PDF Method in Raytracing

2024 年 7 月 9 日

1 引言

在光线追踪的基本实现中，我们利用光路可逆的原理，假设以摄像机为光源往各个角度发射光线（一个角度对应了最终图像中的一个像素），通过计算光线的散射（漫反射，镜像反射，折射）来得到这个像素的颜色。这样做存在一个问题：现实生活中，如果存在一个小光源，我们理应得到更多它发出的光线，但在早期的漫反射实现中，我们仅考虑了漫反射面本身的特性（使用 Lambertian 分布），这会导致在光源小或者远的情况下，小采样的渲染会得到大量的噪点。如果有一种方式，使我们可以在计算散射光方向更偏向光源，就可以解决上述问题。这就是应用 PDF（probability density function：概率密度函数）的理由

2 Monte Carlo Integration

Monte Carlo Integration 是如下的公式：$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{f(x_i)}{p(x_i)}$，其中 x_i 的分布服从 PDF p。当 N 充分大时可认为相等

考虑给 Lambertian 反射的散射光赋上 PDF p（描述对光源的偏向性，不妨称之为光源 PDF），再利用 Monte Carlo Integration 来估计 Lambertian 反射的结果。假设递归函数 $f(x)$ 返回了一条光线的颜色，y_i 是入射光 x 的出射光，$scatter(y_i)$ 返回了产生出射光 y_i 的概率（这也是一种 PDF），有如下公式：$f(x) = \int scatter(y_i)f(y_i)dy \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{scatter(y_i)f(y_i)}{p(y_i)}$

3 生成光源 PDF

现在，我们希望描述上面提到的 PDF p。假设散射点 P 外一光源 A，其总面积为 A。方便起见，先考虑光源表面均匀采样的情况，这样光源表面的 PDF 就是常值函数 $\frac{1}{A}$。为了求出 P 点附近散射光的 PDF（可不失一般性假设散射光在以 P 点为球心的单位半球面上移动），取光源上 Q 点附近一极小的面积元 dS，利用投影与相似可以得到其在单位半球面上的投影面积 $dS' = \frac{dS\cos\theta}{|PQ|^2}$（其中 θ 是 PQ 连线与光源平面的夹角，可以轻易求出）

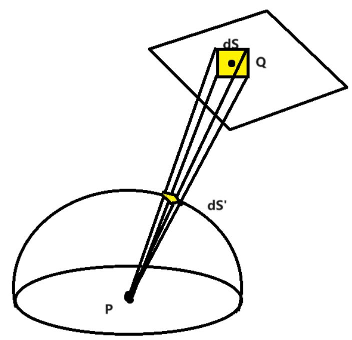

图 1: 简图

设 PQ 与半球面交点为 W，利用 $p(\overrightarrow{PW})dS' = \frac{1}{A}dS$ 可以得到 $p(\overrightarrow{PW}) = \frac{|PQ|^2}{A\cos\theta}$。

现在，我们通过计算一系列随机散射光线 y_i 的 $\sum\limits_{i=1}^{N}\frac{scatter(y_i)f(y_i)}{p(y_i)}$，就可以得到大致的 $f(x)$

对于光源表面不均匀采样的情况，需要在材料类中定义光源表面的 PDF，计算过程是类似的

4 Mixture PDF

如果仅按上面的方式生成光源 PDF，会碰到一个问题是：我们根本不关心不指向光源的光线了，所以构建光源 PDF 还需要考虑到漫反射材质本身的影响。为了解决这个问题，可以将 scatter 与 p 做加权的混合，再将这个 PDF 作为新的光源 PDF

至此，我们已经对 Lambertian 反射构建了 PDF，为了更真实的渲染，我们可能会需要基于一个给定 PDF 的随机数发生器

5 基于 PDF 的随机数发生器

考虑现在有一个 PDF $f:[0,1]\to\mathbb{R}$，我们希望能从均匀的随机数发生器中得到一个服从 f 的随机数发生器。朴素的想法是令 $F(t)=\int_0^t f(x)dx$，然后求出 $F^{-1}(x)$，令 y 为一个 $[0,1]$ 间的随机数，取 $F^{-1}(y)$ 为生成的随机数，这样做就得到了服从 f 的分布

实际应用中，大量的函数难以求积分或是求反函数。一个技术是对函数线性化，首先利用充分多的随机样本 y_i 可以求出充分多的 $f(y_i)$。找到 $f(y_i)$ 的中位数 $f(y_{mid})$，将 $(0.5, f(y_{mid}))$ 与原点和 $(1.0, 1.0)$ 用直线相连，得到的分段函数可以对 F^{-1} 做一个近似。这个过程是可以对左右部分递归继续做的，也就是说近似可以非常精细

下面举一个生成球面上随机点的例子，使用极坐标 (φ,θ)

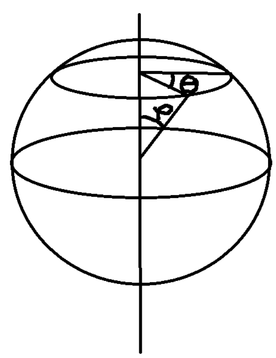

图 2: 简图

考虑均匀分布，有 PDF $p_\theta(\theta)=\frac{1}{2\pi}, p_\varphi(\varphi)=\frac{\sin_\varphi}{2}$，生成两个随机数 r_1 与 r_2，则有 $r_1=\int_0^{t_1} p_\theta(\theta), r_2=\int_0^{t_2} p_\varphi(\varphi)$ ，解得：$t_1=2\pi r_1, r_2=\frac{1-\cos t_2}{2}$，再利用极坐标 (t_2,t_1) 分别表达 x,y,z 即可

参考文献

[1] Peter Shirley, Trevor David Black, Steve Hollasch《Ray Tracing: The Rest of Your Life》2024-04-07