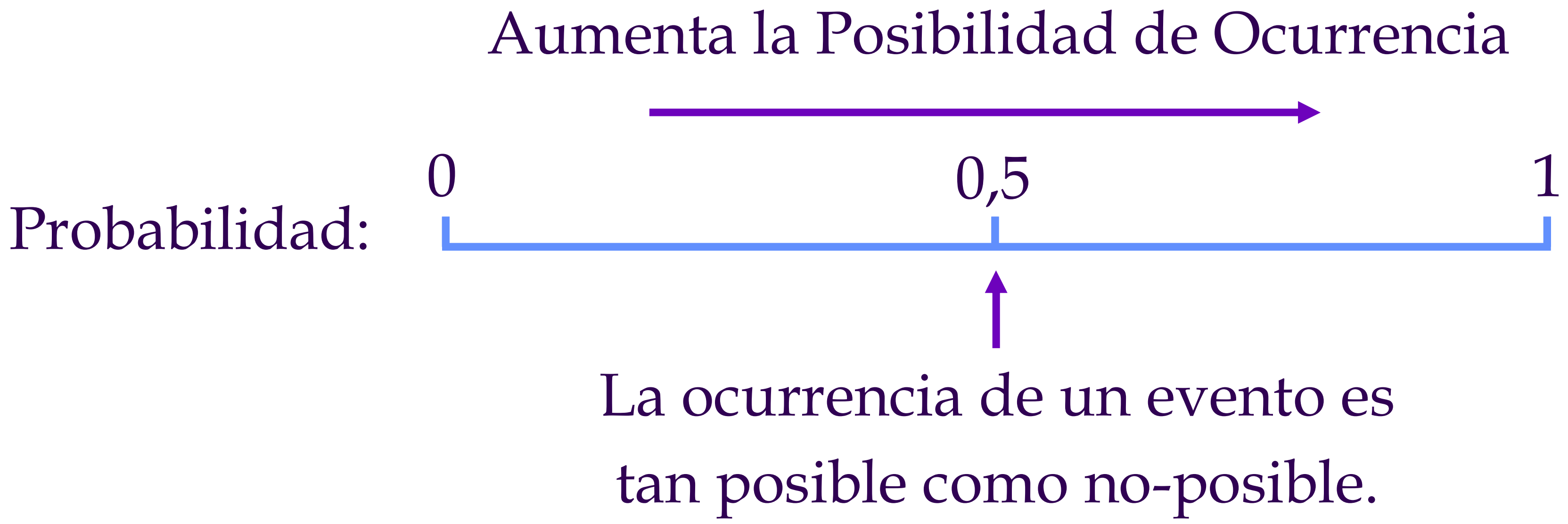
Introducción a la Probabilidad

- Experimentos, Reglas de Conteo y Asignación de Probabilidades
- Eventos y sus Probabilidades
- Algunas Relaciones Básicas de Probabilidad
- Probabilidad Condicional
- Teorema de Bayes

Probabilidad

- La Probabilidad es la medida numérica de la posibilidad de que un evento ocurra.
- Los valores de la probabilidad **SIEMPRE** están entre 0 y 1.
- Una probabilidad cerca de 0 indica que un evento (con esa probabilidad) es poco posible que ocurra.
- Una probabilidad cerca de 1 indica que un evento (con esa probabilidad) es casi seguro que ocurre.
- Una probabilidad de 0,5 indica que la ocurrencia de un evento (con esa probabilidad) es tan posible como no-posible que ocurra.

La Probabilidad como una Medida Numérica de la Posibilidad de Ocurrencia



Un Experimento y su Espacio Muestral

- Un experimento es cualquier proceso que genera resultados "bien definidos".
- El espacio muestral de un experimento es todo el set de resultados experimentales posibles.
- Un punto muestral es un elemento del espacio muestral, es un resultado experimental en específico.

Experimento	Resultado experimental
Lanzar una moneda	Cara, cruz
Tomar una pieza para inspeccionarla	Con defecto, sin defecto
Realizar una llamada de ventas	Hay compra, no hay compra
Lanzar un dado	1, 2, 3, 4, 5, 6
Jugar un partido de futbol	Ganar, perder, empatar

Ejemplo: “La Inversión de Bradley”

- Bradley ha invertido en dos acciones: “Markley Oil” y “Collins Mining”. Bradley ha determinado que los posibles resultados de estas inversiones a tres meses en el futuro son las que siguen:

Ganancia o Pérdida de la Inversión a 3 meses (miles $)	
Markley Oil	Collins Mining
10	8
5	-2
0	
-20	

Una Regla de Conteo para un Experimento de Múltiples Pasos

- Si un experimento consiste en una secuencia de k pasos en el que hay n_1 posibles resultados para el primer paso, y n_2 posibles resultados para el segundo paso, y así sucesivamente… Entonces el número total de resultados experimentales viene dado por la multiplicación de todos n_i. Es decir: $(n_1) \cdot (n_2) \ldots (n_k)$.

- Una útil representación gráfica de un experimento de múltiples pasos es un diagrama de árbol.

Ejemplo: "La Inversión de Bradley"

- Una Reglad de Conteo para Experimentos de multiples pasos para la "inversión de Bradley" puede verse como experimento de dos pasos; porque involucra dos acciones cada una de las cuales tiene su propio set de resultados experimentales.

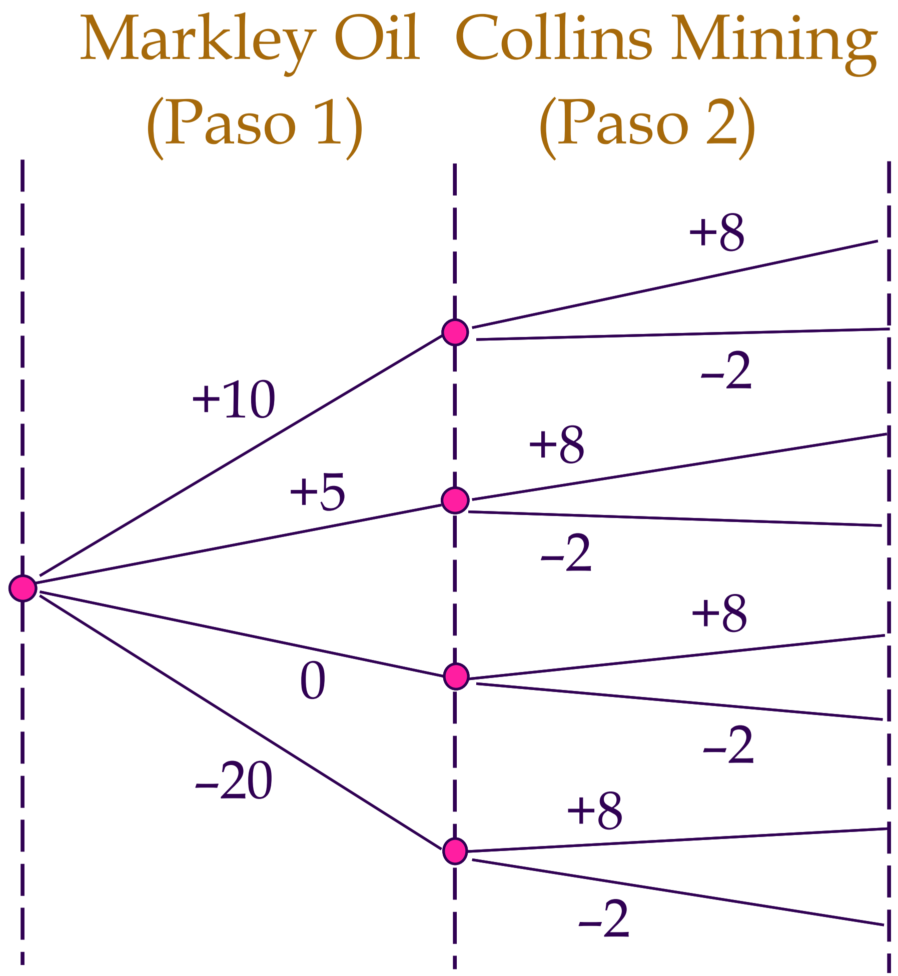
"Markley Oil": $n_1 = 4$

"Collins Mining": $n_2 = 2$

Total de Resultados Experimentales: $n_1 \cdot n_2 = 4 \cdot 2 = 8$

Ejemplo: “La Inversión de Bradley”

- Diagrama de Árbol



Resultados Experimentales

(10, 8) = Ganancia de $18,000

(10, -2) = Ganancia de $8,000

(5, 8) = Ganancia de $13,000

(5, -2) = Ganancia de $3,000

(0, 8) = Ganancia de $8,000

(0, -2) = Pérdida de $2,000

(-20, 8) = Pérdida de $12,000

(-20, -2) = Pérdida de $22,000

Regla de Conteo para Combinaciones

- Otra útil regla de conteo nos permite contar el número de resultados experimentales cuando n objetos son seleccionados de un set de N objetos.

- Número de combinaciones dado N objetos y tomando n a un momento dado:

$$C_n^N = \binom{N}{n} = \frac{N!}{n!\cdot(N-n)!}$$

donde

$$N! = N\cdot(N-1)\cdot(N-2)\ldots 2\cdot 1$$

$$n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\ldots 2\cdot 1$$

$$0! = 1$$

Regla de Conteo para Permutaciones

- Otra regla de conteo útil es contar el número de resultados experimentales cuando *n* objetos deben ser seleccionados de un set de *N* objetos donde el orden de selección es importante.

- El número de permutaciones de *N* objetos tomando *n* en un momento dado:

$$P_n^N = n! \cdot \binom{N}{n} = \frac{N!}{(N-n)!}$$

Asignando Probabilidades

- Requerimientos Básicos para la Asignación de Probabilidades
  1. La probabilidad asignada a cada resultado experimental debe estar entre 0 y 1 (ambos número incluidos). Si denota con E_i el i-ésimo resultado experimental y con $\Pr(E_i)$ su probabilidad, entonces exprese este requerimiento como:

$$0 \leq \Pr\left(E_i\right) \leq 1 \quad \forall i$$

Asignando Probabilidades

- Requerimientos Básicos para la Asignación de Probabilidades

2. La suma de las probabilidades de los resultados experimentales debe ser igual a 1,0. Para resultados experimentales *n* escriba este requerimiento como:

$$\Pr(E_1) + \Pr(E_2) + \Pr(E_3) + \ldots + \Pr(E_n) = 1$$

Asignando Probabilidades

- **Método Clásico**:
  - Asignamos probabilidades basado en el supuesto en que todos los resultados son igualmente posibles.
- **Método de Frecuencia Relativa**:
  - Asignamos probabilidades basados en la experimentación o datos históricos.
- **Método Subjetivo**:
  - Asignamos probabilidades basados el criterio o juicio de quien asigna, este método se utiliza cuando los anteriores no son posibles, y siempre deben cumplir las ecuaciones descritas previamente.

Método Clásico

- Si un experimento tiene n posibles resultados, este método asignara una probabilidad de $(1/n)$ a cada resultado.
  - Por ejemplo:

    Experimento: Lanzando un dado.

    Espacio Muestral: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

    Probabilidades: cada punto muestral tiene una probabilidad de 1/6 de ocurrir.

Ejemplo: La tienda de herramientas de Lucas

- Método de Frecuencia Relativa:
  - Lucas quiere asignar probabilidades al número de "pulidoras" que arrienda por día. Los registros muestran las siguientes frecuencias para los arriendos en los últimos 40días:

Número de pulidoras	Número de días
0	4
1	6
2	18
3	10
4	2

Ejemplo: La tienda de herramientas de Lucas

- Método de Frecuencia Relativa:
  - La asignación de probabilidad esta dada por la división entre la frecuencia del número de días y la frecuencia total (cantidad total de días).

Número de Pulidoras	Número de días	Probabilidad
0	4	4/40 = 0,10
1	6	6/40 = 0,15
2	18	0,45
3	10	0,25
4	2	0,05
	40	1,00

Método Subjetivo

- Por ejemplo, cuando las condiciones económicas y/o las circunstancias de la empres cambian rápidamente puede ser inapropiado asignar probabilidades basándose únicamente en datos históricos.
- Podemos usar cualquier dato disponible así como también nuestra propia experiencia e intuición, pero al final del día el valor de la probabilidad debe expresa nuestro grado de creencia sobre si el resultado experimental ocurrirá.
- Las mejores estimaciones de probabilidad a menudo se obtienen al combinar las estimaciones del método clásico o de frecuencia relativa con estimaciones subjetivas.

Ejemplo: “La Inversión de Bradley”

- Al aplicar el método subjetivo, un analista hizo las siguientes asignaciones de probabilidad:

Resultado Exp.	Ganancia Neta	Probabilidad
(10, 8)	$18,000	0,20
(10, -2)	$8,000	0,08
(5, 8)	$13,000	0,16
(5, -2)	$3,000	0,26
(0, 8)	$8,000	0,10
(0, -2)	– $2,000	0,12
(-20, 8)	– $12,000	0,02
(-20, -2)	– $22,000	0,06

Eventos y sus Probabilidades

- Un evento es una colección de puntos muestrales
- La probabilidad de un evento es igual a la suma de las probabilidades de los puntos muestrales en el evento.
- Si podemos identificar todos los puntos muestrales de un experimento y asignamos probabilidades a cada uno de ellos, podemos calcular la probabilidad de un evento.

Ejemplo: “La Inversión de Bradley”

- Eventos y sus Probabilidades

Evento “M” = “Markley Oil” genere ganancia

$$M = \{(10, 8), (10, -2), (5, 8), (5, -2)\}$$

$$\Pr(M) = \Pr(10, 8) + \Pr(10, -2) + \Pr(5, 8) + \Pr(5, -2)$$

$$= 0{,}2 + 0{,}08 + 0{,}16 + 0{,}26$$

$$= 0{,}70$$

Evento “C” = “Collins Mining” genere ganancia

$$\Pr(C) = 0{,}48$$

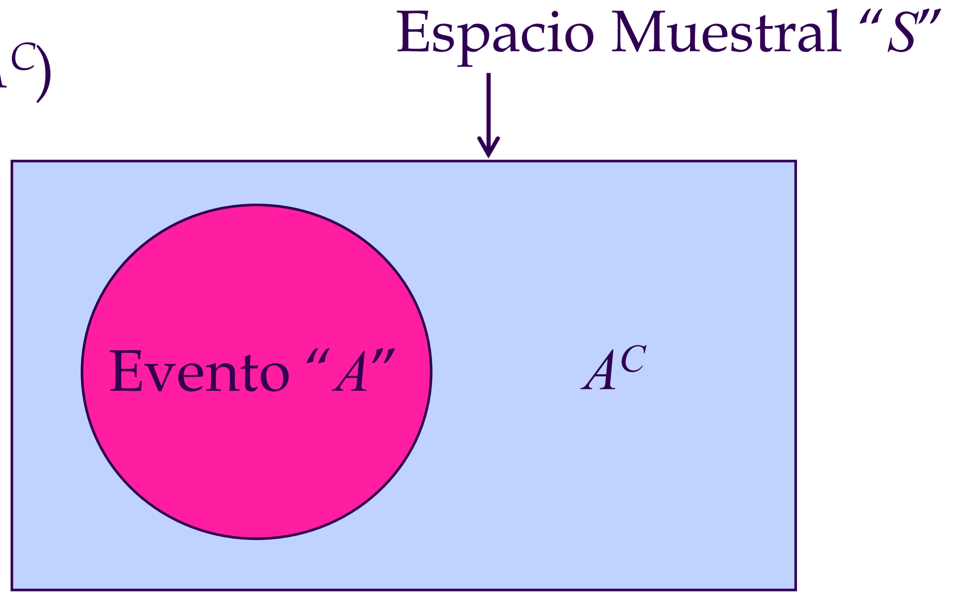
Algunas Relaciones Básicas de Probabilidad

- Existen algunas básicas relaciones de probabilidad que pueden ser usadas para calcular la probabilidad de un evento sin tener el conocimiento de todos las probabilidades de los puntos muestrales.
  - Complemento de un Evento
  - Unión de Dos Eventos
  - Intersección de Dos Eventos
  - Eventos Mutuamente Excluyentes

Complemento de un Evento

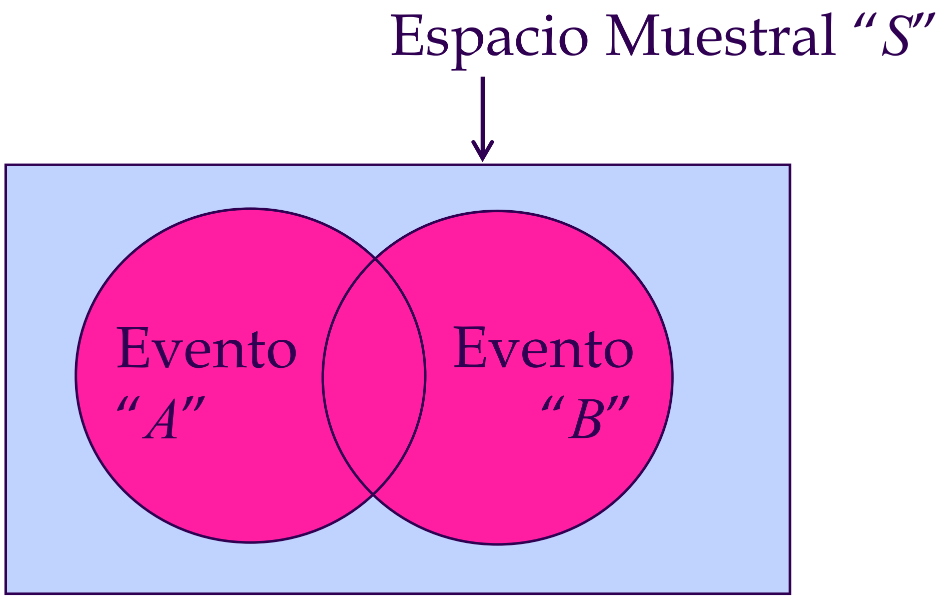
- El complemento de un evento A es definido como el evento que consiste en todos los puntos muesrales que no pertenecen a A.
- El complemento de A se denota A^C.
- El siguiente diagrama de Venn nos muestra el concepto del complemento e un evento.

$$\Pr(A) = 1 - \Pr(A^C)$$



Unión de Dos Eventos

- La <u>unión</u> de eventos *A* y *B* es el evento que contiene todos los puntos muestrales que pertenecen tanto a *A*, *B* o a los dos.
- La unión es denotada por $A \cup B$.
- La unión de *A* y *B* es representada a continuación.



Ejemplo: “La Inversión de Bradley”

- Unión de Dos Eventos

Evento M = “Markley Oil” genere ganancias

Evento C = “Collins Mining” genere ganancias

$M \cup C$ = “Markley Oil” **o** “Collins Mining” genere ganancias

$$M \cup C = \{(10, 8), (10, -2), (5, 8), (5, -2), (0, 8), (-20, 8)\}$$

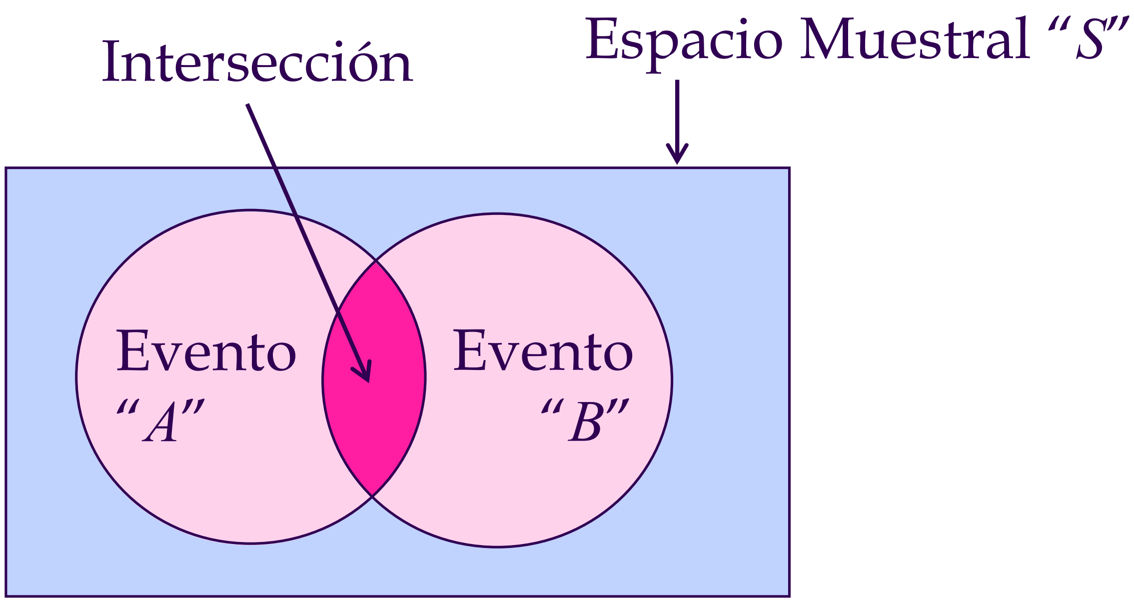
$$\Pr(M \cup C) = \Pr(10, 8) + \Pr(10, -2) + \Pr(5, 8) + \Pr(5, -2) + \Pr(0, 8) + \Pr(-20, 8)$$

$$= 0{,}20 + 0{,}08 + 0{,}16 + 0{,}26 + 0{,}10 + 0{,}02$$

$$= 0{,}82$$

Intersección de Dos Eventos

- La intersección de eventos A y B es el set de todos los puntos muestrales que pertenecen tanto a A como a B.
- La intersección es denotada por $A \cap B$.
- La intersección de A y B corresponde al área marcada en la representación siguiente:



Ejemplo: "La Inversión de Bradley"

- Intersección de Dos Eventos

Evento M = "Markley Oil" genere ganancias

Evento C = "Collins Mining" genere ganancias

$M \cap C$ = "Markley Oil" **y** "Collins Mining" generen ganancias

$$M \cap C = \{(10, 8), (5, 8)\}$$

$$\begin{aligned} \Pr(M \cap C) &= \Pr(10, 8) + \Pr(5, 8) \\ &= 0,20 + 0,16 \\ &= 0,36 \end{aligned}$$

Ley de la Adición

- La ley de la adición nos muestra la forma de calcular la probabilidad de un evento A, o B, o tanto de A y B, ocurran.

- La ley nos dice lo siguiente:

$$\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$$

Ejemplo: "La Inversión de Bradley"

- Ley de la Adición
  - Encontremos la probabilidad de que "Markley Oil" **o** "Collins Mining" generen ganancias:
  - Nosotros conocemos lo siguiente:
    - Pr(M) = 0,7 & Pr(C) = 0,48
    - $\Pr(M \cap C) = 0,36$
  - Por lo tanto:

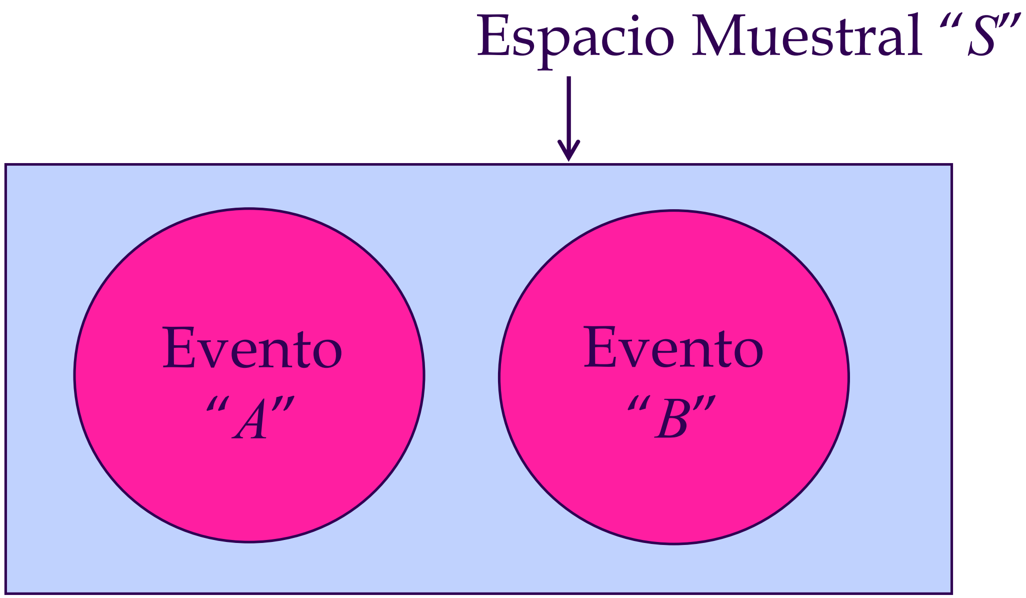
$$\Pr(M \cup C) = \Pr(M) + \Pr(C) - \Pr(M \cap C)$$
$$= 0{,}70 + 0{,}48 - 0{,}36 = 0{,}82$$

  - Este resultado es el mismo que se obtuvo al usar la definición de probabilidad de un evento.

Eventos Mutuamente Excluyentes

- Dos eventos son llamados mutuamente excluyentes si los eventos no tienen puntos muestrales en común. Es decir, dos eventos son mutuamente excluyentes si, cuando ocurre un evento, el otro no puede ocurrir.

- Representación gráfica:



Eventos Mutuamente Excluyentes

- Le Ley de Adición para Eventos Mututamente Excluyentes:

$$\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B)$$

Probabilidad Condicional

- La <u>Probabilidad Condicional</u> es la probabilidad de un evento dado que otro evento ha ocurrido.

- La probabilidad condicional de <u>A dado B</u> es anotada de la siguiente forma: $\Pr(A \mid B)$.

- Y se calcula de la siguiente forma:

$$\Pr(A \mid B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)}$$

Ejemplo: "La Inversión de Bradley"

- Probabilidad Condicional
  - La probabilidad de que "Collins Mining" genere ganancia **dado que** "Markley Oil" también generó ganancia es de:

$$\Pr(C \mid M) = \frac{\Pr(C \cap M)}{\Pr(M)} = \frac{0,36}{0,70} = 0,51$$

La Ley de la Multiplicación

- La ley de la multiplicación provee una forma de calcular la probabilidad de una intersección de dos eventos.

- La Ley se escribe de la siguiente forma:

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(B) \cdot \Pr(A \mid B)$$

Ejemplo: "La Inversión de Bradley"

- La Ley de la Multiplicación
  - Supongamos que queremos calcular la probabilidad de que "Markley Oil" **y** "Collins Mining" generen ganancias
  - Sabemos:
    - $\Pr(M) = 0{,}70 \quad \& \quad P(C \mid M) = 0{,}51$
  - Entonces:

$$\Pr(C \cap M) = \Pr(\mathrm{M}) \cdot \Pr(C \mid M)$$
$$= 0{,}7 \cdot 0{,}51 = 0{,}36$$

  - Este resultado es el mismo que se obtuvo al usar la definición de probabilidad de un evento.

Eventos Independientes

- Si los eventos *A* y *B* son <u>independientes</u> será cierto lo siguiente:

$$\Pr(A \mid B) = \Pr(A)$$

Eventos Independientes

- La ley de multiplicación para eventos independientes:

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A) \cdot \Pr(B)$$

- La ley de multiplicación también puede utilizarse para testear si dos eventos son o no independientes.

Ejemplo: "La Inversión de Bradley"

- La ley de multiplicación para eventos independientes:

¿Son M y C independientes?

Es decir, ¿Es $\Pr(M \cap C) = \Pr(M) \cdot \Pr(C)$?

- Sabemos que:
  - $\Pr(M \cap C) = 0{,}36$
  - $\Pr(M) = 0{,}70$ & $\Pr(C) = 0{,}48$

¡Pero!: $\Pr(M) \cdot \Pr(C) = 0{,}70 \cdot 0{,}48 = 0{,}34$

$0{,}34 \neq 0{,}36$; por lo tanto, M y C **no son eventos independientes**.

Teorema de Bayes

- Generalmente, comenzamos un análisis de probabilidad con probabilidades iniciales o **a priori**.
- Seguido de eso, para una muestra, estudio o prueba, obtenemos alguna información adicional.
- Dada esta información, calculamos probabilidades revisadas o **a posteriori**.
- El Teorema de Bayes nos brinda los medios para revisar o corregir las probabilidades a priori.

Probabi-lidades a priori → Nueva Información → Aplicación del Teorema de Bayes → Probabi-lidades a posteriori

Teorema de Bayes

- Habíamos dicho lo siguiente:

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(B) \cdot \Pr(A \mid B)$$

$$\Pr(B \cap A) = \Pr(A) \cdot \Pr(B \mid A)$$

$$\Rightarrow \Pr(A \cap B) = \Pr(B \cap A)$$

$$\Rightarrow \Pr(B) \cdot \Pr(A \mid B) = \Pr(A) \cdot \Pr(B \mid A)$$

$$\Rightarrow \Pr(A \mid B) = \frac{\Pr(A) \cdot \Pr(B \mid A)}{\Pr(B)}$$

Ejemplo: “L. S. Clothiers”

- Supongamos que la construcción de un nuevo *mall* generará una fuerte competencia para otras tiendas en el sector, pensemos en la tienda "L.S. Clothiers". Si el *mall* es construido, el dueño de la tienda podría pensar en reubicar la tienda.

Ejemplo: "L. S. Clothiers"

- El *mall* no será construido a menos que se apruebe el permiso de construcción por parte de la municipalidad, el consejo regulador dará una recomendación para el municipio a favor o en contra la construcción. Digamos:

  A_1 = el municipio aprueba la construcción

  A_2 = el municipio rechaza la construcción

- Probabilidades a Priori:
  - Usando un juicio subjetivo

  $$\Pr(A_1) = 0{,}7 \qquad \& \qquad \Pr(A_2) = 0{,}3$$

Ejemplo: "L. S. Clothiers"

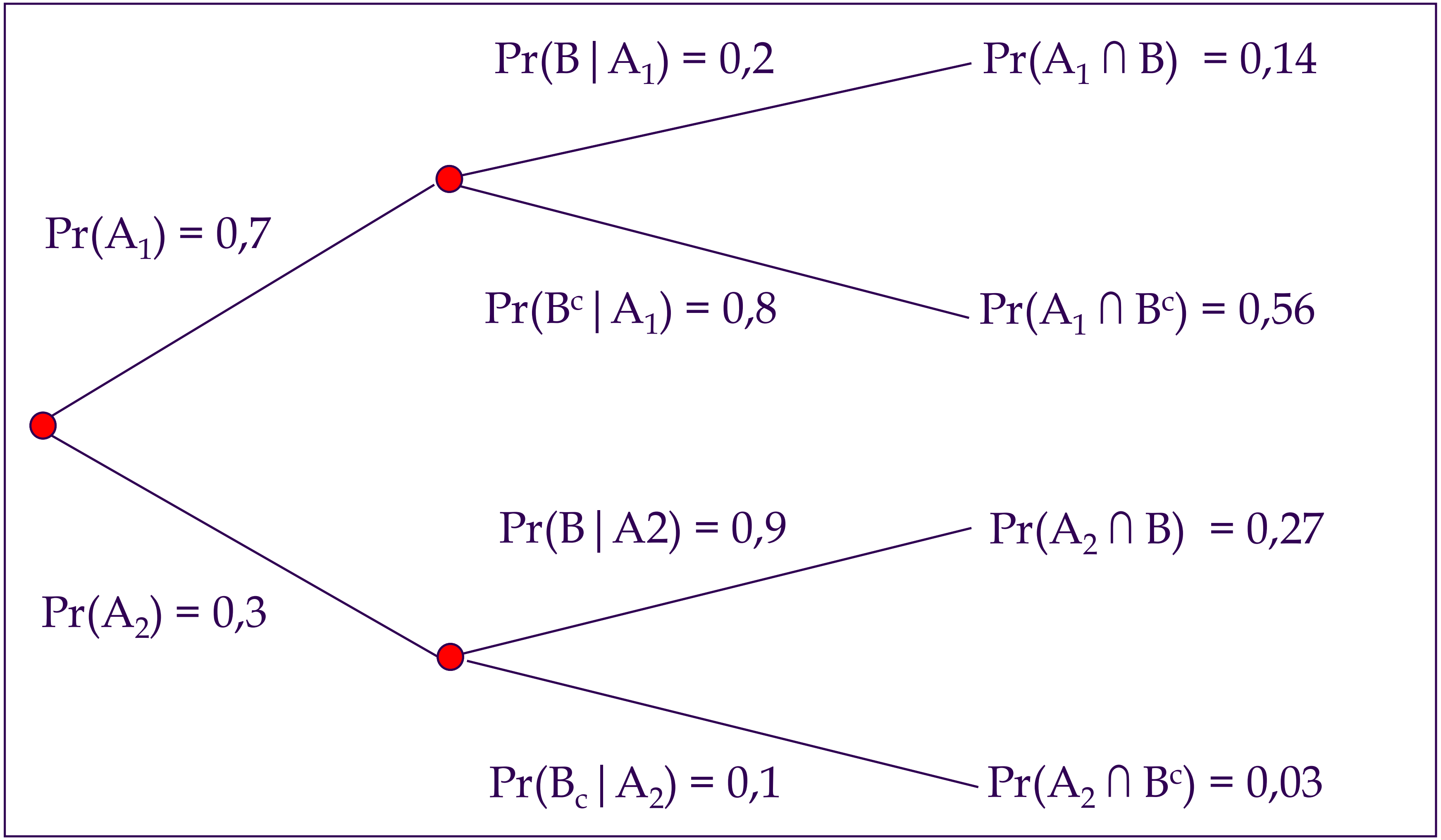
- Nueva Información
  - El consejo recomendó en contra de la construcción. Así que llamemos *B* al evento de la recomendación negativa del consejo.
  - Dado que *B* ha ocurrido ¿debería "L.S. Clothiers" revisar las probabilidades que el municipio dará sobre la construcción del *mall*?

- Probabilidades Condicionales
  - La historia pasada con el consejo y el municipio indican lo siguiente:

$$\Pr(B \mid A_1) = 0{,}2 \quad \& \quad \Pr(B \mid A_2) = 0{,}9$$

Ejemplo: "L. S. Clothiers"

- Diagrama de Árbol



Teorema de Bayes

- Para encontrar la probabilidad de que el evento Ai ocurrirá dado que el evento B ha ocurrido aplicamos el Teorema de Bayes:

$$\Pr(A_i \mid B) = \frac{\Pr(A_i)\cdot\Pr(B \mid A_i)}{\Pr(A_1)\cdot\Pr(B \mid A_1) + \Pr(A_2)\cdot\Pr(B \mid A_2) + \ldots + \Pr(A_n)\cdot\Pr(B \mid A_n)}$$

- El Teorema de Bayes es aplicable con los eventos para los cuales queremos calcular las probabilidades a posteriori son mutuamente excluyentes y son la unión del completo espacio muestral.

Ejemplo: "L. S. Clothiers"

- Probabilidades a Posteriori
  - Dada la recomendación negativa del consejo revisaremos nuestras probabilidades a priori de la siguiente forma:

$$\Pr\left(A_1 \mid B\right) = \frac{\Pr\left(A_1\right) \cdot \Pr\left(B \mid A_1\right)}{\Pr\left(A_1\right) \cdot \Pr\left(B \mid A_1\right) + \Pr\left(A_2\right) \cdot \Pr\left(B \mid A_2\right)}$$

$$= \frac{0{,}7 \cdot 0{,}2}{0{,}7 \cdot 0{,}2 + 0{,}3 \cdot 0{,}9}$$

$$= 0{,}34$$

Ejemplo: “L. S. Clothiers”

- Conclusión
  - La recomendación del consejo son buenas noticias para “L.S. Clothiers”, pues la probabilidad a posteriori de que el municipio aprobará la construcción cambio a 0,34 cuando inicialmente (a priori) se creía que la probabilidad era de 0,70.

Método Tabular

- **<u>Paso 1</u>**: Preparar las siguientes tres columnas:
  - *<u>Columna 1</u>*: Para los eventos mutuamente excluyentes A_i de los que quiere obtener la probabilidad a posteriori.
  - *<u>Columna 2</u>*: Para las probabilidades a priori $\Pr(A_i)$ de los eventos.
  - *<u>Columna 3</u>*: Para las probabilidades condicionales $\Pr(B \mid A_i)$ de la nueva información B **<u>dado</u>** cada evento.

Método Tabular

(1) Eventos A_i	(2) Probabilidades A Priori $\Pr(A_i)$	(3) Probabilidades Condicionales $\Pr(B \mid A_i)$	(4)	(5)
Aceptar (A_1)	0,7	0,2		
Rechazar (A_2)	0,3	0,9		
	1,0			

Método Tabular

- **Paso 2**: en la columna 4, calcular las probabilidades conjuntas para cada evento y la nueva información B usando la ley de multiplicación.
  - Multiplicar las probabilidades a priori en la columna 2 por la correspondientes probabilidad condicional en la columna 3, es decir:

$$\Pr(A_i \cap B) = \Pr(A_i) \cdot \Pr(B \mid A_i).$$

Método Tabular

(1) Eventos A_i	(2) Probabilidades A Priori $\Pr(A_i)$	(3) Probabilidades Condicionales $\Pr(B \mid A_i)$	(4) Probabilidades Conjuntas $\Pr(A_i \cap B)$	(5)
Aceptar (A_1)	0,7	0,2	0,14	
Rechazar (A_2)	0,3	0,9	0,27	
	1,0			

Método Tabular

- **<u>Paso 3</u>**: Sumar las probabilidades conjuntas en la columna 4. La suma es la probabilidad de la nueva información Pr(B).
  - Podemos ver que hay una probabilidad de 0,14 de que el municipio apruebe la construcción y una negativa recomendadicón.
  - Hay una probabilidad de 0,27 de que el municipio rechace la construcción y una negativa recomendación.
  - La suma de 0,14 y 0,27 muestra una probabilidad total de 0,41 de que exista una negativa recomendación.

Método Tabular

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
	Probabilidades	Probabilidades	Probabilidades	
Eventos	A Priori	Condicionales	Conjuntas	
A_i	$\Pr(A_i)$	$\Pr(B \mid A_i)$	$\Pr(A_i \cap B)$	
Aceptar (A_1)	0,7	0,2	0,14	
Rechazar (A_2)	0,3	0,9	0,27	
	1,0		$\Pr(B)$ = 0,41	

Método Tabular

- **Paso 4**: En la columna 5, calculamos las probabilidades a posteriori usando la relación básica de probabilidad condicional:

$$\Pr(A_1 \mid B) = \frac{\Pr(A_i \cap B)}{\Pr(B)}$$

  - Note que las probabilidades conjuntas $\Pr(A_i \cap B)$ están en la columna 4 y que la probabilidad de $\Pr(B)$ es la suma de la columna 4.

Método Tabular

(1) Eventos A_i	(2) Probabilidades A Priori $\Pr(A_i)$	(3) Probabilidades Condicionales $\Pr(B \mid A_i)$	(4) Probabilidades Conjuntas $\Pr(A_i \cap B)$	(5) Probabilidades A Posteriori $\Pr(A_i \mid B)$
Aceptar (A_1)	0,7	0,2	0,14	0,3415
Rechazar (A_2)	0,3	0,9	0,27	0,6585
	1,0		$\Pr(B)$ = 0,41	1,0000

EJERCICIO PRÁCTICO

El *17,5%* de los alumnos del curso de "INFERENCIA ESTADÍSTICA" de un semestre anterior, reprobó este ramo.

Determine la probabilidad de que un alumno al tomar el curso lo apruebe dedicando menos de 3 horas adicionales al estudio de este ramo. Si se sabe que, un *90%* de los alumnos aprobados habían dedicado al menos 3 horas adicionales al estudio de este ramo y el *15%* de los alumnos reprobados dedicó al menos 3 horas adicionales al estudio.

Solución:

A: Alumno aprobó

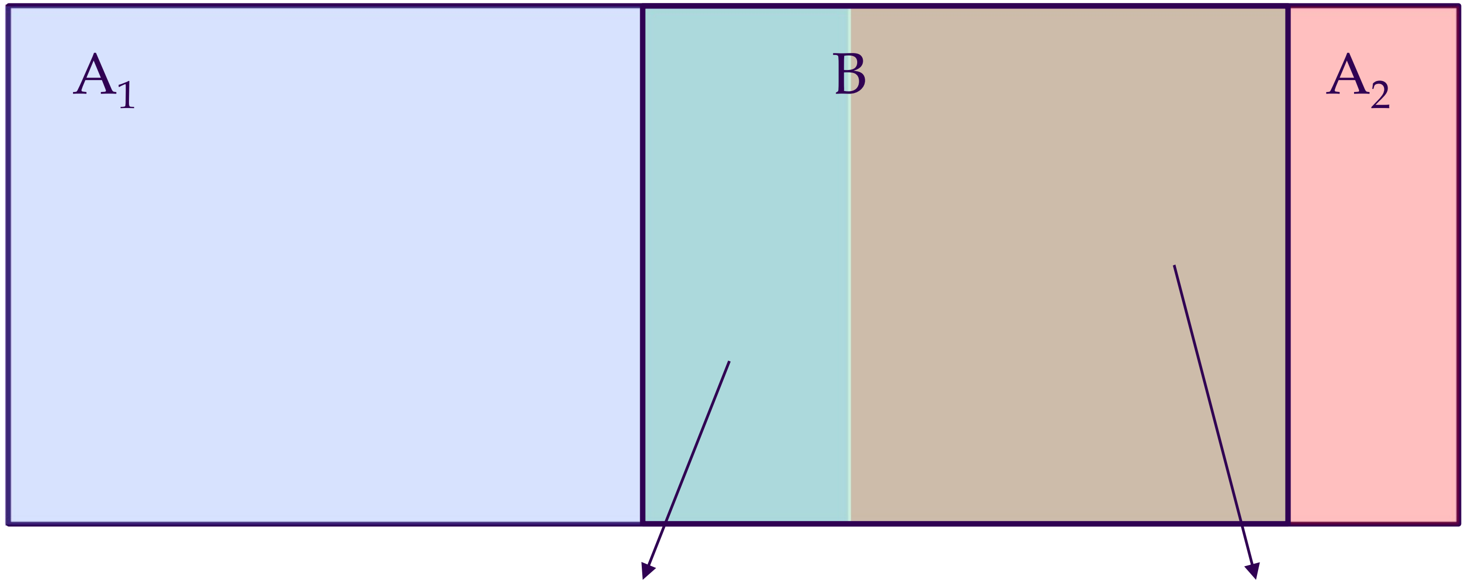
R: Alumno reprobó

Hr : Alumno estudio más de 3 hrs.

$\sim Hr$: Alumnos estudio menos de 3 hrs

Teorema de Bayes

- Gráficamente se puede representar de la sgte. forma:



Es decir:

$(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) = B$ ¡es verdadero!, por lo tanto

$$\Rightarrow \Pr(A_1 \cap B) + \Pr(A_2 \cap B) = \Pr(B)$$

$$\Rightarrow \Pr(A_1) \cdot \Pr(B \mid A_1) + \Pr(A_2) \cdot \Pr(B \mid A_2) = \Pr(B)$$

Referencias

- **Estadística para la Administración y Economía**. David Anderson, Dennis Sweeney & Thomas Williams. 10ma edición. CENGAGE Learning. Capítulo 4: Introducción a la Probabilidad.