把温度作为应力因素，用 w_j 表示，在此文中我们使用的是步加寿命试验。为了方便，假定 j=1,2。用 T_{ij} 表示试验的检测时间，其中 i=1…… m_j 和 j=1,2。首先，将 N 个试验产品放到温度 w_1 的环境下，在检测时间 $t_{11}\ldots\ldots t_{1m_1}$ 时，分别取出 $k_{11}\ldots\ldots k_{1m_1}$ 个试验产品进行检测。由于是步进压力寿命试验，所以在 t_{1m_1} 时刻把温度调高至 w_2，剩下的试验产品继续放在 w_2 这一应力水平下进行测试，在测试时间 $t_{21}\ldots\ldots t_{2m_2}$ 依次取出相应的产品进行检测。

符号说明：

(1) T_{ji} (i=1,…… m_j， j=1,2)表示产品的检测时间。

(2) w_j (j=1,2)表示压力水平，在此文中用温度这一压力。

(3) k_{ji} 表示在检测时间 T_{ij} 和温度 w_j 下取出的检测产品的个数。

(4) n_{rij} 表示在检测时间 T_{ji} 和温度 w_j 下产品由于第 r 个原因坏掉的个数。

(5) S_{ij} 表示在检测时间 T_{ji} 和温度 w_j 下产品仍然保持完好的个数。

(6) T_{rijk} 表示在检测时间 T_{ji} 和温度 w_j 下，第 k 个产品由于原因 r 失效的时间。

(7) $S_{ij}=k_{ji}-\sum_{r=1}^{2}n_{rij}$ 。

在本文中设分别由于原因 1 和原因 2 导致失效的时间为 T_{rijk} (r=1,2，i=1… m_j， j=1,2)， T_{rijk} 为随机变量，并且相互独立。假设 T_{rijk} 服从参数为 λ_{rj} 的指数分布，概率密度函数为：

$$f_{rj}(t)=\lambda_{rj}\exp(-\lambda_{rj}t)\qquad (r=1,2\quad j=1,2)$$

那么累积分布函数就为：

$$F_{rj}(t)=1-\exp(-\lambda_{rj}t)$$

由于本试验引进了加速寿命试验，由加速模型可以得到，λ_{rj} 是产品在温度 w_j 条件下由于第 r 个因素的失效率，并且 λ_{rj} 与 w_j 之间是对数线性关系，即：

$$\lambda_{rj}=\alpha_{r0}\exp(\alpha_{r1}w_j)\qquad (\alpha_{r0},\alpha_{r1},w_j>0)$$

为了方便，在此设Δ_{ijk}为在在检测时间T_{ij}和温度w_j下第 k 个产品的指示性函数。当产品在检测时是好的，设Δ_{ijk}=0；当产品在检测时坏了，这时我们就要查找可能导致产品此次失效的原因，如果是由于原因 r 失效，设Δ_{ijk}=r(在本文试验中我们假定有两个竞争风险，所以 r=1,2)。指示性函数Δ_{ijk}如下：

$$\Delta_{ijk}=\begin{cases}0 & \text{for} \min\left(T_{1ijk},T_{2ijk}\right)>T_{ij}\\ 1 & \text{for } T_{1ijk}<\min\left(T_{2ijk},T_{ij}\right)\\ 2 & \text{for } T_{2ijk}<\min\left(T_{1ijk},T_{ij}\right)\end{cases}$$

p_{0ij},p_{1ij},p_{2ij}分别表示生存概率，由于原因 1 失效的概率，由于原因 2 失效的概率，由上述公式可推得：

$$p_{0ij}=\left(1-F_1\left(T_{ij}\mid w_j\right)\right)\left(1-F_2\left(T_{ij}\mid w_j\right)\right)=\exp\left(-\left(\lambda_{1j}+\lambda_{2j}\right)T_{ij}\right)$$

$$p_{1ij}=\left(\frac{\lambda_{1j}}{\lambda_{1j}+\lambda_{2j}}\right)\left(1-\exp\left(-\left(\lambda_{1j}+\lambda_{2j}\right)T_{ij}\right)\right)$$

$$p_{2ij}=\left(\frac{\lambda_{2j}}{\lambda_{1j}+\lambda_{2j}}\right)\left(1-\exp\left(-\left(\lambda_{1j}+\lambda_{2j}\right)T_{ij}\right)\right)$$

根据试验，可得到S_{ij}，n_{1ij}，n_{2ij}以及温度w_j(j=1,2)和检测时间T_{ij}(i=1,⋯⋯ m_j，j=1,2)，则关于$\alpha=\left\{\alpha_{10},\alpha_{11},\alpha_{20},\alpha_{21},\right\}$的似然函数可以写为：

$$L(\boldsymbol{\alpha}\mid\mathbf{T},\mathbf{w})=\prod_{i=1}^{m_j}\prod_{j=1}^{2}p_{0ij}^{S_{ij}}\,p_{1ij}^{n_{1ij}}\,p_{2ij}^{n_{2ij}}$$

贝叶斯估计

首先 $p_{0ij}, p_{1ij}, p_{2ij}$ 可以很简单的估计为 $\hat{p}_{0ij} = s_{ij} / k_{ij}$, $\hat{p}_{1ij} = d_{1ij} / k_{ij}$, $\hat{p}_{2ij} = d_{2ij} / k_{ij}$。为了防止有估计为零的情况，则我们可以采用拉普拉斯平滑法，则可以得到如下估计：

$$\widehat{p}_{0ij} = \frac{s_{ij+1}}{k_{ij+3}} \quad \widehat{p}_{1ij} = \frac{d_{1ij+1}}{k_{ij+3}} \quad \widehat{p}_{2ij} = \frac{d_{2ij+1}}{k_{ij+3}}$$

先验分布的选择：

设 ε_{rij} 为误差，即 $\widehat{p}_{rij} - p_{rij} = \varepsilon_{rij}$ ，并且假定 ε_{rij} 服从标准正态分布并且独立同分布，即 ε_{rij} ~N(0, σ^2)。则 α 的先验分布可以写为：

$$h(\boldsymbol{\alpha} \mid \mathbf{T}, \mathbf{w}, \sigma^2) \propto \prod_{i=1}^{m_j} \prod_{j=1}^{2} \prod_{r=1}^{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left(p_{rij} - \widehat{p}_{rij} \right)^2 \right\}$$

对于 σ^2 可以采用无信息先验：

$$h(\sigma^2) \propto \frac{1}{\sigma^2}$$

则 α 的联合先验分布可以写为：

$$\begin{aligned}
&h(\boldsymbol{\alpha}) \\
&\propto \int_0^\infty h(\boldsymbol{\alpha} \mid \mathbf{T}, \mathbf{w}, \sigma^2) h\left(\sigma^2\right) d\sigma^2 \\
&\propto \int_0^\infty \left(\sigma^2\right)^{-\frac{2(m_1+m_2)+2}{2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{m_j} \sum_{j=1}^{2} \sum_{r=1}^{2} \left(p_{rij} - \widehat{p}_{rij} \right)^2 \right\} d\sigma^2 \\
&\propto \left\{ \sum_{i=1}^{m_j} \sum_{j=1}^{2} \sum_{r=1}^{2} \left(p_{rij} - \widehat{p}_{rij} \right)^2 \right\}^{-(m_1+m_2)}
\end{aligned}$$

α 的联合后验分布可以写为：

$$h(\boldsymbol{\alpha} \mid \mathbf{T}, \mathbf{w}) \propto \prod_{i=1}^{m_j} \prod_{j=1}^{2} p_{0ij}^{S_{ij}} p_{1ij}^{n_{1ij}} p_{2ij}^{n_{2ij}} \times \left\{ \sum_{i=1}^{m_j} \sum_{j=1}^{2} \sum_{r=1}^{2} \left(p_{rij} - \widehat{p}_{rij} \right)^2 \right\}^{-(m_1+m_2)}$$

模拟实验

此次贝叶斯模拟实验中，假设参数值为： α_{10}=0.001, α_{11}=0.05, α_{20}=0.0001, α_{21}=0.08; 温度 w_1 （单位是摄氏度）情况下设置两个观测时间分别是 t_{11}=10 天，t_{12}=20 天；温度 w_2（单位是摄氏度）情况下设置两个观测时间分别是 t_{21}=30 天，t_{22}=40 天；设置三组不同的样本数来试验，即(K_1 K_2 K_3)=(10,50,100)。

此次模拟试验的参数值如表所示：

参数	符号	数值
风险 1	α_{10} α_{11}	(0.001 ,0.05)
风险 2	α_{20} α_{21}	(0.0001,0.08)
温度（摄氏度）	w_1 w_2	(45,55)
检测时间（天）	t_{11} t_{12} t_{21} t_{22}	(10,20,30,40)
样本量	K_1 K_2 K_3	(10,50,100)

不同的样本量在上述设定下的观测数据如下：

K_1=10（ $s_{ij}=k_{ji}-\sum_{r=1}^{2} n_{rij}$ ）

		Δ_{ijk}=0	Δ_{ijk}=1	Δ_{ijk}=2
t_{11}=10	w_1=45	s_{11}=	n_{111}=	n_{211}=
t_{12}=20	w_1=45	s_{21}=	n_{121}=	n_{221}=
t_{21}=30	w_2=55	s_{12}=	n_{112}=	n_{212}=
t_{22}=40	w_2=55	s_{22}=	n_{122}=	n_{222}=

用 Metropolis-Hastings algorithm 或者别的方法 ，模拟后验分布。(这些 s n 随机生成）
得到的结果形式和下面图片形式相似就可以了，和 mse 差不多的都行。

工具(T) 窗口(W) 帮助(H)

屏幕取词 划词链接 在CNKI中搜索

布局...

节信息...

表 5.4: 不同样本量下, 用贝叶斯法所得参数 α_0 和 α_1 的均方误差(MSE)、估计均值(MEAN)、方差(VAR)、标准差(SD).

Table 5.4: Under different sample size, the MSE、MEAN、VAR、SD of α_0 and α_1 under bayesian method.

参数	样本量	MSE	MEAN	VAR	SD
α_0	$k_1=20$	1.364e-06	3.532e-03	9.93e-06	1.245e-03
	$k_2=50$	9.838e-07	3.564e-03	9.888e-07	9.919e-04
	$k_3=100$	9.550e-07	3.556e-03	9.552e-07	9.773e-04
α_1	$k_1=20$	7.739e-06	2.802e-03	7.740e-06	2.782e-03
	$k_2=50$	7.689e-06	2.758e-03	7.690e-06	2.773e-03
	$k_3=100$	7.390e-06	2.771e-03	7.390e-06	2.718e-03