PDF 方法在光线追踪中的应用

万钊源

2025 年 7 月 15 日

1 从蒙特卡罗方法开始

蒙特卡罗方法的思想是通过计算机仿真，对某一随机事件进行多次重复，通过统计值推测未知特性量，随着采样次数的增加，估计值会收敛于真实值。

在光线追踪中，蒙特卡罗算法被大量应用：为了得到每个像素的的颜色，摄像机通过大量光线进行采样；为了得到物体表面的颜色，光线在物体表面以一定的概率被反射到随机方向。

然而，对于某些复杂情况，如光源尺寸极小时，蒙特卡罗方法需要大量采样才能得到良好的效果，导致算法运行时间显著增加。

为了让蒙特卡罗算法能够快速收敛，减少所需的采样数，引入了概率密度函数。

2 概率密度

对于一维实随机变量 X，设它的累积分布函数为 $F_X(x)$，如果存在可测函数 $f_X(x)$，使得

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,\mathrm{d}t$$

那么 X 是一个连续型随机变量，$f_X(x)$ 是它的概率密度函数（Probability Distribution Function, PDF）.

3 基本原理

下面介绍如何利用 PDF 使得蒙特卡罗方法更快速的收敛，为了简化讨论，我将考虑一维情况。对于区间 $[a, b]$ 上的非负积分

$$F = \int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

朴素的蒙特卡洛方法对该区间取 N 个均匀分布的随机变量 x_i，计算每个随机变量的函数值，取平均后乘以区间长度得到 F 的估计量

$$F = \frac{b-a}{N}\sum_{i=1}^{N} f(x_i)$$

考虑它的期望值

$$E\left[\frac{b-a}{N}\sum_{i=1}^{N} f(x_i)\right] = \frac{b-a}{N}\sum_{i=1}^{N} E[f(x_i)] = \frac{b-a}{N}\cdot N\cdot\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = F$$

这说明该估计量是无偏的，该方法的方差为

$$D\left[\frac{b-a}{N}\sum_{i=1}^{N} f\left(x_i\right)\right] = \frac{(b-a)^2}{N} D[f(X)] = \frac{(b-a)^2}{N}\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x - \left(\frac{F}{b-a}\right)^2\right)$$

可以看出，方差以 $\frac{1}{N}$ 的速率收敛，当 $N \to \infty$ 时能够收敛到准确的 F 值，然而，这意味着要将误差减少一半，需要 2 倍的采样数。光线追踪的场景往往非常复杂，特别是光源体积极小，亮度极高的情况，这种收敛速度往往是不够的。

为了改善收敛性，引入重要性采样。基本思想是：不再均匀采样，而是根据被积函数的特性，在函数值较大（对结果影响更显著）的区域更频繁地采样。

设 $p(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的概率密度函数。将积分重写为

$$F = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{f(x)}{p(x)} p(x)\,\mathrm{d}x$$

现在根据概率密度函数 $p(x)$ 生成 N 个随机样本 x_i，则 F 的估计量为

$$\hat{F} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{f(x_i)}{p(x_i)}$$

该估计量同样是无偏的：

$$E[\hat{F}] = E\left[\frac{f(X)}{p(X)}\right] = \int_a^b \frac{f(x)}{p(x)} p(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F$$

下面推导其方差

$$D\left[\hat{F}\right] = \frac{1}{N} D\left[\frac{f(X)}{p(X)}\right] = \frac{1}{N}\left(E\left[\left(\frac{f(X)}{p(X)}\right)^2\right] - \left(E\left[\frac{f(X)}{p(X)}\right]\right)^2\right)$$

其中

$$E\left[\left(\frac{f(X)}{p(X)}\right)^2\right] = \int_a^b \left(\frac{f(X)}{p(X)}\right)^2 p(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{f^2(x)}{p(x)}\mathrm{d}x$$

则

$$D\left[\hat{F}\right] = \frac{1}{N}\left(\int_a^b \frac{f^2(x)}{p(x)}\mathrm{d}x - F^2\right)$$

可以发现，如果能选取合适的 $p(x)$，可以使得方差大大减小，甚至趋近于零。因此，选择合适的概率密度函数 $p(x)$ 可以大大提高蒙特卡罗方法的收敛速度。

4 在光线追踪中的应用

在光线追踪中，求表面某一波长的强度有如下公式

$$\mathrm{Color}_o(\mathbf{x},\omega_o,\lambda) = \int_{\Omega} A\left(\mathbf{x},\omega_i,\omega_o,\lambda\right)\cdot \mathrm{pScatter}\left(\mathbf{x},\omega_i,\omega_o,\lambda\right)\cdot \mathrm{Color}_i\left(\mathbf{x},\omega_i,\lambda\right)\mathrm{d}\Omega$$

其中 $\mathrm{d}\Omega$ 代表立体角微元，它是二重积分微元 $\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$ 的简写版本；Color_o 和 Color_i 分别代表这一点该方向、该波长入射光线和反射光线的强度；A 为反照率（Albedo），它控制了该波长出射光线与入射光线的强度比；pScatter 代表控制其他条件后，入射光线为这一方向的概率，它也是一个概率密度函数，并且有

$$\int_{\Omega} \mathrm{pScatter}\left(\mathbf{x}, \omega_i, \omega_o, \lambda\right) \mathrm{d}\Omega = 1$$

.

根据上面的原理，我们改写该积分公式为

$$\mathrm{Color}_o(\mathbf{x}, \omega_o, \lambda) = \int_{\Omega} \frac{A\left(\mathbf{x}, \omega_i, \omega_o, \lambda\right) \cdot \mathrm{pScatter}\left(\mathbf{x}, \omega_i, \omega_o, \lambda\right) \cdot \mathrm{Color}_i\left(\mathbf{x}, \omega_i, \lambda\right)}{p\left(\mathbf{x}, \omega_i, \omega_o, \lambda\right)} p\left(\mathbf{x}, \omega_i, \omega_o, \lambda\right) \mathrm{d}\Omega$$

则蒙特卡罗方法应依概率密度函数 $p\left(\mathbf{x}, \omega_i, \omega_o, \lambda\right)$ 产生随机变量，计算

$$\frac{A\left(\mathbf{x}, \omega_i, \omega_o, \lambda\right) \cdot \mathrm{pScatter}\left(\mathbf{x}, \omega_i, \omega_o, \lambda\right) \cdot \mathrm{Color}_i\left(\mathbf{x}, \omega_i, \lambda\right)}{p\left(\mathbf{x}, \omega_i, \omega_o, \lambda\right)}$$

的平均值。

在实际应用中，为了用较小的采样数得到较好的结果，我们会给一些复杂物体（如光源）赋予更高权重，PDF 可以任意加权平均，只要最后系数和为 1，得到的就还是 PDF 函数。因此我们可以将计算每个材质单独的 PDF，将它与重要物体的 PDF 加权平均。采样时则是以各个 PDF 的权重为概率，随机选择一个 PDF 的采样方法。