

UN π 7

2⁰3
1>1

OBMEP – Banco de Questões 2020

Cleber Assis e Samuel Feitosa

Banco de Questões 2020
Copyright© 2020 by IMPA

Direitos reservados, 2020 pela Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada – IMPA
Estrada Dona Castorina, 110 – Rio de Janeiro – 22460-320

Impresso no Brasil/Printed in Brazil
Primeira edição e impressão

Texto e diagramação: Cleber Assis e Samuel Feitosa

Revisão: Elisa Sankuevitz

Este livro foi escrito usando o sistema \LaTeX .

Capa: Priscila Sousa

IMPA/OBMEP
Banco de Questões 2020
Rio de Janeiro, IMPA, 2020
175 páginas
ISBN 978-85-244-0497-9

Distribuição
IMPA/OBMEP
Estrada Dona Castorina, 110
22460-320 Rio de Janeiro, RJ
e-mail: contato@obmep.org.br
www.obmep.org.br

Apresentação	7
Prefácio	9
Nível 1	11
Nível 2	27
Nível 3	41
Enunciados e Soluções do Nível 1	61
Enunciados e Soluções do Nível 2	93
Enunciados e Soluções do Nível 3	129
Índice de Problemas	173

APRESENTAÇÃO

Desde a sua primeira edição, em 2005, a OBMEP envia a todas as escolas públicas do país um Banco de Questões com problemas e desafios de Matemática para alunos e professores. O Banco pretende despertar o prazer pela Matemática, estimular o aluno interessado com perguntas instigantes e proporcionar um treinamento para as provas da OBMEP.

Os problemas deste ano, concebidos pelos professores Cleber Assis e Samuel Feitosa, estão ordenados em grau crescente de dificuldade e exigem mais imaginação do que uma boa educação em Matemática.

A edição deste ano do Banco de Questões e todas as edições anteriores estão disponíveis na página www.obmep.org.br, assim como as apostilas e o material didático utilizado no Programa de Iniciação Científica Junior.

Caso encontre alguma solução diferente daquela apresentada ao final do Banco de Questões, não deixe de mandá-la para

bancodequestoes@obmep.org.br.

As mais originais serão publicadas na página da OBMEP.

Boa diversão!

Claudio Landim

Coordenador-Geral da OBMEP

Querido leitor/leitora,

O Banco de Questões deste ano da OBMEP – Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas – segue o mesmo padrão do banco do ano passado. Para facilitar a busca de questões em meio ao livro, há um Sumário no início e um Índice Remissivo no final com os nomes dos problemas e respectivas páginas onde aparecem seus enunciados e soluções. Além disto, as questões do Nível 1 são numeradas como **1**, **2**, **3** etc. As questões do Nível 2 são numeradas como **1**, **2**, **3** etc. E as questões do Nível 3 são numeradas como **1**, **2**, **3** etc.

Muitos dos problemas podem resistir às primeiras investidas do leitor e isto não deve ser motivo de desânimo. Um bom conselho é discuti-los com outras pessoas. Isto certamente tornará a experiência de resolvê-los ainda mais prazerosa. Além disto, durante a leitura das soluções, o uso do papel e da caneta podem ser bons instrumentos para a compreensão de todos os detalhes envolvidos.

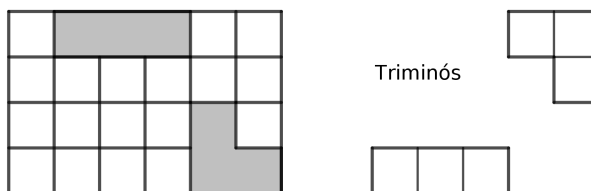
Alguns dos problemas deste banco foram inspirados em clássicos problemas de olimpíadas ao redor do mundo e hoje constituem um tipo de conhecimento folclórico que todo estudante e professor interessado em competições deve ter contato. Não podemos deixar de manifestar um enorme agradecimento a todos os professores, geralmente anônimos, que dedicam um enorme tempo de suas vidas elaborando belos problemas de olimpíadas e que tanto nos estimulam a aprender mais Matemática.

Bom proveito!

Cleber Assis e Samuel Feitosa

1 *Cobrindo o Tabuleiro*

Triminós são peças formadas por três quadradinhos, como indica a figura abaixo. Dois desses triminós foram colocados dentro de um tabuleiro 4×6 . Qual o número máximo de triminós que podem ser colocados dentro do tabuleiro de modo a cobrir sem sobreposição as casinhas restantes?

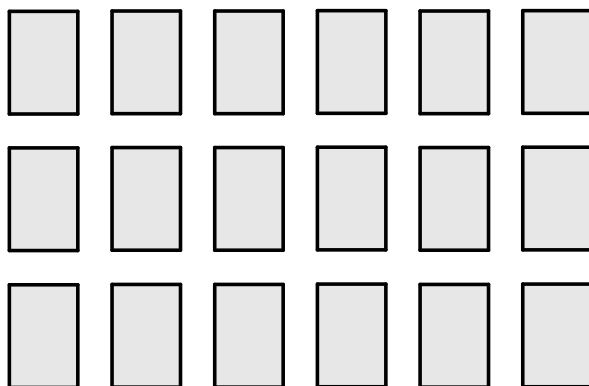
**2** *O Número de Zeros*

Resolvendo as expressões abaixo, qual o resultado termina com o maior número de zeros?

- a) $2^5 \cdot 3^4 \cdot 5^6$.
- b) $2^4 \cdot 3^4 \cdot 5^5$.
- c) $4^3 \cdot 5^6 \cdot 6^5$.
- d) $4^2 \cdot 5^4 \cdot 6^3$.

3 Baralho Soma

Júlia possui um baralho com 18 cartas, numeradas de 1 a 18. Após embaralhar, ela distribui as cartas com os números voltados para baixo, em 3 linhas e 6 colunas, conforme a figura.

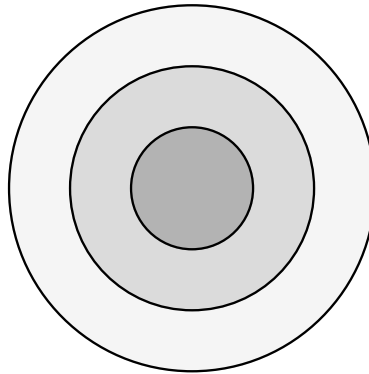


Júlia escolhe uma soma X e vira duas cartas. Se a soma for X , ela retira o par da mesa, mas se não for X , ela retorna as cartas à posição inicial. Ela repete este processo até que todos os pares com soma igual a X sejam virados.

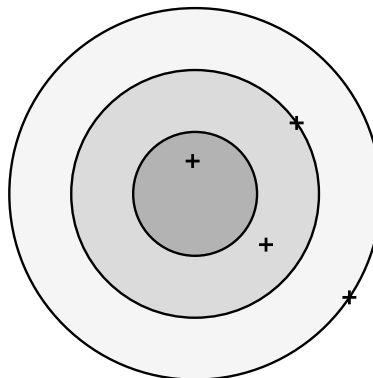
- a) Se ela escolhe $X = 8$, quais pares sairão da mesa?
- b) Para qual valor de X todas as cartas saem da mesa?
- c) Para um determinado X , exatamente 2 cartas ficam na mesa. Quantos são os possíveis valores de X ?

4 Dardos Certeiros

Na figura, temos um alvo no qual lançam-se dardos. O círculo interno vale 10 pontos, o anel intermediário vale 5 pontos, o anel externo vale 3 pontos e a área externa vale 0. Caso o dardo acerte uma linha, a pontuação será a média dos pontos das regiões que são divididas pela linha. Em cada jogada, o participante lança 4 dardos.



- a) As marcas no alvo da figura a seguir indicam os dardos lançados por Leo. Quantos pontos ele fez?



- b) Quantos pontos diferentes podem ser obtidos lançando os 4 dardos, sem que nenhum deles acerte qualquer linha?
- c) William pretende fazer 30 pontos nos seus 4 lançamentos. De quantas maneiras diferentes ele pode obter esta soma, não importando a sequência dos dardos, ou seja, as sequências (10, 10, 10, 0) e (0, 10, 10, 10) são consideradas uma forma só de somar 30 pontos ($3 \cdot 10 = 30$)?

5 Laranjas e Maçãs

Em uma frutaria, Jaime percebeu que uma laranja custa o mesmo que meia maçã mais meio real, percebeu também que um terço de uma maçã custa o mesmo que um quarto de uma laranja mais meio real. Com o valor de 5 laranjas mais 5 reais, quantas maçãs Jaime consegue comprar?

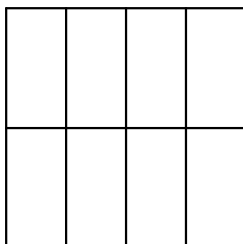
6 Calculadora Maluca

A calculadora de Joseane ficou maluca: para cada algarismo que ela aperta, aparece seu dobro no visor. As teclas de operações de adição, subtração, multiplicação e divisão funcionam normalmente e não podem ser apertadas duas vezes seguidas. Por exemplo, uma sequência de operações permitida é escrever $2 \rightarrow \times \rightarrow 3$, que gera o número $4 \cdot 6 = 24$.

- a) Como ela pode fazer aparecer 80 apertando 3 teclas?
- b) Como ela pode fazer aparecer 50 apertando 3 teclas de algarismos e duas de operações de forma alternada?
- c) Qual a menor quantidade de teclas que ela deve apertar para obter no número 23?

7 Divisão do Terreno

Jonas dividiu um terreno quadrado em oito partes retangulares iguais, conforme a figura, dando uma parte para cada um dos seus oito filhos. Para cercar sua parte, Antônia verificou que o seu perímetro era $120m$.



- a) Qual a área do terreno que Jonas dividiu?
- b) Se representarmos o perímetro de um dos terrenos menores por P , qual a área original do terreno em função de P ?

8 *Gincana na Escola*

Uma escola com 862 alunos participará de uma gincana, cujas regras são:

- I) O número de inscritos tem que ser um número entre $\frac{2}{3}$ e $\frac{7}{9}$ do total de alunos da escola.
- II) Como os alunos serão divididos em grupos com 11 alunos, o número de inscritos deverá ser múltiplo de 11.

Quantas são as possíveis quantidades de inscritos desta escola?

9 *Moedas na Mesa*

Sobre uma mesa estão 10 moedas, todas com “cara” voltada para cima. Uma jogada consiste em virar exatamente 4 moedas.

- a) Qual a quantidade mínima de jogadas para que todas estejam com “coroa” voltada para cima?
- b) Se fossem 11 moedas, seria possível deixar todas com coroa voltada para cima?

10 *Misturando Líquidos*

Em um recipiente existem 6 litros de uma mistura homogênea de dois líquidos (alfa e beta) na razão de 7 : 2, enquanto que em outro recipiente existem 9 litros de outra mistura com os mesmos dois líquidos (alfa e beta), só que neste a razão é 4 : 7. Misturando os líquidos dos dois recipientes, qual será a nova razão?

11 *Meninos e Meninas na Sala de Aula*

Em uma sala de aula há 50 alunos, dentre meninos e meninas. Pelo menos um dos alunos é menino. Tomando qualquer par de alunos, pelo menos um dos dois é menina. Quantas são as meninas desta sala?

12 *Círculo de Alunos*

Os alunos de uma escola formaram um círculo. Jonas e Amanda, que não estavam no círculo, resolveram contar os alunos do círculo, mas cada um iniciando por um aluno diferente, apesar de seguirem no mesmo sentido. Marcos foi o número 37 na contagem de Jonas e o número 15 na de Amanda. Nair foi a número 3 na contagem de Jonas e número 201 na de Amanda. Quantos alunos a escola possui?

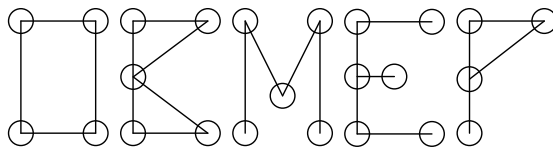
13 *Passeio de Casais*

Três casais estão em um passeio. Valdir tem 30 reais a mais que Laura e Paulo tem 50 reais a mais que Clara. Cada um dos homens tem exatamente 40 reais a mais que a respectiva esposa. Laura e Clara têm mais dinheiro que Bruna, que só tem 30 reais, e Joaquim é professor de Matemática.

- a) Quem é a esposa de Paulo?
- b) Quem é a esposa de Valdir?
- c) Que quantia Joaquim possui?

14 *Pintando Bolinhas na OBMEP*

Na figura, cada uma das 5 letras possui certa quantidade de círculos. Dispomos de 3 cores (azul, vermelho, laranja) para pintar os círculos (cada um de uma única cor).

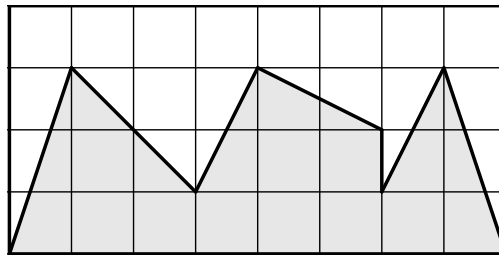


- a) De quantas maneiras diferentes podemos pintar os círculos da letra “O”, não necessariamente usando as 3 cores?
- b) De quantas maneiras diferentes podemos pintar os círculos da letra “E” usando necessariamente as 3 cores?
- c) De quantas maneiras diferentes podemos pintar a letra “B” de forma que círculos ligados por um segmento devam ter cores diferentes? (Os três círculos alinhados na vertical possuem DOIS segmentos separando-os).

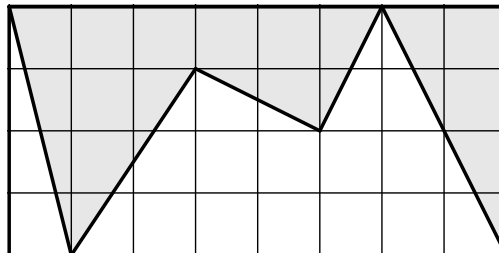
15 *Área no Quadriculado*

Nas figuras, os quadriculados são compostos por quadradinhos com 1 cm de lado.

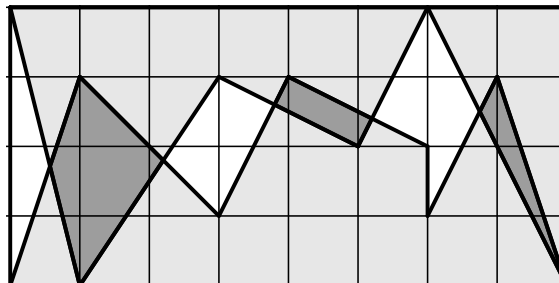
- a) Qual a área cinza do quadriculado a seguir?



- b) Qual a área cinza do quadriculado a seguir?



- c) Qual a área da parte branca do quadriculado, sabendo que a área cinza escuro (2 quadriláteros e 1 triângulo) tem 4 cm^2 ?



16 *Cooperativa Agrícola*

Uma cooperativa agrícola de pequenos produtores criou uma numeração própria com 6 algarismos para que o consumidor identifique a procedência dos produtos:

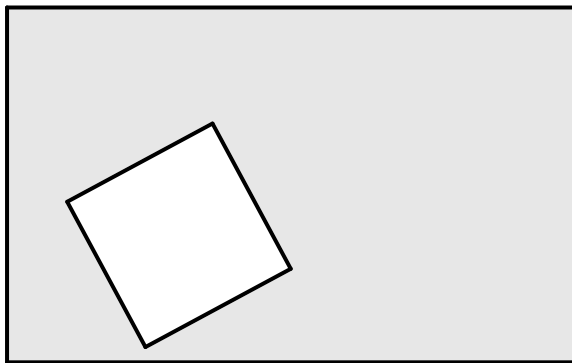
- I) Os 2 primeiros algarismos indicam a sub-região, que são 27, numeradas de 01 a 27.
- II) Os 2 algarismos seguintes dizem respeito ao produtor, sendo que cada sub-região possui 40, numerados de 31 a 70 (perceba que existe o produtor 35, por exemplo, na sub-região 01, na 02, na 03..., ou seja, são 27 produtores número 35).
- III) Os 2 últimos algarismos referem-se ao tipo de produto, que são 28, numerados de 71 a 98.

Por exemplo, o número 074197 corresponde a um produto da sub-região 07, produtor 41 desta sub-região, tipo 97.

- a) Carlos anotou o número na sequência errada, trocando de lugar as 3 partes do código, anotando 900950. Mesmo assim é possível identificar sub-região, produtor e tipo do produto?
- b) Ao todo, quantos códigos diferentes podem ser gerados, de forma que atenda às condições da cooperativa?
- c) Júnior é um consumidor supersticioso. Ele detesta o número 15, não comprando qualquer produto que o contenha. Quantos são os códigos de produtos nesta situação?

17 *Dividindo Áreas*

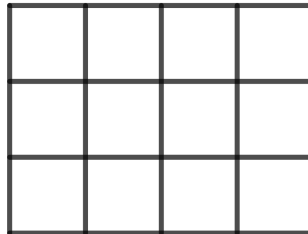
Na figura, temos um retângulo e um quadrado interno ao retângulo. A área cinza é a área do retângulo que não pertence ao quadrado. É possível dividir a área cinza em duas partes de mesma área com apenas uma reta, qualquer que seja a posição do quadrado?



18 *Números no Tabuleiro*

João quer escrever os números de 1 até 12 nas 12 casinhas de um tabuleiro 3×4

- a) Na figura abaixo, dê um exemplo do preenchimento de João de modo que a soma dos números nas três linhas seja a mesma.



- b) É possível que João consiga obter uma distribuição nesse tabuleiro de modo que a soma dos números em cada coluna seja sempre a mesma?

19 *Sequências Numéricas*

Janete brinca com os números criando sequências a partir de um número de 4 algarismos:

- I) Primeiro ela divide o número em duas partes, sendo a primeira formada pelos dois primeiros algarismos e a segunda pelos dois últimos.
- II) Se o número de uma das partes é par, ela divide-o por 2, mas se for ímpar ela soma 1.
- III) Em seguida, ela junta os dois resultados (na ordem original).
- IV) Se continuar com 4 algarismos, repete o processo; se o novo número tiver 3 algarismos ela o separa em duas partes, sendo a primeira com apenas o primeiro algarismo e a segunda com os dois últimos e repete o processo; se tiver 2 algarismos, ela repete o processo, sem dividir o número.
- V) Esse processo é repetido até chegar em um número com apenas 1 algarismo, quando encerra a sequência.

Por exemplo, vamos construir a sequência que começa com 1.617:

1617 → 16|17 → 818 → 8|18 → 49 →
50 → 25 → 26 → 13 → 14 → 7.

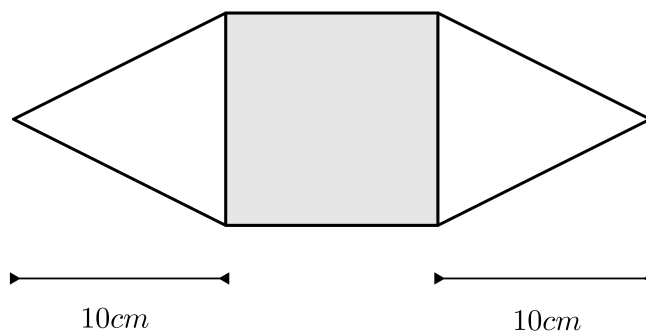
Portanto, a sequência é:

$$1617 \rightarrow 818 \rightarrow 49 \rightarrow 50 \rightarrow 25 \rightarrow 26 \rightarrow 13 \rightarrow 14 \rightarrow 7.$$

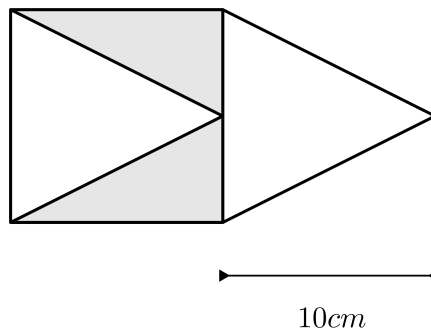
- a) Qual a sequência que começa com 2.020?
- b) Qual o 5º termo da sequência que começa com 8.998?
- c) Vamos chamar de subsequência os 5 últimos números de uma sequência. Quantas subsequências diferentes existem que terminam em 7, mas que todos os seus termos sejam formados por números de 2 algarismos, com exceção do 7?

20 Dobrando Papéis

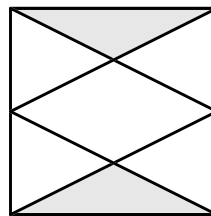
A figura é um recorte de papel formado por um quadrado de lados medindo 10cm e dois triângulos isósceles (triângulo isósceles são triângulos com dois lados de mesma medida).



- a) Dobrando um dos triângulos sobre o quadrado, conforme a figura, qual a área do quadrado que fica visível?



- b) Dobrando os dois triângulos sobre o quadrado, conforme a figura, qual a área do quadrado que fica visível?



21 A Professora Célia

A professora Célia, em uma aula sobre sequências, resolve fazer uma brincadeira de adivinhação com padrões:

- I) Primeiro ela escolhe um número Natural.
 - II) Cláudia deve dizer o dobro do seu sucessor.
 - III) Marcelo deve dizer o triplo do antecessor dito por Cláudia.
 - IV) Por fim, Ademar deve dizer o quádruplo do sucessor do número dito por Marcelo.
- a) Se a professora Célia escolher 3, qual será a sequência formada pelos 4 números?
- b) Diani estava no banheiro e quando voltou, ouviu Ademar dizendo 184. Qual foi o número escolhido pela professora?
- c) Crie uma expressão para determinar o número escolhido pela professora se Ademar disse que o resultado é x .

22 *Cartões Numerados*

Janaína comprou um baralho diferente: são 180 cartas numeradas de 1 a 180, sendo que as cartas pares são vermelhas e as cartas ímpares são azuis.

- a) Quantas cartas são múltiplas de 7 e vermelhas?
- b) Quantas cartas são múltiplas de 7 ou vermelhas?
- c) Janaína escolheu aleatoriamente 80 cartas, todas, coincidentemente, pretas. Qual a quantidade mínima de cartas múltiplas de 7?

23 *Batalha de Vírus*

Em uma célula existem 10 vírus tipo *A*. Em determinado momento, um vírus tipo *B* entra nesta célula. Depois disso, de hora em hora, cada vírus *B* mata um vírus *A* e, imediatamente após este evento, cada vírus se divide em 2, ambos do mesmo tipo desse vírus.

- a) Depois de 3 horas da chegada do vírus *B* na célula, qual a quantidade de cada tipo de vírus, incluindo as duplicações das batalhas após $3h$?
- b) Depois de quanto tempo a quantidade de vírus tipo *B* será igual à quantidade de vírus do tipo *A*?
- c) Os vírus tipo *A* serão extintos da célula?

24 *Operações no Tabuleiro*

Considere o tabuleiro a seguir

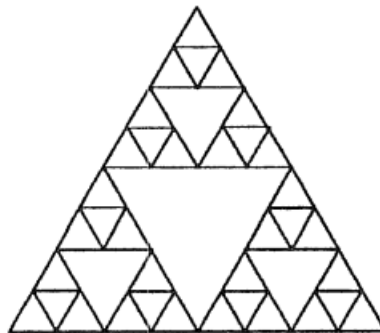
1	2	3
4	5	6
7	8	9

Uma operação permitida é escolher uma linha horizontal ou vertical e somar 1 aos três números ou subtrair 1 de todos eles. Determine se é possível, mediante uma sequência de operações permitidas, obter o tabuleiro.

9	8	7
6	5	4
3	2	1

25 *Os Triângulos Equiláteros*

Na figura a seguir, o perímetro do triângulo equilátero maior é 24 cm e cada um dos triângulos menores também são equiláteros. Qual a soma dos comprimentos de todos os segmentos desenhados na figura?

**26** *A Adivinhação do Número de Pedras*

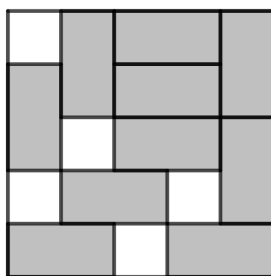
Seis pessoas tentam adivinhar o número de pedras que há em uma caixa. Alberto diz que há 52 pedras, Bernardo diz que há 59, Carlos diz 62, Davi 65, Eduardo 49 e Felipe 42. Todos erraram, sendo que alguns disseram um número maior e outros um número menor. As medidas de seus erros foram 1, 4, 6, 9, 11 e 12, em alguma ordem. Determine quantas pedras há na caixa e o erro de cada um.

27 *Ladrões que roubam ladrões*

Três ladrões A , B e C repartiram em partes iguais o resultado de um roubo. Na primeira noite, enquanto C dormia, A e B retiraram metade do que ele tinha e repartiram em partes iguais entre si. Na segunda noite, enquanto A dormia, B e C retiraram metade do que ele tinha e repartiram em partes iguais entre si. Na terceira noite, enquanto B dormia, A e C retiraram metade do que ele tinha e repartiram em partes iguais entre si. Na manhã seguinte, eles se separaram para sempre. Quando B contou seu dinheiro, percebeu que possuía R\$10.000,00. Determina a quantia inicial que foi roubada pelos ladrões.

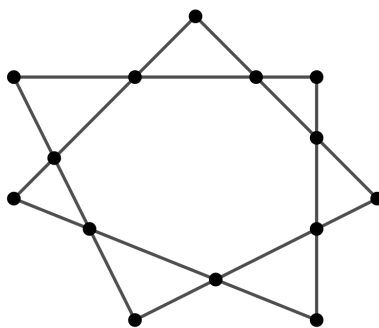
28 *Cobrindo o Tabuleiro com Dominós*

Algumas peças cinzas no formato de um dominó 2×1 podem ser usadas para cobrir os quadradinhos de um tabuleiro 5×5 . Dizemos que o tabuleiro está *lotado* quando não há espaço para colocar novas peças, como no exemplo abaixo. Qual o menor número de peças que devemos usar para deixar um tabuleiro *lotado*?



29 *Números na Poligonal*

Os números 1, 2, 3, ..., 14 devem ser escritos nos 14 vértices da linha poligonal abaixo de modo que as somas dos 4 números escritos em cada um dos 7 segmentos da poligonal seja a mesma.



- Qual a soma de todos os números de 1 a 14?
- Qual deve ser a soma dos números escritos em um segmento?
- Dê um exemplo de distribuição desses números.

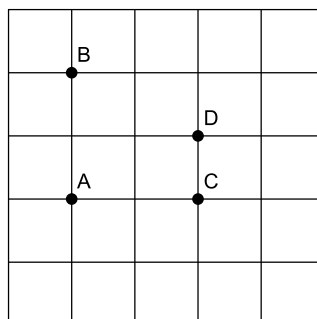
30 *Professor Piraldo*

O professor Piraldo fará uma avaliação para 5 alunos de uma turma: Arnaldo, Bernaldo, Cernaldo, Dernaldo e Ernaldo. Essa prova consiste em chamar cada um ao quadro, uma única vez, para resolver um problema cada.

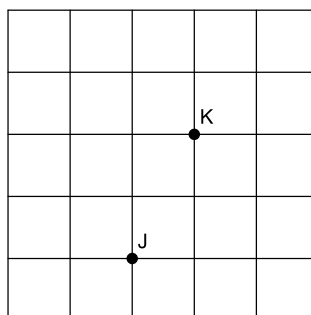
- a) De quantas maneiras diferentes o professor pode chamá-los ao quadro?
- b) Em quantas destas sequências eles NÃO estão em ordem alfabética?
- c) Em quantas dessas sequências Arnaldo e Bernaldo são chamados em posições consecutivas?

1 Pontos Equilegais

No quadriculado da figura, dizemos que dois ou mais pontos nas intersecções das linhas são equilegais, em relação a um ponto fixo, quando suas distâncias são iguais a este. Por exemplo, B e C são equilegais em relação a A , mas B e D não são.



- a) Marque, no quadriculado a seguir, os pontos equilegais a K em relação a J .



- b) Se os pontos não precisarem ser nas intersecções das linhas, que figura será formada no plano do quadriculado dos pontos equilegais a K em relação a J ?

- c) Se os pontos não precisarem ser no plano do quadriculado, que figura será formada dos pontos equilegais a K em relação a J ?

[2] Expressão no Quadro

O professor M. A. Luco escreveu no quadro a expressão:

$$\frac{n^2 - 5n + 4}{n - 4}.$$

Então, ele diz aos alunos que n pode ser qualquer número natural, com exceção de 4.

- a) Qual o valor da expressão para $n = 1$?
- b) Marcos substituiu n por um número natural e verificou que o valor da expressão é 5. Marcos substituiu n por qual número?
- c) Quais são os números naturais que não podem ser o valor numérico da expressão?

[3] Nem Todos Passaram

Em uma turma existem 70 alunos, tais que:

- I) 14 meninos passaram em Matemática;
- II) 12 meninos passaram em Física;
- III) 10 meninos e 16 meninas não passaram em Matemática nem em Física;
- IV) 32 são meninos;
- V) 10 passaram nas duas disciplinas;
- VI) 22 passaram apenas em Matemática.

Quantas meninas passaram somente em Física?

4 *Quadrilátero, mas não um Qualquer*

Seja $ABCD$ um quadrilátero tal que $AC = BC + CD$. Se $\angle BCD = 120^\circ$, \overline{CA} é bissetriz e $AB = x$, qual o valor de BD , em função x ?

5 *Números com 5 Algarismos*

Com 5 algarismos não nulos, podemos formar 120 números, sem repetir algarismo em um mesmo número. Seja S a soma de todos esses números. Determine a soma dos algarismos de S , sendo:

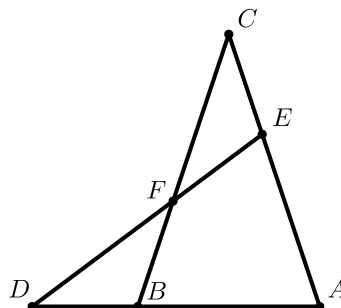
- a) 1, 3, 5, 7 e 9 os 5 algarismos;
- b) 0, 2, 4, 6 e 8 os 5 algarismos, lembrando que 02468 é um número com 4 algarismos e, portanto, não teremos 120 números neste caso.

6 *Reunião de Matemáticos*

Em uma reunião de matemáticos, Carlos diz a Frederico: *O dobro do produto dos dois dígitos do número de matemáticos na reunião é exatamente a nossa quantidade. Qual a quantidade mínima de matemáticos que deve se juntar a nós para que nossa quantidade seja um número primo?* Ajude Frederico a resolver o problema.

7 *Triângulos Isósceles*

Na figura, os triângulos $\triangle ADE$ e $\triangle ABC$ são isósceles. Se $\angle DFC = 150^\circ$, qual a medida de $\angle FDB$?



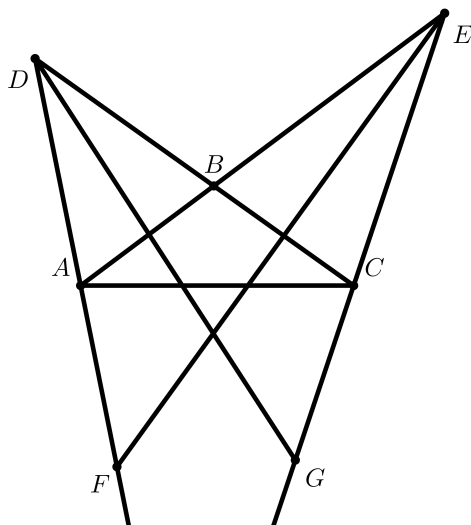
8 Soma da Quarta dos Inversos

Se $6xy - \sqrt{3}x^2 = \sqrt{3}y^2$, calcule

$$\left(\frac{x}{y}\right)^4 + \left(\frac{y}{x}\right)^4.$$

9 Bissetrizes Internas

Na figura, $\angle ABC = 100^\circ$, $\angle FAC = 3\angle ECB$ e $\angle GCA = 3\angle DAB$. Determine a medida do ângulo agudo na intersecção das bissetrizes internas dos triângulos $\triangle ADB$ e $\triangle CEB$ relativo aos ângulos D e E .



10 *Escoteiro Explorador*

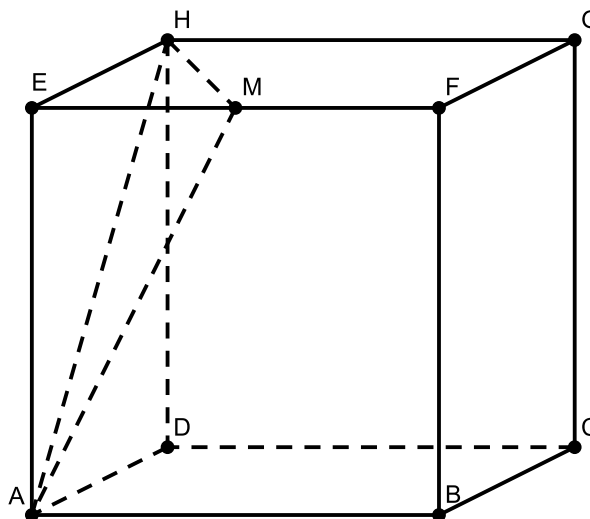
Juca é um escoteiro que está explorando as proximidades do seu acampamento. Após coletar frutas e madeira, ele deve pegar água no rio e voltar para sua barraca. Vamos representar, na figura, Juca pela letra J , o rio pela letra r e sua barraca pela letra B . A distância dos pés das perpendiculares C e E , em r dos pontos J e B é $180m$.



Qual a menor distância que Juca pode percorrer para voltar para sua barraca, passando pelo rio?

11 *Cortando o Cubo*

No cubo $ABCDEFGH$, cuja aresta mede $6cm$, o ponto M é ponto médio de \overline{EF} .



- Determine a área do triângulo AMH .
- Determine o volume da pirâmide $AMHE$. (O volume de uma pirâmide pode ser calculado pela terça parte do produto entre a área da base e a altura relativa a esta base).
- Calcule a medida da altura relativa à base AMH .

12 *Tabuleiro Mágico*

Em um tabuleiro 4×4 , deve-se colocar os números de 1 a 16 nas casas, sem repetir, de forma que a soma dos números de cada linha, coluna e diagonal seja a mesma. Chamamos essa soma de *Soma Mágica*.

- a) Qual a *Soma Mágica* deste tabuleiro?
- b) Se a soma das casas marcadas com X no tabuleiro abaixo é 34, qual a soma das casas marcadas com Y ?

Y			Y
	X	X	
	X	X	
Y			Y

- c) Se preencheremos com naturais consecutivos de k a $(k + 15)$, de forma que a *Soma Mágica* seja 50, qual o valor de k ?

13 *Analisando Números*

Analisando os números naturais de 4 algarismos:

- a) Quantos deles têm todos os algarismos diferentes?
- b) Quantos têm o algarismo 1 exatamente uma vez e todos os algarismos diferentes?
- c) Quantos têm o algarismo 1?

14 *Dado Geográfico*

O jogo "Dado Geográfico" consiste em cada participante jogar um dado uma quantidade n de vezes e anotar a sequência, sendo que o primeiro lançamento indica a distância, em metros, que o participante andará para o Norte, o segundo para o Leste, o terceiro para o Sul, o quarto para o Oeste, o quinto para o Norte e assim por diante. Após isso mede-se a distância até a origem. Vence quem ficar mais próximo da posição inicial.

- a) Márcia tirou 214365 (6 lançamentos). Qual a sua distância até a origem?
- b) Em 4 lançamentos, quantas possibilidades existem para que o participante volte para a origem após o último lançamento?
- c) Em 5 lançamentos, quantas possibilidades existem para que o participante volte para a origem após o último lançamento?

15 *Jogo na Lousa*

A professora Jacira propõe um jogo na lousa:

- I) Um dos alunos escreve uma sequência com n algarismos não nulos;
- II) Um segundo aluno deve escrever outra sequência com $(n - 1)$ algarismos na qual o primeiro é a diferença positiva dos dois primeiros da primeira sequência, o segundo é a diferença entre o segundo e o terceiro algarismo da primeira sequência e assim por diante;
- III) Um terceiro aluno usa o mesmo processo, mas utilizando a segunda sequência.
- IV) Segue o processo até que o último aluno escreva apenas um algarismo na lousa.
- V) Se aparecer algum zero em uma das sequências, dizemos que é uma SEQUÊNCIA FURADA e não continuamos o processo.

Por exemplo:

1° aluno	5	8	9	3
2° aluno	3	1	6	
3° aluno		2	5	
4° aluno			3	

Após fazer a brincadeira algumas vezes, a professora propõe alguns desafios:

- a) Continue as sequências abaixo, dada a primeira sequência escrita pelo primeiro aluno.

1° aluno	1	2	4	8
2° aluno				
3° aluno				
4° aluno				

- b) Se um jogo possui 5 sequências, sendo a última o algarismo 5, construa um exemplo para esta situação.

- c) Explique porque não é possível construir uma situação com 6 sequências, na qual a última é o algarismo 5.

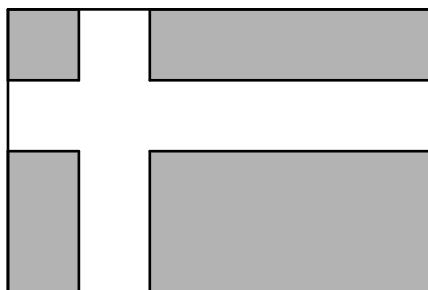
16 *Fichas no Tabuleiro*

Joana deve colocar três fichas em um tabuleiro 5×5 , no qual as casas são numeradas de 1 a 25, sendo uma em cada casa. De quantas maneiras ela pode fazer isso, se:

- a) As 3 fichas são de cores diferentes?
- b) As 3 fichas são idênticas?
- c) As fichas são de cores diferentes e não podem estar duas a duas em uma mesma linha ou coluna?

17 *Bandeira Bicolor*

A bandeira da figura é formada por um retângulo $40cm \times 20cm$ e possui duas cores (branca e cinza). A parte branca é composta por duas listras de mesma largura que se cruzam e são perpendiculares aos lados do retângulo. A parte cinza é a área do retângulo que não foi coberto pelas listras. Qual deve ser a medida da largura das listras para que a área branca seja igual a área cinza?



18 *Apagando Números*

A professora Jane escreveu na lousa os números $1^2, 2^2, 3^2, \dots, 2020^2$. Ela propõe o seguinte jogo: Alice e Matias devem apagar números alternadamente, um número por vez, sendo que Matias começa, até que sobrem apenas dois números no quadro. Se a diferença entre estes dois números for múltiplo de 2021, Alice vence, caso contrário, Matias vence. Determine quem sempre pode garantir a vitória independentemente de como o outro jogador jogue.

19 *Pontos Coloridos*

Em uma folha de papel estão desenhados 10 pontos, sendo 8 azuis e 2 vermelhos. Os dois pontos vermelhos são ligados a todos os pontos azuis, mas não são ligados um ao outro. Todos os pontos azuis são ligados um ao outro. Quando dois pontos são ligados, esta ligação é feita por um único segmento. De quantas maneiras diferentes podemos sair de um ponto vermelho e chegar ao outro passando no máximo uma única vez por cada ponto?

20 *Fotos com Familiares*

Um fotógrafo deve tirar fotos de uma festa com 10 membros de uma mesma família. Cada um dos 45 possíveis pares de pessoas dessa família devem aparecer juntos em exatamente uma foto. Além disso, existem apenas dois tipos de fotos: as que possuem 2 ou 3 pessoas.

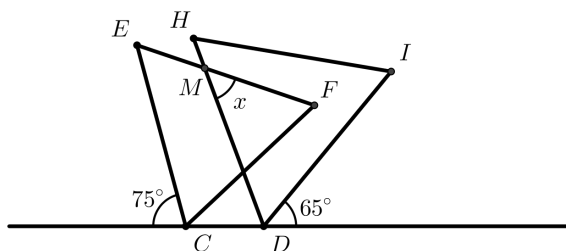
- a) Verifique que cada pessoa da família deverá aparecer em pelo menos uma foto de apenas 2 pessoas.
- b) Verifique que o fotógrafo deverá tirar pelo menos 19 fotos.
- c) Dê um exemplo de distribuição de pessoas em 19 fotos satisfazendo as condições dadas.

21 *Potências Perfeitas*

Seja x o menor número inteiro positivo que satisfaz simultaneamente as seguintes condições: $2x$ é o quadrado de um número inteiro, $3x$ é o cubo de um número inteiro e $5x$ é a quinta potência de um número inteiro. Encontre a fatoração em primos de x .

22 Os Triângulos Equiláteros

Na figura, os dois triângulos CEF e DIH são equiláteros e os ângulos dados em graus. Determine o valor de x .



23 A Calculadora MK – 2020

A calculadora $MK - 2020$ pode efetuar as seguintes três operações com números em sua memória:

- 1) Determinar se dois números escolhidos são iguais.
- 2) Adicionar dois números escolhidos.
- 3) Para os números escolhidos a e b , determinar as raízes reais da equação $x^2 + ax + b = 0$ ou anunciar que tal equação não possui raízes reais.

Os resultados de cada operação são acumulados em sua memória. Inicialmente, a memória contém apenas o número z que é desconhecido por seus usuários.

- a) Usando as operações, determine como descobrir se z é diferente de 0 ou não.
- b) Encontre as raízes da equação do segundo grau em x :

$$x^2 + 2zx + z = 0.$$

- c) Como podemos determinar, usando a calculadora $MK - 2020$, se z é igual a 1?

24 Um Quociente Fatorial!

Calcule o valor de

$$A = \frac{1001 \cdot 1002 \cdot 1003 \cdot \dots \cdot 2000}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 1999}$$

25 *A Loja de Chocolates*

Em uma loja de chocolates, existem caixas com 8, 9 e 10 chocolates. Observe que algumas quantidades de chocolates não podem ser compradas exatamente como, por exemplo, 12 chocolates.

- a) Encontre outra quantidade de chocolates que não pode ser comprada.
- b) Verifique que todo número maior que 56 pode ser escrito na forma $8x + 9y$ com x e y inteiros não negativos.
- c) Qual é a maior quantidade de unidades de chocolates que não podemos comprar exatamente nessa loja?

26 *Números de Telefones Legais*

Nós chamamos um número de telefone $d_1 d_2 d_3 - d_4 d_5 d_6 d_7$ de *legal* se o número $d_1 d_2 d_3$ for igual a $d_4 d_5 d_6$ ou a $d_5 d_6 d_7$. Por exemplo, 234 – 2347 é um número de telefone legal. Assuma que cada d_i pode ser qualquer dígito de 0 a 9. Quantos números de telefones legais existem?

27 *Os Sapatos e as Meias da Aranha*

- a) As letras A , B e C podem ser dispostas em linha de 6 formas distintas:

$ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA.$

Note que em 3 delas a letra A aparece à esquerda da letra B :

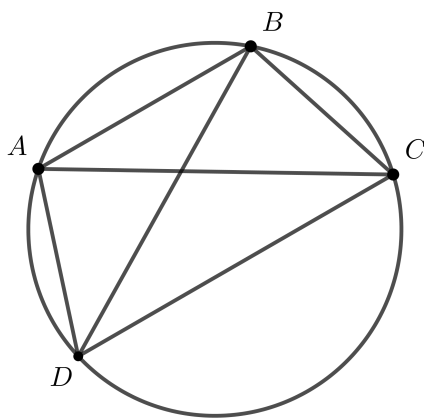
$ABC, ACB, CAB.$

Dispondo as letras A , B , C e D em linha de todas as 24 formas distintas possíveis, em quantas delas a letra A aparece à esquerda da letra B ?

- b) Uma aranha tem uma meia e um sapato para cada um de seus oito pés. De quantas maneiras diferentes a aranha pode se calçar admitindo que as 8 meias e os 8 sapatos são distintos e que cada meia precisa ser colocada antes do seu respectivo sapato?

28 As Diagonais do Quadrilátero

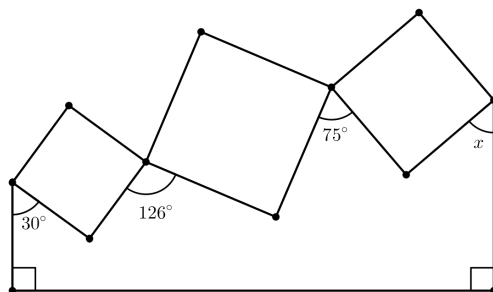
Os vértices do quadrilátero $ABCD$ estão em uma circunferência. Cada uma de suas diagonais bissecta um ângulo e trisecta o ângulo oposto. Determine as medidas dos ângulos do quadrilátero.



Observação: Dizemos que uma semirreta OM trissecta um ângulo $\angle AOB$ se a amplitude de um dos dois ângulos determinado por ela é um terço do valor da amplitude do ângulo $\angle AOB$.

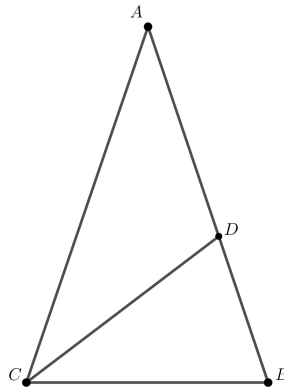
29 Os Ângulos entre Quadrados

Três quadrados são colados pelos seus vértices entre si e a dois bastões verticais, como mostra a figura. Determine a medida do ângulo x .

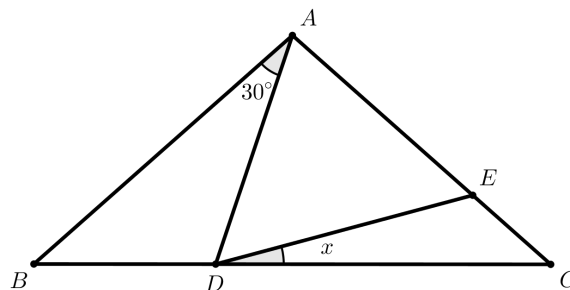


30 *Triângulos Isósceles*

Na figura, o triângulo $\triangle ABC$ é isósceles de base BC e o ângulo $\angle BAC$ mede 30° . O triângulo $\triangle BCD$ é isósceles de base BD . Determine a medida do ângulo $\angle DCA$.

**31** *O Ângulo Desconhecido*

Na figura, $AB = AC$, $AE = AD$ e o ângulo $\angle BAD$ mede 30° . Determine a medida x do ângulo $\angle CDE$.



1 *A Equação com Radicais*

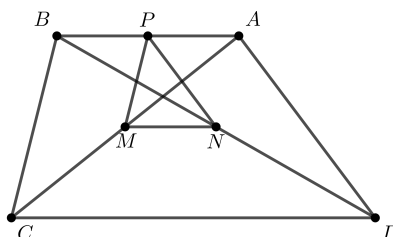
Ache todos os valores de x satisfazendo

$$\frac{x + \sqrt{x+1}}{x - \sqrt{x+1}} = \frac{11}{5}$$

2 *O Trapézio e os Pontos Médios*

No trapézio $ABCD$, os lados AB e CD são paralelos. Sejam M o ponto médio da diagonal AC , N o ponto médio da diagonal BD e P o ponto médio do lado AB . Sabemos que $AB = 15\text{ cm}$, $CD = 24\text{ cm}$ e a altura do trapézio é $h = 14\text{ cm}$.

- Calcule a medida do comprimento do segmento MN .
- Calcule a área do triângulo MNP .



3 *O Sistema com Cubos*

Se x e y são números reais tais que $x + y = 10$ e $x^3 + y^3 = 400$, determine o valor de $x^2 + y^2$.

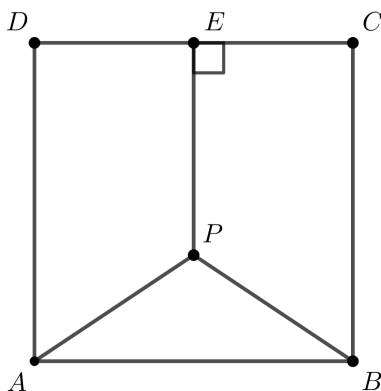
4 *A Soma Trigonométrica*

Determine o valor da soma

$$S = \sen^2 1^\circ + \sen^2 2^\circ + \sen^2 3^\circ + \dots + \sen^2 89^\circ.$$

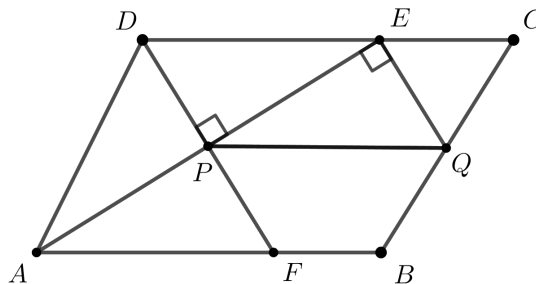
5 *O Ponto no Interior do Quadrado*

Seja $ABCD$ um quadrado de lado 28 cm . Seja P um ponto interior ao quadrado e E um ponto no lado CD tal que PE é perpendicular a CD . Além disso, $AP = BP = PE$. Encontre o comprimento de AP .



6 Perpendiculares no Paralelogramo

No paralelogramo $ABCD$, o ângulo BAD é agudo e o lado AD é menor que o lado AB . A bissetriz do ângulo $\angle BAD$ corta o lado CD em E . Por D se traça uma perpendicular a AE que corta AE em P e AB em F . Traçamos por E uma perpendicular a AE que corta o lado BC em Q . Além disso, o segmento PQ é paralelo a AB e o comprimento de AB é 20 cm .



- Encontre o valor de $\frac{CQ}{AD}$.
- Encontre a medida do comprimento do lado AD .

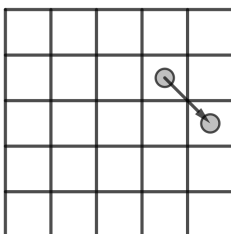
7 Prolongamentos dos Lados

No triângulo ABC , temos os ângulos $\angle ACB = 65^\circ$ e $\angle ABC = 70^\circ$. Sobre os prolongamentos do lado BC , marcam-se o ponto P de tal modo que $BP = AB$ e que B esteja entre P e C ; e o ponto Q de modo que $CQ = AC$ e que C esteja entre B e Q . Se O é o centro da circunferência que passa por A , P e Q , encontre os valores dos ângulos $\angle OAQ$ e $\angle OAP$.

8 Peças Deslizantes

Em um tabuleiro 5×5 , cada quadradinho possui uma peça em seu centro. O único movimento permitido para uma dessas peças é se deslocar para um quadradinho que compartilhe exatamente um vértice com o quadradinho em que ela está, como indicado na figura abaixo. Tanto é possível que várias peças ocupem um mesmo quadradinho quanto que um quadradinho fique vazio. Em um dado momento, todas as peças serão movidas simultaneamente.

- Dê um exemplo de movimentos das 25 peças de modo que sobre exatamente 5 quadradinhos vazios.
- Qual o número mínimo de quadradinhos vazios que poderão ser encontrados após esse momento?



9 A Área do Quadrado

Considere um quadrado $ABCD$ de centro O . Sejam E , F , G e H pontos no interior dos lados AB , BC , CD e DA , respectivamente, tal que $AE = BF = CG = DH$. Sabe-se que OA intersecta HE no ponto X , OB intersecta EF no ponto Y , OC intersecta FG no ponto Z e OD intersecta GH no ponto W . Sejam x e y as medidas dos comprimentos de AE e AH , respectivamente.

- Dado que $\text{Área}(EFGH) = 1 \text{ cm}^2$, calcule o valor de $x^2 + y^2$.
- Verifique que $HX = \frac{y}{x+y}$. Em seguida, conclua que X , Y , Z e W são vértices de um quadrado.
- Calcule

$$\text{Área}(ABCD) \cdot \text{Área}(XYZW).$$

10 Preenchimento do Tabuleiro

José quer preencher as casas de um tabuleiro $2 \times n$ com zeros e uns de modo que dois números vizinhos iguais, em uma mesma linha, impeçam que se preencha também com números iguais as casas correspondentes da outra linha. Por exemplo, no desenho abaixo, os valores de A e B não podem ser iguais.

0	1	0	...	1	1	...
1	1	0	...	A	B	...

a) Encontre todos os preenchimentos possíveis do tabuleiro abaixo:

0	0	1
1		

b) No tabuleiro, todas as colunas já estão preenchidas, exceto as duas últimas. De quantas maneiras os números das casas A e B podem ser escolhidos?

...	0	A
...	1	B

c) De quantas maneiras José pode preencher o tabuleiro se $n = 2020$?

11 O Semicírculo e os Triângulos

Os triângulos ABC e ABD estão inscritos na mesma semicircunferência de diâmetro AB , que mede 15 cm . Se traça por D a perpendicular a AB que intersecta AB em P , o segmento AC em Q e o prolongamento do lado BC em R . Além disso, $PR = \frac{40}{3}\text{ cm}$ e $PQ = \frac{15}{4}\text{ cm}$.

a) Verifique que $PQ \cdot PR = BP \cdot AP$.

b) Encontre a medida do segmento DP .

12 *Os Clubes de Alunos I*

Em uma escola, devem ser formados n clubes, com $n \geq 3$ e cada um com 3 integrantes, de modo que para cada par de clubes haja exatamente um estudante que integra ambos.

- a) Dê um exemplo de uma distribuição de 7 clubes que satisfaçam as condições mencionadas.
- b) Verifique que se um estudante pertence a 4 clubes, então ele deve pertencer a todos os demais.
- c) Determine o valor mínimo de n de modo que para qualquer conjunto de clubes que satisfaçam essas condições seja obrigatória a presença de um mesmo estudante em todos eles.

13 *Progressões Geométricas*

As progressões geométricas a_1, a_2, a_3, \dots e b_1, b_2, b_3, \dots possuem a mesma razão, com $a_1 = 27$, $b_1 = 99$ e $a_{15} = b_{11}$. Encontre o valor de a_9 .

14 *Embaralhamento de Cartões*

Existem três cartões, cada um com um número do conjunto $\{1, 2, \dots, 10\}$. Esses três cartões foram embaralhados e distribuídos a três pessoas, que registraram os números em seus respectivos cartões. Os cartões foram então coletados e o processo foi repetido novamente. Após algumas repetições, cada uma das três pessoas somou os seus registros. Sabendo que as somas obtidas foram 13, 15 e 23, quais eram os números nos cartões?

15 *A Sequência e os Quadrados*

Começando com um número inteiro positivo n , uma sequência é criada satisfazendo a seguinte regra: cada termo se obtém do anterior subtraindo-se o maior quadrado perfeito que é menor ou igual ao termo anterior, até chegar ao número zero. Por exemplo, se $n = 142$, teremos a seguinte sequência de 5 termos:

$$a_1 = 142, a_2 = 21, a_3 = 5, a_4 = 1, a_5 = 0,$$

pois $21 = 142 - 11^2$, $5 = 21 - 4^2$, $1 = 5 - 2^2$ e $0 = 1 - 1^2$.

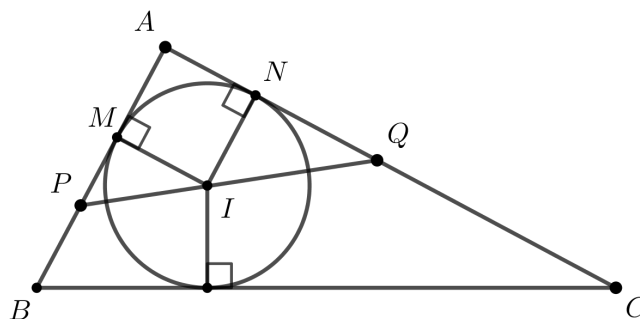
- Dê exemplo de uma sequência que tenha exatamente 6 termos.
- Encontre o menor valor de n para que a sequência assim criada tenha exatamente 7 termos.

16 O Triângulo e o seu Incírculo

Seja ABC um triângulo retângulo com $\angle BAC = 90^\circ$ e I o ponto de encontro de suas bissetrizes. Uma reta por I corta os lados AB e AC em P e Q , respectivamente. A distância de I para o lado BC é 1 cm .

- Encontre o valor de $PM \cdot NQ$.
- Determine o valor mínimo possível para a área do triângulo APQ .

Dica: Se x e y são dois números reais não negativos, então $x + y \geq 2\sqrt{xy}$.



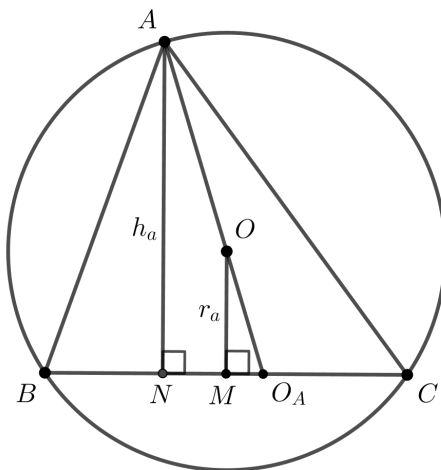
17 Equação com Números Irracionais

Dizemos que um número é racional se ele pode ser escrito da forma $\frac{p}{q}$, com p e q números inteiros. Se um número real não é racional, dizemos que ele é irracional. Por exemplo, $\frac{1}{4}$ é um número racional e $\sqrt{3}$ é irracional. Encontre todos os pares de números racionais (a, b) tais que

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{2 + \sqrt{3}}.$$

18 O Triângulo Inscrito na Circunferência

Na figura a seguir, O é o centro da circunferência que passa pelos vértices A , B e C .



- a) Se R é o comprimento do raio da circunferência, verifique que

$$\frac{R}{AO_A} = \frac{h_a - r_a}{h_a}.$$

- b) Definindo O_B e O_C de modo semelhante, verifique que

$$\frac{1}{AO_A} + \frac{1}{BO_B} + \frac{1}{CO_C} = \frac{2}{R}.$$

19 A Equação Cúbica

Considere os números reais p e q e a equação cúbica:

$$x^3 + px + q = 0.$$

- a) Se x_0 é uma raiz real da equação, então

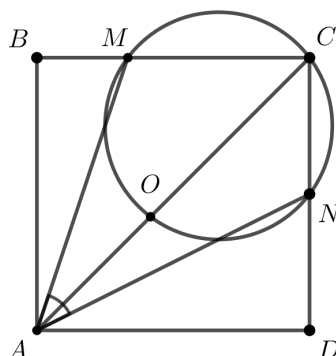
$$x^3 + px + q = (x - x_0)(x^2 + ax + b).$$

Verifique que $a = x_0$.

- b) Verifique que $p^2 \geq 4x_0q$.

20 A Circunferência e o Quadrado

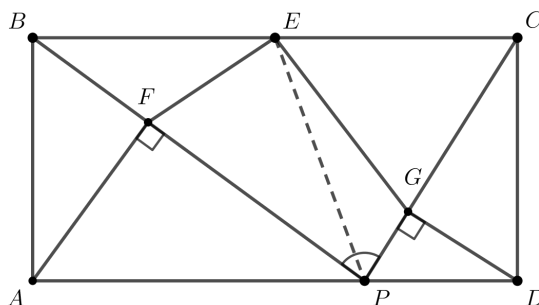
No quadrado $ABCD$, os pontos M e N são interiores aos lados BC e CD de modo que $\angle MAN = 45^\circ$. Seja O o ponto de interseção do círculo que passa por C , M e N com o segmento AC .



- Verifique que $OM = ON$.
- Verifique que O é o centro da circunferência que passa por A , M e N .

21 O Retângulo e as Perpendiculares

Seja $ABCD$ um retângulo com $BC = 2 \cdot AB$. Seja E o ponto médio de BC e P um ponto arbitrário interno ao lado AD . Sejam F e G os pés das perpendiculares desenhadas de A a BP e de D a CP . Sabemos que $\angle BPC = 85^\circ$.



- Verifique que os triângulos BEF e BEP são semelhantes.

b) Determine o valor da soma dos ângulos $\angle BEF + \angle CEG$.

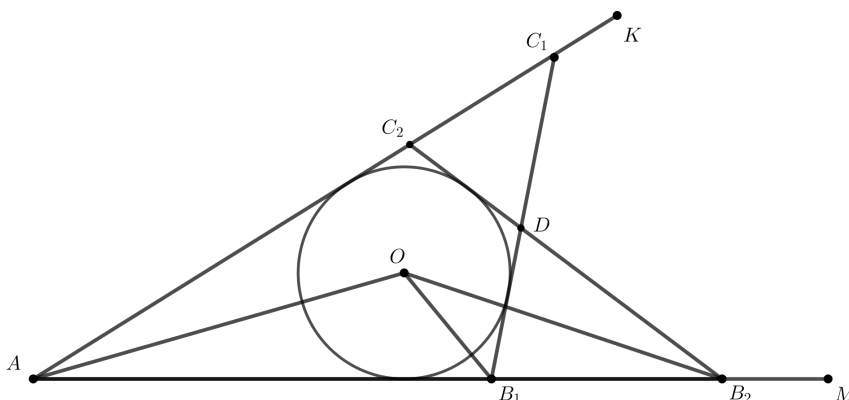
22 Produtos e a Sequência de Fibonacci

A Sequência de Fibonacci é definida recursivamente por $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ para $n \in \mathbb{Z}$ e $F_1 = F_2 = 1$. Determine o valor de:

$$\left(1 - \frac{F_2^2}{F_3^2}\right) \left(1 - \frac{F_3^2}{F_4^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{F_{2019}^2}{F_{2020}^2}\right).$$

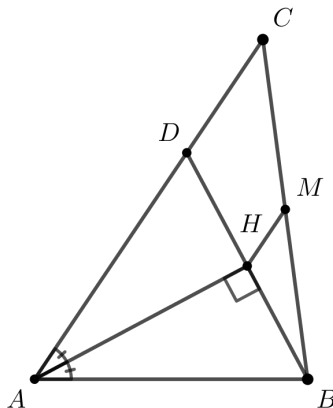
23 O Ângulo no Triângulo

Na figura abaixo, os segmentos AM , AK , B_2C_2 e B_1C_1 são tangentes a circunferência de centro O . Se $\angle B_1OB_2 = 30^\circ$, determine o valor do ângulo $\angle B_1DB_2$.



24 *Ponto Médio Lembra Base Média*

No desenho abaixo, ABC um triângulo com lados de comprimentos $AB = 4\text{ cm}$, $AC = 6\text{ cm}$. Além disso, $\angle DAH = \angle HAB$, $\angle AHB = 90^\circ$ e M é o ponto médio de BC . Encontre o comprimento do segmento MH .

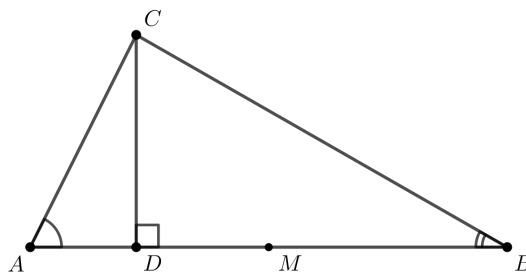
**25** *A Função Ímpar*

Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função ímpar, isto é, uma função que satisfaz $-f(x) = f(-x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Suponha que $f(x+5) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e que $f(1/3) = 1$. Determine o valor da soma:

$$f(16/3) + f(29/3) + f(12) + f(-7).$$

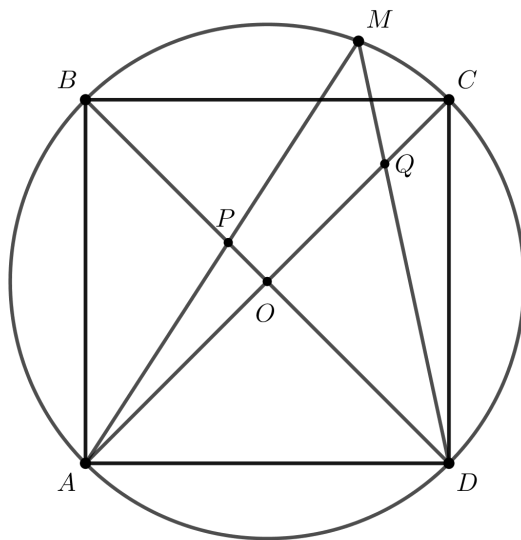
26 *A Altura e o Ponto Médio*

Na figura a seguir, $\angle CAB = 2 \cdot \angle CBA$, AD é uma altura e M é o ponto médio de AB . Se $AC = 2\text{ cm}$, encontre o comprimento do segmento DM .



27 O Quadrado Inscrito na Circunferência

O quadrado $ABCD$ de lado 1 cm está inscrito em uma circunferência de centro O . O ponto M está sobre o arco BC , o segmento AM encontra BD no ponto P , o segmento DM encontra AC no ponto Q .



- Verifique que $\angle AQD = \angle PAD$.
- Encontre a área do quadrilátero $APQD$.

28 A Função Exponencial

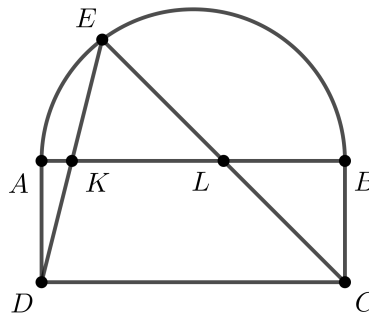
Seja $f(x) = \frac{9^x}{9^x + 3}$.

- Encontre o valor de $f(x) + f(1 - x)$.
- Calcule o valor da soma

$$f\left(\frac{1}{2020}\right) + f\left(\frac{2}{2020}\right) + f\left(\frac{3}{2020}\right) + \dots + f\left(\frac{2019}{2020}\right).$$

29 O Retângulo e o Semicírculo

Seja $ABCD$ um retângulo tal que $AB = \sqrt{2}BC$. Seja E um ponto sobre o semicírculo com diâmetro AB , como indicado na figura a seguir. Sejam K e L as interseções de AB com ED e EC , respectivamente. Se $AK = 2\text{ cm}$ e $BL = 9\text{ cm}$, calcule, em cm , o comprimento do segmento KL .

**30 Números Parentes**

Seja \overline{ab} um número inteiro de dois dígitos¹. Um inteiro positivo é um parente de \overline{ab} se:

- i) o dígito das unidades de n também é b .
- ii) os outros dígitos de n são distintos de zero e somam a .

Por exemplo, os parentes de 31 são 31, 121, 211 e 1111. Encontre todos os números de dois dígitos que dividem todos os seus parentes.

31 A Função de Inteiros

Para cada número inteiro positivo n se associa um inteiro não negativo $f(n)$ de modo que se cumpram as três regras seguintes:

- i) $f(ab) = f(a) + f(b)$.
- ii) $f(n) = 0$ se n é um primo maior que 10.
- iii) $f(1) < f(243) < f(2) < 11$.

Sabendo que $f(2106) < 11$, determine o valor de $f(96)$.

¹Nessa notação, b é o dígito das unidades e a é o dígito das dezenas.

32 Os Armários da Escola

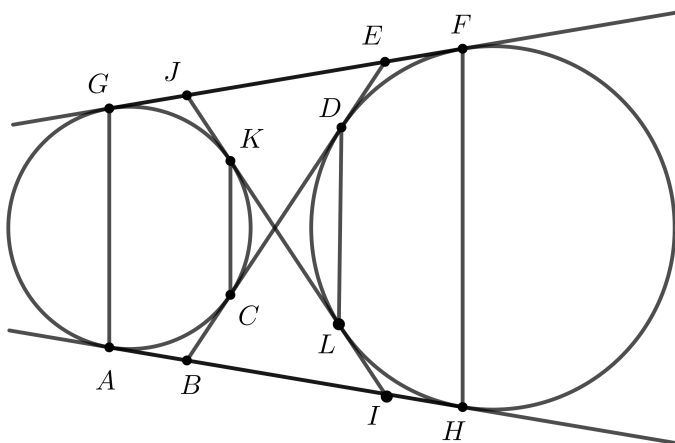
Uma escola tem 100 alunos e 100 armários numerados de 1 a 100. Inicialmente, todos os armários estão fechados. O primeiro aluno passa e abre todos os armários; o segundo passa e fecha todos os de números pares; o terceiro passa e muda a posição de todos os múltiplos de 3, ou seja, os que estão abertos ele fecha e os que estão fechados ele abre; o quarto aluno muda a posição de todos os armários de números múltiplos de 4; e assim por diante até o centésimo aluno, que muda a posição dos armários de números múltiplos de 100. Depois da passagem de todos os alunos, quantos armários ficam fechados?

33 As Diferenças entre os Inteiros

- Verifique que se escolhermos 3 ou mais inteiros do conjunto $\{6k+1, 6k+2, 6k+3, 6k+4, 6k+5, 6k+6\}$, pelo menos dois irão diferir por 1, 4 ou 5.
- Qual é a maior quantidade de inteiros positivos menores ou iguais a 2022 que podemos escolher de modo que não haja dois números cuja diferença é 1, 4 ou 5?

34 Retas Tangentes às Circunferências

Na figura a seguir, foram traçadas as quatro retas tangentes a duas circunferências.



- Verifique que $BC = DE$.

- b) Verifique que a distância entre os segmentos AG e CK é igual a distância entre os segmentos DL e FH .

Dica: Lembre que os comprimentos das tangentes comuns traçadas de um ponto externo a uma circunferência são iguais. Por exemplo, na figura dada, $IK = AI$. Esse fato é popularmente conhecido como “Teorema do Bico”.

35 *Inteiros Bacanas*

Dizemos que um inteiro positivo é *bacana* se ao somarmos os quadrados de seus dígitos e repetirmos essa operação sucessivamente, obtivermos o número 1. Por exemplo, 1900 é bacana, pois

$$1900 \rightarrow 82 \rightarrow 68 \rightarrow 100 \rightarrow 1.$$

- a) Encontre dois números de dois dígitos consecutivos bacanas.
- b) Verifique que para todo $n > 2020$ existem dois números bacana de n dígitos que são consecutivos.

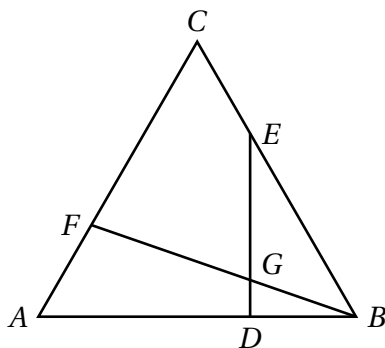
36 *Conflitos no Planeta X*

No planeta X, existem 100 países alienígenas com conflitos entre si. Para evitar uma guerra mundial, esses países se organizam em grupos de alianças militares para proteção mútua. Sabemos que as alianças seguem as seguintes regras:

- 1) Nenhuma aliança contém mais de 50 países.
 - 2) Quaisquer dois países pertencem a pelo menos uma aliança.
- a) É possível que um país participe de menos de três alianças militares?
- b) Qual é o menor número possível de alianças para que essas duas condições sejam satisfeitas?

37 Segmentos no Triângulo Equilátero

No desenho ao lado, o triângulo ABC é equilátero e $BD = CE = AF = \frac{AB}{3}$. A razão $\frac{EG}{GD}$ pode ser escrita na forma $\frac{m}{n}$, $\text{mdc}(m, n) = 1$. Quanto vale $m + n$?

**38 As Equações com Cubos**

Lembrando que

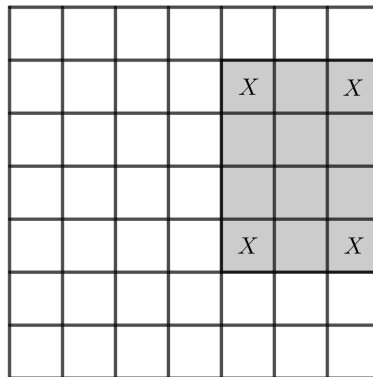
$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 3ac^2 + 3a^2c + 3b^2c + 3bc^2 + 6abc.$$

Encontre as soluções do sistema de equações

$$\begin{aligned} a^3 + 3ab^2 + 3ac^2 - 6abc &= 1 \\ b^3 + 3ba^2 + 3bc^2 - 6abc &= 1 \\ c^3 + 3ca^2 + 3cb^2 - 6abc &= 1 \end{aligned}$$

39 *Castelo no Tabuleiro*

Em um tabuleiro 7×7 , dizemos que 4 casas assinaladas com X formam um *castelo* se elas são vértices de um retângulo com lados paralelos aos do tabuleiro, como indicado na figura a seguir:



- a) Marque 21 casas com X no tabuleiro 7×7 sem que exista qualquer castelo entre elas.
- b) Verifique que para qualquer escolha de 22 casas com X sempre existirá um castelo.

40 *Os Números da Lousa*

Os 2020 números

$$1 \cdot 2, 2 \cdot 3, 3 \cdot 4, \dots, 2020 \cdot 2021$$

são escritos na lousa. Um movimento consiste em escolher três números a , b , c escritos na lousa, apagá-los e escrever na lousa o número

$$\frac{abc}{ab + bc + ac}$$

a) Verifique que

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \left(\frac{abc}{ab + bc + ac} \right)^{-1}.$$

b) Usando

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

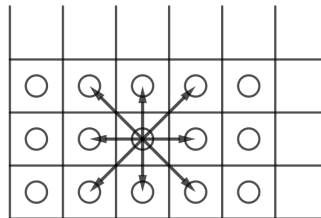
encontre o valor da soma

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{2020 \cdot 2021}.$$

c) Após 1009 movimentos, sobram dois números na lousa. Prove que se um deles é $4/3$, o outro é maior do que 4.

41 *Os Competidores no Salão*

Em uma competição, os competidores ocupam todos os lugares de um salão retangular onde os assentos estão organizados em filas e colunas de tal modo que há mais de duas filas e em cada fila há mais de dois assentos. Em um dado momento, esses competidores recebem a ordem de cumprimentarem com um aperto de mão apenas os seus vizinhos diretos no salão, isto é, quem está na sua esquerda, direita, na frente, atrás e em diagonal.



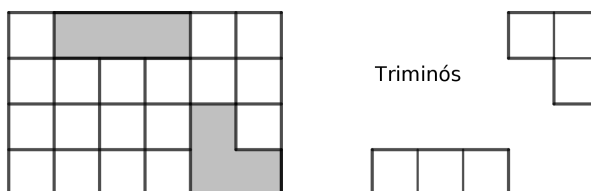
Alguém percebeu que foram dados 1020 apertos de mãos. Seja n o número de filas e m a quantidade de lugares de cada fila.

- Quais são as possíveis quantidades de apertos de mão que cada competidor do salão pode ter dado?
- Para cada uma das quantidades x descritas no item anterior, calcule quantos competidores deram x apertos de mão.
- Determine o número de competidores que estavam no salão.

ENUNCIADOS E SOLUÇÕES DO NÍVEL 1

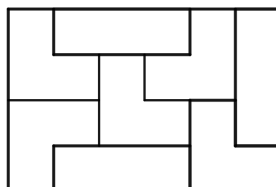
1 *Cobrindo o Tabuleiro*

Trimínós são peças formadas por três quadradinhos, como indica a figura abaixo. Dois desses trimínós foram colocados dentro de um tabuleiro 4×6 . Qual o número máximo de trimínós que podem ser colocados dentro do tabuleiro de modo a cobrir sem sobreposição as casinhas restantes?



1 *Cobrindo o Tabuleiro – Solução*

É possível cobrir o tabuleiro por completo com 8 trimínós, como indica a figura a seguir.



2 O Número de Zeros

Resolvendo as expressões abaixo, qual o resultado termina com o maior número de zeros?

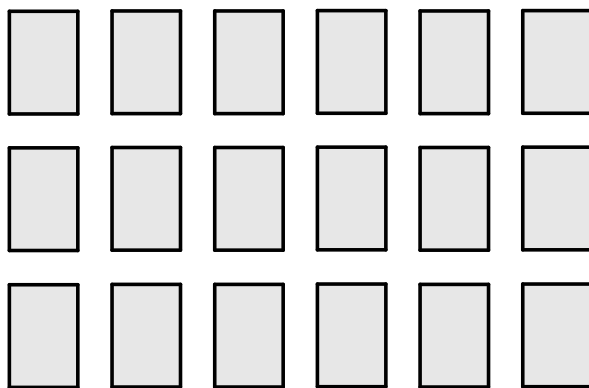
- a) $2^5 \cdot 3^4 \cdot 5^6$.
- b) $2^4 \cdot 3^4 \cdot 5^5$.
- c) $4^3 \cdot 5^6 \cdot 6^5$.
- d) $4^2 \cdot 5^4 \cdot 6^3$.

2 O Número de Zeros – Solução

Como $2^5 \cdot 3^4 \cdot 5^6 = 10^5 \cdot 3^4 \cdot 5$ termina com 5 zeros, $2^4 \cdot 3^4 \cdot 5^5 = 10^4 \cdot 3^4 \cdot 5$ termina com 4 zeros, $4^3 \cdot 5^6 \cdot 6^5 = 10^6 \cdot 6^5$ termina em 6 zeros e $4^2 \cdot 5^4 \cdot 6^3 = 10^4 \cdot 6^3$ termina em 4 zeros, a opção correta é a letra C.

3 Baralho Soma

Júlia possui um baralho com 18 cartas, numeradas de 1 a 18. Após embaralhar, ela distribui as cartas com os números voltados para baixo, em 3 linhas e 6 colunas, conforme a figura.



Júlia escolhe uma soma X e vira duas cartas. Se a soma for X , ela retira o par da mesa, mas se não for X , ela retorna as cartas à posição inicial. Ela repete este processo até que todos os pares com soma igual a X sejam virados.

- a) Se ela escolhe $X = 8$, quais pares sairão da mesa?
- b) Para qual valor de X todas as cartas saem da mesa?

- c) Para um determinado X , exatamente 2 cartas ficam na mesa. Quantos são os possíveis valores de X ?

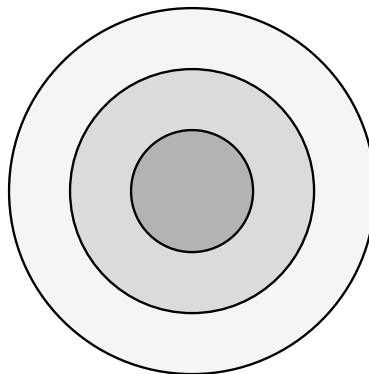
3 Baralho Soma – Solução

- a) Como $1 + 7 = 8$, $2 + 6 = 8$, $3 + 5 = 8$, os pares serão (1, 7), (2, 6) e (3, 5).
- b) Se $X > 19$, a carta 1 não poderá formar par com ninguém. Se $X < 19$, a carta 18 não fará par com ninguém. Assim, a única possibilidade é $X = 19$, o que é possível, pois formaríamos pares com todas as cartas: (1, 18), (2, 17), (3, 16), (4, 15), (5, 14), (6, 13), (7, 12), (8, 11), (9, 10).
- c) 1) Se $X = 20$, sobram apenas as cartas 1 e 10;
2) se $X = 21$, sobram as cartas 1 e 2;
3) se $X > 21$, sobram mais de duas cartas;
4) se $X = 18$, sobram as cartas 9 e 18;
5) se $X = 17$, sobram as cartas 17 e 18;
6) se $X < 17$ sobram mais de duas cartas.

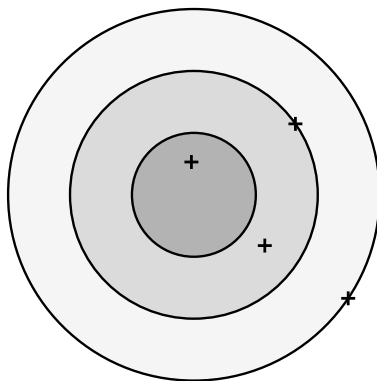
Portanto, são 4 valores de X que fazem com que sobrem exatamente 2 cartas sobre a mesa: 17, 18, 20 e 21.

4 Dardos Certeiros

Na figura, temos um alvo no qual lançam-se dardos. O círculo interno vale 10 pontos, o anel intermediário vale 5 pontos, o anel externo vale 3 pontos e a área externa vale 0. Caso o dardo acerte uma linha, a pontuação será a média dos pontos das regiões que são divididas pela linha. Em cada jogada, o participante lança 4 dardos.



- a) As marcas no alvo da figura a seguir indicam os dardos lançados por Leo. Quantos pontos ele fez?



- b) Quantos pontos diferentes podem ser obtidos lançando os 4 dardos, sem que nenhum deles acerte qualquer linha?
- c) William pretende fazer 30 pontos nos seus 4 lançamentos. De quantas maneiras diferentes ele pode obter esta soma, não importando a sequência dos dardos, ou seja, as sequências (10, 10, 10, 0) e (0, 10, 10, 10) são consideradas uma forma só de somar 30 pontos ($3 \cdot 10 = 30$)?

4 Dardos Certeiros – Solução

a) Leo fez $10 + 5 + \frac{5+3}{2} + \frac{3+0}{2} = 20,5$ pontos.

- b) A pontuação mínima é 0 e a máxima é 40. Assim, basta verificarmos para cada um dos naturais neste intervalo a possibilidade de ser uma soma possível. Vamos construir uma tabela, mostrando um exemplo para cada soma possível.

1° dardo	2° dardo	3° dardo	4° dardo	Soma
0	0	0	0	0
0	0	0	3	3
0	0	0	5	5
0	3	3	0	6
5	0	0	3	8
3	3	0	3	9
5	5	0	0	10
5	3	3	0	11
3	3	3	3	12
10	3	0	0	13
5	3	3	3	14
5	0	0	10	15
5	3	5	3	16
10	5	0	3	18
3	3	10	3	19
10	10	0	0	20
10	5	3	3	21
10	3	10	0	23
10	0	10	5	25
10	3	3	10	26
10	10	5	3	28
10	10	10	0	30
10	10	3	10	33
10	10	10	5	35
10	10	10	10	40

Portanto, são 25 pontuações diferentes.

- c) Além das pontuações 0, 3, 5 e 10, temos as pontuações das linhas que podem ser 1, 5 ou 4 ou 7, 5. Para atingirmos 30 pontos, sem atingirmos a região que vale 7, 5, devemos atingir pelo menos dois dardos na região de 10 pontos, ou seja, (10; 10; 5; 5) ou (10; 10; 10; 0). Além destas possibilidades, temos também (10; 7, 5; 7, 5; 5) e (7, 5; 7, 5; 7, 5; 7, 5), totalizando 4 possibilidades ao todo.

5 Laranjas e Maçãs

Em uma frutaria, Jaime percebeu que uma laranja custa o mesmo que meia maçã mais meio real, percebeu também que um terço de uma maçã custa o mesmo que um quarto de uma laranja mais meio real. Com o valor de 5 laranjas mais 5 reais, quantas maçãs Jaime consegue comprar?

5 Laranjas e Maçãs – Solução

Se uma laranja custa o mesmo que meia maçã mais meio real, então, 2 laranjas custam o mesmo que 1 maçã mais 1 real; temos também que se um terço de uma maçã custa o mesmo que um quarto de laranja mais meio real, então, multiplicando cada parte por 12, temos que 4 maçãs custam o mesmo que 3 laranjas mais 6 reais. Juntando as duas informações, concluímos que 5 laranjas mais 5 reais custam o mesmo que 5 maçãs. Podemos resolver este problema utilizando o sistema de equações:

$$\left\{ \begin{array}{l} L = \frac{M}{2} + \frac{1}{2} \\ \frac{M}{3} = \frac{L}{4} + \frac{1}{2} \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2L = M + 1 \\ 4M = 3L + 6 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2L - 1 = M \\ 3L + 6 = 4M \end{array} \right.$$

Somando as equações do último sistema, chegamos a $5L + 5 = 5M$, ou seja, 5 laranjas mais 5 reais custam o mesmo que 5 maçãs.

6 Calculadora Maluca

A calculadora de Joseane ficou maluca: para cada algarismo que ela aperta, aparece seu dobro no visor. As teclas de operações de adição, subtração, multiplicação e divisão funcionam normalmente e não podem ser apertadas duas vezes seguidas. Por exemplo, uma sequência de operações permitida é escrever $2 \rightarrow \times \rightarrow 3$, que gera o número $4 \cdot 6 = 24$.

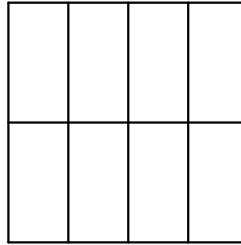
- a) Como ela pode fazer aparecer 80 apertando 3 teclas?
- b) Como ela pode fazer aparecer 50 apertando 3 teclas de algarismos e duas de operações de forma alternada?
- c) Qual a menor quantidade de teclas que ela deve apertar para obter no número 23?

6 Calculadora Maluca – Solução

- a) Apertando os algarismos, os números que podem aparecer na tela são 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 e 18. Uma maneira de fazer aparecer 80 no visor é apertar a sequência $4 \rightarrow \times \rightarrow 5$, que resulta em $8 \times 10 = 80$.
- b) A sequência deve ser: algarismo - operação - algarismo - operação - algarismo. Uma maneira é $5 \rightarrow \times \rightarrow 5 \rightarrow \div \rightarrow 1$, que resulta na operação $(10 \times 10) \div 2 = 50$.
- c) Uma maneira de se obter o 23 é apertar 4 teclas: $2 \rightarrow 3 \rightarrow \div \rightarrow 1$, que resulta em $46 \div 2 = 23$. Como todos os algarismos digitados geram números pares, se usarmos apenas as teclas +, - ou \times , o resultado será par e assim ela não obterá o 23. Portanto, o símbolo \div será usado pelo menos uma vez. Se ela usar outra tecla de operação, como elas não podem ser apertadas duas vezes seguidas, será preciso apertar pelo menos 5 teclas. Por outro lado, usando apenas uma operação, precisaremos de pelo menos mais outras duas teclas com algarismos. Como nenhuma divisão admissível entre os algarismos do conjunto $\{0, 2, \dots, 18\}$ produz 23, o número mínimo de teclas que ela deve usar é 4.

7 Divisão do Terreno

Jonas dividiu um terreno quadrado em oito partes retangulares iguais, conforme a figura, dando uma parte para cada um dos seus oito filhos. Para cercar sua parte, Antônio verificou que o seu perímetro era $120m$.



- a) Qual a área do terreno que Jonas dividiu?
- b) Se representarmos o perímetro de um dos terrenos menores por P , qual a área original do terreno em função de P ?

7 Divisão do Terreno – Solução

- a) Como o terreno inicialmente era quadrado, após a divisão, o comprimento de cada retângulo mede o dobro de sua largura. Sendo assim, a largura mede $\frac{120}{6} = 20m$ e o comprimento $2 \cdot 20 = 40m$. Portanto, o terreno antes da divisão tinha $80m$ de lado e, consequentemente, $80^2 = 6.400m^2$ de área.
- b) Repetindo os passos do item anterior, a largura de cada retângulo mede $\frac{P}{6}$ e o comprimento $\frac{P}{3}$. O lado do quadrado mede $\frac{2P}{3}$ e, consequentemente, sua área $\frac{4P^2}{9}$.

8 Gincana na Escola

Uma escola com 862 alunos participará de uma gincana, cujas regras são:

- I) O número de inscritos tem que ser um número entre $\frac{2}{3}$ e $\frac{7}{9}$ do total de alunos da escola.
- II) Como os alunos serão divididos em grupos com 11 alunos, o número de inscritos deverá ser múltiplo de 11.

Quantas são as possíveis quantidades de inscritos desta escola?

8 Gincana na Escola – Solução

Como $\frac{2}{3} \cdot 862 = 574, \bar{6}$ e $\frac{7}{9} \cdot 862 = 670, \bar{4}$, então a quantidade de alunos deve ser um múltiplo de 11 no intervalo $[575, 670]$. O menor múltiplo no intervalo é $53 \cdot 11 = 583$ e o maior é $60 \cdot 11 = 660$. Portanto, são $60 - 52 = 8$ possíveis quantidades diferentes de alunos desta escola para a participação na gincana.

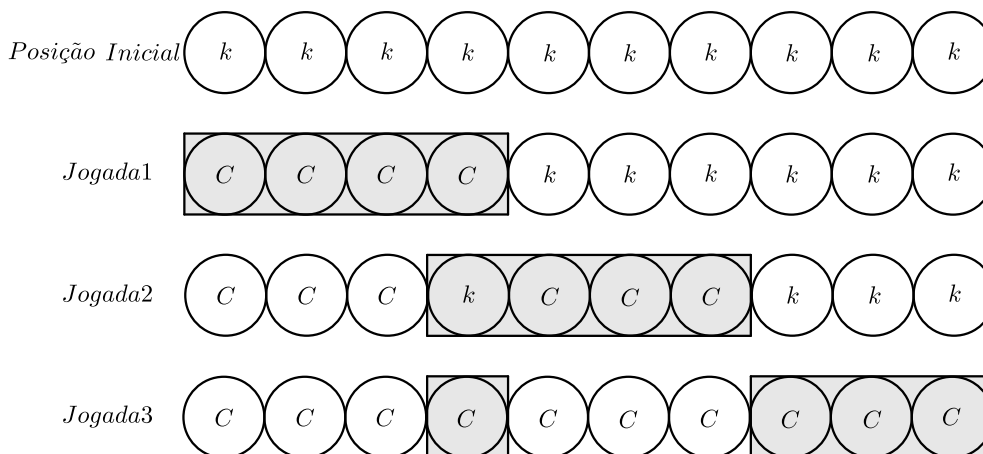
9 Moedas na Mesa

Sobre uma mesa estão 10 moedas, todas com “cara” voltada para cima. Uma jogada consiste em virar exatamente 4 moedas.

- Qual a quantidade mínima de jogadas para que todas estejam com “coroa” voltada para cima?
- Se fossem 11 moedas, seria possível deixar todas com coroa voltada para cima?

9 Moedas na Mesa – Solução

- Com 2 jogadas não é possível, pois conseguimos mudar apenas $2 \cdot 4 = 8$ moedas e precisamos alterar 10. Vamos mostrar agora que é possível com 3 jogadas, analisando a sequência da figura, na qual k representa cara e C , coroa.



- Viramos sempre 4 moedas (quantidade par) a cada jogada. Inicialmente, o número de caras (10) e o de coroa (0) é par. Sempre que viramos 4 moedas, a quantidade é par em cara e coroa ou ímpar em ambas, pois a soma das quantidades viradas é par (4). Assim, após cada jogada, a quantidade de caras e de coroas têm mesma paridade (ambas par ou ambas ímpar). Dessa forma, concluímos que não é possível deixar as 11 moedas com “coroa” voltada para cima, pois o número de coroas (11) seria ímpar e o de caras (0) seria par.

10 *Misturando Líquidos*

Em um recipiente existem 6 litros de uma mistura homogênea de dois líquidos (alfa e beta) na razão de 7 : 2, enquanto que em outro recipiente existem 9 litros de outra mistura com os mesmos dois líquidos (alfa e beta), só que neste a razão é 4 : 7. Misturando os líquidos dos dois recipientes, qual será a nova razão?

10 *Misturando Líquidos – Solução*

No primeiro recipiente a quantidade de líquido alfa é $\frac{7}{9} \cdot 6 = \frac{14}{3}$ litros e de beta é $\frac{2}{9} \cdot 6 = \frac{4}{3}$ litros, enquanto que no segundo as quantidades de alfa e beta, respectivamente, são $\frac{4}{11} \cdot 9 = \frac{36}{11}$ e $\frac{7}{11} \cdot 9 = \frac{63}{11}$ litros. Ao misturarmos, obtemos $\frac{14}{3} + \frac{36}{11} = \frac{262}{33}$ litros de alfa e $\frac{4}{3} + \frac{63}{11} = \frac{233}{33}$ litros de beta. Portanto, a razão final da mistura (alfa : beta) é $\frac{\frac{262}{33}}{\frac{233}{33}} = \frac{262}{233}$.

11 *Meninos e Meninas na Sala de Aula*

Em uma sala de aula há 50 alunos, dentre meninos e meninas. Pelo menos um dos alunos é menino. Tomando qualquer par de alunos, pelo menos um dos dois é menina. Quantas são as meninas desta sala?

11 *Meninos e Meninas na Sala de Aula – Solução*

Já que existe pelo menos um menino, seja João o menino da turma. Para cada par formado com João, pelo menos um é menina, ou seja, qualquer aluno que fizer par com João será menina. Portanto, são 49 meninas nesta turma.

12 *Círculo de Alunos*

Os alunos de uma escola formaram um círculo. Jonas e Amanda, que não estavam no círculo, resolveram contar os alunos do círculo, mas cada um iniciando por um aluno diferente, apesar de seguirem no mesmo sentido. Marcos foi o número 37 na contagem de Jonas e o número 15 na de Amanda. Nair foi a número 3 na contagem de Jonas e número 201 na de Amanda. Quantos alunos a escola possui?

12 *Círculo de Alunos – Solução*

A contagem de Jonas e Amanda foi no mesmo sentido e eles contaram a mesma quantidade de alunos no círculo. De Marcos até Nair, pela contagem de Amanda, são $201 - 14 = 187$ alunos. Esse resultado deve ser o mesmo na contagem de Jonas. Como Nair foi a número 3 na contagem de Jonas, significa que Jonas contou até o último aluno do círculo e recomeçou a contagem contando mais 3. Se ele partiu do 37, então devemos subtrair 36 do total de alunos do círculo e depois somar 3, de forma que o resultado seja 187, ou seja, o total de alunos do círculo é $187 + 36 - 3 = 220$. Não podemos esquecer que Jonas e Amanda também são alunos da escola, mas não estavam no círculo. Portanto, o total de alunos da escola é $220 + 2 = 222$.

Observação: Outra maneira de resolver o problema é utilizar uma equação. Utilizando x para o número de alunos do círculo e observando que as contagens de Jonas e Amanda, de Marcos a Nair, deve dar o mesmo resultado, temos:

$$\begin{aligned}x - 36 + 3 &= 201 - 14 \\x - 33 &= 187 \\x &= 187 + 33 \\x &= 220.\end{aligned}$$

Concluimos assim que o número de alunos da escola é $220 + 2 = 222$.

13 *Passeio de Casais*

Três casais estão em um passeio. Valdir tem 30 reais a mais que Laura e Paulo tem 50 reais a mais que Clara. Cada um dos homens tem exatamente 40 reais a mais que a respectiva esposa. Laura e Clara têm mais dinheiro que Bruna, que só tem 30 reais, e Joaquim é professor de Matemática.

- a) Quem é a esposa de Paulo?
- b) Quem é a esposa de Valdir?
- c) Que quantia Joaquim possui?

13 *Passeio de Casais – Solução*

- a) Vamos construir um quadro com as iniciais das pessoas, no qual os maridos ficarão na primeira coluna e as esposas na primeira linha. Cada quadrinho associa um homem a uma mulher. Utilizaremos também a notação x para "não é casal" e \checkmark para "é casal".

	C	L	B
V			
P			
J			

Se Valdir tem 30 reais a mais que Laura, não podem ser um casal, assim como Paulo não pode ser marido de Clara, pois, em ambos os casos, o homem não tem exatamente 40 reais a mais que a mulher.

	C	L	B
V		x	
P	x		
J			

Bruna é quem tem menos dinheiro entre as mulheres, então deve ser esposa do homem que tem menos dinheiro, que não pode ser Paulo. Portanto, Laura é esposa de Paulo.

	C	L	B
V		x	
P	x	\checkmark	x
J			

- b) Supondo que Laura tenha uma quantidade q de reais, então Valdir tem $(q+30)$ e Paulo tem $(q+40)$, pois é marido de Laura e, conseqüentemente, Clara tem $(q-10)$, pois tem 50 reais a menos que Paulo. Supondo que Bruna seja esposa de Valdir, então Valdir teria $40+30 = 70$ reais e Clara teria, por consequência, $40-10 = 30$ reais, que é a mesma quantia de Bruna, o que é absurdo, pois Bruna é a que tem menos. Portanto, a esposa de Valdir é Clara.

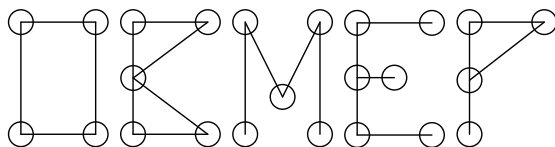
	C	L	B
V	\checkmark	x	x
P	x	\checkmark	x
J			

- c) Basta agora preenchermos a última linha do quadro e percebermos que, se Bruna é esposa de Joaquim, o professor de matemática, então Joaquim possui $30 + 40 = 70$ reais.

	<i>C</i>	<i>L</i>	<i>B</i>
<i>V</i>	✓	<i>x</i>	<i>x</i>
<i>P</i>	<i>x</i>	✓	<i>x</i>
<i>J</i>	<i>x</i>	<i>x</i>	✓

14 Pintando Bolinhas na OBMEP

Na figura, cada uma das 5 letras possui certa quantidade de círculos. Dispomos de 3 cores (azul, vermelho, laranja) para pintar os círculos (cada um de uma única cor).



- De quantas maneiras diferentes podemos pintar os círculos da letra “O”, não necessariamente usando as 3 cores?
- De quantas maneiras diferentes podemos pintar os círculos da letra “E” usando necessariamente as 3 cores?
- De quantas maneiras diferentes podemos pintar a letra “B” de forma que círculos ligados por um segmento devam ter cores diferentes? (Os três círculos alinhados na vertical possuem DOIS segmentos separando-os).

14 Pintando Bolinhas na OBMEP – Solução

- São 3 possibilidades de cores para cada um dos círculos. Portanto, podemos pintá-lo de $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$ maneiras.
- Sem considerar a restrição (usar necessariamente as 3 cores), o total de possibilidades, conforme o raciocínio do item anterior, é $3^6 = 729$. Vamos agora descontar deste resultado as possibilidades nas quais utilizamos apenas 1 ou 2 cores. Escolhendo apenas 2 cores, por exemplo, azul e vermelho, temos $2^6 - 2 = 62$ possibilidades de pintar com 2 cores (subtraímos 2 para descontar as duas possibilidades nas quais pintamos somente de azul e somente de vermelho. Calma! Já as colocaremos novamente). Se

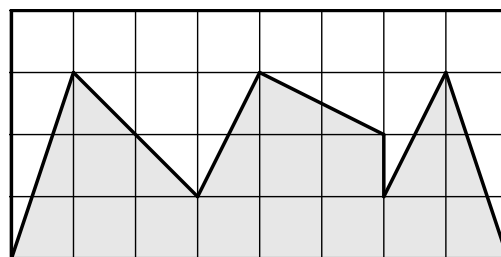
escolhermos azul e laranja, assim como laranja e vermelho, também teremos 62 possibilidades em cada. Lembrando que em 3 possibilidades ficam todos os círculos da mesma cor, temos, portanto, um total de $729 - 3 \cdot 62 - 3 = 540$ maneiras de pintar os círculos da letra *E* utilizando todas as cores.

- c) Vamos pintar logo o círculo do ponto médio do segmento vertical, pois ele tem segmento comum com todos os demais: são 3 possibilidades. Agora, sobraram duas cores para pintar os 2 círculos de cima e as mesmas 2 cores para os de baixo. Supondo que o primeiro círculo foi pintado de azul, podemos pintar os círculos de cima de vermelho - laranja ou laranja - vermelho, ou seja, 2 possibilidades, assim como os 2 de baixo. Portanto, são $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ maneiras.

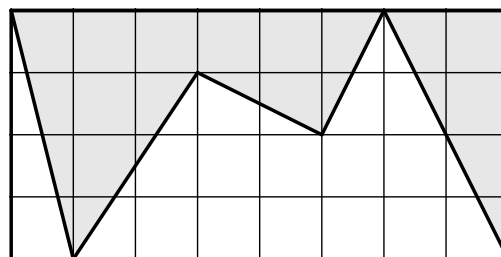
15 Área no Quadriculado

Nas figuras, os quadriculados são compostos por quadradinhos com 1 cm de lado.

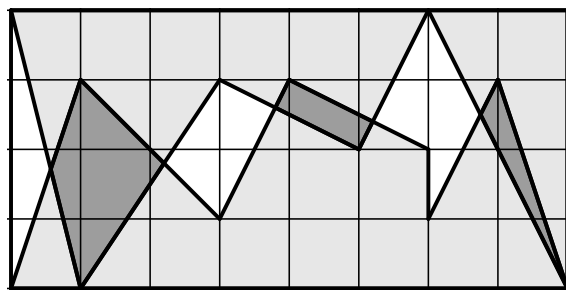
- a) Qual a área cinza do quadriculado a seguir?



- b) Qual a área cinza do quadriculado a seguir?

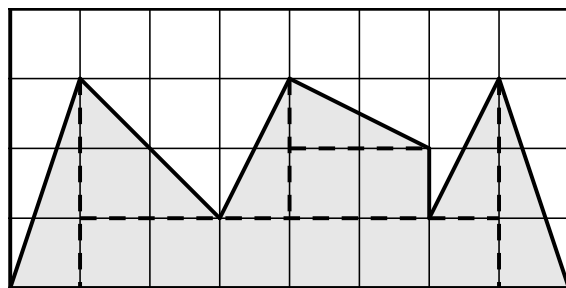


- c) Qual a área da parte branca do quadriculado, sabendo que a área cinza escuro (2 quadriláteros e 1 triângulo) tem 4cm^2 ?



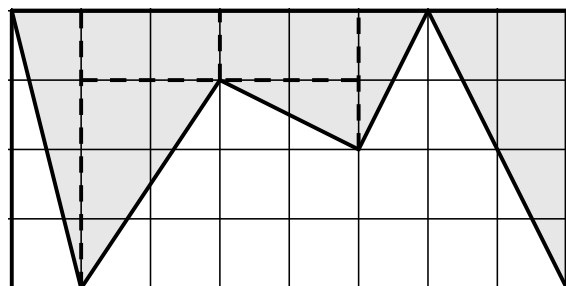
15 Área no Quadriculado – Solução

- a) Vamos dividir a parte cinza da figura em triângulos e retângulos, de maneira que os triângulos tenham a metade da área de um retângulo composto por um número inteiro de quadradinhos e cada retângulo composto por um número inteiro de quadradinhos.



Assim, temos que a área cinza é $\frac{3}{2} + \frac{4}{2} + 6 + \frac{2}{2} + \frac{2}{2} + 2 + \frac{2}{2} + \frac{3}{2} = 16\text{cm}^2$.

- b) Vamos repetir o mesmo procedimento do item anterior.



Portanto, a área cinza é $\frac{4}{2} + 2 + \frac{6}{2} + 2 + \frac{2}{2} + \frac{2}{2} + \frac{8}{2} = 15\text{cm}^2$.

- c) Primeiro devemos perceber que esta figura é a união das figuras dos dois primeiros itens. Com isso, podemos dizer que a área do retângulo total é a soma das áreas cinzas dos dois primeiros itens, mais a área branca, menos a área cinza escuro, pois foi contada duas vezes. Seja x a área branca (soma das três partes), temos:

$$16 + 15 + x - 4 = 8 \cdot 4$$

$$x + 27 = 32$$

$$x = 5.$$

Portanto, a área da parte branca é 5cm^2 .

16 Cooperativa Agrícola

Uma cooperativa agrícola de pequenos produtores criou uma numeração própria com 6 algarismos para que o consumidor identifique a procedência dos produtos:

- I) Os 2 primeiros algarismos indicam a sub-região, que são 27, numeradas de 01 a 27.
- II) Os 2 algarismos seguintes dizem respeito ao produtor, sendo que cada sub-região possui 40, numerados de 31 a 70 (perceba que existe o produtor 35, por exemplo, na sub-região 01, na 02, na 03..., ou seja, são 27 produtores número 35).
- III) Os 2 últimos algarismos referem-se ao tipo de produto, que são 28, numerados de 71 a 98.

Por exemplo, o número 074197 corresponde a um produto da sub-região 07, produtor 41 desta sub-região, tipo 97.

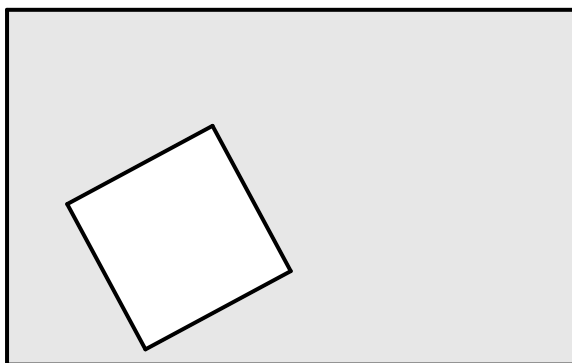
- a) Carlos anotou o número na sequência errada, trocando de lugar as 3 partes do código, anotando 900950. Mesmo assim é possível identificar sub-região, produtor e tipo do produto?
- b) Ao todo, quantos códigos diferentes podem ser gerados, de forma que atenda às condições da cooperativa?
- c) Júnior é um consumidor supersticioso. Ele detesta o número 15, não comprando qualquer produto que o contenha. Quantos são os códigos de produtos nesta situação?

16 *Cooperativa Agrícola – Solução*

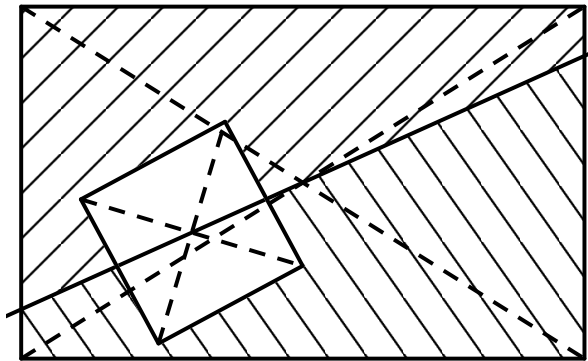
- a) É possível, pois as numerações de cada um dos três elementos é diferente. O produto de Carlos é da sub-região 09, Carlos é o produtor 50 desta sub-região e o tipo de produto é 90.
- b) São três elementos que compõem o código. No primeiro são 27 opções, no segundo são 40 e no terceiro são 28. Assim, o total de códigos possíveis é $27 \cdot 40 \cdot 28 = 30.240$.
- c) Fixando 15 nos dois primeiros algarismos, são $40 \cdot 27 = 1.080$ possibilidades. Fixando 15 na segunda e terceira posições do código, temos 3 possibilidades para o 1º algarismo (0, 1 ou 2), 10 para o 4º e 28 para os 2 últimos, ou seja, são $3 \cdot 10 \cdot 28 = 840$ possibilidades. Como 15 não pode aparecer em outras posições temos, portanto, $1.080 + 840 = 1.920$ códigos de produtos nessa situação.

17 *Dividindo Áreas*

Na figura, temos um retângulo e um quadrado interno ao retângulo. A área cinza é a área do retângulo que não pertence ao quadrado. É possível dividir a área cinza em duas partes de mesma área com apenas uma reta, qualquer que seja a posição do quadrado?

**17** *Dividindo Áreas – Solução*

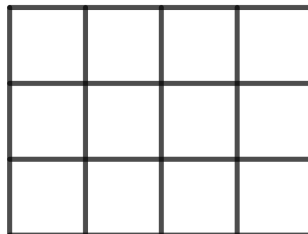
Em um retângulo qualquer, valendo também para o quadrado, é claro que podemos dividi-lo em duas áreas iguais passando uma reta pelo seu centro (encontro das diagonais). Como na figura, queremos dividir a área cinza em duas com mesma área, basta passarmos uma reta pelo centro do retângulo e pelo centro do quadrado, já que a área cinza é a diferença entre essas duas áreas.



18 Números no Tabuleiro

João quer escrever os números de 1 até 12 nas 12 casinhas de um tabuleiro 3×4

- a) Na figura abaixo, dê um exemplo do preenchimento de João de modo que a soma dos números nas três linhas seja a mesma.



- b) É possível que João consiga obter uma distribuição nesse tabuleiro de modo que a soma dos números em cada coluna seja sempre a mesma?

18 Números no Tabuleiro – Solução

- a) Uma solução para que as três linhas tenham a mesma soma é:

1	2	11	12
3	4	9	10
5	6	7	8

Veja que

$$\begin{aligned}1 + 2 + 11 + 12 &= \\3 + 4 + 9 + 10 &= \\5 + 6 + 7 + 8 &= 26.\end{aligned}$$

b) Não. A soma de todos os números do tabuleiro é igual a

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 = 78.$$

Se cada coluna tivesse a mesma soma C , então a soma total deveria ser $4C$. Entretanto, 78 não é um múltiplo de 4.

19 Sequências Numéricas

Janete brinca com os números criando sequências a partir de um número de 4 algarismos:

- I) Primeiro ela divide o número em duas partes, sendo a primeira formada pelos dois primeiros algarismos e a segunda pelos dois últimos.
- II) Se o número de uma das partes é par, ela divide-o por 2, mas se for ímpar ela soma 1.
- III) Em seguida, ela junta os dois resultados (na ordem original).
- IV) Se continuar com 4 algarismos, repete o processo; se o novo número tiver 3 algarismos ela o separa em duas partes, sendo a primeira com apenas o primeiro algarismo e a segunda com os dois últimos e repete o processo; se tiver 2 algarismos, ela repete o processo, sem dividir o número.
- V) Esse processo é repetido até chegar em um número com apenas 1 algarismo, quando encerra a sequência.

Por exemplo, vamos construir a sequência que começa com 1.617:

$$\begin{array}{cccccccc}1617 & \rightarrow & 16|17 & \rightarrow & 818 & \rightarrow & 8|18 & \rightarrow & 49 & \rightarrow \\50 & \rightarrow & 25 & \rightarrow & 26 & \rightarrow & 13 & \rightarrow & 14 & \rightarrow & 7.\end{array}$$

Portanto, a sequência é:

$$1617 \rightarrow 818 \rightarrow 49 \rightarrow 50 \rightarrow 25 \rightarrow 26 \rightarrow 13 \rightarrow 14 \rightarrow 7.$$

- a) Qual a sequência que começa com 2.020?
- b) Qual o 5º termo da sequência que começa com 8.998?
- c) Vamos chamar de subsequência os 5 últimos números de uma sequência. Quantas subsequências diferentes existem que terminam em 7, mas que todos os seus termos sejam formados por números de 2 algarismos, com exceção do 7?

19 Sequências Numéricas – Solução

- a) Temos:

$$\begin{array}{ccccccc} 2020 & \rightarrow & 20|20 & \rightarrow & 1010 & \rightarrow & 10|10 & \rightarrow \\ 55 & \rightarrow & 56 & \rightarrow & 28 & \rightarrow & 14 & \rightarrow 7. \end{array}$$

Portanto, a sequência é:

$$2020 \rightarrow 1010 \rightarrow 55 \rightarrow 56 \rightarrow 28 \rightarrow 14 \rightarrow 7.$$

- b) Temos:

$$\begin{array}{ccccccc} 8998 & \rightarrow & 89|98 & \rightarrow & 9049 & \rightarrow & 90|49 & \rightarrow \\ 4550 & \rightarrow & 45|50 & \rightarrow & 4625 & \rightarrow & 46|25 & \rightarrow 2326. \end{array}$$

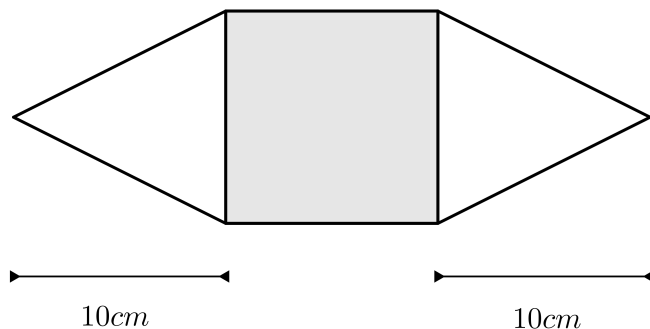
Portanto, o 5º termo da sequência é 2326.

- c) Precisamos pensar neste problema de “trás para frente”. Para chegarmos ao 7, necessariamente passamos pelo 14; para chegarmos ao 14, passamos pelo 13 ou 28; para chegarmos ao 13 passamos pelo 26; para chegarmos ao 28, passamos pelo 27 ou 56; para chegarmos ao 26, passamos pelo 25 ou 52; para chegarmos ao 27, passamos pelo 54 e para chegarmos ao 56, passamos pelo 55. Portanto, são 4 sequências:

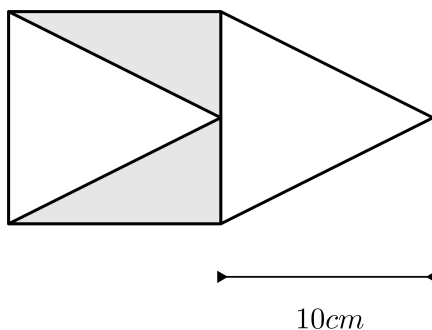
$$\begin{array}{l} 25 \rightarrow 26 \rightarrow 13 \rightarrow 14 \rightarrow 7. \\ 52 \rightarrow 26 \rightarrow 13 \rightarrow 14 \rightarrow 7. \\ 54 \rightarrow 27 \rightarrow 28 \rightarrow 14 \rightarrow 7. \\ 55 \rightarrow 56 \rightarrow 28 \rightarrow 14 \rightarrow 7. \end{array}$$

20 Dobrando Papéis

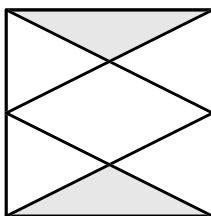
A figura é um recorte de papel formado por um quadrado de lados medindo 10cm e dois triângulos isósceles (triângulo isósceles são triângulos com dois lados de mesma medida).



- a) Dobrando um dos triângulos sobre o quadrado, conforme a figura, qual a área do quadrado que fica visível?

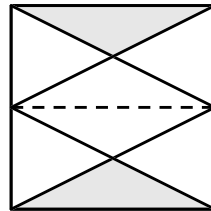


- b) Dobrando os dois triângulos sobre o quadrado, conforme a figura, qual a área do quadrado que fica visível?



20 Dobrando Papéis – Solução

- a) A área visível é a diferença entre a área do quadrado e a área do triângulo, ou seja,
- $$10^2 - \frac{10 \cdot 10}{2} = 50 \text{ cm}^2.$$
- b) Vamos dividir a figura em triângulos de mesma área e, para isso, basta traçarmos um segmento unindo os pontos médios dos lados verticais.



A figura foi dividida em 8 triângulos de mesma área, sendo $\frac{100}{8} = 12,5 \text{ cm}^2$ a área de cada. Portanto, a área visível é $2 \cdot 12,5 = 25 \text{ cm}^2$.

21 A Professora Célia

A professora Célia, em uma aula sobre sequências, resolve fazer uma brincadeira de adivinhação com padrões:

- I) Primeiro ela escolhe um número Natural.
 - II) Cláudia deve dizer o dobro do seu sucessor.
 - III) Marcelo deve dizer o triplo do antecessor dito por Cláudia.
 - IV) Por fim, Ademar deve dizer o quádruplo do sucessor do número dito por Marcelo.
- a) Se a professora Célia escolher 3, qual será a sequência formada pelos 4 números?
- b) Diani estava no banheiro e quando voltou, ouviu Ademar dizendo 184. Qual foi o número escolhido pela professora?
- c) Crie uma expressão para determinar o número escolhido pela professora se Ademar disse que o resultado é x .

21 A Professora Célia – Solução

- a) Se a professora Célia escolher 3, Cláudia deve dizer $2 \cdot 4 = 8$, Marcelo deve dizer $3 \cdot 7 = 21$ e Ademar deve dizer $4 \cdot 22 = 88$.
- b) Precisamos analisar o problema de “trás para frente”, utilizando as operações inversas. Se Ademar disse 184, então Marcelo só pode ter dito $\frac{184}{4} - 1 = 46 - 1 = 45$ e, consequentemente, Cláudia só pode ter dito $\frac{45}{3} + 1 = 16$, por fim, a professora Célia deve ter dito $\frac{16}{2} - 1 = 7$.
- c) Usando o raciocínio do item anterior, se Ademar disse x , então Marcelo deve ter dito $\frac{x}{4} - 1$, Cláudia deve ter dito $\frac{\frac{x}{4} - 1}{3} + 1$ e o número escolhido pela professora foi

$$\frac{\frac{\frac{x}{4} - 1}{3} + 1}{2} - 1 = \frac{x - 16}{24}.$$

22 Cartões Numerados

Janaína comprou um baralho diferente: são 180 cartas numeradas de 1 a 180, sendo que as cartas pares são vermelhas e as cartas ímpares são azuis.

- a) Quantas cartas são múltiplas de 7 e vermelhas?
- b) Quantas cartas são múltiplas de 7 ou vermelhas?
- c) Janaína escolheu aleatoriamente 80 cartas, todas, coincidentemente, pretas. Qual a quantidade mínima de cartas múltiplas de 7?

22 Cartões Numerados – Solução

- a) Como as cartas vermelhas são pares, então as vermelhas que são múltiplas de 7 devem ser múltiplas também de 2, ou seja, devem ser múltiplas de 14. O primeiro múltiplo de 14 é o próprio $14 = 1 \cdot 14$, enquanto que o último é $168 = 12 \cdot 14$, ou seja, são 12 cartas vermelhas e múltiplas de 7.
- b) O primeiro múltiplo de 7 ímpar é $7 = 1 \cdot 7$ e o último é $175 = 25 \cdot 7$, ou seja, são 13 múltiplos de 7 que são ímpares. Assim, o número de cartas vermelhas ou múltiplas de 7 é $90 + 13 = 103$.

- c) Como existem 13 cartas azuis que são múltiplas de 7, a quantidade mínima delas, dentre as 80 azuis é 3, pois a quantidade máxima de azuis múltiplas de 7 não escolhidas é 10.

23 Batalha de Vírus

Em uma célula existem 10 vírus tipo *A*. Em determinado momento, um vírus tipo *B* entra nesta célula. Depois disso, de hora em hora, cada vírus *B* mata um vírus *A* e, imediatamente após este evento, cada vírus se divide em 2, ambos do mesmo tipo desse vírus.

- a) Depois de 3 horas da chegada do vírus *B* na célula, qual a quantidade de cada tipo de vírus, incluindo as duplicações das batalhas após 3h?
- b) Depois de quanto tempo a quantidade de vírus tipo *B* será igual à quantidade de vírus do tipo *A*?
- c) Os vírus tipo *A* serão extintos da célula?

23 Batalha de Vírus – Solução

- a) Vamos construir um quadro para acompanhar o processo:

	Vírus A	Vírus B	Vírus A	Vírus B
	Antes da duplicação	Antes da duplicação	Após a duplicação	Após a duplicação
1h	9	1	18	2
2h	16	2	32	4
3h	28	4	56	8

Portanto, após 3h haverá 56 vírus tipo *A* e 8 tipo *B*.

- b) Continuando a tabela, temos:

	Vírus A	Vírus B	Vírus A	Vírus B
	Antes da duplicação	Antes da duplicação	Após a duplicação	Após a duplicação
1h	9	1	18	2
2h	16	2	32	4
3h	28	4	56	8
4h	48	8	96	16
5h	80	16	160	32
6h	128	32	256	64
7h	192	64	384	128
8h	256	128	512	256
9h	256	256	512	512

Portanto, depois de 9 horas a quantidade de vírus tipo B será maior.

- c) Pelo item anterior, vimos que depois de $9h$ as quantidades de vírus de cada tipo são as mesmas. Portanto, depois de mais de $1h$, ou seja, após $10h$ da chegada do vírus tipo B , os vírus tipo A serão extintos.

24 Operações no Tabuleiro

Considere o tabuleiro a seguir

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Uma operação permitida é escolher uma linha horizontal ou vertical e somar 1 aos três números ou subtrair 1 de todos eles. Determine se é possível, mediante uma sequência de operações permitidas, obter o tabuleiro.

9	8	7
6	5	4
3	2	1

24 Operações no Tabuleiro – Solução

Sim, é possível. Somando 1 oito vezes na primeira linha, obtemos:

9	10	11
4	5	6
7	8	9

Agora somando 1 duas vezes na linha do meio:

9	10	11
6	7	8
7	8	9

Subtraindo 1 quatro vezes da terceira linha, temos:

9	10	11
6	7	8
3	4	5

Escolhendo agora subtrair 1 duas vezes a segunda linha vertical:

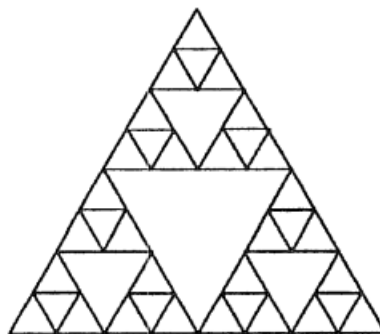
9	8	11
6	5	8
3	2	5

Finalmente, escolhendo 4 vezes a terceira linha vertical para subtrair 1, obtemos:

9	8	7
6	5	4
3	2	1

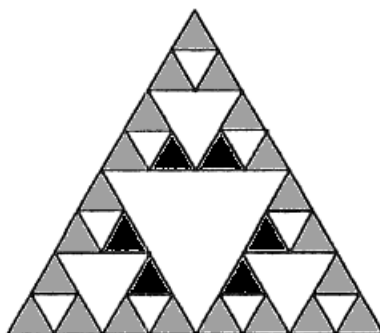
25 Os Triângulos Equiláteros

Na figura a seguir, o perímetro do triângulo equilátero maior é 24 cm e cada um dos triângulos menores também são equiláteros. Qual a soma dos comprimentos de todos os segmentos desenhados na figura?



25 Os Triângulos Equiláteros – Solução

Como o perímetro do triângulo maior é 24 cm , segue que o lado de cada um dos triângulos menores é 1 cm . Para encontrar a soma de todos os segmentos, basta somar os perímetros dos triângulos cinzas e dos triângulos pretos da figura a seguir.



Ao todo temos 27 triângulos, cada um de perímetro 3 cm , totalizando $27 \cdot 3 = 81\text{ cm}$.

26 A Adivinhação do Número de Pedras

Seis pessoas tentam adivinhar o número de pedras que há em uma caixa. Alberto diz que há 52 pedras, Bernardo diz que há 59, Carlos diz 62, Davi 65, Eduardo 49 e Felipe 42. Todos erraram, sendo que alguns disseram um número maior e outros um número menor. As medidas de seus erros foram 1, 4, 6, 9, 11 e 12, em alguma ordem. Determine quantas pedras há na caixa e o erro de cada um.

26 A Adivinhação do Número de Pedras – Solução

O maior erro que apareceu na lista é 12. Assim, para cada número k mencionado pelas pessoas, o número de pedras deve estar entre $k - 12$ e $k + 12$. Para restringir nossa análise sobre as possíveis quantidades de pedras, analisemos o maior e o menor número que foram mencionados: 65 e 42. Consequentemente, a quantidade de pedras não pode ser menor que $65 - 12 = 53$ e não pode ser maior que $42 + 12 = 54$. Se a quantidade de pedras fosse 54, como Alberto falou 52, o número 2 deveria aparecer entre os erros. Dado que isso não aconteceu, a quantidade de pedras é 53 e os erros de cada um foram:

Alberto	$1 = 53 - 52$
Bernardo	$6 = 59 - 53$
Carlos	$9 = 62 - 53$
Davi	$12 = 65 - 53$
Eduardo	$4 = 53 - 49$
Felipe	$11 = 53 - 42$

27 *Ladrões que roubam ladrões*

Três ladrões A , B e C repartiram em partes iguais o resultado de um roubo. Na primeira noite, enquanto C dormia, A e B retiraram metade do que ele tinha e repartiram em partes iguais entre si. Na segunda noite, enquanto A dormia, B e C retiraram metade do que ele tinha e repartiram em partes iguais entre si. Na terceira noite, enquanto B dormia, A e C retiraram metade do que ele tinha e repartiram em partes iguais entre si. Na manhã seguinte, eles se separaram para sempre. Quando B contou seu dinheiro, percebeu que possuía R\$10.000,00. Determina a quantia inicial que foi roubada pelos ladrões.

27 *Ladrões que roubam ladrões – Solução*

Seja x a quantidade de dinheiro que cada ladrão recebeu na divisão inicial do resultado do roubo. Na primeira noite, $x/2$ do dinheiro de C é dividido em duas parcelas de $1/2 \cdot x/2 = x/4$, uma para A e outra para B . Após essa distribuição, A e B passam a ter $x + x/4 = 5x/4$. A tabela a seguir indica o quanto cada um possuía em cada noite.

	A	B	C
Início	x	x	x
Noite 1	$5x/4$	$5x/4$	$x/2$
Noite 2	$5x/8$	$25x/16$	$13x/16$
Noite 3	$65x/64$	$25x/32$	$77x/64$

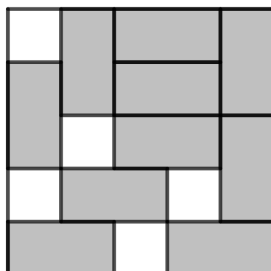
Como

$$\begin{aligned} \frac{25x}{32} &= 10.000 \\ x &= 12.800. \end{aligned}$$

Portanto a quantia inicial foi de $3 \cdot 12.800 = \text{R}\$38.400,00$.

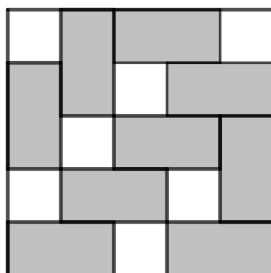
28 *Cobrindo o Tabuleiro com Dominós*

Algumas peças cinzas no formato de um dominó 2×1 podem ser usadas para cobrir os quadradinhos de um tabuleiro 5×5 . Dizemos que o tabuleiro está *lotado* quando não há espaço para colocar novas peças, como no exemplo abaixo. Qual o menor número de peças que devemos usar para deixar um tabuleiro *lotado*?

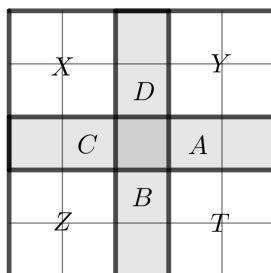


28 *Cobrindo o Tabuleiro com Dominós – Solução*

A figura a seguir exhibe um exemplo de um tabuleiro lotado com 9 peças.

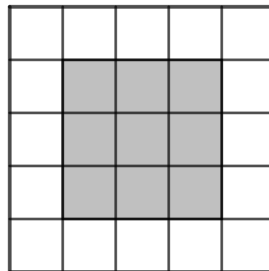


Vamos mostrar que 9 é o menor número de peças para que o tabuleiro se torne lotado. Suponha que existe uma configuração lotada com 8 peças ou menos e divida o tabuleiro como indicado na figura a seguir.



Nesse desenho, temos os subtabuleiros X , Y , Z e T de dimensões 2×2 nos cantos. Como estamos supondo que a configuração é lotada, cada um desses subtabuleiros tem casas

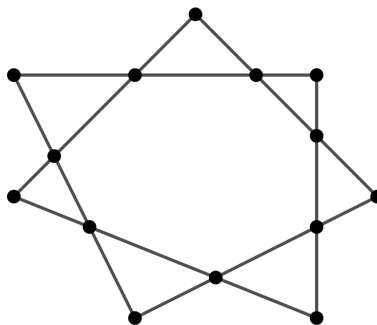
em comum com pelo menos 2 peças. Além disso, uma peça não pode ter casas em comum com dois desses subtabuleiros. Assim, as peças dessa configuração podem ser divididas em 4 pares distintos e o total de peças é 8. Nessa situação, o quadrado central não pode ser coberto por nenhuma peça e os quadrados vizinhos a ele, chamados de A , B , C e D , devem ser cobertos por alguma peça, pois caso contrário seria possível inserir mais uma peça na configuração. Note que os dominós que cobrem as peças A , B , C e D são todas distintas e nenhuma delas pode estar totalmente contida na cruz pintada de cinza. Consequentemente, 4 peças da configuração devem estar contidas no quadrado central 3×3 da figura a seguir.



As outras 4 peças devem cobrir os 16 quadradinhos do bordo do tabuleiro. Como entre elas pode existir no máximo um quadradinho vazio, essas 4 peças cobrem no máximo $4 \cdot 2 + 4 = 12$ quadradinhos do bordo e assim é possível colocar mais uma peça. Portanto, não pode existir uma configuração lotada com 8 peças.

29 *Números na Poligonal*

Os números 1, 2, 3, ..., 14 devem ser escritos nos 14 vértices da linha poligonal abaixo de modo que as somas dos 4 números escritos em cada um dos 7 segmentos da poligonal seja a mesma.



- Qual a soma de todos os números de 1 a 14?
- Qual deve ser a soma dos números escritos em um segmento?

- c) Dê um exemplo de distribuição desses números.

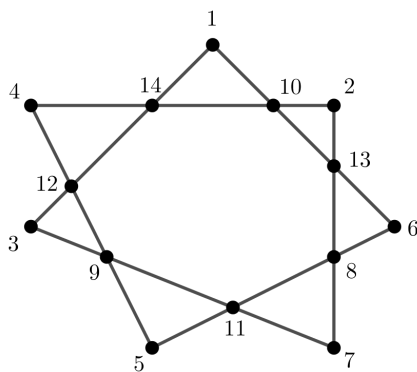
29 *Números na Poligonal – Solução*

- a) A soma de todos os números que devem ser escritos é

$$1 + 2 + 3 + \dots + 14 = 105.$$

- b) Ao somarmos os números escritos em cada um dos 7 segmentos, cada um deles será somado duas vezes. Portanto, a soma comum a cada um desses segmentos é $\frac{105 \cdot 2}{7} = 30$.

- c) A figura abaixo mostra uma possível distribuição



30 *Professor Piraldo*

O professor Piraldo fará uma avaliação para 5 alunos de uma turma: Arnaldo, Bernaldo, Cernaldo, Dernaldo e Ernaldo. Essa prova consiste em chamar cada um ao quadro, uma única vez, para resolver um problema cada.

- a) De quantas maneiras diferentes o professor pode chamá-los ao quadro?
- b) Em quantas destas sequências eles NÃO estão em ordem alfabética?
- c) Em quantas dessas sequências Arnaldo e Bernaldo são chamados em posições consecutivas?

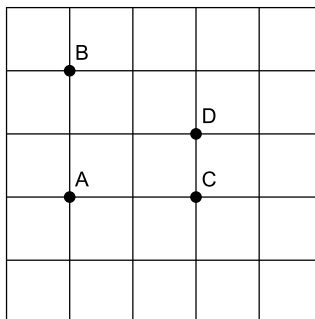
30 *Professor Piraldo – Solução*

- a) Para o primeiro aluno são 5 possibilidades, para o segundo 4 possibilidades, para o terceiro 3, para o quarto 2 e para o último, apenas, uma possibilidade. Portanto, o total de possibilidades é $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.
- b) Existe apenas uma sequência na qual eles irão ao quadro em ordem alfabética. Sendo assim, o número de sequências nas quais eles NÃO irão em ordem alfabética é $120 - 1 = 119$.
- c) Vamos considerar Arnaldo e Bernaldo como se fossem apenas uma pessoa: ABnaldo. Assim, seriam $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ possibilidades, onde, para cada uma delas, podemos trocar a posição de Arnaldo e Bernaldo mantendo-os lado a lado. Portanto, o total de possibilidades é $2 \cdot 24 = 48$.

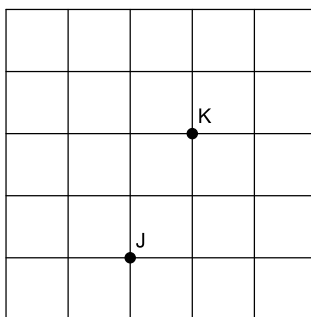
ENUNCIADOS E SOLUÇÕES DO NÍVEL 2

1 Pontos Equilegais

No quadriculado da figura, dizemos que dois ou mais pontos nas intersecções das linhas são equilegais, em relação a um ponto fixo, quando suas distâncias são iguais a este. Por exemplo, B e C são equilegais em relação a A , mas B e D não são.



- a) Marque, no quadriculado a seguir, os pontos equilegais a K em relação a J .

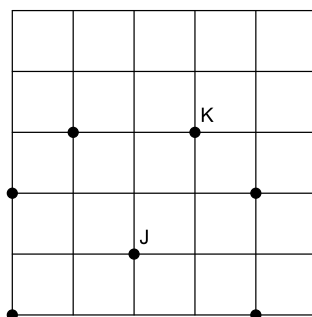


- b) Se os pontos não precisarem ser nas intersecções das linhas, que figura será formada no plano do quadriculado dos pontos equilegais a K em relação a J ?

- c) Se os pontos não precisarem ser no plano do quadriculado, que figura será formada dos pontos equilegais a K em relação a J ?

1 Pontos Equilegais – Solução

- a) Supondo que a medida do lado de cada quadradinho seja 1 cm , então a distância d de K a J pode ser determinada pelo Teorema de Pitágoras: $d^2 = 2^2 + 1^2$, donde concluímos que $d = \sqrt{5}\text{ cm}$. Todos os pontos das intersecções que estiverem à distância de $\sqrt{5}\text{ cm}$ de J serão equilegais a K . Vamos marcá-los:



- b) O conjunto de pontos equidistantes de J é uma circunferência cuja medida do raio é $\sqrt{5}\text{ cm}$.
- c) No espaço, o conjunto de pontos equidistantes a um ponto qualquer é uma superfície esférica.

2 Expressão no Quadro

O professor M. A. Luco escreveu no quadro a expressão:

$$\frac{n^2 - 5n + 4}{n - 4}.$$

Então, ele diz aos alunos que n pode ser qualquer número natural, com exceção de 4.

- a) Qual o valor da expressão para $n = 1$?
- b) Marcos substituiu n por um número natural e verificou que o valor da expressão é 5. Marcos substituiu n por qual número?
- c) Quais são os números naturais que não podem ser o valor numérico da expressão?

2 *Expressão no Quadro – Solução*

a) Para $n = 1$, temos:

$$\begin{aligned}\frac{n^2 - 5n + 4}{n - 4} &= \frac{1^2 - 5 \cdot 1 + 4}{1 - 4} \\ &= \frac{1 - 5 + 4}{-3} \\ &= 0.\end{aligned}$$

b) Igualando a expressão a 5, temos:

$$\begin{aligned}\frac{n^2 - 5n + 4}{n - 4} &= 5 \\ n^2 - 5n + 4 &= 5(n - 4) \\ n^2 - 10n + 24 &= 0 \\ n &= \frac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 24}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{10 \pm \sqrt{100 - 96}}{2} \\ &= \frac{10 \pm 2}{2} \\ &= 5 \pm 1.\end{aligned}$$

Portanto, Marcos substituiu n por 6, já que $n \neq 4$.

c) Fatorando o numerador e lembrando que $n \neq 4$, temos:

$$\frac{n^2 - 5n + 4}{n - 4} = \frac{(n - 4)(n - 1)}{n - 4} = n - 1$$

Como $n \neq 4$, então $n - 1 \neq 3$. Portanto, a expressão pode assumir qualquer valor natural com exceção de 3.

3 *Nem Todos Passaram*

Em uma turma existem 70 alunos, tais que:

- I) 14 meninos passaram em Matemática;
- II) 12 meninos passaram em Física;
- III) 10 meninos e 16 meninas não passaram em Matemática nem em Física;

IV) 32 são meninos;

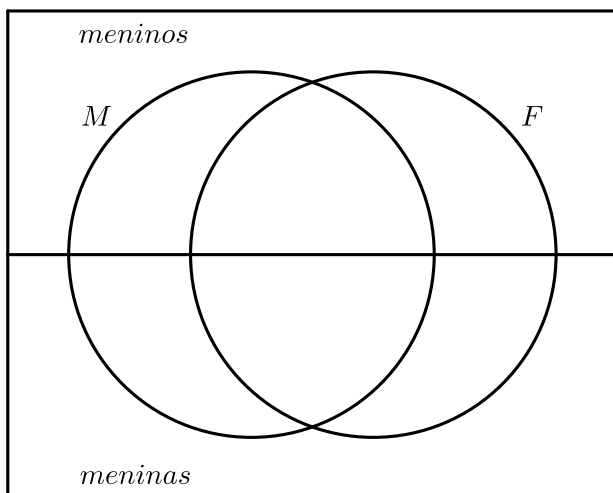
V) 10 passaram nas duas disciplinas;

VI) 22 passaram apenas em Matemática.

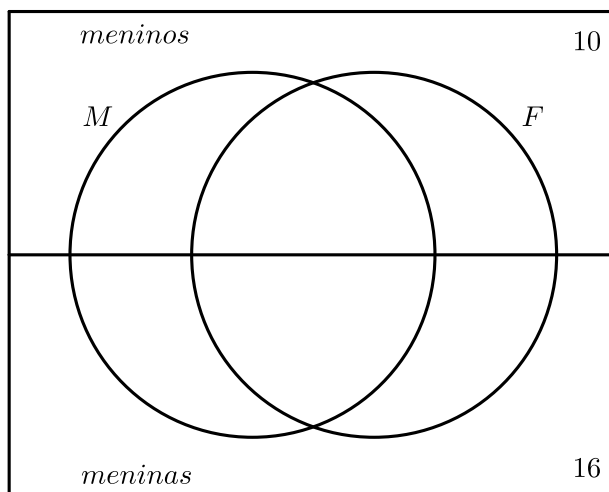
Quantas meninas passaram somente em Física?

3 *Nem Todos Passaram – Solução*

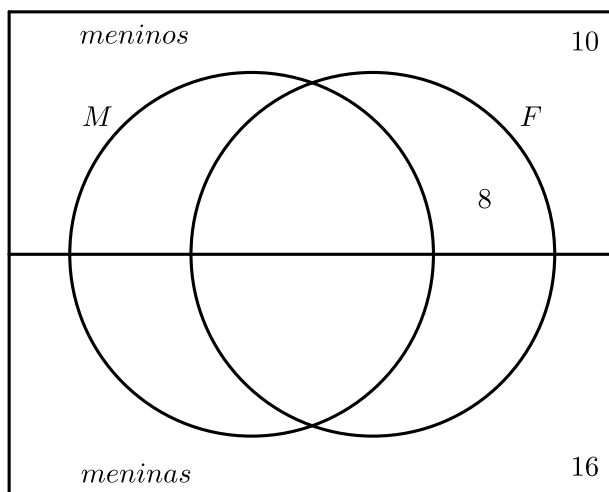
Para resolver o problema, vamos utilizar o diagrama abaixo, no qual o retângulo superior representa as quantidades de meninos em cada caso e o inferior as quantidades de meninas; na circunferência da esquerda, a quantidade de alunos que passou em matemática, enquanto que na da direita, a quantidade que passou em física, sendo que na intersecção, a quantidade que passou em ambos.



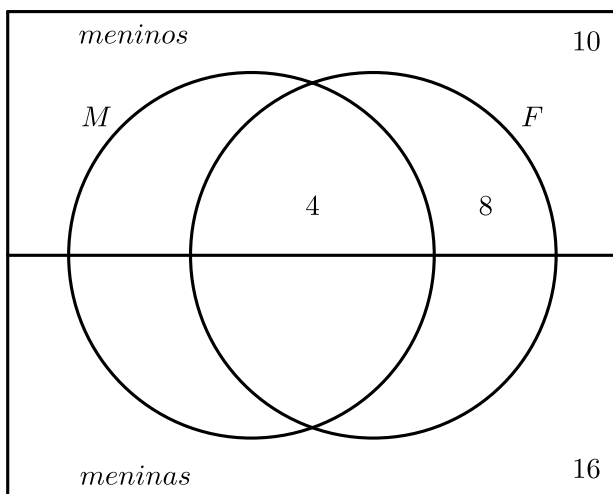
Agora, vamos preenchendo o diagrama, utilizando as informações, usando uma sequência conveniente. Por *III*, temos:



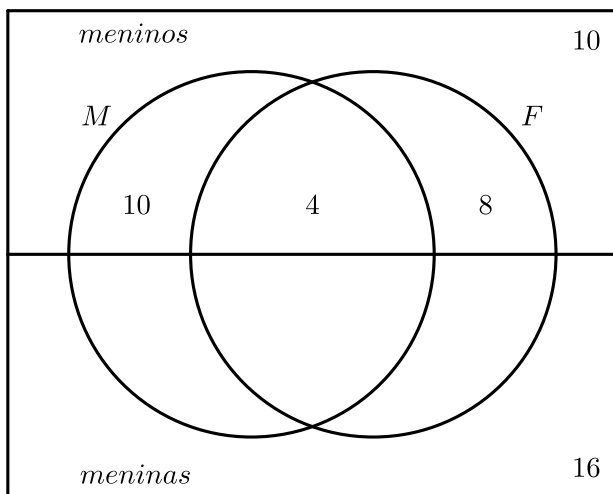
Por *IV* e *I*, como 32 são meninos e 14 deles passaram em matemática, então $32 - 14 = 18$ não passaram em matemática, o que significa que $18 - 10 = 8$ deles passou apenas em física.



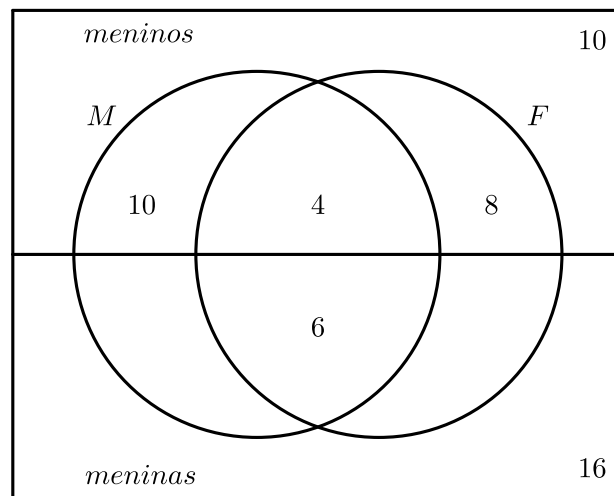
Por *II*, como 12 meninos passaram em física, então $12 - 8 = 4$ deles passaram também em matemática.



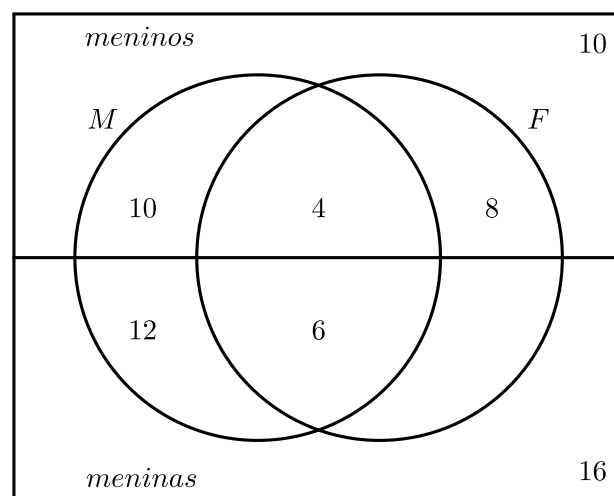
Por I , como 14 meninos passaram em matemática, então $14 - 4 = 10$ deles passaram apenas em matemática. Com isso, já determinamos todas as quantidades relacionadas aos meninos.



Por V , como 10 alunos passaram nas duas disciplinas, então $10 - 4 = 6$ meninas passaram em ambas.



Por *VI*, como 22 passaram apenas em matemática, então $22 - 10 = 12$ meninas passaram apenas em matemática.



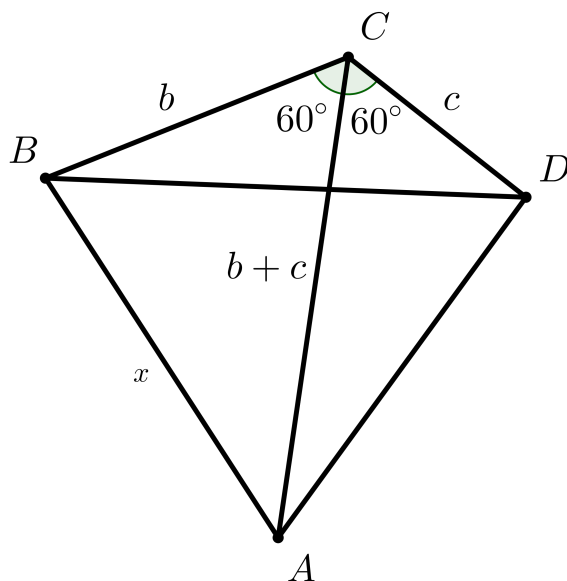
Como já temos $10 + 10 + 4 + 8 + 12 + 6 + 16 = 66$ alunos no diagrama, a quantidade de meninas que passou apenas em física é $70 - 66 = 4$.

4 *Quadrilátero, mas não um Qualquer*

Seja $ABCD$ um quadrilátero tal que $AC = BC + CD$. Se $\angle BCD = 120^\circ$, \overline{CA} é bissetriz e $AB = x$, qual o valor de BD , em função x ?

4 *Quadrilátero, mas não um Qualquer – Solução*

Vamos analisar a figura:



Aplicando a Lei dos Cossenos no triângulo ABC , temos:

$$\begin{aligned} x^2 &= b^2 + (b+c)^2 - 2 \cdot b \cdot (b+c) \cdot \cos 60^\circ \\ x^2 &= b^2 + b^2 + 2bc + c^2 - 2b^2 \frac{1}{2} - 2bc \frac{1}{2} \\ x^2 &= b^2 + b^2 + 2bc + c^2 - b^2 - bc \\ x^2 &= b^2 + bc + c^2. \end{aligned}$$

Aplicando agora a Lei dos Cossenos no triângulo BCD , temos:

$$\begin{aligned} BD^2 &= b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos 120^\circ \\ BD^2 &= b^2 + c^2 - 2bc(-\cos 60^\circ) \\ BD^2 &= b^2 + c^2 + bc \\ BD^2 &= x^2 \\ BD &= x. \end{aligned}$$

5 *Números com 5 Algarismos*

Com 5 algarismos não nulos, podemos formar 120 números, sem repetir algarismo em um mesmo número. Seja S a soma de todos esses números. Determine a soma dos algarismos de S , sendo:

- a) 1, 3, 5, 7 e 9 os 5 algarismos;
- b) 0, 2, 4, 6 e 8 os 5 algarismos, lembrando que 02468 é um número com 4 algarismos e, portanto, não teremos 120 números neste caso.

5 *Números com 5 Algarismos – Solução*

- a) São 120 números ao todo, com todas as combinações possíveis. Assim, em cada uma das posições (unidade, dezena, centena, unidade do milhar, dezena do milhar), cada um dos algarismos aparece a mesma quantidade de vezes, ou seja, $\frac{120}{5} = 24$. Por exemplo, nas unidades, o algarismo 1 aparece 24 vezes, assim como o 3, o 5, o 7 e o 9. Dessa forma, a soma de todas as unidades é:

$$\begin{aligned} 24 \cdot 1 + 24 \cdot 3 + 24 \cdot 5 + 24 \cdot 7 + 24 \cdot 9 &= \\ 24(1 + 3 + 5 + 7 + 9) &= \\ 24 \cdot 25 &= 600. \end{aligned}$$

Sendo assim, a soma S é:

$$\begin{aligned} S &= 600 + 600 \cdot 10 + 600 \cdot 100 + 600 \cdot 1.000 + 600 \cdot 10.000 \\ &= 600(1 + 10 + 100 + 1.000 + 10.000) \\ &= 600 \cdot 11.111 \\ &= 6.666.600. \end{aligned}$$

Por fim, a soma dos algarismos de S é $6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 0 + 0 = 30$.

- b) Vamos utilizar o mesmo raciocínio do item anterior, contando também os números que iniciam por 0, ou seja, que possuem apenas 4 algarismos. Chamando essa soma dos 120 números de S' , temos:

$$\begin{aligned} S' &= 24 \cdot (0 + 2 + 4 + 6 + 8) \cdot 11.111 \\ &= 24 \cdot 20 \cdot 11.111 \\ &= 5.333.280. \end{aligned}$$

Precisamos descontar agora os números que começam com 0, que é a soma de todos os números de 4 algarismos que podemos formar com 2, 4, 6 e 8 ($120 - 24 = 96$ ao todo). Esta soma vale $24 \cdot (2 + 4 + 6 + 8) \cdot 1.111 = 533.280$. Portanto, $S = S' - 533.280 = 4.800.00$, sendo a soma de seus algarismos igual a $4 + 8 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 12$.

6 Reunião de Matemáticos

Em uma reunião de matemáticos, Carlos diz a Frederico: *O dobro do produto dos dois dígitos do número de matemáticos na reunião é exatamente a nossa quantidade. Qual a quantidade mínima de matemáticos que deve se juntar a nós para que nossa quantidade seja um número primo?* Ajude Frederico a resolver o problema.

6 Reunião de Matemáticos – Solução

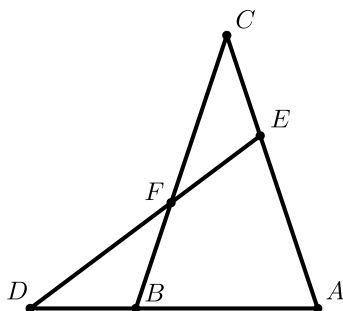
Vamos representar a quantidade de matemáticos por \overline{ab} . Temos que:

$$\begin{aligned}2ab &= \overline{ab} \\2ab &= 10a + b \\2ab - b &= 10a \\b(2a - 1) &= 10a \\b &= \frac{10a}{2a - 1}.\end{aligned}$$

Analisando os possíveis valores de a , lembrando que ambos são algarismos, com $a \neq 0$, concluímos que $a = 3$ e $b = 6$. Portanto, o número de matemáticos é 36 e com mais um matemático a quantidade será um número primo.

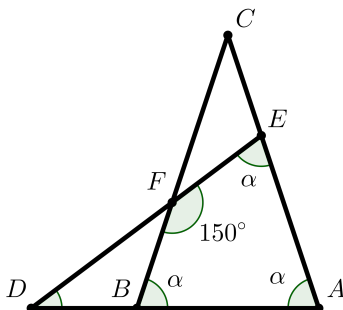
7 Triângulos Isósceles

Na figura, os triângulos $\triangle ADE$ e $\triangle ABC$ são isósceles. Se $\angle DFC = 150^\circ$, qual a medida de $\angle FDB$?



7 *Triângulos Isósceles – Solução*

Como $\triangle ADE$ e $\triangle ABC$ são isósceles, temos $\angle DAE = \angle DEA = \angle ABC = \alpha$. Além disso, $\angle BFE = \angle DFC = 150^\circ$ (OPV). Pela soma dos ângulos internos do quadrilátero $ABFE$, temos $3\alpha + 150^\circ = 360^\circ$, donde $\alpha = 70^\circ$. Por fim, $\angle FDB + 70^\circ + 70^\circ = 180^\circ$, ou seja, $\angle FDB = 40^\circ$.

**8** *Soma da Quarta dos Inversos*

Se $6xy - \sqrt{3}x^2 = \sqrt{3}y^2$, calcule

$$\left(\frac{x}{y}\right)^4 + \left(\frac{y}{x}\right)^4.$$

8 *Soma da Quarta dos Inversos – Solução*

Temos:

$$\begin{aligned} 6xy - \sqrt{3}x^2 &= \sqrt{3}y^2 \\ 6xy &= \sqrt{3}(x^2 + y^2) \\ \frac{xy}{x^2 + y^2} &= \frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{x^2 + y^2}{xy} &= \frac{6}{\sqrt{3}} \\ \frac{x}{y} + \frac{y}{x} &= 2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Elevando a última igualdade ao quadrado, temos:

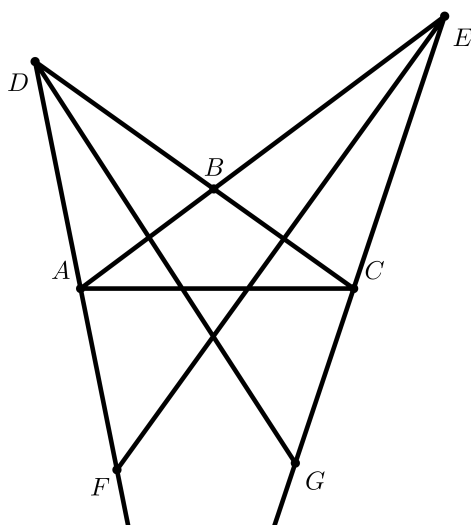
$$\begin{aligned}\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)^2 &= (2\sqrt{3})^2 \\ \frac{x^2}{y^2} + 2 + \frac{y^2}{x^2} &= 12 \\ \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} &= 10.\end{aligned}$$

Finalmente, elevando mais uma vez a expressão ao quadrado, temos:

$$\begin{aligned}\left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}\right)^2 &= 10^2 \\ \frac{x^4}{y^4} + 2 + \frac{y^4}{x^4} &= 100 \\ \left(\frac{x}{y}\right)^4 + \left(\frac{y}{x}\right)^4 &= 98.\end{aligned}$$

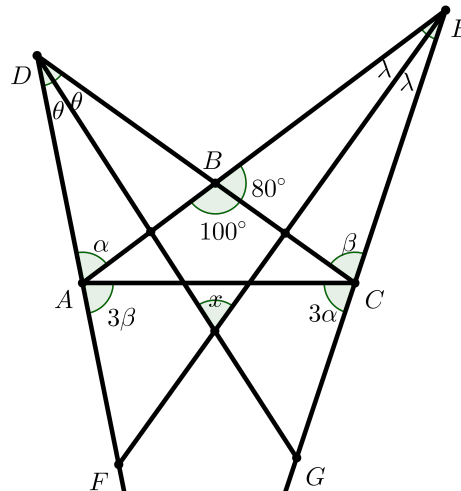
9 Bissetrizes Internas

Na figura, $\angle ABC = 100^\circ$, $\angle FAC = 3\angle ECB$ e $\angle GCA = 3\angle DAB$. Determine a medida do ângulo agudo na intersecção das bissetrizes internas dos triângulos $\triangle ADB$ e $\triangle CEB$ relativo aos ângulos D e E .



9 *Bissetrizes Internas – Solução*

Vamos marcar na figura os pontos de intersecção e os ângulos que nos interessam, sendo x o ângulo da intersecção das bissetrizes que procuramos.



Pela soma dos ângulos internos do triângulo $\triangle ABC$, temos:

$$\begin{aligned} 100^\circ + (180^\circ - \alpha - 3\beta) + (180^\circ - \beta - 3\alpha) &= 180^\circ \\ 460^\circ - 4\alpha - 4\beta &= 180^\circ \\ 4\alpha + 4\beta &= 280^\circ \\ \alpha + \beta &= 70^\circ. \end{aligned}$$

Pelos triângulos $\triangle ABD$ e $\triangle BCE$, temos $\alpha + 2\theta = 100^\circ$ e $\beta + 2\lambda = 100^\circ$. Somando estas duas últimas equações, chegamos a:

$$\begin{aligned} \alpha + 2\theta + \beta + 2\lambda &= 100^\circ + 100^\circ \\ \alpha + \beta + 2\theta + 2\lambda &= 200^\circ \\ 70^\circ + 2(\theta + \lambda) &= 200^\circ \\ \theta + \lambda &= 65^\circ. \end{aligned}$$

Agora, vamos utilizar a soma dos ângulos internos do quadrilátero $KBLJ$.

$$\begin{aligned} \angle KJL + \angle BKJ + \angle KBL + \angle BLJ &= 360^\circ \\ x + (80^\circ + \theta) + 100^\circ + (80^\circ + \lambda) &= 360^\circ \\ x + 260^\circ + \theta + \lambda &= 360^\circ \\ x + \theta + \lambda &= 100^\circ \\ x + 65^\circ &= 100^\circ \\ x &= 35^\circ. \end{aligned}$$

10 *Escoteiro Explorador*

Juca é um escoteiro que está explorando as proximidades do seu acampamento. Após coletar frutas e madeira, ele deve pegar água no rio e voltar para sua barraca. Vamos representar, na figura, Juca pela letra J , o rio pela letra r e sua barraca pela letra B . A distância dos pés das perpendiculares C e E , em r dos pontos J e B é $180m$.



Qual a menor distância que Juca pode percorrer para voltar para sua barraca, passando pelo rio?

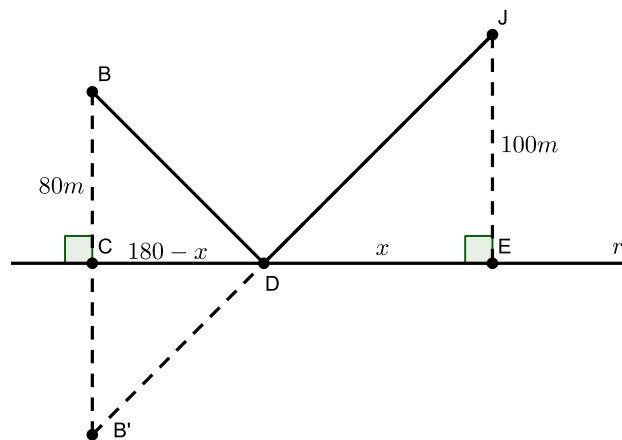
10 *Escoteiro Explorador – Solução*

Vamos marcar o ponto B' , simétrico do ponto B , em relação à reta r . O ponto B' também dista $80m$ da reta r e, com isso, temos os triângulos congruentes $\triangle BCD$ e $\triangle B'CD$ (lado-ângulo-lado), sendo D o ponto que Juca pegará água no rio. Como a menor distância entre J e B' é o comprimento de um segmento de reta unindo esses dois pontos, J , D e B' devem estar alinhados. Seja x a medida do segmento \overline{DE} , vamos aplicar a razão de semelhança nos triângulos $\triangle BCD$ e $\triangle JED$:

$$\begin{aligned}\frac{180 - x}{80} &= \frac{x}{100} \\ \frac{180 - x}{4} &= \frac{x}{5} \\ 4x &= 900 - 5x \\ 9x &= 900 \\ x &= 100m.\end{aligned}$$

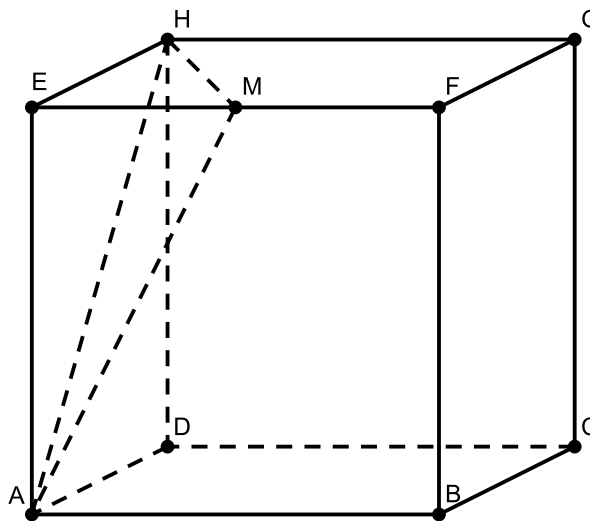
Aplicando agora o Teorema de Pitágoras nos triângulos $\triangle BCD$ e $\triangle JED$, podemos encontrar a menor distância entre J e B , passando por r :

$$\begin{aligned}JD + DB &= \sqrt{100^2 + 100^2} + \sqrt{80^2 + 80^2} \\ &= 100\sqrt{2} + 80\sqrt{2} \\ &= 180\sqrt{2}m.\end{aligned}$$



11 Cortando o Cubo

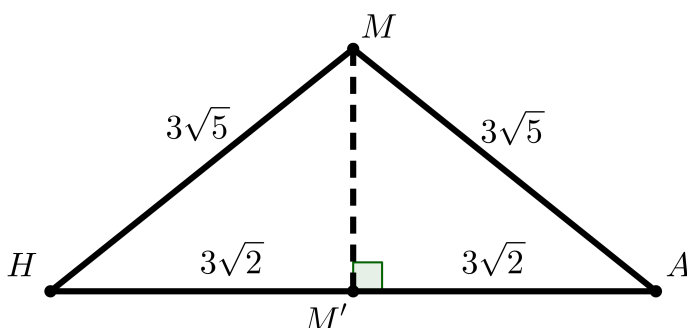
No cubo $ABCDEFGH$, cuja aresta mede 6cm , o ponto M é ponto médio de \overline{EF} .



- Determine a área do triângulo AMH .
- Determine o volume da pirâmide $AMHE$. (O volume de uma pirâmide pode ser calculado pela terça parte do produto entre a área da base e a altura relativa a esta base).
- Calcule a medida da altura relativa à base AMH .

11 *Cortando o Cubo – Solução*

- a) \overline{AH} é a diagonal de uma face, ou seja, $AH = 6\sqrt{2}cm$. \overline{MH} e \overline{AM} são hipotenusas de triângulos cujos catetos medem $6cm$ e $3cm$, ou seja, $MH = AM = 3\sqrt{5}cm$. Traçando a altura MM' do triângulo AMH , relativa ao lado \overline{AH} , podemos encontrá-la aplicando o Teorema de Pitágoras, ou seja, $MM' = 3\sqrt{3}cm$. Por fim, a área do triângulo AMH é $\frac{6\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{6}cm^2$.



- b) Utilizando como base da pirâmide $AMHE$ o triângulo EHM , cuja área é $\frac{6 \cdot 3}{2} = 9cm^2$, sua altura será \overline{AE} e seu volume será $\frac{9 \cdot 6}{3} = 18cm^3$.
- c) Para o cálculo da medida da altura relativa à base AMH da pirâmide $AMHE$, vamos calcular o volume desta pirâmide de duas maneiras: a primeira com base AMH e altura h , que é o que procuramos, e a segunda com base MHE .

$$\begin{aligned}\frac{9\sqrt{6} \cdot h}{3} &= 18 \\ h &= \frac{6}{\sqrt{6}} \\ h &= \sqrt{6}cm.\end{aligned}$$

12 *Tabuleiro Mágico*

Em um tabuleiro 4×4 , deve-se colocar os números de 1 a 16 nas casas, sem repetir, de forma que a soma dos números de cada linha, coluna e diagonal seja a mesma. Chamamos essa soma de *Soma Mágica*.

- a) Qual a *Soma Mágica* deste tabuleiro?

- b) Se a soma das casas marcadas com X no tabuleiro abaixo é 34, qual a soma das casas marcadas com Y ?

Y			Y
	X	X	
	X	X	
Y			Y

- c) Se preencheremos com naturais consecutivos de k a $(k + 15)$, de forma que a *Soma Mágica* seja 50, qual o valor de k ?

12 Tabuleiro Mágico – Solução

- a) Como são 4 linhas (assim como 4 colunas), a *Soma Mágica* vale:

$$\frac{1 + 2 + 3 + \dots + 16}{4} = 34.$$

- b) Se somarmos as duas diagonais, teremos exatamente a soma das casas marcadas com X e com Y . Assim, a soma das casas marcadas com Y é $2 \cdot 34 - 34 = 34$.

- c) Temos:

$$\begin{aligned} \frac{k + (k + 1) + (k + 2) + \dots + (k + 15)}{4} &= 50 \\ 16k + (1 + 2 + 3 + \dots + 15) &= 200 \\ 16k + \frac{(1 + 15)15}{2} &= 200 \\ 16k + 120 &= 200 \\ 16k &= 80 \\ k &= 5. \end{aligned}$$

13 *Analizando Números*

Analizando os números naturais de 4 algarismos:

- a) Quantos deles têm todos os algarismos diferentes?
- b) Quantos têm o algarismo 1 exatamente uma vez e todos os algarismos diferentes?
- c) Quantos têm o algarismo 1?

13 *Analizando Números – Solução*

- a) Para escolher a unidade do milhar, temos 9 possibilidades, já que não podemos utilizar o zero, pois não seria um número de quatro algarismos; para escolher o algarismo da centena, temos 9 possibilidades, pois já utilizamos um dos algarismos; para a dezena, são 8 possibilidades; e para a unidade são 7 possibilidades. Portanto são $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4.536$ possibilidades ao todo.

- b) Vamos dividir em casos:

- I) Fixando o 1 na casa da unidade do milhar, e não o utilizando mais, são $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$ possibilidades.
- II) Fixando agora o 1 na casa da centena, da dezena ou da unidade, são $8 \cdot 8 \cdot 7 = 448$ possibilidades em cada um dos casos (lembrando que na casa da unidade do milhar deste caso não podemos utilizar 0 nem 1), ou seja, são $3 \cdot 448 = 1.344$ possibilidades.

Portanto, o total de possibilidades é $504 + 1.344 = 1.848$.

- c) A quantidade de números de 4 algarismos que NÃO possuem o algarismo 1 é $8 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 5.832$. Como são 9.000 números com 4 algarismos, destes, $9.000 - 5.832 = 3.168$ apresentam o algarismo 1.

14 *Dado Geográfico*

O jogo "Dado Geográfico" consiste em cada participante jogar um dado uma quantidade n de vezes e anotar a sequência, sendo que o primeiro lançamento indica a distância, em metros, que o participante andará para o Norte, o segundo para o Leste, o terceiro para o Sul, o quarto para o Oeste, o quinto para o Norte e assim por diante. Após isso mede-se a distância até a origem. Vence quem ficar mais próximo da posição inicial.

- a) Márcia tirou 214365 (6 lançamentos). Qual a sua distância até a origem?

- b) Em 4 lançamentos, quantas possibilidades existem para que o participante volte para a origem após o último lançamento?
- c) Em 5 lançamentos, quantas possibilidades existem para que o participante volte para a origem após o último lançamento?

14 *Dado Geográfico – Solução*

- a) Márcia andou $2+6 = 8m$ para o Norte, $1+5 = 6m$ para o Leste, $4m$ para o Sul e $3m$ para o Oeste. Na direção Norte-Sul, Márcia andou $8 - 4 = 4m$ para o Norte e na direção Leste-Oeste, Márcia andou $6 - 3 = 3m$ para o Leste. Como estas direções são ortogonais, basta aplicarmos o Teorema de Pitágoras para determinarmos a distância d à origem: $d^2 = 4^2 + 3^2$, segue que $d = 5m$.
- b) Para voltar à origem, o participante deve tirar o mesmo resultado para Norte e Sul, e também o mesmo para Leste e Oeste. Como existem 6 possibilidades de valores iguais em dois lançamentos, o total de possibilidades de retorno à origem ao final do último lançamento é $6 \cdot 6 = 36$.
- c) Vamos usar o mesmo raciocínio do item anterior, mas serão 2 dados que determinarão deslocamento para o Norte (primeiro e quinto). Para a direção Leste-Oeste são 6 possibilidades. Se no lançamento para o Sul, tirarmos 1, não existe possibilidade de voltarmos para a origem com 2 lançamentos para o Norte; se para o Sul tirarmos 2, existe apenas 1 possibilidade para o Norte ($1 + 1$); se tirarmos 3 para o Sul, são 2 possibilidades para o Norte ($1 + 2$ ou $2 + 1$); se tirarmos 4, serão 3 possibilidades; se tirarmos 5, serão 4 possibilidades; se tirarmos 6, serão 5 possibilidades. Sendo assim, são $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ possibilidades no sentido Norte-Sul. Portanto, serão $6 \cdot 15 = 90$ possibilidades de voltarmos à origem após 5 lançamentos.

15 *Jogo na Lousa*

A professora Jacira propõe um jogo na lousa:

- I) Um dos alunos escreve uma sequência com n algarismos não nulos;
- II) Um segundo aluno deve escrever outra sequência com $(n - 1)$ algarismos na qual o primeiro é a diferença positiva dos dois primeiros da primeira sequência, o segundo é a diferença entre o segundo e o terceiro algarismo da primeira sequência e assim por diante;
- III) Um terceiro aluno usa o mesmo processo, mas utilizando a segunda sequência.
- IV) Segue o processo até que o último aluno escreva apenas um algarismo na lousa.

- V) Se aparecer algum zero em uma das sequências, dizemos que é uma SEQUÊNCIA FURADA e não continuamos o processo.

Por exemplo:

1° aluno	5	8	9	3
2° aluno	3	1	6	
3° aluno		2	5	
4° aluno		3		

Após fazer a brincadeira algumas vezes, a professora propõe alguns desafios:

- a) Continue as sequências abaixo, dada a primeira sequência escrita pelo primeiro aluno.

1° aluno	1	2	4	8
2° aluno				
3° aluno				
4° aluno				

- b) Se um jogo possui 5 sequências, sendo a última o algarismo 5, construa um exemplo para esta situação.
- c) Explique porque não é possível construir uma situação com 6 sequências, na qual a última é o algarismo 5.

15 Jogo na Lousa – Solução

- a) Utilizando o processo descrito no enunciado, temos:

1° aluno	1	2	4	8
2° aluno	1	2	4	
3° aluno		1	2	
4° aluno		1		

- b) Pensando do final para o começo, necessariamente, se o maior número do aluno da posição k é j , então o aluno da posição $k - 1$ (imediatamente anterior) tem seu maior número maior que j . Assim, se o 5° aluno escreveu 5, o 4°, deve ter escrito pelo menos 6 sobre o 5, o 3° deve ter escrito pelo menos 7 sobre o 6, o 2° pelo menos 8, sobre o 7 e o 1° deve ter escrito um 9 sobre o 8. Assim, já podemos construir um quadro com um algarismo por sequência.

1° aluno	9
2° aluno	8
3° aluno	7
4° aluno	6
5° aluno	5

Basta agora continuarmos o preenchimento das sequências.

1° aluno	9	1	2	4	8
2° aluno	8	1	2	4	
3° aluno		7	1	2	
4° aluno			6	1	
5° aluno				5	

- c) Como visto no item anterior, se finalizarmos com 5 com o 5° aluno, precisamos de no mínimo um 9 para o 1° aluno, mas se finalizarmos com 5 com o 6° aluno, precisaríamos de 10 para o 1° aluno, o que é absurdo, pois só podemos utilizar algarismos. Portanto, é impossível terminar com 5 no 6° aluno.

16 *Fichas no Tabuleiro*

Joana deve colocar três fichas em um tabuleiro 5×5 , no qual as casas são numeradas de 1 a 25, sendo uma em cada casa. De quantas maneiras ela pode fazer isso, se:

- As 3 fichas são de cores diferentes?
- As 3 fichas são idênticas?
- As fichas são de cores diferentes e não podem estar duas a duas em uma mesma linha ou coluna?

16 *Fichas no Tabuleiro – Solução*

- Como são 25 casas para a primeira ficha, temos 25 possibilidades, para a segunda ficha, temos 24 possibilidades e para a terceira ficha, temos 23 possibilidades. Portanto, são $25 \cdot 24 \cdot 23 = 13.800$ possibilidades.

- b) Para as peças da mesma cor, devemos descontar o número de situações repetidas que contaremos utilizando o raciocínio do item anterior. Vamos escolher as três primeiras casas do tabuleiro e as cores branca (B), amarela (A) e verde (V). Para estas casas, temos as possibilidades:

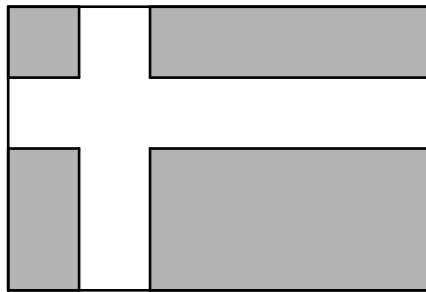
A	B	V
A	V	B
B	A	V
B	V	A
V	A	B
V	B	A

Vemos que são 6 distribuições diferentes para cada conjunto de 3 casas. No caso das fichas com mesma cor, essas 6 distribuições são exatamente iguais, ou seja, apenas $\frac{1}{6}$ das 13.800 distribuições anteriores. Portanto, o total de distribuições para fichas da mesma cor é $\frac{13.800}{6} = 2.300$.

- c) Primeiro vamos escolher as 3 linhas que serão colocadas as fichas: usando o mesmo raciocínio do item anterior, temos $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{6} = 10$ combinações de 3 linhas de um total de 5. Agora vamos distribuir as fichas por uma das combinações de 3 linhas, por exemplo, as três primeiras linhas: na primeira linha são 5 possibilidades; na segunda 4, pois não podemos utilizar a coluna da ficha que está na primeira linha; e na última 3, pois não podemos utilizar as colunas das fichas já colocadas. Portanto, o total de maneiras de distribuir 3 fichas, uma de cada cor, em um tabuleiro sem repetir linha ou coluna é $10 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 600$.

17 *Bandeira Bicolor*

A bandeira da figura é formada por um retângulo $40\text{cm} \times 20\text{cm}$ e possui duas cores (branca e cinza). A parte branca é composta por duas listras de mesma largura que se cruzam e são perpendiculares aos lados do retângulo. A parte cinza é a área do retângulo que não foi coberto pelas listras. Qual deve ser a medida da largura das listras para que a área branca seja igual a área cinza?

**17** *Bandeira Bicolor – Solução*

Seja x a medida da largura das faixas. Assim, uma das faixas mede x por 40cm , enquanto que a outra mede x por 20cm . Se somarmos as áreas das duas faixas, estaremos contando sua intersecção duas vezes e, portanto, precisaremos descontá-la. Como a área das faixas deve ser a metade da área da bandeira, temos:

$$\begin{aligned}
 40x + 20x - x^2 &= \frac{40 \cdot 20}{2} \\
 60x - x^2 &= 400 \\
 x^2 - 60x + 400 &= 0 \\
 x &= \frac{60 \pm \sqrt{60^2 - 4 \cdot 1 \cdot 400}}{2} \\
 &= \frac{60 \pm \sqrt{2.000}}{2} \\
 &= 30 \pm 10\sqrt{5}.
 \end{aligned}$$

Como $0 < x < 20$, temos que a largura das faixas é $x = (30 - 10\sqrt{5})\text{cm}$.

18 *Apagando Números*

A professora Jane escreveu na lousa os números $1^2, 2^2, 3^2, \dots, 2020^2$. Ela propõe o seguinte jogo: Alice e Matias devem apagar números alternadamente, um número por vez, sendo que Matias começa, até que sobrem apenas dois números no quadro. Se a diferença entre estes dois números for múltiplo de 2021, Alice vence, caso contrário, Matias vence. Determine quem sempre pode garantir a vitória independentemente de como o outro jogador jogue.

18 *Apagando Números – Solução*

Perceba que $(2021 - x)^2 - x^2 = 2021(2021 - 2x)$, que é múltiplo de 2021. Sendo assim, sempre que Matias apagar um número qualquer k^2 , basta Alice apagar $(2021 - k)^2$, que no final, os dois números restantes terão diferença múltipla de 2021. Logo, usando essa estratégia desde o início, Alice pode garantir a vitória independentemente de como Matias jogue.

19 *Pontos Coloridos*

Em uma folha de papel estão desenhados 10 pontos, sendo 8 azuis e 2 vermelhos. Os dois pontos vermelhos são ligados a todos os pontos azuis, mas não são ligados um ao outro. Todos os pontos azuis são ligados um ao outro. Quando dois pontos são ligados, esta ligação é feita por um único segmento. De quantas maneiras diferentes podemos sair de um ponto vermelho e chegar ao outro passando no máximo uma única vez por cada ponto?

19 *Pontos Coloridos – Solução*

Vamos chamar os dois pontos vermelhos de A e B . Saindo de A , passando por exatamente um ponto azul, são 8 possibilidades; passando por dois pontos azuis, são $8 \cdot 7 = 56$ possibilidades; passando por três pontos azuis, são $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ possibilidades. Seguindo este raciocínio, vemos que o número de possibilidades de sair de A e ir para B é $8 + 8 \cdot 7 + 8 \cdot 7 \cdot 6 + \dots + 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 109.600$. Claro que de B para A o resultado é o mesmo, ou seja, podemos ligar os dois pontos vermelhos de $2 \cdot 109.600 = 219.200$ maneiras diferentes.

20 *Fotos com Familiares*

Um fotógrafo deve tirar fotos de uma festa com 10 membros de uma mesma família. Cada um dos 45 possíveis pares de pessoas dessa família devem aparecer juntos em exatamente uma foto. Além disso, existem apenas dois tipos de fotos: as que possuem 2 ou 3 pessoas.

- a) Verifique que cada pessoa da família deverá aparecer em pelo menos uma foto de apenas 2 pessoas.
- b) Verifique que o fotógrafo deverá tirar pelo menos 19 fotos.
- c) Dê um exemplo de distribuição de pessoas em 19 fotos satisfazendo as condições dadas.

20 *Fotos com Familiares – Solução*

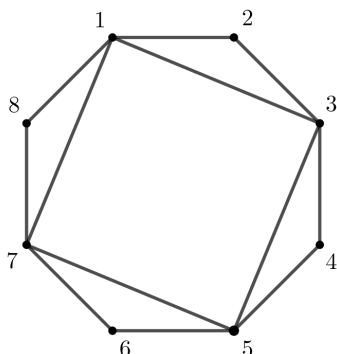
- a) Cada pessoa deve aparecer com outros 9 familiares exatamente uma vez em alguma foto. Nas fotos com 3 pessoas, uma pessoa aparece em exatamente 2 pares e, como 9 é ímpar, é necessário que cada pessoa apareça em pelo menos uma foto com exatamente 2 pessoas.
- b) Sejam x o número de fotos com 3 pessoas e y o número de fotos com 2 pessoas. Queremos estimar o total de fotos que é dado por $x + y$. Em cada foto com 3 pessoas, temos 3 pares de familiares e em cada foto com 2 pessoas apenas um par. Portanto,

$$3x + y = 45$$

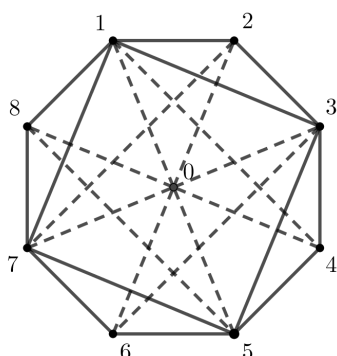
Pelo item anterior, como cada pessoa deve aparecer em pelo menos uma foto com 2 pessoas, devemos ter $y \geq 5$. Consequentemente $x = (45 - y)/3 \leq 13$. Temos, então:

$$\begin{aligned}x &\leq 13 \\ -x &\geq -13 \\ -2x &\geq -26 \\ 45 - 2x &\geq 19 \\ x + y &\geq 19.\end{aligned}$$

- c) Portanto, devemos ter pelo menos 19 fotos. Para construir um exemplo com exatamente 19 fotos, nomeie as 10 pessoas da família pelos números 0, 1, ..., 9. Vamos iniciar a construção do exemplo formando 4 fotos de 3 pessoas: (1, 2, 3), (3, 4, 5), (5, 6, 7) e (7, 8, 1). No diagrama abaixo, cada triângulo representa uma foto.



Para escolher as próximas fotos, vamos incluir no diagrama o parente de número 0 e usar pares de parentes que ainda não apareceram em nenhuma foto. Por exemplo, escolha o seguinte grupo de 4 fotos de 3 pessoas: (0, 1, 4), (0, 8, 5), (0, 2, 7) e (0, 3, 6). No próximo diagrama essas fotos são representadas por triângulos com linhas tracejadas.



Note que neste diagrama ainda existem pares de familiares que não figuraram em nenhuma foto como, por exemplo, os familiares 1 e 6. Vamos incluir agora a pessoa de número 9 e formar os seguintes grupos de 4 fotos de 3 pessoas: (9, 1, 6), (9, 2, 5), (9, 3, 8) e (9, 4, 7). Veja que nessas fotos todas as pessoas de 1 a 8 aparecem com 0 e 9 em alguma foto. Dentre as pessoas de 1 a 8, alguns pares de familiares ainda não apareceram em fotos. Para terminar, considere a seguinte configuração com mais uma foto de 3 pessoas e 6 fotos de 2 pessoas:

$$(2, 4, 6), (2, 8), (6, 8), (0, 9), (1, 5), (3, 7) \text{ e } (4, 8).$$

21 *Potências Perfeitas*

Seja x o menor número inteiro positivo que satisfaz simultaneamente as seguintes condições: $2x$ é o quadrado de um número inteiro, $3x$ é o cubo de um número inteiro e $5x$ é a quinta potência de um número inteiro. Encontre a fatoração em primos de x .

21 *Potências Perfeitas – Solução*

Do enunciado, podemos escrever

$$2x = a^2, 3x = b^3, 5x = c^5, \quad (1)$$

em que a, b, c são inteiros. Daí podemos concluir que x possui fatores primos 2, 3 e 5. Ou seja, a fatoração em primos pode ser escrita como $x = 2^p 3^q 5^r \cdot m$, em que m é o produto de primos maiores que 5. Em virtude de (1), m deve ser um quadrado, um cubo e uma quinta potência perfeita. Como queremos o menor x possível, podemos admitir que $m = 1$.

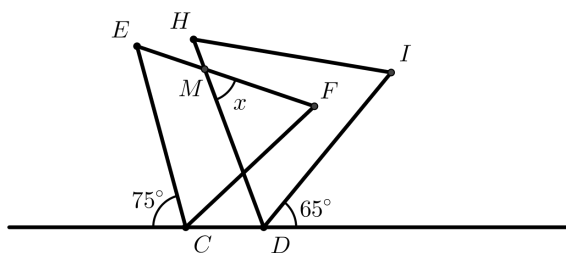
Em geral, a fatoração em primos de uma potência n^k pode ser obtida a partir da fatoração em primos de n multiplicando cada expoente de seus fatores primos por k . Daí os expoentes da fatoração em primos de um quadrado perfeito são todos pares, os de um cubo perfeito são todos múltiplos de 3 e os de uma quinta potência são todos múltiplos de 5. Portanto, a equação (1) nos diz que

- i) $p + 1, q$ e r são múltiplos de 2;
- ii) $p, q + 1$ e r são múltiplos de 3;
- iii) p, q e $r + 1$ são múltiplos de 5.

De ii) e iii), o menor valor possível para p é $3 \cdot 5 = 15$. Veja que este valor satisfaz i). De i) e iii), os valores possíveis para q são 10, 20, 30, O primeiro deles não satisfaz ii) e assim o menor valor possível de q é 20. Finalmente, de i e ii, os valores possíveis de r são 6, 12, 18, 24, Dessa lista, o menor que satisfaz a condição iii) é o valor 24. Portanto, o menor valor de x é $2^{15} 3^{20} 5^{24}$.

22 Os Triângulos Equiláteros

Na figura, os dois triângulos CEF e DIH são equiláteros e os ângulos dados em graus. Determine o valor de x .



22 Os Triângulos Equiláteros – Solução

Como $\triangle CEF$ é equilátero, $\angle FCD = 180^\circ - 75^\circ - 60^\circ = 45^\circ$. De forma análoga, $\angle MDC = 55^\circ$. Assim, o ângulo agudo determinado pela intersecção das retas MD e CF é 80° . Portanto, $x = 180^\circ - 60^\circ - 80^\circ = 40^\circ$.

23 A Calculadora MK – 2020

A calculadora $MK - 2020$ pode efetuar as seguintes três operações com números em sua memória:

- 1) Determinar se dois números escolhidos são iguais.
- 2) Adicionar dois números escolhidos.
- 3) Para os números escolhidos a e b , determinar as raízes reais da equação $x^2 + ax + b = 0$ ou anunciar que tal equação não possui raízes reais.

Os resultados de cada operação são acumulados em sua memória. Inicialmente, a memória contém apenas o número z que é desconhecido por seus usuários.

- a) Usando as operações, determine como descobrir se z é diferente de 0 ou não.
- b) Encontre as raízes da equação do segundo grau em x :

$$x^2 + 2zx + z = 0.$$

- c) Como podemos determinar, usando a calculadora $MK - 2020$, se z é igual a 1?

[23] A Calculadora MK – 2020 – Solução

- a) Podemos usar a segunda operação e gerar o número $2z$. Usando a primeira operação, podemos decidir se z e $2z$ são iguais, ou seja, se z é ou não igual a zero.
- b) Pela Fórmula de Bhaskara, as raízes de $x^2 + 2zx + z = 0$ que são dadas por:

$$x = -z \pm \sqrt{z^2 - z}.$$

- c) Suponha que tenhamos descoberto que z não é zero. Usando a terceira operação, podemos encontrar as raízes de $x^2 + 2zx + z = 0$. Como já sabemos que $z \neq 0$, o discriminante é nulo apenas quando $z = 1$. Assim, se a calculadora disser que existe apenas uma raiz real, saberemos que $z = 1$ e, no caso contrário, teremos $z \neq 1$.

[24] Um Quociente Fatorial!

Calcule o valor de

$$A = \frac{1001 \cdot 1002 \cdot 1003 \cdot \dots \cdot 2000}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 1999}$$

[24] Um Quociente Fatorial! – Solução

Seja

$$\begin{aligned} B &= \frac{2^{1000} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 1000}{2^{1000} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 1000} \\ &= \frac{2^{1000} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 1000}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2000}. \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \frac{2^{1000} \cdot \cancel{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2000)}}{\cancel{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2000)}} \\ &= 2^{1000}. \end{aligned}$$

Como $B = 1$, concluímos que $A = 2^{1000}$.

25 *A Loja de Chocolates*

Em uma loja de chocolates, existem caixas com 8, 9 e 10 chocolates. Observe que algumas quantidades de chocolates não podem ser compradas exatamente como, por exemplo, 12 chocolates.

- a) Encontre outra quantidade de chocolates que não pode ser comprada.
- b) Verifique que todo número maior que 56 pode ser escrito na forma $8x + 9y$ com x e y inteiros não negativos.
- c) Qual é a maior quantidade de unidades de chocolates que não podemos comprar exatamente nessa loja?

25 *A Loja de Chocolates – Solução*

- a) Não é possível comprarmos 15 chocolates, pois $15 > 10$ e a soma das quantidades de quaisquer duas caixas é maior que 15
- b) Inicialmente note que os números de 57 a 64 podem ser escritos na forma $8x + 9y$:

x	y	$8x + 9y$
9	1	57
5	2	58
4	3	59
3	4	60
2	5	61
1	8	62
0	7	63
8	0	64

Somando 8 unidades a cada uma dessas representações, podemos escrever todos os números inteiros do intervalo $[65, 72]$ na forma $8x + 9y$. Por exemplo, como $60 = 8 \cdot 3 + 9 \cdot 4$, segue que $68 = 8 \cdot 4 + 9 \cdot 4$. Somando sucessivamente 8, podemos concluir que todos os inteiros dos intervalos

$$[73, 80], [81, 88], [89, 96], \dots$$

podem ser escritos na forma $8x + 9y$, com x e y inteiros não negativos. Assim, todos os inteiros maiores que 56 podem ser escritos na forma $8x + 9y$ com x e y inteiros não negativos.

- c) As quantidades de chocolates que podem ser compradas são os números da forma $8x + 9y + 10z$, com x , y e z inteiros não negativos representando as quantidades de cada tipo de caixa. Um número que pode ser escrito na forma $8x + 9y$ em particular também pode ser escrito na forma $8x + 9y + 10z$. Assim, em virtude do item anterior, basta analisarmos os números menores que 56 para sabermos qual é o maior deles que não pode ser uma quantidade admissível de chocolates comprados na loja. A tabela a seguir indica como escrever todos os números de 32 até 40 na forma $8x + 9y + 10z$:

x	y	z	$8x + 9y + 10z$
4	0	0	32
3	1	0	33
3	0	1	34
2	1	1	35
2	0	2	36
1	1	2	37
1	0	3	38
0	1	3	39
5	0	0	40

Somando 8 unidades a cada uma dessas representações, podemos escrever todos os números de 40 a 48. Repetindo esse processo, podemos escrever todos os números inteiros de 48 a 56 na forma $8x + 9y + 10z$, com x , y e z inteiros não negativos. Para concluir que 31 é a maior quantidade de chocolate que não podemos comprar na loja, precisamos verificar que não existem x , y e z não negativos tais que

$$8x + 9y + 10z = 31. \quad (2)$$

Se existissem tais inteiros, como 31 é ímpar e 8 e 10 são pares, devemos ter $y \neq 0$. Assim $y = 3$ ou $y = 1$. No primeiro caso, teríamos $8x + 10z = 4$, que claramente não possui solução em inteiros não negativos. No segundo caso, teríamos $8x + 10z = 22$, ou seja, $4x + 5z = 11$. Para $z = 0$, $z = 1$ e $z = 2$, deveríamos ter $4x = 11$, $4x = 6$ e $4x = 1$. Como nenhuma dessas equações possui soluções em inteiros, podemos concluir que a equação (2) não possui solução em inteiros não negativos.

26 *Números de Telefones Legais*

Nós chamamos um número de telefone $d_1 d_2 d_3 - d_4 d_5 d_6 d_7$ de *legal* se o número $d_1 d_2 d_3$ for igual a $d_4 d_5 d_6$ ou a $d_5 d_6 d_7$. Por exemplo, 234 – 2347 é um número de telefone legal. Assuma que cada d_i pode ser qualquer dígito de 0 a 9. Quantos números de telefones legais existem?

26 *Números de Telefones Legais – Solução*

Se $d_1 d_2 d_3$ é simultaneamente igual a $d_4 d_5 d_6$ e $d_5 d_6 d_7$, então todos os dígitos são iguais. Para contar o número de telefones com $d_1 d_2 d_3$ igual a $d_4 d_5 d_6$, basta escolhermos $d_1 d_2 d_3$ de $10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^3$ maneiras e o valor de d_7 de 10 maneiras. Portanto, existem $10^3 \cdot 10 = 10^4$ telefones com $d_1 d_2 d_3$ igual a $d_4 d_5 d_6$. De modo semelhante, existem 10^4 números de telefones com $d_1 d_2 d_3$ igual a $d_5 d_6 d_7$. Descontando os números de telefones que estão em ambos os grupos, temos $2 \cdot 10^4 - 10 = 19.990$ números de telefone legais.

27 *Os Sapatos e as Meias da Aranha*

- a) As letras A , B e C podem ser dispostas em linha de 6 formas distintas:

$$ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA.$$

Note que em 3 delas a letra A aparece à esquerda da letra B :

$$ABC, ACB, CAB.$$

Dispondo as letras A , B , C e D em linha de todas as 24 formas distintas possíveis, em quantas delas a letra A aparece à esquerda da letra B ?

- b) Uma aranha tem uma meia e um sapato para cada um de seus oito pés. De quantas maneiras diferentes a aranha pode se calçar admitindo que as 8 meias e os 8 sapatos são distintos e que cada meia precisa ser colocada antes do seu respectivo sapato?

27 *Os Sapatos e as Meias da Aranha – Solução*

- a) Para cada palavra de 4 letras em que A está à esquerda de B , trocando a posição dessas duas letras, obtemos uma palavra de 4 letras em que A está à direita da letra B :

$$CABD \leftrightarrow CBAD.$$

Agrupando as 24 palavras em 12 pares desse tipo, podemos concluir que em metade delas a letra A está à esquerda de B e na outra metade a letra A está à direita de B .

- b) Se simbolizarmos as meias por $\{m_1, m_2, \dots, m_8\}$ e os sapatos por $\{s_1, s_2, \dots, s_8\}$, podemos interpretar cada palavra com essas 16 letras como uma ordem de uso desses objetos. Por exemplo, a palavra

$$m_1 m_2 s_1 s_2 s_3 s_4 m_5 \dots s_8$$

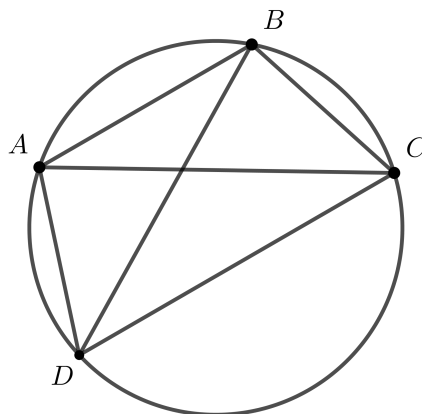
indica que a aranha colocará inicialmente a meia m_1 , depois a meia m_2 , o sapato s_1 , o sapato s_2 etc. Existem $16!$ permutações desses 16 símbolos. Por simetria, em metade deles, o símbolo m_1 vem antes do s_1 e na outra metade ocorre o contrário. Dessa metade em que m_1 vem antes de s_1 , em metade delas o símbolo m_2 vem antes de s_2 . Repetindo esse argumento para os demais pares de meia, podemos concluir que existem

$$\frac{16!}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{16!}{2^8}$$

sequências em que o símbolo m_i vem antes de s_i para todo i . Esse é o número procurado.

[28] As Diagonais do Quadrilátero

Os vértices do quadrilátero $ABCD$ estão em uma circunferência. Cada uma de suas diagonais bissecta um ângulo e trissecta o ângulo oposto. Determine as medidas dos ângulos do quadrilátero.



Observação: Dizemos que uma semirreta OM trissecta um ângulo $\angle AOB$ se a amplitude de um dos dois ângulos determinado por ela é um terço do valor da amplitude do ângulo $\angle AOB$.

[28] As Diagonais do Quadrilátero – Solução

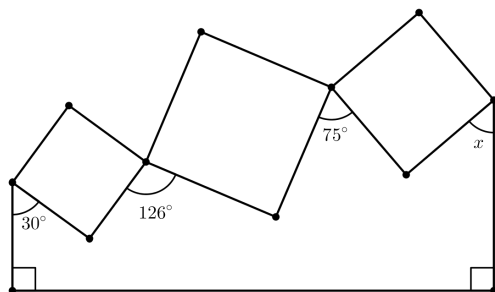
Suponha que a diagonal AC bissecta o ângulo $\angle DCB$. A outra diagonal bissecta $\angle ABC$ ou $\angle ADC$. Podemos supor sem perda de generalidade que ela bissecta o ângulo $\angle ADC$. Como $\angle ADB = \angle BDC$ e $\angle ACB = \angle ACD$, os arcos AD , AB e BC correspondem a um mesmo valor do ângulo central x . Analisando agora as trissecções dos ângulos, ou $\angle DBC = 2 \cdot \angle ABD = x$ ou $\angle DBC = \frac{1}{2} \cdot \angle ABD = \frac{x}{4}$. No primeiro caso, temos

$$\begin{aligned}\angle DAB + \angle ABC + \angle BCD + \angle CDA &= 360^\circ \\ \frac{3x}{2} + \frac{3x}{2} + x + x &= 360^\circ \\ x &= 72^\circ.\end{aligned}$$

Assim os ângulos do quadrilátero são 72° , 72° , 108° e 108° . Procedendo de modo semelhante no segundo caso, temos $x = \frac{720^\circ}{7}$ e os ângulos do quadrilátero são $\frac{720^\circ}{7}$, $\frac{720^\circ}{7}$, $\frac{540^\circ}{7}$ e $\frac{540^\circ}{7}$.

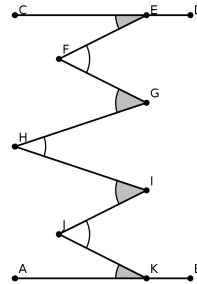
[29] Os Ângulos entre Quadrados

Três quadrados são colados pelos seus vértices entre si e a dois bastões verticais, como mostra a figura. Determine a medida do ângulo x .

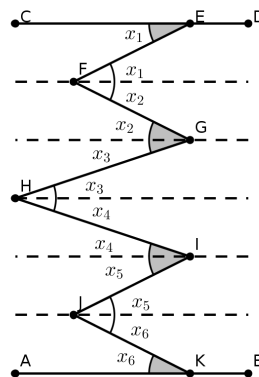


29 Os Ângulos entre Quadrados – Solução

No desenho abaixo, onde AB é paralelo à CD , vamos mostrar que a soma dos ângulos brancos é igual à soma das medidas dos ângulos cinzas. Tal resultado vale para qualquer quantidade de “bicos” no desenho e o chamamos popularmente como “Teorema dos Bicos”.



Por cada um dos vértices dos “bicos”, trace uma paralela ao segmento AB . Perceba que vários pares de ângulos alternos internos, que são congruentes, serão formados como indica a figura abaixo.



Cada um dos ângulos marcados possui exatamente um representante entre os ângulos brancos e cinzas. Assim, cada uma dessas somas das medidas de ângulos vale $x_1 + x_2 + \dots + x_6$.

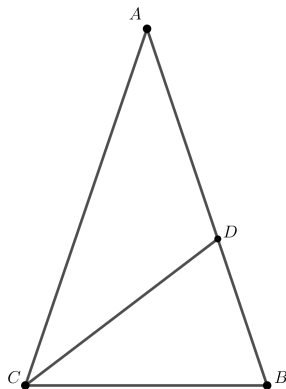
Como os dois bastões verticais são paralelos, podemos aplicar o Teorema dos Bicos no caminho poligonal formado pelos lados dos quadrados que contém os ângulos marcados obtendo:

$$30^\circ + 126^\circ + 75^\circ + x = 90^\circ + 90^\circ + 90^\circ.$$

Assim, $x = 39^\circ$.

30 Triângulos Isósceles

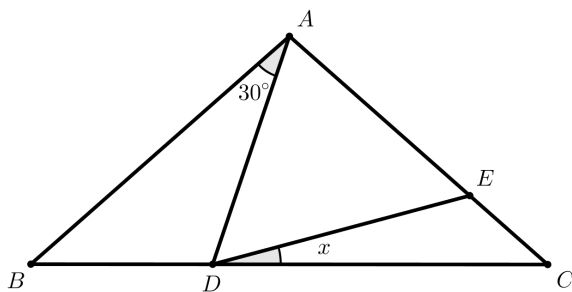
Na figura, o triângulo $\triangle ABC$ é isósceles de base BC e o ângulo $\angle BAC$ mede 30° . O triângulo $\triangle BCD$ é isósceles de base BD . Determine a medida do ângulo $\angle DCA$.

**30 Triângulos Isósceles – Solução**

Como $\triangle ABC$ é isósceles, temos $\angle ABC = \angle ACB = \alpha$. Como $\triangle BCD$ é isósceles, também temos $\angle BDC = \angle DBC = \alpha$. Se $\angle DCA = \beta$, temos, pelo Teorema do Ângulo Externo, que $\alpha = 30^\circ + \beta$. Analisando a soma dos ângulos do $\triangle BCD$, $\alpha + \alpha + \alpha - \beta = 180^\circ$. Assim, pelas duas equações temos $2\beta + 90^\circ = 180^\circ$, ou seja, $\beta = 45^\circ$. Portanto, a medida do ângulo $\angle DCA$ é 45° .

31 O Ângulo Desconhecido

Na figura, $AB = AC$, $AE = AD$ e o ângulo $\angle BAD$ mede 30° . Determine a medida x do ângulo $\angle CDE$.

**31 O Ângulo Desconhecido – Solução**

Pelo Teorema do Ângulo Externo, $\angle ADE + x = 30^\circ + \angle ABD$, portanto $\angle ADE = \angle AED = 30^\circ + \angle ABD - x$. Além disso, $\angle AED = x + \angle ACD$. Igualando as duas equações e usando que $\angle ABC = \angle ACB$, temos $30^\circ + \angle ABD - x = x + \angle ACD$, ou seja, $x = 15^\circ$.

ENUNCIADOS E SOLUÇÕES DO NÍVEL 3

1 *A Equação com Radicais*

Ache todos os valores de x satisfazendo

$$\frac{x + \sqrt{x+1}}{x - \sqrt{x+1}} = \frac{11}{5}$$

1 *A Equação com Radicais – Solução*

A equação pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}\frac{x + \sqrt{x+1}}{x - \sqrt{x+1}} &= \frac{11}{5} \\ 5x + 5\sqrt{x+1} &= 11x - 11\sqrt{x+1} \\ 16\sqrt{x+1} &= 6x \\ 8\sqrt{x+1} &= 3x\end{aligned}$$

Elevando os membros da última equação ao quadrado, temos

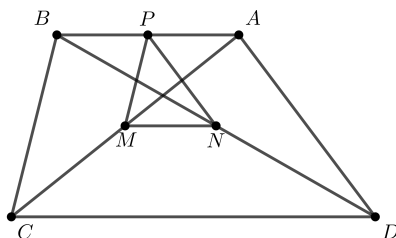
$$\begin{aligned}9x^2 &= 64(x+1) \\ 9x^2 - 64x - 64 &= 0.\end{aligned}$$

As raízes dessa equação são $x = 8$ e $x = -\frac{8}{9}$. Dessas soluções, apenas $x = 8$ satisfaz a equação dada.

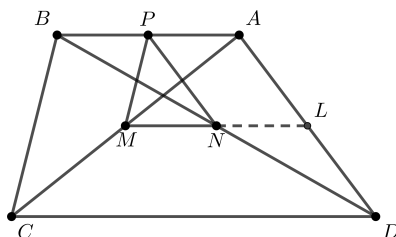
2 O Trapézio e os Pontos Médios

No trapézio $ABCD$, os lados AB e CD são paralelos. Sejam M o ponto médio da diagonal AC , N o ponto médio da diagonal BD e P o ponto médio do lado AB . Sabemos que $AB = 15\text{ cm}$, $CD = 24\text{ cm}$ e a altura do trapézio é $h = 14\text{ cm}$.

- Calcule a medida do comprimento do segmento MN .
- Calcule a área do triângulo MNP .



2 O Trapézio e os Pontos Médios – Solução



- Se P é o ponto médio de AB e L o ponto médio de AD , segue que ML é base média do triângulo ACD e assim $LM = 12\text{ cm}$. Como LN é base média do triângulo ABD , segue que $LN = 7,5\text{ cm}$. Portanto, $MN = LM - LN = 4,5\text{ cm}$
- Como MN está sobre a base média, a sua distância até a reta CD é $h/2 = 7\text{ cm}$. Portanto, a altura do triângulo MNP relativa ao lado MN é 7 cm e assim

$$\text{Área}(MNP) = 1/2 \cdot 7 \cdot 4,5 = 15,75\text{ cm}^2.$$

3 O Sistema com Cubos

Se x e y são números reais tais que $x + y = 10$ e $x^3 + y^3 = 400$, determine o valor de $x^2 + y^2$.

3 *O Sistema com Cubos – Solução*

Como

$$\begin{aligned}x^3 + y^3 &= (x + y)(x^2 - xy + y^2) \\&= (x + y)((x + y)^2 - 3xy) \\&= 10(100 - 3xy),\end{aligned}$$

segue que $40 = 100 - 3xy$, ou seja, $xy = 20$. Daí

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= (x + y)^2 - 2xy \\&= 100 - 40 \\&= 60\end{aligned}$$

4 *A Soma Trigonométrica*

Determine o valor da soma

$$S = \operatorname{sen}^2 1^\circ + \operatorname{sen}^2 2^\circ + \operatorname{sen}^2 3^\circ + \dots + \operatorname{sen}^2 89^\circ.$$

4 *A Soma Trigonométrica – Solução*

Como $\operatorname{sen} x = \cos(90^\circ - x)$ e $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, segue que

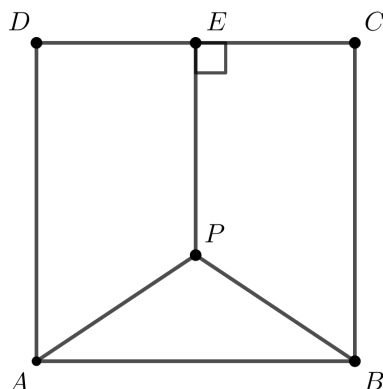
$$\operatorname{sen}^2 1^\circ + \operatorname{sen}^2 89^\circ = \operatorname{sen}^2 2^\circ + \operatorname{sen}^2 88^\circ = \dots = \operatorname{sen}^2 44^\circ + \operatorname{sen}^2 46^\circ = 1.$$

Portanto, pareando os termos da soma em pares do tipo $\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^2(90 - x)$, temos

$$S = 44 + \operatorname{sen}^2 45^\circ = 44 + \frac{1}{2} = \frac{89}{2}.$$

5 O Ponto no Interior do Quadrado

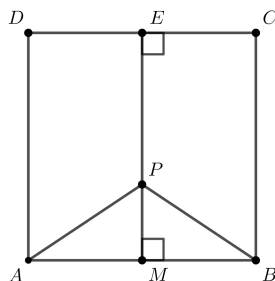
Seja $ABCD$ um quadrado de lado 28 cm . Seja P um ponto interior ao quadrado e E um ponto no lado CD tal que PE é perpendicular a CD . Além disso, $AP = BP = PE$. Encontre o comprimento de AP .



5 O Ponto no Interior do Quadrado – Solução

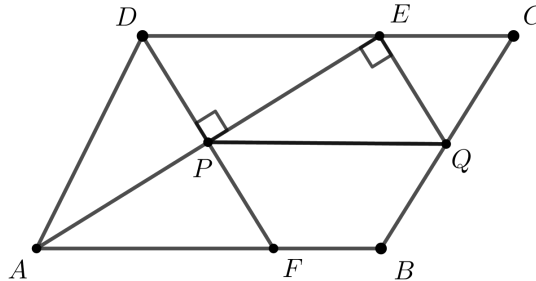
Seja M o ponto de interseção da reta EP com o lado AB . Como EP é perpendicular a CD , então EM é perpendicular a AB . Além disso, como o triângulo ABP é isósceles, M é o ponto médio de AB . Se o comprimento de AP é x , segue do Teorema de Pitágoras que

$$\begin{aligned} AP^2 &= AM^2 + PM^2 \\ x^2 &= 14^2 + (28 - x)^2 \\ x^2 &= 196 + 784 - 56x + x^2 \\ 56x &= 980 \\ x &= 17,5\text{ cm} \end{aligned}$$



6 Perpendiculares no Paralelogramo

No paralelogramo $ABCD$, o ângulo BAD é agudo e o lado AD é menor que o lado AB . A bissetriz do ângulo $\angle BAD$ corta o lado CD em E . Por D se traça uma perpendicular a AE que corta AE em P e AB em F . Traçamos por E uma perpendicular a AE que corta o lado BC em Q . Além disso, o segmento PQ é paralelo a AB e o comprimento de AB é 20 cm .



- Encontre o valor de $\frac{CQ}{AD}$.
- Encontre a medida do comprimento do lado AD .

6 Perpendiculares no Paralelogramo – Solução

- De $\angle DAP = \angle PAF$ e $AP \perp DF$, segue que o triângulo ADF é isósceles e que P é o ponto médio de DF . Como EQ e DF são perpendiculares a AE , temos que $DF \parallel EQ$ e $\angle CEQ = \angle CDF = \angle DFA$. No paralelogramo $ABCD$, $\angle DAB = \angle DCB$ e assim os triângulos ADF e ECQ são semelhantes. Portanto, $CE = CQ$ e

$$\frac{CQ}{AD} = \frac{EQ}{DF}.$$

Como os lados opostos do quadrilátero $DEQP$ são paralelos, segue que ele é um paralelogramo. Consequentemente $DP = EQ$ e

$$\frac{CQ}{AD} = \frac{DP}{2 \cdot DP} = \frac{1}{2}.$$

- Seja x o comprimento do segmento AD . De $\angle DAE = \angle EAB = \angle DEA$, podemos concluir que o triângulo ADE é isósceles e assim $AD = DE = x$. Do item anterior, decorre que $CQ = x/2$. Assim

$$\begin{aligned} CD &= DE + EC \\ 20 &= x + x/2 \\ &= 3x/2. \end{aligned}$$

Finalmente, $x = 40/3\text{ cm}$.

7 Prolongamentos dos Lados

No triângulo ABC , temos os ângulos $\angle ACB = 65^\circ$ e $\angle ABC = 70^\circ$. Sobre os prolongamentos do lado BC , marcam-se o ponto P de tal modo que $BP = AB$ e que B esteja entre P e C ; e o ponto Q de modo que $CQ = AC$ e que C esteja entre B e Q . Se O é o centro da circunferência que passa por A , P e Q , encontre os valores dos ângulos $\angle OAQ$ e $\angle OAP$.

7 Prolongamentos dos Lados – Solução

Sejam $\angle BAO = x$ e $\angle OAC = y$. De $BP = AB$ e $AC = CQ$, podemos concluir que $\angle APB = \angle PAB = \beta$ e $\angle CAQ = \angle AQC = \gamma$. Como O é o centro da circunferência que passa por A , P e Q , temos $OP = OA = OQ$ e daí os triângulos AOP e AOQ são isósceles. Consequentemente,

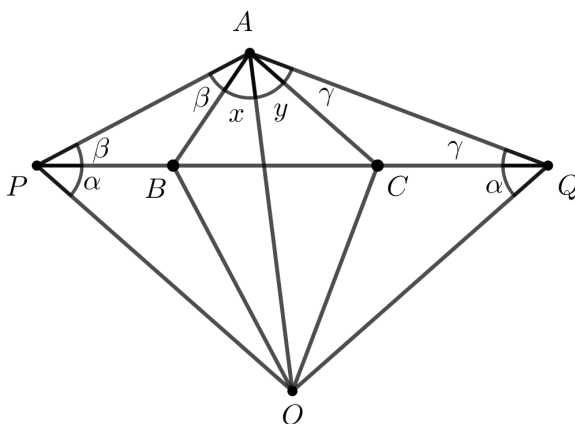
$$\begin{aligned}\angle APO &= \angle PAO \\ \alpha + \beta &= x + \beta \\ x &= \alpha.\end{aligned}$$

De modo semelhante, podemos concluir que $y = \alpha$. Pelo Teorema do Ângulo Externo, $\angle ABC = 2\beta$ e $\angle ACB = 2\gamma$. Assim, $\beta = 70/2 = 35^\circ$ e $\gamma = 65/2 = 32^\circ 30'$. Além disso, $2\alpha = \angle BAC = 45^\circ$ e assim $\alpha = 22^\circ 30'$. Finalmente,

$$\begin{aligned}\angle OAP &= \beta + \alpha \\ &= 57^\circ 30'\end{aligned}$$

e

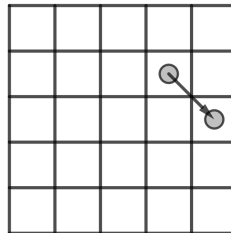
$$\begin{aligned}\angle OAQ &= \gamma + \alpha \\ &= 55^\circ.\end{aligned}$$



8 Peças Deslizantes

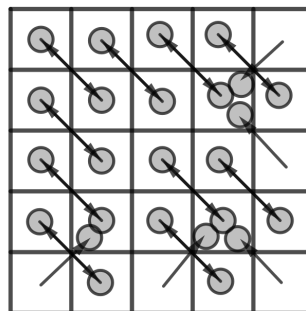
Em um tabuleiro 5×5 , cada quadradinho possui uma peça em seu centro. O único movimento permitido para uma dessas peças é se deslocar para um quadradinho que compartilhe exatamente um vértice com o quadradinho em que ela está, como indicado na figura abaixo. Tanto é possível que várias peças ocupem um mesmo quadradinho quanto que um quadradinho fique vazio. Em um dado momento, todas as peças serão movidas simultaneamente.

- Dê um exemplo de movimentos das 25 peças de modo que sobrem exatamente 5 quadradinhos vazios.
- Qual o número mínimo de quadradinhos vazios que poderão ser encontrados após esse momento?

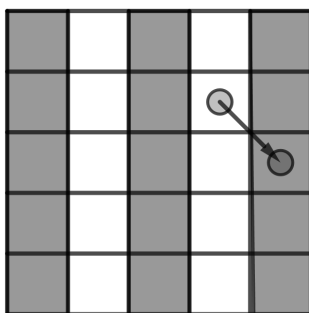


8 Peças Deslizantes – Solução

- A figura a seguir mostra um conjunto de movimentos em que apenas 5 quadradinhos ficam vazios.



- b) Pinte as colunas do tabuleiro de forma alternada de preto e branco. Assim existem 15 quadradinhos pretos e 10 brancos. Veja que após um movimento de uma peça, ela fica em um quadradinho de cor oposta ao que ela estava anteriormente. Assim, as peças dos 15 quadradinhos pretos ficarão nos 10 quadradinhos brancos e as 10 peças que estavam nos quadradinhos brancos poderão ocupar no máximo 10 quadradinhos pretos, ou seja, devem sobrar pelo menos 5 quadradinhos pretos vazios.



Em virtude do exemplo dado no item *a*), sabemos que esse mínimo é realizável.

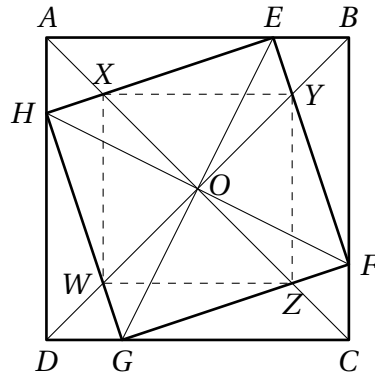
9 A Área do Quadrado

Considere um quadrado $ABCD$ de centro O . Sejam E , F , G e H pontos no interior dos lados AB , BC , CD e DA , respectivamente, tal que $AE = BF = CG = DH$. Sabe-se que OA intersecta HE no ponto X , OB intersecta EF no ponto Y , OC intersecta FG no ponto Z e OD intersecta GH no ponto W . Sejam x e y as medidas dos comprimentos de AE e AH , respectivamente.

- a) Dado que $\text{Área}(EFGH) = 1 \text{ cm}^2$, calcule o valor de $x^2 + y^2$.
- b) Verifique que $HX = \frac{y}{x+y}$. Em seguida, conclua que X , Y , Z e W são vértices de um quadrado.
- c) Calcule

$$\text{Área}(ABCD) \cdot \text{Área}(XYZW).$$

9 A Área do Quadrado – Solução



- a) Sejam x e y as medidas dos comprimentos de AE e AH , respectivamente. Dado que $AH = EB$, $AE = BF$ e $\angle HAE = \angle EBF$, segue que os triângulos AEH e EBF são congruentes. Daí

$$\angle HEF = 180^\circ - \angle HEA - \angle BEF = 180^\circ - \angle EFB - \angle BEF = 90^\circ.$$

De modo semelhante, podemos concluir que $\angle EFG = \angle FGH = \angle GHE = 90^\circ$.

Pelo Teorema de Pitágoras, $HE^2 = x^2 + y^2$. O mesmo vale para os demais lados do retângulo $HEFG$, ou seja, $EH = EF = FG = GH = 1$. Portanto, a sua área é $1 = A_{HEFG} = x^2 + y^2$.

- b) Como AC é bissetriz de $\angle HAE$, decorre do Teorema da Bissetriz Interna que

$$\begin{aligned} \frac{HX}{EX} &= \frac{AH}{AE} \\ \frac{HX}{HX + EX} &= \frac{AH}{AH + AE} \\ HX &= \frac{y}{x + y}. \end{aligned}$$

De modo semelhante, $EX = \frac{x}{x + y}$. A diagonal BD também é bissetriz de $\angle EBF$ e $\triangle EBF \cong AHE$. Daí $EY = HX = \frac{y}{x + y}$ e podemos concluir por analogia ao argumento inicial, agora aplicado ao quadrado $HEFG$, que os pontos X , Y , Z e W são vértices de um quadrado.

- c) Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo EXY , obtemos

$$\begin{aligned} XY^2 &= EX^2 + EY^2 \\ &= \frac{x^2}{(x + y)^2} + \frac{y^2}{(x + y)^2}. \end{aligned}$$

Portanto, a área do quadrilátero $XYZW$ é $\text{Área}(XYZW) = \frac{x^2 + y^2}{(x + y)^2}$. Como $\text{Área}(EFGH) = 1$, segue que $x^2 + y^2 = 1$ e que

$$\text{Área}(ABCD) \cdot \text{Área}(XYZW) = (x + y)^2 \cdot \frac{x^2 + y^2}{(x + y)^2} = 1.$$

10 Preenchimento do Tabuleiro

José quer preencher as casas de um tabuleiro $2 \times n$ com zeros e uns de modo que dois números vizinhos iguais, em uma mesma linha, impeçam que se preencha também com números iguais as casas correspondentes da outra linha. Por exemplo, no desenho abaixo, os valores de A e B não podem ser iguais.

0	1	0	...	1	1	...
1	1	0	...	A	B	...

a) Encontre todos os preenchimentos possíveis do tabuleiro abaixo:

0	0	1
1		

b) No tabuleiro, todas as colunas já estão preenchidas, exceto as duas últimas. De quantas maneiras os números das casas A e B podem ser escolhidos?

...	0	A
...	1	B

c) De quantas maneiras José pode preencher o tabuleiro se $n = 2020$?

10 Preenchimento do Tabuleiro – Solução

a) Temos os preenchimentos:

0	0	1
1	0	0

0	0	0
1	0	1

0	0	1
1	0	1

b) A princípio, existem 2 escolhas possíveis para A e outras duas possíveis para B . Apenas a escolha $A = 0$ e $B = 1$ é proibida. Portanto, existem $2 \cdot 2 - 1 = 3$ escolhas possíveis.

- c) Começando a preencher da esquerda para a direita, existem 4 tipos possíveis de colunas e as regras se resumem a não preenchermos uma certa coluna com a mesma configuração da coluna imediatamente anterior. Assim, uma vez que José escolheu os números de uma coluna, ele possui 3 opções de preenchimento para a próxima. No início, podemos escolher livremente como preencher a primeira coluna mais a esquerda e depois continuar a escolha das demais da esquerda para a direita. Pelo Princípio Multiplicativo, o total de preenchimentos é:

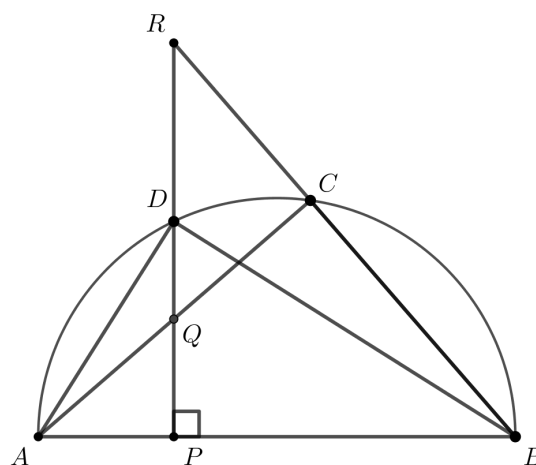
$$4 \cdot 3 \cdot 3 \cdots 3 = 4 \cdot 3^{2019}.$$

11 O Semicírculo e os Triângulos

Os triângulos ABC e ABD estão inscritos na mesma semicircunferência de diâmetro AB , que mede 15 cm . Se traça por D a perpendicular a AB que intersecta AB em P , o segmento AC em Q e o prolongamento do lado BC em R . Além disso, $PR = \frac{40}{3}\text{ cm}$ e $PQ = \frac{15}{4}\text{ cm}$.

- Verifique que $PQ \cdot PR = BP \cdot AP$.
- Encontre a medida do segmento DP .

11 O Semicírculo e os Triângulos – Solução



- a) Como AB é um diâmetro, segue que $\angle ACB = 90^\circ$. Daí

$$\angle PRB = 90^\circ - \angle PBR = \angle BAC.$$

Os triângulos APQ e PRB são semelhantes, pois possuem ângulos de mesmas medidas. Portanto,

$$\begin{aligned}\frac{PQ}{AP} &= \frac{BP}{PR} \\ PQ \cdot PR &= BP \cdot AP.\end{aligned}$$

- b) Os triângulos retângulos ADP e ABD são semelhantes, pois compartilham um dos ângulos agudos. O mesmo ocorre com os triângulos retângulos ABD e DBP . Com mais razão, ADP é semelhante a DBP e assim

$$\begin{aligned}\frac{DP}{AP} &= \frac{BP}{DP} \\ DP^2 &= AP \cdot BP.\end{aligned}$$

Pelo item anterior, segue que

$$\begin{aligned}DP^2 &= PQ \cdot PR \\ DP &= \sqrt{\frac{40}{3} \cdot \frac{15}{4}} \\ &= 5\sqrt{2}.\end{aligned}$$

12 Os Clubes de Alunos I

Em uma escola, devem ser formados n clubes, com $n \geq 3$ e cada um com 3 integrantes, de modo que para cada par de clubes haja exatamente um estudante que integra ambos.

- Dê um exemplo de uma distribuição de 7 clubes que satisfaçam as condições mencionadas.
- Verifique que se um estudante pertence a 4 clubes, então ele deve pertencer a todos os demais.
- Determine o valor mínimo de n de modo que para qualquer conjunto de clubes que satisfaçam essas condições seja obrigatória a presença de um mesmo estudante em todos eles.

12 Os Clubes de Alunos I – Solução

- a) Nomeando os alunos por A, B, C, D, E e F , os seguintes conjuntos representam 7 clubes que atendem às condições do enunciado:

$$\{A, B, C\}, \{A, D, E\}, \{A, F, G\}, \{B, E, F\}, \{B, D, G\}, \{C, D, F\}, \{C, E, G\}.$$

- b) Suponha que o estudante A pertença aos seguintes 4 clubes:

$$\{A, B, C\}, \{A, D, E\}, \{A, F, G\}, \{A, H, I\}.$$

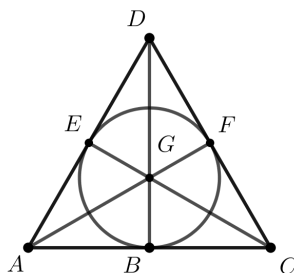
Suponha que existe um clube K formado pelos alunos $\{M, N, P\}$ do qual A não faz parte. Então, K deve possuir pelo menos um elemento de cada um dos seguintes 4 conjuntos disjuntos:

$$\{B, C\}, \{D, E\}, \{F, G\}, \{H, I\}.$$

Isso é um absurdo, pois para que isso aconteça K deveria ter pelo menos 4 elementos. Portanto, A deve pertencer a todos os clubes.

- c) Afirmamos que o valor mínimo é $n = 8$. Pelo item anterior, basta verificarmos que nesse caso algum aluno deve pertencer a pelo menos 4 clubes. Suponha que isso não ocorre, ou seja, que cada aluno pertence a no máximo 3 clubes e considere um clube genérico w formado pelos alunos $\{X, Y, Z\}$. Cada um dos elementos de w pode estar em no máximo mais outros 2 clubes. Como qualquer outro clube deve compartilhar um aluno em comum com w , contando os demais clubes que contém X, Y ou Z , concluímos que podem existir no máximo mais $2 + 2 + 2 = 6$ outros clubes distintos de w . Assim, o total de clubes seria no máximo $6 + 1 = 7$ e isso é um absurdo.

Comentário: É possível construir o exemplo do item *a)* considerando os segmentos e a circunferência do diagrama de *Fano*, como ilustrado a seguir. Nele, cada segmento passando por 3 pontos marcados e a circunferência central representam um clube. Note que esses segmentos e a circunferência central possuem um ponto de interseção.



13 *Progressões Geométricas*

As progressões geométricas a_1, a_2, a_3, \dots e b_1, b_2, b_3, \dots possuem a mesma razão, com $a_1 = 27$, $b_1 = 99$ e $a_{15} = b_{11}$. Encontre o valor de a_9 .

13 *Progressões Geométricas – Solução*

Seja r o valor da razão comum das duas progressões geométricas. Temos

$$\begin{aligned}a_{15} &= a_1 r^{14} \\ &= 27r^{14} \\ b_{11} &= b_1 r^{10} \\ &= 99r^{10}.\end{aligned}$$

Portanto, $27r^{14} = 99r^{10}$ e daí $3r^4 = 11$. Finalmente

$$\begin{aligned}a_9 &= a_1 r^8 \\ &= 27(r^4)^2 \\ &= 27\left(\frac{11}{3}\right)^2 \\ &= \frac{27 \cdot 121}{9} \\ &= 363.\end{aligned}$$

14 *Embaralhamento de Cartões*

Existem três cartões, cada um com um número do conjunto $\{1, 2, \dots, 10\}$. Esses três cartões foram embaralhados e distribuídos a três pessoas, que registraram os números em seus respectivos cartões. Os cartões foram então coletados e o processo foi repetido novamente. Após algumas repetições, cada uma das três pessoas somou os seus registros. Sabendo que as somas obtidas foram 13, 15 e 23, quais eram os números nos cartões?

14 *Embaralhamento de Cartões – Solução*

Sejam x , y e z os números escritos nos três cartões, com $x \leq y \leq z$. A cada etapa do processo de sorteio, a soma dos números dos três cartões é sempre $x + y + z$. Como $13 + 15 + 23 = 51 = 3 \cdot 17$ e tanto 3 quanto 17 são números primos, segue que foram realizados 3 sorteios e $x + y + z = 17$. Analisando a pessoa que obteve a soma 23, devemos ter $z \geq 8$, pois caso contrário a soma máxima seria $7 \cdot 3 = 21$. Se $z = 10$, nas somas 13 e 15 podem aparecer no máximo uma parcela z . Como $x + y = 17 - z = 7$, segue que $(x, y, z) = (3, 4, 10)$, $(2, 5, 10)$ ou $(1, 6, 10)$. Nos dois primeiros casos, não é possível obter soma 13 e no último

não é possível obter soma 15 com três parcelas. Se $z = 8$, então novamente nas somas 13 e 15 podem aparecer no máximo uma parcela z . De $3 \cdot 8 > 23 > 8 + 7 + 7$, podemos concluir que exatamente duas parcelas 8 são usadas para obter a soma 23 e assim um dos cartões deve possuir o número $23 - 8 - 8 = 7$. Sabendo que $x + y = 17 - z = 9$, a única solução possível é $(x, y, z) = (2, 7, 8)$, mas essa tripla não pode gerar as somas 13 e 15. Finalmente, a única opção que resta a ser analisada é $z = 9$. Nesse caso, nas somas 13 e 15 exatamente uma parcela z é usada e, além disso, $x \leq 3$, pois caso contrário a menor soma possível com a parcela z seria $9 + 4 + 4 = 17 > 13$. Por outro lado, como $x + y = 17 - z = 8$, as opções que nos restam são $(x, y, z) = (1, 7, 9)$, $(2, 6, 9)$ ou $(3, 5, 9)$. A primeira não pode gerar a soma 13 e a segunda não pode gerar a soma 15. A terceira opção é a única possível e um exemplo de sorteios está ilustrado na seguinte tabela:

Pessoa 1	3	5	5	= 13
Pessoa 2	9	3	3	= 15
Pessoa 3	5	9	9	= 23

15 A Sequência e os Quadrados

Começando com um número inteiro positivo n , uma sequência é criada satisfazendo a seguinte regra: cada termo se obtém do anterior subtraindo-se o maior quadrado perfeito que é menor ou igual ao termo anterior, até chegar ao número zero. Por exemplo, se $n = 142$, teremos a seguinte sequência de 5 termos:

$$a_1 = 142, a_2 = 21, a_3 = 5, a_4 = 1, a_5 = 0,$$

pois $21 = 142 - 11^2$, $5 = 21 - 4^2$, $1 = 5 - 2^2$ e $0 = 1 - 1^2$.

- Dê exemplo de uma sequência que tenha exatamente 6 termos.
- Encontre o menor valor de n para que a sequência assim criada tenha exatamente 7 termos.

15 A Sequência e os Quadrados – Solução

- Um exemplo é a sequência

$$a_1 = 23, a_2 = 7 = 23 - 16, a_3 = 3 = 7 - 4, a_4 = 2 = 3 - 1, a_5 = 1 = 2 - 1, a_6 = 0 = 1 - 1.$$

- Como $a_{n+1} = a_n - x^2$, com $x^2 \leq a_n < (x+1)^2$, segue que

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n - x^2 \\ &< (x+1)^2 - x^2 \\ &= 2x + 1. \end{aligned}$$

Daí o inteiro x satisfaz $x > \frac{a_{n+1}-1}{2}$. Para obter o valor mínimo, a sequência será construída de trás para frente e em cada etapa será utilizado a estimativa mínima do incremento x^2 obtida anteriormente. Temos $a_7 = 0$ e $a_6 \geq 1^2$. Daí

$$\begin{aligned} a_5 &= a_6 + x^2 \\ &\geq 1 + 1^2, \\ a_4 &= a_5 + x^2 \\ &\geq 2 + 1^2, \\ a_3 &= a_4 + x^2 \\ &\geq 3 + 2^2, \\ a_2 &= a_3 + x^2 \\ &\geq 7 + 4^2, \\ a_1 &= a_2 + x^2 \\ &\geq 23 + 144, \end{aligned}$$

Assim, o menor valor de n é $23 + 144 = 167$ e a sequência de 7 termos que será criada é

$$a_1 = 167, a_2 = 23, a_3 = 7, a_4 = 3, a_5 = 2, a_6 = 1, a_7 = 0.$$

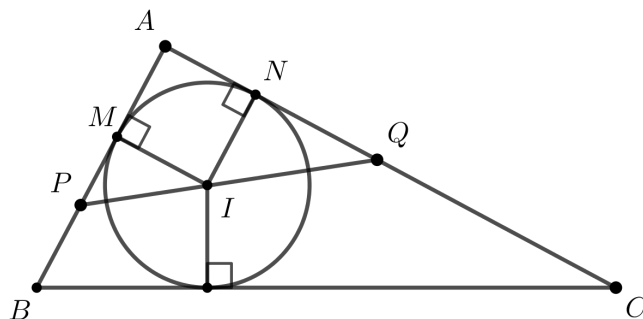
16 O Triângulo e o seu Incírculo

Seja ABC um triângulo retângulo com $\angle BAC = 90^\circ$ e I o ponto de encontro de suas bissetrizes. Uma reta por I corta os lados AB e AC em P e Q , respectivamente. A distância de I para o lado BC é 1 cm .

a) Encontre o valor de $PM \cdot NQ$.

b) Determine o valor mínimo possível para a área do triângulo APQ .

Dica: Se x e y são dois números reais não negativos, então $x + y \geq 2\sqrt{xy}$.



16 O Triângulo e o seu Incírculo – Solução

- a) Se $\angle APQ = \alpha$, segue que $\angle MIP = 90^\circ - \alpha$ e

$$\angle NIQ = 180^\circ - \angle MIN - \angle MIP = \alpha.$$

Portanto, os triângulos IMP e NIQ são semelhantes e daí

$$\frac{IM}{NQ} = \frac{PM}{IN} \Rightarrow PM \cdot NQ = IM \cdot IN = 1.$$

- b) Sejam $x = MP$ e $y = NQ$. Como $AMIN$ é um quadrado de lado 1 cm , segue que a área do triângulo APQ é dada por

$$\begin{aligned} \frac{AP \cdot AQ}{2} &= \frac{(1+x)(1+y)}{2} \\ &= \frac{1+xy+x+y}{2}. \end{aligned}$$

Pelo item anterior, $xy = 1$. Além disso, pela desigualdade apresentada na dica, $x + y \geq 2\sqrt{1} = 2$. Assim, a área mínima é $\frac{1+1+2}{2} = 2$ e pode ser obtida fazendo $AP = AQ = 2$.

Observação: A desigualdade apresentada como sugestão é um caso particular da desigualdade entre médias aritméticas e geométricas ($MA \geq MG$). Para verificar esse caso, de $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$, segue que

$$x - 2\sqrt{xy} + y \geq 0 \Rightarrow x + y \geq 2\sqrt{xy}.$$

17 Equação com Números Irracionais

Dizemos que um número é racional se ele pode ser escrito da forma $\frac{p}{q}$, com p e q números inteiros. Se um número real não é racional, dizemos que ele é irracional. Por exemplo, $\frac{1}{4}$ é um número racional e $\sqrt{3}$ é irracional. Encontre todos os pares de números racionais (a, b) tais que

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{2 + \sqrt{3}}.$$

17 *Equação com Números Irracionais – Solução*

Elevando ao quadrado, obtemos as equações equivalentes:

$$\begin{aligned}a + b + 2\sqrt{ab} &= 2 + \sqrt{3} \\ 2\sqrt{ab} &= 2 - a - b + \sqrt{3}.\end{aligned}$$

Como a e b são números racionais, $r = 2 - a - b$ também é um número racional. Eleve a última equação ao quadrado:

$$\begin{aligned}4ab &= r^2 + 3 + 2r\sqrt{3} \\ 4ab - r^2 - 3 &= 2r\sqrt{3}.\end{aligned}$$

Se $r \neq 0$, temos

$$\sqrt{3} = \frac{4ab - r^2 - 3}{2r}.$$

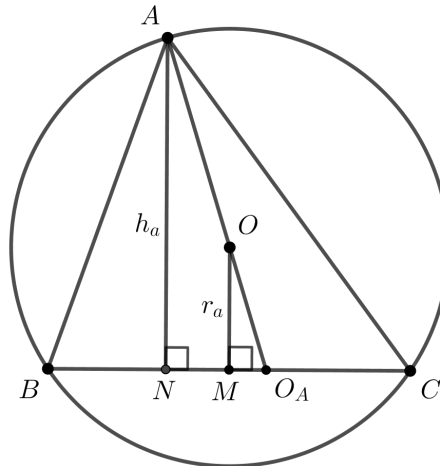
Como r é um número racional, o número $\frac{4ab - r^2 - 3}{2r}$ também é racional. Entretanto, isso gera uma contradição, pois $\sqrt{3}$ é um número irracional. Logo, $r = 0$ e assim das últimas equações temos

$$\begin{aligned}a + b &= 2 \\ ab &= 3/4.\end{aligned}$$

Isso mostra que a e b são raízes da equação $x^2 - 2x + 3/4 = 0$, ou seja, $(a, b) = (1/2, 3/2)$ ou $(a, b) = (3/2, 1/2)$. Esses números satisfazem a primeira equação e, consequentemente, são solução da equação do problema.

18 O Triângulo Inscrito na Circunferência

Na figura a seguir, O é o centro da circunferência que passa pelos vértices A , B e C .



- a) Se R é o comprimento do raio da circunferência, verifique que

$$\frac{R}{AO_A} = \frac{h_a - r_a}{h_a}.$$

- b) Definindo O_B e O_C de modo semelhante, verifique que

$$\frac{1}{AO_A} + \frac{1}{BO_B} + \frac{1}{CO_C} = \frac{2}{R}.$$

18 O Triângulo Inscrito na Circunferência – Solução

- a) Como os triângulos OMO_A e ANO_A são semelhantes, segue que

$$\begin{aligned} \frac{h_a}{r_a} &= \frac{AO_A}{OO_A} \\ \frac{h_a}{h_a - r_a} &= \frac{AO_A}{AO_A - OO_A} \\ \frac{h_a - r_a}{h_a} &= \frac{R}{AO_A}. \end{aligned}$$

b) Como $[ABC] = \frac{BC \cdot h_a}{2}$ e $[BOC] = \frac{BC \cdot r_a}{2}$, segue do item anterior que

$$\begin{aligned} \frac{R}{AO_A} &= \frac{h_a - r_a}{h_a} \\ &= 1 - \frac{[BOC]}{[ABC]}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{R}{AO_A} + \frac{R}{BO_B} + \frac{R}{CO_C} &= \\ 3 - \frac{[BOC] + [AOC] + [AOB]}{[ABC]} &= \\ 3 - \frac{[ABC]}{[ABC]} &= 2. \end{aligned}$$

Concluimos portanto que

$$\frac{1}{AO_A} + \frac{1}{BO_B} + \frac{1}{CO_C} = \frac{2}{R}.$$

19 A Equação Cúbica

Considere os números reais p e q e a equação cúbica:

$$x^3 + px + q = 0.$$

a) Se x_0 é uma raiz real da equação, então

$$x^3 + px + q = (x - x_0)(x^2 + ax + b).$$

Verifique que $a = x_0$.

b) Verifique que $p^2 \geq 4x_0q$.

19 A Equação Cúbica – Solução

a) Expandindo a equação dada, temos

$$\begin{aligned} x^3 + px + q &= (x - x_0)(x^2 + ax + b) \\ &= x^3 + (a - x_0)x^2 + (b - ax_0)x - bx_0. \end{aligned}$$

Como o coeficiente de x^2 no termo da esquerda é nulo, devemos ter $a - x_0 = 0$, ou seja, $x_0 = a$.

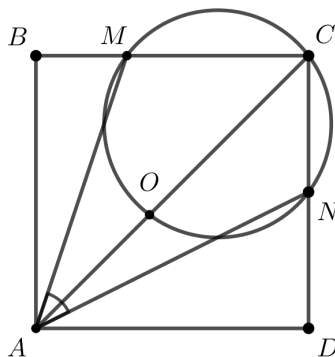
- b) Comparando os coeficientes de x^1 e x^0 em ambos os membros das equações anteriores, temos $p = b - ax_0 = b - x_0^2$ e $q = -bx_0$. Daí, como todo quadrado de um número real é não negativo,

$$\begin{aligned}
 p^2 - 4x_0q &= (b - x_0^2)^2 + 4bx_0^2 \\
 &= b^2 - 2bx_0^2 + x_0^4 + 4bx_0^2 \\
 &= b^2 + 2bx_0^2 + x_0^4 \\
 &= (b + x_0^2)^2 \\
 &\geq 0.
 \end{aligned}$$

Consequentemente $p^2 \geq 4x_0q$.

20 A Circunferência e o Quadrado

No quadrado $ABCD$, os pontos M e N são interiores aos lados BC e CD de modo que $\angle MAN = 45^\circ$. Seja O o ponto de interseção do círculo que passa por C , M e N com o segmento AC .



- a) Verifique que $OM = ON$.
- b) Verifique que O é o centro da circunferência que passa por A , M e N .

20 A Circunferência e o Quadrado – Solução

- a) Como $\angle MCO = \angle OCN = 45^\circ$, segue que os comprimentos das cordas MO e NO são iguais a um mesmo valor L .
- b) Seja R o comprimento do raio da circunferência que passa por A , M e N . Pela Lei dos Senos,

$$\frac{MN}{\sin(\angle MAN)} = 2R \Rightarrow R = \frac{MN}{\sqrt{2}}.$$

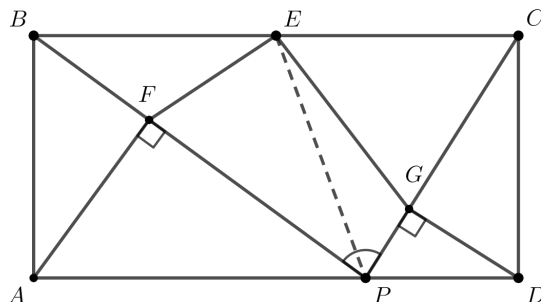
Como $\angle MCN = 90^\circ$, MN é um diâmetro da circunferência que passa por C , M e N . Consequentemente, $\angle MON = 90^\circ$. Pelo Teorema de Pitágoras,

$$\begin{aligned} MO^2 + NO^2 &= MN^2 \\ 2L^2 &= MN^2 \\ L &= \frac{MN}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

De $R = L$ e $MO = NO$, podemos concluir que O é o centro da circunferência que passa por A , M e N .

21 O Retângulo e as Perpendiculares

Seja $ABCD$ um retângulo com $BC = 2 \cdot AB$. Seja E o ponto médio de BC e P um ponto arbitrário interno ao lado AD . Sejam F e G os pés das perpendiculares desenhadas de A a BP e de D a CP . Sabemos que $\angle BPC = 85^\circ$.



- a) Verifique que os triângulos BEF e BEP são semelhantes.
- b) Determine o valor da soma dos ângulos $\angle BEF + \angle CEG$.

21 *O Retângulo e as Perpendiculares – Solução*

- a) Em virtude das relações métricas nos triângulos retângulos aplicadas ao triângulo ABP , temos

$$BE^2 = AB^2 = BF \cdot BP.$$

Portanto,

$$\frac{BE}{BP} = \frac{BF}{BE}.$$

Dada a relação de proporcionalidade da última equação e $\angle EBF = \angle EBP$, segue que os triângulos BEF e BEP são semelhantes.

- b) Da semelhança do item anterior, segue que $\angle BEF = \angle BPE$. De modo análogo, $\angle CEG = \angle EPC$. Assim,

$$\angle BEF + \angle CEG = \angle BPE + \angle EPC = \angle BPC = 85^\circ.$$

22 *Produtos e a Sequência de Fibonacci*

A Sequência de Fibonacci é definida recursivamente por $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ para $n \in \mathbb{Z}$ e $F_1 = F_2 = 1$. Determine o valor de:

$$\left(1 - \frac{F_2^2}{F_3^2}\right) \left(1 - \frac{F_3^2}{F_4^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{F_{2019}^2}{F_{2020}^2}\right).$$

22 *Produtos e a Sequência de Fibonacci – Solução*

Podemos reescrever um termo genérico do produto dado como

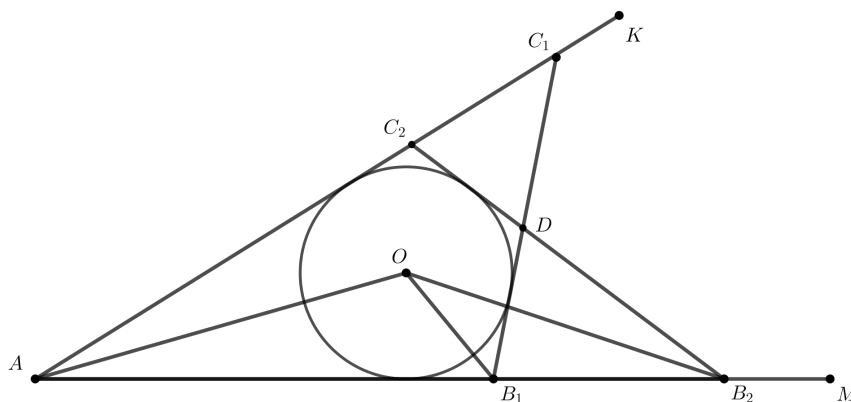
$$\begin{aligned} 1 - \frac{F_i^2}{F_{i+1}^2} &= \frac{F_{i+1}^2 - F_i^2}{F_{i+1}^2} \\ &= \frac{(F_{i+1} - F_i)(F_{i+1} + F_i)}{F_{i+1}^2} \\ &= \frac{F_{i-1}F_{i+2}}{F_{i+1}^2}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 & \left(1 - \frac{F_2^2}{F_3^2}\right) \left(1 - \frac{F_3^2}{F_4^2}\right) \left(1 - \frac{F_4^2}{F_5^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{F_{2018}^2}{F_{2019}^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{F_{2019}^2}{F_{2020}^2}\right) = \\
 & \frac{F_1 \cancel{F_4}}{F_3^2} \cdot \frac{F_2 \cancel{F_5}}{\cancel{F_4}^2} \cdot \frac{F_3 \cancel{F_6}}{\cancel{F_5}^2} \cdots \frac{F_{2017} \cancel{F_{2020}}}{\cancel{F_{2019}}^2} \cdot \frac{F_{2018} F_{2021}}{\cancel{F_{2020}}^2} = \\
 & \frac{F_1 F_2 \cdot (F_3 F_4 \cdots F_{2017} F_{2018}) \cdot F_{2021}}{F_3 \cdot (F_3 F_4 \cdots F_{2018} F_{2019}) F_{2019} F_{2020}} = \\
 & \frac{F_{2021}}{2 F_{2019} F_{2020}}.
 \end{aligned}$$

23 O Ângulo no Triângulo

Na figura abaixo, os segmentos AM , AK , B_2C_2 e B_1C_1 são tangentes a circunferência de centro O . Se $\angle B_1OB_2 = 30^\circ$, determine o valor do ângulo $\angle B_1DB_2$.



23 O Ângulo no Triângulo – Solução

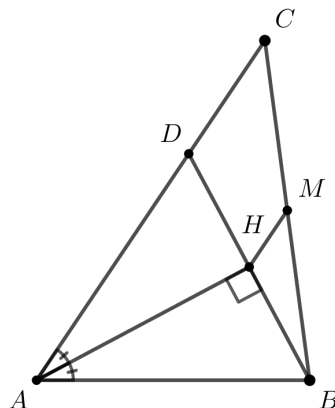
Pelo Teorema do Ângulo Externo, temos

$$\begin{aligned}
 \angle B_1OB_2 &= \angle AB_1O - \angle AB_2O \\
 &= \frac{\angle AB_1C_1 - \angle AB_2C_2}{2} \\
 &= \frac{\angle B_1DB_2}{2}.
 \end{aligned}$$

Portanto, $\angle B_1DB_2 = 2 \cdot 30 = 60^\circ$.

24 *Ponto Médio Lembra Base Média*

No desenho abaixo, ABC um triângulo com lados de comprimentos $AB = 4\text{ cm}$, $AC = 6\text{ cm}$. Além disso, $\angle DAH = \angle HAB$, $\angle AHB = 90^\circ$ e M é o ponto médio de BC . Encontre o comprimento do segmento MH .

**24** *Ponto Médio Lembra Base Média – Solução*

Como AH é altura e bissetriz do vértice A , segue que o triângulo ABD é isósceles. Daí H é um ponto médio do segmento BD e $AB = AD$. Consequentemente, MH é uma base média do triângulo CBD e assim

$$\begin{aligned} MH &= \frac{CD}{2} \\ &= \frac{AC - AD}{2} \\ &= \frac{AC - AB}{2} \\ &= 1\text{ cm}. \end{aligned}$$

25 *A Função Ímpar*

Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função ímpar, isto é, uma função que satisfaz $-f(x) = f(-x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Suponha que $f(x+5) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e que $f(1/3) = 1$. Determine o valor da soma:

$$f(16/3) + f(29/3) + f(12) + f(-7).$$

25 *A Função Ímpar – Solução*

Temos

$$\begin{aligned}f\left(\frac{1}{3}\right) &= 1 \\f\left(\frac{1}{3}+5\right) &= 1 \\f\left(\frac{16}{3}\right) &= 1.\end{aligned}$$

Como f é uma função ímpar, i.e., $f(-x) = -f(x)$, segue que

$$\begin{aligned}f\left(-\frac{1}{3}\right) &= -1 \\f\left(-\frac{1}{3}+5+5\right) &= -1 \\f\left(\frac{29}{3}\right) &= -1.\end{aligned}$$

e

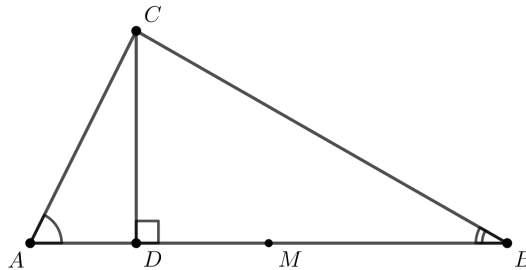
$$\begin{aligned}f(-7) &= f(-12+5) \\&= f(-12) \\&= -f(12).\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}f(16/3) + f(29/3) + f(12) + f(-7) &= \\1 + (-1) + f(12) - f(12) &= 0.\end{aligned}$$

26 *A Altura e o Ponto Médio*

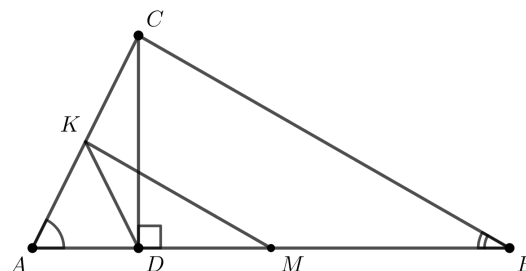
Na figura a seguir, $\angle CAB = 2 \cdot \angle CBA$, AD é uma altura e M é o ponto médio de AB . Se $AC = 2\text{ cm}$, encontre o comprimento do segmento DM .

**26** *A Altura e o Ponto Médio – Solução*

Seja K o ponto médio de AC . Como o círculo de centro K e diâmetro AC passa por D , segue que $CK = AK = DK = 1\text{ cm}$. Dessa última igualdade, decorre que o triângulo ADK é isósceles e assim $\angle KDA = \angle KAD$. O segmento KM é base média do triângulo ABC , implicando em $KM \parallel BC$ e assim $\angle KMD = \angle CBA$. Pelo Teorema do Ângulo Externo,

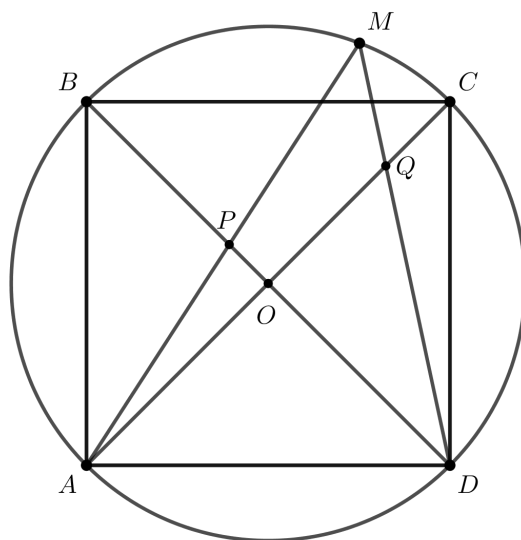
$$\angle DKM = \angle ADK - \angle DMK = \angle DMK.$$

Finalmente, como as últimas igualdades mostram que o triângulo DKM é isósceles, segue que $DM = DK = 1\text{ cm}$.

**27** *O Quadrado Inscrito na Circunferência*

O quadrado $ABCD$ de lado 1 cm está inscrito em uma circunferência de centro O . O ponto M está sobre o arco BC , o segmento AM encontra BD no ponto P , o segmento DM encontra AC no ponto Q .

a) Verifique que $\angle AQD = \angle PAD$.



b) Encontre a área do quadrilátero $APQD$.

27 O Quadrado Inscrito na Circunferência – Solução

a) Como $\angle AMD = 45^\circ = \angle OAD = \angle ODA$, temos

$$\begin{aligned}\angle AQD &= \angle AMD + \angle MAQ \\ &= 45^\circ + \angle MAQ \\ &= \angle OAD + \angle MAQ \\ &= \angle PAD.\end{aligned}$$

b) De modo semelhante ao item anterior, podemos mostrar que $\angle APD = \angle ADQ$ e daí os triângulos APD e QDA são semelhantes. Daí

$$\frac{AQ}{AD} = \frac{AD}{PD} \Rightarrow AD^2 = AQ \cdot PD.$$

Em virtude do item anterior, a área do quadrilátero $APQD$ é dada por

$$\begin{aligned}\frac{PD \cdot AQ \sin(\angle POQ)}{2} &= \frac{AD^2}{2} \\ &= \frac{\text{Área}(ABCD)}{2} \\ &= \frac{1}{2} \text{ cm}^2.\end{aligned}$$

28 *A Função Exponencial*

Seja $f(x) = \frac{9^x}{9^x + 3}$.

- a) Encontre o valor de $f(x) + f(1-x)$.
- b) Calcule o valor da soma

$$f\left(\frac{1}{2020}\right) + f\left(\frac{2}{2020}\right) + f\left(\frac{3}{2020}\right) + \dots + f\left(\frac{2019}{2020}\right).$$

28 *A função exponencial – Solução*

- a) Temos

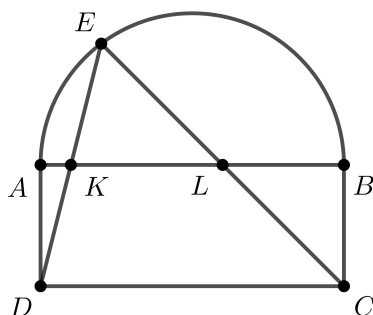
$$\begin{aligned} f(x) + f(1-x) &= \frac{9^x}{9^x + 3} + \frac{9^{1-x}}{9^{1-x} + 3} \\ &= \frac{9^x}{9^x + 3} + \frac{9}{9 + 3 \cdot 9^x} \\ &= \frac{9^x}{9^x + 3} + \frac{3}{3 + 9^x} \\ &= 1. \end{aligned}$$

- b) Em virtude do item anterior, podemos juntar os termos correspondendo às frações $\frac{i}{2020}$ e $\frac{2020-i}{2020}$ para obter o número 1:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2020}\right) + f\left(\frac{2}{2020}\right) + f\left(\frac{3}{2020}\right) + \dots + f\left(\frac{2019}{2020}\right) &= \\ \left(f\left(\frac{1}{2020}\right) + f\left(\frac{2019}{2020}\right)\right) + \left(f\left(\frac{2}{2020}\right) + f\left(\frac{2018}{2020}\right)\right) + \\ \left(f\left(\frac{3}{2020}\right) + f\left(\frac{2017}{2020}\right)\right) + \dots + \left(f\left(\frac{1009}{2020}\right) + f\left(\frac{1011}{2020}\right)\right) + f\left(\frac{1010}{2020}\right) &= \\ 1009 + \frac{3}{3+3} &= \\ \frac{2019}{2} &. \end{aligned}$$

29 O Retângulo e o Semicírculo

Seja $ABCD$ um retângulo tal que $AB = \sqrt{2}BC$. Seja E um ponto sobre o semicírculo com diâmetro AB , como indicado na figura a seguir. Sejam K e L as interseções de AB com ED e EC , respectivamente. Se $AK = 2\text{ cm}$ e $BL = 9\text{ cm}$, calcule, em cm , o comprimento do segmento KL .



29 O Retângulo e o Semicírculo – Solução

Sejam x e y os comprimentos das projeções ortogonais dos segmentos EK e EL sobre o segmento AB e P a projeção ortogonal de E sobre AB . Além disso, seja $h = EP$. Por semelhança de triângulos, temos

$$\frac{2}{x} = \frac{BC}{h} \text{ e } \frac{9}{y} = \frac{BC}{h}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} KL &= x + y \\ &= \frac{11h}{BC}. \end{aligned}$$

Como EAB é um triângulo retângulo em E , segue das relações métricas dos triângulos retângulos que

$$\begin{aligned} h^2 &= AP \cdot PB \\ &= (2 + x)(9 + y) \\ &= \left(2 + \frac{2h}{BC}\right) \left(9 + \frac{9h}{BC}\right) \\ &= 18 \left(1 + \frac{h}{BC}\right)^2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$1 + \frac{h}{BC} = \frac{h}{3\sqrt{2}}.$$

Além disso, de

$$\sqrt{2}BC = AK + KL + LB = 11 \left(1 + \frac{h}{BC} \right),$$

segue que

$$\frac{h}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}BC}{11}.$$

Ou seja, $\frac{h}{BC} = \frac{6}{11}$ e $KL = \frac{11h}{BC} = 6 \text{ cm}$.

30 Números Parentes

Seja \overline{ab} um número inteiro de dois dígitos². Um inteiro positivo é um parente de \overline{ab} se:

- i) o dígito das unidades de n também é b .
- ii) os outros dígitos de n são distintos de zero e somam a .

Por exemplo, os parentes de 31 são 31, 121, 211 e 1111. Encontre todos os números de dois dígitos que dividem todos os seus parentes.

30 Números Parentes – Solução

Vamos dividir o problema em casos:

- 1) Se $a = 1$ e n é parente de \overline{ab} , então a única possibilidade é $n = \overline{1b}$. Esse número é sempre solução, pois $\overline{1b}$ divide $\overline{1b}$.
- 2) Se $a = 2$, como $\overline{2b}$ deve dividir $\overline{11b}$, então $\overline{2b}$ deve dividir $\overline{11b} - \overline{2b} = 90$. Os divisores de $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$ são

$$1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45 \text{ e } 90.$$

Como $20 \leq \overline{2b} = 20 + b \leq 29$, não temos soluções nesse caso.

- 3) Se $a \geq 3$, como \overline{ab} deve dividir a $\overline{(a-3)21b}$ e $\overline{(a-3)12b}$, então \overline{ab} divide a diferença $\overline{(a-3)21b} - \overline{(a-3)12b} = 90$. Lembrando da análise de divisores do item anterior, as únicas possibilidades são 30, 45 e 90, dado que $\overline{ab} \geq 30$. Resta verificarmos que essas três opções dividem todos os seus parentes.

- i) Se n é parente de 30, então n termina em 0 e a soma de seus dígitos é um múltiplo de 3. Portanto, n é múltiplo de $10 \cdot 3 = 30$.

²Nessa notação, b é o dígito das unidades e a é o dígito das dezenas.

- ii) Se n é parente de 45, então $n = A \cdot 10 + 5$, em que A é um número cuja soma dos dígitos é 4. Como a soma dos dígitos de n é um múltiplo de 9, n também é múltiplo de 9. Além disso, como n termina em 5, então n também é múltiplo de 5. Portanto, n é múltiplo de $9 \cdot 5 = 45$.
- iii) Se n é parente de 90, então $n = A \cdot 10$, em que A é um número cuja soma dos dígitos é 9. Como n termina em 0 e é múltiplo de 9, segue que n é múltiplo de $9 \cdot 10 = 90$.

Logo, os únicos inteiros positivos que dividem todos os seus parentes são

10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 30, 45 e 90.

31 A Função de Inteiros

Para cada número inteiro positivo n se associa um inteiro não negativo $f(n)$ de modo que se cumpram as três regras seguintes:

- i) $f(ab) = f(a) + f(b)$.
- ii) $f(n) = 0$ se n é um primo maior que 10.
- iii) $f(1) < f(243) < f(2) < 11$.

Sabendo que $f(2106) < 11$, determine o valor de $f(96)$.

31 A Função de Inteiros – Solução

Pela propriedade i), temos $f(243) = f(3^5) = 5f(3)$. Dado que

$$0 \leq f(1) < 5f(3) < f(2) < 11,$$

e que $5f(3)$ é um múltiplo de 5, temos $5f(3) = 5$, ou seja, $f(3) = 1$. Note que $2106 = 2 \cdot 3^4 \cdot 13$. Assim, pela propriedade i),

$$f(2106) = f(2) + 4f(3) + f(13) = f(2) + 4.$$

De $f(2106) < 11$, segue que $f(2) < 7$. Usando iii), temos $5 < f(2) < 7$ e assim $f(2) = 6$. Logo,

$$f(96) = f(3 \cdot 2^5) = f(3) + 5f(2) = 31.$$

32 *Os Armários da Escola*

Uma escola tem 100 alunos e 100 armários numerados de 1 a 100. Inicialmente, todos os armários estão fechados. O primeiro aluno passa e abre todos os armários; o segundo passa e fecha todos os de números pares; o terceiro passa e muda a posição de todos os múltiplos de 3, ou seja, os que estão abertos ele fecha e os que estão fechados ele abre; o quarto aluno muda a posição de todos os armários de números múltiplos de 4; e assim por diante até o centésimo aluno, que muda a posição dos armários de números múltiplos de 100. Depois da passagem de todos os alunos, quantos armários ficam fechados?

32 *Os Armários da Escola – Solução*

Os armários que ficam abertos são aqueles com números que possuem uma quantidade ímpar de divisores e isso só acontece com os números que são quadrados perfeitos. De 1 a 100, temos 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 e 100, que são quadrados perfeitos, ou seja, são 10 quadrados perfeitos. Portanto, o número de armários que ficam fechados é $100 - 10 = 90$.

33 *As Diferenças entre os Inteiros*

- a) Verifique que se escolhermos 3 ou mais inteiros do conjunto $\{6k + 1, 6k + 2, 6k + 3, 6k + 4, 6k + 5, 6k + 6\}$, pelo menos dois irão diferir por 1, 4 ou 5.
- b) Qual é a maior quantidade de inteiros positivos menores ou iguais a 2022 que podemos escolher de modo que não haja dois números cuja diferença é 1, 4 ou 5?

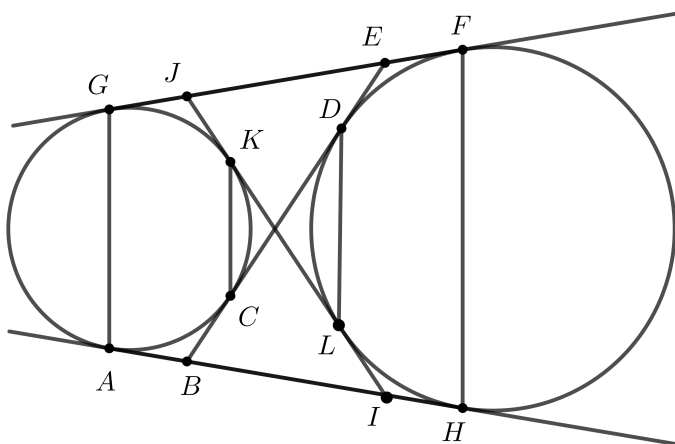
33 *As Diferenças entre os Inteiros – Solução*

- a) Suponha, por absurdo, que escolhermos 3 ou mais inteiros e nenhum deles difere por 1, 4 ou 5. Como nenhuma diferença é 1, podemos admitir que todos diferem por pelo menos 2, e como nenhuma diferença é 5, não podemos escolher simultaneamente $6k + 1$ e $6k + 6$. Se $6k + 1$ não é escolhido, devemos escolher $6k + 2, 6k + 4, 6k + 6$ e nesse caso, temos dois que diferem por 4. Por outro lado, se $6k + 1$ é escolhido, devemos escolher $6k + 3, 6k + 5$ e assim também temos dois números que diferem por 4. Essa contradição mostra que não é possível escolher 3 ou mais inteiros sem que haja as diferenças de 1, 4 e 5 entre dois deles.
- b) Divida os 2022 inteiros em $\frac{2022}{6} = 337$ conjuntos disjuntos de 6 números consecutivos. Pelo item anterior, se escolhermos mais que 2 elementos de um desses conjuntos, poderemos encontrar as diferenças 1, 4 ou 5 entre eles. Portanto, o máximo de elementos que podem ser escolhidos é $337 \cdot 2 = 674$. Para verificar que esse número é

realizável, basta escolher todos os múltiplos de 3 da lista, que totalizam $\frac{2022}{3} = 674$. Como a diferença entre quaisquer dois múltiplos de 3 é um múltiplo de 3, segue que nenhuma dessas diferenças pode ser 1, 4 ou 5.

34 Retas Tangentes às Circunferências

Na figura a seguir, foram traçadas as quatro retas tangentes a duas circunferências.



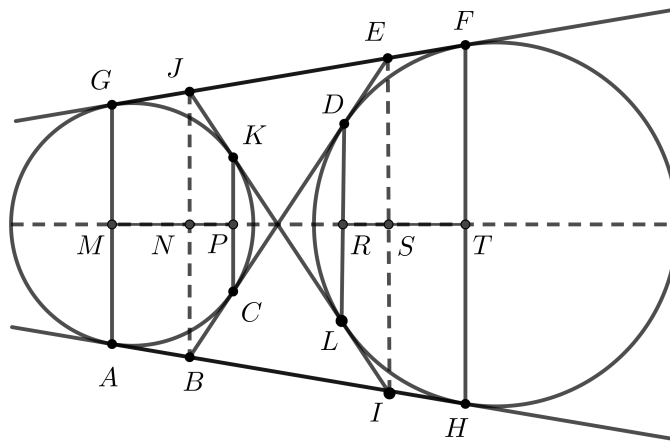
- Verifique que $BC = DE$.
- Verifique que a distância entre os segmentos AG e CK é igual a distância entre os segmentos DL e FH .

Dica: Lembre que os comprimentos das tangentes comuns traçadas de um ponto externo a uma circunferência são iguais. Por exemplo, na figura dada, $IK = AI$. Esse fato é popularmente conhecido como “Teorema do Bico”.

34 Retas Tangentes às Circunferências – Solução

- Pelo “Teorema do Bico”, temos

$$\begin{aligned}
 2 \cdot BC + CD &= AB + BC + CD \\
 &= AB + BD \\
 &= AB + BH \\
 &= GE + EF \\
 &= CE + DE \\
 &= 2 \cdot DE + CD.
 \end{aligned}$$



Daí $BC = DE$.

b) Em virtude do item anterior,

$$AB = BC = DE = EF = IH.$$

Como os segmentos AG , BJ , CK , DL e EI e FH são perpendiculares a reta MT que passa pelos centros das circunferências, todos são paralelos entre si. Daí $\angle ABJ = \angle IHF$. De $AB = IH$, segue que

$$MN = AB \cos \angle ABJ = IH \cos \angle IHF = ST.$$

De modo semelhante, como $BC = IL$, segue que $NP = RS$. Assim,

$$MP = RT.$$

35 Inteiros Bacanas

Dizemos que um inteiro positivo é *bacana* se ao somarmos os quadrados de seus dígitos e repetirmos essa operação sucessivamente, obtivermos o número 1. Por exemplo, 1900 é bacana, pois

$$1900 \rightarrow 82 \rightarrow 68 \rightarrow 100 \rightarrow 1.$$

- Encontre dois números de dois dígitos consecutivos bacanas.
- Verifique que para todo $n > 2020$ existem dois números bacana de n dígitos que são consecutivos.

35 *Inteiros Bacanas – Solução*

a) Os números 31 e 32 são bacanas, pois

$$31 \rightarrow 10 \rightarrow 1.$$

e

$$32 \rightarrow 13 \rightarrow 10 \rightarrow 1.$$

b) Considere os números

$$A = \underbrace{111 \dots 11}_{31 \text{ uns}} \underbrace{000 \dots 00}_{n-31 \text{ zeros}} \text{ e } B = \underbrace{111 \dots 11}_{31 \text{ uns}} \underbrace{000 \dots 00}_{n-32 \text{ zeros}} 1.$$

Note que A e B são números bacanas consecutivos, pois

$$A \rightarrow 31 \rightarrow 10 \rightarrow 1.$$

e

$$B \rightarrow 32 \rightarrow 13 \rightarrow 10 \rightarrow 1.$$

36 *Conflitos no Planeta X*

No planeta X , existem 100 países alienígenas com conflitos entre si. Para evitar uma guerra mundial, esses países se organizam em grupos de alianças militares para proteção mútua. Sabemos que as alianças seguem as seguintes regras:

- 1) Nenhuma aliança contém mais de 50 países.
 - 2) Quaisquer dois países pertencem a pelo menos uma aliança.
- a) É possível que um país participe de menos de três alianças militares?
- b) Qual é o menor número possível de alianças para que essas duas condições sejam satisfeitas?

36 *Conflitos no Planeta X – Solução*

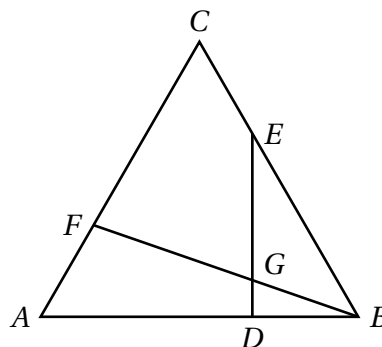
- a) Não é possível. Suponha que o país A pertence a no máximo duas alianças. Nesse caso, como cada aliança tem no máximo 50 países, o país A é membro de uma mesma aliança com no máximo $49 + 49 = 98$ países. Como existem 99 países distintos de A , pelo menos um deles não estará em uma aliança com A e isso gera um conflito com a regra (2).

- b) Como cada país participa de pelo menos 3 alianças, se somarmos as quantidades de participações de todos os países em todas as alianças obteremos pelo menos o número $3 \cdot 100 = 300$. Por outro lado, cada aliança contabiliza no máximo 50 participações. Assim, o número mínimo de alianças não pode ser menor do que $\frac{300}{50} = 6$. Para verificarmos que esse número é realmente o menor possível, basta exibirmos um exemplo de configuração em que ele é atingido. Divida os 100 países em 4 grupos de 25 países: A, B, C, D . Agora, forme as alianças de 50 países constituídas por todas as 6 combinações de dois desses grupos:

$$A \cup B, A \cup C, A \cup D, B \cup C, B \cup D \text{ e } C \cup D.$$

37 Segmentos no Triângulo Equilátero

No desenho ao lado, o triângulo ABC é equilátero e $BD = CE = AF = \frac{AB}{3}$. A razão $\frac{EG}{GD}$ pode ser escrita na forma $\frac{m}{n}$, $\text{mdc}(m, n) = 1$. Quanto vale $m + n$?



37 Segmentos no Triângulo Equilátero – Solução

Veja que $\frac{EG}{GD} = \frac{[EBG]}{[BGD]}$. Agora, $\frac{[EBG]}{[BCF]} = \frac{\frac{1}{2}EB \cdot BG \cdot \sin(\angle EBG)}{\frac{1}{2}BC \cdot BF \cdot \sin(\angle CBF)}$. Como $\angle EBG = \angle CBF$, temos

$$\frac{[EBG]}{[BCF]} = \frac{EB \cdot BG}{BC \cdot BF}. \quad (1)$$

Analogamente,

$$\frac{[BGD]}{[ABF]} = \frac{BG \cdot BD}{BA \cdot BF}. \quad (2)$$

Dividindo (1) por (2), obtemos $\frac{[EBG]}{[BGD]} \cdot \frac{[ABF]}{[BCF]} = \frac{EB \cdot BA}{BC \cdot BD}$. Finalmente, como $\frac{[ABF]}{[BCF]} = \frac{AF}{CF} = \frac{1}{2}$, temos

$$\frac{[EBG]}{[BGD]} = \frac{EB \cdot BA \cdot CF}{BC \cdot BD \cdot AF} = \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot 2 = 4.$$

Logo, $\frac{EG}{GD} = \frac{4}{1}$ e, portanto, $m + n = 5$.

38 *As Equações com Cubos*

Lembrando que

$$\begin{aligned}(a + b + c)^3 &= a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3ab^2 + \\ &+ 3ac^2 + 3a^2c + 3b^2c + 3bc^2 + 6abc.\end{aligned}$$

Encontre as soluções do sistema de equações

$$\begin{aligned}a^3 + 3ab^2 + 3ac^2 - 6abc &= 1 \\ b^3 + 3ba^2 + 3bc^2 - 6abc &= 1 \\ c^3 + 3ca^2 + 3cb^2 - 6abc &= 1\end{aligned}$$

38 *As Equações com Cubos – Solução*

Sejam $A = a^3 + 3ab^2 + 3ac^2 - 6abc$, $B = b^3 + 3ba^2 + 3bc^2 - 6abc$ e $C = c^3 + 3ca^2 + 3cb^2 - 6abc$.
Usando a identidade algébrica mencionada no enunciado, temos

$$\begin{aligned}-A + B + C &= (-a + b + c)^3 \\ A - B + C &= (a - b + c)^3 \\ A + B - C &= (a + b - c)^3.\end{aligned}$$

Como $A = B = C = 1$, segue que

$$\begin{aligned}(-a + b + c)^3 &= 1 \\ (a - b + c)^3 &= 1 \\ (a + b - c)^3 &= 1.\end{aligned}$$

Portanto

$$-a + b + c = a - b + c = a + b - c = 1.$$

De $2 = (-a + b + c) + (a - b + c) = 2c$, segue que $c = 1$. De forma semelhante, podemos concluir que $a = b = 1$ e que $(a, b, c) = (1, 1, 1)$ é a única solução do sistema.

39 Castelo no Tabuleiro

Em um tabuleiro 7×7 , dizemos que 4 casas assinaladas com X formam um *castelo* se elas são vértices de um retângulo com lados paralelos aos do tabuleiro, como indicado na figura a seguir:

				X		X
				X		X

- Marque 21 casas com X no tabuleiro 7×7 sem que exista qualquer castelo entre elas.
- Verifique que para qualquer escolha de 22 casas com X sempre existirá um castelo.

39 Castelo no Tabuleiro – Solução

- Um exemplo é o que está na seguinte figura a seguir.

X	X		X			
	X	X		X		
		X	X		X	
			X	X		X
X				X	X	
	X				X	X
X		X				X

- b) Se existem 22 casas com um X , como há apenas 7 linhas, pelo menos uma delas terá 4 casas marcadas com X . Permutando linhas ou colunas do tabuleiro, nenhum castelo será criado ou destruído. Assim, podemos supor que a linha que contém as 4 casas marcadas é a primeira e que eles estão nas primeiras 4 colunas, como indicado na figura a seguir.

X	X	X	X			

Podemos agora analisar duas situações distintas.

- 1) Suponha que na primeira linha existem apenas 4 casas marcadas. Se em alguma linha restante das quatro colunas encontrarmos duas casas marcadas, teremos um castelo. Se isso não ocorre, nas primeiras 4 colunas teremos no máximo $4 + 6$ casas marcadas e, conseqüentemente, pelo menos $22 - 10 = 12$ casas com X devem ser dispostas nas últimas 3 colunas. Isso garante que uma delas terá pelo menos 4 casas marcadas. Novamente após permutar linhas e colunas, podemos supor que essas 4 casas marcadas estão na quinta coluna como indicado na figura abaixo:

X	X	X	X			
				X		
				X		
				X		
				X		

Para que não exista castelo, na região pontilhada pode existir no máximo mais uma casa marcada em cada uma das duas últimas colunas. Assim, essa região terá no máximo $4 + 2 = 6$ casas com X . Como nas últimas 3 colunas existem 12 casas marcadas, no retângulo tracejado devemos ter pelo menos $12 - 6 = 6$ casas marcadas e assim, inevitavelmente, teremos um castelo. Portanto, se na primeira linha existem exatamente 4 casas marcadas, sempre teremos um castelo.

- 2) Suponha que na primeira linha existem mais de 4 casas marcadas e que essas casas estão nas primeiras 5 colunas. Como discutido anteriormente, se alguma linha restante das cinco primeiras colunas possuir mais de uma casa marcada, teremos um castelo. Se isso não ocorre, nas primeiras 5 colunas teremos no máximo $5 + 6$ casas marcadas e, conseqüentemente, pelo menos $22 - 11 = 11$ casas com X devem ser dispostas nas últimas 2 colunas. Isso garante que uma delas terá pelo menos 6 casas marcadas. Novamente, após permutar linhas e colunas, podemos supor que 5 dessas casas marcadas estão na sexta coluna como indicado na figura abaixo:

X	X	X	X	X		
					X	
					X	
					X	
					X	
					X	

Para que não exista castelo, na região pontilhada pode existir no máximo mais uma casa marcada na última coluna. Assim, essa região terá no máximo $5 + 1 = 6$ casas com X . Como nas últimas 2 colunas existem 11 casas marcadas, nos dois retângulos tracejados devemos ter pelo menos $11 - 6 = 5$ casas marcadas. Mas isso é um absurdo, pois nesses retângulos temos apenas 4 casas. Esse absurdo mostra que sempre teremos um castelo também nesse caso.

40 Os Números da Lousa

Os 2020 números

$$1 \cdot 2, 2 \cdot 3, 3 \cdot 4, \dots, 2020 \cdot 2021$$

são escritos na lousa. Um movimento consiste em escolher três números a, b, c escritos na lousa, apagá-los e escrever na lousa o número

$$\frac{abc}{ab + bc + ac}$$

a) Verifique que

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \left(\frac{abc}{ab + bc + ac} \right)^{-1}.$$

b) Usando

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

encontre o valor da soma

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{2020 \cdot 2021}.$$

c) Após 1009 movimentos, sobram dois números na lousa. Prove que se um deles é $4/3$, o outro é maior do que 4.

40 Os Números da Lousa – Solução

a) Note que

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} &= \frac{bc + ac + ab}{abc} \\ &= \left(\frac{abc}{ab + bc + ac} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

b) Em virtude da identidade sugerida, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{2020 \cdot 2021} &= \\ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2020} - \frac{1}{2021} \right) &= \\ \frac{1}{1} - \frac{1}{2021} &= \frac{2020}{2021}. \end{aligned}$$

c) Pelo item anterior, a qualquer momento, a soma dos inversos dos números escritos na lousa é sempre a mesma. No final, se restam apenas os números x e $4/3$, temos

$$\frac{1}{x} + \frac{3}{4} = \frac{2020}{2021} < 1.$$

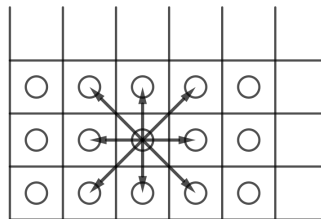
Daí

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} &< 1 - \frac{3}{4} \\ &= 1/4, \end{aligned}$$

Ou seja, $x > 4$.

41 *Os Competidores no Salão*

Em uma competição, os competidores ocupam todos os lugares de um salão retangular onde os assentos estão organizados em filas e colunas de tal modo que há mais de duas filas e em cada fila há mais de dois assentos. Em um dado momento, esses competidores recebem a ordem de cumprimentarem com um aperto de mão apenas os seus vizinhos diretos no salão, isto é, quem está na sua esquerda, direita, na frente, atrás e em diagonal.



Alguém percebeu que foram dados 1020 apertos de mãos. Seja n o número de filas e m a quantidade de lugares de cada fila.

- Quais são as possíveis quantidades de apertos de mão que cada competidor do salão pode ter dado?
- Para cada uma das quantidades x descritas no item anterior, calcule quantos competidores deram x apertos de mão.
- Determine o número de competidores que estavam no salão.

41 *Os Competidores no Salão – Solução*

- Um competidor que sentou em um dos 4 cantos do salão deu 3 apertos de mão. Se um competidor sentou em algum dos 4 bordos, mas sem estar posicionado nos cantos, ele deu 5 apertos de mão. Finalmente, se um competidor sentou no interior do salão, ele deu 8 apertos de mão.

A figura a seguir ilustra essas possibilidades.

	m		
	3	5	3
n	5	8	5
	3	5	3

- b) Existem 4 pessoas que apertaram a mão de 3 pessoas, $2(n-2) + 2(m-2)$ pessoas que apertaram a mão de 5 pessoas e $(n-2)(m-2)$ pessoas que apertaram a mão de 8 pessoas.
- c) Multiplicando a quantidade de pessoas do item anterior pelos apertos de mão correspondentes, teremos contado cada um deles duas vezes, portanto

$$\begin{aligned} 8 \cdot (n-2)(m-2) + 5 \cdot [2(n-2) + 2(m-2)] + 3 \cdot 4 &= 2 \cdot 1020 \\ 8mn - 6n - 6m &= 2036. \end{aligned}$$

Daí $m = \frac{1018+3n}{4n-3}$. Para que m seja inteiro, $4n-3$ deve dividir $1018+3n$ e consequentemente $4n-3$ deve dividir $4(1018+3n) = 3(4n-3) + 4081$. Como $4n-3$ divide $3(4n-3)$, segue que $4n-3$ divide $4081 = 7 \cdot 11 \cdot 53$. Os divisores de 4081 são 1, 7, 11, 53, 77, 371, 583 e 4081. Note que $4n-3$ deixa resto 1 na divisão por 4 e, dessa lista de divisores, os únicos que podem ser iguais a $4n-3$ são: 1, 53, 77 e 4081. Se

$$\begin{aligned} 4n-3 &= 1 \Rightarrow n=1; \\ 4n-3 &= 53 \Rightarrow n=14; \\ 4n-3 &= 77 \Rightarrow n=20; \\ 4n-3 &= 4081 \Rightarrow n=1021. \end{aligned}$$

O primeiro e o quarto caso não são admissíveis, pois há mais de duas filas e em cada fila há mais de dois assentos. Assim $n=14$ e $m = \frac{1018+3 \cdot 14}{4 \cdot 14-3} = 20$ ou então $n=20$ e $m = \frac{1018+3 \cdot 20}{4 \cdot 20-3} = 14$. Portanto, estavam no salão $m \cdot n = 280$ competidores.

Nível 1

A Adivinhação do Número de Pedras, 23, 86
A Professora Célia – Solução, 82
A Professora Célia, 21, 81
Baralho Soma – Solução, 63
Baralho Soma, 12, 62
Batalha de Vírus – Solução, 83
Batalha de Vírus, 22, 83
Círculo de Alunos – Solução, 70
Círculo de Alunos, 16, 70
Calculadora Maluca – Solução, 66
Calculadora Maluca, 14, 66
Cartões Numerados, 22, 82
Cobrindo o Tabuleiro com Dominós, 24, 88
Cobrindo o Tabuleiro, 11, 61
Cooperativa Agrícola – Solução, 76
Cooperativa Agrícola, 18, 75
Dardos Certeiros – Solução, 64
Dardos Certeiros, 13, 63
Divisão do Terreno – Solução, 67
Divisão do Terreno, 14, 67
Dobrando Papéis – Solução, 81
Dobrando Papéis, 20, 80
Gincana na Escola – Solução, 68
Gincana na Escola, 15, 67
Ladrões que roubam ladrões, 23, 87
Laranjas e Maçãs – Solução, 66
Laranjas e Maçãs, 14, 65
Meninos e Meninas na Sala de Aula – Solução, 69

Meninos e Meninas na Sala de Aula, 15, 69
Misturando Líquidos – Solução, 69
Misturando Líquidos, 15, 69
Moedas na Mesa, 15, 68
Números na Poligonal, 24, 89, 90
Números no Tabuleiro, 19, 77
O Número de Zeros, 11, 62
Operações no Tabuleiro, 22, 84
Os Triângulos Equiláteros, 23, 85, 86
Passeio de Casais – Solução, 71
Passeio de Casais, 16, 70
Pintando Bolinhas na OBMEP – Solução, 72
Pintando Bolinhas na OBMEP, 16, 72
Professor Piraldo – Solução, 91
Professor Piraldo, 25, 90
Sequências Numéricas – Solução, 79
Sequências Numéricas, 19, 78
Solução, 68
Área no Quadriculado – Solução, 74
Área no Quadriculado, 17, 73

Nível 2

A Calculadora MK – 2020, 36, 120, 121
A Loja de Chocolates, 37, 122
Analisando Números – Solução, 110
Analisando Números, 32, 110
Apagando Números – Solução, 116
Apagando Números, 35, 116
As Diagonais do Quadrilátero, 38, 125, 126
Bandeira Bicolor – Solução, 115

Bandeira Bicolor, 34, 115
Bissetrizes Internas – Solução, 105
Bissetrizes Internas, 30, 104
Cortando o Cubo – Solução, 108
Cortando o Cubo, 31, 107
Dado Geográfico – Solução, 111
Dado Geográfico, 32, 110
Dividindo Áreas – Solução, 76
Dividindo Áreas, 18, 76
Escoteiro Explorador – Solução, 106
Escoteiro Explorador, 31, 106
Expressão no Quadro, 28, 94, 95
Fichas no Tabuleiro – Solução, 113
Fichas no Tabuleiro, 34, 113
Fotos com Familiares, 35, 117
Jogo na Lousa – Solução, 112
Jogo na Lousa, 33, 111
Números com 5 Algarismos, 29, 101
Números de Telefones Legais, 37, 123, 124
Nem Todos Passaram, 28, 95, 96
O Ângulo Desconhecido, 39, 128
Os Sapatos e as Meias da Aranha, 37, 124
Os Triângulos Equiláteros, 36, 120
Os Ângulos entre Quadrados, 38, 126, 127
Pontos Coloridos – Solução, 116
Pontos Coloridos, 35, 116
Pontos Equilegais, 27, 93, 94
Potências Perfeitas, 35, 119
Quadrilátero, mas não um Qualquer, 29, 100
Reunião de Matemáticos – Solução, 102
Reunião de Matemáticos, 29, 102
Soma da Quarta dos Inversos – Solução, 103
Soma da Quarta dos Inversos, 30, 103
Tabuleiro Mágico – Solução, 109
Tabuleiro Mágico, 32, 108
Triângulos Isósceles – Solução, 103
Triângulos Isósceles, 29, 39, 102, 128
Um Quociente Fatorial, 36, 121

Nível 3

A Altura e o Ponto Médio, 51, 155
A Circunferência e o Quadrado, 49, 149, 150
A Equação Cúbica, 48, 148
A Equação com Radicais, 41, 129
A Função Exponencial, 52, 157
A Função Ímpar, 51, 153, 154
A Função de Inteiros, 53, 160
A Sequência e os Quadrados, 46, 143
A Soma Trigonométrica, 42, 131
A Área do Quadrado, 44, 136, 137
A função exponencial, 157
As Diferenças entre os Inteiros, 54, 161
As Equações com Cubos, 56, 166
Castelo no Tabuleiro, 57, 167
Conflitos no Planeta X, 55, 164
Embaralhamento de Cartões, 46, 142
Equação com Números Irracionais, 47, 145, 146
Inteiros Bacanas, 55, 163, 164
Números Parentes, 53, 159
O Ponto no Interior do Quadrado, 42, 132
O Quadrado Inscrito na Circunferência, 52, 155, 156
O Retângulo e as Perpendiculares, 49, 150, 151
O Retângulo e o Semicírculo, 53, 158
O Semicírculo e os Triângulos, 45, 139
O Sistema com Cubos, 42, 130, 131
O Trapézio e os Pontos Médios, 41, 130
O Triângulo Inscrito na Circunferência, 48, 147
O Triângulo e o seu Incírculo, 47, 144, 145
O Ângulo no Triângulo, 50, 152
Os Armários da Escola, 54, 161
Os Clubes de Alunos I, 46, 140, 141
Os Competidores no Salão, 59, 171
Os Números da Lousa, 58, 169, 170
Peças Deslizantes, 44, 135
Perpendiculares no Paralelogramo, 43, 133

Ponto Médio Lembra Base Média, 51,
153

Preenchimento do Tabuleiro, 45, 138

Produtos e a Sequência de Fibonacci,
50, 151

Progressões Geométricas, 46, 142

Prolongamentos dos Lados, 43, 134

Retas Tangentes às Circunferências, 54,
162

Segmentos no Triângulo Equilátero, 56,
165