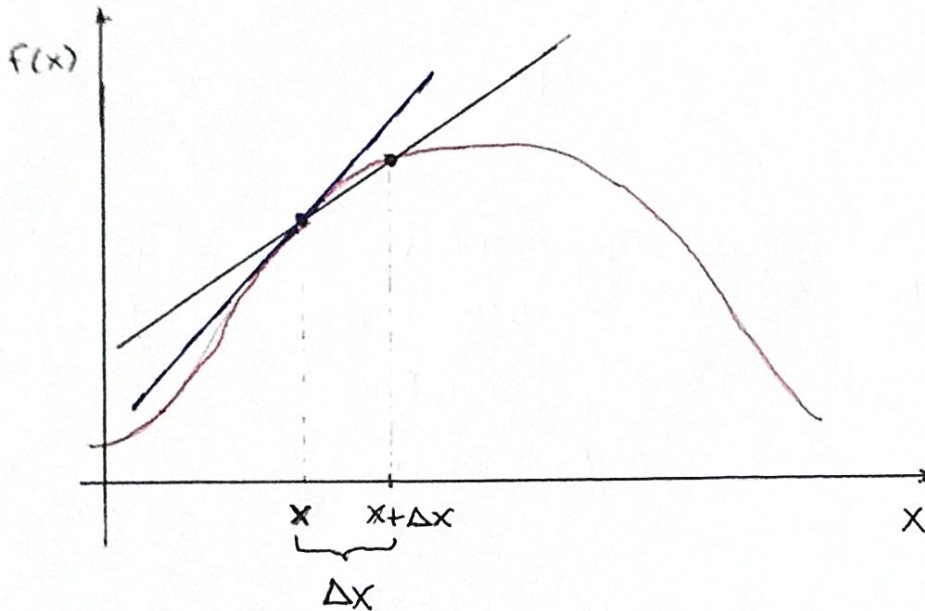


Derivada

Taxa de variação de uma função com relação a uma variável independente



$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Lei das Potências

$$f(x) = x^2$$

$$\frac{df}{dx} \approx \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$$

$$\approx \frac{(x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2) - x^2}{\Delta x}$$

$$\approx \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2x + \cancel{\Delta x}^0$$

$$\boxed{\frac{df}{dx} = 2x}$$

Generalizando:

$$f(x) = x^N$$

$$\frac{df}{dx} \approx \frac{1}{\Delta x} \left[(x+\Delta x)^N - x^N \right]$$

$$\approx \frac{1}{\Delta x} \left[x^N + N x^{N-1} \Delta x + \frac{N(N-1)}{2} x^{N-2} \Delta x^2 + \dots - x^N \right]$$

$$\approx \frac{1}{\Delta x} \left[N x^{N-1} \Delta x + O(\Delta x^2) \right]$$

$$\approx N x^{N-1} + O(\cancel{\Delta x})$$

$$\boxed{\frac{df}{dx} = N x^{N-1}}$$

Funções trigonométricas

$$f(x) = \sin(x)$$

Dois resultados de limite que serão usados:

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = 0}$$

$$\frac{df}{dx} \approx \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin(x)}{\Delta x}$$

$$\approx \frac{\sin(x) \cos(\Delta x) + \sin(\Delta x) \cos(x) - \sin(x)}{\Delta x}$$

$$\approx \sin(x) \frac{\cos(\Delta x) - 1}{\Delta x} + \cos(x) \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x}$$

$$\boxed{\frac{df}{dx} = \cos(x)}$$

$$F(x) = \cos(x) \rightarrow$$

$$\frac{dF}{dx} = -\sin(x)$$

Exercício da lista 1

Exponencial

$$F(x) = b^x$$

$$\frac{dF}{dx} \approx \frac{b^{(x+\Delta x)} - b^x}{\Delta x}$$

$$\approx \frac{b^x \cdot b^{\Delta x} - b^x}{\Delta x} = b^x \left[\frac{b^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \right]$$

$$\frac{dF}{dx} = b^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{b^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \right] \rightarrow \text{A derivada de uma função exponencial é sempre proporcional à própria função}$$

Δx	$\frac{2^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$	$\frac{3^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$
0.1	0.71773	1.16123
0.01	0.69556	1.10467
0.001	0.69339	1.09922
0.0001	0.69317	1.09867
0.00001	0.69315	1.09862

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \approx 0.69315 \longrightarrow \frac{d}{dx} (2^x) = 2^x \cdot (0.69315)$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \approx 1.09862 \longrightarrow \frac{d}{dx} (3^x) = 3^x \cdot (1.09862)$$

Existe alguma base b onde $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{b^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 1$?

$$e \approx 2.71828$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 1$$

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

Mudança Para base e:

$$2^x$$

$\ln 2 \rightarrow e$ elevado a que número é igual a 2?

$$\ln 2 = 0.69315$$

$$2^x = (e^{\ln 2})^x = e^{\ln 2 \cdot x} = e^{0.69315x}$$

Propriedades

$$\frac{dF(x)}{dx} = F'(x) = f'$$

Multiplicação por uma constante:

$$(cf)' = c \cdot f'$$

Soma de funções:

$$(f+g)' = f' + g'$$

Multiplicação de funções

$$(f \cdot g)' = f \cdot g' + g \cdot f'$$

Regra da Cadeia

$$[f(g)]' = f'(g) \cdot g'$$