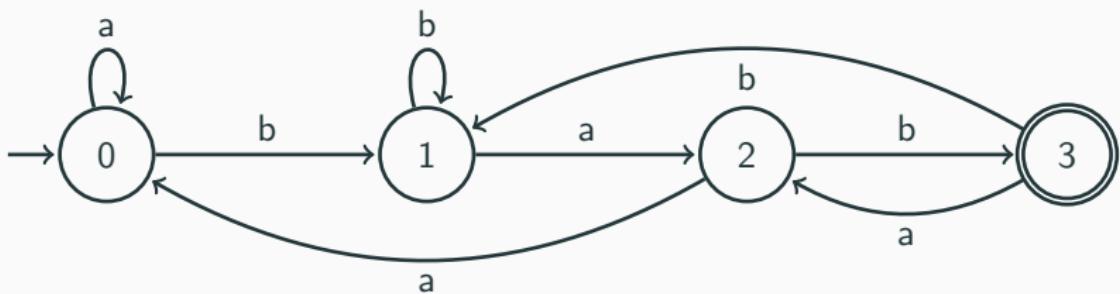
Automates

Définition

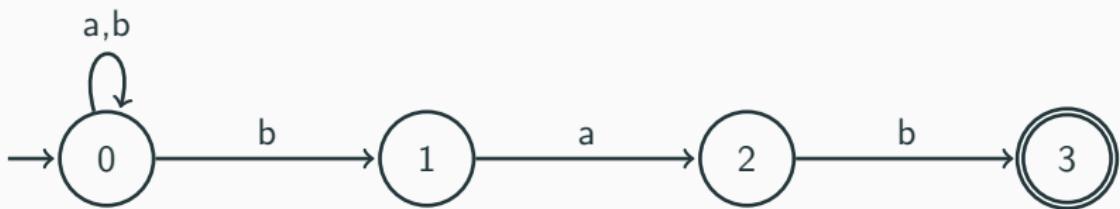
## Un exemple



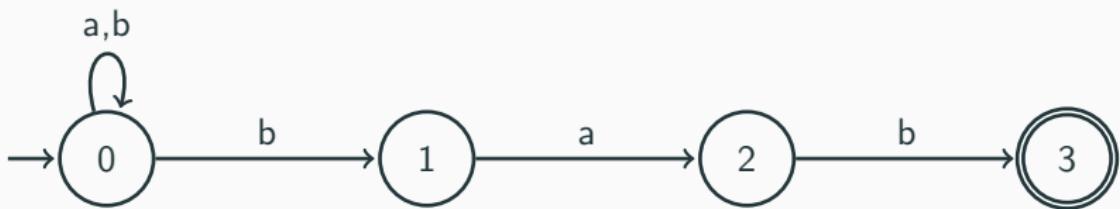
## Un exemple



## Un deuxième exemple



## Un deuxième exemple



## Définition 8: Automate

Un automate  $\mathcal{A}$  est un quadruplet  $(Q, I, F, T)$  où :

- $Q$  :

- $I$  :

- $F$  :

- $T$  :

# Calcul et langage reconnu

---

- On appelle calcul tout chemin  $c$  dans le graphe de l'automate :

$$c = q_0 \longrightarrow q_1 \longrightarrow q_2 \longrightarrow \dots \longrightarrow q_{n-1} \longrightarrow q_n$$

## Définition 9

Un automate  $\mathcal{A}$  est dit synchrone s'il n'a pas d' $\varepsilon$ -transitions.

## Définition 10

Un automate  $\mathcal{A}$  est dit déterministe si :

- il y a un unique état initial
- Pour chaque état  $q$  et chaque lettre  $a$ ,



# Synchronisation Suppression des $\varepsilon$ -transitions

**Idée :** soit  $q \xrightarrow{\varepsilon} r$



## Suppression d'une $\varepsilon$ -transition :

---

$q \xrightarrow{\varepsilon} r$  peut être remplacée par









