Calculando a precisão da medida

Carmen Melo Toledo

January 2020

1 Introdução

Para achar o erro aproximado vamos aproximar a função de uma gaussiana dada pela equação

$$g(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\Big(- \frac{(x - x')}{2\sigma} \Big) \tag{1}$$

1.1 Aproximando por uma gaussiana

seja $L = log(P(X|\{D\}, \theta))$
se fizermos a expansão de taylor até o segundo termo teremos:

$$L(x) \approx L(x') + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}\Big|_{x'} (x - x')^2$$

De onde temos que

$$P(x|\{D\}, \theta) \approx C \exp\Big(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}\Big|_{x'} (x - x')^2 \Big)$$

1.2 Calculando σ

Se compararmos com a equação da gaussiana percebemos que

$$\sigma = \Big(- \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} \Big)^{-\frac{1}{2}} \tag{2}$$

1.3 σ na medida com erro

Na parte dois vimos que

$$\frac{\partial L}{\partial \mu} = \frac{\sum_{k=1}^{N} (D_k - \mu)}{\sigma'^2} = 0 \iff \mu = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} (D_k)$$

Performando a segunda derivada chegamos que

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \mu^2} = \frac{\sum_{k=1}^{N} 1}{\sigma'^2} = \frac{N}{\sigma'^2}$$

de onde tiramos que $\sigma = \frac{\sigma'}{\sqrt{N}}$

1.4 σ na medida sem erro

Nesse caso teremos

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \mu^2} = -\frac{N(N-1)}{\sum (x_k - \mu)^2}$$

De onde sai que

$$\sigma = \sqrt{(N-1)^{-1} \sum (x_k - \mu)^2} / \sqrt{N}$$