自测题一

一、单项选择题

（1）	（2）	（3）	（4）	（5）
D	C	B	A	A

二、填空题

（6）	（7）	（8）	（9）	（10）
$y=\frac{1}{3}x^3+\sin x+C_1x+C_2$	$2dx+2dy$	10	$\frac{x-1}{0}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{2}$	2π

三、计算题 **(每小题 6 分，共 48 分)**

11、解：$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{4-x^2-y^2}-2}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+y^2(\sqrt{4-x^2-y^2}+2)}{4-x^2-y^2-4}$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}-(\sqrt{4-x^2-y^2}+2)$$

$$=-4$$

12、设 $z=x^3y^2-y^{\sin y}-x^2\sin x$，求 $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}$

解：$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2y^2-2x\sin x-x^2\cos x$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=6x^2y \qquad \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}=6$$

13、求通过点 $P(-1,-2,1)$、$Q(1,-2,-3)$ 且垂直于平面 $x-2y+3z-4=0$ 平面方程

解：$\overrightarrow{PQ}=(2,0,-4)$，

于是所求平面的法向量为：$\vec{n}=(2,0,-4)\times(1,-2,3)=(-8,-10,-4)=-2(4,5,2)$

故所求平面方程为：$4(x+1)+5(y+2)+2(z-1)=0$，

即 $4x+5y+2z+12=0$

14、计算 $I=\int_L(x+y+z)ds$，其中 L 为折线 ABC，这里 $A(0,0,0),B(0,0,2),C(1,0,2)$

解： $AB:\frac{x}{0}=\frac{y}{0}=\frac{z}{1}$， 即 $AB:\begin{cases}x=0\\y=0,\ 0\le t\le 2\\z=t\end{cases}$

$BC:\frac{x}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z-2}{0}$， 即 $BC:\frac{x}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z-2}{0}:\begin{cases}x=t\\y=0,\ 0\le t\le 1\\z=2\end{cases}$

$$\begin{aligned}I&=\int_{AB}(x+y+z)ds+\int_{BC}(x+y+z)ds\\&=\int_0^2 t\sqrt{0+0+1}dt+\int_0^1(t+2)\sqrt{1+0+0}dt\\&=\frac{9}{2}\end{aligned}$$

15、计算 $\int_0^1 dx\int_x^1 e^{\frac{x}{y}}dy$

解： $$\begin{aligned}\int_0^1 dx\int_x^1 e^{\frac{x}{y}}dy&=\int_0^1 dy\int_0^y e^{\frac{x}{y}}dx\\&=\int_0^1 y(e-1)dy\ ,\\&=\frac{e-1}{2}\end{aligned}$$

16、计算 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dv$，$\Omega$ 为平面曲线 $\begin{cases}x^2=2z\\y=0\end{cases}$ 绕 Z 轴旋转一周形成的曲面 Σ 与平面 $z=2$ 围成的区域

解：（1） 旋转曲面 Σ 为 $2z=x^2+y^2$

（2） $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dv=\iiint\limits_{\Omega}\rho^3 d\rho d\theta dz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 d\rho\int_{\frac{1}{2}\rho^2}^2\rho^3 dz=\frac{16\pi}{3}$

17、计算 $I=\oiint\limits_{\Sigma}(x-y+1)dydz+(y-z+2)dzdx+(z-x+3)dxdy$，其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=2x$ 的外侧

解：令 $P=x-y+1,\ Q=y-z+2,\ R=z-x+3$ ，Ω 是球面 $x^2+y^2+z^2=2x$ 围成的闭区域，

由高斯公式， (2 分)

$$I=\iiint\limits_{\Omega}(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})dv=\iiint\limits_{\Omega}(1+1+1)dv=\iiint\limits_{\Omega}3dv=4\pi$$

18、判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3-1}{2^n}$ 的敛散性

解：令 $u_n=\dfrac{n^3-1}{2^n}$ （1 分）

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{(n+1)^3-1}{2^{n+1}}}{\dfrac{n^3-1}{2^n}}=\dfrac{1}{2}<1$

故 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^3-1}{2^n}$ 收敛。

四、综合应用题

19、设曲线积分 $\int_L 2xe^y dx+e^y f(x)dy$ 与路径无关，其中 $f(x)$ 具有连续的导数，且 $f(0)=0$.

（1）求函数 $f(x)$ 的表达式； （2）求 $\int_{(0,0)}^{(1,1)}2xe^y dx+e^y f(x)dy$.

解：（1） 令 $P=2xe^y$，$Q=e^y f(x)$，由于曲线积分 $\int_L 2xe^y dx+e^y f(x)dy$ 与路径无关 ，

则 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，于是， $2xe^y=e^y f'(x)$，即 $f'(x)=2x$

则 $f(x)=x^2+C$，由于 $f(0)=0$，于是 $C=0$，故 $f(x)=x^2$

（2）

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)}2xe^y dx+e^y f(x)dy=\int_{(0,0)}^{(1,1)}2xe^y dx+e^y x^2 dy=\int_0^1 2xdx+\int_0^1 e^y dy$$

$$=e \qquad (10\text{ 分})$$

20、解 （1）由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cdot\dfrac{(2n)!}{x^{2n}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{x^2}{(2n+1)(2n+2)}\right|=0$，故收敛域为 $(-\infty,+\infty)$

（2） $y'(x)=(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{(2n)!})'=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$

$$y''(x)=(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!})'=1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

于是 $y''-y=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}=1$

（3）由 $r^2-1=0$ 得 $r=\pm1$ ，于是微分方程的对应齐次方程的通解为

$$Y(x)=C_1e^x+C_2e^{-x}$$

又显然 $y^*=-1$ 是微分方程的的一个特解，于是微分方程的通解为

$$y(x)=C_1e^x+C_2e^{-x}-1$$

由于 $y(0)=0,\ y'(0)=0$，于是 $C_1=C_2=\dfrac{1}{2}$，

$$\text{所以}\qquad y(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}-1$$

自测题二

一、单项选择题

（1）	（2）	（3）	（4）	（5）	（6）	（7）	（8）	（9）	（10）
B	B	A	C	**A**	**B**	D	C	C	B

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

（11）	（12）	（13）	（14）	（15）
-2	$\int_0^2 dy\int_0^{\frac{y}{2}} f(x,y)dx$	0	$(-3,3)$	0

三、求解下列各题

（16）解： 平面 $3x-y+z-2=0$ 的法向量 $\vec{n_1}=(3,-1,1)$，$\overrightarrow{PQ}=(-2,2,4)$，

由题意得所求平面的法向量

$$\vec{n}=\vec{n_1}\times\overrightarrow{PQ}=(3,-1,1)\times(-2,2,4)=(-6,-14,4)=-2(3,7,-2)，$$

故所求平面方程为 $\quad 3(x-1)+7(y+2)-2(z+1)=0$，

即 $\quad 3x+7y-2z+9=0$

（17）解： 设 $\quad F(x,y,z)=x+2y+z-ye^{xyz}$，则 $\quad F_x=1-y^2ze^{xyz}$，

$F_y=2-e^{xyz}-xyze^{xyz}$，$\quad F_z=1-xy^2e^{xyz}$

于是 $\quad \left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=0}}=-\left.\dfrac{F_x}{F_z}\right|_{\substack{x=1\\y=0}}=-1$，$\quad \left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=0}}=-\left.\dfrac{F_y}{F_z}\right|_{\substack{x=1\\y=0}}=-1$

故 $$\left.dz\right|_{\substack{x=1\\y=0}}=-dx-dy$$

（18）解： 令 $\ u(x,y)=2x-y,\ \ v(x,y)=3x-2y\ $ 则 $\ u(1,1)=1,\ \ v(1,1)=1$，

于是 $\quad \left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}=\left.\left(\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)\right|_{\substack{x=1\\y=1}}=\left.(2vu^{v-1}+3u^v\ln u)\right|_{\substack{x=1\\y=1}}=2$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}} = \left.\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right|_{\substack{x=1\\y=1}} = \left.(-vu^{v-1}-2u^{v}\ln u)\right|_{\substack{x=1\\y=1}} = -1$$

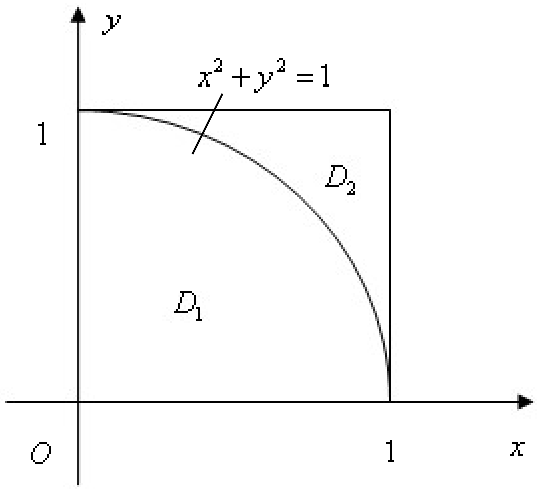
（19）解: 解方程组 $\begin{cases} f_x(x,y)=6-6x=0 \\ f_y(x,y)=-2-2y=0 \end{cases}$ 得驻点 $(1,-1)$

又 $A=f_{xx}(1,-1)=-6<0$， $B=f_{xy}(1,-1)=0$， $C=f_{yy}(1,-1)=-2$，

则 $AC-B^2>0$， 于是函数在 $(1,-1)$ 处有极大值 $f(1,-1)=4$

（20）计算二重积分 $\iint\limits_{D}\left|x^2+y^2-1\right|d\sigma$，其中 $D=\left\{(x,y)\middle|0\le x\le 1,0\le y\le 1\right\}$.

解 如图所示，把 D 分成 D_1 与 D_2 两部分，



$$\iint\limits_{D}\left|x^2+y^2-1\right|d\sigma$$
$$=\iint\limits_{D_1}\left|x^2+y^2-1\right|d\sigma+\iint\limits_{D_2}\left|x^2+y^2-1\right|d\sigma,$$

由于 $\iint\limits_{D_1}\left|x^2+y^2-1\right|d\sigma=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1(1-\rho^2)\rho d\rho=\frac{\pi}{8}$

$$\iint\limits_{D_2}\left|x^2+y^2-1\right|d\sigma$$
$$=\int_0^1dx\int_{\sqrt{1-x^2}}^1(x^2+y^2-1)dy$$
$$=\int_0^1\left(x^2-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\right)dx$$
$$=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{3}$$

因此，$\iint\limits_{D}\left|x^2+y^2-1\right|d\sigma=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{8}-\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}$

（21）解: $\iiint\limits_{\Omega}zdv=\iiint\limits_{\Omega}z\rho d\rho d\theta dz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}d\rho\int_{\frac{1}{2}\rho^2}^{1}z\rho dz$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}\frac{1}{2}\rho\left(1-\frac{1}{4}\rho^4\right)d\rho=\frac{2}{3}\pi$$

或: $\iiint\limits_{\Omega}zdv=\int_0^1zdz\iint\limits_{x^2+y^2\le 2z}dxdy=\int_0^1 2\pi z^2dz=\frac{2}{3}\pi$

（22）解: L 的方程为 $\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{0}=\frac{z+2}{-4}$，

即 L 的参数方程为 $\begin{cases} x=3t+1 \\ y=2 \\ z=-4t-2 \end{cases}$ $(0\le t\le 1)$

$$\int_L(x+y+z)ds=\int_0^1(3t+1+2-4t-2)\sqrt{9+0+16}dt$$
$$=\frac{5}{2}$$

（**23**）**解**：令 $P=x^3-y,\ Q=x-y^3$，由格林公式得

$$\oint_L (x^3-y)dx+(x-y^3)dy$$

$$=\iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})d\sigma=\iint_D 2d\sigma$$

$$=2\times\frac{1}{2}=1$$

或：

AB 的方程为 $y=0,\quad x$ 从 0 变到 1，BC 的方程为 $x=1,\quad y$ 从 0 变到 1，

CA 的方程为 $y=x,\quad x$ 从 1 变到 0，

$$\oint_L (x^3-y)dx+(x-y^3)dy$$
$$=\int_{AB}(x^3-y)dx+(x-y^3)dy+\int_{BC}(x^3-y)dx+(x-y^3)dy+\int_{CA}(x^3-y)dx+(x-y^3)dy$$

$$=\int_0^1 x^3dx+\int_0^1(1-y^3)dx+\int_1^0(x^3-x+x-x^3)dx=1$$

（**24**）**解**：设 $\Sigma_1:\begin{cases} z=1 \\ x^2+y^2\le 1\end{cases}$ 取下侧，记由 Σ,Σ_1 所围立体为 Ω，则高斯公式可得

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma+\Sigma_1}(x-1)^3dydz+(y-1)^3dzdx+(z-1)dxdy&=-\iiint_\Omega(3(x-1)^2+3(y-1)^2+1)dxdydz\\&=-\iiint_\Omega(3x^2+3y^2+7-6x-6y)dxdydz\\&=-\iiint_\Omega(3x^2+3y^2+7)dxdydz\\&=-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rdr\int_{r^2}^1(3r^2+7)dz=-4\pi\end{aligned}$$

在 $\Sigma_1:\begin{cases} z=1 \\ x^2+y^2\le 1\end{cases}$ 取下侧上，$\iint_{\Sigma_1}(x-1)^3dydz+(y-1)^3dzdx+(z-1)dxdy=\iint_{\Sigma_1}(1-1)dxdy=0$，

所以 $\iint_\Sigma (x-1)^3dydz+(y-1)^3dzdx+(z-1)dxdy=\iint_{\Sigma+\Sigma_1}(x-1)^3dydz+(y-1)^3dzdx+(z-1)dxdy=-4\pi$

（25）解：由于$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n,\quad -1<x<1$

故$\frac{1}{x}=\frac{1}{1+(x-1)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (x-1)^n,\quad 0<x<2$

四、证明题

（26）已知平面区域$D=\left\{(x,y)\middle|0\le x\le\pi,\ 0\le y\le\pi\right\}$，$L$为$D$的正向边界. 证明：

（1）$\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\oint_L xe^{-\sin y}dy-ye^{\sin x}dx$；（2）$\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx\ge 2\pi^2$.

证明 （1）左边 $=\int_0^{\pi}\pi e^{\sin y}dy-\int_{\pi}^{0}\pi e^{-\sin x}dx=\pi\int_0^{\pi}(e^{\sin x}+e^{-\sin x})dx$，

右边$=\int_0^{\pi}\pi e^{-\sin y}dy-\int_{\pi}^{0}\pi e^{\sin x}dx=\pi\int_0^{\pi}(e^{\sin x}+e^{-\sin x})dx$

故 $\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\oint_L xe^{-\sin y}dy-ye^{\sin x}dx$

（2）由于$e^{\sin x}+e^{-\sin x}\ge 2$，

所以 $\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\pi\int_0^{\pi}(e^{\sin x}+e^{-\sin x})dx\ge 2\pi^2$

自测题三

一、单项选择题

（1）	（2）	（3）	（4）	（5）
D	**D**	**C**	**A**	**C**

二、填空题

（6）	（7）	（8）	（9）	（10）
2	$-\sqrt{2}$	$x-y-3z+16=0$	1	0

三、计算题

11、解： $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\dfrac{3-(xy)^2-e^{xy}}{x^3+y^3}=\dfrac{3-0-e^0}{1^3+0^3}=2$

12、设 $z=x^2y^2-3y^3-x^2\cos x$，求 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}$；

解： $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2xy^2-2x\cos x+x^2\sin x$

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=4xy\ \overrightarrow{PQ}=(-1,3,4)$ $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}=4$

13、解： ，

于是所求平面的法向量为： $\vec{n}=(2,3,-5)\times(-1,3,4)=(27,-3,9)=3(9,-1,3)$

故所求平面方程为：$9(x+1)-(y+1)+3(z+7)=0$，

即 $9x-y+3z+29=0$

14、解：令 O（0,0）、 A（1,1）、 B（1,0）

$OA: y=x(0\le x\le 1)$， $AB: x=1(0\le y\le 1)$ ， $BO: y=0(0\le x\le 1)$

$$\begin{aligned}&\int_L(x-y)ds=\int_{OA}(x-y)ds+\int_{AB}(x-y)ds+\int_{BO}(x-y)ds\\&=\int_0^1(x-x)\sqrt{1+1}dx+\int_0^1(1-y)\sqrt{1+0}dy+\int_0^1(x-0)\sqrt{1+0}dx\\&=1\end{aligned}$$

15、解： $\int_{-1}^{1}dx\int_{0}^{1}ye^{xy}dy=\int_{0}^{1}dy\int_{-1}^{1}ye^{xy}dx$，

$=\int_{0}^{1}(e^{y}-e^{-y})dy=e+\dfrac{1}{e}-2$

16、解： $\iiint\limits_{\Omega}z^2dxdydz=\iiint\limits_{\Omega}z^2\rho d\rho d\theta dz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 d\rho\int_{\rho^2}^4 z^2\rho dz=64\pi$

17、解：令 $P=x+2y+1,\ Q=y+3z+2,\ R=z+4x+3$ ，Ω 是平面 $|x|=1$，$|y|=1$，

$|z|=1$ 围成的闭区域，

由高斯公式，

$$I=\iiint\limits_{\Omega}(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})dv=\iiint\limits_{\Omega}(1+1+1)dv=\iiint\limits_{\Omega}3dv=24$$

18、级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n^2}{3^n}$ 是否收敛？若收敛，是条件收敛，还是绝对收敛？

解：令 $u_n=(-1)^n\dfrac{n^2}{3^n}$ (1 分)

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{(n+1)^2}{3^{n+1}}}{\dfrac{n^2}{3^n}}=\dfrac{1}{3}<1$

故 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n^2}{3^n}$ 收敛且绝对收敛。

四、综合应用题

19、解：（1）方程两边求导得

$$f(x)+\frac{1}{2}f'(x)=2x$$

（2） 令 $y=f(x)$

$y'+2y=4x$ 为一阶线性微分方程，其中 $P(x)=2,Q(x)=4x$

代入公式

$y=e^{-\int P(x)dx}(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C)=e^{-\int 2dx}(\int 4xe^{\int 2dx}dx+C)=2x-1+Ce^{-2x}$

由 $f(0)=0$ 得 $C=1$．原方程的解为

$$y=2x-1+e^{-2x}$$

20、设函数 $f(u)$ 具有二阶连续导数，函数 $z=f(e^x\sin y)$ 满足方程 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(z+1)e^{2x}$，若 $f(0)=0$， $f'(0)=0$，求函数 $f(u)$ 的表达式.

解 令 $u=e^x\sin y$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f'(u)e^x\sin y$， $\dfrac{\partial z}{\partial y}=f'(u)e^x\cos y$，

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f'(u)e^x\sin y+f''(u)e^{2x}\sin^2 y$， $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-f'(u)e^x\sin y+f''(u)e^{2x}\cos^2 y$

代入 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(z+1)e^{2x}$ 得 $f''(u)-f(u)=1$

齐次方程 $f''(u)-f(u)=0$ 的通解为 $f(u)=C_1e^u+C_2e^{-u}$ ，方程 $f''(u)-f(u)=1$ 的一个特解为 $f^*(u)=-1$，故方程 $f''(u)-f(u)=1$ 的通解为

$$f(u)=C_1e^u+C_2e^{-u}-1.$$

由 $f(0)=0$， $f'(0)=0$ 得 $C_1=C_2=\dfrac{1}{2}$，从而函数 $f(u)$ 的表达式为 $f(u)=\dfrac{e^u+e^{-u}}{2}-1$

21、设 $a_n=\dfrac{1}{\pi}\int_0^{n\pi}x\left|\sin x\right|dx$，（$n=1,2,\cdots$），分别求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{4a_n-1}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{4a_n-1}$ 的和.

解 令 $x=n\pi-t$，则

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{n\pi}x\left|\sin x\right|dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{n\pi}(n\pi-t)\left|\sin t\right|dt=n\int_0^{n\pi}\left|\sin t\right|dt-\frac{1}{\pi}\int_0^{n\pi}t\left|\sin t\right|dt$$

所以 $a_n=\dfrac{n}{2}\int_0^{n\pi}\left|\sin t\right|dt=n^2$（$n=1,2,\cdots$）

（1）级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{4a_n-1}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{4n^2-1}$ 的部分和数列为

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4k^2-1}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)\\&=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right]\\&=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)\end{aligned}$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{1}{2}$，即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{4a_n-1}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{4n^2-1}=\dfrac{1}{2}$

（2） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{4a_n-1}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{4n^2-1}=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{(-1)^n}{2n-1}-\dfrac{(-1)^n}{2n+1}\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n-1}+\dfrac{1}{2}$

考虑幂级数 $\varphi(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n-1}x^{2n-1}$， $-1\le x\le 1$，则逐项求导，得

$$\varphi'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^{2n-2}=\frac{-1}{1+x^2}, \qquad -1<x<1$$

于是 $\varphi(x)=\varphi(0)+\int_0^x\varphi'(x)dx=\int_0^x\dfrac{-1}{1+x^2}dx=-\arctan x \quad -1\le x\le 1$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n-1}=-\dfrac{\pi}{4}$，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{4a_n-1}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{4n^2-1}=-\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}$