Parte do Livro Fundamentos Matemáticos para Ciência da Computação – Judith Gersting

PRÁTICA 11 Qual o valor-verdade da wff

$$(\exists x)(A(x) \wedge (\forall y)[B(x, y) \rightarrow C(y)])$$

na interpretação onde o domínio consiste em todos os inteiros, *A(x)* é "$x > 0$", *B(x,y)* é "$x > y$" e C(y) é "$y \leq 0$"? Construa outra interpretação com o mesmo domínio, no qual a sentença tenha o valor-verdade oposto. •

Muitas sentenças em português podem ser expressas como wffs contendo predicados e quantificadores. Por exemplo, a sentença "todo papagaio é feio" está, na verdade, dizendo que qualquer coisa que seja um papagaio é feia. Fazendo *P(x)* denotar "*x* é um papagaio" e *U(x)* denotar "*x* é feio" vemos que a sentença pode ser simbolizada como

$$(\forall x)[P(x) \rightarrow U(x)]$$

Outras variantes com o mesmo significado na língua portuguesa são "Qualquer papagaio é feio" e "Cada papagaio é feio".

Da mesma forma, "Existe um papagaio feio" é denotado como

$$(\exists x)[P(x) \wedge U(x)]$$

As variantes aqui são "Alguns papagaios são feios" e "Existem papagaios feios".

Ao representar essas sentenças da língua portuguesa como wffs usamos $(\forall x)$ para a implicação e $(\exists x)$ para a conjunção. As duas outras combinações possíveis quase nunca expressam o que se deseja dizer. A wff $(\forall x)[P(x) \wedge U(x)]$ indica que todos os elementos no domínio — entendido aqui como todo o mundo — são um papagaio feio; a wff $(\exists x)[P(x) \rightarrow U(x)]$ é verdadeira na medida em que haja algum elemento no domínio, chamado *x,* que não seja um papagaio, pois neste caso, *P(x)* assume falso e a implicação é verdadeira.

PRATICA 12 Usando os símbolos predicados *S(x), I(x)* e *M(x),* escreva wffs que expressem o pedido. (O domínio é a coleção de todas as pessoas.)

a. Todos os estudantes são inteligentes.
b. Alguns estudantes inteligentes gostam de música.
c. Todos que gostam de música são estudantes estúpidos. •

Validade

A fim de distinguirmos as wffs que contêm apenas símbolos proposicionais e conectivos lógicos (descritas na Seção 1.1) das que contêm predicados e variáveis, chamaremos as primeiras de **wffs proposicionais** e as últimas de **wffs predicativas.** Como vimos antes, uma wff proposicional sempre tem valor-verdade, enquanto que uma wff predicativa pode não ter valor-verdade.

O valor-verdade de uma wff proposicional depende dos valores-verdade atribuídos aos símbolos proposicionais. O valor-verdade (ou falta dele) de uma wff predicativa depende da interpretação. Escolher uma interpretação para uma wff predicativa é análogo a escolher valores-verdade para wffs proposicionais, exceto por haver um número infinito de interpretações possíveis para as wffs predicativas e apenas 2" linhas possíveis para wffs proposicionais com *n* símbolos proposicionais.

Uma tautologia é uma wff proposicional que é verdadeira em todas as linhas da tabela-verdade. O análogo à tautologia para as wffs predicativas é a *validade* — uma wff predicativa é **válida** se for verdadeira para qualquer interpretação possível. A validade de uma wff deve ser obtida apenas da forma da wff, uma vez que deve ser independente de qualquer interpretação em particular.

Sabemos que ao construirmos a tabela-verdade para uma wff proposicional e examinarmos todas as atribuições aos símbolos proposicionais, temos um algoritmo para determinar um "tautologismo". No entanto, como obviamente não podemos testar todas as interpretações possíveis, como podemos determinar a validade de uma wff predicativa? Como veremos, não existe algoritmo para determinar uma validade. (Isto não significa simplesmente que ainda não foi encontrado um algoritmo — o que estamos dizendo é que está *provado* que não existe um algoritmo deste tipo.) Precisamos usar o raciocínio para determinar quando a forma de uma wff a torna verdadeira para qualquer interpretação. Naturalmente, podemos provar que uma wff é inválida ao encontramos uma única interpretação na qual a wff tenha valor-verdade falso ou não tenha valor-verdade.

EXEMPLO 11

a. A wff $(\forall x)P(x) \rightarrow (\exists x)P(x)$ é válida. Em qualquer interpretação, se qualquer elemento do domínio tiver uma certa propriedade, então existirá um elemento do domínio que tenha esta propriedade. (Usamos aqui o fato de que o domínio de qualquer interpretação tem que conter pelo menos um elemento.) Portanto, sempre que o antecedente for verdadeiro, o conseqüente também o será, e a implicação é, portanto, verdadeira.

b. A wff $(\forall x)P(x) \rightarrow P(a)$ é válida porque, em qualquer interpretação, *a* é um membro particular do domínio e, portanto, goza da propriedade que é compartilhada por todos os elementos do domínio.

c. A wff

$$(\forall x)[P(x) \wedge Q(x)] \leftrightarrow (\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x)$$

é válida. Se tanto *P* como *Q* forem verdadeiras para todos os elementos do domínio, então *P* será verdadeira para todos os elementos e *Q* será verdadeira para todos os elementos e vice-versa.

d A wff $P(x) \rightarrow [Q(x) \rightarrow P(x)]$ é válida, apesar de conter uma variável livre. Para comprovarmos isto, consideremos qualquer interpretação, e seja *x* qualquer membro do domínio. Então *x* tem ou não tem a propriedade *P.* Se *x* não a tiver, então *P(x)* será falsa; como *P(x)* é o antecedente da implicação, esta será verdadeira. Se, por outro lado, *x* tiver a propriedade *P,* então *P(x)* é verdadeira e, a despeito do valor-verdade de *Q(x),* a implicação $Q(x) \rightarrow P(x)$ será verdadeira, e a implicação principal também será verdadeira. •

EXEMPLO 12

A wff $(\exists x)P(x) \rightarrow (\forall x)P(x)$ não é válida. Por exemplo, na interpretação onde o domínio consista em inteiros e *P(x)* signifique que *x* é par, é verdade que existe um inteiro par, mas é falso que todo inteiro seja par. O antecedente da implicação é verdadeiro e o conseqüente é falso, e portanto o valor da implicação é falso. •

Naturalmente não somos obrigados a usar um contexto matemático para construir uma interpretação na qual uma wff seja falsa, mas freqüentemente é mais simples fazê-lo pelo fato de as relações entre os objetos serem mais claras.

PRÁTICA 13 A wff

$$(\forall x)[P(x) \vee Q(x)] \rightarrow (\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x)$$

é válida ou inválida? Justifique.

Alguns exercícios de exemplo... peguem os outros no livro.

Exercícios 1.2

1. Qual o valor-verdade de cada uma das wffs a seguir na interpretação onde o domínio consiste em inteiros, *O(x)* é "x é ímpar", *L(x)* é "x < 10" e *G(x)* é "x > 9"?
   a. $(\exists x)O(x)$
   b. $(\forall x)[L(x) \rightarrow O(x)]$
   c. $(\exists x)[L(x) \wedge G(x)]$
   d. $(\forall x)[L(x) \vee G(x)]$

2. Qual o valor-verdade de cada uma das wffs na interpretação onde o domínio consiste nos números inteiros?
   ★**a.** $(\forall x)(\exists y)(x + y = x)$
   ★**b.** $(\exists y)(\forall x)(x + y = x)$
   ★**c.** $(\forall x)(\exists y)(x + y = 0)$
   ★**d.** $(\exists y)(\forall x)(x + y = 0)$
   e. $(\forall x)(\forall y)(x < y \vee y < x)$
   f. $(\forall x)[x < 0 \rightarrow (\exists y)(y > 0 \wedge x + y = 0)]$
   g. $(\exists x)(\exists y)(x^2 = y)$
   h. $(\forall x)(x^2 > 0)$

6. Com o uso de símbolos predicados mostrados e os quantificadores apropriados, escreva cada sentença na língua portuguesa como uma wff predicativa. (O domínio é todo o mundo.)

   D(x) *é* "x é um dia." *S* é "segunda-feira."
   S(x) é "x é ensolarado." *T* é "terça-feira."
   R(x) é *"x é* chuvoso."

   ★a. Todos os dias são ensolarados.
   ★b. Alguns dias não são chuvosos.
   ★c. Todo dia que é ensolarado não é chuvoso.
   d. Alguns dias são ensolarados e chuvosos.
   e. Nenhum dia é ensolarado e chuvoso.

10. Se

    B(x) for "x é bonito."
    E(x) for "x é elegante."
    G(x, y) for *"x* gosta de y."
    H(x) for "*x* é um homem."
    M(x) for "*x* é uma mulher."
    j for "John."
    k for "Kathy."

    dê as traduções para a língua portuguesa das wffs a seguir:
    ★a. $E(j) \wedge G(k, j)$
    ★b. $(\forall x)[H(x) \rightarrow E(x)]$

13. Forneça interpretações que provem que as wffs a seguir não são válidas:

★a. $(\exists x)A(x) \wedge (\exists x)B(x) \rightarrow (\exists x)[A(x) \wedge B(x)]$

b. $(\forall x)(\exists y)P(x, y) \rightarrow (\exists x)(\forall y)P(x, y)$

c. $(\forall x)[P(x) \rightarrow Q(x)] \rightarrow [(\exists x)P(x) \rightarrow (\forall x)Q(x)]$

d. $(\forall x)[A(x)]' \leftrightarrow [(\forall x)A(x)]'$