Organização
das Nações Unidas
para a Educação,
a Ciência e a Cultura

Sob o patrocínio
da **UNESCO**

2019 | ANO INTERNACIONAL DAS
Línguas Indígenas

APOIO

CAPES

CNPq
Conselho Nacional de Desenvolvimento
Científico e Tecnológico

SBM

REALIZAÇÃO

impa

MINISTÉRIO DA
CIÊNCIA, TECNOLOGIA,
INOVAÇÕES E COMUNICAÇÕES

MINISTÉRIO DA
EDUCAÇÃO

PÁTRIA AMADA
BRASIL
GOVERNO FEDERAL

OBMEP – Banco de Questões 2019

Cleber Assis e Samuel Feitosa

Banco de Questões 2019

Estrada Dona Castorina, 110 – Rio de Janeiro – 22460-320

Impresso no Brasil/Printed in Brazil
Primeira edição e impressão

Texto e diagramação: Cleber Assis e Samuel Feitosa

Revisão: Elisa Sankuevitz

Este livro foi escrito usando o sistema LaTeX.

Capa: Sérgio R. Vaz

IMPA/OBMEP
Banco de Questões 2019
Rio de Janeiro, IMPA, 2019
168 páginas
ISBN 978-85-244-0467-2

Distribuição
IMPA/OBMEP
Estrada Dona Castorina, 110
22460-320 Rio de Janeiro, RJ
e-mail: contato@obmep.org.br
www.obmep.org.br

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

Desde a sua primeira edição, em 2005, a OBMEP envia a todas as escolas públicas do país um Banco de Questões com problemas e desafios de Matemática para alunos e professores. O Banco pretende despertar o prazer pela Matemática, estimular o aluno interessado com perguntas instigantes e proporcionar um treinamento para as provas da OBMEP.

Os problemas deste ano, concebidos pelos professores Cleber Assis e Samuel Feitosa, estão ordenados em grau crescente de dificuldade e exigem mais imaginação do que uma boa educação em Matemática.

A edição deste ano do Banco de Questões e todas as edições anteriores estão disponíveis na página `www.obmep.org.br`, assim como as apostilas e o material didático utilizado no Programa de Iniciação Científica Junior.

Caso encontre alguma solução diferente daquela apresentada ao final do Banco de Questões, não deixe de mandá-la para

`bancodequestoes@obmep.org.br`.

As mais originais serão publicadas na página da OBMEP.

Boa diversão!
Claudio Landim
Coordenador-Geral da OBMEP

PREFÁCIO

Querido leitor/leitora,

O Banco de Questões deste ano da OBMEP – Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas – segue o mesmo padrão do banco do ano passado. Para facilitar a busca de questões em meio ao livro, há um Sumário no início e um Índice Remissivo no final com os nomes dos problemas e respectivas páginas onde aparecem seus enunciados e soluções. Além disto, as questões do Nível 1 são numeradas como $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$ etc. As questões do Nível 2 são numeradas como $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$ etc. E as questões do Nível 3 são numeradas como $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$ etc.

Muitos dos problemas podem resistir às primeiras investidas do leitor e isto não deve ser motivo de desânimo. Um bom conselho é discuti-los com outras pessoas. Isto certamente tornará a experiência de resolvê-los ainda mais prazerosa. Além disto, durante a leitura das soluções, o uso do papel e da caneta podem ser bons instrumentos para a compreensão de todos os detalhes envolvidos.

Alguns dos problemas deste banco foram inspirados em clássicos problemas de olimpíadas ao redor do mundo e hoje constituem um tipo de conhecimento folclórico que todo estudante e professor interessado em competições deve ter contato. Não podemos deixar de manifestar um enorme agradecimento a todos os professores, geralmente anônimos, que dedicam um enorme tempo de suas vidas elaborando belos problemas de olimpíadas e que tanto nos estimulam a aprender mais Matemática.

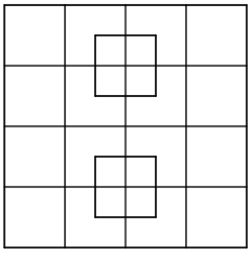
Bom proveito!

Cleber Assis e Samuel Feitosa

NÍVEL 1

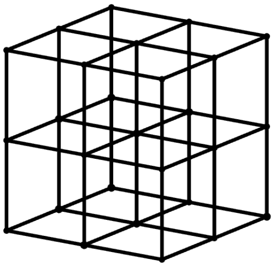
1 *O número de quadrados*

Determine o número de quadrados na figura abaixo.



2 *Cubo de arame*

Na figura a seguir, temos um cubo $2 \times 2 \times 2$ feito com pedaços de arame. A aresta de cada cubo é um pedaço de $1\,cm$ de arame e ao todo foram usados 54 desses pedaços. Para fazer um cubo $10 \times 10 \times 10$, quantos pedaços de arame serão utilizados?



3 *A média aritmética*

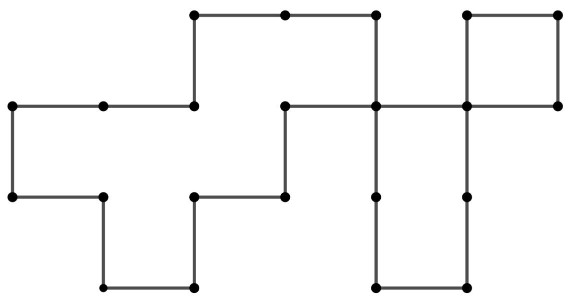
A média aritmética de uma lista de números é a soma deles dividida pela quantidade de elementos da lista. Por exemplo, a média aritmética da lista 3, 3, 4, 5 e 10 é

$$\frac{3+3+4+5+10}{5} = 5.$$

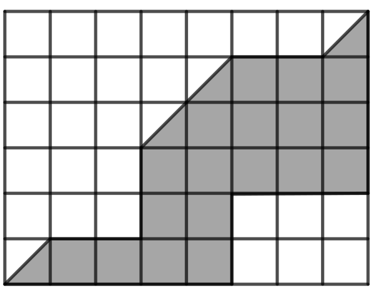
A média aritmética de 5 inteiros positivos **distintos** é igual a 11. Qual é o maior valor possível de um número dessa lista?

4 *Qual a área da figura?*

a) Na figura a seguir, cada segmento mede $3\,cm$. Qual a área da figura?



b) Na figura abaixo, cada quadradinho do reticulado tem área de $1\,cm^2$. Determine a área do polígono sombreado.

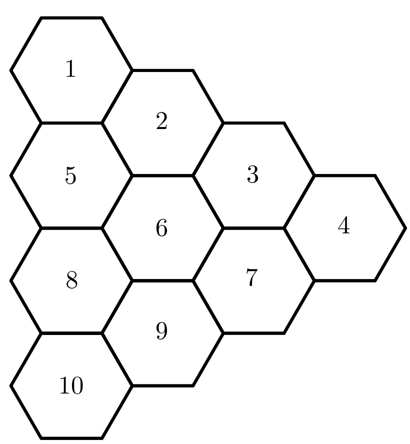


5 *Os cachorros e os passarinhos*

Três cachorros precisam de 7 horas para cavarem nove buracos. Cinco passarinhos gastam 40 minutos para construírem dois ninhos. Mantendo-se essas taxas, quantos minutos a mais um cachorro leva para cavar um buraco do que um passarinho leva para construir um ninho?

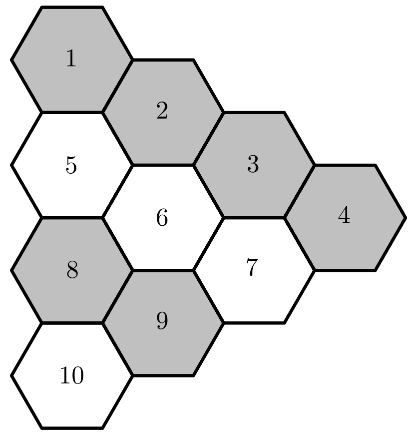
6 *Painel de luzes*

A figura a seguir é um painel de luzes que acendem ou apagam dependendo da tecla tocada (na figura todas as luzes estão acesas). Cada vez que uma tecla é tocada, todas as outras teclas que possuem um lado comum a ela apagam, se estiverem acesas (quando estão brancas), ou acendem, se estiverem apagadas (quando estão cinza).

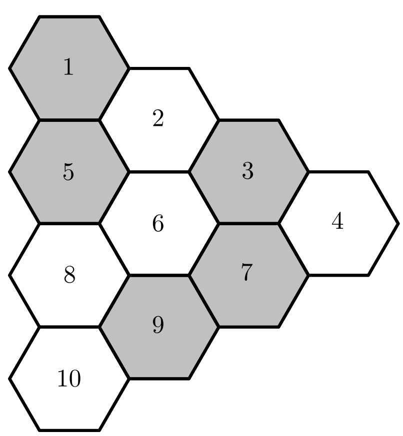


a) Se todas as teclas estão acesas e apertarmos uma única vez as teclas 1, 4, 7 e 10, quais teclas ficarão acesas?

b) Na configuração abaixo, quais teclas devem ser apertadas para que todas as luzes fiquem acesas?



c) Na configuração abaixo, existe uma sequência de teclas apertadas para que todas as teclas fiquem acesas?



7 *Mesa da família Naldo*

Em uma mesa circular estão sentadas 5 pessoas: Arnaldo, Bernaldo, Cernaldo, Dernaldo e Ernaldo, cada um em uma cadeira. Analisando no sentido horário, temos:

I. Entre Arnaldo e Bernaldo existe 1 cadeira vazia;

II. Entre Bernaldo e Cernaldo são 5 cadeiras;

III. Entre Dernaldo e Ernaldo são 4 cadeiras, quase todas vazias;

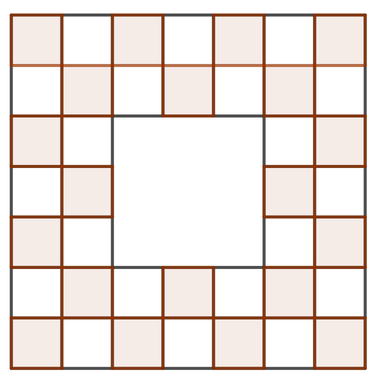
IV. Entre Dernaldo e Cernaldo são 2 cadeiras;

V. Entre Ernaldo e Bernaldo são 3 cadeiras, nem todas vazias.

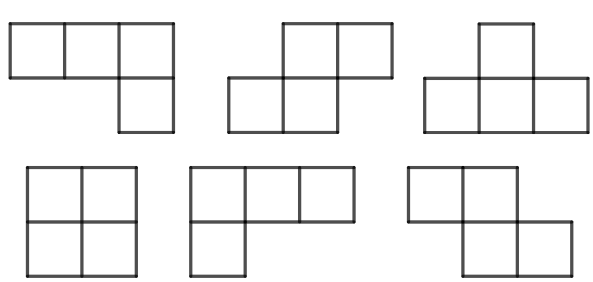
Quantas cadeiras possuem ao redor da mesa?

8 *Quebra-cabeça furado*

Joana ganhou um quebra-cabeça com um tabuleiro, como o da figura abaixo.



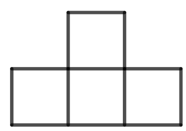
Este tabuleiro deve ser completamente preenchido com peças como as da figura abaixo, de forma que não pode haver sobreposição de peças e cada peça preencha exatamente quatro quadradinhos do tabuleiro.



a) Quantas peças são necessárias para preencher o tabuleiro?

b) Preencha o tabuleiro utilizando as peças que julgar necessário (pode utilizar de um único tipo de peça até todos os tipos).

c) É possível preenchê-lo utilizando, exatamente, uma peça como a da figura abaixo e as demais dos outros tipos de peça?



9 *Fruteira de Angélica*

Na fruteira de Angélica existem 12 bananas, 1 abacaxi, 4 laranjas, 2 mangas e 3 mamões. O peso de 1 abacaxi é o mesmo que o peso de 1 laranja, 1 manga e 1 mamão, juntos; o peso de 1 banana é a metade do peso de 1 mamão; 4 bananas pesam o mesmo que 1 laranja e 1 manga, juntas; e 1 manga pesa 100 g a mais que 1 laranja. Se 1 abacaxi pesa 600 g, então:

a) Quanto pesam todas as frutas da fruteira de Angélica?

b) De quantas maneiras Pedro, neto de Angélica, pode escolher 2 frutas diferentes para tomar seu café da manhã, utilizando as frutas da fruteira?

c) Quantas vitaminas podem ser feitas com estas frutas, usando 600 g de frutas? (É permitido utilizar frutas repetidas, mas apenas quantidades inteiras de frutas)

10 *O quarto de Jack*

O quarto de Jack tem 27 m^2 de área de parede e teto. Para pintá-lo, Jack pode usar 1 lata de tinta, mas sobraria 1 litro de tinta, ou 5 galões de tinta, mas que também sobraria 1 litro, ou ainda 4 galões mais $2,8$ litros de tinta.

a) Qual a razão entre o volume de uma lata e o volume de um galão?

b) Qual o volume de um galão?

c) Qual a área de tinta que Jack consegue pintar com 1 litro de tinta, ou seja, qual o rendimento da tinta?

11 *As tintas do M. A. Luco*

O cientista M. A. Luco possui 3 substâncias líquidas, sendo uma verde, uma azul e uma rosa, todas com $100\,ml$ e cada uma em um recipiente (substância verde no recipiente V, substância azul no recipiente A e substância R no recipiente rosa). Em uma de suas experiência o famoso cientista passa $20\,ml$ do recipiente V para o recipiente A; depois, $20\,ml$ de A para R; e, por fim, $20\,ml$ de R para V. Em cada passagem que é feita, os líquidos são misturados. Ao final do experimento, quanto de líquido verde haverá no recipiente V?

12 *A calculadora maluca*

A calculadora maluca possui, além dos botões com os 10 algarismos, quatro superbotões:

☼	☺	♫	⋈

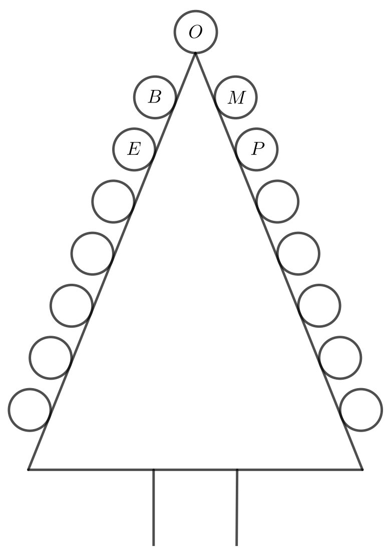
Quando a tecla ☼ é apertada, o número do visor é multiplicado por 2; a tecla ☺ soma todos os algarismos do visor; a tecla ♫ divide o número do visor por 4 e mostra o resto desta divisão; e a tecla ⋈ soma 3 ao número do visor.

a) Com o número 1.234 no visor, Pedro apertou, na sequência, as teclas ☼, ☺, ♫, ⋈. Que número apareceu?

b) Pedro digitou o número 12.345 e as quatro teclas especiais uma única vez cada, aparecendo no visor o zero ao final. Determine uma possível sequência de teclas especiais.

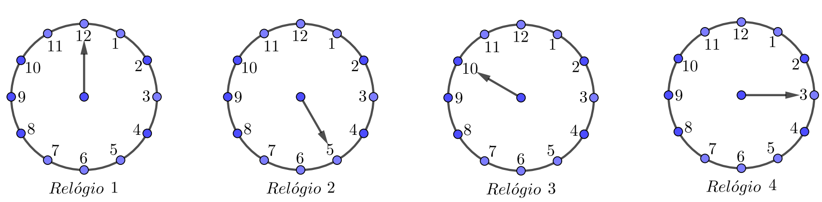
13 *Árvore de Natal*

Na árvore de natal da OBMEP devem ser penduradas letras em ambos os lados, além de uma no topo. As letras O e B pesam 300 g cada, as letras M e E pesam 200 g cada e a letra P pesa 100 g. Já foram colocadas 5 letras, como mostra a figura, mas ainda faltam duas de cada. Coloque estas 10 letras faltantes de maneira que a soma dos pesos das letras do lado esquerdo seja igual à soma dos pesos do lado direito.



14 1.000 *Relógios?*

A figura abaixo é o início de uma sequência lógica composta por 1.000 relógios.



a) O ponteiro do *Relógio* 5 aponta para qual número?

b) O ponteiro do *Relógio* 1.000 aponta para que número?

c) Perceba que de um *Relógio* para o seguinte o ponteiro (dos minutos) avança 25 minutos, mas o ponteiro das horas não vemos, pois ele é invisível. Supondo que no *Relógio* 1 sejam 12 horas em ponto, que horas são no *Relógio* 997?

15 *Divisibilidade por* 7

Uma maneira de verificar se um número é divisível por 7 é subtrair, do número formado pelos algarismos restantes após a retirada do algarismo das unidades, o dobro do algarismo das unidades, verificando se este número é divisível por 7. Por exemplo, 336 é divisível por 7, pois $33-2\cdot 6=21$ é divisível por 7, mas 418 não é pois, $41-2\cdot 8=25$ deixa resto 4 na divisão por 7.

a) Utilize este método para verificar se 4.578 é divisível por 7.

b) Se A e B são algarismos, quantos são os números de três algarismos do tipo $\overline{AB5}$ que são divisíveis por 7?

16 *Mário no mercado*

Mário comprou algumas guloseimas no mercado, sendo que 3 chocolates custavam o mesmo que 2 picolés e 2 pirulitos custavam o mesmo que 5 chocolates.

a) Mário resolveu voltar ao mercado com dinheiro para comprar exatamente 3 pirulitos, mas resolveu comprar picolés. Quantos picolés ele conseguiu comprar?

b) Se ele tivesse usado o dinheiro de 3 chocolates, 2 picolés e 2 pirulitos para comprar o máximo possível de guloseimas, quantas teria comprado?

17 *Marta e os números*

Marta escolheu um número de 3 algarismos diferentes não nulos e o multiplicou por 3. O resultado encontrado foi um número de 3 algarismos iguais ao algarismo da dezena do número escolhido. Qual o produto dos algarismos escolhidos por Marta?

18 *A sequência de Jonas*

Jonas escreveu uma sequência com os múltiplos positivos de 13 em ordem crescente.

$$1326395265\ldots$$

a) Qual o 2.019° algarismo da sequência de Jonas?

b) O número 2.019 aparecerá nesta sequência?

19 *Escola* 2.019

Uma escola tem 2.019 alunos. No final do ano, cada aluno recebeu um cartão com um número de 1 a 2.019. Os alunos receberam estes números em ordem alfabética: Abiel recebeu o cartão com o número 1; Adriana recebeu o cartão com o número 2; e assim por diante até Ziraldo, que recebeu o número 2.019.

a) Qual a soma dos números dos cartões dos alunos cuja inicial é F, se o primeiro deles, Fábio, tem o 219 e o último, Fuzano, tem o 271?

b) Escolhendo-se aleatoriamente 3 alunos e somando os números dos seus cartões, quantas são as possíveis somas?

c) Quantos alunos pegaram um cartão com um número cuja quantidade de divisores positivos é ímpar?

20 *O tabuleiro do Chaves*

Chaves pegou um tabuleiro e começou a escrever os números naturais positivos em suas casas seguindo uma sequência lógica, conforme a figura.

1	2	9	10	25	$\cdots$
4	3	8	11	24	$\cdots$
5	6	7	12	23	$\cdots$
16	15	14	13	22	$\cdots$
17	18	19	20	21	$\cdots$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	

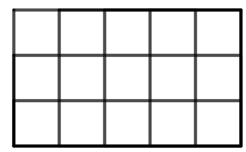
a) Qual a linha do número 2.019?

b) Se o tabuleiro for $10x10$, ou seja, for até o número 100 apenas, qual a soma dos números da $1^{\underline{a}}$ linha?

c) Se o tabuleiro for $n\ x\ n$, qual o último número da diagonal $(1, 3, 7, 13, \ldots)$?

21 *Linhas no tabuleiro*

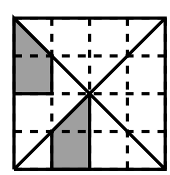
O tabuleiro com 15 quadradinhos a seguir é formado com 4 linhas horizontais e 6 linhas verticais.



Qual o número máximo de quadradinhos que podemos obter em um tabuleiro usando 21 linhas?

22 *Porcentagem da área*

Na figura a seguir, todos os quadradinhos do tabuleiro são iguais. Qual a porcentagem que a região pintada cobre do quadrado maior?



23 *Quadrado mágico I*

Em um quadrado mágico, a soma dos números em cada linha, coluna e diagonal é a mesma. No quadrado mágico abaixo, quanto vale $a+b+c$?

16	2	a
c	10	d
b	e	4

24 *O show de mágica*

Em um show de mágica, um mágico apresenta um baralho com 29 cartas, que estão numeradas de 1 a 29, e pede que um membro da plateia escolha duas delas. Em seguida, um assistente de palco do mágico escolhe duas cartas das 27 restantes e pede que um outro membro da plateia as leve para um segundo mágico que se encontra em outra sala. As duas cartas são apresentadas ao segundo mágico em uma ordem arbitrária. A partir de uma estratégia feita entre os mágicos e o assistente antes do show, o segundo mágico é sempre capaz de descobrir as duas cartas escolhidas pelo membro da plateia apenas olhando as cartas que ele recebe. Explique como eles podem fazer isso.

25 *Sopa da vovó*

Vovó fez uma sopa para que seus 5 netos a dividissem igualmente. Ângela e Daniela chegaram, dividiram a sopa igualmente em 5 pratos, tomaram cada uma a sua parte, devolveram o que sobrou na panela para não esfriar e foram brincar no parque. Laura, quando chegou, achou que era a primeira e dividiu a sopa em 5 pratos iguais, tomou um deles e devolveu o restante na panela. João, quando chegou, achou que apenas Laura havia tomado sua parte, dividiu-a em 4 pratos, tomou a sua parte e foi dormir. Quando Toni chegou, sabia que era o último e tomou todo o restante da sopa.

a) Que fração da sopa Laura tomou?

b) Quem foi que tomou mais sopa?

c) Se a sopa fosse dividida em potes de 100 ml, todos teriam tomado uma quantidade inteira de potes. Qual a menor quantidade possível de sopa que havia na panela?

26 *Ingressos para o parque*

Para entrar em um parque, um grupo com dois homens, quatro mulheres e três crianças pagou 226 reais, enquanto que um grupo com três homens, três mulheres e uma criança pagou 207 reais.

a) Quanto pagaria um grupo com 8 homens, 10 mulheres e 5 crianças para entrar no parque?

b) Se os valores dos ingressos são todos números naturais, quantos são os possíveis preços para os ingressos?

27 *SEQUENLADA*

Uma sequência numérica é chamada de SEQUENLADA quando, a partir do segundo número, o elemento seguinte é formado pelas regras:

I) se tem mais de 2 algarismos, passa-se o último algarismo para a $1^{\underline{a}}$ posição e depois soma-se os dois últimos algarismos;

II) se tem dois algarismos, soma-se estes 2 até obter 1 algarismo apenas.

A sequência termina quando chegamos em um número com apenas um algarismo. Um exemplo de uma SEQUENLADA é:

$$12.345 \to 5.127 \to 753 \to 312 \to 24 \to 6.$$

a) Escreva a SEQUENLADA que começa com 246.831.

b) Quantas SEQUENLADAS de três números terminam com 1?

28 *A fábrica de roupas*

O dono de uma fábrica de roupas é fanático por matemática e organiza seus produtos em pacotes cujo número de peças é um número primo. Por exemplo, as peças de roupas na cor verde, ele organiza em pacotes com 2 peças cada; as de cor azul, em pacotes com 3 peças cada; as de cor rosa, em pacotes com 5 peças cada; as de cor branca, em pacotes com 7 peças cada; e assim por diante. Em uma caixa grande, o dono da fábrica decide colocar apenas pacotes com cor verde, azul e rosa (podendo ter as três cores ou apenas uma, inclusive). Na caixa devem ter exatamente 20 peças. De quantas maneiras diferentes ele pode organizar esta caixa?

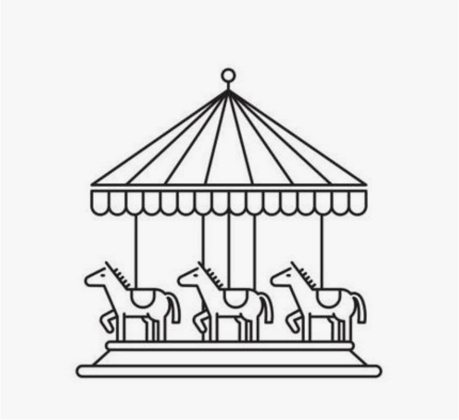
29 *A balança de dois pratos*

Existem 68 moedas em uma sacola, todas possuindo pesos diferentes. Descreva como encontrar a moeda mais pesada e a moeda mais leve, usando 100 pesagens em uma balança de dois pratos.

Observação: Em uma balança de dois pratos, colocam-se objetos sobre os pratos e descobre-se qual conjunto de objetos é mais pesado.

30 *As voltas do carrossel*

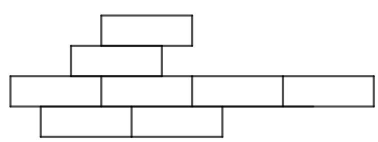
Ana brinca com seu carrossel elétrico todos os dias. Como ela é muito organizada, após brincar de rodar o seu carrossel, ela sempre o deixa na mesma posição inicial daquele dia. Todas as noites seus três irmãos menores acordam e também brincam com ele. Seu irmão João sempre dá $1/7$ de uma volta completa em cada movimento. Seu outro irmão Pedro sempre dá $1/9$ de uma volta completa em cada movimento. Finalmente, seu irmão José sempre dá $1/32$ de uma volta completa em cada movimento. Cada um pode movimentar o carrossel quantas vezes quiser. Em quantas posições diferentes Ana pode encontrar o carrossel ao acordar?



NÍVEL 2

1 *O perímetro do retângulo*

Na figura a seguir, todos os retângulos são iguais e possuem o perímetro de $8\,cm$. Qual o perímetro total da figura?



2 *Número TOP*

Um número é dito TOP se possui 5 algarismos e quando o produto do 1° ao 5° é a soma do 2°, 3° e 4°. Por exemplo, 12.338 é TOP, pois possui 5 algarismos e $1 \cdot 8 = 2 + 3 + 3$.

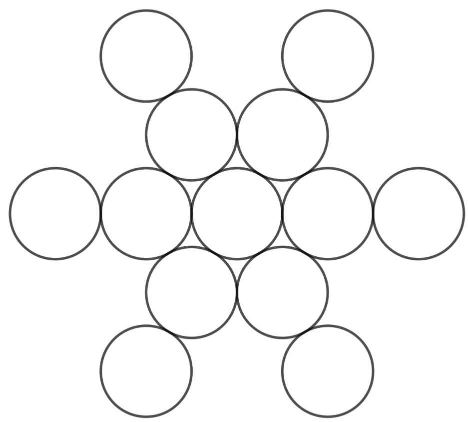
a) Qual o valor de a para que $23.4a8$ seja TOP?

b) Quantos números TOP terminam com 2 e começam com 1?

c) Quantos números TOP começam com 9?

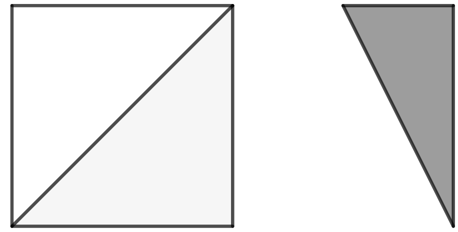
3 *O floco de neve*

Cada um dos números de 1 a 13 está escrito em um dos círculos do floco de neve da figura a seguir, de modo que as somas dos 5 números em cada linha e a soma dos 7 números no centro da figura sejam todas iguais. Encontre essa soma dado que ela é a menor possível dentre as que satisfazem essas condições.



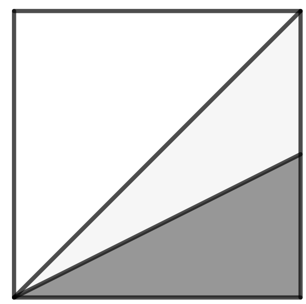
4 *Quadrado de triângulos e triângulo*

Na figura a seguir, temos um quadrado dividido em dois triângulos congruentes e um triângulo retângulo cujo cateto maior tem a mesma medida do lado do quadrado e o cateto menor tem a metade da medida do lado do quadrado.

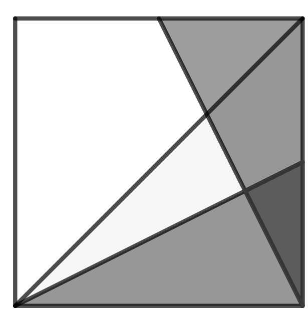


Se a área do quadrado é $4k$, determine:

a) A área em cinza claro da figura abaixo.



b) A área em cinza escuro da figura abaixo.



$\boxed{5}$ ***Inteiros no quadro***

Inicialmente, o número 1 e dois números positivos x e y estão escritos em um quadro negro. Em cada movimento, um jogador pode escolher dois números sobre o quadro, não necessariamente distintos, e escrever a sua soma ou a sua diferença no quadro. Também podemos escolher um número não nulo no quadro e escrever o seu inverso. Após um número finito de movimentos, descreva como podemos obter os seguintes números:

a) x^2.

b) xy.

6 *Paralelepípedo de cubinhos*

Um paralelepípedo deve ser construído com a sobreposição de cubinhos de 1 cm de medida de aresta, sendo seu comprimento composto por n cubinhos, sua largura, por p cubinhos e sua altura por q cubinhos.

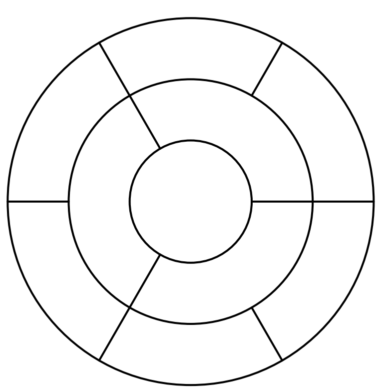
a) Qual o volume do paralelepípedo?

b) Pintando as faces do paralelepípedo de vermelho, quantos cubinhos terão apenas uma de suas faces pintada de vermelho?

c) Tomando um paralelepípedo, como o do enunciado, de forma que $n = p = q$. Se aumentarmos cada uma de suas dimensões em a, sendo a um número natural, o novo cubo passa a ter 98 cubinhos a mais que o cubo inicial. Quais os valores de n e a?

7 *Acerte o alvo*

A figura abaixo indica um alvo em uma parede que está fixo e não pode ser rotacionado. Ele está dividido em 10 partes, divididas em um círculo central, um anel menor e um anel maior (externo). Devemos distribuir os números de 1 a 10, um em cada parte, que serão correspondentes às pontuações obtidas ao acertar cada parte.



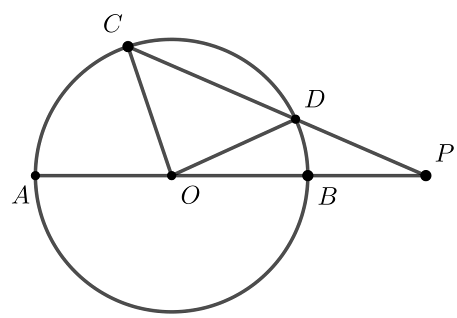
a) De quantas maneiras podemos distribuir os números nas partes do alvo?

b) De quantas maneiras podemos distribuir os números de forma que números mais próximos do centro não possam ser menores que números mais distantes do centro?

c) De quantas maneiras podemos distribuir os números de maneira que a soma dos números no anel externo seja igual à soma dos números do anel menor?

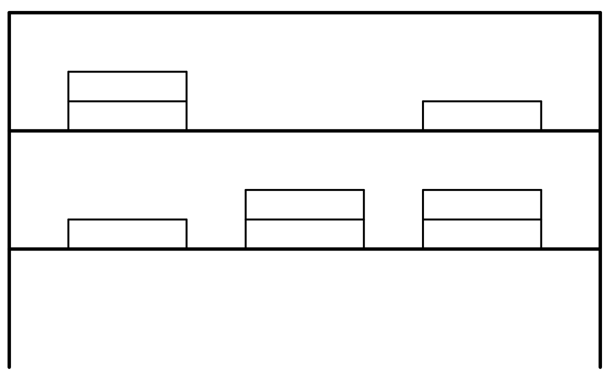
$\boxed{8}$ *A reta secante*

O segmento AB de comprimento $16\,cm$ é diâmetro de um círculo de centro O. Uma reta secante corta o círculo em C e D e a reta AB em P, como indica a figura a seguir. Se $OD = DP$ e $\angle APC = 18°$, qual o valor do ângulo $\angle AOC$?



$\boxed{9}$ *Jogo da prateleira*

A figura abaixo representa uma estante com duas prateleiras com cinco pilhas de livros, sendo três delas com dois livros e duas delas com apenas um livro. Alice e Luiz inventaram um jogo no qual cada um deles, alternadamente, retira um ou dois livros de uma das pilhas de livros. Vence aquele que tirar o último livro. Alice começa o desafio. Qual deles tem uma estratégia vencedora, quaisquer que sejam as jogadas do adversário?

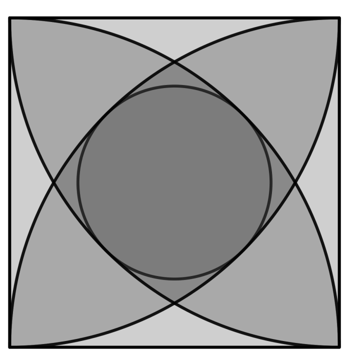


10 *Supercortador de grama*

Uma máquina de cortar grama mais eficiente está sendo desenvolvida. Para isso, em um vértice de um quadrado de grama, de lado m, prende-se a ponta de uma haste metálica de comprimento p e na outra ponta da haste prende-se um triângulo equilátero, por um de seus vértices, de lado l, sendo $p+l < m$. O triângulo gira muito rápido ao redor do encaixe com a haste e a haste gira muito devagar ao redor do encaixe no vértice do quadrado, ou seja, toda grama abaixo do triângulo é cortada, formando parte de uma coroa circular. Qual a área cortada?

11 *Embalagem de perfume*

O frasco de um perfume tem formato cilíndrico e uma embalagem em forma de flor deve ser construída para acondicioná-lo. Para a confecção desta embalagem será utilizada uma folha quadrada de lado n, quatro arcos de circunferência com centros nos vértices do quadrado e raio medindo n e uma circunferência tangente a estes arcos.

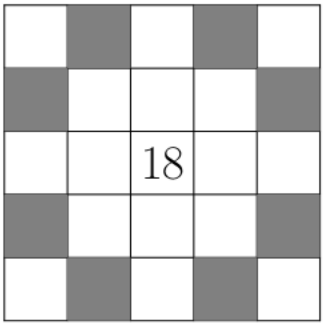


a) Qual a medida do raio da circunferência?

b) Qual a medida da área mais clara da figura?

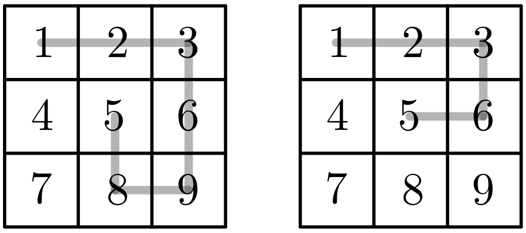
12 *Quadrado mágico II*

No quadrado mágico a seguir, todo inteiro de 1 a 25 pode ser colocado nos quadradinhos de modo que as somas em toda linha e coluna, bem como nas diagonais, é a mesma. Dado que o número no centro do quadrado é 18, qual é o valor da soma dos números escritos nos quadradinhos sombreados?



13 *Bloqueando celulares*

Para bloquear seu celular, Tom escolhe um caminho, na tela do celular, que deve passar pelos lados dos quadrados, sem passar pelos vértices, em um caminho contínuo. Na figura, temos dois exemplos, ambos começando no 1 e terminando no 5.

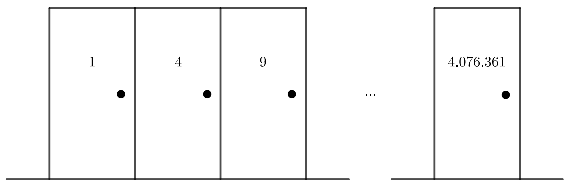


a) Quantas senhas diferentes, com 3 números, Tom pode escolher?

b) E com os 9 números, usando exatamente uma vez cada, quantas senhas Tom pode escolher, começando no 5?

14 2.019 *Armários?*

Os 2.019 armários dos 2.019 alunos de uma escola são numerados com os quadrados dos 2.019 primeiros naturais positivos, ou seja, o primeiro armário tem o número $1^2 = 1$, o segundo armário tem o número $2^2 = 4$, o terceiro armário tem o número $3^2 = 9$, e assim até o último armário que tem o número $2.019^2 = 4.076.361$.



a) Quantos algarismos foram utilizados para pintar os cem primeiros armários?

b) Somando todos os números dos armários, qual o algarismo das unidades deste resultado?

15 *As cinco amigas do vôlei*

Cinco amigas são titulares de um time de vôlei. Suas camisas são numeradas nas costas com os 5 primeiros ímpares positivos. Ana é a número 1; Bia é a número 3; Cátia é a número 5; Dani é a número 7; e Esmeralda é a número 9. Durante os treinos as cinco amigas fazem filas para formar números com suas camisas, todos com 5 algarismos. Por exemplo, a fila com Esmeralda, Dani, Cátia, Bia e Ana, nesta ordem, formam o número 97.531.

a) Quantos números diferentes elas podem formar?

b) Quantos números podem ser formados se Cátia não pode ser a primeira da fila?

c) Quantos números podem ser formados se Esmeralda e Bia ficarem lado a lado?

d) Fábia, camisa número 11, resolve participar da brincadeira. Quantos são os números formados agora?

16 *As sequências de Jaime*

Jaime adora somar sequências de números inteiros consecutivos.

a) Qual o resultado encontrado por Jaime, quando ele soma os 2.019 primeiros números inteiros positivos?

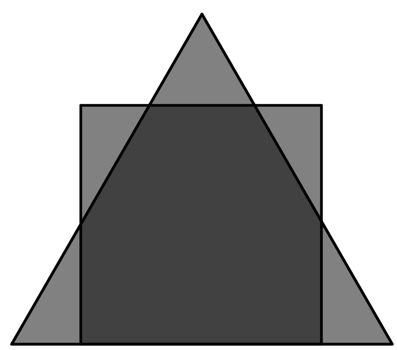
b) Jaime soma 100 números consecutivos e encontra 17.050. Qual é o menor dos números desta sequência?

c) Ao somar 180 números em sequência, Jaime encontrou como resultado 3.690. Qual é o menor deles?

d) Jaime somou 100 números positivos consecutivos, mas cometeu um equívoco, trocando um deles pelo seu quadrado, obtendo assim, 7.500. Qual número foi somado ao quadrado?

17 *Logomarca*

A logomarca de uma empresa deve ser criada sobrepondo-se um triângulo equilátero e um quadrado, conforme a figura. Se a medida do lado do triângulo é $12\,cm$ e o lado do triângulo intercepta o lado do quadrado em seu ponto médio, qual a diferença entre a área sobreposta (escura) e a soma das áreas sem sobreposição (claras)?



18 *Calendário jupiteriano*

No Calendário Jupiteriano, os meses são Julius, Uranius, Plutônius, Ílius, Terrius, Eráclitus e Raley. Os meses que começam com consoantes possuem 17 dias e os meses que começam com vogais têm 19 dias. O ano começa em Július e segue a sequência mencionada, anteriormente, encerrando-se em Raley. Assim, como no nosso calendário, o Jupiteriano possui uma semana com 7 dias (domingo, segunda, terça, quarta, quinta, sexta e sábado). Diógenes, um menino Jupiteriano, nasceu em 11 de Plutônio de 1999, que foi em um domingo.

a) Que dia Diógenes completará 100 dias de vida?

b) Que dia da semana Diógenes completará 20 anos?

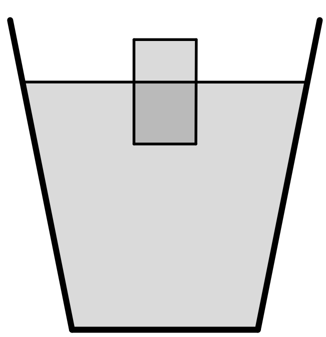
19 *Bronquinha e seu suco de frutas*

Bronquinha consegue cortar a grama de seu quintal em 3 horas, mas se ele tomar suco de frutas *Gummy*, ele corta em 2 horas. Em determinado dia, Bronquinha começou a cortar a grama às 10 horas e, em certo momento, tomou o suco de frutas *Gummy*, terminando de cortar a grama às 12 horas e 30 minutos. Que horas Bronquinha tomou o suco de frutas *Gummy*?

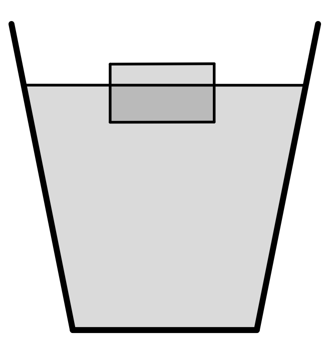
20 *A rolha hexagonal no copo d'água*

Luísa faz experiências com uma rolha e um copo d'água. Por conta de sua densidade, uma rolha fica com apenas 60% de seu volume imerso na água. A rolha da experiência de Luísa tem formato de um prisma hexagonal regular, ou seja, sua base é um hexágono regular, com 3 cm de altura e 2 cm do diâmetro da circunferência que circunscreve a base.

a) Se a rolha ficar "em pé", como na figura, qual a altura da parte não imersa?



b) Se a rolha ficar "deitada", como na figura, qual a altura da parte não imersa, se duas das faces laterais (a de cima e a de baixo) ficarem paralelas ao nível da água?



21 *Estacionamento lotado*

Em um estacionamento existem motos, carros, ônibus e caminhões, em um total de 80 veículos e 540 rodas. Cada moto tem 2 rodas, cada carro tem 4, cada ônibus tem 6 e cada caminhão tem 8. O número de carros é a soma do número de motos com o número de ônibus. Quantos são os caminhões neste estacionamento, se este número é menor que 50?

22 *As pedras do Llago*

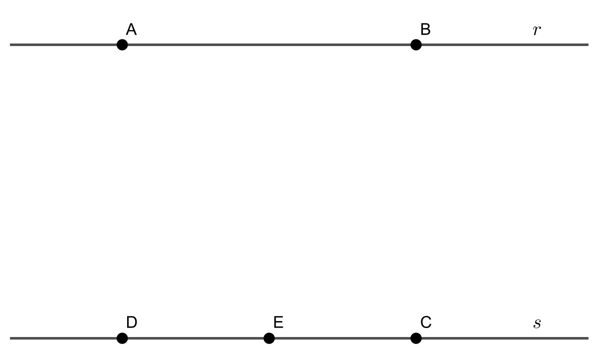
Às margens de um lago circular, existem pedras numeradas de 1 a 10, no sentido horário. O sapo Frog parte da pedra 1 e salta no sentido horário apenas nestas 10 pedras.

a) Se Frog salta de 2 em 2 pedras, ou seja, ele vai da pedra 1 para a 3, da 3 para a 5 e assim por diante, após 100 saltos em que pedra estará?

b) Se no primeiro salto, Frog vai para a pedra 2, no segundo para a pedra 4, no terceiro para a pedra 7, ou seja, em cada salto ele pula uma pedra a mais que no salto anterior. Em que pedra Frog estará após 100 saltos?

23 *Retas paralelas, quadrado e triângulos*

Sobre uma reta r, marcam-se os pontos A e B, e sobre uma reta s, paralela à r, marcam-se os pontos C e D, de maneira que $ABCD$ seja um quadrado. Marca-se também o ponto E no segmento CD.

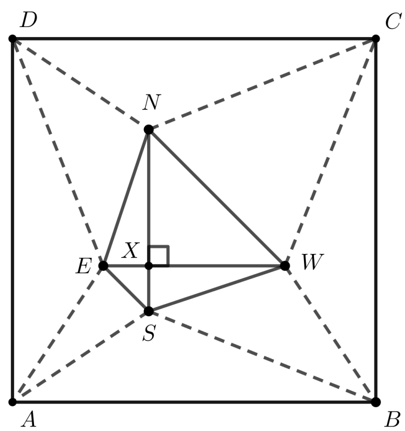


a) Qual a razão entre as áreas dos triângulos ABE e BCD, se E for o ponto médio de CD?

b) Qual a razão $\dfrac{DE}{EC}$, para que a área do triângulo BFE seja o dobro da área do DFE, sendo F a intersecção dos segmentos AE e BD?

24 *O quadrilátero dentro do quadrado*

Considere o quadrado $ABCD$ com lados de comprimento 1, como no desenho a seguir. Um segmento horizontal EW e um segmento vertical NS, ambos de comprimento $1/2$, estão inteiramente dentro do quadrado e se intersectam no ponto X formando um ângulo de $90°$.



a) Qual a área do quadrilátero $NESW$?

b) Qual a soma das áreas dos triângulos EDN, AES, BSW e CNW?

25 *Transformações multissômicas*

Liu e Lia brincam no quadro da sala de aula. Um deles escreve dois números naturais positivos e o outro tem que fazer transformações MULTISSÔMICAS até transformar o menor no maior. Transformação MULTISSÔMICA é trocar um número $a = m + n$ por $m \cdot n$, por exemplo, podemos trocar 10 por $2 \cdot 8 = 16$.

a) Liu escreve no quadro 6 e 15. Mostre como Lia pode transformar 6 em 15.

b) Lia escreve 5 e 2.019. Mostre como Liu pode fazer a transformação.

c) A professora gostou da brincadeira e resolveu participar, escrevendo 7 e x e perguntou quantos são os possíveis valores de x para transformar 7 em x com exatamente duas transformações MULTISSÔMICAS. Qual deve ser a resposta de Liu e Lia?

26 *Cidades, rodovias, ferrovia*

As cidades A, B e C estão posicionadas nos vértices de um triângulo equilátero com 60 km de lado. Entre elas, ligando duas a duas, existem três rodovias, AB, AC e BC, todas em linha reta. Uma ferrovia será construída, também em linha reta, devendo interceptar AB a 30 km de A; AC a 20 km de C; e, por fim, a rodovia BC, depois de C.

a) Se h_1, h_2 e h_3 são as distâncias de A, B e C para a ferrovia, respectivamente, verifique que

$$\frac{AD}{BD} = \frac{h_1}{h_2}, \quad \frac{BF}{CF} = \frac{h_2}{h_3}, \quad \text{e} \quad \frac{CE}{AE} = \frac{h_3}{h_1}.$$

b) Qual a distância entre a cidade C e a intersecção entre a ferrovia e a rodovia BC?

27 *Frações semelhantes*

Dois inteiros positivos x e y são tais que:

$$\frac{2010}{2011} < \frac{x}{y} < \frac{2011}{2012}.$$

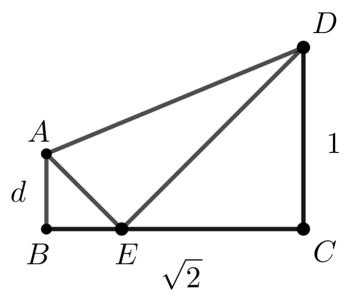
Encontre o menor valor possível para a soma $x + y$.

28 *O número de dígitos*

Seja $m = 999\ldots99$ o número formado por 77 dígitos iguais a 9 e seja $n = 777\ldots77$ o número formado por 99 dígitos iguais a 7. Qual o número de dígitos de $m \cdot n$?

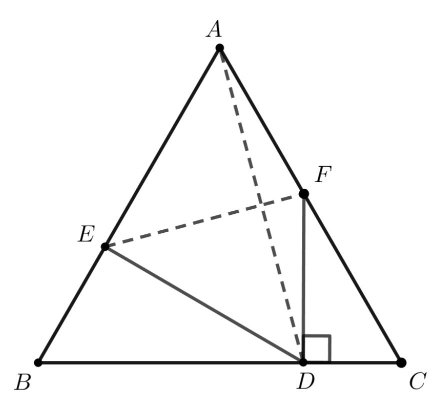
$\boxed{29}$ *A folha de papel dobrada*

Uma folha de papel com lados de comprimentos $1\,cm$ e $\sqrt{2}\,cm$ foi dobrada, como mostrado na figura abaixo, de modo que um vértice fique sobre o lado oposto. Qual o valor do comprimento d em centímetros?



$\boxed{30}$ *O triângulo dobrado*

Na figura a seguir, ABC é um triângulo equilátero de papel com lado $1\,m$ que foi dobrado ao longo do segmento EF de modo que o vértice A caísse sobre o lado BC, onde está o ponto D na figura. Suponha que DF é perpendicular a BC.



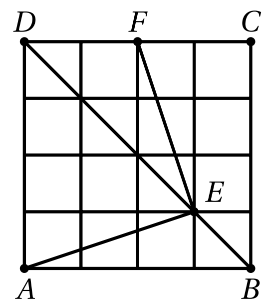
a) Determine o ângulo $\angle AED$.

b) Determine o comprimento do segmento CD.

c) Determine a razão entre as áreas dos triângulos AEF e ABC.

$\boxed{31}$ *Ângulo no quadrado*

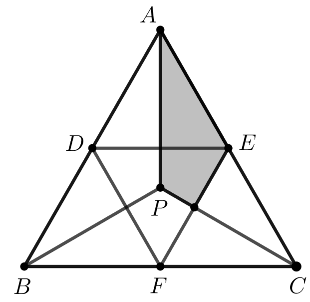
Na figura abaixo, todos os quadradinhos do tabuleiro são iguais. Qual o valor do ângulo $\angle AEF$?



NÍVEL 3

1 *A fração da área*

Na figura a seguir, ABC é um triângulo equilátero, D, E e F são seus pontos médios e P é o seu centro. Qual a fração que a área sombreada representa do total do triângulo ABC?



2 *A soma de frações*

a) Encontre o valor da soma

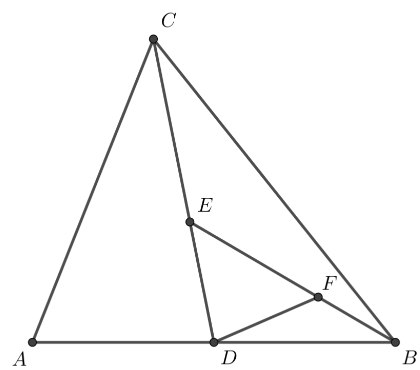
$$\frac{1}{1+1/x}+\frac{1}{1+x}.$$

b) Encontre o valor da soma

$$\frac{1}{2019^{-2019}+1}+\ldots+\frac{1}{2019^{-1}+1}+\frac{1}{2019^{0}+1}+\frac{1}{2019^{1}+1}+\quad\ldots\quad+\frac{1}{2019^{2019}+1}.$$

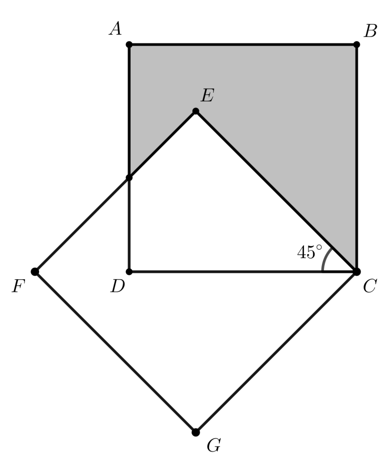
3 *Razões de segmentos*

Na figura abaixo, D é o ponto médio do lado AB, $CE : ED = 5 : 3$ e $BF : EF = 1 : 3$. Se a área do triângulo ABC é $192\,cm^2$, determine a área do triângulo BDF.



4 *A área sombreada*

Na figura a seguir, os quadrados $ABCD$ e $CEFG$ possuem o mesmo comprimento de lado. Determine a razão entre a área sombreada e a área do quadrado $ABCD$.



5 *Uma fatoração diferente*

Os três inteiros positivos a, b e c satisfazem

$$4^a \cdot 5^b \cdot 6^c = 8^8 \cdot 9^9 \cdot 10^{10}.$$

Determine o valor de $a+b+c$.

6 *O jogo das trocas*

Em um determinado jogo, o número 1 está escrito no quadro. Em qualquer momento, um movimento permitido consiste em trocar o número escrito no quadro pelo seu dobro ou por outro número que possui os mesmos dígitos que ele. Por exemplo, se estiver escrito no quadro o número 137, um movimento permitido consiste em trocá-lo por $137 \cdot 2 = 274$ ou por 173, 317, 371, 713 ou 731. Determine se após um número finito de operações é possível obtermos os seguintes números:

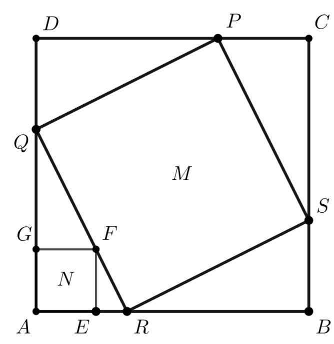
a) 10^3?

b) 10^9?

c) 9876543210?

7 *As áreas dos quadrados*

Na figura a seguir, o quadrado maior possui área de $1\,m^2$ e o quadrado do meio área M. A área do quadrado menor, que possui um vértice sobre um lado do quadrado do meio, é N. Qual o valor de N em função de M?

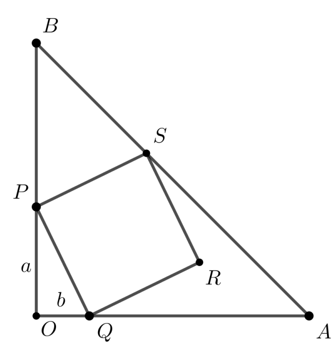


8 *As somas dos elementos do conjunto*

Um conjunto contém 4 números. As seis somas de dois elementos desse conjunto são 189, 320, 287, 264, x e y. Encontre o maior valor possível para $x + y$.

9 *O quadrado dentro do triângulo*

No triângulo retângulo isósceles AOB, os pontos P, Q e S são escolhidos sobre os lados OB, OA e AB, respectivamente, de modo que $PQRS$ é um quadrado. Se os comprimentos de OP e OQ são a e b, respectivamente, e a área do quadrado $PQRS$ é 2/5 da área do triângulo AOB, determine o valor de a/b.



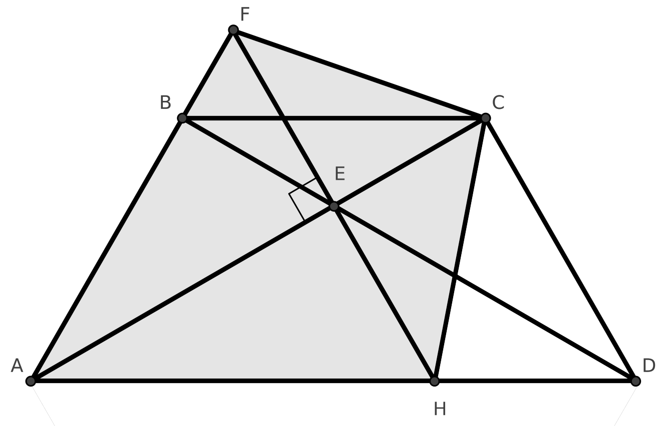
10 *As diagonais do trapézio*

Considere o trapézio $ABCD$ de bases BC e AD de modo que $AB = BC = CD = 5$ e $AD = 10$. Seja E o ponto de interseção das diagonais AC e BD. A reta perpendicular a AC traçada por E intersecta o prolongamento de AB em F e a base AD em H.

a) Determine o comprimento de AH.

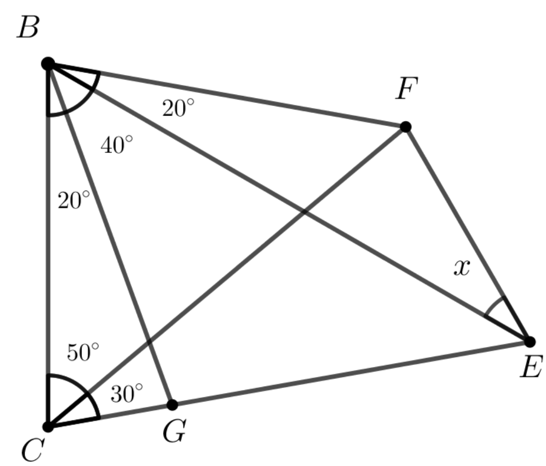
b) Determine o comprimento de AE.

c) Encontre a área do quadrilátero $AFCH$.



11 *O valor do ângulo x*

No desenho a seguir, $\angle CBG = 20°$, $\angle GBE = 40°$, $\angle EBF = 20°$, $\angle BCF = 50°$ e $\angle FCE = 30°$.



a) Verifique que $BG = BF$.

b) Verifique que $FG = EG$.

c) Encontre o valor da medida do ângulo x.

12 *O sistema com frações*

Se x, y e z são números reais positivos e

$$\frac{xy}{x+y} = a, \ \frac{xz}{x+z} = b, \text{ e } \frac{yz}{y+z} = c.$$

a) Verifique que

$$x = \frac{ay}{y-a}.$$

b) Verifique que

$$x = \frac{2abc}{ac+bc-ab}.$$

13 *Quadrado mágico III*

Um quadrado 3×3 está preenchido com os números a, b, c, d, e, f, g, h e i da seguinte forma:

c	f	i
b	e	h
a	d	g

Sabemos que ele é um quadrado mágico, isto é, existe um valor S que é igual as somas dos números em cada linha, coluna e cada uma das duas diagonais. Verifique que:

a) $2(a+c+g+i) = b+d+f+h+4e$.

b) $S = 3e$.

c) $ac+ci+ag+gi = e(b+d+f+h)$.

d) $2(a^2+c^2+g^2+i^2) = b^2+d^2+f^2+h^2+4e^2$.

14 *A área do quadrilátero*

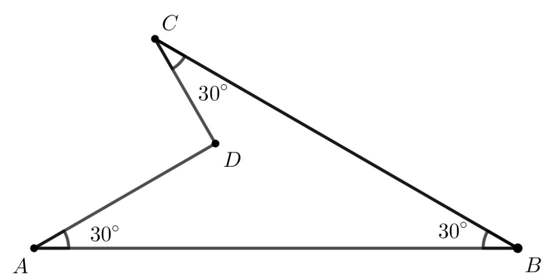
No quadrilátero $ABCD$, temos:

$$\angle DAB = \angle ABC = \angle BCD = 30^\circ,\ AB = 4\,cm,\ BC = 2\sqrt{3}\,cm.$$

a) Determine o valor do ângulo $\angle DCA$.

b) Determine o comprimento de CD.

c) Encontre a área do quadrilátero $ABCD$.



15 *Os números ao redor do círculo*

Existem 100 números reais distintos arranjados ao redor de um círculo. Verifique que existem quatro números consecutivos ao redor do círculo de modo que a soma dos dois números do meio é estritamente menor que a soma dos outros dois números.

16 *A eleição*

Dois candidatos participaram de uma eleição com $p+q$ eleitores. O candidato A recebeu p votos e o candidato B recebeu q votos, com $p > q$. Durante a apuração, é registrado apenas um voto de cada vez em um quadro. Seja r a probabilidade de que o número associado ao candidato A no quadro seja sempre maior que o número associado ao candidato B durante toda a apuração.

a) Determine o valor de r se $p = 3$ e $q = 2$.

b) Determine o valor de r se $p = 1010$ e $q = 1009$.

17 *As frações irredutíveis*

Os denominadores de duas frações irredutíveis são 600 e 700. Qual é o menor valor possível do denominador de sua soma quando escrita como uma fração irredutível?

Observação: Dizemos que a fração p/q é irredutível se os inteiros p e q não possuem fatores primos em comum em suas fatorações. Por exemplo, $5/7$ é uma fração irredutível.

18 *Tabuleiro com algarismos* 0 *e* 1

De quantas maneiras podemos colocar 8 algarismos iguais a 1 e 8 algarismos iguais a 0 em um tabuleiro 4×4 de modo que as somas dos números escritos em cada linha e coluna sejam as mesmas?

1	0	1	0
0	1	1	0
1	0	0	1
0	1	0	1

19 *As inversões na sequência*

Em uma sequência de inteiros positivos, uma *inversão* é um par de posições em que o elemento da posição mais à esquerda é maior que o elemento da posição mais à direita. Por exemplo, a sequência $2,5,3,1,3$ tem 5 inversões: entre a primeira e a quarta posição, entre a segunda e todas as demais para a direita e, finalmente, entre a terceira e a quarta. Dentre todas as sequências de inteiros positivos cuja soma de seus elementos é n, qual é o maior número possível de inversões se

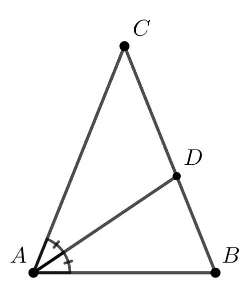
a) $n = 7$?

b) $n = 2019$?

Observação: As sequências de inteiros positivos consideradas nesse problema podem ter mais de 5 elementos.

20 *Ângulos no triângulo isósceles*

O triângulo ABC é isósceles com $AB = BC$. A bissetriz do ângulo $\angle CAB$ encontra o lado BC no ponto D. A diferença entre as medidas de dois ângulos internos do triângulo ABD é $40°$. Encontre os possíveis valores do ângulo $\angle ACB$.



21 *As soluções inteiras do sistema*

Considere as soluções do sistema

$$\begin{cases} 2019 = a+b-c \\ 2019 = a^2+b^2-c^2, \end{cases}$$

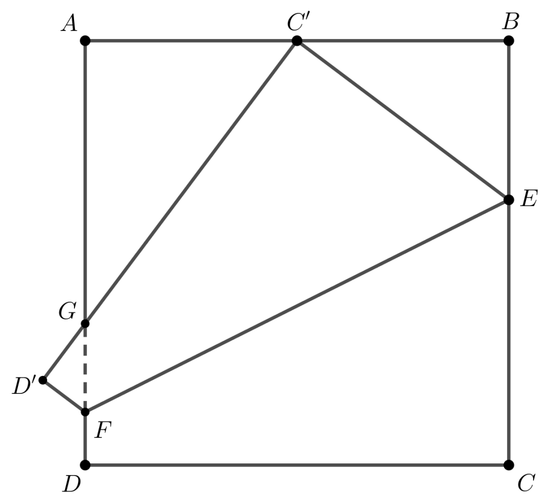
em que a, b e c são inteiros.

a) Encontre pelo menos uma solução do sistema.

b) Verifique que o número de soluções é finito.

22 *O quadrado dobrado*

Na figura a seguir, $ABCD$ é um quadrado de papel que foi dobrado ao longo do segmento FE de modo que o vértice C coincida com o vértice C' e D com D'.



a) Verifique que $C'D'$ é tangente ao círculo com centro C e raio CB.

b) Verifique que o perímetro do triângulo GAC' é igual à metade do perímetro de $ABCD$.

c) Verifique que $AG = C'B + GD'$.

d) Verifique que a soma dos perímetros dos triângulos $C'BE$ e $GD'F$ é igual ao perímetro do triângulo GAC'.

e) Verifique que o perímetro do triângulo $GD'F$ é igual ao comprimento do segmento AC'.

f) O incírculo de um triângulo é o círculo que é tangente aos seus três lados. Verifique que o raio do incírculo do triângulo GAC' é igual ao comprimento do segmento GD'.

23 *As triplas bacanas*

Dizemos que uma tripla de inteiros (x, y, z) é do tipo *bacana* se x, y e z são inteiros positivos, com $y \geq 2$, e $x^2 - 3y^2 = z^2 - 3$.

a) Encontre uma tripla (x, y, z) do tipo *bacana* com $x = 5$ e $x = 7$.

b) Mostre que para todo $x \geq 5$ e ímpar existem pelo menos duas triplas distintas (x, y_1, z_1) e (x, y_2, z_2) do tipo *bacana*.

c) Encontre alguma tripla do tipo *bacana* com x par.

24 *A soma dos algarismos*

Se n é um número inteiro positivo, qual o menor valor que a soma dos algarismos da representação decimal de $3n^2 + n + 1$ pode assumir?

25 *As distâncias no quadrado*

Seis pontos são distribuídos dentro de um quadrado de lado $10\,cm$ de tal modo que a distância entre quaisquer dois deles é um número inteiro em centímetros. Verifique que pelo menos duas dessas distâncias são iguais.

26 *Os números de* 6 *algarismos*

Os algarismos a, b, c, d, e e f são distintos e foram escolhidos no conjunto $\{1, 2, \ldots, 9\}$.

a) Verifique que pelo menos dois deles são consecutivos.

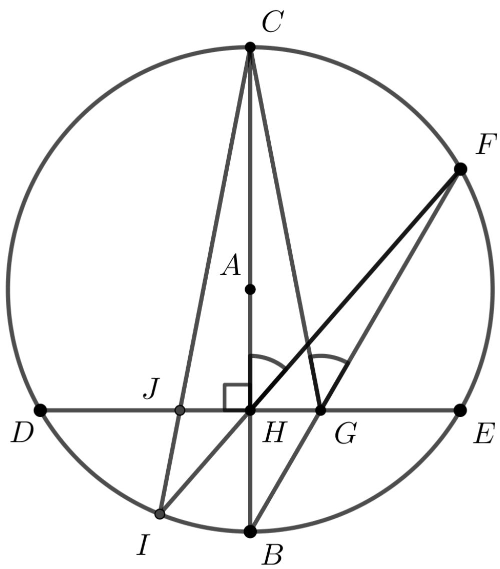
b) Determine os possíveis valores do inteiro positivo x, que divide qualquer número de 6 algarismos formados por a, b, c, d, e e f.

27 *As cordas perpendiculares*

No desenho a seguir, as cordas DE e BC são perpendiculares, sendo BC um diâmetro do círculo com centro em A. Além disso, $\angle CGF = 40°$ e $GH = 2\,cm$.

a) Determine o valor do ângulo $\angle CHF$.

b) Encontre o comprimento de HJ.



28 *O jogo de Berlekamp*

Um cadeado digital é constituído por um tabuleiro 4×4 formado por 16 interruptores. Cada interruptor pode estar ligado, simbolizado pelo símbolo 1, ou desligado, simbolizado pelo símbolo 0. Quando um interruptor é alterado de uma posição para outra, todos os outros interruptores na mesma linha e coluna precisam ser alterados também (veja o diagrama abaixo). O cadeado digital só é aberto quando todos os interruptores estão ligados.

1	0	1	0
0	**1**	1	0
1	0	0	1
0	1	0	1

$\Rightarrow$

1	**1**	1	0
1	**0**	**0**	**1**
1	**1**	0	1
0	**0**	0	1

a) Na figura abaixo, determine uma sequência de movimentos que permitam a abertura do cadeado.

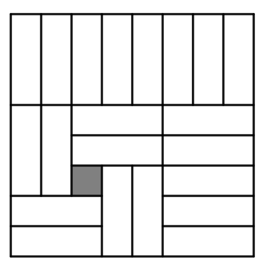
1	0	1	0
1	0	1	0
0	0	1	1
0	0	1	1

b) Verifique que é possível usar uma sequência de movimentos que produza como resultado a alteração de apenas um interruptor.

c) Verifique que não importam as posições iniciais dos interruptores, é sempre possível abrir o cadeado digital.

29 *A cobertura com triminós*

Um triminó é um retângulo 3×1 e um monominó é um único quadrado 1×1. Quais são as possíveis posições de um monominó na cobertura de um tabuleiro 8×8 usando 21 triminós e 1 monominó?



30 *As diferenças no conjunto*

Seja A um subconjunto de $\{1, 2, 3, \ldots, 2019\}$ possuindo a propriedade de que a diferença entre quaisquer dois de seus elementos não é um número primo. Qual é o maior número possível de elementos de A?

31 *Frações ordenadas*

Qual é o maior inteiro positivo n para o qual existe um único inteiro k, tal que

$$\frac{8}{15} < \frac{n}{n+k} < \frac{7}{13}?$$

32 *Algarismos das potências*

a) Dado que a representação decimal de 5^{2018} possui 1411 algarismos e começa com 3 (o dígito não nulo mais à esquerda é 3), para quantos inteiros $1 \leq n \leq 2017$ o número 5^n começa com 1?

b) Os inteiros 4^{52} e 5^{52} ambos começam com o algarismo 2. Se as representações decimais das potências 4^n e 5^n, com $n > 0$ e inteiro, começam com o mesmo algarismo d, quais os possíveis valores desse algarismo?

33 *Os estudantes no torneio de xadrez*

Dois estudantes precoces do Nível 3 participaram de um torneio de xadrez universitário. Cada participante joga contra todos os outros exatamente uma vez. Uma vitória vale 1 ponto, um empate vale $0,5$ ponto e uma derrota vale 0 ponto. A soma das pontuações dos dois estudantes do Nível 3 é $6,5$. Todos os estudantes universitários obtiveram a mesma pontuação. Quantos estudantes universitários participaram da competição?

34 *O número de soluções*

a) Verifique que para qualquer inteiro positivo a, com $a > 1$, a equação

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{a},$$

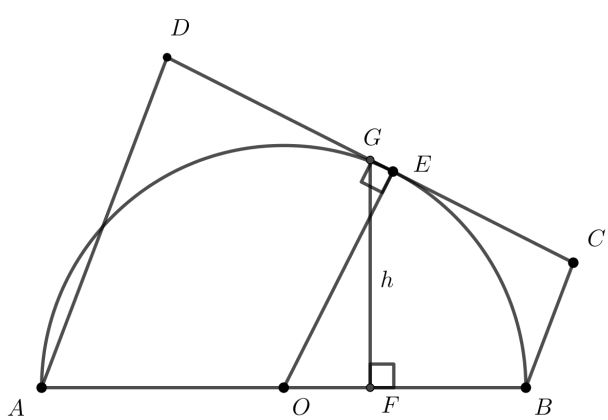
possui pelo menos três soluções da forma (x, y), com x e y inteiros positivos. Por exemplo, para $a = 3$, os pares $(6,6)$, $(4,12)$ e $(12,4)$ são soluções.

b) Encontre o número de pares de inteiros positivos (x, y) que são soluções dessa equação quando $a = 2019$.

Dica: Se a fatoração em primos de do inteiro positivo n é $p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, então ele possui $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)\ldots(\alpha_k + 1)$ dividores positivos.

35 *O trapézio e o círculo*

Seja $ABCD$ um trapézio, com $AD \parallel BC$, tal que o lado CD é tangente ao círculo com diâmetro AB. Se G é o ponto médio de CD e $CD = 8\,cm$, determine a medida da altura GF.



36 *O quadrado perfeito*

Os inteiros positivos x e y são tais que o número $x^{2019} + x + y^2$ é divisível por xy.

a) Dê um exemplo de tais inteiros x e y, com $x > y$.

b) Verifique que, necessariamente, x é um quadrado perfeito.

37 *O produto que é um quadrado perfeito*

a) Verifique que se $a \in \{1, 2, 4\}$, então $n(a+n)$ não é um quadrado perfeito para qualquer inteiro positivo n.

b) Verifique que se $a = 2^k$, com $k \geq 3$, então existe um inteiro positivo n tal que $n(a+n)$ é um quadrado perfeito.

c) Verifique que se $a \notin \{1, 2, 4\}$, então sempre existe um inteiro positivo n tal que $n(a+n)$ é um quadrado perfeito.

38 *Os números no quadro negro*

Existem n números em um quadro negro. A seguinte operação é realizada sobre esses números: dois números a e b são apagados e, em seguida, é escrito o número $\frac{a+b}{4}$. A operação é repetida $n-1$ vezes. Como resultado, um único número permanece no quadro. Prove que se todos os números originais são iguais a 1, então o número resultante não é menor que $1/n$.

39 *A cadeia no triângulo*

Todo lado de um triângulo equilátero é dividido em n partes iguais. Linhas paralelas aos lados do triângulo são desenhadas através desses pontos dividindo o triângulo em n^2 triângulos menores. Dizemos que uma sequência de triângulos distintos é uma cadeia se dois triângulos sucessivos compartilham um lado em comum. Qual é o maior número possível de triângulos em uma cadeia?

40 *Os voos entre as cidades*

Em um certo país, existem exatamente 2019 cidades e entre quaisquer duas delas existe exatamente um voo direto operado por alguma companhia aérea, isto é, dadas as cidades A e B ou existe um voo de A para B ou um voo de B para A. Encontre o menor número de companhias aéreas que operam no país, sabendo que os voos diretos entre quaisquer três cidades distintas são operados por companhias diferentes.

41 *A competição de matemática*

Uma competição de matemática consiste de três problemas, cada um dos quais recebe uma nota inteira de 0 a 7. Para quaisquer dois competidores, sabemos que existe no máximo um problema em que eles obtiveram a mesma pontuação. Encontre o maior número possível de competidores nessa competição.

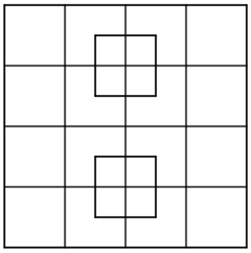
42 *O torneio de xadrez*

Vinte jogadores participaram de um torneio de xadrez. Cada jogador enfrentou todo outro jogador exatamente uma vez e cada partida terminou com a vitória de um dos jogadores ou em empate. Nesse torneio, notou-se que para cada partida que terminou em empate, cada um dos demais 18 jogadores venceu pelo menos um dos dois jogadores envolvidos nela. Sabemos ainda que pelo menos dois jogos terminaram em empate. Mostre que é possível nomear os jogadores como P_1, P_2, ..., P_{20} de modo que o jogador P_k ganhou do jogador P_{k+1}, para cada $k \in \{1,2,3,\ldots,19\}$.

ENUNCIADOS E SOLUÇÕES DO NÍVEL 1

1 *O número de quadrados*

Determine o número de quadrados na figura abaixo.



1 *O número de quadrados – Solução*

Vamos ordenar a contagem dos quadrados de acordo com as dimensões de seus lados.

I) Existe exatamente um quadrado 4×4.

II) Existem $2^2 = 4$ quadrados 3×3.

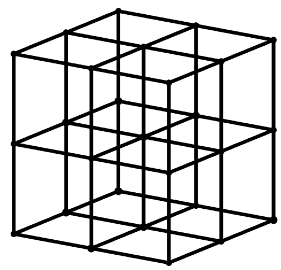
III) Existem $3^2 = 9$ quadrados 2×2.

IV) Existem $4^2 + 2 = 18$ quadrados 1×1, dos quais dois formam ainda 4 quadrados cada.

Portanto, ao todo temos $1 + 4 + 9 + 18 + 8 = 40$ quadrados.

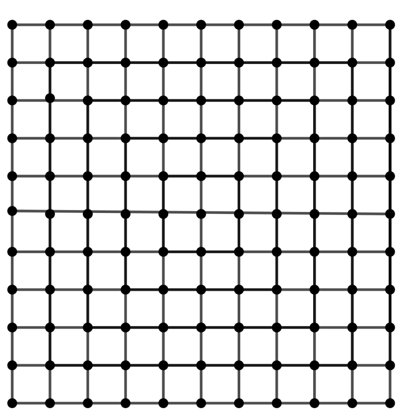
2 *Cubo de arame*

Na figura a seguir, temos um cubo $2 \times 2 \times 2$ feito com pedaços de arame. A aresta de cada cubo é um pedaço de 1 cm de arame e ao todo foram usados 54 desses pedaços. Para fazer um cubo $10 \times 10 \times 10$, quantos pedaços de arame serão utilizados?



2 *Cubo de arame – Solução*

Cada vértice dos cubinhos está conectado com segmentos que podem ser classificados em três diferentes direções associadas às arestas do cubo maior. Assim, podemos dividir a tarefa de encontrar a quantidade de segmentos utilizados de acordo com essas direções. Vista de cima de uma face qualquer do cubo maior, a figura se assemelha a um quadrado 10×10 composto por 100 quadradinhos 1×1. Existem 121 vértices nesses quadradinhos e de cada um deles, na direção perpendicular a face, devem ser conectados 10 outros segmentos. Ou seja, em uma determinada direção, existem $121 \cdot 10 = 1210$ segmentos.



Como temos 3 direções, o total de segmentos é $1210 \cdot 3 = 3630$.

3 *A média aritmética*

A média aritmética de uma lista de números é a soma deles dividida pela quantidade de elementos da lista. Por exemplo, a média aritmética da lista 3, 3, 4, 5 e 10 é

$$\frac{3+3+4+5+10}{5}=5.$$

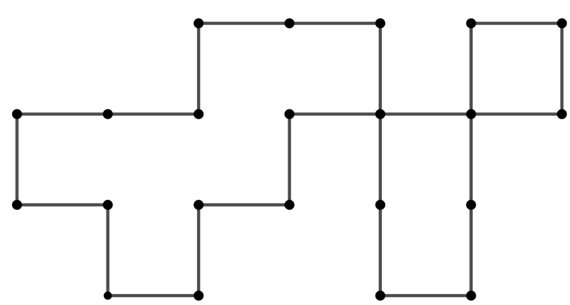
A média aritmética de 5 inteiros positivos **distintos** é igual a 11. Qual é o maior valor possível de um número dessa lista?

3 *A média aritmética – Solução*

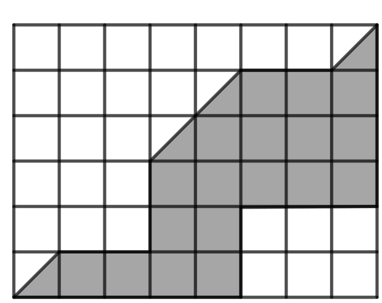
Como a média dos 5 inteiros é 11, a soma deles é $5 \cdot 11 = 55$. Como todos são inteiros positivos distintos, a soma de quatro deles é pelo menos $1+2+3+4=10$. Portanto, o quinto elemento é no máximo $55-10=45$. Assim, o maior valor possível de um número dessa lista é 45 e um exemplo em que isso acontece é com a lista $1,2,3,4,45$.

4 *Qual a área da figura?*

a) Na figura a seguir, cada segmento mede $3\,cm$. Qual a área da figura?

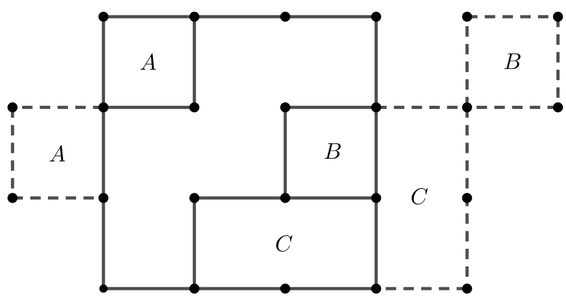


b) Na figura abaixo, cada quadradinho do reticulado tem área de $1\,cm^2$. Determine a área do polígono sombreado.

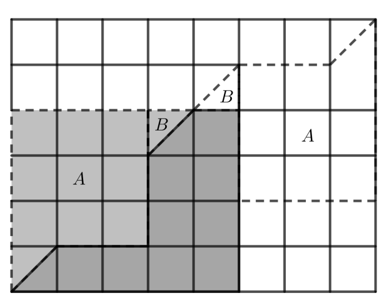


4 *Qual a área da figura? – Solução*

a) Podemos deslocar partes da figura, sem alterar a área do conjunto, e formar um quadrado de lado $3 \cdot 3 = 9\,cm$. No desenho a seguir, figuras iguais estão indicadas com a mesma letra e possuem áreas iguais. Portanto, a área da figura é $9 \cdot 9 = 81\,cm^2$.



b) Como no item anterior, podemos decompor a figura original em pedaços e deslocá-los. No desenho a seguir, figuras iguais estão indicadas com a mesma letra e possuem áreas iguais. A figura resultante é um retângulo 5×4 e sua área é $20\,cm^2$.



5 *Os cachorros e os passarinhos*

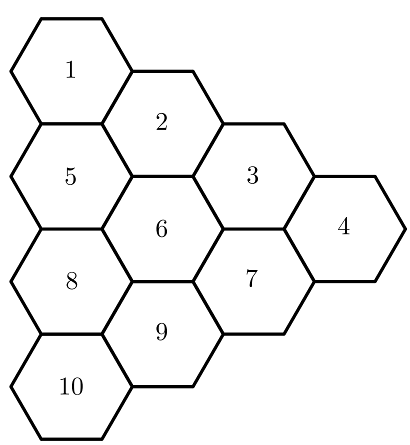
Três cachorros precisam de 7 horas para cavarem 9 buracos. Cinco passarinhos gastam 40 minutos para construírem 2 ninhos. Mantendo-se essas taxas, quantos minutos a mais um cachorro leva para cavar um buraco do que um passarinho leva para construir um ninho?

5 *Os cachorros e os passarinhos – Solução*

Como $1/3$ dos cachorros realiza $1/3$ do trabalho durante o mesmo período, podemos concluir que $3/3 = 1$ cachorro precisa de 7 horas para construir $9/3 = 3$ buracos. Trabalhando $1/3$ do tempo, esse cachorro fará $1/3$ do trabalho e assim, podemos garantir que 1 cachorro gasta $(7 \cdot 60)/3 = 140$ minutos para fazer um buraco. De modo semelhante, 1 passarinho precisa de 40 minutos para construir $2/5$ de um ninho e $5/2 \cdot 40 = 100$ minutos para construir $5/2 \cdot 2/5 = 1$ ninho. Portanto, para cavar um buraco, um cachorro gasta 40 minutos a mais que um passarinho para construir um ninho.

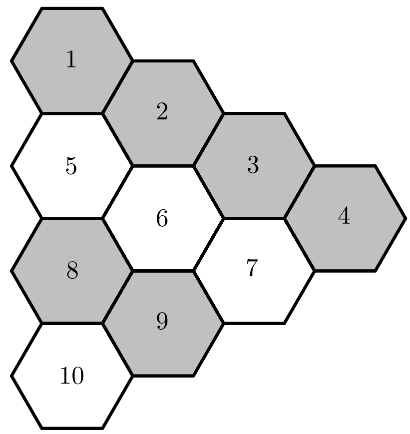
6 *Painel de luzes*

A figura a seguir é um painel de luzes que acendem ou apagam dependendo da tecla tocada (na figura todas as luzes estão acesas). Cada vez que uma tecla é tocada, todas as outras teclas que possuem um lado comum a ela apagam, se estiverem acesas (quando estão brancas), ou acendem, se estiverem apagadas (quando estão cinza).

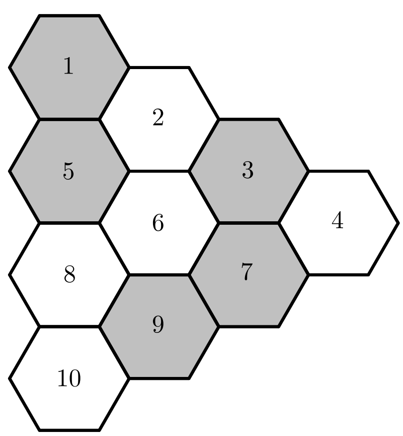


a) Se todas as teclas estão acesas e apertarmos uma única vez as teclas 1, 4, 7 e 10, nesta ordem, quais teclas ficarão acesas?

b) Na configuração abaixo, quais teclas devem ser apertadas para que todas as luzes fiquem acesas?

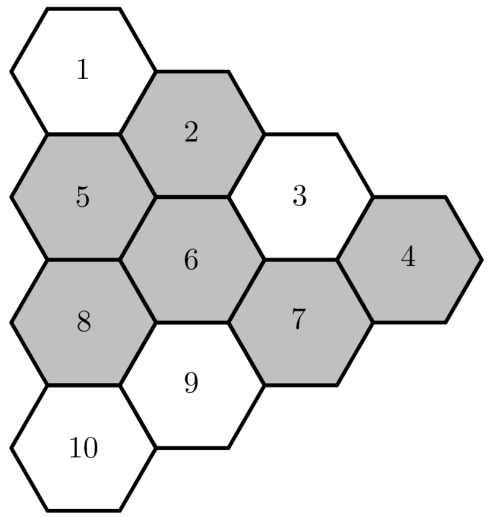


c) Na configuração abaixo, existe uma sequência de teclas apertadas para que todas as teclas fiquem acesas?



6 *Painel de luzes – Solução*

a) Quando apertamos uma tecla, acionamos as suas vizinhas (com um lado comum), ou seja, vizinhas acesas, apagam-se, enquanto que vizinhas apagadas, acendem-se. As teclas acionadas um número par de vezes, permanecem como estavam e as teclas acionadas um número ímpar de vezes, mudam de acesas para apagadas ou vice-versa. Apertando as teclas 1, 4, 7 e 10, acionaremos uma vez as teclas 2, 4, 5, 6, 7, 8, que ficarão apagadas, pois foram acionadas um número ímpar de vezes; as teclas 3 e 9, que foram acionadas duas vezes, assim como as teclas 1 e 10, que não foram acionadas, ficarão acesas. Na figura, temos a configuração final do painel.



b) 5 e 7. Apertando 5, acionamos 1, 2 e 8, que acendem, e 6 que apaga; apertando 7, acendem 3, 4, 9 e 6 (que está apagada após apertarmos 5). Assim, todas ficam acesas.

c) Não. As teclas 1, 4 e 10 têm dois vizinhos; as teclas 2, 3, 5, 7, 8 e 9 têm quatro vizinhos; e a tecla 6 tem seis vizinhos. Ou seja, todas as teclas possuem uma quantidade par de vizinhos. Sendo assim, quando apertamos qualquer tecla acionamos sempre uma quantidade par de teclas. Se o total de teclas que precisamos acender é cinco (ímpar), nunca conseguiremos deixar todas acesas.

7 *Mesa da família Naldo*

Em uma mesa circular estão sentadas 5 pessoas: Arnaldo, Bernaldo, Cernaldo, Dernaldo e Ernaldo, cada um em uma cadeira. Analisando no sentido horário, temos:

I. Entre Arnaldo e Bernaldo existe 1 cadeira vazia;

II. Entre Bernaldo e Cernaldo são 5 cadeiras;

III. Entre Dernaldo e Ernaldo são 4 cadeiras, quase todas vazias;

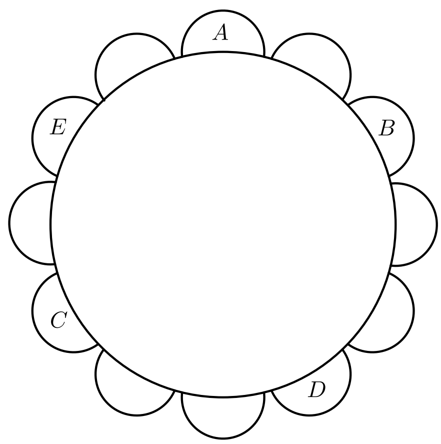
IV. Entre Dernaldo e Cernaldo são 2 cadeiras;

V. Entre Ernaldo e Bernaldo são 3 cadeiras, nem todas vazias.

Quantas cadeiras possuem ao redor da mesa?

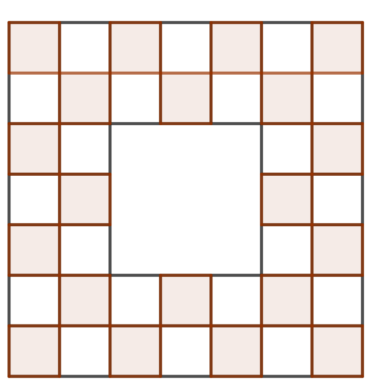
7 *Mesa da família Naldo – Solução*

Vamos posicionar Arnaldo na cadeira que chamaremos de 1 e, pela informação I, Bernaldo deverá sentar-se na cadeira 3 e, consequentemente, pela informação II, Cernaldo deverá sentar-se na cadeira 9. Como entre Dernaldo e Ernaldo são 6 cadeiras e entre Dernaldo e Cernaldo são 2 cadeiras, Cernaldo está entre Dernaldo e Ernaldo, sendo que Dernaldo está sentado na cadeira 6 e Ernaldo na cadeira 11. Como entre Ernaldo e Bernaldo são 3 cadeiras, Arnaldo está entre eles, existindo uma cadeira vazia entre Ernaldo e Arnaldo, que é a cadeira 12, a última cadeira. Portanto, são 12 cadeiras ao todo.

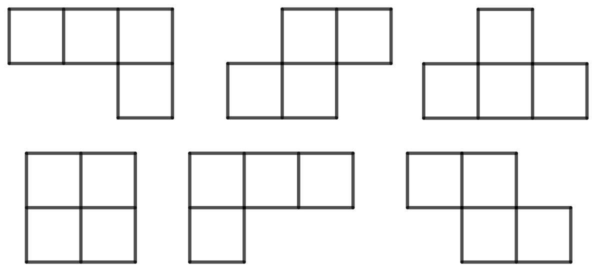


8 *Quebra-cabeça furado*

Joana ganhou um quebra cabeça com um tabuleiro, como o da figura abaixo.



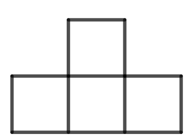
Este tabuleiro deve ser completamente preenchido com peças como as da figura abaixo, de forma que não pode haver sobreposição de peças e cada peça preencha exatamente quatro quadradinhos do tabuleiro.



a) Quantas peças são necessárias para preencher o tabuleiro?

b) Preencha o tabuleiro utilizando as peças que julgar necessário (pode utilizar de um único tipo de peça até todos os tipos).

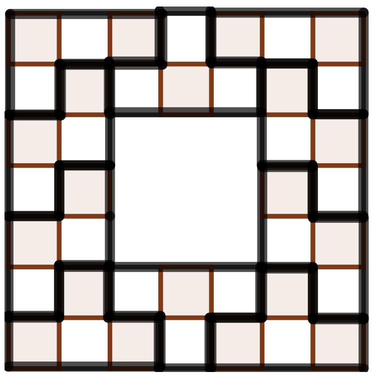
c) É possível preenchê-lo utilizando, exatamente, uma peça como a da figura abaixo e as demais dos outros tipos de peça?



8 *Quebra-cabeça furado – Solução*

a) O total de quadradinhos do tabuleiro é 40. Como cada peça cobre 4 quadradinhos do tabuleiro, o número de peças necessário para cobrir o tabuleiro é $\dfrac{40}{4} = 10$.

b) Na figura a seguir, uma solução.



c) O tabuleiro é composto por 40 quadradinhos, sendo 20 brancos e 20 cinzas. Todas as peças cobrem 4 quadradinhos, sendo 2 de cada cor, com exceção da peça sugerida no item que cobre 3 peças de uma cor e 1 da outra. Sendo assim, as outras 9 peças, quaisquer que sejam, cobrirão 18 quadradinhos brancos e 18 quadradinhos cinzas. Quando colocarmos a última peça (a peça sugerida no item), teríamos 21 quadradinhos brancos e 19 cinzas ou 19 brancos e 21 cinzas, o que é impossível.

9 *Fruteira de Angélica*

Na fruteira de Angélica existem 12 bananas, 1 abacaxi, 4 laranjas, 2 mangas e 3 mamões. O peso de 1 abacaxi é o mesmo que o peso de 1 laranja, 1 manga e 1 mamão, juntos; o peso de 1 banana é a metade do peso de 1 mamão; 4 bananas pesam o mesmo que 1 laranja e 1 manga, juntas; e 1 manga pesa 100 g a mais que 1 laranja. Se 1 abacaxi pesa 600 g, então:

a) Quanto pesam todas as frutas da fruteira de Angélica?

b) De quantas maneiras Pedro, neto de Angélica, pode escolher 2 frutas diferentes para tomar seu café da manhã, utilizando as frutas da fruteira?

c) Quantas vitaminas podem ser feitas com estas frutas, usando 600 g de frutas? (É permitido utilizar frutas repetidas, mas apenas quantidades inteiras de fruta).

9 *Fruteira de Angélica – Solução*

a) Vamos organizar as informações:

   I) 1 laranja + 1 manga + 1 mamão = 1 abacaxi (600 g);

   II) 2 bananas = 1 mamão;

   III) 1 laranja + 1 manga = 4 bananas;

   IV) 1 manga = 1 laranja + 100 g.

   Em (I), trocando laranja, manga e mamão, usando (II) e (III), chegamos que 6 bananas equivalem a um abacaxi, ou seja, cada banana pesa 100 g e, consequentemente, cada mamão pesa 200 g e uma laranja e uma manga juntas pesam 400 g, que, por (IV), é possível concluir que cada manga pesa 250 g e cada laranja pesa 150 g. Sendo assim, o peso de todas as frutas é $12 \cdot 100 + 600 + 4 \cdot 150 + 2 \cdot 250 + 3 \cdot 200 = 3.500$ g, que é o mesmo que $3,5$ kg.

b) São 5 tipos de frutas para escolher duas, ou seja, banana e mamão; banana e manga; banana e abacaxi; banana e laranja; mamão e manga; mamão e abacaxi; mamão e laranja; manga e abacaxi; manga e laranja; e, por fim, abacaxi e laranja. Sendo assim, Pedro pode escolher duas frutas diferentes de 10 maneiras. Outra forma de encontrar este resultado, sem precisar listar todas as possibilidades é $\dfrac{5 \cdot 4}{2} = 10$, que significa que temos 5 opções para a primeira fruta, 4 para a segunda e, como a ordem com a qual escolhemos primeira e segunda frutas não importa, dividimos o resultado por 2.

c) Vamos listar as possibilidades:

Abacaxi	Manga	Mamão	Laranja	Banana
1	0	0	0	0
0	1	1	1	0
0	1	0	1	2
0	2	0	0	1
0	0	1	2	1
0	0	1	0	4
0	0	2	0	2
0	0	3	0	0
0	0	0	2	3
0	0	0	4	0
0	0	0	0	6

Portanto, são 11 vitaminas diferentes.

10 *O quarto de Jack*

O quarto de Jack tem 27 m^2 de área de parede e teto. Para pintá-lo, Jack pode usar 1 lata de tinta, mas sobraria 1 litro de tinta, ou 5 galões de tinta, mas que também sobraria 1 litro, ou ainda 4 galões mais $2,8$ litros de tinta.

a) Qual a razão entre o volume de uma lata e o volume de um galão?

b) Qual o volume de um galão?

c) Qual a área de tinta que Jack consegue pintar com 1 litro de tinta, ou seja, qual o rendimento da tinta?

10 *O quarto de Jack – Solução*

a) Se usando 1 lata ou 5 galões sobra a mesma quantidade de tinta, então ambos possuem o mesmo volume, pois pintam a mesma área. Sendo assim, a razão entre seus volumes (1 lata por 5 galões) é $\frac{1}{5}$.

b) Temos que 5 galões menos 1 litro é equivalente a 4 galões mais $2,8$ litros, ou seja, 1 galão tem $3,8$ litros.

c) São necessários $5 \cdot 3,8 - 1 = 18$ litros para pintar os 27 m^2 do quarto de Jack, ou seja, $\frac{27}{18} = 1,5\ m^2/\ell$.

11 *As Tintas do M. A. Luco*

O cientista M. A. Luco possui 3 substâncias líquidas, sendo uma verde, uma azul e uma rosa, todas com 100 ml e cada uma em um recipiente (substância verde no recipiente V, substância azul no recipiente A e substância R no recipiente rosa). Em uma de suas experiências o famoso cientista passa 20 ml do recipiente V para o recipiente A; depois, 20 ml de A para R; e, por fim, 20 ml de R para V. Em cada passagem que é feita, os líquidos são misturados. Ao final do experimento, quanto de líquido verde haverá no recipiente V?

11 *As tintas de M. A. Luco – Solução*

Foram feitas 3 misturas. Vamos analisar cada uma delas:

I) $1^{\underline{a}}$ mistura: recipiente A ficou com 100 ml de líquido azul, que equivale a $\frac{100}{120} = \frac{5}{6}$ do volume total, e 20 ml de líquido verde, $\frac{1}{6}$ do total;

II) $2^{\underline{a}}$ mistura: tirando 20 ml do recipiente A, ou seja, $\frac{1}{6}$, sairá $\frac{1}{6} \cdot 20 = \frac{10}{3}$ ml de líquido verde e $\frac{1}{6} \cdot 100 = \frac{50}{3}$ ml de líquido azul, que são colocados no recipiente R, ficando com 120 ml de líquido;

III) $3^{\underline{a}}$ mistura: retirando-se $\frac{1}{6}$ (20 ml de 120 ml) do recipiente R, sai $\frac{1}{6} \cdot \frac{10}{3} = \frac{5}{9}$ ml de líquido verde, que será passado para o recipiente V, que ficará, ao final da experiência, com $\frac{5}{9} + 80 \cong 80{,}56$ ml de líquido verde.

12 *A calculadora maluca*

A calculadora maluca possui, além dos botões com os 10 algarismos, quatro superbotões:

☼	☺	♫	⋈

Quando a tecla ☼ é apertada, o número do visor é multiplicado por 2; a tecla ☺ soma todos os algarismos do visor; a tecla ♫ divide o número do visor por 4 e mostra o resto desta divisão; e a tecla ⋈ soma 3 ao número do visor.

a) Com o número 1.234 no visor, Pedro apertou, na sequência, as teclas ☼, ☺, ♫, ⋈. Que número apareceu?

b) Pedro digitou o número 12.345 e as quatro teclas especiais uma única vez cada, aparecendo no visor o zero ao final. Determine uma possível sequência de teclas especiais.

12 *A calculadora maluca – Solução*

a) Temos:

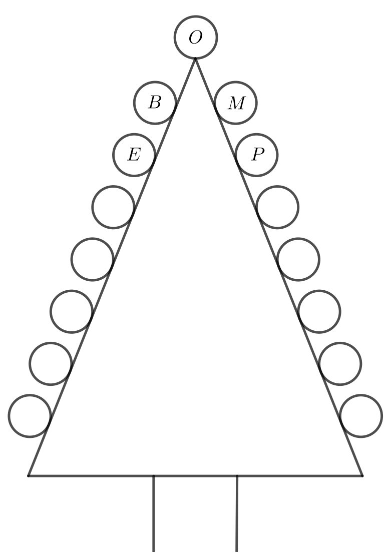
$$1.234 \to ☼ \to 2.468 \to ☺ \to 20 \to ♫ \to 0 \to \bowtie \to 3.$$

b) Uma sequência possível é:

$$12.345 \to ☼ \to 24.690 \to ☺ \to 21 \to \bowtie \to 24 \to ♫ \to 0.$$

13 *Árvore de Natal*

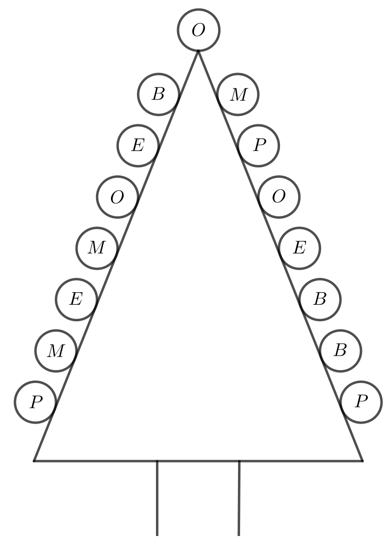
Na árvore de natal da OBMEP devem ser penduradas letras em ambos os lados, além de uma no topo. As letras O e B pesam 300 g cada, as letras M e E pesam 200 g cada e a letra P pesa 100 g. Já foram colocadas 5 letras, como mostra a figura, mas ainda faltam duas de cada. Coloque estas 10 letras faltantes de maneira que a soma dos pesos das letras do lado esquerdo seja igual à soma dos pesos do lado direito.



13 *Árvore de Natal – Solução*

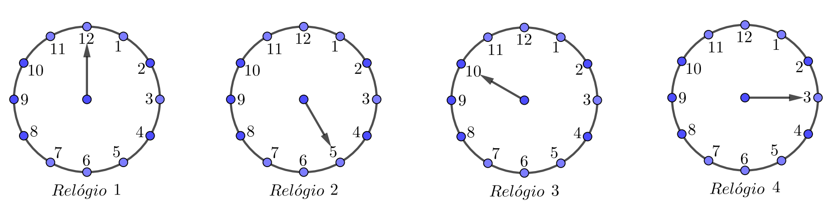
Cada conjunto das 5 letras da palavra OBMEP pesa $2 \cdot 300 + 2 \cdot 200 + 100 = 1.100\,g$. Ainda faltam distribuir 10 letras, ou seja, 2.200 g, sendo que já existem 500 g do lado esquerdo e 300 g do lado direito. Sendo assim, devem ser colocados 1.000 g do lado esquerdo e 1.200 gramas do lado direito, para que haja o equilíbrio.

Uma distribuição é:



14 1.000 *Relógios?*

A figura abaixo é o início de uma sequência lógica composta por 1000 relógios.



a) O ponteiro do *Relógio* 5 aponta para qual número?

b) O ponteiro do *Relógio* 1.000 aponta para que número?

c) Perceba que de um *Relógio* para o seguinte o ponteiro (dos minutos) avança 25 minutos, mas o ponteiro das horas não vemos, pois ele é invisível. Supondo que no *Relógio* 1 sejam 12 horas em ponto, que horas são no *Relógio* 997?

14 1.000 *Relógios? – Solução*

a) Como o ponteiro, de um relógio para o seguinte, percorre, no sentido horário, 5 casas (25 minutos), no *Relógio* 5 o ponteiro estará apontando para o 8.

b) Como “anda"de 5 em 5 e são 12 casas nos relógios, ele estará novamente no 12 depois de 60 casas, pois $mmc(5,12) = 60$, ou seja, depois de 12 giros completos. Então, partindo do *Relógio* 1, de 12 em 12 relógios, o ponteiro volta para a posição inicial (*Relógios* 1, 13, 25, 37, 49, ...). Todos estes relógios são números que deixam resto 1 na divisão por 12. Se 1.000 dividido por 12 deixa resto 4, então no *Relógio* 997 o ponteiro está no 12 e, consequentemente, no *Relógio* 1.000 está no 3.

c) A cada 12 giros do ponteiro dos minutos, que equivalem a 5 voltas completas, o ponteiro das horas (invisível) “anda” 5 casas. Usando o item anterior, 997 dividido por 12, resulta em 83 como quociente e resto 1, ou seja, o ponteiro dos minutos para 83 vezes na posição inicial, sendo que em cada uma delas o ponteiro das horas “anda” 5 casas. Como $83 \cdot 5 = 415$ e 415 dividido por 12 deixa resto 7, são $7h$ no *Relógio* 997.

15 *Divisibilidade por* 7

Uma maneira de verificar se um número é divisível por 7 é subtrair, do número formado pelos algarismos restantes após a retirada do algarismo das unidades, o dobro do algarismo das unidades, verificando se este número é divisível por 7. Por exemplo, 336 é divisível por 7, pois $33 - 2 \cdot 6 = 21$ é divisível por 7, mas 418 não é pois $41 - 2 \cdot 8 = 25$ não é.

a) Utilize este método para verificar se 4.578 é divisível por 7.

b) Se A e B são algarismos, quantos são os números de três algarismos do tipo $\overline{AB5}$ que são divisíveis por 7?

15 *Divisibilidade por* 7 *– Solução*

a) $457 - 2 \cdot 8 = 441 \rightarrow 44 - 2 \cdot 1 = 42$, que é divisível por 7, então 4.578 também é divisível por 7.

b) Como $\overline{AB5}$ tem três algarismos, então $A \neq 0$. Além disso, $\overline{AB} - 14$, pela regra de divisibilidade, é múltiplo de 7 e, consequentemente, $\overline{AB}$ deve ser múltiplo de 7, pois 14 é, ou seja AB pode ser qualquer elemento do conjunto

$$\{14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, 84, 91, 98\}.$$

Portanto, são 13 números.

16 *Mário no mercado*

Mário comprou algumas guloseimas no mercado, sendo que 3 chocolates custavam o mesmo que 2 picolés e 2 pirulitos custavam o mesmo que 5 chocolates.

a) Mário resolveu voltar ao mercado com dinheiro para comprar exatamente 3 pirulitos mas resolveu comprar picolés. Quantos picolés ele conseguiu comprar?

b) Se ele tivesse usado o dinheiro de 3 chocolates, 2 picolés e 2 pirulitos para comprar o máximo possível de guloseimas, quantas teria comprado?

16 *Mário no mercado – Solução*

a) 15 chocolates custam o mesmo que 10 picolés e o mesmo que 6 pirulitos. Então, 10 picolés valem o mesmo que 6 pirulitos e, consequentemente, 5 picolés o mesmo que 3 pirulitos. Assim, com o dinheiro de 3 pirulitos, Mário consegue comprar 5 picolés.

b) Pelo item anterior, vimos que a maior quantidade de guloseimas que Mário pode comprar com o mesmo valor é chocolate. Se 2 picolés equivalem a 3 chocolates e 2 pirulitos equivalem a 5 chocolates, então, a quantidade máxima de guloseimas são $3+3+5 = 11$ chocolates.

17 *Marta e os números*

Marta escolheu um número de 3 algarismos diferentes não nulos e o multiplicou por 3. O resultado encontrado foi um número de 3 algarismos iguais ao algarismo da dezena do número escolhido. Que número Marta escolheu?

17 *Marta e os números – Solução*

Seja o número escolhido abc. Temos, então, que:

$$\begin{array}{cccc} & a & b & c \\ & a & b & c \\ + & a & b & c \\ \hline & b & b & b \end{array}$$

Vamos analisar caso a caso: Se $c = 1$, então $b = 3$, o que não é possível pois a dezena do resultado deveria ser 9; se $c = 2$, então $b = 6$, o que não é possível, pois a dezena do resultado deveria ser 8; se $c = 3$, então $b = 9$, o que não é possível, pois a dezena do resultado deveria ser 7; se $c = 4$, então $b = 2$, o que não é possível, pois a dezena do resultado deveria ser 7; se $c = 5$, então $b = 5$, o que não é possível, pois os algarismos devem ser diferentes; se $c = 6$, então $b = 8$, o que não é possível, pois a dezena do resultado deveria ser 5; se $c = 7$, então $b = 1$, o que não é possível, pois a dezena do resultado deveria ser 5; se $c = 8$, então $b = 4$ e, consequentemente, $a = 1$; se $c = 9$, então $b = 7$, o que não é possível, pois a dezena do resultado deveria ser 3. Portanto, o número escolhido por Marta foi 148.

18 *A sequência de Jonas*

Jonas escreveu uma sequência com os múltiplos positivos de 13 em ordem crescente.

1326395265...

a) Qual o 2.019° algarismo da sequência de Jonas?

b) O número 2.019 aparecerá nesta sequência?

18 *A sequência de Jonas – Solução*

a) São 7 múltiplos de 13 com 2 algarismos (14 algarismos); com 3 algarismos, são 69 múltiplos de 13 ($3 \cdot 69 = 207$ algarismos). Já são $14 + 207 = 221$ algarismos, então faltam $2.019 - 221 = 1.798$. Dividindo 1.798 por 4, obtemos 449 e resto 2, ou seja, o primeiro múltiplo de 13 com 4 algarismos é $13 \cdot 77 = 1001$, então $13(449 + 76) = 6.825$. Como o resto da divisão é 2 e o próximo múltiplo é 6.838, então o 2.019° algarismo é 8.

b) Sim. Dividindo 20.190 por 13, encontramos quociente 1.553 e resto 1, então 20.189 e 20.202 são múltiplos de 13, que significa que não existe um múltiplo de 13 entre 20.190 e 20.199. Mas, dividindo 201.900 por 13 encontramos quociente 15.530 e resto 10, então 201.903 é múltiplo de 13 e, consequentemente, 2.019 aparece na sequência.

19 *Escola* 2.019

Uma escola tem 2.019 alunos. No final do ano, cada aluno recebeu um cartão com um número de 1 a 2.019. Os alunos receberam estes números em ordem alfabética: Abiel recebeu o cartão com o número 1; Adriana recebeu o cartão com o número 2; e assim por diante até Ziraldo, que recebeu o número 2.019.

a) Qual a soma dos números dos cartões dos alunos cuja inicial é F, se o primeiro deles, Fábio, tem o 219 e o último, Fuzano, tem o 271?

b) Escolhendo-se aleatoriamente 3 alunos e somando os números dos seus cartões, quantas são as possíveis somas?

c) Quantos alunos pegaram um cartão com um número cuja quantidade de divisores positivos é ímpar?

19 *Escola* 2019 – *Solução*

a) Se o primeiro número da sequência é 219 e o último é 271, então são $271-218=53$ números e sua soma é $\dfrac{(219+271)\cdot 53}{2}=12.985$.

b) A menor soma é $1+2+3=6$ e a maior é $2.017+2.018+2.019=6.054$. Portanto, são $6.054-5=6.049$ somas ao todo.

c) Os números com quantidade ímpar de divisores positivos são os quadrados perfeitos, sendo o maior deles $44^2=1.936$, ou seja, 44 alunos pegaram cartão contendo número com quantidade ímpar de divisores positivos.

20 *O tabuleiro do Chaves*

Chaves pegou um tabuleiro e começou a escrever os números naturais positivos em suas casas seguindo uma sequência lógica, conforme a figura.

1	2	9	10	25	⋯
4	3	8	11	24	⋯
5	6	7	12	23	⋯
16	15	14	13	22	⋯
17	18	19	20	21	⋯
⋯	⋯	⋯	⋯	⋯	

a) Qual a linha do número 2.019?

b) Se o tabuleiro for 10×10, ou seja, for até o número 100 apenas, qual a soma dos números da $1^{\underline{a}}$ linha?

c) Se o tabuleiro for $n\times n$, qual o último número da diagonal $(1,3,7,13,\ldots)$?

20 *O tabuleiro do Chaves – Solução*

a) Na $1^{\underline{a}}$ linha (horizontal), temos os quadrados dos naturais ímpares ($1^2, 3^2, 5^2, \ldots$) na $1^{\underline{a}}$, $3^{\underline{a}}$, $5^{\underline{a}}$, ..., casas e na $2^{\underline{a}}$, $4^{\underline{a}}$, $6^{\underline{a}}$, ..., casas temos os sucessores dos referidos quadrados (1^2+1, 3^2+1, 5^2+1, ...). Já na $1^{\underline{a}}$ coluna (vertical), temos na $2^{\underline{a}}$, $4^{\underline{a}}$, $6^{\underline{a}}$, ..., casas os quadrados dos naturais positivos pares e na $3^{\underline{a}}$, $5^{\underline{a}}$, $7^{\underline{a}}$, ..., casas os sucessores destes quadrados. Como $45^2 = 2.025$ está na $1^{\underline{a}}$ linha, então 2.019 está na $7^{\underline{a}}$ linha ($2.025 - 2.018 = 7$).

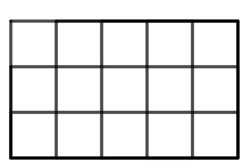
b) Temos:

$$1+2+9+10+25+26+49+50+81+82 = 335.$$

c) Como o tabuleiro é quadrado, o último número escrito, n^2, será o último número da $1^{\underline{a}}$ linha ou da $1^{\underline{a}}$ coluna, dependendo da paridade de n. Basta agora "voltarmos" pelo caminho da sequência, até chegarmos ao último número da diagonal, sendo que, para isto, precisamos apenas subtrair de n^2 o número $n-1$, ou seja, o último número da diagonal é $n^2-(n-1)$.

21 *Linhas no tabuleiro*

O tabuleiro com 15 quadradinhos a seguir é formado com 4 linhas horizontais e 6 linhas verticais.



Qual o número máximo de quadradinhos que podemos obter em um tabuleiro usando 21 linhas?

21 *Linhas no tabuleiro – Solução*

Para cada maneira de escrever 21 como soma do número de linhas e colunas, podemos encontrar o número de quadradinhos formados subtraindo uma unidade de cada uma dessas quantidades e multiplicá-las. Por exemplo, se escrevermos $21 = 5+16$, o número de quadradinhos formados será $(5-1)(16-1) = 60$. Podemos listar todas as decomposições

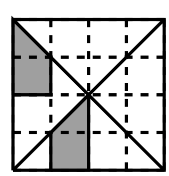
$21 = l + c$, onde l é a quantidade de linhas e c a de colunas, e contar para cada uma a quantidade de quadradinhos q:

l	c	q
2	19	18
3	18	34
4	17	48
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
10	11	90
11	10	90
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
19	2	18

Portanto, maior quantidade de quadradinhos possível é 90.

22 *Porcentagem da área*

Na figura a seguir, todos os quadradinhos do tabuleiro são iguais. Qual a porcentagem que a região pintada cobre do quadrado maior?



22 *Porcentagem da área – Solução*

A figura total possui 16 quadradinhos e a região pintada corresponde a área de 3 deles. Portanto, a porcentagem de área pintada é

$$\frac{3}{16} = \frac{18,75}{100} = 18,75\%.$$

23 *Quadrado mágico I*

Em um quadrado mágico, a soma dos números em cada linha, coluna e diagonal é a mesma. No quadrado mágico abaixo, quanto vale $a+b+c$?

16	2	a
c	10	d
b	e	4

23 *Quadrado mágico I – Solução*

A soma comum às linhas, colunas e diagonais é $16+10+4=30$. Analisando as somas das linhas e colunas, temos:

I) De $2+10+e=30$, segue que $e=18$.

II) De $b+e+4=30$, segue que $b=8$.

III) De $16+c+b=30$, segue que $c=6$.

IV) De $16+2+a=30$, segue que $a=12$.

Portanto, $a+b+c=26$.

24 *O show de mágica*

Em um show de mágica, um mágico apresenta um baralho com 29 cartas, que estão numeradas de 1 a 29, e pede que um membro da plateia escolha duas delas. Em seguida, um assistente de palco do mágico escolhe duas cartas das 27 restantes e pede que um outro membro da plateia as leve para um segundo mágico que se encontra em outra sala. As duas cartas são apresentadas ao segundo mágico em uma ordem arbitrária. A partir de uma estratégia feita entre os mágicos e o assistente antes do show, o segundo mágico é sempre capaz de descobrir as duas cartas escolhidas pelo membro da plateia apenas olhando as cartas que ele recebe. Explique como eles podem fazer isso.

24 *O show de mágica – Solução*

Uma possível estratégia é combinar antes do show um código entre os mágicos e o assistente. Para iniciar a transmissão da informação das cartas em código, eles devem considerar os 29 números escritos em um círculo, como se fossem as horas de um relógio, de modo que 1 e 29 sejam vizinhos. Se um membro da plateia escolher dois números consecutivos, digamos 7 e 8, o assistente deve escolher os próximos dois números consecutivos nesse círculo imaginário, a saber, 9 e 10. Se o membro da plateia escolher dois números que não são consecutivos, digamos 4 e 11, o assistente deve escolher os sucessores deles no círculo, que são 5 e 12. Exemplifiquemos como funciona a descoberta das cartas por meio desse código. Se por um lado o segundo mágico receber dois números consecutivos, digamos 2 e 3, ele sabe que o membro da plateia escolheu 29 e 1. Por outro lado, se ele receber dois números não consecutivos, como 6 e 19, ele sabe que o membro da plateia escolheu 5 e 18.

25 *Sopa da vovó*

Vovó fez uma sopa para que seus 5 netos a dividissem igualmente. Ângela e Daniela chegaram, dividiram a sopa igualmente em 5 pratos, tomaram cada uma a sua parte, devolveram o que sobrou na panela para não esfriar e foram brincar no parque. Laura, quando chegou, achou que era a primeira e dividiu a sopa em 5 pratos iguais, tomou um deles e devolveu o restante na panela. João, quando chegou, achou que apenas Laura havia tomado sua parte, dividiu-a em 4 pratos, tomou sua a parte e foi dormir. Quando Toni chegou, sabia que era o último e tomou todo o restante da sopa.

a) Que fração da sopa Laura tomou?

b) Quem foi que tomou mais sopa?

c) Se a sopa fosse dividida em potes de 100 ml, todos teriam tomado uma quantidade inteira de potes. Qual a menor quantidade possível de sopa que havia na panela?

25 *Sopa da vovó – Solução*

a) Ângela e Daniela tomaram $\frac{1}{5}$ cada, deixando $\frac{3}{5}$ da sopa na panela. Laura dividiu os $\frac{3}{5}$ restantes em 5 partes, tomando 1 parte, ou seja, $\frac{1}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{25}$.

b) Continuando o item anterior, restou, após a passagem de Laura, $\frac{3}{5} - \frac{3}{25} = \frac{15-3}{25} = \frac{12}{25}$ da sopa. João dividiu essa fração em 4 partes, ou seja, tomou $\frac{1}{4} \cdot \frac{12}{25} = \frac{3}{25}$, deixando $\frac{12}{25} - \frac{3}{25} = \frac{9}{25}$, que foi a fração que Toni tomou. Portanto, Toni foi o que tomou mais sopa.

c) Seriam 25 potes, ou seja, $2,5$ litros.

26 *Ingressos para o parque*

Para entrar em um parque, um grupo com dois homens, quatro mulheres e duas crianças pagou 226 reais, enquanto que um grupo com três homens, três mulheres e uma criança pagou 207 reais.

a) Quanto pagaria um grupo com 8 homens, 10 mulheres e 4 crianças para entrar no parque?

b) Se os valores dos ingressos são todos números naturais, quantos são os possíveis preços para os ingressos?

26 *Ingressos para o parque – Solução*

a) Seja h o preço do ingresso para homens, m o preço do ingresso para mulheres e c o preço do ingresso para crianças. Organizando as informações, temos:

$$\begin{cases} 2h + 4m + 2c = 226 & (I) \\ 3h + 3m + c = 207 & (II). \end{cases}$$

Um grupo com 8 homens, 10 mulheres e 4 crianças é o mesmo que um grupo do tipo (I) mais dois grupos do tipo (II), ou seja, pagaria $226 + 2 \cdot 207 = 640$ reais.

b) Fazendo $2(II) - (I)$, obtemos a equação $4h + 2m = 188$, donde $m = 94 - 2h$, que, substituindo em (II), chegamos a $c = 3h - 75$. A solução para o sistema pode ser escrita como $\{(h, m, c)\} = \{h, 94 - 2h, 3h - 75\}$. Como $m = 94 - 2h > 0$, segue que $h < 47$ e, analogamente, $c = 3h - 75 > 0$, donde $h > 25$. Sendo assim, $25 < h < 47$, que resulta em $46 - 25 = 21$ resultados possíveis.

27 *SEQUENLADA*

Uma sequência numérica é chamada de SEQUENLADA quando, a partir do segundo número, o elemento seguinte é formado pelas regras:

I) se tem mais de 2 algarismos, passa-se o último algarismo para a $1^{\underline{a}}$ posição e depois soma-se os dois últimos algarismos;

II) se tem dois algarismos, soma-se estes 2 até obter 1 algarismo apenas.

A sequência termina quando chegamos em um número com apenas um algarismo. Um exemplo de uma SEQUENLADA é:

$$12.345 \to 5.127 \to 753 \to 312 \to 24 \to 6.$$

a) Escreva a SEQUENLADA que começa com 246.831.

b) Quantas SEQUENLADAS de três números terminam com 1?

27 *SEQUENLADA – Solução*

a) $246.831 \to 124.611 \to 11.247 \to 5.443 \to 358 \to 88 \to 16 \to 7.$

b) Vamos analisar a sequência ao contrário, com o primeiro número sendo 1. O segundo, então só pode ser 10 ou 100. No primeiro caso (10), o 3° termo pode ser 19, 28, 37, 46, 55, 64, 73, 82, 91, 190, 280, 370, 460, 550, 640, 730, 820, 910 ou 1.000; no segundo caso (100 na segunda posição), o 3° número da sequência só pode ser 10.000.

Vamos organizar as sequências:

19	→	10	→	1
28	→	10	→	1
37	→	10	→	1
46	→	10	→	1
55	→	10	→	1
64	→	10	→	1
73	→	10	→	1
82	→	10	→	1
91	→	10	→	1
190	→	10	→	1
280	→	10	→	1
370	→	10	→	1
460	→	10	→	1
550	→	10	→	1
640	→	10	→	1
730	→	10	→	1
820	→	10	→	1
910	→	10	→	1
1.000	→	10	→	1
10.000	→	100	→	1

Portanto, são 20 SEQUENLADAS com 3 números que terminam em 1.

28 *A fábrica de roupas*

O dono de uma fábrica de roupas é fanático por matemática e organiza seus produtos em pacotes cujo número de peças é um número primo. Por exemplo, as peças de roupas na cor verde, ele organiza em pacotes com 2 peças cada; as de cor azul, em pacotes com 3 peças cada; as de cor rosa, em pacotes com 5 peças cada; as de cor branca, em pacotes com 7 peças cada; e assim por diante. Em uma caixa grande, o dono da fábrica decide colocar apenas pacotes com cor verde, azul e rosa (podendo ter as três cores ou apenas uma, inclusive). Na caixa devem ter exatamente 20 peças. De quantas maneiras diferentes, ele pode organizar esta caixa?

28 *A fábrica de roupas – Solução*

As cores verde, azul e rosa têm 2, 3 e 5 peças por pacotes, respectivamente. Podemos pegar diversas quantidades de pacotes de cada cor, inclusive não pegar, desde que a quantidade de peças seja exatamente 20. Vamos montar um quadro para listar as possibilidades:

Verde	Azul	Rosa
10	0	0
7	2	0
6	1	1
5	0	2
4	4	0
3	3	1

Verde	Azul	Rosa
2	2	2
1	6	0
1	1	3
0	5	1
0	0	4

Portanto, são 11 maneiras diferentes.

29 *A balança de dois pratos*

Existem 68 moedas em uma sacola, todas possuindo pesos diferentes. Descreva como encontrar a moeda mais pesada e a moeda mais leve, usando 100 pesagens em uma balança de dois pratos.

Observação: Em uma balança de dois pratos, colocam-se objetos sobre os pratos e descobre-se qual conjunto de objetos é mais pesado.

29 *A balança de dois pratos – Solução*

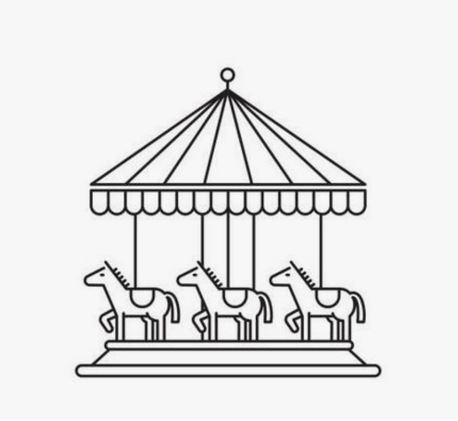
Inicialmente divida as moedas em 34 pares e realize 34 pesagens neles. As 34 moedas mais pesadas serão classificadas em um grupo de mesmo nome e as demais em um grupo chamado de moedas mais leves. Divida o grupo das moedas mais pesadas em 17 pares e realize as 17 pesagens entre eles. Considere agora as 17 moedas mais pesadas obtidas nesse processo, separe uma delas, que será chamada de A, e divida as restantes em 8 pares. Em cada um desses pares, realize uma pesagem e repita o processo com as 4 moedas mais pesadas realizando assim mais duas pesagens. Compare agora a moeda mais pesada dessa segunda pesagem com a moeda separada anteriormente chamada de A. O resultado é a moeda mais pesada do conjunto. Ao todo, após as 34 pesagens originais, foram realizadas $17+8+4+2+1+1 = 33$ pesagens. O mesmo processo pode ser usado, dessa vez, considerando os grupos de moedas mais leves, para identificarmos a moeda mais leve com outras 33 pesagens. Assim, o total de pesagens utilizadas foi de

$$34+33+33 = 100.$$

Observação: Em geral, podemos mostrar que $3n-2$ pesagens são suficientes para descobrirmos a moeda mais leve e a mais pesada em um grupo com $2n$ moedas. Inicialmente, divida as moedas em n pares e realize uma pesagem em cada um deles. As n moedas mais pesadas dessa pesagem formarão o grupo 1 e as demais o grupo 2. No grupo 1, podemos escolher de forma aleatória duas moedas quaisquer, realizar uma pesagem e eliminar a mais leve. Com $n-1$ pesagens podemos eliminar $n-1$ moedas e obter a mais pesada do grupo 1. O mesmo processo no grupo 2 nos permite obter a moeda mais leve com $n-1$ pesagens. Assim, com $n+(n-1)+(n-1)=3n-2$ pesagens podemos obter a moeda mais leve e a moeda mais pesada.

30 *As voltas do carrossel*

Ana brinca com seu carrossel elétrico todos os dias. Como ela é muito organizada, após brincar de rodar o seu carrossel, ela sempre o deixa na mesma posição inicial daquele dia. Todas as noites seus três irmãos menores acordam e também brincam com ele. Seu irmão João sempre dá 1/7 de uma volta completa em cada movimento. Seu outro irmão Pedro sempre dá 1/9 de uma volta completa em cada movimento. Finalmente, seu irmão José sempre dá 1/32 de uma volta completa em cada movimento. Cada um pode movimentar o carrossel quantas vezes quiser. Em quantas posições diferentes Ana pode encontrar o carrossel ao acordar?



30 *As voltas do carrossel – Solução*

Como $7 \cdot 9 \cdot 32 = 2016$, segue que todos os movimentos são múltiplos do movimento que dá $1/2016$ de uma volta completa. Portanto, o carrossel pode estar em no máximo 2016 posições distintas, a saber, os múltiplos

$$\frac{1}{2016}, 2 \cdot \frac{1}{2016}, 3 \cdot \frac{1}{2016}, \ldots, 2016 \cdot \frac{1}{2016}$$

de uma volta. Para verificar que todas essas posições são possíveis, basta encontrarmos uma maneira de darmos $1/2016$ de uma volta, pois se for possível realizar tal movimento, basta repetir a sequência de movimentos que o gera para produzir novos incrementos de $1/2016$ de uma volta em um múltiplo já encontrado. Basta João rodar o carrossel em $1/7$ de uma volta em uma direção e Pedro e José fazerem seus movimentos no sentido contrário. Assim, o carrossel terá sido rodado em

$$\frac{1}{7} - \frac{1}{9} - \frac{1}{32} = \frac{288 - 224 - 63}{2016} = \frac{1}{2016}$$

de uma volta.

Observação: Uma posição qualquer após os movimentos dos três irmãos corresponde a seguinte fração de uma volta:

$$\frac{x}{7} + \frac{y}{9} + \frac{z}{32} = \frac{288x + 224y + 63z}{2016},$$

em que x, y e z são inteiros. Como $mdc(288, 224, 63) = 1$, segue que existem inteiros a, b e c tais que

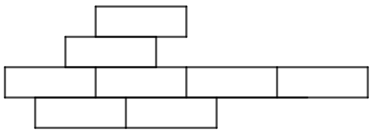
$$288a + 224b + 63c = 1$$

e isso garante que é possível obter $1/2016$ de uma volta completa. Essa análise pode ser usada para tratar casos mais gerais.

ENUNCIADOS E SOLUÇÕES DO NÍVEL 2

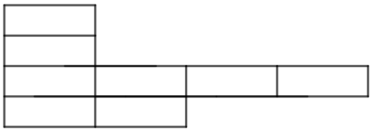
$\boxed{1}$ *O perímetro do retângulo*

Na figura a seguir, todos os retângulos são iguais e possuem o perímetro de $8\,cm$. Qual o perímetro total da figura?



$\boxed{1}$ *O perímetro do retângulo – Solução*

Podemos deslizar os blocos e formar uma nova figura com o mesmo perímetro da anterior. Se o lado menor do bloco mede a e o maior mede b então $2a+2b=8\,cm$. No perímetro da nova figura, temos 8 segmentos de tamanho a e 8 de tamanho b. Assim, o seu perímetro é $8a+8b=4(2a+2b)=32\,cm$.



$\boxed{2}$ *Número TOP*

Um número é dito TOP se possui 5 algarismos e quando o produto entre o 1° e o 5° é igual a soma do 2°, 3° e 4°. Por exemplo, 12.338 é TOP, pois possui 5 algarismos e $1 \cdot 8 = 2+3+3$.

a) Qual o valor de a para que $23.4a8$ seja TOP?

b) Quantos números TOP terminam com 2 e começam com 1?

c) Quantos números TOP começam com 9?

$\boxed{2}$ *Número TOP – Solução*

a) Temos que $2 \cdot 8 = 3+4+a$, segue que $a = 9$.

b) Seja $1b.cd2$ um número TOP. Temos que $b+c+d = 2$, sendo que todas as possibilidades (b, c, d), são $(0,0,2)$, $(0,1,1)$, $(0,2,0)$, $(1,0,1)$, $(1,1,0)$, $(2,0,0)$, ou seja, são 6 números TOP.

c) Seja $9e.fgh$ um número TOP. Vamos analisar todos os casos iniciando pelos possíveis valores de h:

   I) Se $h = 0$, então $e + f + g = 0$, cuja única possibilidade é $(0,0,0)$.

   II) Se $h = 1$, então $e + f + g = 9$, ou seja, para $e = 0$, são 10 possibilidades para f (de 0 a 9) e g fica determinado; para $e = 1$, são 9 possibilidades para f e g fica determinado; para $e = 2$, são 8 possibilidades para f; e assim por diante até $e = 9$ e 1 possibilidade para f, ou seja, o total de possibilidades para $h = 1$ é $10+9+8+7+6+5+4+3+2+1 = 55$.

   III) Se $h = 2$, então $e + f + g = 18$, ou seja, para $e = 0$, existe apenas uma combinação para f e g que é $f = g = 9$; para $e = 1$ são 2 possibilidades para f e g; para $e = 2$, são 3 possibilidades; para $e = 3$, são 4 possibilidades; e assim por diante até $e = 9$, que são 10 possibilidades. Neste caso, temos, portanto, $1+2+3+4+\ldots+10 = 55$ possibilidades.

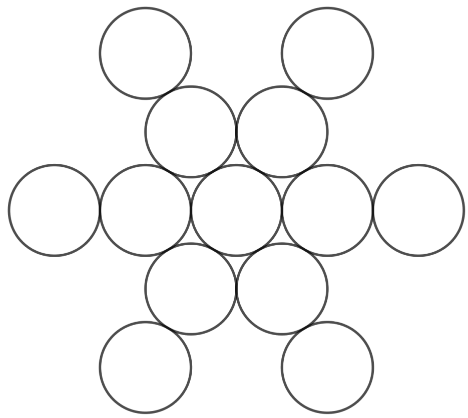
   IV) Se $h = 3$, então $e + f + g = 27$, que possui apenas a solução $e = f = g = 9$.

   V) Se $h > 3$ não existe número TOP.

Sendo assim, o total de números TOP que começam com 9 é $1+55+55+1 = 112$.

3 *O floco de neve*

Cada um dos números de 1 a 13 está escrito em um dos círculos do floco de neve da figura a seguir, de modo que as somas dos 5 números em cada linha e a soma dos 7 números no centro da figura sejam todas iguais. Encontre essa soma dado que ela é a menor possível dentre as que satisfazem essas condições.

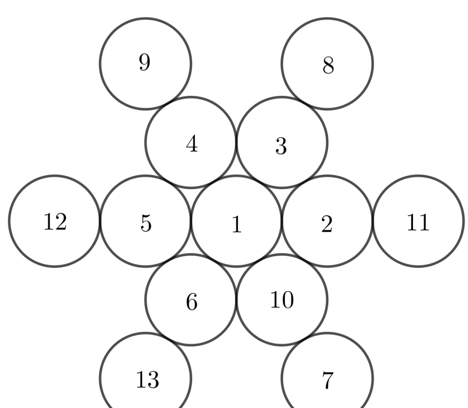


3 *O floco de neve – Solução*

Sejam s o valor da soma em cada linha e a o valor escrito no círculo central. Então,

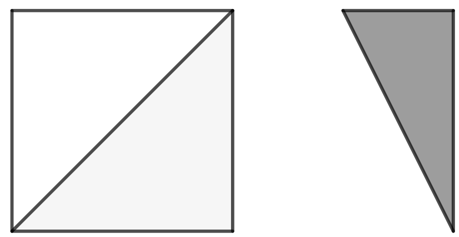
$$3s = (1+2+\ldots+13)+2a = 91+2a,$$

consequentemente $s = \dfrac{91+2a}{3} \geq \dfrac{93}{3} = 31.$ Para verificar que esse valor é possível, considere a figura a seguir.



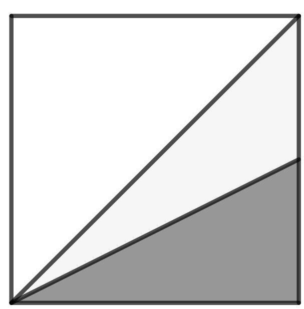
4 *Quadrado de triângulos e triângulo*

Na figura a seguir, temos um quadrado dividido em dois triângulos congruentes e um triângulo retângulo cujo cateto maior tem a mesma medida do lado do quadrado e o cateto menor tem a metade da medida do lado do quadrado.

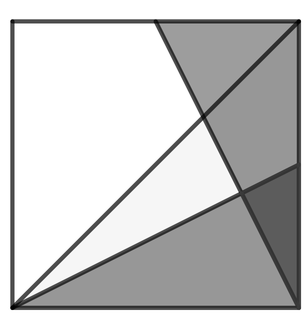


Se a área do quadrado é $4k$, determine:

a) A área em cinza claro da figura abaixo.



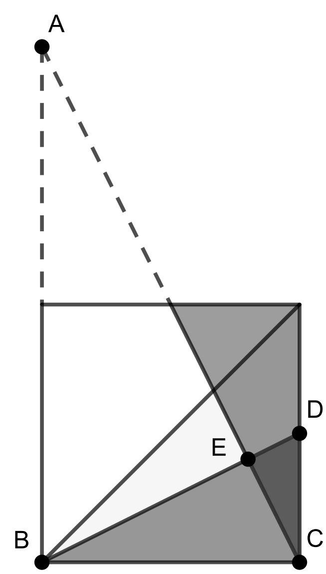
b) A área em cinza escuro da figura abaixo.



$\boxed{4}$ *Quadrado de triângulos e triângulo – Solução*

a) A área cinza claro é a metade da área do quadrado $(2k)$ menos a área do triângulo, que é a quarta parte da área do quadrado, ou seja, k. Portanto, a área cinza claro é $2k - k = k$.

b) Prolongando um lado do quadrado e a hipotenusa do triângulo, conforme a figura, vamos marcar os pontos A, B, C, D e E.



Os triângulos $\triangle ABE$ e $\triangle CDE$ são semelhantes de razão 4 e, consequentemente, a razão das áreas é 16. Além disso, $\dfrac{EB}{ED} = 4$ (razão), o que implica que a razão entre as áreas dos triângulos $\triangle BCE$ e $\triangle CDE$ é 4. Se a área do $\triangle CDE$ é igual a x, a área do $\triangle BCE$ é igual a $4x$. Como a área do $\triangle ABC$ é igual à área do quadrado $(4k)$, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{A_{ABE}}{A_{CDE}} &= 16\\
\frac{A_{ABC} - A_{BCE}}{A_{CDE}} &= 16\\
\frac{4k - 4x}{x} &= 16\\
16x &= 4k - 4x\\
20x &= 4k\\
x &= \frac{k}{5}.
\end{aligned}$$

$\boxed{5}$ *Inteiros no quadro*

Inicialmente, o número 1 e dois números positivos x e y estão escritos em um quadro negro. Em cada movimento, um jogador pode escolher dois números sobre o quadro, não necessariamente distintos, e escrever a sua soma ou a sua diferença no quadro. Também podemos escolher um número não nulo no quadro e escrever o seu inverso. Após um número finito de movimentos, descreva como podemos obter os seguintes números:

a) x^2.

b) xy.

$\boxed{5}$ *Inteiros no quadro – Solução*

a) Se $x = 1$ não há o que fazer. Suponhamos então que $x \neq 1$. Primeiramente, escreva $x+1$ e $x-1$. Usando o movimento do inverso, podemos escrever $\dfrac{1}{x+1}$ e $\dfrac{1}{x-1}$. Em seguida, podemos escrever a diferença desses dois números: $\dfrac{2}{x^2-1}$. O inverso desse último número é $p = \dfrac{x^2-1}{2}$. Calculando $p+p$ encontramos x^2-1. Finalmente, basta adicionar 1 para obter $x^2-1+1 = x^2$.

b) Primeiramente, escreva $x+y$. Pelo item anterior, podemos escrever $(x+y)^2$, x^2 e y^2. Em seguida, com dois movimentos, podemos escrever $(x+y)^2-x^2$ e $(x+y)^2-x^2-y^2 = 2xy$. Também podemos escrever o inverso desse último número: $q = \dfrac{1}{2xy}$. Finalmente, podemos escrever $q+q = \dfrac{1}{xy}$ e o seu inverso xy.

$\boxed{6}$ *Paralelepípedo de cubinhos*

Um paralelepípedo deve ser construído com a sobreposição de cubinhos de 1 cm de medida de aresta, sendo seu comprimento composto por n cubinhos, sua largura, por p cubinhos e sua altura por q cubinhos.

a) Qual o volume do paralelepípedo?

b) Pintando as faces do paralelepípedo de vermelho, quantos cubinhos terão apenas uma de suas faces pintada de vermelho?

c) Tomando um paralelepípedo, como o do enunciado, de forma que $n = p = q$. Se aumentarmos cada uma de suas dimensões em a, sendo a um número natural, o novo cubo passa a ter 98 cubinhos a mais que o cubo inicial. Quais os valores de n e a?

6 *Paralelepípedo de cubinhos – Solução*

a) $V = npq$.

b) Nas faces $n \times p$, apenas os cubinhos que não estão nas laterais terão apenas uma face pintada de vermelho, ou seja, são $2 \cdot (n-2) \cdot (p-2)$ cubinhos. De forma análoga, nas faces $n \times q$, serão $2 \cdot (n-2) \cdot (q-2)$ e nas faces $p \times q$ são $2 \cdot (p-2) \cdot (q-2)$. Portanto, são $2[(p-2)(q-2)+(n-2)(p-2)+(n-2)(q-2)]$ cubinhos com apenas uma face vermelha.

c) Temos um cubo de aresta n, ou seja, formado de n^3 cubinhos. O novo cubo terá $(n+a)^3$ cubinhos, que equivale a 98 cubinhos a mais. Assim:

$$\begin{aligned} (n+a)^3 - n^3 &= 98 \\ 3n^2a + 3na^2 + a^3 &= 98 \\ a(3n^2 + 3na + a^2) &= 2 \cdot 7^2. \end{aligned}$$

Como a é um número natural, os possíveis valores de a pertencem ao conjunto $\{1, 2, 7, 14, 49, 98\}$. Vamos analisar cada caso:

I) Se $a = 1$, então $3n^2 + 3n = 97$, mas não teríamos $n \in \mathbb{N}$.

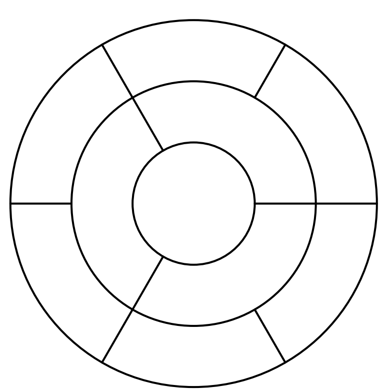
II) Se $a = 2$, então $3n^2 + 6n = 45$, donde $n = 3$.

III) Para $a = 7$, $a = 14$, $a = 49$ ou $a = 98$, não teríamos $n \in \mathbb{N}$.

Portanto, $a = 2$ e $n = 3$.

7 *Acerte o alvo*

A figura abaixo indica um alvo em uma parede que está fixo e não pode ser rotacionado. Ele está dividido em 10 partes, divididas em um círculo central, um anel menor e um anel maior (externo). Devemos distribuir os números de 1 a 10, um em cada parte, que serão correspondentes às pontuações obtidas ao acertar cada parte.



a) De quantas maneiras podemos distribuir os números nas partes do alvo?

b) De quantas maneiras podemos distribuir os números de forma que números mais próximos do centro não possam ser menores que números mais distantes do centro?

c) De quantas maneiras podemos distribuir os números de maneira que a soma dos números no anel externo seja igual à soma dos números do anel menor?

7 *Acerte o alvo – Solução*

a) Como são 10 partes e 10 números, o total de possibilidades é

$$10! = 10 \cdot 9 \cdot \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 1 = 3.628.800.$$

b) No círculo central deve ser o 10 (apenas uma possibilidade); no anel menor, devem ser os números 7, 8 e 9 para 3 partes ($3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ possibilidades); no anel externo são os 6 números restantes para 6 partes ($6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ possibilidades). Portanto, o total de maneiras para esta distribuição é $1 \cdot 6 \cdot 720 = 4.320$.

c) A soma de todos os números é $1+2+3+\ldots+10 = 55$ (ímpar). Como a soma dos anéis menor e externo deve ser a mesma, os dois juntos devem resultar em um número par e, consequentemente, no círculo central deve conter um número ímpar. Vamos analisar cada caso:

I) 1 no círculo central (soma de cada anel igual a 27): no anel menor devemos ter 10, 9 e 8 ($3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4.320$ possibilidades);

II) 3 no círculo central (soma de cada anel igual a 26): no anel menor devemos ter 10, 9 e 7 ($3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4.320$ possibilidades);

III) 5 no círculo central (soma de cada anel igual a 25): no anel menor devemos ter 10, 9 e 6 ou 10, 8 e 7 ($2 \cdot 4.320 = 8640$ possibilidades);

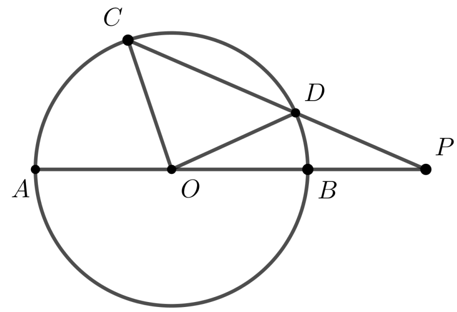
IV) 7 no círculo central (soma de cada anel igual a 24): no anel menor devemos ter 10, 9 e 5 ou 10, 8 e 6 ($2 \cdot 4.320 = 8640$ possibilidades);

V) 9 no círculo central (soma de cada anel igual a 23): no anel menor devemos ter 10, 8 e 5 ou 10, 7 e 6 ($2 \cdot 4.320 = 8640$ possibilidades).

Portanto, são $8 \cdot 4320 = 34560$ possibilidades ao todo.

$\boxed{8}$ *A reta secante*

O segmento AB de comprimento $16\,cm$ é diâmetro de um círculo de centro O. Uma reta secante corta o círculo em C e D e a reta AB em P, como indica a figura a seguir. Se $OD = DP$ e $\angle APC = 18°$, qual o valor do ângulo $\angle AOC$?

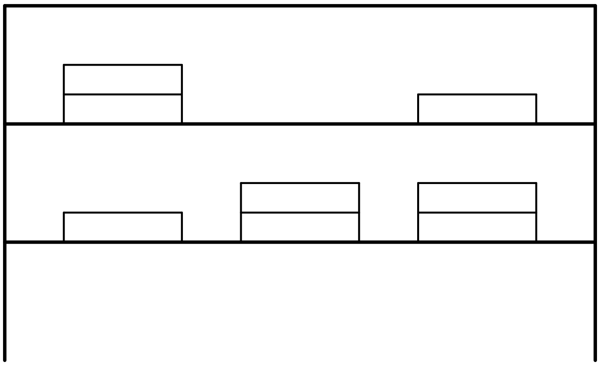


$\boxed{8}$ *A reta secante – Solução*

Como $OD = DP$, segue que $\angle DOP = \angle OPD = 18°$. Pelo Teorema do Ângulo Externo, segue que $\angle ODC = 2 \cdot 18° = 36°$. O triângulo COD é isósceles, pois CO e OD são raios do círculo. Assim, $\angle OCD = \angle CDO = 36°$. Novamente, pelo Teorema do Ângulo Externo, segue que $\angle COA = \angle OCP + \angle CPO = 54°$.

$\boxed{9}$ *Jogo da prateleira*

A figura abaixo representa uma estante com duas prateleiras com cinco pilhas de livros, sendo três delas com dois livros e duas delas com apenas um livro. Alice e Luiz inventaram um jogo no qual cada um deles, alternadamente, retira um ou dois livros de uma das pilhas de livros. Vence aquele que tirar o último livro. Alice começa o desafio. Qual deles tem uma estratégia vencedora, quaisquer que sejam as jogadas do adversário?



9 *Jogo da prateleira – Solução*

Aquele que deixar duas pilhas com 1 livro cada para o adversário jogar, vence o jogo. Para conseguir isso, basta Alice tirar, em seu primeiro lance, uma pilha com 2 livros. Após isso, Luiz terá 3 opções, que são:

I) Tirar uma pilha com 2 livros: basta Alice tirar a outra pilha com 2 livros que chegará à posição vencedora citada no início da solução.

II) Tirar uma pilha com apenas 1 livro: basta Alice tirar a outra pilha com 1 livro apenas, deixando duas pilhas com 2 livros cada, que ela vence no próximo lance ou chega à posição vencedora do início da solução.

III) Tirar 1 livro de uma pilha com 2 livros: basta Alice tirar 1 livro da pilha com 2 que restarão 4 pilhas com 1 livro e Alice chegará à posição vencedora do início da solução no próximo lance. Portanto, Alice tem a estratégia vencedora.

Outra maneira é passar as quantidades das pilhas para notação binária: 10, 10, 10, 1, 1. Quando Alice for jogar, basta ela tirar uma quantidade que, somando os valores restantes, obtenha-se um resultado apenas com números pares, por exemplo, em seu primeiro lance, se ela tirar uma pilha com 2 livros, a soma dos valores restantes será $10+10+1+1=22$. Fazendo isso, em todos os seus lances ela conseguirá chegar à posição vencedora.

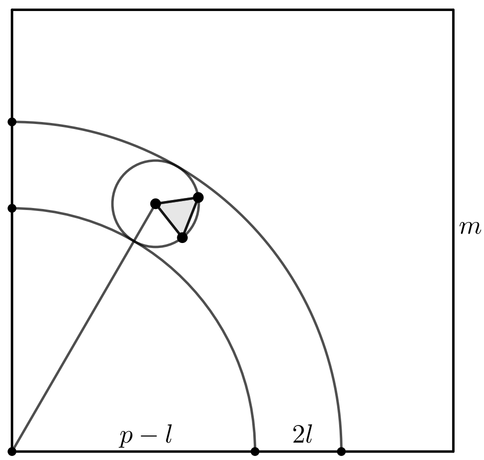
10 *Supercortador de grama*

Uma máquina de cortar grama mais eficiente está sendo desenvolvida. Para isso, em um vértice de um quadrado de grama, de lado m, prende-se a ponta de uma haste metálica de comprimento p e na outra ponta da haste prende-se um triângulo equilátero, por um de seus vértices, de lado l, sendo $p+l<m$. O triângulo gira muito rápido ao redor do encaixe com a haste e a haste gira muito devagar ao redor do encaixe no vértice do quadrado, ou seja, toda grama abaixo do triângulo é cortada, formando parte de uma coroa circular. Qual a área cortada?

10 *Supercortador de Grama – Solução*

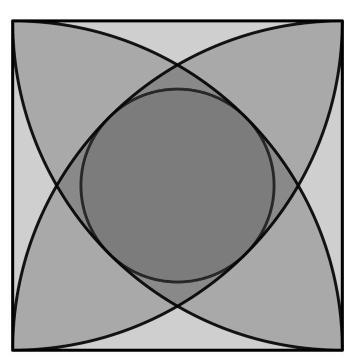
Quando o triângulo gira ao redor de um de seus vértices, seu alcance é limitado por uma circunferência de raio l. Assim, o raio do maior arco da área de corte é $(p+l)$, enquanto que o raio do menor arco da área de corte é $(p-l)$. Portanto, a área de corte é

$$\frac{\pi(p+l)^2 - \pi(p-l)^2}{4} = \frac{\pi}{4} \cdot 4pl = pl\pi.$$



11 *Embalagem de perfume*

O frasco de um perfume tem formato cilíndrico e uma embalagem em forma de flor deve ser construída para acondicioná-lo. Para a confecção desta embalagem será utilizada uma folha quadrada de lado n, quatro arcos de circunferência com centros nos vértices do quadrado e raio medindo n e uma circunferência tangente a estes arcos.



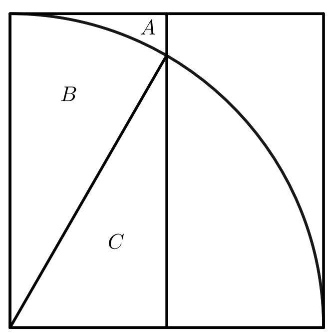
a) Qual a medida do raio da circunferência?

b) Qual a medida da área mais clara da figura?

11 *Embalagem de perfume – Solução*

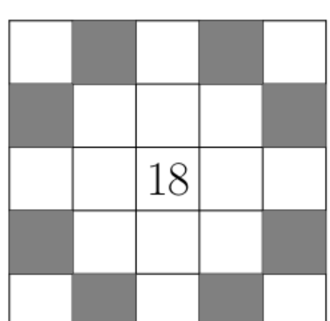
a) O raio do arco mede n e a diagonal do quadrado mede $n\sqrt{2}$, então o raio da circunferência é $\dfrac{n-(n\sqrt{2}-n)}{2} = \dfrac{2n-n\sqrt{2}}{2}$.

b) Dividindo o quadrado como na figura, temos que a soma das áreas A, B e C é $\dfrac{n^2}{2}$. Como $B = \dfrac{\pi \cdot n^2}{6}$ (setor circular de 30°), $C = \dfrac{n^2\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{n^2\sqrt{3}}{8}$ (metade da área de um triângulo equilátero), então $A = \dfrac{n^2}{2} - \dfrac{\pi n^2}{6} - \dfrac{n^2\sqrt{3}}{8}$. Assim, a área mais clara é $8A = n^2\left(4 - \dfrac{4\pi}{3} - \sqrt{3}\right)$.



12 *Quadrado mágico II*

No quadrado mágico a seguir, todo inteiro de 1 a 25 pode ser colocado nos quadradinhos de modo que as somas em toda linha e coluna, bem como nas diagonais, é a mesma. Dado que o número no centro do quadrado é 18, qual é o valor da soma dos números escritos nos quadradinhos sombreados?

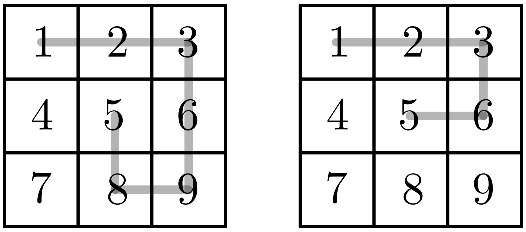


12 *Quadrado mágico II – Solução*

Como a soma de todos os números do quadrado mágico é $1+2+\ldots+25=325$, a soma dos números em cada linha, coluna ou diagonal é $325/5=65$. Ao somar todos os números das duas diagonais, da linha do meio e da coluna do meio, estamos somando todos os números que não estão sombreados e assim obtemos $4\cdot 65=260$. Entretanto, o quadrado central foi somado quatro vezes e podemos concluir que a soma de todos os números não sombreados é $260-3\cdot 18=206$. Portanto, a soma dos números nos quadrados sombreados é $325-206=119$.

13 *Bloqueando celulares*

Para bloquear seu celular, Tom escolhe um caminho, na tela do celular, que deve passar pelos lados dos quadrados, sem passar pelos vértices, em um caminho contínuo. Na figura, temos dois exemplos, ambos começando no 1 e terminando no 5.



a) Quantas senhas diferentes, com 3 números, Tom pode escolher?

b) E com os 9 números, usando exatamente uma vez cada, quantas senhas Tom pode escolher, começando no 5?

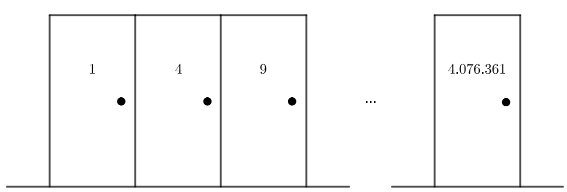
13 *Bloqueando celulares – Solução*

a) Começando nos cantos, são 4 possibilidades para cada ($4 \cdot 4 = 16$ ao todo), por exemplo, começando com 1, temos as senhas 123, 125, 145, 147. Começando em 2, 4, 6 ou 8 são 5 possibilidades para cada ($4 \cdot 5 = 20$ ao todo), por exemplo, começando com 2, temos as senhas 236, 256, 258, 254, 214. Começando pelo 5, temos 8 possibilidades (521, 523, 563, 569, 589, 587, 547, 541). Sendo assim, temos um total de $16 + 20 + 8 = 44$ senhas com 3 números.

b) Iniciando no 5, o segundo número deve ser 2, 4, 6 ou 8, sendo que em cada caso deve seguir a sequência no sentido horário ou anti-horário. Sendo assim, são $4 \cdot 2 = 8$ senhas.

14 2.019 *Armários?*

Os 2.019 armários dos 2.019 alunos de uma escola são numerados com os quadrados dos 2.019 primeiros naturais positivos, ou seja, o primeiro armário tem o número $1^2 = 1$, o segundo armário tem o número $2^2 = 4$, o terceiro armário tem o número $3^2 = 9$, e assim até o último armário que tem o número $2.019^2 = 4.076.361$.



a) Quantos algarismos foram utilizados para pintar os cem primeiros armários?

b) Somando todos os números dos armários, qual o algarismo das unidades deste resultado?

14 2.019 *Armários? – Solução*

a) Vamos dividir em grupos pela quantidade de algarismos:

I) 1 algarismo: 3 armários (1^2, 2^2, 3^2);

II) 2 algarismos: $9 - 3 = 6$ armários (4^2 a 9^2);

III) 3 algarismos: $31 - 9 = 22$ armários (10^2 a 31^2);

IV) 4 algarismos: $99 - 31 = 68$ armários (32^2 a 99^2);

V) 5 algarismos: apenas o armário 100^2.

Portanto, foram pintados $3+2\cdot6+3\cdot22+4\cdot68+5\cdot1 = 358$ algarismos nos cem primeiros armários.

b) O algarismo das unidades dos 10 primeiros quadrados desses armários são

$$1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1, 0.$$

Essa sequência de algarismos repete-se de 10 em 10. Como a soma de uma dessas sequências termina em 5 e são, até 2020^2 (vamos considerar o 2020^2 para termos uma quantidade inteira de sequências e como seu algarismo das unidades é zero, não altera o resultado) 202 somas que terminam em 5, que somadas, o resultado termina em 0.

$\boxed{15}$ *As cinco amigas do vôlei*

Cinco amigas são titulares de um time de vôlei. Suas camisas são numeradas nas costas com os 5 primeiros ímpares positivos. Ana é a número 1; Bia é a número 3; Cátia é a número 5; Dani é a número 7; e Esmeralda é a número 9. Durante os treinos as cinco amigas fazem filas para formar números com suas camisas, todos com 5 algarismos. Por exemplo, a fila com Esmeralda, Dani, Cátia, Bia e Ana, nesta ordem, formam o número 97.531.

a) Quantos números diferentes elas podem formar?

b) Quantos números podem ser formados se Cátia não pode ser a primeira da fila?

c) Quantos números podem ser formados se Esmeralda e Bia ficarem lado a lado?

d) Fábia, camisa número 11, resolve participar da brincadeira. Quantos são os números formados agora?

$\boxed{15}$ *As Cinco Amigas do Vôlei – Solução*

a) Como são 5 algarismos para permutar, temos $5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 120$ números diferentes.

b) Se Cátia não pode ser a primeira, temos $4\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 96$ números diferentes.

c) Esmeralda e Bia lado a lado serão consideradas como uma só, podendo trocar de lugar uma com a outra apenas. Sendo assim, são $2\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 48$ números.

d) Como Fábia tem o número 11 e existe o número 1 (Ana), se as duas estiverem lado a lado e as trocarmos de lugar, continua o mesmo número. Então, vamos subtrair do total a metade da quantidade de situações nas quais elas aparecem lado a lado. Temos, portanto, $6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1-5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 720-120 = 600$ números diferentes formados.

16 *As sequências de Jaime*

Jaime adora somar sequências de números inteiros consecutivos.

a) Qual o resultado encontrado por Jaime, quando ele soma os 2.019 primeiros números inteiros positivos?

b) Jaime soma 100 números consecutivos e encontra 17.050. Qual é o menor dos números desta sequência?

c) Ao somar 180 números em sequência, Jaime encontrou como resultado 3.690. Qual é o menor deles?

d) Jaime somou 100 números positivos consecutivos, mas cometeu um equívoco, trocando um deles pelo seu quadrado, obtendo assim, 7.500. Qual número foi somado ao quadrado?

16 *As sequências de Jaime – Solução*

a) Se o primeiro é 1 e o último 2.019, então a soma é $\dfrac{(1+2.019)\cdot 2.019}{2} = 2.039.190.$

b) Seja n o menor deles, então o maior é $(n+99)$. Temos, então:

$$\begin{aligned}\frac{(n+n+99)\cdot 100}{2} &= 17.050\\ 2n+99 &= 341\\ 2n &= 242\\ n &= 121.\end{aligned}$$

c) Seja n o menor deles, então $(n+179)$ é o maior. Assim:

$$\begin{aligned}\frac{(n+n+179)\cdot 180}{2} &= 3.690\\ 2n+179 &= 41\\ 2n &= -138\\ n &= -69.\end{aligned}$$

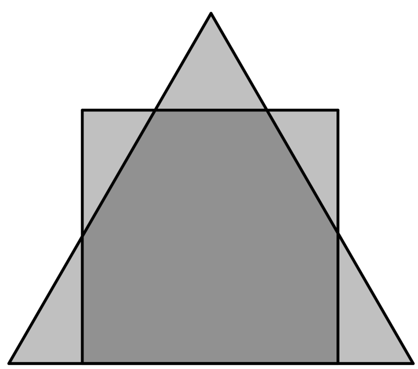
d) Sejam n o menor deles e k o número que foi trocado por seu quadrado, então:

$$\begin{aligned}\frac{(n+n+99))\cdot 100}{2} - k + k^2 &= 7.500\\ 50(2n+99) + k(k-1) &= 7.500\\ k(k-1) &= 50(150-2n-99)\\ k(k-1) &= 50(51-2n).\end{aligned}$$

Para que $2 \cdot 5^2 \cdot (51 - 2n)$ seja o produto de dois números consecutivos, devemos ter $n = 1$ ou $n = 19$. Portanto, temos duas situações possíveis, ou seja, o número somado ao quadrado pode ter sido 50, se $n = 1$, ou 26, se $n = 19$.

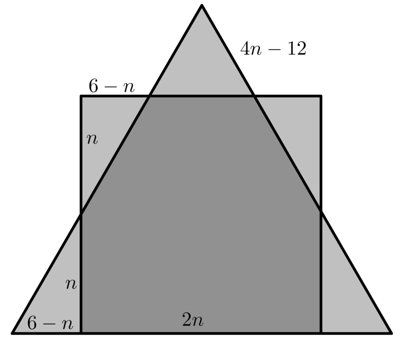
$\boxed{17}$ *Logomarca*

A logomarca de uma empresa deve ser criada sobrepondo-se um triângulo equilátero e um quadrado, conforme a figura. Se a medida do lado do triângulo é $12\,cm$ e o lado do triângulo intercepta o lado do quadrado em seu ponto médio, qual a diferença entre a área sobreposta (escura) e a soma das áreas sem sobreposição (claras)?



$\boxed{17}$ *Logomarca – Solução*

Vamos chamar a medida do lado do quadrado de $2n$, então quatro triângulos retângulos que não foram sobrepostos (todos congruentes) tem catetos medindo n e $(6-n)$ e o triângulo equilátero não sobreposto tem lado medindo $(4n-12)$.



Como os ângulos do triângulo equilátero medem 60°, então:

$$\begin{aligned}
\frac{n}{6-n} &= \sqrt{3}\\
n &= 6\sqrt{3}-\sqrt{3}n\\
n(\sqrt{3}+1) &= 6\sqrt{3}\\
n &= \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}\\
n &= 9-3\sqrt{3}\,cm.
\end{aligned}$$

Vamos agora ao cálculo das áreas:

$$\begin{aligned}
A_{escura} &= (2n)^2-n(6-n)\\
&= 4n^2+n^2-6n\\
&= 5n^2-6n\\
&= 5(9-3\sqrt{3})^2-6(9-3\sqrt{3})\\
&= 5(81-54\sqrt{3}+27)-54+18\sqrt{3}\\
&= (486-252\sqrt{3})\,cm^2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{clara} &= 2n(6-n)+\frac{(4n-12)^2\sqrt{3}}{4}\\
&= 12n-2n^2+4\sqrt{3}(n-3)^2\\
&= 12(9-3\sqrt{3})-2(9-3\sqrt{3})^2+4\sqrt{3}(6-3\sqrt{3})^2\\
&= 108-36\sqrt{3}-2(81-54\sqrt{3}+27)+4\sqrt{3}(36-36\sqrt{3}+27)\\
&= 108-36\sqrt{3}-216+108\sqrt{3}+252\sqrt{3}-432\\
&= 324\sqrt{3}-540\,cm^2.
\end{aligned}$$

Portanto, a diferença entre as áreas escura e clara é $(1.026-576\sqrt{3})\,cm^2$.

18 *Calendário jupiteriano*

No Calendário Jupiteriano, os meses são Julius, Uranius, Plutônius, Ílius, Terrius, Eráclitus e Raley. Os meses que começam com consoantes possuem 17 dias e os meses que começam com vogais têm 19 dias. O ano começa em Július e segue a sequência mencionada, anteriormente, encerrando-se em Raley. Assim, como no nosso calendário, o Jupiteriano possui uma semana com 7 dias (domingo, segunda, terça, quarta, quinta, sexta e sábado). Diógenes, um menino Jupiteriano, nasceu em 11 de Plutônio de 1999, que foi em um domingo.

a) Que dia Diógenes completará 100 dias de vida?

b) Que dia da semana Diógenes completará 20 anos?

$\boxed{18}$ *Calendário Jupiteriano – Solução*

a) Se ele nasceu em 11 de Plutônio de 1.999, viveu $17-11=6$ dias neste mês, 19 dias em Ílius, 17 dias em Terrius, 19 dias em Eraclitus, 17 dias em Raley, 17 dias em Julius e 5 em Uranius, ou seja, Diógenes completará 100 dias em 5 de Uranius de 2.000.

b) Cada ano neste calendário possui $17\cdot 4+19\cdot 3=68+57=125$ dias. Sendo assim, 20 anos são $20\cdot 125=2.500$ dias. Quando dividimos 2.500 por 7, obtemos quociente 357 e resto 1, ou seja, são 357 semanas completas e mais um dia. Como Diógenes nasceu em um domingo, completará 20 anos em uma segunda (um dia após o domingo).

$\boxed{19}$ *Bronquinha e seu suco de frutas*

Bronquinha consegue cortar a grama de seu quintal em 3 horas, mas se ele tomar suco de frutas *Gummy*, ele corta em 2 horas. Em determinado dia, Bronquinha começou a cortar a grama às 10 horas e, em certo momento, tomou o suco de frutas *Gummy*, terminando de cortar a grama às 12 horas e 30 minutos. Que horas Bronquinha tomou o suco de frutas *Gummy*?

$\boxed{19}$ *Bronquinha e seu suco de frutas – Solução*

Seja A a área de grama a ser cortada. Assim, sem tomar o suco, a velocidade com a qual Bronquinha corta a grama é $\dfrac{A}{3}$, enquanto que tomando o suco a velocidade é $\dfrac{A}{2}$. Seja t o tempo que Bronquinha corta a grama sem tomar o suco, na situação proposta, temos:

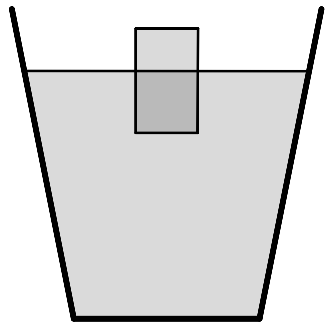
$$\begin{aligned}
\frac{A}{3}\cdot t+\frac{A}{2}\cdot(2,5-t) &= A\\
\frac{t}{3}+\frac{2,5-t}{2} &= 1\\
2t+7,5-3t &= 6\\
t &= 1,5.
\end{aligned}$$

Portanto, se Bronquinha começou a cortar a grama às 10 h, ele tomou o suco às 11 horas e 30 minutos.

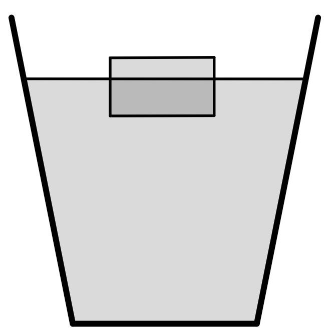
$\boxed{20}$ *A rolha hexagonal no copo d'água*

Luísa faz experiências com uma rolha e um copo d'água. Por conta de sua densidade, uma rolha fica com apenas 60% de seu volume imerso na água. A rolha da experiência de Luísa tem formato de um prisma hexagonal regular, ou seja, sua base é um hexágono regular, com 3 cm de altura e 2 cm do diâmetro da circunferência que circunscreve a base.

a) Se a rolha ficar "em pé", como na figura, qual a altura da parte não imersa?



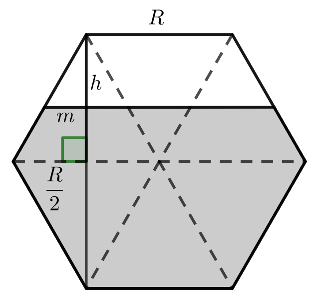
b) Se a rolha ficar "deitada", como na figura, qual a altura da parte não imersa, se duas das faces laterais (a de cima e a de baixo) ficarem paralelas ao nível da água?



$\boxed{20}$ *A Rolha Hexagonal no Copo D'água – Solução*

a) Como a altura da rolha é de $3\,cm$, e a parte fora da água corresponde a 40%, então esta altura corresponde a $0,4 \cdot 3 = 1,2\,cm$.

b) Vamos analisar a figura abaixo, que representa uma seção transversal da rolha com sua parte inferior imersa. Vamos lembrar que um hexágono regular pode ser dividido em seis triângulos equiláteros e também que a altura de um triângulo equilátero de lado R pode ser calculado como $\dfrac{R\sqrt{3}}{2}$.



Pela figura, temos que h é a altura de um triângulo equilátero de lado $2m$, ou seja, $h = m\sqrt{3}$. Como a área não imersa é 40% da área do hexágono, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{(R+R+2m)\cdot h}{2} &= \frac{4}{10}\cdot\frac{6\cdot R^2\sqrt{3}}{4}\\
\left(R+\frac{\sqrt{3}h}{3}\right)h &= \frac{3}{5}\cdot R^2\sqrt{3}\\
5h^2+5Rh\sqrt{3}-9R^2 &= 0\\
h &= \frac{-5R\sqrt{3}\pm\sqrt{75R^2+180R^2}}{10}\\
h &= \frac{-5R\sqrt{3}\pm R\sqrt{255}}{10}\\
h &= \frac{R}{10}\left(\pm\sqrt{255}-5\sqrt{3}\right).
\end{aligned}$$

Como $R = 1\ cm$, temos que a altura da parte da rolha não imersa é $h = \dfrac{\sqrt{255}-5\sqrt{3}}{10}$ cm.

21 *Estacionamento lotado*

Em um estacionamento existem motos, carros, ônibus e caminhões, em um total de 80 veículos e 540 rodas. Cada moto tem 2 rodas, cada carro tem 4, cada ônibus tem 6 e cada caminhão tem 8. O número de carros é a soma do número de motos com o número de ônibus. Quantos são os caminhões neste estacionamento, se este número é menor que 50?

21 *Estacionamento lotado – Solução*

Sejam as quantidades de motos, carros, ônibus e caminhões iguais a m, k, o e c respectivamente. Organizando as informações, temos:

$$\begin{cases} m+k+o+c &= 80 & (I) \\ 2m+4k+6o+8c &= 540 & (II) \\ k &= m+o & (III). \end{cases}$$

Substituindo (III) em (II) e (I), chegamos a:

$$\begin{cases} 2m+2o+c &= 80 & (IV) \\ 3m+5o+4c &= 270 & (V). \end{cases}$$

Substituindo (IV) em (V), temos:

$$\begin{aligned} 3m+5o+4(80-2m-2o) &= 270 \\ 3m+5o+320-8m-8o &= 270 \\ 5m+3o &= 50 \\ o &= \frac{50-5m}{3}. \end{aligned}$$

Voltando a (IV), temos:

$$\begin{aligned} 2m+2\left(\frac{50-5m}{3}\right)+c &= 80 \\ c &= 80-2m+\frac{10m-100}{3} \\ c &= \frac{4m+140}{3}. \end{aligned}$$

Substituindo agora os resultados encontrados em (I), chegamos a:

$$\begin{aligned} m+k+\frac{50-5m}{3}+\frac{4m+140}{3} &= 80 \\ k &= \frac{50-2m}{3}. \end{aligned}$$

Chegamos, assim, à solução do sistema

$$\{(m,k,o,c)\} = \left\{\left(m, \frac{50-2m}{3}, \frac{50-5m}{3}, \frac{4m+140}{3}\right)\right\}.$$

De $o = \dfrac{50-5m}{3} \in \mathbb{N}$, concluímos que $m \in \{1,4,7,10\}$. Vamos analisar cada um dos casos:

caso	m	k	o	c
1°	1	16	15	48
2°	4	14	10	52

caso	m	k	o	c
3°	7	12	5	56
4°	10	10	0	60

Como a quantidade de caminhões deve ser menor que 50, são 48 caminhões no estacionamento.

22 *As pedras do lago*

Às margens de um lago circular, existem pedras numeradas de 1 a 10, no sentido horário. O sapo Frog parte da pedra 1 e salta no sentido horário apenas nestas 10 pedras.

a) Se Frog salta de 2 em 2 pedras, ou seja, ele vai da pedra 1 para a 3, da 3 para a 5 e assim por diante, após 100 saltos em que pedra estará?

b) Se no primeiro salto, Frog vai para a pedra 2, no segundo para a pedra 4, no terceiro para a pedra 7, ou seja, em cada salto ele pula uma pedra a mais que no salto anterior. Em que pedra Frog estará após 100 saltos?

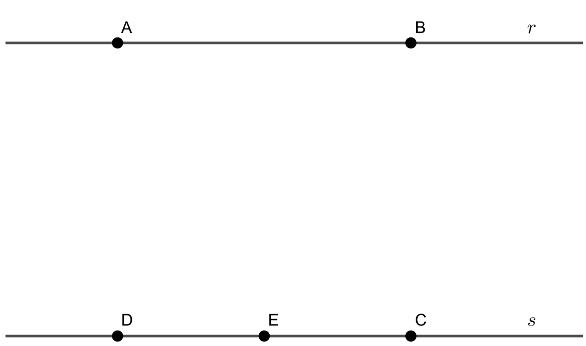
22 *As pedras do lago – Solução*

a) Depois de 5 saltos, Frog volta para a pedra 1 e incia a mesma sequência. Como 100 é múltiplo de 5, no 100° salto ele vai para a pedra 1.

b) No 1° salto ele se desloca 1 pedra; no 2°, 2 pedras; no 3°, 3 pedras e assim até o último salto quando se desloca 100 pedras. O total de deslocamentos foi de $\frac{(1+100)\cdot 100}{2} =$ 5.050. Como a cada 10 deslocamentos, ele volta para a pedra 1 e 5.050 é múltiplo de 10, após 100 saltos, Frog volta para a pedra 1.

23 *Retas paralelas, quadrado e triângulos*

Sobre uma reta r, marcam-se os pontos A e B, e sobre uma reta s, paralela à r, marcam-se os pontos C e D, de maneira que $ABCD$ seja um quadrado. Marca-se também o ponto E no segmento CD.



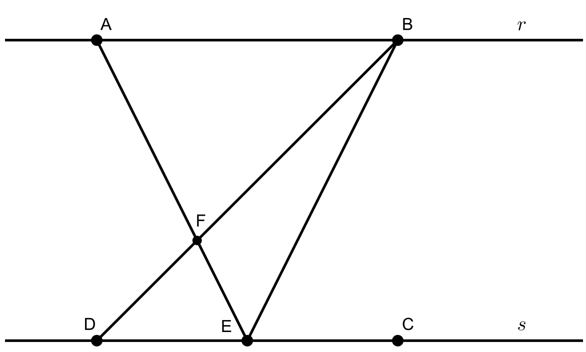
a) Qual a razão entre as áreas dos triângulos ABE e BCD, se E for o ponto médio de CD?

b) Qual a razão $\dfrac{DE}{EC}$, para que a área do triângulo BFE seja o dobro da área do DFE, sendo F a intersecção dos segmentos AE e BD?

23 *Retas paralelas, quadrado e triângulos – Solução*

a) Seja $2k$ a área do quadrado $ABCD$, então a área do triângulo ABE é igual k e a área do triângulo BCD também é igual a k, portanto, a razão entre as áreas é 1.

b) Se $\dfrac{A_{BFE}}{A_{DFE}} = 2$, então $\dfrac{BF}{FD} = 2$. Se $r//s$, então $\triangle ABF \sim \triangle DEF$, de razão 2 e, consequentemente, $\dfrac{AB}{DE} = 2$, segue que E é o ponto médio do segmento CD, ou seja, $\dfrac{DE}{EC} = 1$.

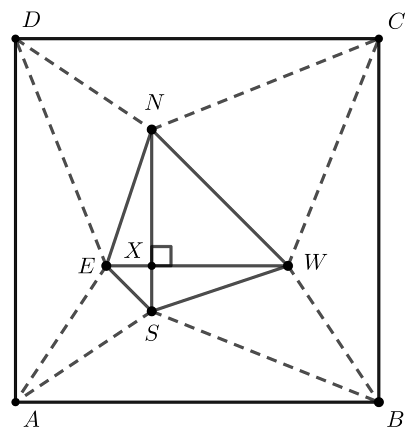


24 *O quadrilátero dentro do quadrado*

Considere o quadrado $ABCD$ com lados de comprimento 1, como no desenho a seguir. Um segmento horizontal EW e um segmento vertical NS, ambos de comprimento $1/2$, estão inteiramente dentro do quadrado e se intersectam no ponto X formando um ângulo de 90°.

a) Qual a área do quadrilátero $NESW$?

b) Qual a soma das áreas dos triângulos EDN, AES, BSW e CNW?



24 *O quadrilátero dentro do quadrado – Solução*

a) A área do quadrilátero $NESW$ é dada por

$$\begin{aligned} A_{NESW} &= A_{ENW} + A_{ESW} \\ &= \frac{EW \cdot NX}{2} + \frac{EW \cdot XS}{2} \\ &= \frac{EW \cdot (NX + XS)}{2} \\ &= \frac{1/2 \cdot 1/2}{2} \\ &= \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

b) A soma das áreas dos triângulos CDN e ABS é $1/4$, pois cada um tem base de comprimento 1 e suas alturas somam $1/2$. Analogamente, a soma das áreas dos triângulos AED e BCW é também $1/4$. A soma das áreas dos quatro triângulos mencionados no enunciado é o complementar das áreas dos triângulos CDN, ABS, ADE, BCW e do quadrilátero $NESM$, portanto, a área procurada é

$$1 - \frac{1}{8} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3}{8}.$$

25 *Transformações multissômicas*

Liu e Lia brincam no quadro da sala de aula. Um deles escreve dois números naturais positivos e o outro tem que fazer transformações MULTISSÔMICAS até transformar o menor no maior. Transformação MULTISSÔMICA é trocar um número $a = m + n$ por $m \cdot n$, por exemplo, podemos trocar 10 por $2 \cdot 8 = 16$.

a) Liu escreve no quadro 6 e 15. Mostre como Lia pode transformar 6 em 15.

b) Lia escreve 5 e 2.019. Mostre como Liu pode fazer a transformação.

c) A professora gostou da brincadeira e resolveu participar, escrevendo 7 e x e perguntou quantos são os possíveis valores de x para transformar 7 em x com exatamente duas transformações MULTISSÔMICAS. Qual deve ser a resposta de Liu e Lia?

$\boxed{25}$ *Transformações Multissômicas – Solução*

a) Temos:

$$6 = 2 + 4 \to 2 \cdot 4 = 8 \to 8 = 3 + 5 \to 3 \cdot 5 = 15.$$

b) Qualquer natural positivo n pode ser escrito como $n = (n-1)+1$ e, consequentemente, pode ser transformado em $(n-1)$. Começando com 5, temos:

$$5 = 2+3 \to 2\cdot 3 = 6 \to 6 = 3+3 \to 3\cdot 3 = 9 \to 9 = 4+5 \to 4\cdot 5 = 20 \to 20 = 10+10 \to$$
$$10\cdot 10 = 100 \to 100 = 30+70 \to 30\cdot 70 = 2.100.$$

A partir de agora basta transformar cada número no seu antecessor até chegarmos a 2.019.

c) O 7 pode ser transformado em 3 números ($1\cdot 6 = 6$, $2\cdot 5 = 10$ e $3\cdot 4 = 12$). Vamos analisar cada um dos casos:

I) 6: são 3 transformações ($1\cdot 5 = 5$, $2\cdot 4 = 8$ e $3\cdot 3 = 9$);

II) 10: são 5 transformações ($1\cdot 9 = 9$, $2\cdot 8 = 16$, $3\cdot 7 = 21$, $4\cdot 6 = 24$, $5\cdot 5 = 25$);

III) 12: são 6 transformações ($1\cdot 11 = 11$, $2\cdot 10 = 20$, $3\cdot 9 = 27$, $4\cdot 8 = 32$, $5\cdot 7 = 35$, $6\cdot 6 = 36$).

Encontramos, portanto, 13 valores diferentes para x.

26 *Cidades, rodovias, ferrovia*

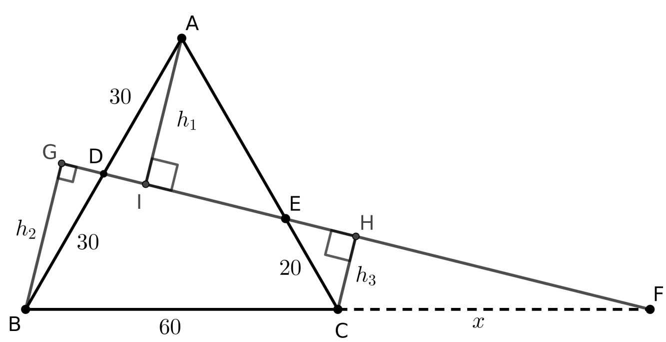
As cidades A, B e C estão posicionadas nos vértices de um triângulo equilátero com 60 km de lado. Entre elas, ligando duas a duas, existem três rodovias, AB, AC e BC, todas em linha reta. Uma ferrovia será construída, também em linha reta, devendo interceptar AB a 30 km de A; AC a 20 km de C; e, por fim, a rodovia BC, depois de C.

a) Se h_1, h_2 e h_3 são as distâncias de A, B e C para a ferrovia, respectivamente, verifique que

$$\frac{AD}{BD}=\frac{h_1}{h_2},\quad \frac{BF}{CF}=\frac{h_2}{h_3},\quad \text{e}\quad \frac{CE}{AE}=\frac{h_3}{h_1}.$$

b) Qual a distância entre a cidade C e a intersecção entre a ferrovia e a rodovia BC?

26 *Cidades, Rodovias, Ferrovia – Solução*



a) Na figura anterior, os triângulos retângulos $\triangle ADI$ e $\triangle BGD$ possuem os mesmos ângulos, pois $\angle ADI = \angle GDB$ e $\angle AID = \angle DGB = 90°$. Portanto, eles são semelhantes e daí

$$\frac{AD}{BD}=\frac{h_1}{h_2}.$$

As demais igualdades decorrem das semelhanças $\triangle BGF \sim \triangle CHF$ e $\triangle CEH \sim \triangle AEI$.

b) Se denotarmos a distância CF por x, pelo item anterior temos:

$$\begin{aligned}\frac{AD}{DB}\cdot\frac{BF}{FC}\cdot\frac{CE}{EA} &= \frac{h_1}{h_2}\cdot\frac{h_2}{h_3}\cdot\frac{h_3}{h_1}\\ \frac{30}{30}\cdot\frac{60+x}{x}\cdot\frac{20}{40} &= 1\\ 60+x &= 2x\\ x &= 60.\end{aligned}$$

Portanto, a distância do ponto de intersecção da rodovia BC com a ferrovia à cidade C é 60 km.

$\boxed{27}$ *Frações semelhantes*

Dois inteiros positivos x e y são tais que:

$$\frac{2010}{2011} < \frac{x}{y} < \frac{2011}{2012}.$$

Encontre o menor valor possível para a soma $x + y$.

$\boxed{27}$ *Frações semelhantes – Solução*

Como $\dfrac{2011}{2012} < 1$, temos $x < y$ e assim $x = y - d$, com d inteiro positivo. De

$$\frac{2011-1}{2011} < \frac{y-d}{y} < \frac{2012-1}{2012}$$

segue que

$$\frac{1}{2012} < \frac{d}{y} < \frac{1}{2011}.$$

Assim,

$$2011d < y < 2012d. \tag{1}$$

Se $d = 1$, a desigualdade (1) não possui solução inteira. Se $d = 2$, a única possibilidade é $y = 4023$. Nesse caso, $x + y = 8044$. Para $d \geq 3$,

$$\begin{aligned} x + y &= 2y - d \\ &> 4021d \\ &\geq 12063. \end{aligned}$$

Consequentemente, o valor mínimo da soma é obtido com $d = 2$ e nesse caso $x + y = 8044$.

$\boxed{28}$ *O número de dígitos*

Seja $m = 999\ldots99$ o número formado por 77 dígitos iguais a 9 e seja $n = 777\ldots77$ o número formado por 99 dígitos iguais a 7. Qual o número de dígitos de $m \cdot n$?

$\boxed{28}$ *O número de dígitos – Solução*

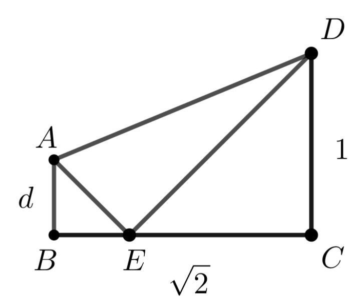
Como $m + 1 = 10^{77}$, perceba que:

$$\begin{aligned} m \cdot n &= (m+1) \cdot n - n \\ &= \underbrace{777\ldots77}_{99}\underbrace{000\ldots00}_{77} - \underbrace{777\ldots77}_{99}. \end{aligned}$$

Como $\underbrace{777\ldots77}_{99}\underbrace{000\ldots00}_{77}$ possui $99+77$ dígitos e $\underbrace{777\ldots77}_{99}$ é menor que $\underbrace{777\ldots77}_{175}$, o resultado da subtração anterior ainda terá 176 dígitos.

$\boxed{29}$ *A folha de papel dobrada*

Uma folha de papel com lados de comprimentos $1\,cm$ e $\sqrt{2}\,cm$ foi dobrada, como mostrado na figura abaixo, de modo que um vértice fique sobre o lado oposto. Qual o valor do comprimento d em centímetros?

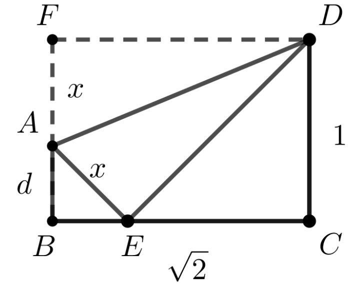


$\boxed{29}$ *A folha de papel dobrada – Solução*

Desdobrando a folha de papel, obtemos o retângulo $BCDF$. Daí $BC = DF = DE$ e $AF = AE = x\,cm$. Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo CDE, temos

$$CE = \sqrt{DE^2 - CD^2} = \sqrt{2-1} = 1.$$

Consequentemente, $BE = (\sqrt{2}-1)\,cm$ e o triângulo CED é retângulo isósceles. Como $\angle AED = 90°$, isso nos leva a $\angle BEA = 180° - 90° - 45° = 45°$. Daí, ABE também é um triângulo retângulo isósceles e $d = BE = (\sqrt{2}-1)\,cm$.

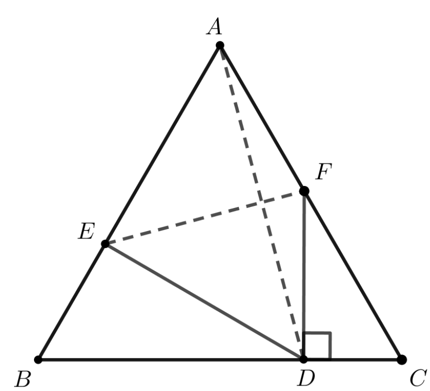


Observação: Como $CD = BF = 1\,cm$, podemos concluir que $x = (1-d)\,cm$. Novamente usando o Teorema de Pitágoras, dessa vez no triângulo ABE, obtemos

$$\begin{aligned} AB^2 + BE^2 &= AE^2 \\ d^2 + (\sqrt{2}-1)^2 &= (1-d)^2 \\ d^2 + 2 - 2\sqrt{2} + 1 &= 1 - 2d + d^2 \\ d &= \sqrt{2} - 1\,cm. \end{aligned}$$

$\boxed{30}$ *O triângulo dobrado*

Na figura a seguir, ABC é um triângulo equilátero de papel com lado $1\,m$ que foi dobrado ao longo do segmento EF de modo que o vértice A caísse sobre o lado BC, onde está o ponto D na figura. Suponha que DF é perpendicular a BC.



a) Determine o ângulo $\angle AED$.

b) Determine o comprimento do segmento CD.

c) Determine a razão entre as áreas dos triângulos AEF e ABC.

$\boxed{30}$ *O triângulo dobrado – Solução*

a) Como $\angle FDC = 90°$, segue que $\angle DFC = 30°$ e $\angle AFD = 180° - \angle DFC = 150°$. A dobradura ao longo de EF nos diz que os triângulos AEF e DEF são congruentes. Daí $\angle AFE = \angle EFD = \dfrac{150°}{2} = 75°$ e $\angle AEF = 180° - 75° - 60° = 45°$. Consequentemente, $\angle AED = 2 \cdot 45° = 90°$.

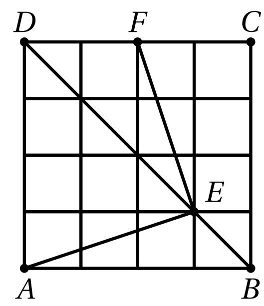
b) Seja x o comprimento de CD, então $\dfrac{CD}{CF} = \operatorname{sen} 30° = 1/2$ e assim $CF = 2x$. Além disso, $\dfrac{DF}{CF} = \cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Logo, $AF = DF = \sqrt{3}x$. Finalmente, $1 = AF + FC = \sqrt{3}x + 2x$ implica $x = \dfrac{1}{2+\sqrt{3}} = (2-\sqrt{3})\, m$.

c) Como $\angle EAF = \angle EDF = 60°$, segue que $\angle EDB = 30°$. Além disso, $\angle BED = 180° - 90° = 90°$ e $BD = 1 - CD = \sqrt{3} - 1$. Portanto, de $\dfrac{BE}{BD} = \operatorname{sen} 30° = \dfrac{1}{2}$, temos $BE = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ e $AE = 1 - BE = \dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$. Assim

$$\begin{aligned}
\frac{A_{AEF}}{A_{ABC}} &= \frac{\dfrac{AE \cdot AF \cdot \operatorname{sen}\angle EAF}{2}}{\dfrac{AB \cdot AC \cdot \operatorname{sen}\angle EAF}{2}} \\
&= \frac{(3-\sqrt{3})\cdot(2\sqrt{3}-3)}{2} \\
&= \frac{9\sqrt{3}-15}{2}.
\end{aligned}$$

31 *Ângulo no quadrado*

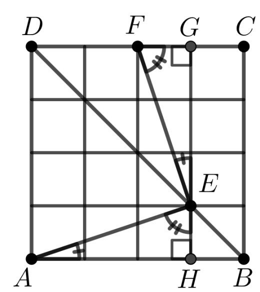
Na figura abaixo, todos os quadradinhos do tabuleiro são iguais. Qual o valor do ângulo $\angle AEF$? Justifique.



$\boxed{31}$ *Ângulo no quadrado – Solução*

Marque os pontos G e H como indicados na figura. Os triângulos EFG e AEH correspondem a metade de um retângulo 1×3 e consequentemente $\angle FEG = \angle EAH$ e $\angle EFG = \angle AEH$. Como esses triângulos são retângulos, temos $\angle EAH + \angle AEH = 90^\circ$. Assim

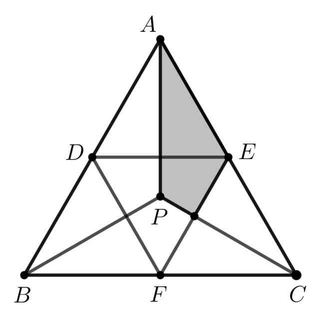
$$\begin{aligned} \angle AEF &= 180^\circ - (\angle AEH + \angle FEG) \\ &= 180^\circ - 90^\circ \\ &= 90^\circ. \end{aligned}$$



ENUNCIADOS E SOLUÇÕES DO NÍVEL 3

1 *A fração da área*

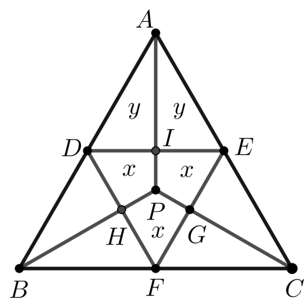
Na figura a seguir, ABC é um triângulo equilátero, D, E e F são seus pontos médios e P é o seu centro. Qual a fração que a área sombreada representa do total do triângulo ABC?



1 *A fração da área – Solução*

Os pontos I, G e H são as interseções dos segmentos DE, EF e DF com os segmentos AP, BP e CP. Pela simetria da figura, as áreas dos quadriláteros $EIPG$, $DIPH$ e $FGPH$ medem o mesmo valor $x\,cm^2$. Além disso, pelo mesmo argumento, as áreas dos triângulos AEI e ADI também medem um mesmo valor $y\,cm^2$. Os triângulos ADE, DEF, DBF e CEF possuem a mesma área $S\,cm^2$ e assim $x = S/3$ e $y = S/2$. A fração procurada é

$$\begin{aligned}\frac{A_{AEGP}}{A_{ABC}} &= \frac{y+x}{4S}\\ &= \frac{S/2+S/3}{4S}\\ &= \frac{5}{24}.\end{aligned}$$



2 *A soma de frações*

a) Encontre o valor da soma

$$\frac{1}{1+1/x}+\frac{1}{1+x}.$$

b) Encontre o valor da soma

$$\frac{1}{2019^{-2019}+1}+\ldots+\frac{1}{2019^{-1}+1}+\frac{1}{2019^{0}+1}+\frac{1}{2019^{1}+1}+\quad\ldots\quad+\frac{1}{2019^{2019}+1}.$$

2 *A soma de frações – Solução*

a) Temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+1/x}+\frac{1}{1+x} &= \frac{1}{(x+1)/x}+\frac{1}{1+x}\\ &= \frac{x}{1+x}+\frac{1}{1+x}\\ &= 1.\end{aligned}$$

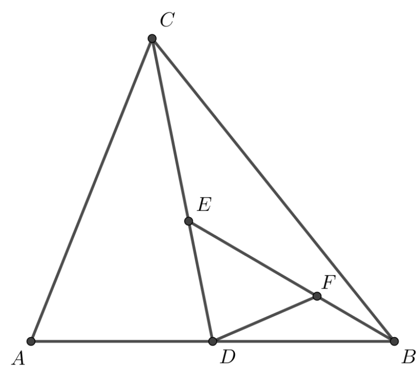
b) Em virtude do item anterior, considerando $x=a^b$, podemos agrupar as frações $\frac{1}{a^{-b}+1}$ e $\frac{1}{a^b+1}$ em pares que somam 1. Retirando o termo $\frac{1}{2019^0+1}=1/2$, podemos reescrever a soma dos termos restantes como

$$\left(\frac{1}{2019^{-2019}+1}+\frac{1}{2019^{2019}+1}\right)+\left(\frac{1}{2019^{-2018}+1}+\frac{1}{2019^{2018}+1}\right)\quad+$$
$$\left(\frac{1}{2019^{-2017}+1}+\frac{1}{2019^{2017}+1}\right)+\left(\frac{1}{2019^{-2016}+1}+\frac{1}{2019^{2016}+1}\right)\quad+\quad\ldots$$

A soma desses 2019 pares é 2019. Assim, a soma pedida vale $2019+1/2=\frac{4039}{2}$.

3 *Razões de segmentos*

Na figura abaixo, D é o ponto médio do lado AB, $CE : DE = 5 : 3$ e $BF : EF = 1 : 3$. Se a área do triângulo ABC é $192\,cm^2$, determine a área do triângulo BDF.



3 *Razões de segmentos – Solução*

Denote os comprimentos de BD, BF e DE por x, z e $3y$, respectivamente. Em virtude das proporções dadas, segue que $EF = 3z$, $CE = 5y$ e $AD = x$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\frac{A_{BDF}}{A_{BDE}} &= \frac{z}{3z+z}\\
\frac{A_{BDE}}{A_{CDB}} &= \frac{3y}{3y+5y}\\
\frac{A_{CDB}}{A_{ABC}} &= \frac{x}{x+x}.
\end{aligned}$$

Multiplicando essas equações, temos

$$\frac{A_{BDF}}{A_{ABC}} = \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{2}.$$

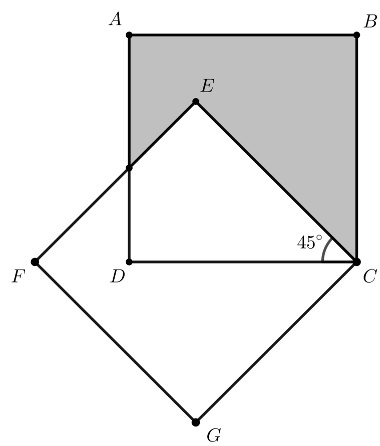
Daí,

$$A_{BDF} = \frac{192\cdot 3}{64} = 9.$$

Observação: Estamos denotando a área do triângulo XYZ por A_{XYZ}.

4 *A área sombreada*

Na figura a seguir, os quadrados $ABCD$ e $CEFG$ possuem o mesmo comprimento de lado. Determine a razão entre a área sombreada e a área do quadrado $ABCD$.



4 *A área sombreada – Solução*

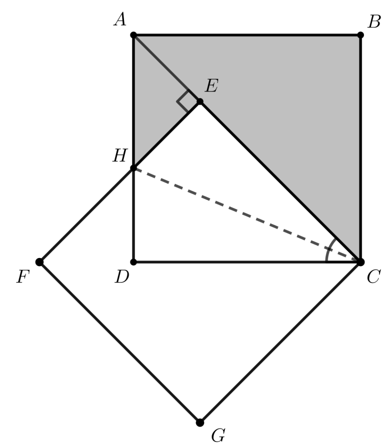
Denote por l o comprimento dos lados dos quadrados. Pelo Teorema de Pitágoras, $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{2}l$. Seja H a interseção de AD e EF. Como $CE = l$, segue que $AE = \sqrt{2}l - l = (\sqrt{2}-1)l$. De $\angle DAC = 45^\circ$ e $\angle AEH = 90^\circ$, podemos concluir que AEH é um triângulo retângulo isósceles e daí $HE = AE = (\sqrt{2}-1)l$ e $AH = \sqrt{2} \cdot AE = (2-\sqrt{2})l$. Logo, $DH = l - (2-\sqrt{2})l = (\sqrt{2}-1)l$ e as áreas dos triângulos HEC e HDC valem:

$$\begin{aligned}[CEH] &= \frac{EH \cdot CE}{2} \\ &= \frac{(\sqrt{2}-1)l^2}{2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[CDH] &= \frac{DH \cdot DC}{2} \\ &= \frac{(\sqrt{2}-1)l^2}{2}.\end{aligned}$$

Assim, a área sombreada mede $[ABCD] - [CEH] - [CDH] = l^2 - (\sqrt{2}-1)l^2 = (2-\sqrt{2})l^2$. Finalmente, o quociente procurado é

$$\frac{[ABCEH]}{[ABCD]} = \frac{(2-\sqrt{2})l^2}{l^2} = 2-\sqrt{2}.$$



5 *Uma fatoração diferente*

Os três inteiros positivos a, b e c satisfazem

$$4^a \cdot 5^b \cdot 6^c = 8^8 \cdot 9^9 \cdot 10^{10}.$$

Determine o valor de $a+b+c$.

5 *Uma fatoração diferente – Solução*

$$\begin{aligned} 4^a \cdot 5^b \cdot 6^c &= 8^8 \cdot 9^9 \cdot 10^{10} \\ 2^{2a+c} \cdot 5^b \cdot 3^c &= 2^{24} \cdot 3^{18} \cdot 5^{10} \cdot 2^{10} \\ 2^{2a+c-34} \cdot 3^{c-18} \cdot 5^{b-10} &= 1 \end{aligned}$$

Pelo Teorema Fundamental da Aritmética, todos os expoentes do membro esquerdo da última equação são nulos. Daí, $c=18$, $2a+c=34$ e $b=10$. Substituindo o valor de c na segunda equação, encontramos $a=8$. Portanto, $a+b+c=18+8+10=36$.

6 *O jogo das trocas*

Em um determinado jogo, o número 1 está escrito no quadro. Em qualquer momento, um movimento permitido consiste em trocar o número escrito no quadro pelo seu dobro ou por outro número que possui os mesmos dígitos que ele. Por exemplo, se estiver escrito no quadro o número 137, um movimento permitido consiste em trocá-lo por $137 \cdot 2 = 274$ ou por 173, 317, 371, 713 ou 731. Determine se após um número finito de operações é possível obtermos os seguintes números:

a) 10^3.

b) 10^9.

c) 9876543210.

6 *O jogo das trocas – Solução*

a) Sim, é possível. Após realizar o movimento de multiplicação por 2 nove vezes, podemos trocar o 1 original por $2^9 = 512$. Em seguida, podemos trocá-lo por 125. Multiplicando-o por 2 três vezes, podemos trocá-lo por $125 \cdot 2^3 = 1000$.

b) Sim, também é possível. Note que $1000 = 1 \cdot 10^3$. Podemos repetir as operações do item anterior trocando o fator 1 por 10^3:

$$1 \cdot 10^3 \to 512000 \to 125000 \to 1000000.$$

Esse último número pode ser escrito como $1 \cdot 10^6$. Novamente, repetindo as operações do primeiro item, podemos obter as seguintes trocas:

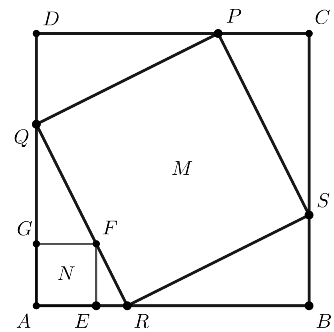
$$1 \cdot 10^6 \to 512 \cdot 10^6 \to 125 \cdot 10^6 \to 1000 \cdot 10^6.$$

Esse último número é igual a 10^9.

c) Não é possível. Quando um número que não é múltiplo de 3 é multiplicado por 2, ele continua sendo um número que não é múltiplo de 3. Em virtude do critério de divisibilidade por 3, o mesmo acontece quando permutamos os seus dígitos. Como o número inicial não é divisível por 3, não é possível após algumas das operações descritas trocá-lo por qualquer múltiplo de 3. Como a soma dos dígitos de 987654321 é um múltiplo de 3, é impossível obtê-lo.

7 *As áreas dos quadrados*

Na figura a seguir, o quadrado maior possui área de $1\,cm^2$ e o quadrado do meio área M. A área do quadrado menor, que possui um vértice sobre um lado do quadrado do meio, é N. Qual o valor de N em função de M?



7 *As áreas dos quadrados – Solução*

Sejam $AQ = x\,cm$, $QR = a\,cm$ e $AG = s\,cm$. Como a área do quadrado maior é $1\,cm^2$, segue que $AD = 1\,cm$. Os triângulos retângulos ARQ e DQP possuem os mesmos ângulos, pois

$$\begin{aligned}\angle AQR &= 180^\circ - \angle PQR - \angle DQP\\ &= 90^\circ - \angle DQP\\ &= \angle DPQ.\end{aligned}$$

Como $QR = QP$, os triângulos DPQ e AQR são congruentes. Assim, $AR = DQ = 1 - x$. De $QF \parallel AR$, segue que os triângulos QGF e QAR são semelhantes e assim

$$\begin{aligned}\frac{s}{1-x} &= \frac{x-s}{x}\\ sx &= x - x^2 - s + sx\\ s &= x - x^2.\end{aligned}$$

Pelo Teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo QAR, segue que

$$\begin{aligned}(1-x)^2 + x^2 &= a^2\\ 1 - a^2 &= 2x - 2x^2\\ 1 - M &= 2s.\end{aligned}$$

Daí,

$$N = s^2 = \left(\frac{1-M}{2}\right)^2.$$

8 *As somas dos elementos do conjunto*

Um conjunto contém 4 números. As seis somas de dois elementos desse conjunto são 189, 320, 287, 264, x e y. Encontre o maior valor possível para $x + y$.

8 *As somas dos elementos do conjunto – Solução*

Sejam a, b, c e d os quatro números do conjunto. Temos dois casos a considerar:

I) $x = a+b$ e $y = c+d$ (somas sem parcelas em comum). Então $a+c$, $a+d$, $b+c$ e $b+d$ são, em alguma ordem, os números 189, 320, 287 e 264. Adicionando essas quatro somas, obtemos $a+b+c+d = 530$. Assim, $x+y = 530$.

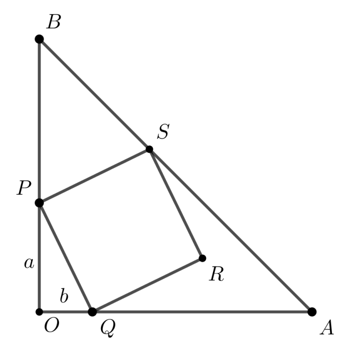
II) $x = a+b$ e $y = a+c$ (somas com uma parcela em comum). Nesse caso, $a+d$, $b+c$, $b+d$ e $c+d$ são, em alguma ordem, os números 189, 320, 287 e 264. Temos a seguinte estimativa:

$$\begin{aligned} x+y &= 2(a+d)+2(b+c)-(b+d)-(c+d) \\ &\leq 2(320+287)-(264+189) \\ &= 761. \end{aligned}$$

Esse valor pode ser obtido com o exemplo $(a,b,c,d) = (237,181,106,83)$.

9 *O quadrado dentro do triângulo*

No triângulo retângulo isósceles AOB, os pontos P, Q e S são escolhidos sobre os lados OB, OA e AB, respectivamente, de modo que $PQRS$ é um quadrado. Se os comprimentos de OP e OQ são a e b, respectivamente, e a área do quadrado $PQRS$ é $2/5$ da área do triângulo AOB, determine o valor de a/b.



9 *O quadrado dentro do triângulo – Solução*

Seja C o pé da perpendicular do ponto S ao segmento OB. Os triângulos SPC e PQO possuem os mesmos ângulos, pois

$$\begin{aligned} \angle CPS &= \angle 180^\circ - \angle SPQ - \angle OPQ \\ &= 90^\circ - \angle OPQ \\ &= \angle PQO. \end{aligned}$$

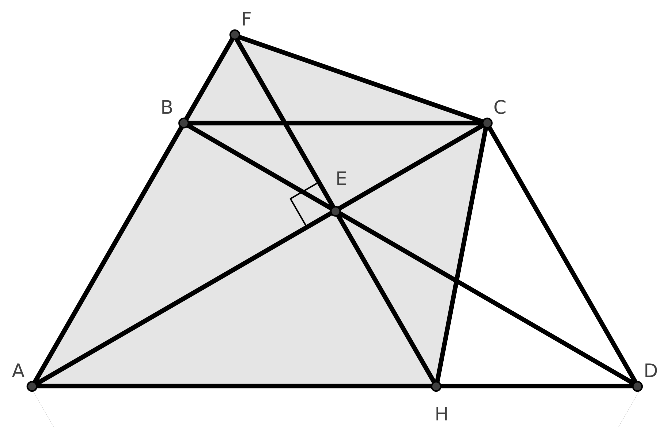
Como $PS = PQ$, esses triângulos são congruentes pelo caso $A.L.A$. Assim $PC = b$, $CS = a$. Uma vez que BSC é um triângulo retângulo isósceles, obtemos $OB = 2a + b$. Consequentemente, a área do triângulo AOB é $(2a+b)^2/2$. Pelo Teorema de Pitágoras, a área do quadrado $PQRS$ é $PQ^2 = a^2 + b^2$. Daí

$$\begin{aligned} \frac{A_{PQRS}}{A_{OAB}} &= \frac{2}{5} \\ 5(a^2+b^2) &= (2a+b)^2 \\ a^2+4b^2 &= 4ab \\ (a-2b)^2 &= 0. \end{aligned}$$

Assim, $a = 2b$ e a razão procurada é $a/b = 2$.

10 *As diagonais do trapézio*

Considere o trapézio $ABCD$ de bases BC e AD de modo que $AB = BC = CD = 5$ e $AD = 10$. Seja E o ponto de interseção das diagonais AC e BD. A reta perpendicular a AC traçada por E intersecta o prolongamento de AB em F e a base AD em H.



a) Determine o comprimento de AH.

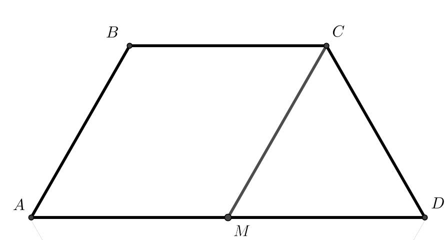
b) Determine o comprimento de AE.

c) Encontre a área do quadrilátero $AFCH$.

10 *As diagonais do trapézio – Solução*

a) Inicialmente, verificaremos que $ABCD$ é metade de um hexágono regular. Seja M o ponto médio de AD. Como BC e AM são iguais e paralelos, $ABCM$ é um paralelogramo. Além disso, como $AM = AB = BC$, segue que $CM = AB = CD = DM$. Assim, CDM é um triângulo equilátero. De modo semelhante, podemos obter $BM = CM = CD$. Daí os triângulos ABM, BCM e CDM são congruentes e a circunferência de centro M e raio CM passa por A, B, C e D. Logo

$$\angle BAD = 60^\circ \text{ e } \angle ABC = 180^\circ - \angle BAM = 120^\circ.$$



De $AB = BC$ segue que $\angle BAC = \angle BCA = \angle CAD$. Assim, $\angle BAC = \angle CAD = 30^\circ$. Como $FH \perp AE$, temos $\triangle AFH$ equilátero. Além disso, $\angle ACD = \angle DBA = 90^\circ$. Portanto, $EH \parallel CD$. Como os triângulos $\triangle BEC$ e $\triangle AED$ são semelhantes, temos

$$\frac{AH}{HD} = \frac{AE}{EC} = \frac{10}{5} = 2.$$

Por conseguinte $HD = 10/3$ e $AH = 20/3$.

b) No triângulo retângulo AEH, temos

$$AE = AH \cdot \cos 30^\circ = \frac{20}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{10\sqrt{3}}{3}.$$

c) Como as diagonais de $AFCH$ são perpendiculares, temos $[AFCH] = \dfrac{AC \cdot FH}{2}$. Pelo Teorema de Pitágoras, segue que

$$AC = \sqrt{AD^2 - CD^2} = \sqrt{100 - 25} = 5\sqrt{3}.$$

Outra forma de obter o comprimento desse segmento é calcular

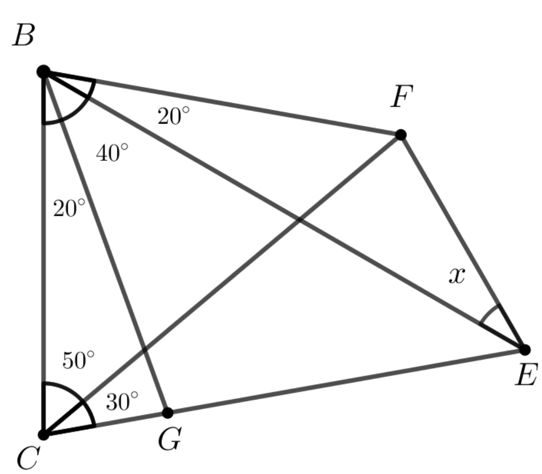
$$AC = AD \cdot \cos 30^\circ = 5\sqrt{3}.$$

Daí,

$$\begin{aligned} A_{AFCH} &= \frac{AC \cdot FH}{2} \\ &= \frac{AC \cdot AH}{2} \\ &= \frac{5\sqrt{3} \cdot 20/3}{2} \\ &= \frac{50\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$

11 *O valor do ângulo x*

No desenho a seguir, $\angle CBG = 20^\circ$, $\angle GBE = 40^\circ$, $\angle EBF = 20^\circ$, $\angle BCF = 50^\circ$ e $\angle FCE = 30^\circ$.

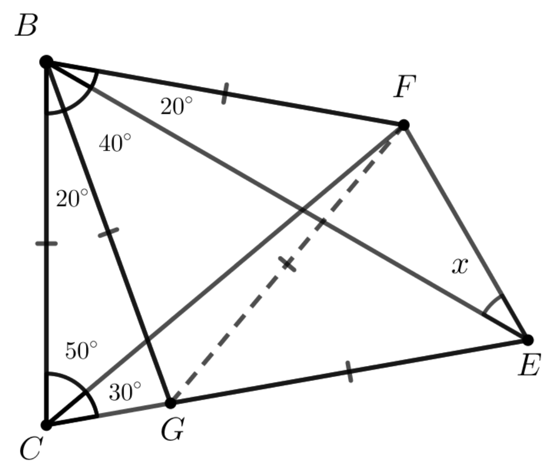


a) Verifique que $BG = BF$.

b) Verifique que $FG = EG$.

c) Encontre o valor da medida do ângulo x.

11 *O valor do ângulo x – Solução*



a) Temos

$$\angle CGB = 180^\circ - \angle BCG - \angle CBG = 80^\circ = \angle BCG.$$

Portanto, $BC = BG$. Por outro lado,

$$\angle BFC = 180^\circ - \angle CBF - \angle BCF = 50^\circ = \angle BCF,$$

daí $BC = BF$. Assim,

$$BG = BC = BF.$$

b) Como $BG = BF$ e $\angle GBF = 60^\circ$, o triângulo BFG é isósceles com ângulos da base dados por

$$\frac{180^\circ - \angle GBF}{2} = 60^\circ.$$

Ou seja, BFG é um triângulo equilátero e daí $FG = BG$. Como

$$\angle BGE = 180^\circ - \angle BGC = 100^\circ,$$

segue que

$$\angle GEB = 180^\circ - \angle BGE - \angle GBE = 40^\circ$$

e assim $\triangle BEG$ é isósceles com lado $EG = BG = FG$.

c) Como $\angle FGE = 180° - \angle BGF - \angle BGC = 40°$ e $FG = BG = EG$, segue que o triângulo EFG é isósceles com ângulo da base dado por

$$\frac{180° - 40°}{2} = 70°.$$

Assim, $x + 40° = 70°$, ou seja, $x = 30°$.

12 *O sistema com frações*

Se x, y e z são números reais positivos e

$$\frac{xy}{x+y} = a,\ \frac{xz}{x+z} = b,\ \text{e}\ \frac{yz}{y+z} = c.$$

a) Verifique que

$$x = \frac{ay}{y-a}.$$

b) Verifique que

$$x = \frac{2abc}{ac+bc-ab}.$$

12 *O sistema com frações – Solução*

a) Da primeira equação do enunciado, temos

$$\begin{aligned} \frac{xy}{x+y} &= a \\ xy &= ax + ay \\ x(y-a) &= ay \\ x &= \frac{ay}{y-a}. \end{aligned}$$

Note que a última divisão por $y - a$ é possível, pois se $y - a = 0$ segue que $ay = 0$ e isso é ímpossível, dado que a e x são positivos.

b) De forma semelhante ao item anterior, podemos concluir que

$$x = \frac{zb}{z-b} \text{ e } y = \frac{zc}{z-c}.$$

Isso nos permite eliminar y na identidade daquele item:

$$\begin{aligned} x &= \frac{a\left(\dfrac{zc}{z-c}\right)}{\dfrac{zc}{z-c}-a} \\ &= \frac{azc}{z-c}\cdot\frac{z-c}{zc-az+ac} \\ &= \frac{azc}{zc-az+ac}. \end{aligned}$$

Podemos escrever z em função de b e x a partir de

$$\begin{aligned} x &= \frac{zb}{z-b} \\ zx-bx &= zb \\ z &= \frac{bx}{x-b}. \end{aligned}$$

Finalmente, podemos escrever

$$\begin{aligned} x &= \frac{azc}{zc-az+ac} \\ &= \frac{\dfrac{abxc}{x-b}}{\dfrac{bcx}{x-b}-\dfrac{abx}{x-b}+\dfrac{ac(x-b)}{x-b}} \\ &= \frac{abcx}{x-b}\cdot\frac{x-b}{bcx-abx+ac(x-b)} \\ &= \frac{abcx}{bcx-abx+ac(x-b)}. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} bcx-abx+ac(x-b) &= abc \\ x(bc-ab+ac) &= 2abc \\ x &= \frac{2abc}{ac+bc-ab}. \end{aligned}$$

13 *Quadrado mágico III*

Um quadrado 3×3 está preenchido com os números a, b, c, d, e, f, g, h e i da seguinte forma:

c	f	i
b	e	h
a	d	g

Sabemos que ele é um quadrado mágico, isto é, existe um valor S que é igual as somas dos números em cada linha, coluna e cada uma das duas diagonais. Verifique que:

a) $2(a+c+g+i) = b+d+f+h+4e$.

b) $S = 3e$.

c) $ac+ci+ag+gi = e(b+d+f+h)$.

d) $2(a^2+c^2+g^2+i^2) = b^2+d^2+f^2+h^2+4e^2$.

13 *Quadrado mágico III – Solução*

a) Somando os números das linhas e colunas que não contém o quadradinho central, obtemos:

$$(a+b+c)+(a+d+g)+(c+f+i)+(g+h+i) = 4S.$$

Por outro lado, somando a linha e a coluna que contém o quadrado central, temos:

$$2S = (b+e+h)+(d+e+f).$$

Comparando as duas equações, podemos concluir que

$$(a+b+c)+(a+d+g)+(c+f+i)+(g+h+i) = 4S = 2(b+e+h)+2(d+e+f).$$

Finalmente, subtraindo de cada membro o número $(b+d+f+h)$, ficamos com

$$2(a+c+g+i) = b+d+f+h+4e.$$

b) Considerando todas as linhas, colunas e diagonais que contém o quadrado central, temos:

$$a+i=c+g=b+h=d+f=S-e.$$

Usando a equação anterior, podemos concluir que

$$\begin{aligned} 2(a+c+g+i) &= b+d+f+h+4e \\ 2((a+i)+(c+g)) &= (b+h)+(d+f)+4e \\ 2(S-e+S-e) &= S-e+S-e+4e. \end{aligned}$$

De $4S-4e=2S+2e$, obtemos $S=3e$.

c) Pelo item anterior, $S-e=2e$ e daí

$$\begin{aligned} ac+ci+ag+gi &= (a+i)(c+g) \\ &= (S-e)(S-e) \\ &= 2e(S-e) \\ &= e(2S-2e). \end{aligned}$$

Como $S-e=b+h=d+f$, segue que

$$\begin{aligned} b+d+f+h &= (b+h)+(d+f) \\ &= (S-e)+(S-e) \\ &= 2S-2e. \end{aligned}$$

Substituindo essa identidade na relação anterior, chegamos a

$$ac+ci+ag+gi=e(2S-2e)=e(b+d+f+h).$$

d) Note agora que $a+c=S-b=h+e$, $c+i=S-f=d+e$, $g+i=S-h=b+e$ e $a+g=S-d=f+e$. Daí

$$\begin{aligned} (a+c)^2+(c+i)^2+(a+g)^2+(g+i)^2 &= (h+e)^2+(d+e)^2+(f+e)^2+(b+e)^2 \\ 2(a^2+c^2+g^2+i^2)+2(ac+ci+ag+gi) &= (b^2+d^2+f^2+h^2)+2e(b+d+f+h)+4e^2. \end{aligned}$$

Pelo item anterior, podemos cancelar na última equação os termos $2(ac+ci+ag+gi)$ e $2e(b+d+f+h)$, obtendo

$$2(a^2+c^2+g^2+i^2)=(b^2+d^2+f^2+h^2)+4e^2.$$

14 A área do quadrilátero

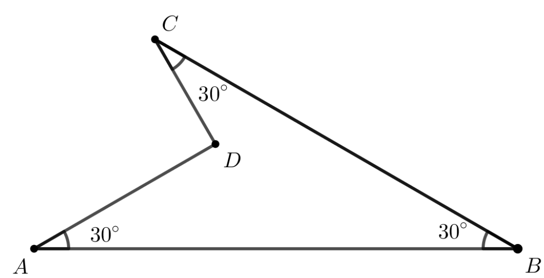
No quadrilátero $ABCD$, temos:

$$\angle DAB = \angle ABC = \angle BCD = 30^\circ,\ AB = 4\,cm,\ BC = 2\sqrt{3}\,cm.$$

a) Determine o valor do ângulo $\angle DCA$.

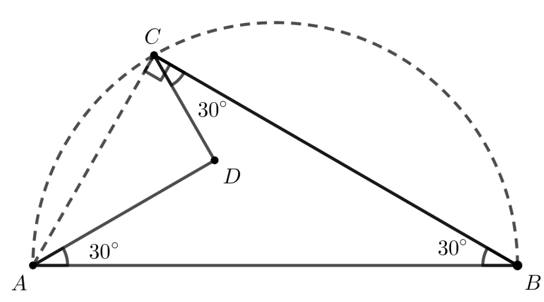
b) Determine o comprimento de CD.

c) Encontre a área do quadrilátero $ABCD$.



14 A área do quadrilátero – Solução

a) Como $\dfrac{BC}{AB} = \cos 30^\circ$ e $\angle ABC = 30^\circ$ segue que $\angle ACB = 90^\circ$. Daí, $\angle BAC = 60^\circ$ e $\dfrac{AC}{AB} = \operatorname{sen} 30^\circ = \dfrac{1}{2}$, logo, $AC = \dfrac{AB}{2} = 2\,cm$. Consequentemente, $\angle DAC = 30^\circ$ e $\angle DCA = 60^\circ$.



b) Do item anterior e das relações trigonométricas no triângulo ADC, decorre que $\dfrac{AD}{AC} = \operatorname{sen} 60^\circ$ e $\dfrac{CD}{AC} = \operatorname{sen} 30^\circ$. Portanto,

$$AD = \sqrt{3}\,cm \text{ e } CD = 1\,cm.$$

c) A área do quadrilátero $ABCD$ é

$$\frac{AC\cdot BC}{2}-\frac{CD\cdot AD}{2}=\frac{2\cdot 2\sqrt{3}}{2}-\frac{1\cdot\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

15 *Os números ao redor do círculo*

Existem 100 números reais distintos arranjados ao redor de um círculo. Verifique que existem quatro números consecutivos ao redor do círculo de modo que a soma dos dois números do meio é estritamente menor que a soma dos outros dois números.

15 *Os números ao redor do círculo – Solução*

Seja a o menor número escrito no círculo e sejam b e c seus dois vizinhos, com $b < c$. Seja d o outro vizinho de b. Assim, estarão escritos no círculo, em ordem, d, b, a e c ou c, a, b e d. Em qualquer caso, como $a < d$ e $b < c$, temos $a + b < c + d$.

16 *A eleição*

Dois candidatos participaram de uma eleição com $p + q$ eleitores. O candidato A recebeu p votos e o candidato B recebeu q votos, com $p > q$. Durante a apuração, é registrado apenas um voto de cada vez em um quadro. Seja r a probabilidade de que o número associado ao candidato A no quadro seja sempre maior que o número associado ao candidato B durante toda a apuração.

a) Determine o valor de r se $p = 3$ e $q = 2$.

b) Determine o valor de r se $p = 1010$ e $q = 1009$.

16 *A eleição – Solução*

a) Podemos fazer listas com as letras A e B representando as possíveis ordens de votos apurados. Por exemplo, a lista $AABAB$ indica que os dois primeiros e o quarto voto apurados foram para o candidato A, o terceiro e o quinto para o candidato B. Existem exatamente 10 listas com 3 letras A e duas letras B:

$$\begin{array}{ccccc} A & A & A & B & B \\ A & B & A & A & B \\ A & A & B & B & A \\ B & A & A & B & A \\ B & A & B & A & A \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} A & A & B & A & B \\ B & A & A & A & B \\ A & B & A & B & A \\ A & B & B & A & A \\ B & B & A & A & A \end{array}.$$

Dessas 10 listas, em apenas duas a quantidade de letras A quando contabilizadas da esquerda para a direita é sempre superior a quantidade de letras B, a saber,

$$AAABB \text{ e } AABAB.$$

Portanto,

$$r = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}.$$

b) Vamos chamar de empate um momento da apuração em que o número de votos de ambos os candidatos é o mesmo. Para que o candidato A esteja sempre à frente, certamente não podemos ter empates. Qualquer apuração em que o primeiro voto foi para o candidato B terá um empate, pois sabemos que no final o número de votos de A é maior e se não tivermos empate em nenhum momento o candidato B irá ganhar. Para qualquer sequência que começa em A e atinja um empate, associe outra sequência trocando as letras A's por B's e vice-versa até a posição de primeiro empate. Por exemplo, na sequência

$$AAABBABBAB.$$

Temos empate nas apurações do oitavo e décimo votos. A posição de primeiro empate é a oitava e iremos trocar a sequência anterior por

$$BBBAABAAAB.$$

Com essa operação, perceba que as quantidades de letras A's e B's não se alteram e agora a sequência começa com a letra B. Com essa operação, para toda sequência que começa com B, que já sabemos possuir empates, podemos associar de modo único outra sequência começada por A com empates, e vice-versa. Assim o número de sequências com empates começando com A é igual ao número de sequências começadas por B. Com mais razão, podemos concluir que a probabilidade de uma sequência começar com A e possuir empates é igual à probabilidade de uma sequência começar com B. Como existem q letras B em um universo de $p+q$ letras, a probabilidade de uma sequência começar em B é $\dfrac{q}{p+q}$. Assim, como toda sequência com empates começa com A ou B, a probabilidade de escolhermos, dentre as sequências possíveis de p letras A e q letras B uma com empates é $\dfrac{q}{p+q} + \dfrac{q}{p+q} = \dfrac{2q}{p+q}$. Finalmente, o valor de r é o complementar dessa probabilidade:

$$\begin{aligned} r &= 1 - \frac{2q}{p+q} \\ &= \frac{p-q}{p+q} \\ &= \frac{1}{2019}. \end{aligned}$$

Observação: O resultado apresentado nesse problema é conhecido como o Teorema da Eleição de Bertrand, em alusão ao matemático Joseph Louis François Bertrand.

17 *As frações irredutíveis*

Os denominadores de duas frações irredutíveis são 600 e 700. Qual é o menor valor possível do denominador de sua soma quando escrita como uma fração irredutível?

Observação: Dizemos que a fração p/q é irredutível se os inteiros p e q não possuem fatores primos em comum em suas fatorações. Por exemplo, $5/7$ é uma fração irredutível.

17 *As frações irredutíveis – Solução*

Sejam $a/600$ e $b/700$ as duas frações irredutíveis. Assim, $mdc(a,600) = mdc(b,700) = 1$. A soma das duas frações pode ser escrita como

$$\begin{aligned}\frac{a}{600}+\frac{b}{700} &= \frac{7a+6b}{6\cdot 7\cdot 100}\\ &= \frac{7a+6b}{3\cdot 7\cdot 2^3\cdot 5^2}.\end{aligned}$$

Como a e b são ímpares, $7a+6b$ é ímpar e assim não possui o fator primo 2 em sua fatoração. Como 7 não divide b, segue que a soma $7a+6b$ também não possui o fator primo 7 em sua fatoração. De modo semelhante, como 3 não divide a, podemos concluir que esse fator não está presente na fatoração de $7a+6b$. Assim, apenas o fator primo 5 pode ser comum ao numerador e ao denominador da soma e por conseguinte o denominador será pelo menos $3\cdot 7\cdot 2^3$. Para verificar que ele é admissível, basta encontrarmos a e b tais que 25 seja um divisor de $7a+6b$. Isso pode ser obtido com $a=1$ e $b=3$, por exemplo,

$$\frac{1}{600}+\frac{3}{700}=\frac{1}{168}.$$

18 *Tabuleiro com algarismos* 0 *e* 1

De quantas maneiras podemos colocar 8 algarismos iguais a 1 e 8 algarismos iguais a 0 em um tabuleiro 4×4 de modo que as somas dos números escritos em cada linha e coluna sejam as mesmas?

1	0	1	0
0	1	1	0
1	0	0	1
0	1	0	1

18 *Tabuleiro com algarismos* 0 *e* 1 *– Solução*

Como a soma dos números de todas as casas do tabuleiro é 8, a soma dos números em cada linha e coluna é $8/4 = 2$. Ou seja, em cada linha e coluna temos exatamente dois algarismos iguais a 1 e dois algarismos iguais a 0. Podemos escolher a posição do primeiro 1 da primeira linha de 4 maneiras. Em seguida, podemos escolher a posição do segundo 1 de $4-1 = 3$ maneiras, pois não podemos colocá-lo em uma posição já escolhida. Entretanto, nessas $3 \cdot 4$ escolhas, estamos contando cada maneira de colocá-los na primeira linha duas vezes, pois como eles são algarismos iguais, a inversão de posição entre eles gera a mesma escolha. Portanto, temos $3 \cdot 4/2 = 6$ maneiras de dispormos os dois algarismos 1 na primeira fila. Após feita essa escolha, temos três casos a considerar para a segunda linha: (I) todos os seus algarismos são iguais aos das posições correspondentes na primeira linha, (II) todos os algarismos da segunda linha diferem dos seus correspondentes na primeira linha e (III) dois algarismos da segunda linha coincidem com os seus correspondentes na primeira linha. Não existem outros casos, porque se três algarismos da terceira linha coincidem com os correspondentes da primeira, como aparecem apenas dois algarismos de cada tipo nela, necessariamente o quarto algarismo também será igual. De modo semelhante, também podemos perceber que não é possível apenas um algarismo coincidir entre as duas primeiras linhas.

1	0	1	0
1	0	1	0

Caso I

1	0	1	0
0	1	0	1

Caso II

1	0	1	0
1	1	0	0

Caso III

O total de tabuleiros do caso (I) é igual ao número de possíveis escolhas da primeira linha, que é 6. No caso (II), as duas primeiras linhas diferem em todas as posições. Para a escolha da terceira linha, podemos determinar as posições dos dois algarismos iguais a 1 de 6 formas e as demais posições serão preenchidas com 0. Em seguida, a quarta linha só poderá ser escolhida de uma única forma, pois já terão sido definidos os três primeiros algarismos de cada coluna. Nesse caso, temos 6 escolhas possíveis para a primeira linha e outras 6 para a segunda linha. Isso dá um total de $6 \cdot 6 = 36$ possibilidades.

1	0	1	0
0	1	0	1

→

1	0	1	0
0	1	0	1
0	0	1	1

No caso (III), temos 6 escolhas possíveis para a primeira linha. Feita essa escolha, podemos escolher de 2 formas qual das posições da segunda linha repetirá o algarismo 1 da primeira linha e de outras 2 formas qual das posições da segunda linha repetirá o algarismo 0. Isso nos dá $6 \cdot 2 \cdot 2 = 24$ preenchimentos das duas primeiras linhas. Nas casas dessas duas primeiras linhas, em precisamente duas colunas, já teremos escrito 2 algarismos iguais a 1 e dois algarismos iguais a 0. Consequentemente, as demais casas dessas colunas estarão determinadas. Ainda analisando as possíveis escolhas de terceira linha, temos 2 escolhas possíveis para o quadradinho mais à esquerda ainda não preenchido. Uma vez que ele tenha sido escolhido, toda a terceira linha estará determinada e, finalmente, os algarismos da quarta linha também.

1	1	0	0
0	1	1	0

$\rightarrow$

1	1	0	0
0	1	1	0
	0		1
	0		1

Portanto, nesse caso, temos $24 \cdot 2 = 48$ possíveis tabuleiros. Somando as configurações encontradas nas três situações, temos $6 + 36 + 48 = 90$ possibilidades de dispormos os algarismos no tabuleiro.

19 *As inversões na sequência*

Em uma sequência de inteiros positivos, uma *inversão* é um par de posições em que o elemento da posição mais à esquerda é maior que o elemento da posição mais à direita. Por exemplo, a sequência $2, 5, 3, 1, 3$ tem 5 inversões: entre a primeira e a quarta posição, entre a segunda e todas as demais para a direita e, finalmente, entre a terceira e a quarta. Dentre todas as sequências de inteiros positivos cuja soma de seus elementos é n, qual é o maior número possível de inversões se

a) $n = 7$?

b) $n = 2019$?

Observação: As sequências de inteiros positivos consideradas nesse problema podem ter mais de 5 elementos.

19 *As inversões na sequência – Solução*

a) Primeiramente vamos mostrar que qualquer sequência maximizante do número de inversões precisa ser não-crescente. De fato, se existe um par de números consecutivos a e b, com $a < b$, então a troca de posição desses elementos não altera a soma e aumenta o número de inversões em uma unidade. Para cada sequência não-crescente com soma 7, indicaremos o seu número de inversões na coluna I da tabela a seguir:

	I		I
$(6,1)$	1	$(5,2)$	1
$(5,1,1)$	2	$(4,3)$	1
$(4,2,1)$	3	$(4,1,1,1)$	3
$(3,3,1)$	2	$(3,2,2)$	2
$(3,2,1,1)$	5	$(3,1,1,1,1)$	4
$(2,2,2,1)$	3	$(2,2,1,1,1)$	6
$(2,1,1,1,1,1)$	5	$(1,1,1,1,1,1,1)$	0

O máximo de inversões é 6 e pode ser obtido com a sequência $2,2,1,1,1$.

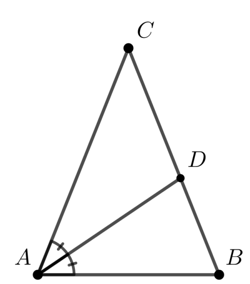
b) Mostraremos que qualquer sequência não crescente que maximiza o número de inversões deve possuir apenas números iguais a 1 e 2. Suponha, por absurdo, que a sequência contém algum número $k > 2$. Troque o último k por um par de elementos: $k-1$ na posição original e 1 na posição final. Claramente essa operação não altera a soma. O 1 final é parte de uma inversão com todo o elemento que era membro de uma inversão com o k original, exceto pelos números 1 à sua direita. O novo $k-1$ é parte de uma inversão com todo elemento que era menor que o k original, incluindo as parcelas 1 à sua direita. Assim, contabilizando a inversão criada entre o novo $k-1$ e o novo 1, essa troca criada aumenta o número de inversões em pelo menos uma unidade. Finalmente, considerando uma sequência qualquer que maximiza o número de inversões e que possui a soma de seus elementos igual a 2019, podemos supor que existem a parcelas iguais a 2 e $2019-2a$ parcelas iguais a 1. O número de inversões é

$$\begin{aligned} a(2019-2a) &= 2019a-2a^2 \\ &= \frac{2019^2}{8}-2\left(a-\frac{2019}{4}\right)^2. \end{aligned}$$

Para maximizar a expressão anterior, devemos minimizar $|a-2019/4|$ e isso ocorre para $a=505$. Portanto, o maior número de inversões é $505\cdot 1009$.

20 *Ângulos no triângulo isósceles*

O triângulo ABC é isósceles com $AB = BC$. A bissetriz do ângulo $\angle CAB$ encontra o lado BC no ponto D. A diferença entre as medidas de dois ângulos internos do triângulo ABD é 40°. Encontre os possíveis valores do ângulo $\angle ACB$.



20 *Ângulos no triângulo isósceles – Solução*

Seja $x = \angle BAC = \angle ABC$. Assim, $\angle ACB = 180^\circ - 2x$. Consequentemente, os ângulos internos do triângulo ABD são $\angle BAD = x/2$, $\angle DBA = x$ e $\angle ADB = 180^\circ - 3x/2$. Consideraremos todos os casos para os quais dois ângulos podem diferir por 40°:

i) Se $x - x/2 = 40°$, então $x = 80°$ e assim $\angle ACB = 20°$.

ii) Como $x > 0$, não podemos ter $x/2 - x = 40°$.

iii) Se $180° - 3x/2 - x/2 = 40°$, então $x = 70°$ e $\angle ACB = 40°$.

iv) Se $x/2 - (180° - 3x/2) = 40°$, temos $x = 110°$. Isso produz uma contradição, pois nesse caso $\angle ACB = 180° - 2x < 0$.

v) Se $(180° - 3x/2) - x = 40°$, então $x = 56°$ e $\angle ACB = 68°$.

vi) Finalmente, se $x - (180° - 3x/2) = 40°$, segue que $x = 88°$ e $\angle ACB = 4°$.

Portanto, os possíveis valores de $\angle ACB$ são 4°, 20°, 40° e 68°.

21 *As soluções inteiras do sistema*

Considere as soluções do sistema

$$\begin{cases} 2019 &= a+b-c \\ 2019 &= a^2+b^2-c^2, \end{cases}$$

em que a, b e c são inteiros.

a) Encontre pelo menos uma solução do sistema.

b) Verifique que o número de soluções é finito.

21 *As soluções inteiras do sistema – Solução*

a) Da primeira equação, segue que $c = a + b - 2019$. Substituindo na segunda equação, obtemos

$$2019 = a^2 + b^2 - (a+b-2019)^2 = -2ab + 4038a + 4038b - 2019^2.$$

Daí,

$$\begin{aligned} 2019 - 2019^2 &= -2ab + 4038a + 4038b - 2\cdot 2019^2 \\ -2019\cdot 2018 &= -2(a-2019)(b-2019) \\ 2019\cdot 1009 &= (a-2019)(b-2019). \end{aligned}$$

Para obtermos uma solução, é suficiente que $a - 2019 = 1$ e $b - 2019 = 2019\cdot 1009$, ou seja,

$$(a,b,c) = \left(2020, \frac{2019\cdot 2020}{2}, \frac{2019\cdot 2020}{2} + 1\right).$$

b) Em virtude do item anterior, $a-2019$ e $b-2019$ são divisores inteiros do número $2019 \cdot 1009$, que possui um número finito de divisores inteiros.

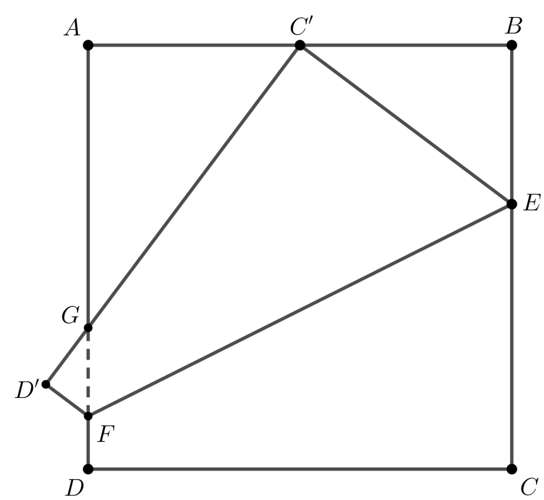
Observação: Se x é um divisor inteiro de $2019 \cdot 1009$ e $y = 2019 \cdot 1009/x$, então

$$(a,b,c) = (x+2019, y+2019, x+y+2019)$$

é solução do sistema com $a-2019 = x$ e $b-2019 = y$.

22 *O quadrado dobrado*

Na figura a seguir, $ABCD$ é um quadrado de papel que foi dobrado ao longo do segmento FE de modo que o vértice C coincida com o vértice C' e D com D'.



a) Verifique que $C'D'$ é tangente ao círculo com centro C e raio CB.

b) Verifique que o perímetro do triângulo GAC' é igual à metade do perímetro de $ABCD$.

c) Verifique que $AG = C'B + GD'$.

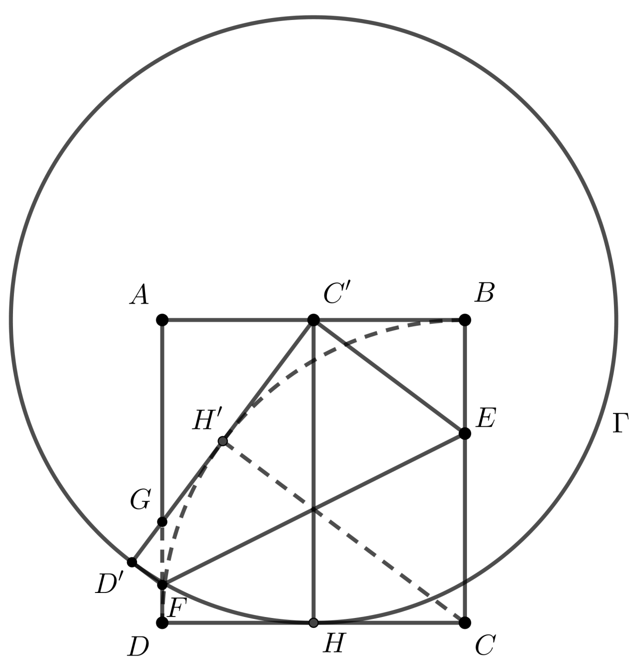
d) Verifique que a soma dos perímetros dos triângulos $C'BE$ e $GD'F$ é igual ao perímetro do triângulo GAC'.

e) Verifique que o perímetro do triângulo $GD'F$ é igual ao comprimento do segmento AC'.

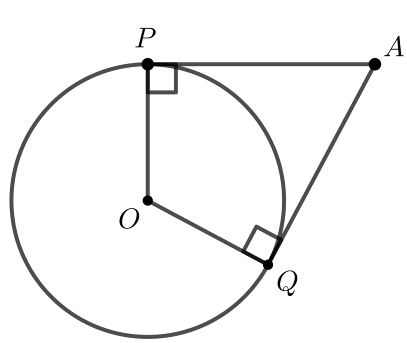
f) O incírculo de um triângulo é o círculo que é tangente aos seus três lados. Verifique que o raio do incírculo do triângulo GAC' é igual ao comprimento do segmento GD'.

22 *O quadrado dobrado – Solução*

a) Considere o círculo Γ de centro C' e com raio R dado pelo lado do quadrado $ABCD$. Como a distância de C' ao segmento CD é igual a R, segue que esse círculo é tangente a esse lado no ponto H. Ao desdobrarmos o quadrado de papel ao longo do segmento EF, o círculo Γ é levado em um círculo Γ' de centro C. Como $CB = CD = R$, esse círculo passa por B e D. Para concluir, perceba que se Γ é tangente a CD então Γ' é tangente a $C'D'$, cujo ponto de tangência é H'.



b) O semiperímetro do quadrado é dado pela soma dos comprimentos de AB e AD. Para relacionar essa soma com o perímetro do triângulo GAC', usaremos o Teorema do Bico, que diz que as distâncias de um ponto exterior a uma circunferência aos pontos onde suas tangentes tocam a circunferência são iguais. Ou seja, na figura a seguir temos $AP = AQ$.



Em virtude do Teorema do Bico, podemos escrever o semiperímetro do triângulo GAC' como:

$$\begin{aligned} AC' + C'G + GA &= \\ AC' + C'H' + H'G + GA &= \\ AC' + C'B + GF + GA &= AB + DA. \end{aligned}$$

c) Em virtude do item anterior e do Teorema do Bico:

$$\begin{aligned} AB + C'D' &= AC' + C'G + AG \\ AC' + C'B + C'G + GD' &= AC' + C'G + AG \\ C'B + GD' &= AG. \end{aligned}$$

d) Os triângulos retângulos GAC', $C'BE$ e $GD'F$ são semelhantes, pois

$$\angle D'GF = \angle AGC' = \angle EC'B.$$

Daí,

$$\begin{aligned} \frac{AG}{C'B} &= \frac{AC'}{BE} \\ \frac{AG}{GD'} &= \frac{AC'}{D'F}. \end{aligned}$$

Consequentemente, de $AG = C'B + GD'$, temos:

$$\begin{aligned} BE + D'F &= \frac{AC'}{AG} \cdot (C'B + GD') \\ &= \frac{AC'}{AG} \cdot AG \\ &= AC'. \end{aligned}$$

De forma semelhante, também segue que $C'G = EC' + FG$. Assim

$$AG + AC' + C'G = (C'B + BE + EC') + (GD' + D'F + FG)$$

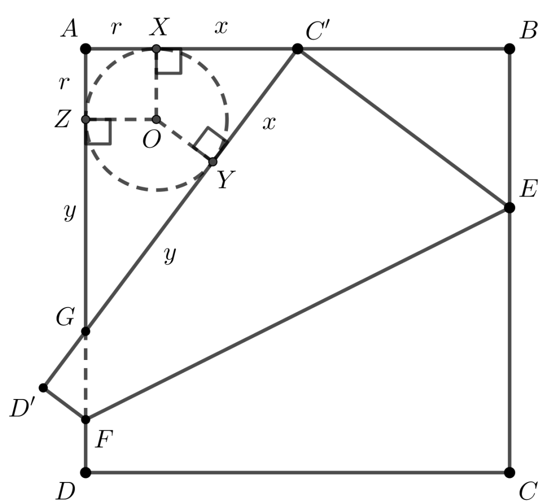
e) Como $AC'HD$ é um retângulo, $AC' = DH$. Em virtude da dobradura, $DH = D'H'$ e $FD = FD'$. Pelo Teorema do Bico, temos:

$$\begin{aligned} AC' &= D'H' \\ &= D'G + GH' \\ &= D'G + GD \\ &= D'G + GF + FD \\ &= D'G + GF + FD'. \end{aligned}$$

A soma $D'F + FG + GD'$ é exatamente o perímetro do triângulo $GD'F$.

f) Sejam X, Y e Z os pontos de tangência do incírculo do triângulo $AC'G$ com os seus lados, como indicado na figura a seguir. Se r denota o comprimento do raio do incírculo do triângulo $AC'G$, temos $AX = AZ = r$, pois $AXOZ$ é um quadrado de lado r. Além disso, pelo Teorema do Bico, $C'X = C'Y = x$, $GY = GZ = y$. Assim, novamente usando o segundo item, segue que

$$\begin{aligned} AC' + C'G + GA &= AB + DA \\ (r+x) + (x+y) + (r+y) &= 2\cdot C'D' \\ 2\cdot(r+x+y) &= 2\cdot(D'G + x + y) \\ r &= D'G. \end{aligned}$$



Observação: Esse item foi extraído de um clássico *Sangaku* japonês. Os Sangakus são tábuas comemorativas de madeira com problemas matemáticos oferecidas em templos e santuários.

23 *As triplas bacanas*

Dizemos que uma tripla de inteiros (x, y, z) é do tipo *bacana* se x, y e z são inteiros positivos, com $y \geq 2$, e $x^2 - 3y^2 = z^2 - 3$.

a) Encontre uma tripla (x, y, z) do tipo *bacana* com $x = 5$ e $x = 7$.

b) Mostre que para todo $x \geq 5$ e ímpar existem pelo menos duas triplas distintas (x, y_1, z_1) e (x, y_2, z_2) do tipo *bacana*.

c) Encontre alguma tripla do tipo *bacana* com x par.

23 *As triplas bacanas – Solução*

a) Para $x = 5$ e $x = 7$, temos alguns exemplos de triplas do tipo bacana: $(x, y, z) = (5, 2, 4)$, $(5, 3, 1)$, $(7, 3, 5)$ e $(7, 4, 2)$.

b) Os casos particulares do item anterior permitem conjecturar as seguintes triplas para x ímpar:

$$(x, y, z) = (2n+1, n, n+2) \text{ e } (x, y, z) = (2n+1, n+1, n-1).$$

Para verificar que elas satisfazem a equação, perceba que

$$\begin{aligned}(2n+1)^2 - 3n^2 &= n^2 + 4n + 1\\ &= (n+2)^2 - 3.\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}(2n+1)^2 - 3(n+1)^2 &= n^2 - 2n - 2\\ &= (n-1)^2 - 3.\end{aligned}$$

c) Considerando a fatoração $(x - z)(x + z) = 3(y - 1)(y + 1)$, podemos concluir que $x - z$ e $x + z$ são divisores do membro direito da equação. Como x é a média aritmética desses dois divisores, isso permite definir uma busca ordenada de possíveis soluções da equação com x par. Escolhendo $y = 4$, podemos analisar os possíveis pares de divisores positivos de $3 \cdot 3 \cdot 5$:

$$(3, 3 \cdot 5), (3 \cdot 3, 5) \text{ e } (1, 3 \cdot 3 \cdot 5).$$

Como $x - z < x + z$, temos os casos:

$$\begin{cases} x - z = 3 \\ x + z = 15 \end{cases} \quad \begin{cases} x - z = 5 \\ x + z = 9 \end{cases} \quad \begin{cases} x - z = 1 \\ x + z = 45 \end{cases}.$$

Não existem valores pares para x nesse caso. A mesma análise para $y = 7$ também mostra que não existem soluções nesse caso. Se $y = 9$, a tripla $(x, y, z) = (16, 9, 4)$ é uma solução do tipo bacana com x par.

24 *A soma dos algarismos*

Se n é um número inteiro positivo, qual o menor valor que a soma dos algarismos da representação decimal de $3n^2 + n + 1$ pode assumir?

24 *A soma dos algarismos – Solução*

Se $n = 8$, temos que $3n^2 + n + 1 = 201$ e soma de seus dígitos é 3. Verificaremos agora que a soma dos dígitos de $3n^2 + n + 1$ não pode ser 1 ou 2 e concluiremos que o menor valor possível é 3. Como $n(n+1)$ é o produto de dois números consecutivos, ele é par e assim $3n^2 + n + 1 = 2n^2 + n(n+1) + 1$ é um número ímpar. Para que a soma dos algarismos seja 1, devemos ter $3n^2 + n + 1 = 10^k$. Isso é impossível, pois $3n^2 + n + 1 > 1$ e 10^k é par para $k > 1$. Para que a soma dos algarismos seja 2, devemos ter $3n^2+n+1 = 10^i + 10^j$, com $i > j$ ou $3n^2 + n + 1 = 2 \cdot 10^k$. A segunda opção é inválida, pois $2 \cdot 10^k$ é par. Na primeira opção, como $10^i + 10^j$ precisa ser ímpar, devemos ter $j = 0$, ou seja,

$$\begin{aligned} 3n^2 + n + 1 &= 10^i + 1 \\ n(3n+1) &= 10^i \\ n(3n+1) &= 2^i \cdot 5^i. \end{aligned}$$

Se algum número primo p divide n, então ele divide $3n$ e, consequentemente, não pode dividir o seu sucessor $3n + 1$. Assim, n e $3n + 1$ não possuem fatores primos em comum. Como $n < 3n + 1$, devemos ter $n = 2^i$ e $3n + 1 = 5^i$. Isso é um absurdo, porque, nesse caso, para $i \geq 2$,

$$3n + 1 = 5^i > 4^i > 3 \cdot 2^i + 1 = 3n + 1$$

Quando $i = 1$, não há solução, pois $5 \neq 3 \cdot 2 + 1$. Isso termina nossa análise e mostra que a soma mínima dos algarismos é 3.

25 *As distâncias no quadrado*

Seis pontos são distribuídos dentro de um quadrado de lado $10\,cm$ de tal modo que a distância entre quaisquer dois deles é um número inteiro em centímetros. Verifique que pelo menos duas dessas distâncias são iguais.

25 *As distâncias no quadrado – Solução*

A maior distância possível entre dois pontos do quadrado é $10\sqrt{2}\,cm$, que ocorre quando dois pontos estão dispostos em extremos opostos de uma diagonal. Como $14 < 10\sqrt{2} < 15$, a maior distância inteira possível entre eles é de $14\,cm$. Assim, existem 14 distâncias inteiras possíveis entre os pontos: $1, 2, 3, \ldots, 14$ centímetros. Para determinar o número de pares de pontos, perceba que podemos escolher qualquer um deles de 6 formas possíveis e o outro de 5 outras formas. Como a mudança de ordem entre eles gera o mesmo par, nessa contagem estaremos contando cada par duas vezes. Portanto, existem $6 \cdot 5/2 = 15$ pares de distâncias possíveis entre os 6 pontos. Como o número de segmentos é maior que o número de distâncias possíveis, pelo menos dois segmentos terão o mesmo comprimento.

26 *Os números de* 6 *algarismos*

Os algarismos a, b, c, d, e e f são distintos e foram escolhidos no conjunto $\{1,2,\ldots,9\}$.

a) Verifique que pelo menos dois deles são consecutivos.

b) Determine os possíveis valores do inteiro positivo x, que divide qualquer número de 6 algarismos formados por a, b, c, d, e e f.

26 *Os números de* 6 *algarismos – Solução*

a) Suponha que $a < b < c < d < e < f$ (a análise que será feita se adapta facilmente aos outros ordenamentos possíveis). Se não existem dois inteiros consecutivos, então $b \geq a+2$, $c \geq b+2 \geq a+4$, $d \geq c+2 \geq a+6$, $e \geq d+2 \geq a+8$ e $f \geq e+2 \geq a+10$. Essa última desigualdade é impossível, pois a e f são números de apenas um algarismo.

b) Suponha que a e b, com $a > b$, são os algarismos consecutivos. Se x divide os números $\overline{cdefab}$ e $\overline{cdefba}$, então x divide a diferença entre eles, que é

$$\begin{aligned}
\overline{cdefab} - \overline{cdefba} &= \overline{ab} - \overline{ba} \\
&= (10a+b) - (10b+a) \\
&= 9(a-b) \\
&= 9.
\end{aligned}$$

Portanto, x deve ser um divisor de 9. O critério de divisibilidade por 9 nos diz que um número é divisível por 9 se, e somente se, a soma dos seus algarismos é um múltiplo de 9. Assim, se $a+b+c+d+e+f$ é um múltiplo de 9, então os possíveis valores de x são 1 ou 9. Se a soma dos 6 algarismos é um múltiplo de 3, mas não de 9, então x pode ser 1 ou 3. Finalmente, se a soma dos 6 algarismos não é um múltiplo de 3, a única possibilidade para x é 1.

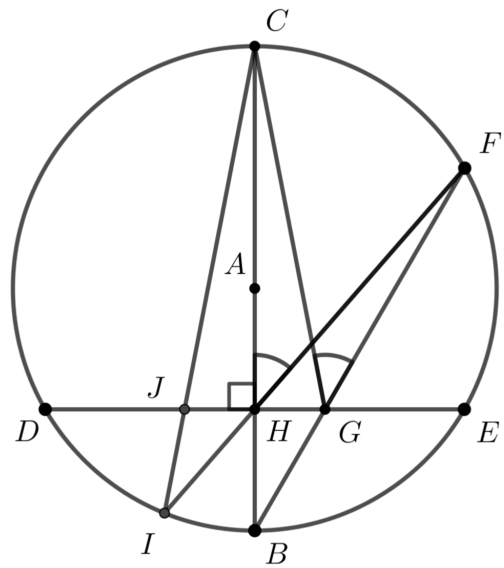
Observação: Estamos usando uma barra para distinguir a representação decimal do número de três algarismos $\overline{ABC}$ do produto $A \cdot B \cdot C$. Por exemplo, se $\overline{ABC} = 126$, então $A = 1$, $B = 2$ e $C = 6$.

27 *As cordas perpendiculares*

No desenho a seguir, as cordas DE e BC são perpendiculares, sendo BC um diâmetro do círculo com centro em A. Além disso, $\angle CGF = 40°$ e $GH = 2\,cm$.

a) Determine o valor do ângulo $\angle CHF$.

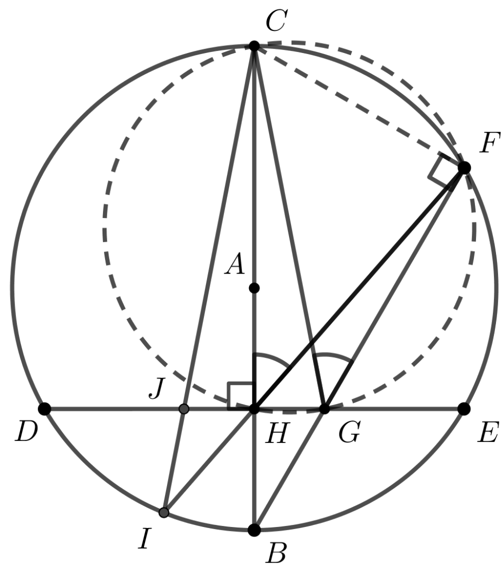
b) Encontre o comprimento de HJ.



27 *As cordas perpendiculares – Solução*

a) Como BC é um diâmetro, segue que $\angle BFC = 90°$. Assim, como também temos $\angle CHG = 90°$, a circunferência Γ de diâmetro CG passa por F e H. Nessa circunferência, os ângulos $\angle CGF$ e $\angle CHF$ estão inscritos no mesmo arco CF e assim $\angle CHF = \angle CGF = 40°$.

b) Novamente observando o círculo Γ, podemos concluir que $\angle HCG = \angle HFG$, pois ambos estão inscritos no arco GH. Considerando agora o círculo de diâmetro BC, temos $\angle ICB = \angle IFB$, porque ambos estão inscritos no arco IB. Assim, $\angle ICH = \angle BFH = \angle HFG = \angle HCG$. Daí como os triângulos retângulos CHG e CHJ possuem os mesmos ângulos e um cateto em comum, eles são congruentes, resultando em $HJ = GH = 2\,cm$.



28 *O jogo de Berlekamp*

Um cadeado digital é constituído por um tabuleiro 4×4 formado por 16 interruptores. Cada interruptor pode estar ligado, simbolizado pelo símbolo 1, ou desligado, simbolizado pelo símbolo 0. Quando um interruptor é alterado de uma posição para outra, todos os outros interruptores na mesma linha e coluna precisam ser alterados também (veja o diagrama abaixo). O cadeado digital só é aberto quando todos os interruptores estão ligados.

1	0	1	0
0	**1**	1	0
1	0	0	1
0	1	0	1

$\Rightarrow$

1	**1**	1	0
1	**0**	**0**	**1**
1	**1**	0	1
0	**0**	0	1

a) Na figura abaixo, determine uma sequência de movimentos que permitam a abertura do cadeado.

1	0	1	0
1	0	1	0
0	0	1	1
0	0	1	1

b) Verifique que é possível usar uma sequência de movimentos que produza como resultado a alteração de apenas um interruptor.

c) Verifique que não importam as posições iniciais dos interruptores, é sempre possível abrir o cadeado digital.

28 *O jogo de Berlekamp – Solução*

a) Basta realizar a seguinte sequência de movimentos:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&0&\mathbf{1}&0\\\hline 1&0&1&0\\\hline 0&0&1&1\\\hline 0&0&1&1\\\hline\end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0&1&0&1\\\hline 1&\mathbf{0}&0&0\\\hline 0&0&0&1\\\hline 0&0&0&1\\\hline\end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \mathbf{0}&0&0&0\\\hline 0&1&1&1\\\hline 0&1&1&1\\\hline 0&1&1&1\\\hline\end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&1&1&1\\\hline 1&1&1&1\\\hline 1&1&1&1\\\hline 1&1&1&1\\\hline\end{array}$$

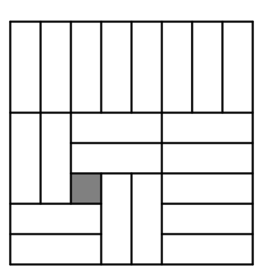
b) Fixado um interruptor X do tabuleiro, altere a posição de cada um dos outros 7 interruptores em sua mesma linha e coluna, um de cada vez, incluindo o próprio X. Com essas operações, a posição fixada será trocada um número ímpar de vezes e assim terá seu estado alterado de ligado para desligado ou o contrário. Os interruptores na mesma linha ou coluna de X serão alterados, cada um, 4 vezes. Como essa quantidade é par, eles permanecerão no seu estado original. Cada um dos outros interruptores do quadradinho será alterado duas vezes, que também é par e assim manterá seu estado inalterado. Portanto, essas 7 alterações produzem apenas a alteração do interruptor X

c) Dada uma configuração qualquer do cadeado, podemos realizar as operações descritas no item anterior e ligar cada um dos interruptores desligados.

Observação: Esse problema é baseado em um jogo de mesmo nome desenvolvido por Elwyn Berlekamp em meados da década de 1970.

29 *A cobertura com triminós*

Um triminó é um retângulo 3×1 e um monominó é um único quadrado 1×1. Quais são as possíveis posições de um monominó na cobertura de um tabuleiro 8×8 usando 21 triminós e 1 monominó?



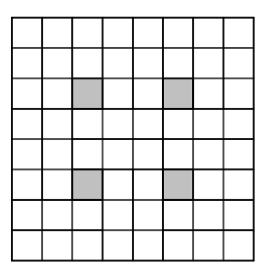
29 *A cobertura com triminós – Solução*

Pinte os quadradinhos do tabuleiro 8×8 com as cores 1, 2 e 3 como indicado nos tabuleiros a seguir.

1	2	3	1	2	3	1	2
3	1	2	3	1	2	3	1
2	3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1	2
3	1	2	3	1	2	3	1
2	3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1	2
3	1	2	3	1	2	3	1

2	1	3	2	1	3	2	1
1	3	2	1	3	2	1	3
3	2	1	3	2	1	3	2
2	1	3	2	1	3	2	1
1	3	2	1	3	2	1	3
3	2	1	3	2	1	3	2
2	1	3	2	1	3	2	1
1	3	2	1	3	2	1	3

Comecemos a nossa análise pelo tabuleiro da esquerda. Nele pintamos 22 quadradinhos da cor 1, 21 da cor 2 e 21 da cor 3. Como todo triminó cobre exatamente um quadradinho de cada cor, a união deles cobrirá exatamente 21 quadradinhos de cada cor e assim o monominó deve ter a cor 1. Repetindo a mesma análise na pintura feita no tabuleiro da direita, também podemos concluir que o monominó deve ter a cor 1 naquele tabuleiro. Daí os únicos possíveis locais para os monominós são os que foram marcados com a cor 1 nos dois tabuleiros, ou seja, os quadradinhos pintados no desenho a seguir. Para verificar que para todos eles existe uma cobertura admissível, basta rotacionar o desenho do enunciado por 90°, 180° e 270°.



30 *As diferenças no conjunto*

Seja A um subconjunto de $\{1, 2, 3, \ldots, 2019\}$ possuindo a propriedade de que a diferença entre quaisquer dois de seus elementos não é um número primo. Qual é o maior número possível de elementos de A?

30 *As diferenças no conjunto – Solução*

Suponha que $a \in A$. Então, nenhum elemento do conjunto $\{a+2, a+3, a+5, a+7\}$ pode pertencer a A e entre os elementos de $\{a+1, a+4, a+6\}$, no máximo um deles pode pertencer a A. Assim, a cada 8 inteiros consecutivos, digamos os elementos do conjunto $\{a, a+1, a+2, \ldots, a+7\}$, no máximo dois deles pertencem a A. Portanto, o número máximo de elementos de A não é maior que o maior inteiro que não ultrapassa $2019/4$ mais 1, ou seja, 505. Essa quantidade pode ser obtida com o conjunto $\{3, 7, 11, \ldots, 2019\}$. Note que a diferença entre quaisquer dois deles é um múltiplo de 4 e, consequentemente, não pode ser um número primo. Portanto, o número máximo de elementos é 505.

31 *Frações ordenadas*

Qual é o maior inteiro positivo n para o qual existe um único inteiro k, tal que

$$\frac{8}{15} < \frac{n}{n+k} < \frac{7}{13}?$$

31 *Frações ordenadas – Solução*

Podemos escrever a desigualdade como

$$\frac{13}{7} < \frac{n+k}{n} < \frac{15}{8}.$$

Assim, multiplicando os membros da desigualdade por $56n$, obtemos a desigualdade equivalente

$$\begin{array}{rcl} 104n < & 56n + 56k & < 105n \\ 48n < & 56k & < 49n. \end{array}$$

Para que exista um único inteiro k satisfazendo a desigualdade, o intervalo $(48n, 49n)$ deve possuir exatamente um múltiplo de 56. O comprimento de tal intervalo é n e ele contém exatamente $n-1$ inteiros positivos. Se $n-1 \geq 2 \cdot 56 = 112$, o intervalo conterá pelo menos dois múltiplos de 56 e não servirá para a desigualdade. Portanto, $n \leq 112$. Para verificar que $n = 112$, é a solução máxima, basta notar que

$$\begin{array}{rcl} 48 \cdot 112 & = & 56 \cdot 96 \\ & < & 56 \cdot 97 \\ & < & 56 \cdot 98 \\ & = & 49 \cdot 112. \end{array}$$

Assim, $k = 97$ é o único inteiro possível para satisfazer a desigualdade quando $n = 112$.

32 *Algarismos das potências*

a) Dado que a representação decimal de 5^{2018} possui 1411 algarismos e começa com 3 (o dígito não nulo mais à esquerda é 3), para quantos inteiros $1 \leq n \leq 2017$ o número 5^n começa com 1?

b) Os inteiros 4^{52} e 5^{52} ambos começam com o algarismo 2. Se as representações decimais das potências 4^n e 5^n, com $n > 0$ e inteiro, começam com o mesmo algarismo d, quais os possíveis valores desse algarismo?

32 *Algarismos das potências – Solução*

a) Se 5^k começa com a e possui j algarismos, então

$$10^j < 5^k < \cdot 10^{j+1}$$

e assim

$$\begin{aligned} 10^j &< 5 \cdot 10^j \\ &< 5 \cdot 5^k \\ &= 5^{k+1} \\ &< 10 \cdot 10^{j+1}. \end{aligned}$$

Isso significa que a representação decimal de 5^{k+1} também possui j algarismos. Por outro lado, se 5^{k+1} e 5^k possuem a mesma quantidade j de algarismos, então o primeiro algarismo de 5^k é 1, pois caso contrário

$$5^{k+1} = 5 \cdot 5^k > 5 \cdot 2 \cdot 10^j = 10^{j+1}$$

possuiria pelo menos $j+1$ algarismos. Então, o problema se resume a encontrarmos os valores de $k \in \{1, 2, \ldots, 2017\}$ tais que 5^k e 5^{k+1} possuem a mesma quantidade de algarismos. Entre duas potências de 5 consecutivas, a quantidade de algarismos cresce em no máximo uma unidade. Como 5^{2018} possui 1411 algarismos, dentre as potências 5^1, 5^2, …, 5^{2018}, temos 1410 crescimentos nas quantidades de algarismos entre potências consecutivas e exatamente $2017 - 1410 = 607$ valores de k em que 5^k e 5^{k+1} possuem a mesma quantidade de algarismos. Ou seja, o número procurado de potências que começam com 1 é 607.

b) Como 4^n e 5^n começam com o mesmo algarismo d, existem inteiros não negativos i e j, tais que

$$d \cdot 10^i \leq 4^n < (d+1) \cdot 10^i$$

$$d \cdot 10^j \leq 5^n < (d+1) \cdot 10^j.$$

Elevando ao quadrado a segunda dessas expressões e multiplicando o resultado pela primeira, obtemos

$$d^3 \cdot 10^{i+2j} \leq 10^{2n} < (d+1)^3 \cdot 10^{i+2j}.$$

Daí,

$$1 \leq d^3 \leq 10^{2n-i-2j} < (d+1)^3 \leq (9+1)^3 = 1000.$$

Se $2n - i - 2j = 0$, o único algarismo que satisfaz a desigualdade é $d = 1$. Entretanto, nesse caso, como ocorre igualdade na última expressão, devemos ter igualdade nas duas iniciais. Assim, $1 \cdot 10^i = 4^n$. Em virtude do Teorema Fundamental da Aritmética, isso só é possível se $i = 0$ e $n = 0$. Como n é um inteiro positivo, esse caso não é válido. Então, $2n - i - 2j > 0$. Analisando os cubos

$$1^3, 2^3, 3^3, \ldots, 9^3, 10^3$$

podemos concluir que os únicos algarismos d para os quais o intervalo $(d^3, (d+1)^3)$ contém uma potência de 10 são $d = 2$ e $d = 4$. De fato, além do exemplo dado no enunciado garantindo que $d = 2$ é possível, 4^{11} e 5^{11} começam com o algarismo 4.

33 *Os estudantes no torneio de xadrez*

Dois estudantes precoces do Nível 3 participaram de um torneio de xadrez universitário. Cada participante joga contra todos os outros exatamente uma vez. Uma vitória vale 1 ponto, um empate vale $0,5$ ponto e uma derrota vale 0 ponto. A soma das pontuações dos dois estudantes do Nível 3 é $6,5$. Todos os estudantes universitários obtiveram a mesma pontuação. Quantos estudantes universitários participaram da competição?

33 *Os estudantes no torneio de xadrez – Solução*

Seja x a quantidade de estudantes universitários e p a pontuação comum a todos eles. Como em cada jogo é disputado exatamente 1 ponto, segue que o total de pontos do torneio, que é $6,5 + px$, coincide com o número de jogos, que é $\dfrac{(x+2)(x+1)}{2}$. Além disso, a pontuação de cada participante é um múltiplo inteiro de $0,5$ e assim podemos escrever $p = k/2$, para algum inteiro positivo k. Portanto:

$$\begin{aligned}
\frac{(x+2)(x+1))}{2} &= 6,5 + px \\
(x+2)(x+1) &= 13 + kx \\
x^2 + 3x + 2 &= 13 + kx \\
x(x+3-k) &= 11.
\end{aligned}$$

Como x e $x + 3 - k$ são inteiros, podemos concluir que x é um divisor positivo de 11, ou seja, $x = 1$ ou $x = 11$. Não podemos ter $x = 1$, pois nesse caso o torneio teria apenas 3 e não seria possível dois estudantes obterem $6,5$ pontos. Para mostrar que $x = 11$ é solução, considere o torneio formado pelos universitários U_1, U_2, ..., U_{11} e pelos estudantes do Nível 3 E_1 e E_2 com os seguintes resultados:

I) Todos os jogos entre dois universitários terminaram em empate.

II) E_1 perdeu para $U_1, U_2, \ldots, U_{11}$ e E_2.

III) E_2 empatou com $U_1, U_2, \ldots, U_{11}$.

O torneio com esses resultados satisfaz o enunciado.

34 *O número de soluções*

a) Verifique que para qualquer inteiro positivo a, com $a > 1$, a equação

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{a},$$

possui pelo menos três soluções da forma (x, y), com x e y inteiros positivos. Por exemplo, para $a = 3$, os pares $(6,6)$, $(4,12)$ e $(12,4)$ são soluções.

b) Encontre o número de pares de inteiros positivos (x, y) que são soluções dessa equação quando $a = 2019$.

Dica: Se a fatoração em primos do inteiro positivo n é $p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, então ele possui $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_k+1)$ divisores positivos.

34 *O número de soluções – Solução*

a) Podemos encontrar uma equação equivalente:

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}+\frac{1}{y} &= \frac{1}{a} \Leftrightarrow\\ (x-a)(y-a) &= a^2.\end{aligned}$$

Como $1/x$ e $1/y$ são menores que $1/a$, segue que $x-a$ e $y-a$ são positivos. Para encontrarmos soluções dessa última equação, considere os seguintes sistemas:

$$\begin{cases} x-a = 1\\ y-a = a^2\end{cases} \quad \begin{cases} x-a = a\\ y-a = a\end{cases} \quad \begin{cases} x-a = a^2\\ y-a = 1\end{cases}.$$

As soluções (x, y) deles são, respectivamente, $(a+1, a+a^2)$, $(2a, 2a)$ e $(a+a^2, a+1)$. Se $a > 1$, essas soluções são distintas e satisfazem a equação dada.

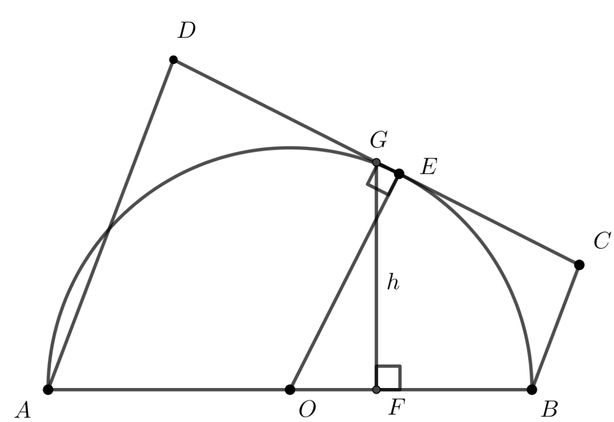
b) Em geral, se d é um divisor qualquer de a^2, sempre existe uma solução em inteiros positivos para o sistema

$$\begin{cases} x-a &= d \\ y-a &= \dfrac{a^2}{d} \end{cases}$$

que é dada por $(x, y) = (a+d, a+\frac{a^2}{d})$. Existe uma correspondência entre os pares (x, y) que são soluções da equação original e os divisores positivos de a^2, pois para cada solução o inteiro $x-a$ corresponde a algum divisor positivo d de a^2. Como $2019^2 = 3^2 \cdot 673^2$, o seu número de divisores positivos é $(2+1)\cdot(2+1) = 9$. Logo, o número de soluções é 9.

35 *O trapézio e o círculo*

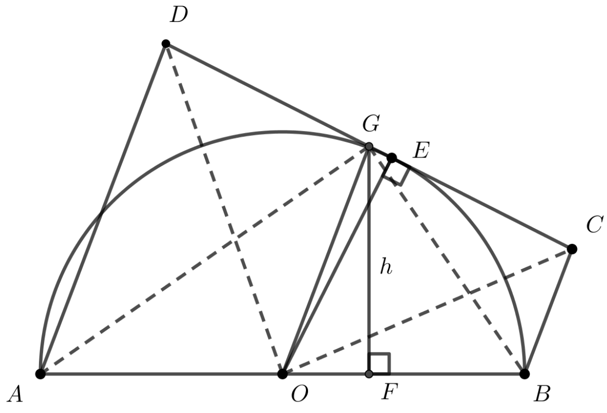
Seja $ABCD$ um trapézio, com $AD \parallel BC$, tal que o lado CD é tangente ao círculo com diâmetro AB. Se G é o ponto médio de CD e $CD = 8\,cm$, determine a medida da altura GF.



35 *O trapézio e o círculo – Solução*

Seja O o centro do círculo de diâmetro AB. Como O é ponto médio de AB e G é ponto médio de CD, segue que GO é base média do trapézio $ABCD$. Daí, GO é paralelo aos lados AD e BC. Consequentemente, temos as seguintes igualdades de áreas: $A_{DGO} = A_{AGO}$ e $A_{COG} = A_{BGO}$.
Daí,

$$\begin{aligned} A_{CDO} &= A_{DGO} + A_{CGO} \\ &= A_{AGO} + A_{BGO} \\ &= A_{ABG} \\ &= \frac{AB \cdot h}{2}. \end{aligned}$$



Por outro lado, como $EO = AO = BO = \dfrac{AB}{2}$, segue que

$$A_{CDO} = \frac{CD \cdot EO}{2} = \frac{CD \cdot AB}{4}.$$

Finalmente, comparando as duas expressões para a área A_{CDO}, temos

$$\begin{aligned} \frac{AB \cdot h}{2} &= \frac{CD \cdot AB}{4} \\ h &= \frac{CD}{2} \\ &= 4\,cm. \end{aligned}$$

36 *O quadrado perfeito*

Os inteiros positivos x e y são tais que o número $x^{2019} + x + y^2$ é divisível por xy.

a) Dê um exemplo de tais inteiros x e y, com $x > y$.

b) Verifique que, necessariamente, x é um quadrado perfeito.

36 *O quadrado perfeito – Solução*

a) Basta escolher $x = 4$ e $y = 2$, pois $4^{2019} + 4 + 2^2 = 8 \cdot (2^{4035} + 1)$ é divisível por $4 \cdot 2 = 8$.

b) Seja $d = mdc(x, y)$. Assim, $x = dm$ e $y = dn$, com $mdc(m, n) = 1$. Daí,

$$\frac{x^{2019} + x + y^2}{xy} = \frac{d^{2018}m^{2019} + m + dn^2}{dmn}$$

é um inteiro. Como d divide $d^{2018}m^{2019} + m + dn^2$, podemos concluir que d divide m. Além disso, de $mdc(m, n) = 1$ e $\dfrac{d^{2018}m^{2019} + m + dn^2}{m} \in \mathbb{Z}$, podemos concluir que m divide d. Como m e d são positivos, $m = d$ e $x = dm = d^2$.

37 *O produto que é um quadrado perfeito*

a) Verifique que se $a \in \{1, 2, 4\}$, então $n(a + n)$ não é um quadrado perfeito para qualquer inteiro positivo n.

b) Verifique que se $a = 2^k$, com $k \geq 3$, então existe um inteiro positivo n tal que $n(a+n)$ é um quadrado perfeito.

c) Verifique que se $a \notin \{1, 2, 4\}$, então sempre existe um inteiro positivo n tal que $n(a + n)$ é um quadrado perfeito.

37 *O produto que é um quadrado perfeito – Solução*

a) Para $a \in \{1, 2, 4\}$ e n inteiro positivo, em virtude das desigualdades

$$n^2 < n(n+1) < n(n+2) < (n+1)^2$$

e

$$(n+1)^2 < n(n+4) < (n+2)^2,$$

podemos concluir que $n(n + a)$ está entre dois quadrados perfeitos consecutivos e, consequentemente, não pode ser um quadrado perfeito.

b) Se $a = 2^k$, com $k \geq 3$, podemos escrever $a = 8l$, com l inteiro positivo. Basta escolher $n = l$, pois daí $n(a + n) = 9l^2 = (3l)^2$.

c) Se a não é uma potência de 2, podemos escrever $a = (2x+1)y$, com $x \geq 1$ e $y \geq 1$. Basta escolher $n = x^2y$, pois daí

$$\begin{aligned} n(a+n) &= x^2y((2x+1)y + x^2y) \\ &= x^2y^2(x^2 + 2x + 1) \\ &= (xy(x+1))^2. \end{aligned}$$

38 *Os números no quadro negro*

Existem n números em um quadro negro. A seguinte operação é realizada sobre esses números: dois números a e b são apagados e, em seguida, é escrito o número $\frac{a+b}{4}$. A operação é repetida $n-1$ vezes. Como resultado, um único número permanece no quadro. Prove que se todos os números originais são iguais a 1, então o número resultante não é menor que $1/n$.

38 *Os números no quadro negro – Solução*

Como todo quadrado é não negativo, temos

$$\begin{aligned} (a-b)^2 &\geq 0 \\ (a+b)^2 &\geq 4ab \\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b} &\geq \frac{4}{a+b}. \end{aligned}$$

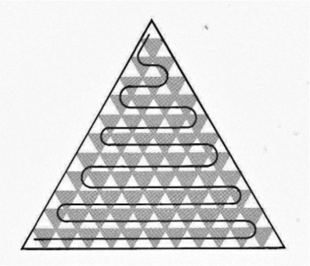
Essa desigualdade implica na soma S dos inversos dos números escritos no quadro não aumentar após cada operação. Inicialmente, a soma é igual a n. Portanto, no final do processo, teremos $S \leq n$, ou seja, o número restante $\frac{1}{S}$ é pelo menos $\frac{1}{n}$.

39 *A cadeia no triângulo*

Todo lado de um triângulo equilátero é dividido em n partes iguais. Linhas paralelas aos lados do triângulo são desenhadas através desses pontos dividindo o triângulo em n^2 triângulos menores. Dizemos que uma sequência de triângulos distintos é uma cadeia se dois triângulos sucessivos compartilham um lado em comum. Qual é o maior número possível de triângulos em uma cadeia?

39 *A cadeia no triângulo – Solução*

A resposta é n^2-n+1 e uma cadeia com essa quantidade de triângulos é mostrada a seguir. Para mostrar que esse número é o máximo, pinte os triângulos de forma alternada com duas cores como também indica a figura abaixo. Existem n triângulos brancos a mais que cinzas. Como os triângulos da cadeia são de cores alternadas, pode existir no máximo um triângulo branco a mais que um cinza. Portanto, pelo menos $n-1$ triângulos brancos não fazem parte da cadeia.



40 *Os voos entre as cidades*

Em um certo país, existem exatamente 2019 cidades e entre quaisquer duas delas existe exatamente um voo direto operado por alguma companhia aérea, isto é, dadas as cidades A e B ou existe um voo de A para B ou um voo de B para A. Encontre o menor número de companhias aéreas que operam no país, sabendo que os voos diretos entre quaisquer três cidades distintas são operados por companhias diferentes.

40 *Os voos entre as cidades – Solução*

A resposta é 2019. Como existem 1009 pares disjuntos de cidades, cada companhia aérea pode operar em no máximo 1009 pares. Existem exatamente $2019 \cdot 2018/2$ voos diretos e, portanto, o número de companhias aéreas é pelo menos $\frac{2019 \cdot 2018}{2 \cdot 1009} = 2019$. Resta exibirmos um exemplo para verificar que essa quantidade é realmente possível. Denote as cidades por $c_1, c_2, \ldots, c_{2019}$ e as companhias por $f_1, f_2, \ldots, f_{2019}$. Conecte as cidades c_i e c_j por um voo da companhia f_l se o resto na divisão de $i + j$ por 2019 é l. Para verificar que essa escolha de companhias satisfaz o enunciado, considere três cidades quaisquer c_i, c_j e c_k. Para que exista uma mesma companhia operando em dois pares delas, no conjunto

$$\{i + j, i + k, k + j\}$$

devem existir dois números com o mesmo resto na divisão por 2019. Digamos que esses dois números sejam $i + j$ e $i + k$. A diferença entre eles será então um múltiplo de 2019 e podemos escrever, para algum m inteiro, que

$$j - k = (i + j) - (i + k) = 2019 \cdot m.$$

Como $j, k \in \{1, 2, 3, \ldots, 2019\}$ são distintos, $|j - k| \in \{1, 2, 3, \ldots, 2018\}$. Esse conjunto não contém nenhum múltiplo de 2019 e, consequentemente, a última equação não admite solução. Isso mostra que nessa distribuição as companhias que operam os voos diretos entre quaisquer três cidades são distintas.

41 *A competição de matemática*

Uma competição de matemática consiste de três problemas, cada um dos quais recebe uma nota inteira de 0 a 7. Para quaisquer dois competidores, sabemos que existe no máximo um problema em que eles obtiveram a mesma pontuação. Encontre o maior número possível de competidores nessa competição.

41 *A competição de matemática – Solução*

Existem 8 pontuações possíveis para cada problema e, consequentemente, $8 \cdot 8 = 64$ pontuações distintas possíveis para os dois primeiros problemas. Como não podem existir dois competidores com exatamente as mesmas pontuações nos dois primeiros problemas, o total de competidores não pode ser maior que 64. Iremos mostrar agora que esse valor máximo é realizável. Para isso, basta exibirmos uma distribuição de pontuações entre 64 jogadores satisfazendo às condições do enunciado. Considere a tabela:

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7	0
2	2	3	4	5	6	7	0	1
3	3	4	5	6	7	0	1	2
4	4	5	6	7	0	1	2	3
5	5	6	7	0	1	2	3	4
6	6	7	0	1	2	3	4	5
7	7	0	1	2	3	4	5	6

As linhas indicarão a pontuação no primeiro problema e as colunas as do segundo problema. Para cada uma das 64 combinações possíveis de linhas e colunas, que realizam todas as 64 pontuações possíveis nos dois primeiros problemas, escolha como pontuação do terceiro problema o número escrito na interseção delas. Por exemplo, a combinação da linha de número 2 com a coluna de número 5 gera a pontuação $(2,5,7)$. Como não existem números repetidos nas linhas e colunas, todas essas triplas geram pontuações satisfazendo as condições do enunciado.

Observação: Outra construção possível seria escolher para cada um dos 64 pares de pontuações possíveis nos dois primeiros problemas, digamos (p_1, p_2), usar como p_3 o único inteiro do conjunto $\{0,1,\ldots,7\}$ de modo que $p_1 + p_2 + p_3$ seja múltiplo de 8. Se existem duas triplas (p_1, p_2, p_3) e (q_1, q_2, q_3) com duas pontuações iguais nos mesmos problemas, então as demais pontuações também deverão coincidir, pois o conjunto $\{0,1,\ldots,7\}$ contém apenas um representante de cada resto possível na divisão por 8.

42 *O torneio de xadrez*

Vinte jogadores participaram de um torneio de xadrez. Cada jogador enfrentou todos outro jogador exatamente uma vez e cada partida terminou com a vitória de um dos jogadores ou em empate. Nesse torneio, notou-se que para cada partida que terminou em empate, cada um dos demais 18 jogadores venceu pelo menos um dos dois jogadores envolvidos nela. Sabemos ainda que pelo menos dois jogos terminaram em empate. Mostre que é possível nomear os jogadores como P_1, P_2, ..., P_{20} de modo que o jogador P_k ganhou do jogador P_{k+1}, para cada $k \in \{1,2,3,\ldots,19\}$.

42 *O torneio de xadrez – Solução*

Inicialmente mostraremos que cada jogador participou de no máximo um empate. Suponha, por absurdo, que o jogador A empatou com os jogadores B e C. Como A empatou com B, pelas regras mencionadas, C ganhou de A ou de B. Dado que C empatou com A, a única possibilidade é C ter ganho de B. Por simetria, também podemos concluir que B ganhou de C. Isso é um absurdo. Considere agora a maior cadeia de jogadores P_1, P_2, ..., P_t com P_k perdendo para P_{k+1}, para $k = 1,2,\ldots,t-1$. Nosso objetivo é mostrar que $t = 20$. Suponha, novamente por absurdo, que existe um jogador A que não está na cadeia. Assim, P_1 não pode ter ganho de A, pois, caso contrário, ele poderia ser incluído na cadeia. Se A venceu P_1, então A não empatou com P_2. Se A perdeu para P_2, podemos inserir A entre P_1 e P_2 e aumentar a cadeia, obtendo assim uma contradição. Então, se A venceu P_1, então também venceu P_2. Podemos repetir o argumento com os demais membros da cadeia e concluir que A ganhou de todos eles, podendo assim ser incluído no final da cadeia. Isso também é uma contradição.

Resta analisarmos o caso em que A empatou com P_1. Como P_1 empatou no máximo uma vez, podemos assumir $t = 19$, pois, caso contrário, podemos trocar de jogador e recair na situação já tratada no último parágrafo. Se A venceu P_2, também deve ter vencido P_3, do contrário poderíamos inserir A entre P_3 e P_2. Repetindo esse argumento, podemos concluir que A venceu todos os demais e assim pode ser incluído no final da cadeia, gerando um absurdo. Então A perdeu para P_2 e, de forma semelhante, para todos os demais entre P_2 e P_{19}. Como existem pelo menos dois empates, devem existir i e j, com $i, j \geq 2$, tais que P_i e P_j empataram. Entretanto, A não pode ter vencido nenhum desses dois jogadores e isso gera um novo absurdo. Logo, a cadeia maximal deve conter todos os jogadores.

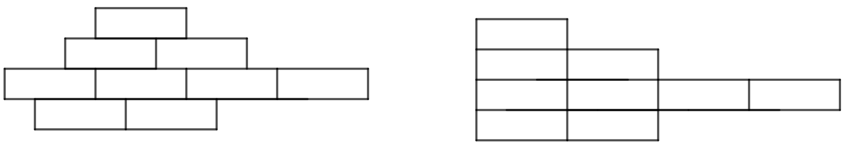
ÍNDICE REMISSIVO

ERRATA

Banco de Questões 2019

1. O perímetro do retângulo - Páginas 25 e 89.

   Há um pequeno erro nas figuras inseridas no problema e na solução. Elas devem ser trocadas por:

   Agradecemos o comentário de Manoela E Te Ferraz em relação a esse erro.

2. SEQUENLADA - Página 83.

   No intem a), deveria estar escrito: 246.831 → 124.611 → 11.247 → 7116 → 672 → 213 → 33 → 6.

3. Transformações Multissômicas - Página 114

   Na última frase, deveria estar escrito 14 em vez de 13, como obtido na solução.

   Agradecemos ao professor Roberto Antonio Vosgerau pelos comentários desses últimos dois erros.