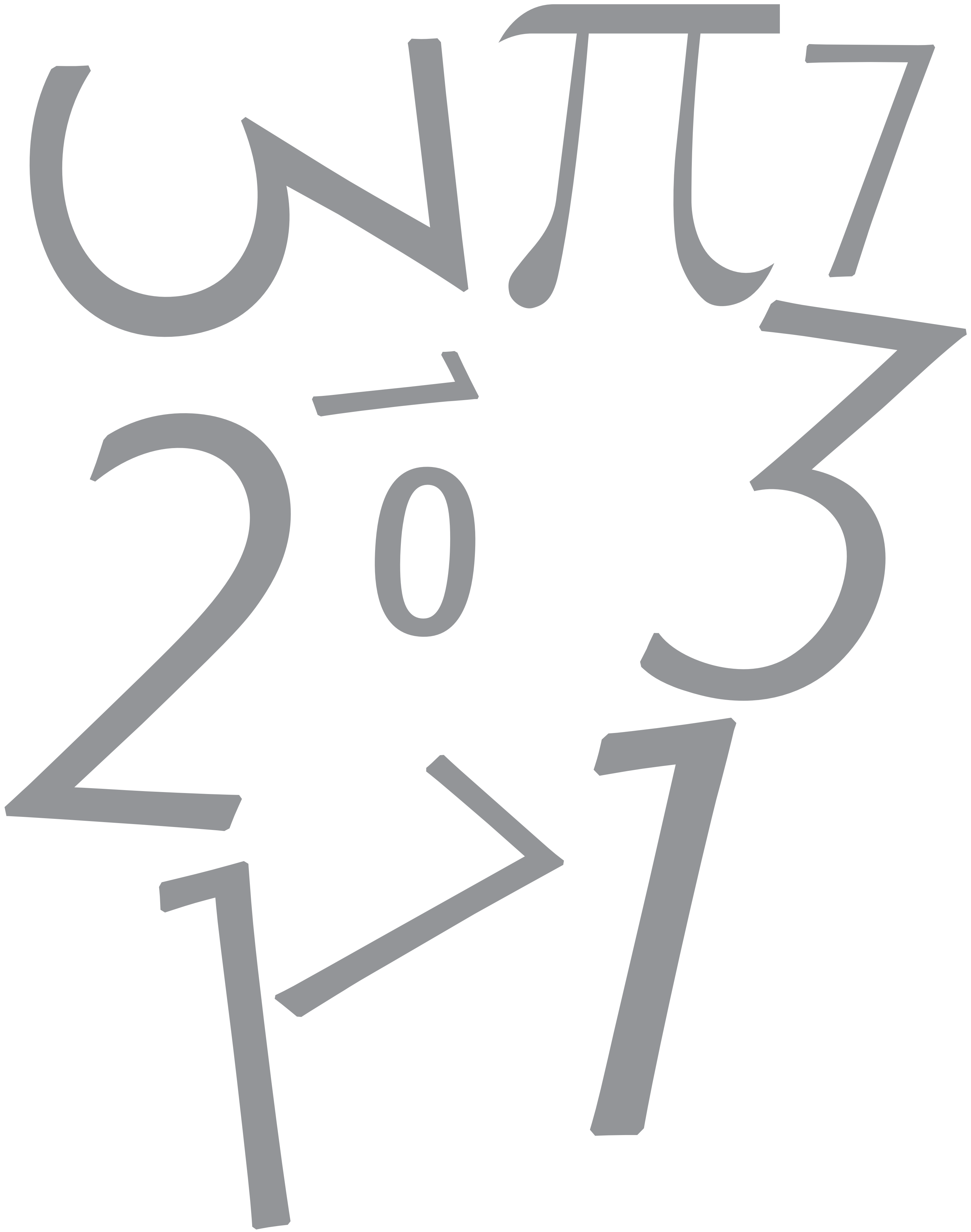


BIÊNIO DA MATEMÁTICA BRASIL 2017 2018

APOIO

CAPES

CNPq Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico

SBM

PATROCINADOR OFICIAL

BNDES

REALIZAÇÃO

impa

MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA, INOVAÇÕES E COMUNICAÇÕES

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

OBMEP – Banco de Questões 2018

Cleber Assis, Tiago Miranda e Samuel Feitosa

Banco de Questões 2018

Estrada Dona Castorina, 110 – Rio de Janeiro – 22460-320

Impresso no Brasil/Printed in Brazil
Primeira edição e impressão

Texto e diagramação: Cleber Assis, Tiago Miranda e Samuel Feitosa

Revisão: Cleber Francisco de Assis e Maria Elisa

Este livro foi escrito usando o sistema LaTeX.

Capa: Sérgio R. Vaz.

IMPA/OBMEP
Banco de Questões 2018
Rio de Janeiro, IMPA, 2018
172 páginas
ISBN 978-85-244-0446-7

Distribuição
IMPA/OBMEP
Estrada Dona Castorina, 110
22460-320 Rio de Janeiro, RJ
e-mail: contato@obmep.org.br
www.obmep.org.br

CONTEÚDO

APRESENTAÇÃO

Desde a sua primeira edição em 2005, a OBMEP envia a todas as escolas públicas do país um Banco de Questões com problemas e desafios de Matemática para alunos e professores. O Banco pretende despertar o prazer pela Matemática, estimular o aluno interessado com perguntas instigantes e proporcionar um treinamento para as provas da OBMEP.

Os problemas deste ano, concebidos pelos professores Cleber Assis, Tiago Miranda e Samuel Feitosa, estão ordenados em grau crescente de dificuldade e exigem mais imaginação do que uma boa educação em Matemática.

A edição deste ano do Banco de Questões e todas as edições anteriores estão disponíveis na página `www.obmep.org.br`, assim como as apostilas e o material didático utilizado no Programa de Iniciação Científica Junior.

Caso encontre alguma solução diferente daquela apresentada ao final do Banco de Questões, não deixe de mandá-la para

`bancodequestoes@obmep.org.br`.

As mais originais serão publicadas na página da OBMEP.

Boa diversão!
Claudio Landim
Coordenador-Geral da OBMEP

PREFÁCIO

Querido leitor/leitora,

O Banco de Questões deste ano da OBMEP – Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas – segue o mesmo padrão do banco do ano passado. Para facilitar a busca de questões em meio ao livro, há um Sumário no início e um Índice Remissivo no final com os nomes dos problemas e respectivas páginas onde aparecem seus enunciados e soluções. Além disto, as questões do Nível 1 são numeradas como $\boxed{\mathbf{1}}$, $\boxed{\mathbf{2}}$, $\boxed{\mathbf{3}}$ etc. As questões do Nível 2 são numeradas como $\boxed{\mathbf{1}}$, $\boxed{\mathbf{2}}$, $\boxed{\mathbf{3}}$ etc. E as questões do Nível 3 são numeradas como $\boxed{\mathbf{1}}$, $\boxed{\mathbf{2}}$, $\boxed{\mathbf{3}}$ etc.

Muitos dos problemas podem resistir às primeiras investidas do leitor e isto não deve ser motivo de desânimo. Um bom conselho é discuti-los com outras pessoas. Isto certamente tornará a experiência de resolvê-los ainda mais prazerosa. Além disto, durante a leitura das soluções, o uso do papel e da caneta podem ser bons instrumentos para a compreensão de todos os detalhes envolvidos.

Alguns dos problemas deste banco foram inspirados em clássicos problemas de olimpíadas ao redor do mundo e hoje constituem um tipo de conhecimento folclórico que todo estudante e professor interessado em competições deve ter contato. Não podemos deixar de manifestar um enorme agradecimento a todos os professores, geralmente anônimos, que dedicam um enorme tempo de suas vidas elaborando belos problemas de olimpíadas e que tanto nos estimulam a aprender mais Matemática.

Bom proveito!

Cleber Assis, Tiago Miranda e Samuel Feitosa

NÍVEL 1

1 *A soma desconhecida*

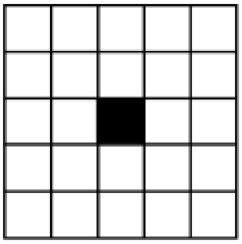
Na soma abaixo, letras iguais representam dígitos iguais e letras diferentes dígitos diferentes.

$$\begin{array}{cccc} & & & X \\ + & & & X \\ & & Y & Y \\ \hline & Z & Z & Z \end{array}$$

Qual o dígito representado pela letra X?

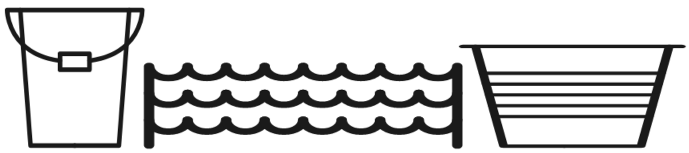
2 *Quadrado cheio de quadrados*

Na figura a seguir, temos um quadrado 5×5 que contém um quadrado preto central. Existe uma coleção de quadrados com lados paralelos aos lados do tabuleiro com dimensões que variam de 1×1 a 5×5 formados pelos quadradinhos da figura. Quantos elementos dessa coleção contém o quadrado escuro preto?



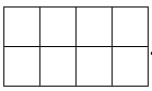
3 *Balde ou bacia?*

Dois recipientes, um balde e uma bacia, possuem 3 e 5 litros de volume, respectivamente. Retirando água de um lago, como podemos deixar a bacia com exatamente 4 litros de água usando somente esses dois recipientes?



4 *As casas dos vizinhos*

Oito amigos vivem em uma mesma rua e moram em casas distintas. Ana vive ao lado de Beto; Hélio vive em frente a Cláudio; Eliana vive ao lado de Francisco; Daniel vive ao lado de Ana; Francisco vive em frente de Daniel e ao lado de Hélio; e Gustavo vive ao lado de Eliana. Se as 8 casas são os quadradinhos do desenho abaixo determine as casas de cada um.

.

5 *Baralho colorido*

Um baralho tem 900 cartas numeradas de 100 a 999. Cartas cuja soma dos algarismos é a mesma, possuem a mesma cor e cartas com somas distintas, cores diferentes. Alice, Bia, Carla e Dani pegam, cada uma, uma certa quantidade de cartas.

a) Todas as cartas que Alice pegou tinham cores diferentes. Qual a quantidade máxima de cartas que Alice pode ter pego?

b) Bia pegou todas as cartas que possuem o algarismo 1. Quantas cartas Bia pegou?

c) Carla pegou todas as cartas com exatamente 2 algarismos iguais. Quantas cartas Carla pegou?

d) Dani disse: – Peguei duas cartas com a mesma cor e números consecutivos. É possível que isso tenha acontecido?

6 *Dados icosaédricos?*

Um icosaedro regular é um sólido geométrico com 20 faces, que são triângulos equiláteros. Desenhando os números de 1 a 20 nas faces de um icosaedro regular, transformamo-lo em um dado. Luísa e Mathias inventaram um jogo no qual, cada um joga o dado icosaédrico 5 vezes e anota os números tirados na sequência, formando um único número. Por exemplo, Luísa tirou a sequência 5, 11, 7, 20, 17, então ela anotou o número 51.172.017.

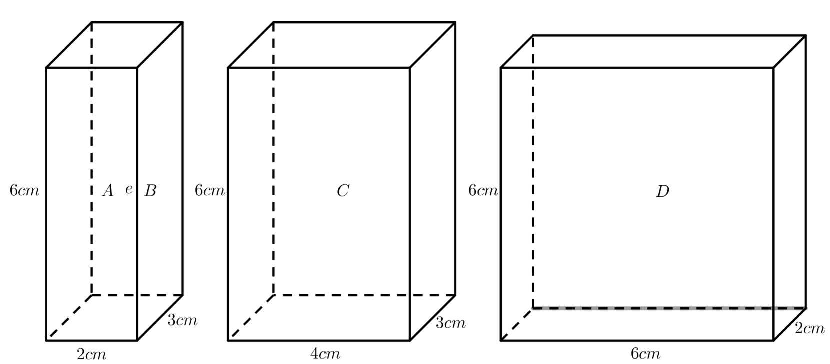
a) Na primeira partida Luísa venceu com a maior diferença possível. Qual é essa diferença?

b) Na segunda partida, Luísa fez 162.012.510 pontos e Mathias lançou o dado quatro vezes, tirando 14, 11, 8 e 19. É possível Mathias vencer esta partida com seu último lançamento?

c) Na terceira partida, Luísa fez 12.111.813 pontos. Quantas são as sequências nas quais é possível obter essa pontuação?

7 *Paralelepípedos de madeira*

Maria ganhou um jogo composto por 4 peças (A, B, C e D) de madeira, todas em formato de paralelepípedos reto-retângulos (todas as faces são retangulares), sendo A e B de dimensões $2\,\text{cm} \times 3\,\text{cm} \times 6\,\text{cm}$, C de dimensões $3\,\text{cm} \times 4\,\text{cm} \times 6\,\text{cm}$ e D de dimensões $2\,\text{cm} \times 6\,\text{cm} \times 6\,\text{cm}$.



a) Qual a área total de cada uma das quatro peças?

b) Qual o volume de cada uma das quatro peças?

c) Maria encaixou as quatro peças formando um cubo. Qual a medida da aresta do cubo?

d) Após construir o cubo, Maria o pintou de branco. Quando a tinta secou, ela o desmontou. Qual a área que permaneceu com a cor original?

8 *Construindo sequências numéricas*

Começando com qualquer número natural não nulo é sempre possível formar uma sequência de números que termina em 1, seguindo repetidamente as instruções a seguir:

1. se o número for múltiplo de 3, divide-se por 3;

2. se o número deixar resto 1 na divisão por 3, subtrai-se 1;

3. se o número deixar resto 2 na divisão por 3, soma-se 1.

Por exemplo, começando com o número 76, forma-se a seguinte sequência:

$$76 \to 75 \to 25 \to 24 \to 8 \to 9 \to 3 \to 1.$$

Nessa sequência aparecem 8 números, por isso, dizemos que ela tem *comprimento* 8.

a) Escreva a sequência que começa com 100.

b) Quais sequências têm *comprimento* 4?

c) Quantas sequências têm *comprimento* 6?

9 *Vendendo sanduíches*

Ana, Bia, Cátia, Diana e Elaine trabalham como ambulantes vendendo sanduíches. Diariamente, elas passam na lanchonete do Sr. Manoel e pegam a mesma quantidade de sanduíches para vender. Um certo dia, Sr. Manoel estava doente e deixou um bilhete avisando o motivo pelo qual não estava lá, mas pedindo que cada uma pegasse $\frac{1}{5}$ dos sanduíches. Ana passou primeiro, seguiu as instruções do bilhete e saiu para vender seus sanduíches. Bia, passou em seguida, mas pensou que era a primeira a passar, pegando $\frac{1}{5}$ do que havia e saiu. Cátia, Diana e Elaine chegaram juntas e dividiram igualmente a quantidade que havia, já que Cátia sabia que Ana e Bia haviam passado antes.

a) Que fração do total de sanduíches coube a Bia?

b) Quem ficou com a menor quantidade de sanduíches? Quem ficou com a maior quantidade?

c) Ao final da divisão, nenhuma das vendedoras ficou com mais de 20 sanduíches. Quantos sanduíches o Sr. Manoel deixou para elas?

10 *Muitas balas*

Sobre uma mesa existe uma certa quantidade N de balas. Aline e Bruna combinam que, alternadamente, cada uma deve comer pelo menos uma, mas não mais que a metade da quantidade existente. Vence o jogo quem comer a última bala. Ana sempre começa o jogo.

a) Para $N = 5$, qual das duas tem a *posição vencedora*? (*Posição vencedora* é aquela na qual a jogadora pode vencer qualquer que seja a sequência de jogadas de sua adversária.)

b) Para $N = 20$, qual das duas tem a *posição vencedora*?

c) Quais são os valores de N, sendo $100 < N < 200$, que dão a Bruna a *posição vencedora*?

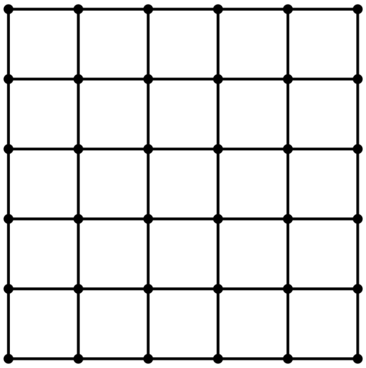
11 *São muitos retângulos*

O quadriculado da figura abaixo é composto por 25 pequenos quadrados unitários. Determine:

a) Quantos quadrados com vértices sobre os pontos da figura e lados sobre os segmentos da figura existem?

b) Quantos pares de retas paralelas, de maneira que cada uma contenha algum segmento da figura, existem?

c) Quantos retângulos com vértices sobre os pontos da figura e lados sobre os segmentos da figura existem?



12 *Os professores e suas cidades*

Rita, José e Sônia são professores de Literatura, Química e Matemática, nas cidades de Palmas, Fortaleza e Vitória, não necessariamente nestas ordens de disciplinas e cidades. Sabe-se que:

- José é professor de Literatura.
- Quem trabalha em Palmas é professor de Química.
- Rita não trabalha em Vitória, nem leciona Química.

a) Quem leciona Matemática?

b) Quem ensina Química?

c) Quem trabalha em Vitória?

13 *Uma data de aniversário complicada!*

Alberto e Bernardo se tornaram amigos de Carol, recentemente, e eles querem saber quando é o aniversário dela. Carol deu a eles uma lista com 12 possíveis datas:

- 4 de janeiro;
- 5 de janeiro;
- 11 de janeiro;
- 8 de março;
- 8 de abril;
- 9 de abril;
- 7 de junho;
- 5 de junho;
- 13 de julho;
- 7 de outubro;
- 4 de outubro;
- 8 de outubro.

Em seguida, Carol fez uma brincadeira contando a Alberto e Bernardo, separadamente, o mês e o dia de seu aniversário, respectivamente, e pediu para que eles conversassem para descobrir a data do aniversário dela.
Não teria muita graça se ela fizesse aniversário em março ou julho, pois só temos uma possível data em cada um desses meses dentre as opções e Alberto acertaria imediatamente. Também seria rápido se ela aniversariasse em 11 de janeiro ou 9 de abril ou 13 de julho, pois os referidos números só aparecem uma vez na lista e Bernardo poderia descobrir a resposta sozinho. Assim, eles iniciaram uma conversa para tentar descobrir.
Alberto diz: Não consigo saber a data do aniversário de Carol, mas garanto que Bernardo não sabe também.
Bernardo diz: No início, eu não sabia a data completa do aniversário, mas agora eu sei.
Alberto: Então eu também sei quando é o aniversário de Carol.

a) Por que na primeira fala de Alberto, ele diz que nem ele nem Bernardo sabem ainda a resposta?

b) Por que Bernardo disse que no início não sabia a resposta, mas após a fala de Alberto, Bernardo descobriu a data do aniversário de Carol?

c) Quando é o aniversário de Carol?

14 *Os prisioneiros bons de raciocínio*

Três prisioneiros (com excelentes habilidades em lógica e matemática) têm a chance de sair da prisão. Um deles enxerga bem com os dois olhos, o outro com somente um olho e o terceiro é cego.
O carcereiro falou aos prisioneiros que entre três chapéus brancos e dois vermelhos, pegaria três e colocaria sobre as cabeças deles, mas não permitiria que ninguém olhasse a cor do chapéu sobre a própria cabeça, apenas os dos outros presos. O carcereiro reuniu os três prisioneiros com os chapéus na cabeça e ofereceu-lhes a liberdade, desde que algum deles soubesse a cor do chapéu na própria cabeça. O primeiro prisioneiro a falar foi o que enxergava com os dois olhos.

a) Qual seria a situação que poderia garantir ao primeiro prisioneiro acertar o chapéu que ele usava?

b) O primeiro prisioneiro negou saber a resposta. Assim, o processo foi repetido com o prisioneiro que enxerga somente com um olho. Quais as cores que ele precisaria ver nos chapéus dos outros presos que permitiria que ele acertasse a cor do seu próprio chapéu? Nesse caso, qual deveria ser essa cor?

c) Após o primeiro prisioneiro negar saber a resposta, o processo foi repetido com o prisioneiro que enxerga somente com um olho e este também não soube responder. O carcereiro nem se preocupou em fazer a pergunta ao prisioneiro cego, mas esse afirmou que sabia a cor do chapéu na própria cabeça. Qual era essa cor?

15 *As aulas de Mário*

Mário fez 30 horas num curso extra de matemática. Nos dias em que tinha aula, a duração era só de 1 hora, que ocorria exclusivamente no período da manhã ou no da tarde. Ademais, aconteceram 20 tardes e 18 manhãs sem aula durante o período do curso.

a) Em quantos dias não houve aula?

b) Quantos dias durou o curso?

16 *Dois problemas sobre relógios*

a) Num relógio digital, as horas são exibidas por meio de quatro algarismos. Por exemplo, ao mostrar $\boxed{00:00}$ sabemos que é meia-noite e ao mostrar $\boxed{23:59}$ sabemos que falta um minuto para meia-noite. Quantas vezes por dia os quatro algarismos mostrados são todos pares?

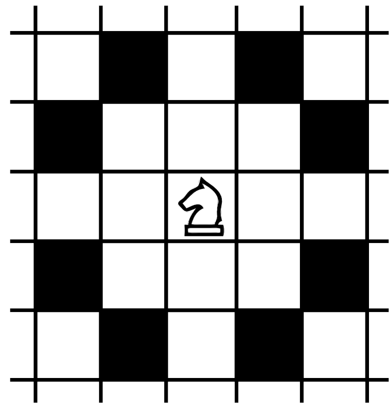
b) Um relógio, com ponteiros de horas, minutos e segundos, faz plim toda vez que um ponteiro ultrapassa outro no mostrador. Os três ponteiros só se sobrepõem ao meio-dia ou à zero hora. Qual o número de plins registrados em um certo dia, no período entre as 12 horas e 1 segundo e as 23 horas, 59 minutos e 59 segundos?

17 *Xadrez outra vez!*

Em um torneio de xadrez, todos os jogadores se enfrentaram duas vezes, obtendo a pontuação de 1 ponto por vitória, meio-ponto por empate e zero ponto por derrota. O vencedor foi aquele que obteve mais pontos na disputa. Luíza, uma curiosa matemática, achou um papel informando que a soma da pontuação de todos os participantes foi 210 pontos.

a) Quantos jogadores participaram do torneio?

b) A imagem a seguir foi a logomarca do torneio e estava no papel que Luíza achou.



Luíza parou alguns segundos observando-a e percebeu que havia um cavalo no centro, com as casas pintadas de preto ilustrando aquelas que o cavalo poderia ir em um movimento. Aí ela se perguntou:
− Se este tabuleiro fosse infinito, e o cavalo mantivesse o padrão de movimentos, em quantas casas o cavalo poderia chegar em dois movimentos?
Inicialmente, ela pensou em "64", mas rapidamente viu que estava errada. Agora, é com você, responda corretamente a pergunta pensada por Luíza.

c) Luíza recebeu uma mensagem de um amigo que participou do torneio, informando que ele fez 12 pontos. Luíza respondeu assim: "− Não fique triste, você vencerá o próximo campeonato!". Como Luíza sabia que o amigo não havia vencido o torneio?

18 *Formigas... sempre formigas!*

a) Uma formiga está no vértice A de um retângulo $ABCD$ e faz um movimento em direção a B seguindo o lado do retângulo. Após um segundo movimento, vai da mesma maneira para C. Depois de 3 movimentos, do mesmo modo ela chega a D e no quarto, mantendo o caminho sobre o lado, voltará para A. Depois de 2018 movimentos análogos aos anteriores, em qual vértice a formiga estará?

b) As formigas Albormiga e Clarormiga partem dos vértices A e C de um retângulo, respectivamente, deslocando-se com velocidades constantes (mesmo nos giros de 90° em cada vértice). A primeira no sentido horário e a segunda no anti-horário. De A até o primeiro encontro, Albormiga percorreu 360 metros. Do primeiro ao segundo encontro, Clarormiga andou 300 metros. Qual o perímetro do retângulo?

c) Três formigas estão localizadas em vértices distintos de um retângulo, deixando o outro vértice livre. Uma formiga pode se mover somente ao longo de uma reta paralela à reta determinada pelos pontos onde se localizam as outras duas, movendo-se uma de cada vez. É possível, depois de vários movimentos das formigas, acontecer de todas elas estarem no ponto médio de três lados distintos do retângulo?

19 *O Rei Artur e o dragão*

O Rei Artur teve que lutar com o Dragão das Três Cabeças e Três Caudas (conhecido como $DTCTC$). Sua tarefa foi facilitada quando conseguiu arranjar uma espada mágica que podia desferir os seguintes golpes (um de cada vez):

A) cortar uma cabeça;

B) cortar duas cabeças;

C) cortar uma cauda;

D) cortar duas caudas.

Além disso, a Fada Morgana lhe revelou o segredo do dragão:

i) se uma cabeça for cortada, crescerá uma nova;

ii) se duas cabeças forem cortadas, logo após o golpe não crescerão cabeças e caudas;

iii) no lugar de uma cauda cortada nascerão duas caudas novas;

iv) se duas caudas forem cortadas, crescerá uma nova cabeça;

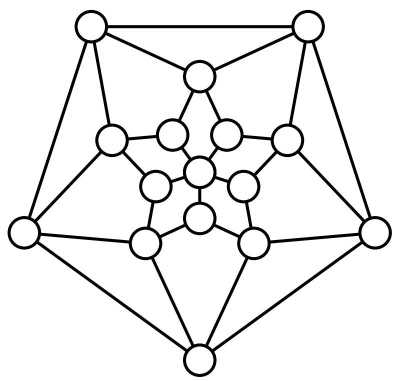
v) o dragão morre se perder as três cabeças e as três caudas.

a) É possível o dragão ficar com 4 cabeças e 4 caudas?

b) Para matar o $DTCTC$, qual o mínimo de golpes que o Rei Artur precisará desferir?

20 *A distribuição das moedas!*

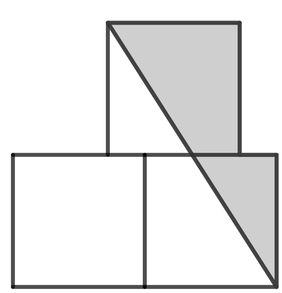
Em cada um dos 16 círculos da figura está um estudante. Um total de 3360 moedas são distribuídas entre os 16 estudantes, de modo que estudantes que distam o mesmo do centro recebem a mesma quantidade de moedas. Cinco a cinco, de fora para dentro, os círculos estão sobre os vértices de um pentágono regular, sendo o círculo central equidistante aos vértices de um mesmo pentágono.



Em um certo instante, cada estudante dá todas as suas moedas dividindo-as igualmente entre cada um de seus vizinhos. Após o intercâmbio de moedas, cada estudante ficou com o mesmo número de moedas que tinha no início. Determine o número de moedas que o estudante do círculo central tinha originalmente.

21 *A área da região*

Os lados dos quadrados da figura abaixo possuem o comprimento de 1 m. Qual é a área da região sombreada?



22 *Múltiplos no tabuleiro*

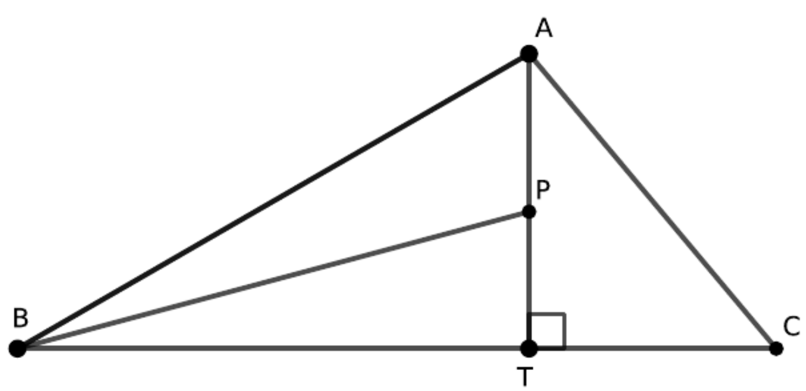
Em um tabuleiro 30×30, as linhas e as colunas estão numeradas de 1 a 30. Em cada linha, João pinta de vermelho as casas em que o número da coluna é múltiplo do número da linha. Quantas casas serão pintadas de vermelho?

23 *As habilidades dos competidores*

Ocorrerá um torneio com 100 competidores, todos com níveis de habilidades diferentes. O competidor mais habilidoso sempre vence o competidor menos habilidoso. Cada participante joga exatamente duas vezes, com dois oponentes sorteados (uma vez com cada um). Um competidor que ganha duas partidas recebe uma medalha. Determine o menor número de medalhas que podem ser distribuídas no torneio.

24 *As medidas dos ângulos*

Seja ABC um triângulo tal que $\angle ACB = 50°$. A altura correspondente ao vértice A e a bissetriz do ângulo $\angle ABC$ se encontram em P, com P no interior do triângulo ABC e $\angle APB = 105°$. Encontre as medidas dos ângulos $\angle BAC$ e $\angle ABC$.

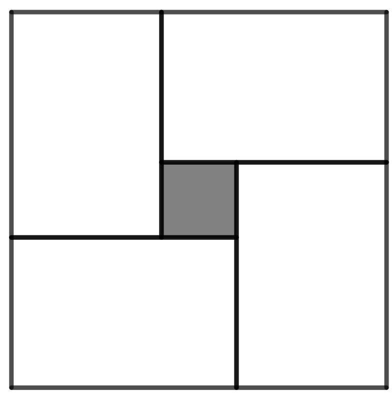


25 *Os números da Mônica*

Com os algarismos 1, 3 e 5, Mônica forma números de três algarismos que são maiores que 150. Quantos números Mônica pode formar?

26 *As dimensões do quadrado*

Um quadrado está dividido em 4 retângulos iguais e um quadrado, como mostra a figura abaixo. O quadrado sombreado possui área de $36\,\mathrm{m}^2$. Cada retângulo possui área de $216\,\mathrm{m}^2$. Determine as dimensões dos retângulos.



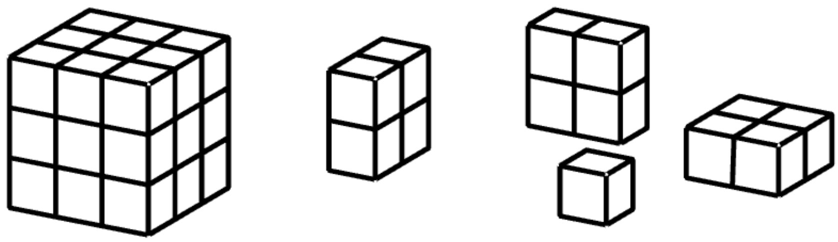
27 *A conta de multiplicação*

Na conta de multiplicação abaixo, quase a metade dos dígitos foram trocados por asteriscos. Descubra quais dígitos foram trocados.

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & * & 1 & * \\
\times & & & 3 & * & 2 \\
\hline
 & & & * & 3 & * \\
+ & 3 & * & 2 & * & \\
* & 2 & * & 5 & & \\
\hline
1 & * & 8 & * & 3 & 0.
\end{array}$$

28 *O Cubo de Conway*

Determine como montar um cubo $3 \times 3 \times 3$ com 6 peças $1 \times 2 \times 2$ e três peças $1 \times 1 \times 1$.



29 *A idade do professor Antônio*

O professor Antônio descobriu uma interessante propriedade relacionada ao inteiro x que representa sua idade. Ele contou para seus alunos que $x^2 = \overline{abac}$ e que $x = \overline{ab} + \overline{ac}$. Qual a idade do professor?

Observação: Estamos usando uma barra para distinguir a representação decimal do número de quatro algarismos $\overline{abcd}$ do produto $a \cdot b \cdot c \cdot d$. Por exemplo, se $\overline{abcd} = 1267$, então $a = 1$, $b = 2$, $c = 6$ e $d = 7$. A notação é a mesma para os números com outras quantidades de algarismos.

30 *Gavetas e cadeados*

Fernando é um cara precavido e o portão da casa dele possui 10 cadeados distintos, sendo que cada um só pode ser aberto pela respectiva chave, e cada chave abre apenas um cadeado. Para ser aberto, ele deve possuir pelo menos uma chave para cada cadeado. Por segurança, Fernando espalhou, exatamente, duas chaves diferentes nas 45 gavetas do seu trabalho, de modo que duas chaves de uma mesma gaveta abrem cadeados diferentes e não existem duas gavetas contendo chaves que abrem exatamente os mesmos cadeados.

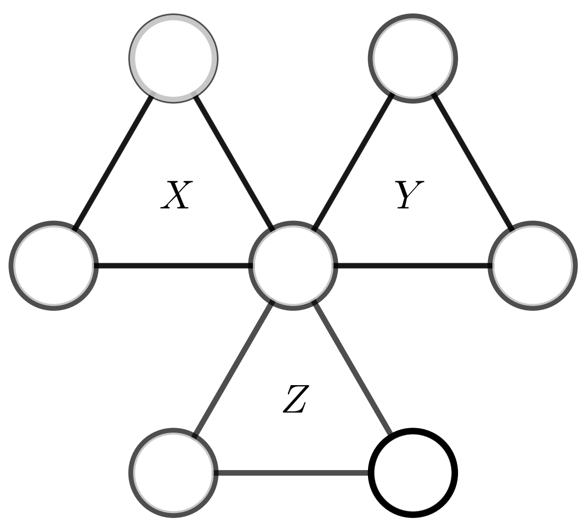
a) Quantas são as duplas possíveis de chaves que podem ser formadas com 10 chaves distintas?

b) Quantas cópias de cada chave Fernando precisa ter para formar todos os pares de chaves possíveis?

c) Qual o número mínimo de gavetas que Fernando deve abrir para garantir a posse de 10 chaves distintas e abrir o portão de casa?

31 *Números no círculo*

Michel deve escrever os números de 1 a 7 em cada um dos círculos da figura abaixo, de modo que os resultados obtidos ao somar os 3 números que estão nos vértices dos triângulos X, Y e Z sejam 3 números consecutivos. Qual número pode constar no círculo central? Encontre todas as possibilidades.



NÍVEL 2

$\boxed{1}$ *As somas da tabela*

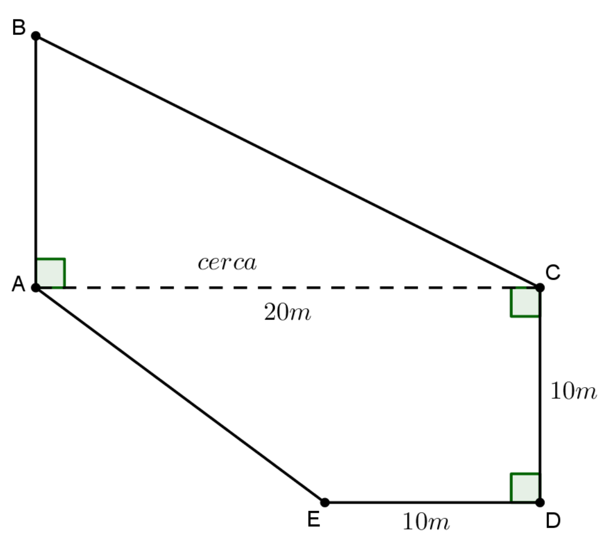
As somas das três colunas e das três linhas da tabela são iguais.

4	9	2
8	1	6
3	5	7

Qual é o menor número de casas da tabela, que devem ser alteradas, para que todas as novas seis somas sejam diferentes entre si?

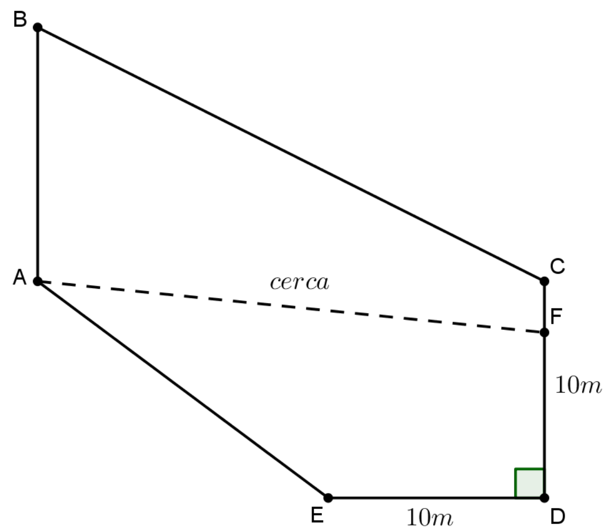
$\boxed{2}$ *Cerca, nova cerca, outra cerca*

A figura representa o terreno do Sr. Arlindo. Esse terreno é dividido por uma cerca, representada pelo segmento AC. A parte triangular ABC tem área igual a $120\,\mathrm{m}^2$.

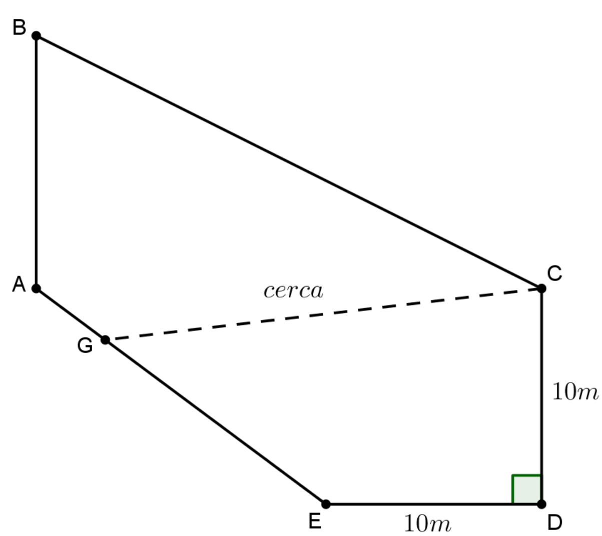


a) Qual é a área total do terreno?

b) Como este terreno será doado para os dois filhos do Sr. Arlindo, o filho mais velho, Marlindo, propõe que a cerca seja refeita, representada pelo segmento AF do novo desenho, sendo F pertencente ao segmento CD, de maneira que ela divida o terreno em duas áreas iguais. Qual deve ser a medida CF?



c) O filho mais novo, Solindo, concorda com seu irmão em relação à divisão em áreas iguais, mas acha que a cerca deve ligar os pontos C e G, sendo G um ponto do segmento AE. Qual a medida AG?



3 *Sobre homens, mulheres, matemática e literatura*

Em uma classe com 35 estudantes, pesquisou-se sobre os gostos relativos a matemática e literatura e constatou-se que:

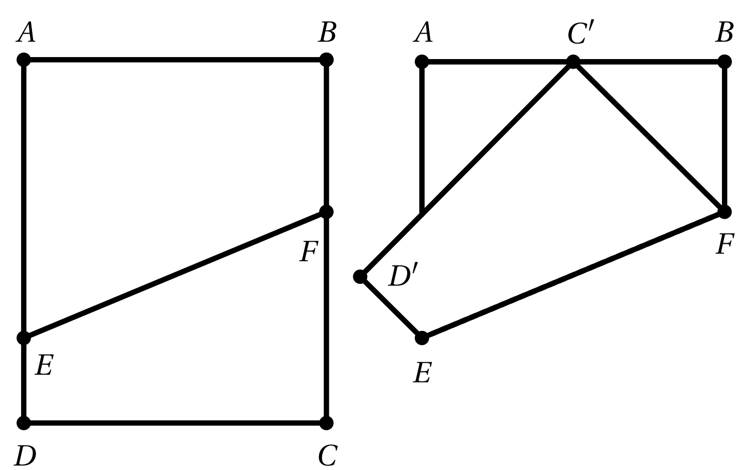
- 7 homens gostam de matemática;
- 6 homens gostam de literatura;
- 5 homens e 8 mulheres disseram não gostar de ambos;
- há 16 homens na classe;
- 5 estudantes gostam de ambos; e
- 11 estudantes gostam somente de matemática.

a) Quantos homens gostam de matemática e literatura?

b) Quantas mulheres gostam apenas de literatura?

4 *Vamos dobrar papel?!*

O retângulo $ABCD$ de medidas $AB = 240\,\text{cm}$ e $BC = 288\,\text{cm}$ representa um papel que será dobrado pelo segmento EF, onde E pertence a AD e F pertence a BC, de modo que o ponto C ficará sobre o ponto médio de AB.



a) Qual o comprimento de CC'?

b) Qual o comprimento de EF?

$\boxed{5}$ *A conta errada*

Ana multiplica dois números inteiros positivos cuja diferença é 202, mas comete um erro e obtém um número 1000 unidades menor que o correto. Ao dividir o resultado de Ana pelo menor dos números que deveria multiplicar, o quociente é 288 e o resto é 67. Quais os dois números que Ana multiplicou?

$\boxed{6}$ *Os velhos problemas com os dígitos*

a) Quantos números de quatro algarismos têm soma de seus algarismos par?

b) Um número com dois dígitos distintos e não nulos é chamado de bonito se o dígito das dezenas é maior do que o dígito das unidades. Quantos números bonitos existem?

c) Quantos números pares de quatro dígitos podemos formar utilizando os algarismos $0, 1, 2, 3, 4, 5$ sem utilizar o mesmo algarismo duas vezes?

d) Qual a média de todos os números de 5 algarismos que podem ser formados usando cada um dos dígitos 1, 3, 5, 7 e 8 exatamente uma vez?

$\boxed{7}$ *As folhas do livro*

José arrancou algumas folhas consecutivas de um livro com páginas numeradas com inteiros consecutivos e escritos em ambos os lados de cada folha. A soma dos números das páginas arrancadas é 344.

a) Determine a fatoração em números primos do número 344.

b) Encontre a soma do primeiro e do último número dentre os que foram escritos nas páginas arrancadas.

c) Qual a quantidade de páginas arrancadas?

$\boxed{8}$ *A soma dos dígitos*

a) Encontre a soma dos dígitos de $99 \cdot 33$.

b) Usando $999999 = 10^6 - 1$, encontre a soma dos dígitos de $999999 \cdot 333333$.

c) Encontre a soma dos dígitos de $999\ldots999 \cdot 333\ldots333$, em que cada dígito nos fatores anteriores aparece 2018 vezes.

$\boxed{9}$ *João e Maria no torneiro de xadrez*

a) Um campeonato terá 7 competidores. Cada um deles jogará exatamente um jogo contra todos os outros. Qual o total de jogos do campeonato?

b) Um campeonato terá n competidores e cada um deles jogará exatamente um jogo contra todos os outros. Verifique que o total de jogos é $\dfrac{n \cdot (n-1)}{2}$.

c) Um competidor A é chamado de *mestre* do campeonato se todo outro jogador ou perdeu para A ou perdeu para alguém que perdeu para A. Verifique que todo campeonato em que cada jogador joga exatamente uma vez contra todos os outros e que não existem empates, sempre admite um *mestre*.

d) João e Maria estavam num torneio em que cada atleta deveria jogar contra o outro exatamente uma vez. No entanto, Maria teve um problema de saúde e abandonou o torneio após disputar 10 jogos e João precisou sair após o seu primeiro jogo. Ao final do dia, foi contabilizado um total de 55 jogos. O jogo que João disputou foi contra Maria?

$\boxed{10}$ *Triângulos na circunferência*

Juquinha marca pontos sobre uma circunferência e desenha triângulos ligando 3 destes pontos. Os comprimentos dos arcos de 2 pontos consecutivos são iguais.

a) Marcando 4 pontos na circunferência, quantos triângulos ele conseguirá desenhar?

b) Marcando 5 pontos na circunferência, quantos triângulos equiláteros ele conseguirá desenhar?

c) Quantos triângulos retângulos ele conseguirá desenhar se marcar 6 pontos?

11 *O ladrilho que faltava!*

Um ladrilho, em forma de polígono regular, foi retirado do lugar que ocupava em um painel. Observou-se, então, que se esse ladrilho sofresse uma rotação de 40° ou de 60° em torno do seu centro, poderia ser encaixado perfeitamente no lugar que ficou vago no painel. Qual o menor número de lados que esse polígono pode ter?

12 *Paulo ficou sem bolo*

Quando Paulo fez 15 anos, convidou 43 amigos para uma festa. O bolo tinha a forma de um polígono regular de 15 lados e havia 15 velas sobre ele. As velas foram colocadas de tal maneira que não havia três velas em linha reta. Paulo dividiu o bolo em pedaços triangulares onde cada corte ligava duas velas ou ligava uma vela a um vértice. Além disso, nenhum corte cruzou outro já realizado. Explique por que, ao fazer isso, Paulo pôde dar um pedaço de bolo a cada um de seus convidados, mas ele próprio ficou sem comer.

13 *O Festival de Pesca*

A tabela abaixo mostra alguns dos resultados do último Festival de Pesca de Pirajuba, exibindo quantos competidores q pescaram n peixes para alguns valores de n.

n	0	1	2	3	...	13	14	15
q	9	5	7	23	...	5	2	1

A notícia publicada no jornal da cidade relatou que:

i) o vencedor pescou 15 peixes;

ii) dentre aqueles que pescaram 3 ou mais peixes, a média foi de 6 peixes pescados; e

iii) dentre aqueles que pescaram 12 ou menos peixes a média de peixes pescados foi 5.

a) Qual foi o número total de peixes pescados durante o festival?

b) Quantos competidores pescaram de 4 a 12 peixes?

$\boxed{14}$ *Sobre rios, correntezas e quem chega primeiro?!*

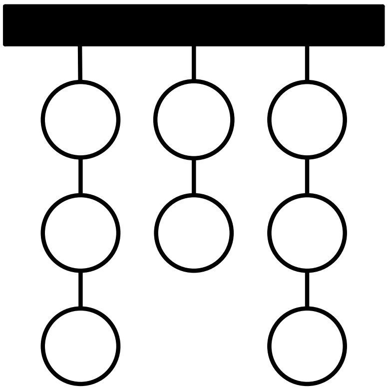
a) Helena e Gabriel pulam, simultaneamente, de uma jangada em um rio e nadam em direções opostas. Gabriel nada rio abaixo seguindo a corrente e Helena nada rio acima contra a corrente, possivelmente a uma velocidade diferente. Depois de 5 minutos, eles viram e voltam para a jangada, cada um mantendo uma velocidade constante durante todo o tempo. Quem chega primeiro? (Durante esse tempo, a jangada estava ancorada, ou seja, permaneceu parada, apesar da correnteza.

b) Em sua velocidade usual, um homem desce um rio de 15 km de comprimento em 5 horas a menos que o tempo que ele gasta nadando no mesmo rio percorrendo o caminho contrário. Se ele dobrar a sua velocidade usual, ele passa a descer o rio gastando apenas 1 hora a menos que o tempo gasto na volta. Considerando que a velocidade da correnteza do rio se mantém constante durante os trajetos, qual o seu valor em km/h?

$\boxed{15}$ *Acertando os alvos*

Num concurso de tiros, 8 alvos são arrumados em duas colunas com 3 alvos e uma coluna com 2 alvos. As regras são:

- O atirador escolhe livremente em qual coluna atirar.
- Ele deve tentar o alvo mais baixo ainda não acertado.



a) Se o atirador desconsiderar a segunda regra, de quantos modos ele poderá escolher apenas 3 posições dos 8 discos distintos para atirar?

b) Se as regras forem cumpridas, então, de quantas maneiras os 8 alvos podem ser acertados?

16 *A conferência de sucesso*

Um ciclo de três conferências teve sucesso constante, isto é, em cada sessão havia o mesmo número de participantes. No entanto, a metade dos que compareceram à primeira não voltou mais; um terço dos que compareceram à segunda conferência assistiu apenas a ela, e um quarto dos que compareceram à terceira não assistiu nem à primeira nem à segunda. Sabendo que havia 300 inscritos e que cada um assistiu a pelo menos uma conferência, determine:

a) Quantas pessoas compareceram a cada conferência?

b) Quantas pessoas compareceram às três conferências?

17 *O ponto no interior*

No triângulo ABC, retângulo em A, tem-se $AB = 8\,\text{cm}$ e $AC = 6\,\text{cm}$.

a) O ponto P, interior ao triângulo, dista $1\,\text{cm}$ do lado AB e $2\,\text{cm}$ do lado AC. Qual é a distância de P ao lado BC?

b) Calcule o raio da circunferência que é tangente ao lado AC e aos prolongamentos dos lados AB e BC.

18 *Os livros do pai de João*

O pai de João possui entre 200 e 300 livros em sua biblioteca. Um quinto destes livros está em inglês, um sétimo em francês, um quarto em italiano e o resto são livros em espanhol. Qual o total de livros em espanhol nessa biblioteca?

19 *Amigos no hotel*

Um hotel possui 5 quartos distintos, todos com camas individuais para até 2 pessoas. O hotel está sem outros hóspedes e 5 amigos querem passar a noite nele. De quantos modos os 5 amigos podem escolher seus quartos?

20 *Espionagem na corte*

O rei Luis estava desconfiado de alguns de seus cortesãos. Ele fez uma lista completa de cada um dos seus cortesãos e disse a cada um deles para espionar um outro cortesão. O primeiro da lista foi espionar o cortesão que estava espionando o segundo da lista, o segundo da lista foi espionar o cortesão que estava espionando o terceiro da lista, e assim sucessivamente, o penúltimo foi espionar o cortesão que estava espionando o último e o último foi espionar o cortesão que estava espionando o primeiro. Verifique que o rei Luis tinha um número ímpar de cortesãos.

21 *Garotas, garotos e seus vizinhos*

Vinte e cinco garotos e vinte e cinco garotas estão sentados ao redor de uma mesa. Prove que é possível encontrar uma pessoa que tem garotas como vizinhas.

22 *Xadrez no nível Magistral.*

Em torneios de xadrez, geralmente [1] , cada vitória vale 1 ponto, cada empate, $0,5$ ponto e cada derrota, zero ponto. No "Campeonato Magistral" de xadrez participaram apenas **Mestres Internacionais – MI's** e **Grandes Mestres – GM's**. O número de GM's foi dez vezes o número de MI's. Cada enxadrista jogou apenas uma vez contra todos os adversários e assim, se n foi o número de jogadores, então ocorreram $\dfrac{n(n-1)}{2}$ jogos. A soma dos pontos de todos os GM's foi $4,5$ vezes a soma de todos os MI's. Sendo assim, pergunta-se:

a) Quantos Mestres Internacionais participaram desta competição?

b) Quantos Grandes Mestres participaram deste campeonato?

c) Quantos jogos teve o torneio?

23 *Torneio sem invictos e totalmente derrotados*

Em um torneio com 5 times, não existem empates. De quantos modos podem ocorrer os $\dfrac{5 \cdot 4}{2} = 10$ jogos do torneio de modo que, tanto não tenhamos um time que ganhou todas quanto um time que não perdeu todas as partidas?

[1] Há torneios com a "Pontuação de Bilbao" ou "Regra de Sofia", que dentre outras condições, coloca a vitória valendo 3 pontos, o empate valendo 1 ponto e a derrota valendo zero ponto.

$\boxed{24}$ *As potências sempre têm truques novos!*

a) Qual dos números é maior: $2^{100}+3^{100}$ ou 4^{100}?

b) Sejam x e y números naturais tais que

$$2^x \cdot 3^y = \left(24^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{60}}\right) \cdot \left(24^{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{60}}\right)^2 \cdot \left(24^{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{60}}\right)^3 \cdot \ldots \cdot \left(24^{\frac{1}{60}}\right)^{59}.$$

Determinar o valor de $x+y$.

$\boxed{25}$ *A volta dos Repunits*

a) Se $A = \underbrace{111\ldots111}_{2m}$ e $B = \underbrace{444\ldots444}_{m}$, verifique que a soma $A+B+1$ é um quadrado perfeito para qualquer inteiro positivo m.

b) Se $p = \underbrace{111\ldots111}_{l}$ é um número primo, verifique que l também é um número primo.

c) Verifique que se $x = \underbrace{111\ldots111}_{n}$ é divisível por 41, então n é divisível por 5.

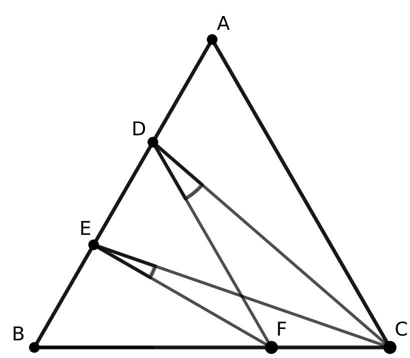
d) Se

$$y = \sqrt{\underbrace{111\ldots111}_{2n \text{ vezes}}} \cdot 10^n,$$

encontre o maior inteiro positivo que não é maior que y.

$\boxed{26}$ *A soma dos ângulos no triângulo equilátero*

Os pontos D e E dividem o lado AB do triângulo equilátero ABC em três partes iguais, D entre A e E. O ponto F está sobre o lado BC de modo que $CF = AD$. Encontre a soma dos ângulos $\angle CDF + \angle CEF$.

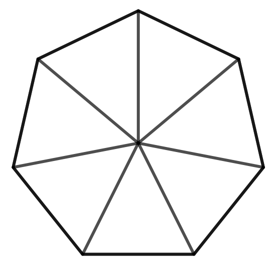


$\boxed{27}$ *O jogo no tabuleiro*

Maria e Pedro jogam em um tabuleiro 9×9. Maria começa pintando de vermelho 46 quadradinhos do tabuleiro. Em seguida, Pedro deve escolher um quadrado 2×2. Se o quadrado escolhido por Pedro tem 3 ou mais casinhas pintadas de vermelho, ele vence o jogo. Caso contrário, vence Maria. Qual dos dois pode sempre garantir a vitória independentemente da jogada do adversário?

$\boxed{28}$ *A roleta heptacular*

Uma roleta circular possui 7 seções de igual tamanho e cada uma delas será pintada com uma dentre duas cores. Duas colorações são consideradas equivalentes se uma pode ser rotacionada para produzir a outra. De quantas maneiras não equivalentes a roleta pode ser pintada?



$\boxed{29}$ *O Torneio Intergalático*

Considere um torneio de xadrez envolvendo terráqueos e alienígenas em que cada jogador joga contra todos os outros exatamente uma vez. Ao final do torneio, cada jogador obteve metade dos pontos que conquistou jogando contra terráqueos e metade jogando contra alienígenas. Sendo t e a os números de terráqueos e alienígenas, respectivamente, responda:

a) Qual o total de jogos desse torneio, em função de t e a?

b) Nesse torneio, cada vitória vale 1 ponto, cada empate vale $0,5$ ponto e cada derrota vale zero ponto. Qual o total de pontos dos terráqueos em função de t e a?

c) Verifique que o número total de jogadores do torneio é um quadrado perfeito.

$\boxed{30}$ *As pinturas dos quadrados*

Dois quadrados de um tabuleiro 7×7 são pintados de amarelo e o resto é pintado de verde. Dois esquemas de cores são equivalentes se um pode ser obtido do outro aplicando uma rotação no plano do tabuleiro. Quantos esquemas de cores não equivalentes podemos obter?

31 *Os elos da corrente*

João possui um único pedaço de corrente com n elos, cada um pesando 1 g. Cada vez que um elo de algum pedaço de corrente é quebrado, obtemos 3 pedaços. Por exemplo, se um pedaço possui 9 elos e quebramos o quarto, passaremos a ter pedaços com as seguintes quantidades de elos: 3, 1 e 5. Um elo quebrado continua pesando 1 g.

a) Se $n = 8$, mostre um exemplo de como quebrarmos apenas 2 elos e obtermos pedaços que possam ser reunidos de modo a realizarmos qualquer peso de 1 g até 8 g.

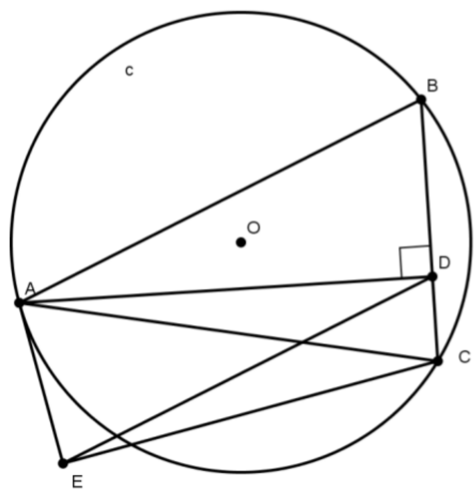
b) Se $n = 16$, mostre um exemplo de como quebrarmos apenas 2 elos e obtermos pedaços que possam ser reunidos de modo a realizarmos qualquer peso de 1 g até 16 g.

c) Se $n = 63$ g, mostre um exemplo de como quebrarmos apenas 3 elos e obtermos pedaços que possam ser reunidos de modo a realizarmos qualquer peso de 1 g até 63 g.

d) Se $n = k \cdot 2^k - 1$, mostre um exemplo de como quebrarmos apenas $k-1$ elos e obtermos pedaços que possam ser reunidos de modo a realizarmos qualquer peso de 1 g até n g.

$\boxed{32}$ *O segmento tangente*

Na figura a seguir, o segmento AE é tangente à circunferência c em A. O segmento AD é perpendicular ao segmento BC e o segmento DE é paralelo ao segmento AB. Além disso, $\angle EAC = 60°$.

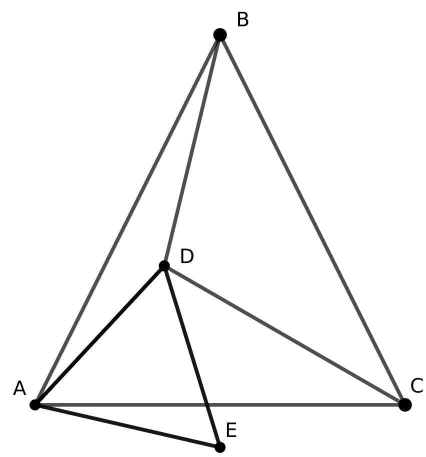


a) Determine o valor de $\angle EDC$.

b) Encontre a medida do ângulo $\angle AEC$.

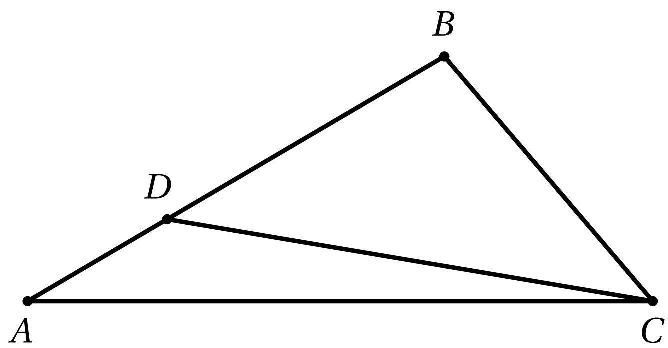
33 *Uma construção triangular*

Na figura a seguir, ABC é um triângulo isósceles com $BA = BC$. O Ponto D está em seu interior de modo que $\angle ABD = 13°$, $\angle ADB = 150°$ e $\angle ACD = 30°$. Além disso, ADE é um triângulo equilátero. Determine o valor do ângulo $\angle DBC$.



34 *Triângulos isósceles e uma construção geométrica*

O triângulo ABC abaixo tem um ponto D no seu lado AB, tal que $AB = CD$, $A\hat{B}C = 100°$ e $D\hat{C}B = 40°$.



a) Qual a medida do ângulo $B\hat{D}C$?

b) Qual a medida do ângulo $A\hat{C}D$?

35 *Algumas frações bem pequenas!*

a) Considere um primo p que divide $10^n + 1$ para algum n inteiro positivo. Por exemplo, $p = 7$ divide $10^3 + 1$. Analisando o período principal da representação decimal de $\frac{1}{p}$, verifique que o número de vezes que o dígito i aparece é igual ao número de vezes que o dígito $9 - i$ aparece para cada $i \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$.

b) Considere um número primo p que não divide 10 e suponha que o período da representação decimal de $\frac{1}{p}$ seja $2k$. É sempre possível quebrarmos o período em dois números que somam $10^k - 1$? Por exemplo, o período de $\frac{1}{7}$ tem tamanho $6 = 2k$, pois é igual à 142857. Veja que $142 + 857 = 999 = 10^3 - 1 = 10^k - 1$.

c) Sendo

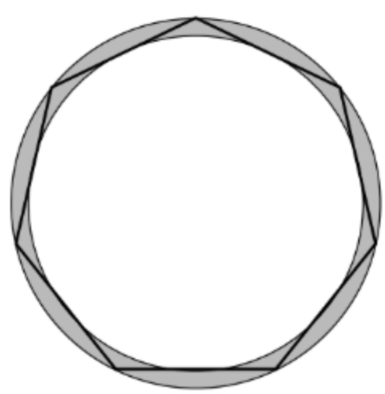
$$x = \frac{1}{1998} + \frac{1}{19998} + \frac{1}{199998} + \ldots,$$

ao escrevermos $2x$ como um número decimal, qual será o 59° algarismo após a vírgula?

NÍVEL 3

1 *A área do anel*

Um heptágono regular está imprensado entre dois círculos, como mostra a figura abaixo. Seus vértices estão inscritos na circunferência maior e seus lados são tangentes a circunferência menor. Os lados do polígono medem 2 cm e são tangentes ao círculo menor e, além disso, seus vértices pertencem à circunferência maior. Sendo assim, qual a área do anel sombreado da figura?



2 *A solução do sistema*

Se (x, y) é uma solução do sistema

$$\begin{cases} xy = 6 \\ x^2y + xy^2 + x + y = 63 \end{cases}$$

determine o valor de $x^2 + y^2$.

3 *A soma dos dígitos*

Seja $S(n)$ a soma dos dígitos de um inteiro n. Por exemplo, $S(327) = 3+2+7 = 12$. Encontre o valor de

$$A = S(1) - S(2) + S(3) - S(4) + \ldots - S(2016) + S(2017).$$

4 *Probabilidade no torneio*

Em um torneio com 10 times, cada um deles se enfrenta uma única vez. Além disso, não ocorrem empates e cada um possui 50% de chance de ganhar qualquer partida. Qual a probabilidade de, após contabilizadas as pontuações dos $\frac{10 \cdot 9}{2} = 45$ jogos, não existirem dois jogadores com o mesmo número de vitórias?

5 *TORRECOPOS*

O jogo TORRECOPOS consiste em guardar uma pilha de copos, previamente empilhados sobre uma mesa (Figura 1), com as "bocas"voltadas para baixo, de forma que todos fiquem um dentro do outro e apenas um em contato com a mesa (Figura 2). No primeiro andar, os copos são do tipo A, no segundo, do tipo B, no terceiro, do tipo C e assim por diante. Vence o jogo aquele que os recolher no menor tempo. Na Figura 3, podemos obter apenas três configurações depois de recolhidos: AAB, ABA e BAA.

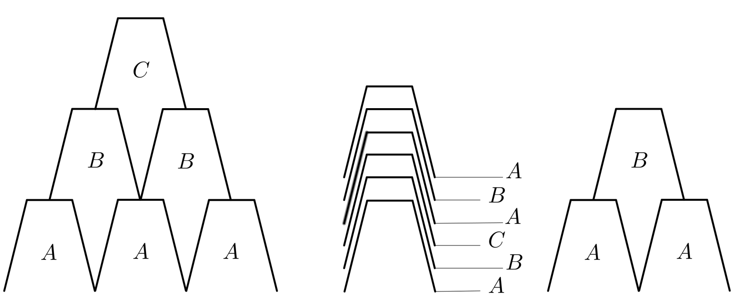


Figura 1 *Figura* 2 *Figura* 3

a) Na Figura 1, quantas configurações diferentes podemos obter após recolhê-los?

b) Quantas configurações diferentes podemos obter ao recolher os copos em uma torre com 4 andares?

c) Quantas configurações diferentes podemos obter ao recolher os copos de uma torre com n andares?

6 *A cauda do fatorial*

Se $m!$ termina com exatamente n zeros, dizemos que n é a *cauda do fatorial* $m!$. Observe os exemplos e responda:

- $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$, termina em um zero, por isso, a *cauda do fatorial* $5!$ é 1; e
- $10! = 3628800$, termina em dois zeros, logo a *cauda do fatorial* $10!$ é igual a 2.

a) Quais são as *caudas dos fatoriais* de $20!$ e $25!$?

b) Qual o dígito das dezenas de $7! + 8! + 9! + \ldots + 2018!$?

c) Algum $m!$ tem *cauda do fatorial* igual a 5?

d) Qual a *cauda do fatorial* de $2018!$ (dois mil e dezoito fatorial)?

e) Quantos inteiros positivos menores que 2018 não são *cauda do fatorial*?

7 *Anéis simétricos*

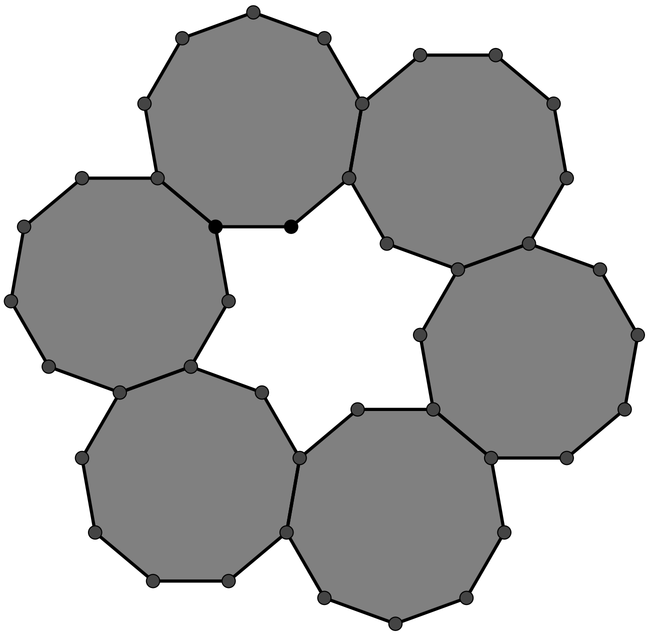
Um anel simétrico com m polígonos regulares de n lados cada é formado de acordo com as regras:

i) cada polígono no anel encontra dois outros;

ii) dois polígonos adjacentes têm apenas um lado em comum;

iii) o perímetro da região interna delimitada pelos polígonos consiste em exatamente dois lados de cada polígono.

O exemplo na figura a seguir mostra um anel com $m = 6$ e $n = 9$. Para quantos valores diferentes de n é possível construir esse anel?



8 *A linha do trem*

Uma linha de trem está dividida em 10 trechos pelas estações A, B, C, D, E, F, G, H, I, J e K. A distância de A até K é igual a 56 km. O trajeto de dois trechos consecutivos é sempre menor ou igual a 12 km e o trajeto de três trechos consecutivos sempre é maior ou igual a 17 km. Determine as distâncias:

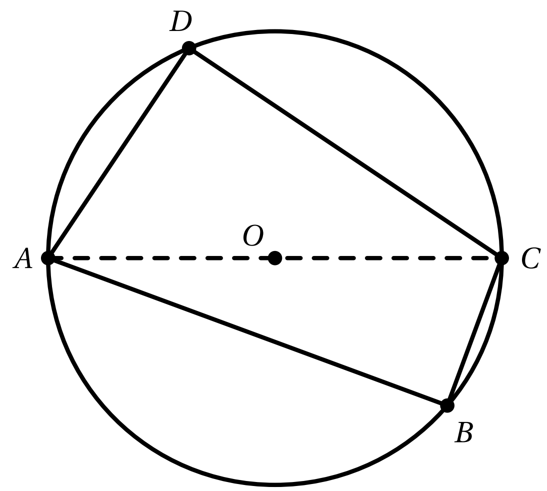
a) de J até K;

b) de D até H;

c) de B a G.

9 *Uma diagonal no diâmetro*

Uma das diagonais de um quadrilátero inscritível é um diâmetro de seu círculo circunscrito.



Verifique que as interseções E e F das retas perpendiculares por A e C, respectivamente, a reta BD satisfazem

$$DE = BF.$$

10 *O jogo dos dados*

Um jogo é composto das seguintes regras:

i) Em cada rodada, ocorre o lançamento de um dado comum não viciado.

ii) Se sair o número 3, então o jogador A ganha.

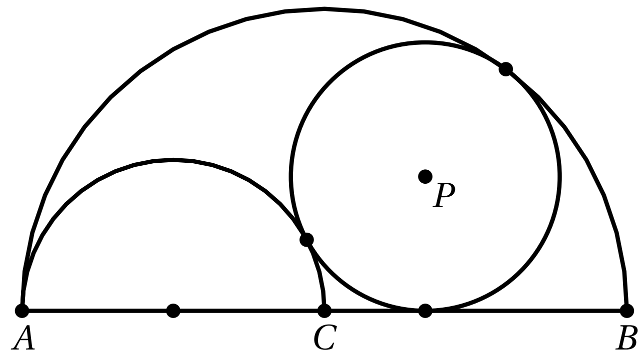
iii) Se sair um dos números do conjunto $\{4,5,6\}$, então o jogador B ganha.

iv) Se sair um dos números do conjunto $\{1,2\}$, então o dado é lançado outra vez até resultar em 3 ou 4 ou 5 ou 6.

Qual a probabilidade do jogador B vencer?

11 *Aplicando áreas*

A figura a seguir mostra um segmento AB, seu ponto médio C e as semicircunferências de diâmetros AB e AC. Uma circunferência de centro P é tangente às duas semicircunferências e também ao segmento AB. Sendo $AB = 8\,\text{cm}$, e O, o ponto médio de AC, pergunta-se:

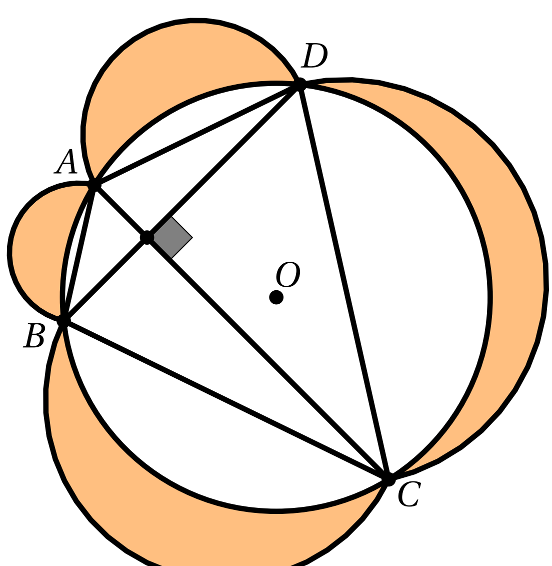


a) Qual a medida do perímetro do triângulo OCP?

b) Qual a medida do raio da circunferência de centro P?

12 *Lúnulas*

Um quadrilátero $ABCD$ está inscrito numa circunferência de centro O. Sabe-se que as diagonais AC e BD são perpendiculares. Sobre cada um dos lados construímos semicírculos, externamente, como mostra a figura abaixo.



a) Mostre que os triângulos AOB e COD têm a mesma área.

b) Se $AC = 8\,\text{cm}$ e $BD = 6\,\text{cm}$ determine a área da região pintada.

13 *Combate com dados*

Dois jogadores se enfrentam em um jogo de combate com dados. O atacante lançará três dados e o defensor, dois. O atacante derrotará o defensor em apenas um lance de dados se, e somente se, as duas condições seguintes forem satisfeitas:

i) O maior dado do atacante for maior do que o maior dado do defensor.

ii) O segundo maior dado do atacante for maior do que o segundo maior dado do defensor (convencionamos que o "segundo maior dado" pode ser igual ao maior dado, caso dois ou mais dados empatem no maior valor).

Considerando que todos os dados são honestos com os resultados equiprováveis, calcule a probabilidade de o atacante vencer com o defensor conseguindo nos dados dele:

a) 2 cincos;

b) 1 cinco e 1 quatro.

14 *Os ângulos do losango*

Sejam $ABCD$ um losango, com $\angle BAD > \angle ABC$, e P e Q pontos nos lados AB e AD, respectivamente, tais que o triângulo PCQ é equilátero, com lado igual ao lado do losango. Encontre as medidas dos ângulos do losango.

15 *Circunferência tangente aos lados*

Prove que se um polígono possui uma circunferência tangente a todos os seus lados, então é possível encontrar três lados do polígono que formam um triângulo.

16 *Os clubes da ilha*

Uma ilha possui 50 clubes. Cada habitante da ilha é sócio de 1 ou 2 clubes. Cada clube tem no máximo 55 sócios e para cada par de clubes existe um habitante da ilha que é sócio dos dois clubes. Encontre todas as possibilidades para as quantidades possíveis de habitantes da ilha. Justifique sua resposta.

17 *Números no tabuleiro*

Alguns números reais estão escritos nas casas de um tabuleiro $n \times n$ de modo que a soma total dos números escritos é positiva. Mostre que existe alguma permutação das colunas do tabuleiro, de modo que a soma dos números escritos nas casas da diagonal principal do novo tabuleiro seja positiva.

18 *Desigualdade no triângulo*

Prove que a soma dos comprimentos dos catetos de um triângulo retângulo nunca excede $\sqrt{2}$ vezes a medida da hipotenusa do triângulo.

19 *O rei no tabuleiro*

Um rei está em um dos cantos de um tabuleiro $m \times n$. Dois jogadores movem o rei alternadamente para qualquer casa ainda não visitada. O primeiro jogador que não puder mais mover o rei perde. Determine, em função das dimensões do tabuleiro, quem possui a estratégia vencedora.

Observação: No xadrez, o rei se movimenta uma casa na horizontal, na vertical ou na diagonal.

20 *As raízes da equação*

Encontre a soma das raízes, reais e não reais, da equação $x^{2017} + \left(\frac{1}{2} - x\right)^{2017}$.

21 *Os pontos na circunferência*

Considere 2018 pontos em uma circunferência de raio 1. Verifique que existe um ponto P da circunferência para o qual a soma das distâncias de P aos 2018 pontos é pelo menos 2018.

22 *Quantas raízes quadradas diferentes?!*

a) Qual o valor de

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}?$$

b) Se $x=\sqrt{1+2\cdot\sqrt{1+3\cdot\sqrt{1+4\cdot\sqrt{1+5\cdot\sqrt{\ldots}}}}}$ é um número real, qual o seu valor?

23 *Duas equações bonitas*

a) Determine a soma das raízes reais da equação

$$x^2+18x+30=2\cdot\sqrt{x^2+18x+45}.$$

b) Resolva a equação $\sqrt{5-\sqrt{5-x}}=x$, com $0<x<5$.

24 *Hora de fazer o desenho*

Seja ABC um triângulo qualquer, desenhe exteriormente a ABC os triângulos equiláteros ABD e ACE.

a) Verifique que $DC=BE$.

b) Sendo F o ponto de interseção de DC e BE, encontre o ângulo $\angle AFB$.

25 *Em busca do termo mínimo!*

Determine o termo mínimo da sequência

$$\sqrt{\frac{7}{6}}+\sqrt{\frac{96}{7}},\ \sqrt{\frac{8}{6}}+\sqrt{\frac{96}{8}},\ \sqrt{\frac{9}{6}}+\sqrt{\frac{96}{9}},\ldots,\sqrt{\frac{95}{6}}+\sqrt{\frac{96}{95}}.$$

26 *Inteiros em progressão geométrica*

Os números 10, 11 e 12 podem pertencer a uma mesma progressão geométrica?

27 *As cidades de Pirajuba*

Pirajuba possui 10 cidades, chamadas $H_1, H_2, \ldots, H_{10}$, e algumas delas são ligadas por estradas de mão dupla. Sabe-se que é possível chegar de H_1 a H_{10}. Mostre que uma das situações abaixo ocorre:

(i) Existe um caminho ligando H_1 a H_{10} utilizando no máximo 3 estradas.

(ii) Existem 2 cidades H_i e H_j, $2 \leq i < j \leq 9$, tais que todo caminho ligando H_1 a H_{10} passa por H_i ou H_j.

28 *A construção de estradas*

Em um certo país há 21 cidades e o governo pretende construir n estradas (todas de mão dupla), sendo que cada estrada liga exatamente 2 das cidades do país. Qual o menor valor de n para que, independente de como as estradas sejam construídas, seja possível viajar entre quaisquer 2 cidades (passando, possivelmente, por cidades intermediárias)?

29 *O torneio de xadrez*

Em um torneio de xadrez, cada um dos participantes jogou exatamente uma vez com cada um dos demais e não houve empates. Mostre que existe um jogador P tal que, para qualquer outro jogador Q, distinto de P, uma das situações a seguir ocorre:

i) Q perdeu de P;

ii) Q perdeu de alguém que perdeu de P.

30 *O caminho fechado*

Existem 1999 cidades e 4000 estradas em um certo país (cada estrada conecta 2 cidades). Prove que existe um caminho fechado passando através de não mais que 20 cidades.

31 *Os ângulos do quadrilátero*

Num triângulo ABC, tomamos pontos X, Y sobre os lados AB, BC, respectivamente. Se AY e CX se intersectam em Z e

$$AY = YC \quad \text{e} \quad AB = ZC,$$

verifique que

$$\angle CZY = \angle ABY.$$

32 *As equipes de alunos*

Alguns alunos de uma escola foram divididos em equipes satisfazendo as seguintes condições:

i) Quaisquer 2 equipes diferentes possuem exatamente 2 membros em comum.

ii) Toda equipe possui exatamente 4 elementos.

iii) Para quaisquer 2 alunos, existe uma equipe da qual ambos não fazem parte.

a) Explique por que um par qualquer de estudantes pode participar de no máximo 3 equipes.

b) Qual o número máximo de equipes?

33 *Fatorações e divisibilidade*

Usando a fatoração da diferença de quadrados, $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$, podemos escrever

$$x^{2^n} - y^{2^n} = (x^{2^{n-1}} + y^{2^{n-1}})(x^{2^{n-1}} - y^{2^{n-1}}).$$

a) Explique por que $3^{2^{2018}} - 2^{2^{2018}}$ pode ser escrito como produto de 2018 inteiros maiores que 1 e distintos.

b) Verifique que $3^{2^n} - 1 = (3^{2^{n-1}} + 1)(3^{2^{n-2}} + 1)(3^{2^{n-3}} + 1)\ldots(3^2 + 1)(3^1 + 1)(3^1 - 1)$.

c) Usando o item anterior, verifique que 2^{n+1} é um divisor de $3^{2^n} - 1$.

d) Conhecendo a fatoração

$$x^m - y^m = (x-y)(x^{m-1} + x^{m-2}y + x^{m-3}y^2 + \ldots + xy^{m-2} + y^{m-2}),$$

encontre um inteiro positivo n com mais de 2018 divisores positivos tal que $3^{n-1} - 2^{n-1}$ é múltiplo de n.

34 *Duas circunferências e uma perpendicular*

Seja Q um ponto na circunferência de diâmetro AB, sendo Q diferente de A e B. Seja QH a reta perpendicular a AB que passa por Q, sendo H pertencente a AB. Os pontos de interseção da circunferência de diâmetro AB e a circunferência de centro Q e raio QH são C e D. Prove que CD passa pelo ponto médio de QH.

ENUNCIADOS E SOLUÇÕES DO NÍVEL 1

1 *A soma desconhecida*

Na soma abaixo, letras iguais representam dígitos iguais e letras diferentes dígitos diferentes.

$$\begin{array}{cccc} & & & X \\ + & & & X \\ & & Y & Y \\ \hline & Z & Z & Z \end{array}$$

Qual o dígito representado pela letra X?

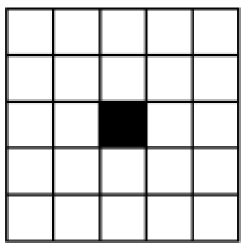
1 *A soma desconhecida – Solução*

Inicialmente note que $X + X + Z \leq 2 \cdot 9 + 8 = 26$. Portanto, será acrescentado na casa das dezenas no máximo 2 unidades. Como $Y \neq Z$, ao somarmos 1 ou 2 unidades a Y devemos obter o número de dois dígitos $\overline{ZZ}$. Como $Y+2 \leq 9+2 = 11$, a única possibilidade é termos $\overline{ZZ} = 11$, assim, $Y = 9$. Para que a soma $2X + Y$ termine em 1 e tenha $X \neq 1$, devemos ter $X = 6$. De fato, esses valores satisfazem a soma:

$$\begin{array}{cccc} & & & 6 \\ + & & & 6 \\ & & 9 & 9 \\ \hline & 1 & 1 & 1. \end{array}$$

2 *Quadrado cheio de quadrados*

Na figura a seguir, temos um quadrado 5×5 que contém um quadrado preto central. Existe uma coleção de quadrados com lados paralelos aos lados do tabuleiro com dimensões que variam de 1×1 a 5×5 formados pelos quadradinhos da figura. Quantos elementos dessa coleção contém o quadrado escuro preto?



2 *Quadrado cheio de quadrados – Solução*

Como existem apenas 5 tipos de quadrados, a saber, os que possuem dimensões 1×1, 2×2, 3×3, 4×4 e 5×5, podemos separar a contagem em cinco casos:

1. Existe apenas 1 quadrado de dimensão 1×1 contendo o quadrado preto, que é o próprio quadrado preto.

2. Existem 4 quadrados de dimensão 2×2 contendo o quadrado preto.

3. Existem 9 quadrados de dimensão 3×3 contendo o quadrado preto.

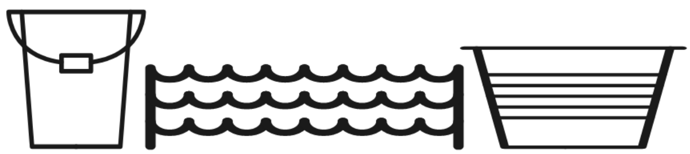
4. Existem 4 quadrados de dimensão 4×4 contendo o quadrado preto.

5. Existe apenas 1 quadrado de dimensão 1×1 contendo o quadrado preto.

Portanto, o número de elementos da coleção que contém o quadrado preto central é $1 + 4 + 9 + 4 + 1 = 19$.

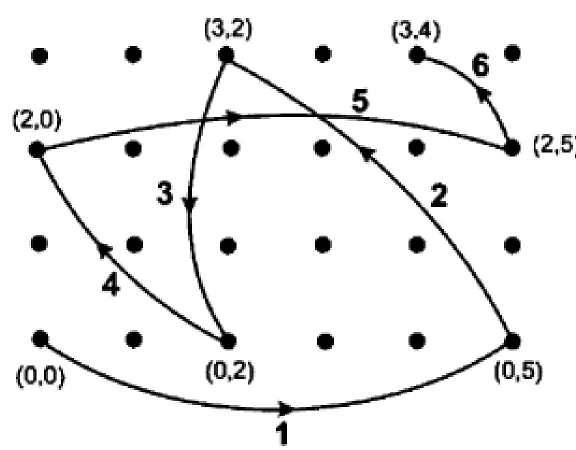
3 *Balde ou bacia?*

Dois recipientes, um balde e uma bacia, possuem 3 e 5 litros de volume, respectivamente. Retirando água de um lago, como podemos deixar a bacia com exatamente 4 litros de água usando somente esses dois recipientes?



3 *Balde ou bacia? – Solução*

Em qualquer momento, podemos indicar as quantidades de água nos dois recipientes por meio de um par (a,b), em que a indica a quantidade de litros do balde e b o da bacia. No início, quando ambos os recipientes estão vazios, temos o par $(0,0)$. No estágio, queremos obter o par $(a,4)$, que é quando a medição se torna completa. Considerando apenas os valores inteiros não negativos para a e b, como existem 4 opções para a e 6 opções para b, temos ao todo $4\cdot 6 = 24$ possíveis configurações para analisar. Podemos representar essas configurações por pontos como indicados no desenho a seguir:



Nesse desenho, podemos conectar dois pontos quando existe alguma operação com os recipientes que transforma as quantidades de água em um desses pontos no outro. Por exemplo, podemos ligar $(0,0)$ ao ponto $(0,5)$, pois isso significa encher a bacia e deixar o balde vazio. Também ligamos um ponto associado a $(a,0)$ ao ponto associado a $(0,a)$, pois isso significa transferir toda a água do balde para a bacia, que se encontra vazia. O desenho anterior mostra um caminho, a partir de $(0,0)$ até $(3,4)$, que é o momento de pararmos por já termos obtido a quantidade exata de 4 litros na bacia.

Essas operações podem ser resumidas na seguinte tabela:

a	0	0	3	0	2	2	3
b	0	5	2	2	0	5	4

Observação: Uma estratégia muito útil em problemas que envolvem mudanças de configurações é a representação gráfica das transições por meio de pontos e setas. Essas representações são estudadas na *Teoria dos Grafos*. Outro exemplo de problema semelhante:

Um leiteiro possui um recipiente com a capacidade de 12 litros. Ele precisa entregar exatamente 6 litros a um consumidor que possui dois recipientes vazios, um de 8 litros e outro de 5 litros. Como o leiteiro poderá deixar exatamente 6 litros no recipiente de maior volume do cliente e manter os outros 6 litros consigo?

A Tabela que representa os movimentos no gráfico associado a essa situação até a obtenção dos 6 litros no recipiente do cliente é:

recipiente com $12l$	12	4	4	9	9	1	1	6
recipiente com $8l$	0	8	3	3	0	8	6	6
recipiente com $5l$	0	0	5	0	3	3	5	0

4 *As casas dos vizinhos*

Oito amigos vivem em uma mesma rua e moram em casas distintas. Ana vive ao lado de Beto; Hélio vive em frente a Cláudio; Eliana vive ao lado de Francisco; Daniel vive ao lado de Ana; Francisco vive em frente de Daniel e ao lado de Hélio; e Gustavo vive ao lado de Eliana. Se as 8 casas são os quadradinhos do desenho abaixo determine as casas de cada um.

.

4 *As casas dos vizinhos – Solução*

Sejam A, B, C, D, E, F, G e H os 8 amigos (cada um está associado à primeira letra do seu nome). Estudemos inicialmente o caso em que B está à esquerda de A. Assim, D está à direita de A e temos as seguintes letras em ordem: $\boxed{\text{B} \mid \text{A} \mid \text{D}}$.
Como F está na frente de D, temos as seguintes possibilidades

B	A	D
		F

ou

		F
B	A	D

.

Como H está ao lado de F e na frente de C, as configurações possíveis são

B	A	D	C
		F	H

ou

		F	H
B	A	D	C

.

Como E vive ao lado de F e G ao lado de F, as únicas maneiras de completarmos a distribuição são:

B	A	D	C
G	E	F	H

ou

G	E	F	H
B	A	D	C

.

O estudo do caso em que B está à direita de A é análogo e produz as seguintes soluções:

C	D	A	B
H	F	E	G

ou

H	F	E	G
C	D	A	B

.

5 *Baralho colorido*

Um baralho tem 900 cartas numeradas de 100 a 999. Cartas cuja soma dos algarismos é a mesma, possuem a mesma cor e cartas com somas distintas, cores diferentes. Alice, Bia, Carla e Dani pegam, cada uma, uma certa quantidade de cartas.

a) Todas as cartas que Alice pegou tinham cores diferentes. Qual a quantidade máxima de cartas que Alice pode ter pego?

b) Bia pegou todas as cartas que possuem o algarismo 1. Quantas cartas Bia pegou?

c) Carla pegou todas as cartas com exatamente 2 algarismos iguais. Quantas cartas Carla pegou?

d) Dani disse: – Peguei duas cartas com a mesma cor e números consecutivos. É possível que isso tenha acontecido?

5 *Baralho colorido – Solução*

a) 27 cartas. A quantidade máxima de cartas que Alice pegou corresponde à quantidade de diferentes somas dos algarismos dos números de 100 a 999. Como a menor soma é $1+0+0=1$ e a maior é $9+9+9=27$, então o total de somas é 27. Para garantir que existem todas essas somas, podemos listar um exemplo de cada soma: 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 920, 921, 922, 923, 924, 925, 926, 927, 928, 929, 939, 949, 959, 969, 979, 989, 999.

b) 233 cartas. De 100 a 199, todas possuem o 1, ou seja, 100 cartas; de 200 a 299, são 19 cartas (201, 210, 211, 212, 213, 214, 215, 216, 217, 218, 219, 221, 231, 241, 251, 261, 271, 281, 291); de 300 a 399, de 400 a 499 e assim por diante, é a mesma quantidade que de 200 a 299. Portanto, o total de cartas que possui o 1 é $100+7\cdot 19 = 233$.

c) 243 cartas. Vamos contar quantas cartas possuem exatamente o 1 duas vezes. Com o 1 na casa das unidades e na casa das dezenas, são 8 possibilidades, já que o 0 não pode ocupar a casa das centenas, enquanto que, com o 1 na casa das unidades e na casa das centenas, assim como na casa das dezenas e na casa das centenas, são 9 possibilidades cada. Portanto, são $8+9+9 = 26$ cartas com o 1 se repetindo exatamente 2 vezes. Para os demais algarismos, com exceção do zero, esta quantidade se repete. O zero se repetirá exatamente duas vezes nos números 100, 200, 300, ..., 900, ou seja, 9 vezes. Portanto, o total de cartas que Carla pegou é $9\cdot 26+9 = 243$.

d) Impossível. Existem 3 casos de números consecutivos:

1. Números do tipo abc e $ab(c+1)$, com $c \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$: neste caso devemos ter $a+b+c = a+b+c+1$, que é absurdo.
2. Números do tipo $ab9$ e $a(b+1)0$: neste caso devemos ter $a+b+9 = a+b+1+0$, que é absurdo.
3. Números do tipo $a99$ e $(a+1)00$: neste caso devemos ter $a+9+9 = a+1+0+0$, que também é absurdo.

Portanto, é impossível a situação descrita por Dani.

6 *Dados icosaédricos?*

Um icosaedro regular é um sólido geométrico com 20 faces, que são triângulos equiláteros. Desenhando os números de 1 a 20 nas faces de um icosaedro regular, transformamo-lo em um dado. Luísa e Mathias inventaram um jogo no qual, cada um joga o dado icosaédrico 5 vezes e anota os números tirados na sequência, formando um único número. Por exemplo, Luísa tirou a sequência 5, 11, 7, 20, 17, então ela anotou o número 51.172.017.

a) Na primeira partida Luísa venceu com a maior diferença possível. Qual é essa diferença?

b) Na segunda partida, Luísa fez 162.012.510 pontos e Mathias lançou o dado quatro vezes, tirando 14, 11, 8 e 19. É possível Mathias vencer esta partida com seu último lançamento?

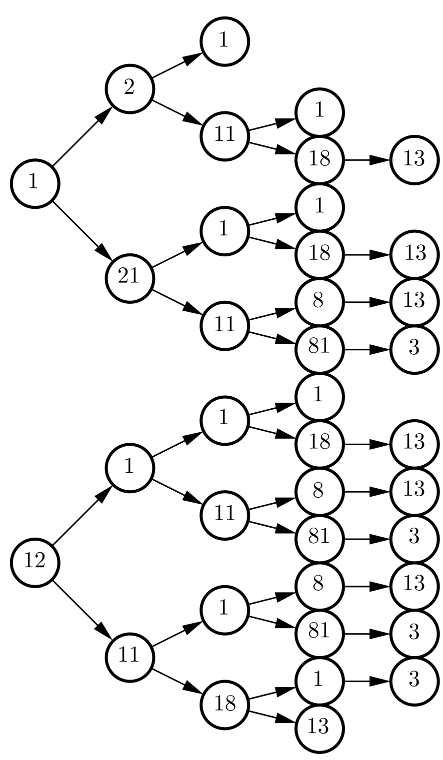
c) Na terceira partida, Luísa fez 12.111.813 pontos. Quantas são as sequências nas quais é possível obter essa pontuação?

6 *Dados icosaédricos? – Solução*

a) 2.020.190.909. Para que isso tenha acontecido, Luísa tirou 20 em seus 5 lançamentos e Mathias tirou 1 em seus 5 lançamentos, sendo a diferença igual a 2.020.202.020 – 11.111 = 2.020.190.909.

b) Não. A maior pontuação possível, seria tirando 20 no último lançamento, ficando com 141.181.920, que é menor que 162.012.510.

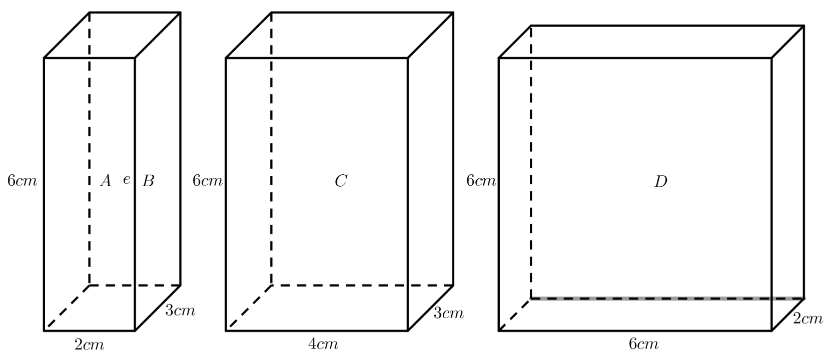
c) 10. Vamos utilizar um diagrama para verificar todas as possibilidades:



Contando o total de possibilidades chegamos a 10.

7 *Paralelepípedos de madeira*

Maria ganhou um jogo composto por 4 peças (A, B, C e D) de madeira, todas em formato de paralelepípedos reto-retângulos (todas as faces são retangulares), sendo A e B de dimensões $2\,\text{cm} \times 3\,\text{cm} \times 6\,\text{cm}$, C de dimensões $3\,\text{cm} \times 4\,\text{cm} \times 6\,\text{cm}$ e D de dimensões $2\,\text{cm} \times 6\,\text{cm} \times 6\,\text{cm}$.



a) Qual a área total de cada uma das quatro peças?

b) Qual o volume de cada uma das quatro peças?

c) Maria encaixou as quatro peças formando um cubo. Qual a medida da aresta do cubo?

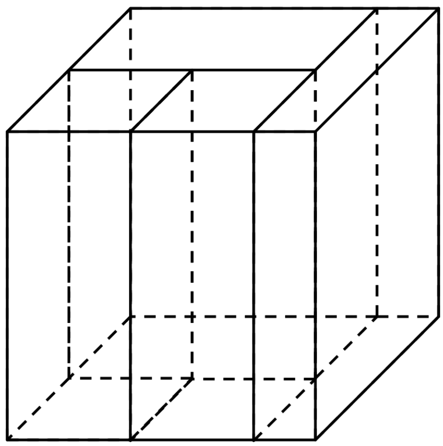
d) Após construir o cubo, Maria o pintou de branco. Quando a tinta secou, ela o desmontou. Qual a área que permaneceu com a cor original?

7 *Paralelepípedos de madeira – Solução*

a) $72\,\text{cm}^2$, $72\,\text{cm}^2$, $108\,\text{cm}^2$ e $120\,\text{cm}^2$. Em um paralelepípedo reto-retângulo são 6 faces retangulares, sendo 3 pares iguais. Calculando a área total A de cada uma das peças temos $A_A = A_B = 2(2\cdot 3 + 2\cdot 6 + 3\cdot 6) = 72\,\text{cm}^2$, $A_C = 2(3\cdot 4 + 3\cdot 6 + 4\cdot 6) = 108\,\text{cm}^2$ e $A_D = 2(2\cdot 6 + 2\cdot 6 + 6\cdot 6) = 120\,\text{cm}^2$.

b) $36\,\text{cm}^3$, $36\,\text{cm}^3$, $72\,\text{cm}^3$ e $72\,\text{cm}^3$. Em um paralelepípedo reto-retângulo, calcula-se seu volume V fazendo o produto das 3 dimensões. Temos então $V_A = V_B = 2\cdot 3\cdot 6 = 36\,\text{cm}^3$, $V_C = 3\cdot 4\cdot 6 = 72\,\text{cm}^3$ e $V_D = 2\cdot 6\cdot 6 = 72\,\text{cm}^3$.

c) $6cm$. Se ela formou um cubo, então o volume desse cubo é $V_{cubo} = 36+36+72+72 = 216\,\text{cm}^3$. Como $6^3 = 216$, então a medida da aresta do cubo é $6\,\text{cm}$.



d) $156\,\text{cm}^2$. A área pintada de branco foi $6 \cdot 6^2 = 216\,\text{cm}^2$ e a área total é $72+72+108+120 = 372\,\text{cm}^2$. Portanto, a área que permaneceu com a cor original foi $372-216 = 156\,\text{cm}^2$.

8 *Construindo sequências numéricas*

Começando com qualquer número natural não nulo é sempre possível formar uma sequência de números que termina em 1, seguindo repetidamente as instruções a seguir:

1. se o número for múltiplo de 3, divide-se por 3;
2. se o número deixar resto 1 na divisão por 3, subtrai-se 1;
3. se o número deixar resto 2 na divisão por 3, soma-se 1.

Por exemplo, começando com o número 76, forma-se a seguinte sequência:

$$76 \to 75 \to 25 \to 24 \to 8 \to 9 \to 3 \to 1.$$

Nessa sequência aparecem 8 números, por isso, dizemos que ela tem *comprimento* 8.

a) Escreva a sequência que começa com 100.

b) Quais sequências têm *comprimento* 4?

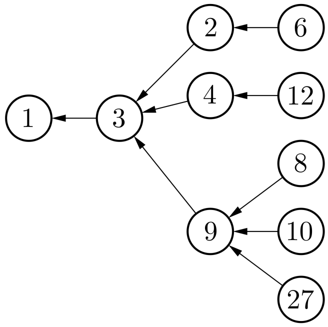
c) Quantas sequências têm *comprimento* 6?

8 *Construindo sequências numéricas – Solução*

a)

$$100 \to 99 \to 33 \to 11 \to 12 \to 4 \to 3 \to 1.$$

b) $\{27, 9, 3, 1\}$, $\{10, 9, 3, 1\}$, $\{8, 9, 3, 1\}$, $\{12, 4, 3, 1\}$, $\{6, 2, 3, 1\}$. Analisando o processo de forma inversa, devemos chegar sempre ao 1, que será sempre o último elemento da sequência; para chegar ao 1, devemos sempre passar pelo 3, pois se chegarmos ao 2, devemos somar 1 e se chegarmos ao 4, devemos subtrair 1, então o 3 é sempre o penúltimo elemento da nossa sequência; para chegar até o 3, temos que passar antes pelo 2 ou 4, como visto anteriormente, ou pelo 9; para chegarmos ao 2, devemos passar antes pelo 6, para chegarmos ao 4, devemos passar antes pelo 12 e para chegarmos ao 9, devemos passar antes pelo 8, 10 ou 27. Portanto, as sequências são $\{27, 9, 3, 1\}$, $\{10, 9, 3, 1\}$, $\{8, 9, 3, 1\}$, $\{12, 4, 3, 1\}$, $\{6, 2, 3, 1\}$.



c) 21. Pelo item anterior, vemos que, para chegar ao 1, passa-se obrigatoriamente pelo 3; vimos também que, para chegarmos em um múltiplo de 3, ou somamos uma unidade, ou subtraímos uma unidade, ou fazemos uma divisão por 3; mas para chegarmos em um número que não seja múltiplo de 3, conseguimos apenas através da divisão por 3. Dessa forma, vamos partir das sequências de *comprimento* 4 encontradas no item anterior, sendo 3 delas iniciando por um múltiplo de 3 e as outras duas por um não múltiplo de 3. Cada não múltiplo de três obtemos pela divisão por 3, de um múltiplo de 3 (é claro), que pode ser obtido de 3 números e, dessa forma, essas duas sequências de *comprimento* 4 dão origem a 3 sequências de *comprimento* 6, cada uma. Com cada múltiplo de 3 podemos obter de 3 números, sendo apenas um deles múltiplo de 3, então teremos 5 sequências de *comprimento* 6 para cada uma das três sequências. Portanto, são $2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 = 21$ sequências de *comprimento* 6.

9 *Vendendo sanduíches*

Ana, Bia, Cátia, Diana e Elaine trabalham como ambulantes vendendo sanduíches. Diariamente, elas passam na lanchonete do Sr. Manoel e pegam a mesma quantidade de sanduíches para vender. Um certo dia, Sr. Manoel estava doente e deixou um bilhete avisando o motivo pelo qual não estava lá, mas pedindo que cada uma pegasse $\frac{1}{5}$ dos sanduíches. Ana passou primeiro, seguiu as instruções do bilhete e saiu para vender seus sanduíches. Bia, passou em seguida, mas pensou que era a primeira a passar, pegando $\frac{1}{5}$ do que havia e saiu. Cátia, Diana e Elaine chegaram juntas e dividiram igualmente a quantidade que havia, já que Cátia sabia que Ana e Bia haviam passado antes.

a) Que fração do total de sanduíches coube a Bia?

b) Quem ficou com a menor quantidade de sanduíches? Quem ficou com a maior quantidade?

c) Ao final da divisão, nenhuma das vendedoras ficou com mais de 20 sanduíches. Quantos sanduíches o Sr. Manoel deixou para elas?

9 *Vendendo sanduíches – Solução*

a) $\frac{4}{25}$. Como Bia pegou $\frac{1}{5}$ de $\frac{4}{5}$, ela ficou com $\frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{25}$ dos sanduíches.

b) Ana pegou $\frac{1}{5} = \frac{5}{25}$ e Cátia, Diana e Elaine dividiram entre as três a fração que restava, que era $1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$, ou seja, cada uma pegou $\frac{16}{75}$ dos sanduíches, que é maior que $\frac{12}{75}$ e $\frac{15}{75}$. Sendo assim, Cátia, Diana e Elaine ficaram com a maior parte e Bia com a menor.

c) 75. A quantidade de sanduíches deve ser um múltiplo comum de 5, 25 e 75, sendo 75 o menor deles. Para 75 sanduíches, as quantidades de Ana, Bia, Cátia, Diana e Elaine são, respectivamente, 15, 12, 16, 16, 16, todas menores que 20, mas para o próximo múltiplo comum de 5, 25 e 75, que é 150, todas ficarão com mais de 20 sanduíches. Sendo assim, essa quantidade deve ser 75.

10 *Muitas balas*

Sobre uma mesa existe uma certa quantidade N de balas. Aline e Bruna combinam que, alternadamente, cada uma deve comer pelo menos uma, mas não mais que a metade da quantidade existente. Vence o jogo quem comer a última bala. Ana sempre começa o jogo.

a) Para $N = 5$, qual das duas tem a *posição vencedora*? (*Posição vencedora* é aquela na qual a jogadora pode vencer qualquer que seja a sequência de jogadas de sua adversária.)

b) Para $N = 20$, qual das duas tem a *posição vencedora*?

c) Quais são os valores de N, sendo $100 < N < 200$, que dão a Bruna a *posição vencedora*?

10 *Muitas balas – Solução*

a) Bruna. A quantidade de balas que deve ser comida é de 1 até a metade da quantidade existente na mesa. Sendo assim, a vencedora (V) deve encontrar, em sua última jogada, 1 bala sobre a mesa e, para que isso aconteça, na jogada anterior deveriam existir 2 balas para a jogadora (P), obrigando-a a comer apenas 1; antes disso, então, deveria existir 3 ou 4 balas sobre a mesa, para que a futura vencedora (V) coma, respectivamente 1 ou 2 balas. Dessa forma, como a quantidade inicial de balas é 5, a primeira jogadora poderá comer apenas 1 ou 2, deixando 3 ou 4 sobre a mesa. Sendo assim, a *posição vencedora* é da segunda jogadora, ou seja, Bruna.

b) Aline. A primeira jogadora, Aline, deve comer 9 balas, pois sobram 11 para Bruna, que deverá comer de 1 a 5 e, qualquer que seja essa quantidade, Aline come quantidade de balas de maneira que restem 5 para Bruna e, vimos pelo item anterior que 5 é uma *posição perdedora* (situação na qual a adversária tem a *posição vencedora*).

c) 191. Como cada uma só pode comer até a metade da quantidade de balas, se uma quantidade k é *posição perdedora*, então o dobro disso mais uma unidade, $2k+1$, também vai ser *posição perdedora*, pois, qualquer que seja a quantidade comida, a adversária poderá deixar k balas na mesa. Como vimos que 2 é a última *posição perdedora*, assim como 5, no primeiro item, então a sequência de *posições perdedoras* é

$$\{2,5,11,23,47,95,191,383,\ldots\},$$

ou seja, para que Bruna vença é necessário que o jogo inicie com uma quantidade correspondente a *posição perdedora*, sendo que esse valor no intervalo de 100 a 200 é apenas 191.

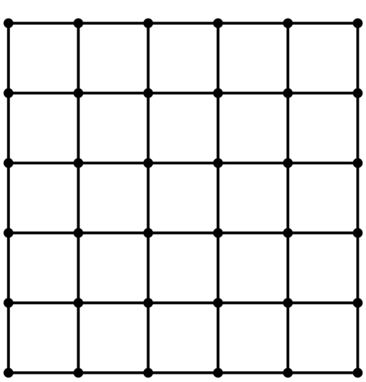
11 *São muitos retângulos*

O quadriculado da figura abaixo é composto por 25 pequenos quadrados unitários. Determine:

a) Quantos quadrados com vértices sobre os pontos da figura e lados sobre os segmentos da figura existem?

b) Quantos pares de retas paralelas, de maneira que cada uma contenha algum segmento da figura, existem?

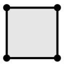
c) Quantos retângulos com vértices sobre os pontos da figura e lados sobre os segmentos da figura existem?



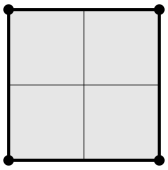
11 *São muitos retângulos – Solução*

a) 55. Vamos dividir nossa contagem:

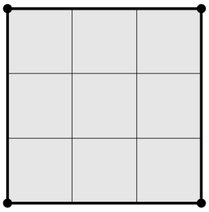
1. 1×1 são 25 quadrados;



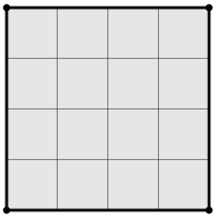
2. 2×2 são 16;



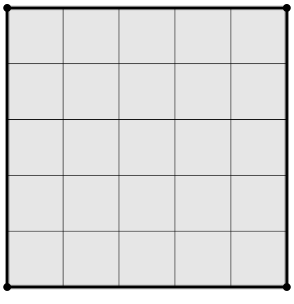
3. 3×3 são 9;



4. 4×4 são 4;



5. 5×5 é apenas 1.



Portanto, são $25 + 16 + 9 + 4 + 1 = 55$ quadrados ao todo.

b) 30. Para escolhermos uma reta na horizontal, de maneira que ela contenha um dos segmentos, são 6 possibilidades e, para escolhermos uma segunda reta, paralela à primeira, devendo ser na horizontal também, é claro, temos 5 possibilidades. Ao multiplicarmos estas possibilidades, estaríamos contando todos os pares de retas duas vezes, por exemplo, estaríamos considerando o par de retas que passam pela segunda e quarta linhas diferentes do par de retas que passam pela quarta e segunda linhas, mas é o mesmo par. Dessa forma, o total de pares de retas paralelas horizontais é $\dfrac{6 \cdot 5}{2} = 15$, assim como o total de pares de retas paralelas verticais, ou seja, o total de pares de retas paralelas contendo segmentos da figura é $15 + 15 = 30$.

c) 225. Sabemos que um retângulo tem dois pares de lados paralelos. Se queremos contar os retângulos com lados sobre os segmentos e vértices sobre os pontos da figura, basta escolhermos dois pares de retas paralelas horizontais e depois dois pares retas paralelas verticais, que teremos um retângulo. Assim, o total de retângulos é $15 \cdot 15 = 225$.

12 *Os professores e suas cidades*

Rita, José e Sônia são professores de Literatura, Química e Matemática, nas cidades de Palmas, Fortaleza e Vitória, não necessariamente nestas ordens de disciplinas e cidades. Sabe-se que:

- José é professor de Literatura.
- Quem trabalha em Palmas é professor de Química.
- Rita não trabalha em Vitória, nem leciona Química.

a) Quem leciona Matemática?

b) Quem ensina Química?

c) Quem trabalha em Vitória?

12 *Os professores e suas cidades – Solução*

Vamos montar tabelas e fazer a interpretação de cada uma das proposições.

	Disciplina	Cidade	Proposição
Rita	$\cancel{L}$ Q M	P F V	
José	L $\cancel{Q}$ $\cancel{M}$	P F V	José é professor de Literatura.
Sônia	$\cancel{L}$ Q M	P F V	

Como José é o professor de Literatura, os demais não poderão ministrá-la.

	Disciplina	Cidade	Proposição
Rita	$\cancel{L}$ $\cancel{Q}$ M	P F $\cancel{V}$	Rita não trabalha em Vitória, nem leciona Química.
José	L $\cancel{Q}$ $\cancel{M}$	P F V	José é professor de Literatura.
Sônia	$\cancel{L}$ Q M	P F V	

a) Rita então ensina Matemática.

b) Sônia ensina Química (e trabalha em Palmas).

	Disciplina	Cidade	Proposição
Rita	$\cancel{L}$ $\cancel{Q}$ M	$\cancel{P}$ F $\cancel{V}$	Rita não trabalha em Vitória, nem leciona Química.
José	L $\cancel{Q}$ $\cancel{M}$	$\cancel{P}$ F V	José é professor de Literatura.
Sônia	$\cancel{L}$ Q $\cancel{M}$	P $\cancel{F}$ $\cancel{V}$	Quem trabalha em Palmas é professor de Química.

c) Portanto, Rita trabalha em Fortaleza e José em Vitória.

	Disciplina	Cidade	Conclusão
Rita	$\cancel{L}$ $\cancel{Q}$ M	$\cancel{P}$ F $\cancel{V}$	Rita ensina Matemática em Fortaleza.
José	L $\cancel{Q}$ $\cancel{M}$	$\cancel{P}$ $\cancel{F}$ V	José ensina Literatura em Vitória.
Sônia	$\cancel{L}$ Q $\cancel{M}$	P $\cancel{F}$ $\cancel{V}$	Sônia ensina Química em Palmas.

13 *Uma data de aniversário complicada!*

Alberto e Bernardo se tornaram amigos de Carol, recentemente, e eles querem saber quando é o aniversário dela. Carol deu a eles uma lista com 12 possíveis datas:

- 4 de janeiro;
- 5 de janeiro;
- 11 de janeiro;
- 8 de março;
- 8 de abril;
- 9 de abril;
- 7 de junho;
- 5 de junho;
- 13 de julho;
- 7 de outubro;
- 4 de outubro;
- 8 de outubro.

Em seguida, Carol fez uma brincadeira contando a Alberto e Bernardo, separadamente, o mês e o dia de seu aniversário, respectivamente, e pediu para que eles conversassem para descobrir a data do aniversário dela.

Não teria muita graça se ela fizesse aniversário em março ou julho, pois só temos uma possível data em cada um desses meses dentre as opções e Alberto acertaria imediatamente. Também seria rápido se ela aniversariasse em 11 de janeiro ou 9 de abril ou 13 de julho, pois os referidos números só aparecem uma vez na lista e Bernardo poderia descobrir a resposta sozinho. Assim, eles iniciaram uma conversa para tentar descobrir.
Alberto diz: Não consigo saber a data do aniversário de Carol, mas garanto que Bernardo não sabe também.
Bernardo diz: No início, eu não sabia a data completa do aniversário, mas agora eu sei.
Alberto: Então eu também sei quando é o aniversário de Carol.

a) Por que na primeira fala de Alberto, ele diz que nem ele nem Bernardo sabem ainda a resposta?

b) Por que Bernardo disse que no início não sabia a resposta, mas após a fala de Alberto, Bernardo descobriu a data do aniversário de Carol?

c) Quando é o aniversário de Carol?

13 *Uma data de aniversário complicada!*

a) Inicialmente, Alberto não tinha como saber a resposta, pois, com exceção de março e julho, todos os meses têm mais de uma data possível. Então Carol não faz aniversário em março ou julho. Porém como ele garantiu que Bernardo não sabia, isso quer dizer que o mês do qual ele foi informado não tem data exclusiva no conjunto, ou seja, **não** pode ser janeiro (11 é uma data que só janeiro possui na lista) nem abril (9 é uma data que só abril possui na lista) nem julho (pelo dia 13). E as opções agora são:

- ~~4 de janeiro~~;
- ~~5 de janeiro~~;
- ~~11 de janeiro~~;
- ~~8 de março~~;
- ~~8 de abril~~;
- ~~9 de abril~~;
- 7 de junho;
- 5 de junho;
- ~~13 de julho~~
- 7 de outubro;
- 4 de outubro;
- 8 de outubro.

b) Agora, quando Bernardo fala que não sabia, mas que agora sabe a data, possivelmente o número que ele recebeu aparecia em mais de um mês na lista, e com a eliminação de janeiro, abril e julho (pelo item anterior) as opções se reduziram entre junho e outubro. Além disso, **não** pode ser 7, pois este último manteria ainda alguma dúvida. Sendo assim, a lista fica:

- ~~4 de janeiro~~;
- ~~5 de janeiro~~;
- ~~11 de janeiro~~;
- ~~8 de março~~;
- ~~8 de abril~~;
- ~~9 de abril~~;
- ~~7 de junho~~;
- 5 de junho;
- ~~13 de julho~~
- ~~7 de outubro~~;
- 4 de outubro;
- 8 de outubro.

c) Por fim, Alberto também descobre. Portanto, a data tem que ser uma opção não comum em relação a junho e outubro e única no seu respectivo mês. Daí, como outubro tem duas outras opções de datas (4 e 8, são só de outubro, mas a dúvida ainda iria permanecer), o aniversário de Carol fica no dia 5 de junho.

- ~~4 de janeiro~~;
- ~~5 de janeiro~~;
- ~~11 de janeiro~~;
- ~~8 de março~~;
- ~~8 de abril~~;
- ~~9 de abril~~;
- ~~7 de junho~~;
- **5 de junho**;
- ~~13 de julho~~
- ~~7 de outubro~~;
- ~~4 de outubro~~;
- ~~8 de outubro~~.

14 *Os prisioneiros bons de raciocínio*

Três prisioneiros (com excelentes habilidades em lógica e matemática) têm a chance de sair da prisão. Um deles enxerga bem com os dois olhos, o outro com somente um olho e o terceiro é cego.
O carcereiro falou aos prisioneiros que entre três chapéus brancos e dois vermelhos, pegaria três e colocaria sobre as cabeças deles, mas não permitiria que ninguém olhasse a cor do chapéu sobre a própria cabeça, apenas os dos outros presos. O carcereiro reuniu os três prisioneiros com os chapéus na cabeça e ofereceu-lhes a liberdade, desde que algum deles soubesse a cor do chapéu na própria cabeça. O primeiro prisioneiro a falar foi o que enxergava com os dois olhos.

a) Qual seria a situação que poderia garantir ao primeiro prisioneiro acertar o chapéu que ele usava?

b) O primeiro prisioneiro negou saber a resposta. Assim, o processo foi repetido com o prisioneiro que enxerga somente com um olho. Quais as cores que ele precisaria ver nos chapéus dos outros presos que permitiria que ele acertasse a cor do seu próprio chapéu? Nesse caso, qual deveria ser essa cor?

c) Após o primeiro prisioneiro negar saber a resposta, o processo foi repetido com o prisioneiro que enxerga somente com um olho e este também não soube responder. O carcereiro nem se preocupou em fazer a pergunta ao prisioneiro cego, mas esse afirmou que sabia a cor do chapéu na própria cabeça. Qual era essa cor?

14 *Os prisioneiros bons de raciocínio – Solução*

a) A única possibilidade seria ele ter visto dois chapéus vermelhos nas cabeças dos demais. Perceba que se o primeiro prisioneiro não ver dois chapéus de cor vermelha nos demais prisioneiros, ele **não** saberá a cor do próprio chapéu.

b) Como o primeiro prisioneiro não soube a resposta, os outros dois prisioneiros possuem dois chapéus brancos ou um branco e um vermelho. Para o segundo prisioneiro acertar, ele precisaria ver

   1. dois chapéus vermelhos, e assim o que está em sua cabeça é branco; ou
   2. chapéu vermelho na cabeça do prisioneiro cego para concluir que o da própria cabeça só poderia ser branco, pois se fosse vermelho, o primeiro prisioneiro teria acertado.

c) Como o segundo prisioneiro não soube responder, então o prisioneiro cego não estava de chapéu vermelho (pelo **item b-ii**). Portanto, ele só poderia ter chapéu **branco**.

15 *As aulas de Mário*

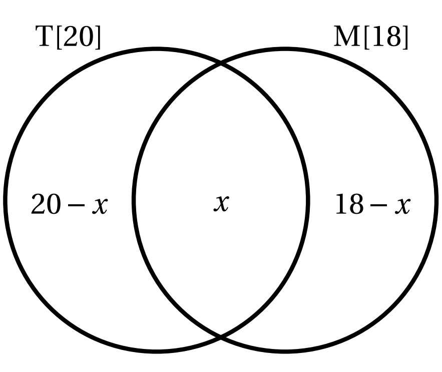
Mário fez 30 horas num curso extra de matemática. Nos dias em que tinha aula, a duração era só de 1 hora, que ocorria exclusivamente no período da manhã ou no da tarde. Ademais, aconteceram 20 tardes e 18 manhãs sem aula durante o período do curso.

a) Em quantos dias não houve aula?

b) Quantos dias durou o curso?

15 *As aulas de Mário – Solução*

Podemos montar um diagrama com dois conjuntos entrelaçados. Os conjuntos T, representando as tardes sem aula, e M, o das manhãs sem aula. Assim, a interseção $(T \cap M)$, que possui x elementos, representa os dias inteiros sem aula.



a) O subconjunto $(T - M)$ representa os dias com aula ***só*** pela manhã e o subconjunto $(M - T)$ os dias com aula ***só*** pela tarde. Daí, preenchemos o diagrama com as informações de que houve $(20 - x)$ manhãs com aula e $(18 - x)$ tardes com aula, totalizando 30 horas de curso, então

$$\begin{aligned} 20 - x + 18 - x &= 30 \\ -2x &= 30 - 38 \\ 2x &= 8 \\ x &= 4 \text{ dias sem aula.} \end{aligned}$$

b) Existem 30 dias com aula e 4 sem, ou seja, a duração foi de

$$30 + 4 = 34 \text{ dias.}$$

16 *Dois problemas sobre relógios*

a) Num relógio digital, as horas são exibidas por meio de quatro algarismos. Por exemplo, ao mostrar $\boxed{00:00}$ sabemos que é meia-noite e ao mostrar $\boxed{23:59}$ sabemos que falta um minuto para meia-noite. Quantas vezes por dia os quatro algarismos mostrados são todos pares?

b) Um relógio, com ponteiros de horas, minutos e segundos, faz plim toda vez que um ponteiro ultrapassa outro no mostrador. Os três ponteiros só se sobrepõem ao meio-dia ou à zero hora. Qual o número de plins registrados em um certo dia, no período entre as 12 horas e 1 segundo e as 23 horas, 59 minutos e 59 segundos?

16 *Dois problemas sobre relógios – Solução*

a) Vamos dizer que o mostrador é composto de 4 casas. A primeira casa só pode ser ocupada pelos algarismos 0, 1 ou 2. A segunda casa, depende da primeira pois, quando essa for 0 ou 1, podem aparecer todos os algarismos, e quando a primeira for 2, pode-se ter 0, 1, 2 ou 3. A terceira casa só permite os algarismos de 0 a 5. Além disso, a quarta casa também permite a ocorrência de todos os algarismos. Na primeira casa, temos dois casos de números possíveis:

   i) Suponha que a primeira casa é ocupada pelo 0; na segunda podem aparecer 0, 2, 4, 6 ou 8; na terceira, 0, 2 ou 4; e na última 0, 2, 4, 6 ou 8. Logo, são possíveis $1 \times 5 \times 3 \times 5 = 75$ horários.

   ii) Suponha que a primeira casa é ocupada pelo 2; na segunda casa só serão possíveis 0 ou 2; na terceira casa podem ser 0, 2, 4; ou na quarta podem 0, 2, 4, 6 ou 8. Logo, são possíveis $1 \times 2 \times 3 \times 5 = 30$ momentos com a regra colocada.

   Por fim, ficamos com $75 + 30 = 105$ vezes por dia.

b) São três situações:

  i) O ponteiro das horas é ultrapassado pelo ponteiro dos segundos a cada minuto, o que resulta em 60 vezes por hora, ou seja, no total, o ponteiro das horas é ultrapassado pelo ponteiro dos segundos $12 \times 60 = 720$ vezes, tirando o horário $00:00$, serão 719 plins.

  ii) O ponteiro dos minutos é ultrapassado pelo ponteiro dos segundos a cada minuto de 1 a 59, ocorrendo 59 vezes, e no período colocado essa situação ocorre $12 \times 59 = 708$ vezes.

  iii) O ponteiro das horas é ultrapassado pelo ponteiro dos minutos uma vez por hora, ou seja, ocorrerá 12 vezes, retirando o caso da 0 h, ocorre 11 vezes.

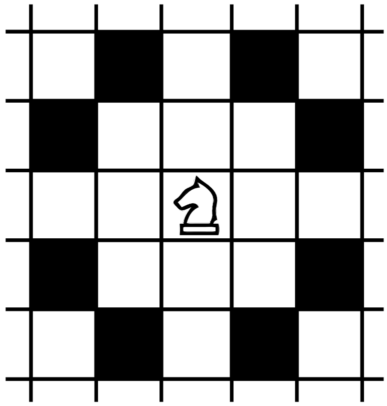
Portanto, no total, haverá $719 + 708 + 11 = 1438$ plins.

17 *Xadrez outra vez!*

Em um torneio de xadrez, todos os jogadores se enfrentaram duas vezes, obtendo a pontuação de 1 ponto por vitória, meio-ponto por empate e zero ponto por derrota. O vencedor foi aquele que obteve mais pontos na disputa. Luíza, uma curiosa matemática, achou um papel informando que a soma da pontuação de todos os participantes foi 210 pontos.

a) Quantos jogadores participaram do torneio?

b) A imagem a seguir foi a logomarca do torneio e estava no papel que Luíza achou.



Luíza parou alguns segundos observando-a e percebeu que havia um cavalo no centro, com as casas pintadas de preto ilustrando aquelas que o cavalo poderia ir em um movimento. Aí ela se perguntou:
– Se este tabuleiro fosse infinito, e o cavalo mantivesse o padrão de movimentos, em quantas casas o cavalo poderia chegar em dois movimentos?
Inicialmente, ela pensou em “64”, mas rapidamente viu que estava errada. Agora, é com você, responda corretamente a pergunta pensada por Luíza.

c) Luíza recebeu uma mensagem de um amigo que participou do torneio, informando que ele fez 12 pontos. Luíza respondeu assim: "– Não fique triste, você vencerá o próximo campeonato!". Como Luíza sabia que o amigo não havia vencido o torneio?

17 *Xadrez outra vez! – Solução*

a) Sendo x o número de enxadristas, como em cada partida é disputado exatamente um ponto, o número total de pontos é igual à quantidade de jogos. Cada atleta jogará $(x-1)\cdot 2$ partidas, pois disputará contra todos os demais duas vezes. Porém as partidas como $\boxed{a \times b}$ e $\boxed{b \times a}$ serão contadas tanto na lista dos jogos de "a", quanto na de "b". Assim, o total de jogos poderá ser obtido pela equação

$$\begin{aligned}\frac{x\cdot(x-1)\cdot 2}{2} &= 210\\ x\cdot(x-1) &= 210.\end{aligned}$$

Como x é um inteiro positivo, podemos analisar todas as 8 maneiras de escrever 210 como um produto de 2 números inteiros positivos: $1\cdot 210$, $2\cdot 105$, $3\cdot 70$, ..., $14\cdot 15$ e concluir que apenas uma delas é formada por números consecutivos. Portanto,

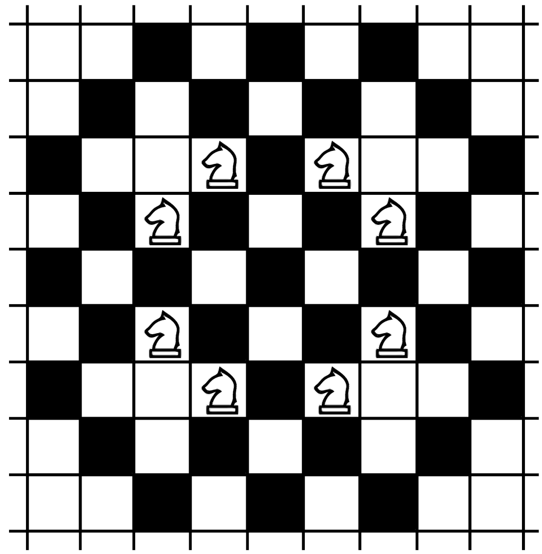
$$\begin{aligned}x\cdot(x-1) &= 15\cdot 14\\ x &= 15.\end{aligned}$$

Assim, houve 15 jogadores no torneio.

b) Primeiro, perceba que com dois movimentos, não importando a casa escolhida, o cavalo poderá voltar à casa inicial, este é o destino comum possível das oito casas destacadas após o primeiro movimento. Cada casa, ao se repetir o movimento feito, terá um quadradinho só alcançável por ela. Por fim, imaginando uma circunferência centrada na casa central e contendo todos os cavalos em sua borda, podemos perceber que toda dupla de cavalos poderá ter uma casa comum além da casa central, exceto os cavalos diametralmente opostos. Como cada cavalo chega a 8 casas no segundo movimento, mas 7 sem contar a casa central e 6 delas são de acesso comum a outro cavalo, então no segundo movimento obtém-se, ao todo, $\dfrac{8\cdot 6}{2}+8$ novas posições, além da casa central. Ou seja,

$$1+8+24=33 \text{ opções de casas.}$$

O desenho a seguir mostra todas as casas que podem ser acessadas no segundo movimento.



c) Luíza descobriu a média de pontos por jogador como $\frac{210}{15} = 14$ pontos. Como a média é 14, salvo se todos tivessem feito a mesma pontuação (que não ocorreu, pois Carlos fez 12), com certeza houve ao menos um enxadrista com mais de 14 pontos. Daí, Luíza concluiu que o amigo não havia vencido a competição.

18 *Formigas... sempre formigas!*

a) Uma formiga está no vértice A de um retângulo $ABCD$ e faz um movimento em direção a B seguindo o lado do retângulo. Após um segundo movimento, vai da mesma maneira para C. Depois de 3 movimentos, do mesmo modo ela chega a D e no quarto, mantendo o caminho sobre o lado, voltará para A. Depois de 2018 movimentos análogos aos anteriores, em qual vértice a formiga estará?

b) As formigas Albormiga e Clarormiga partem dos vértices A e C de um retângulo, respectivamente, deslocando-se com velocidades constantes (mesmo nos giros de $90°$ em cada vértice). A primeira no sentido horário e a segunda no anti-horário. De A até o primeiro encontro, Albormiga percorreu 360 metros. Do primeiro ao segundo encontro, Clarormiga andou 300 metros. Qual o perímetro do retângulo?

c) Três formigas estão localizadas em vértices distintos de um retângulo, deixando o outro vértice livre. Uma formiga pode se mover somente ao longo de uma reta paralela à reta determinada pelos pontos onde se localizam as outras duas, movendo-se uma de cada vez. É possível, depois de vários movimentos das formigas, acontecer de todas elas estarem no ponto médio de três lados distintos do retângulo?

18 *Formigas... sempre formigas! – Solução*

a) Perceba que a cada 4 movimentos, a formiga retorna ao vértice A (inicial). Sendo assim, como $2018 = 4 \cdot 504 + 2$, podemos concluir que ela completou 504 vezes o perímetro do retângulo e depois fez mais dois movimentos, chegando em C.

b) Como elas partiram de pontos opostos no retângulo, então percorreram metade do perímetro $2p$ até o primeiro encontro. A distância x andada por Clarormiga mais os 360 metros de Albormiga, resulta na metade do perímetro, isto é,

$$\frac{2p}{2} = x + 360 \Rightarrow 2p = 2x + 720.$$

Agora, até o segundo encontro, juntas contornaram $2p$. E tendo a velocidade constante, o tempo até o segundo encontro é o dobro comparativamente ao primeiro. Daí, como Clarormiga andou 300 metros entre os encontros, na primeira parte ela se deslocou metade desse valor, o equivalente a 150 metros, que é o valor de x. Por fim, fazendo a substituição, teremos $2p = 2 \cdot 150 + 720 = 1020$ metros.

c) As formigas A, B e C na posição inicial, se interpretadas como pontos, podem ser conectadas formando um triângulo com ***metade*** da área do retângulo. Quando C se mover pela reta paralela a AB, a área do triângulo ABC não se alterará, o mesmo acontecendo com A (pela reta paralela a BC) e B (pela reta paralela a AC). Se fosse possível que todas parassem nos pontos médios de três lados distintos, esse novo triângulo teria área igual a ***um quarto*** da área do retângulo e, como a área é invariável, isso não pode acontecer.

19 *O Rei Artur e o dragão*

O Rei Artur teve que lutar com o Dragão das Três Cabeças e Três Caudas (conhecido como $DTCTC$). Sua tarefa foi facilitada quando conseguiu arranjar uma espada mágica que podia desferir os seguintes golpes (um de cada vez):

A) cortar uma cabeça;

B) cortar duas cabeças;

C) cortar uma cauda;

D) cortar duas caudas.

Além disso, a Fada Morgana lhe revelou o segredo do dragão:

i) se uma cabeça for cortada, crescerá uma nova;

ii) se duas cabeças forem cortadas, logo após o golpe não crescerão cabeças e caudas;

iii) no lugar de uma cauda cortada nascerão duas caudas novas;

iv) se duas caudas forem cortadas, crescerá uma nova cabeça;

v) o dragão morre se perder as três cabeças e as três caudas.

a) É possível o dragão ficar com 4 cabeças e 4 caudas?

b) Para matar o $DTCTC$, qual o mínimo de golpes que o Rei Artur precisará desferir?

19 *O Rei Artur e o dragão – Solução*

a) Sim, basta que o Rei use, por exemplo, a sequência de golpes $D \to C \to C \to C$.

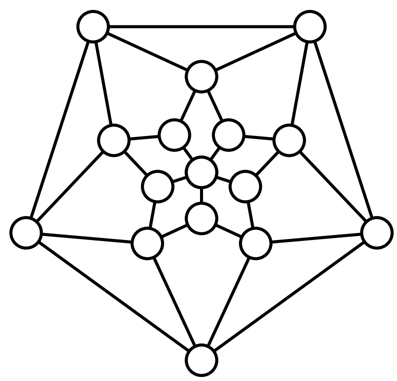
b) Do ponto de vista prático, o único golpe que diminui o número de cabeças é o B, mas precisamos de duas delas para desferi-lo (o mesmo se aplica para as caudas e para o golpe D), a não ser que algum golpe o deixe sem cabeça e sem cauda, aí ele morre antes de regenerar. Por conta da paridade, o número de cabeças precisará aumentar pelo menos uma vez. Além disso, nenhum golpe elimina mais que 2 membros, então, precisaremos de pelo menos mais 3 golpes. Abaixo uma sequência com esse mínimo de $1+3=4$ golpes.

n	Golpe	Cabeça	Cauda
0	–	3	3
1	Após D	4	1
2	Após B	2	1
3	Após B	0	1
4	Após C	0	0

[$*$] Perceba que ao cortar as caudas, como não há no momento mais cabeças, o $DTCTC$ tanto perde o poder de regeneração quanto morre. Logo, 4 é o menor número de golpes.

20 *A distribuição das moedas!*

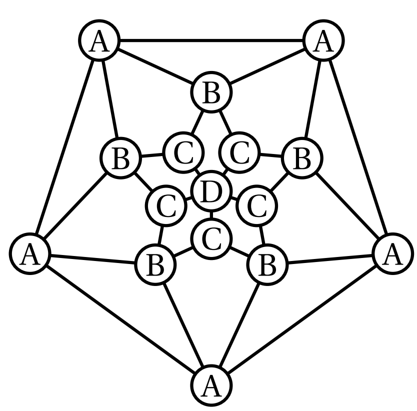
Em cada um dos 16 círculos da figura está um estudante. Um total de 3360 moedas são distribuídas entre os 16 estudantes, de modo que estudantes que distam o mesmo do centro recebem a mesma quantidade de moedas. Cinco a cinco, de fora para dentro, os círculos estão sobre os vértices de um pentágono regular, sendo o círculo central equidistante aos vértices de um mesmo pentágono.



Em um certo instante, cada estudante dá todas as suas moedas dividindo-as igualmente entre cada um de seus vizinhos. Após o intercâmbio de moedas, cada estudante ficou com o mesmo número de moedas que tinha no início. Determine o número de moedas que o estudante do círculo central tinha originalmente.

20 *A distribuição das moedas! – Solução*

Denomine cada vértice por letras maiúsculas e as quantidades que cada um passou pela respectiva letra minúscula. Por exemplo,



Os 5 A's enviaram $4a$ e receberam $2a$ e $2b$, então $4a = 2a + 2b$ e, consequentemente, $a = b$. Os 5 B's mandaram $4b$ e receberam $2a$ e $2c$, assim, $4b = 2a + 2c$. Segue que $b = c = a$. Nos 5 C's, teremos $3c = 2b + d = 2c + d$, donde $d = c = b = a$, sendo todos iguais a x. A

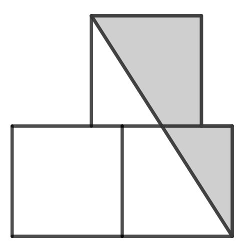
contabilidade total do que foi distribuído deve coincidir com o total de moedas. Daí,

$$\begin{aligned}4x\cdot 5+4x\cdot 5+3x\cdot 5+5x &= 3360\\ 60x &= 3360\\ x &= 56.\end{aligned}$$

Portanto, a quantidade inicial do estudante no círculo D (central) era $5x = 5\cdot 56 = 280$ moedas.

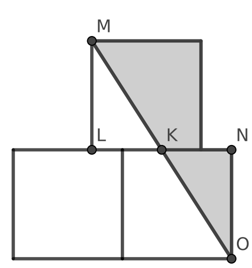
21 *A área da região*

Os lados dos quadrados da figura abaixo possuem o comprimento de 1 m. Qual é a área da região sombreada?



21 *A área da região – Solução*

Considere os pontos marcados no desenho a seguir.



Os triângulos $\triangle MLK$ e $\triangle KNO$ são triângulos retângulos com os mesmos ângulos e possuindo catetos de mesmo comprimento, a saber, $LM = NO = 1\,\text{m}$. Assim, eles são congruentes e a área sombreada equivale à área do quadrado de lado 1, ou seja, é $1\,\text{m}^2$.

22 *Múltiplos no tabuleiro*

Em um tabuleiro 30×30, as linhas e as colunas estão numeradas de 1 a 30. Em cada linha, João pinta de vermelho as casas em que o número da coluna é múltiplo do número da linha. Quantas casas serão pintadas de vermelho?

22 *Múltiplos no tabuleiro – Solução*

O número de casas pintadas na linha i é igual ao número de múltiplos de i menores ou iguais a 30. Se ao dividirmos 30 por i obtivermos quociente q e resto r, com $0 \leq r < i$, então o número de casas pintadas é q, pois

$$i \cdot 1 < i \cdot 2 < \ldots < i \cdot q \leq 30 < i \cdot q + i.$$

A tabela a seguir indica, para cada i, quantos números serão pintados na linha i.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
q	30	15	10	7	6	5	4	3	3	3
i	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
q	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1
i	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
q	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Portanto, a quantidade de quadradinhos pintados é

$$30 + 15 + 10 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 3 + 3 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 1 + 1 + \ldots + 1 = 111.$$

23 *As habilidades dos competidores*

Ocorrerá um torneio com 100 competidores, todos com níveis de habilidades diferentes. O competidor mais habilidoso sempre vence o competidor menos habilidoso. Cada participante joga exatamente duas vezes, com dois oponentes sorteados (uma vez com cada um). Um competidor que ganha duas partidas recebe uma medalha. Determine o menor número de medalhas que podem ser distribuídas no torneio.

23 *As habilidades dos competidores – Solução*

Indiquemos que um jogador A é mais habilidoso que um jogador B por $A \to B$. Suponha que

$$L_1 \to L_2 \to L_3 \to \ldots \to L_{100}$$

sejam os 100 jogadores do torneio. Como L_1 é o mais habilidoso de todos, ele certamente ganhará uma medalha por ganhar as suas duas partidas. Veremos que essa é a menor quantidade de medalhas exibindo um exemplo de torneio em que ele é o único a obtê-la. Na primeira rodada do torneio, considere os jogos:

$$L_{100} \times L_{99}, L_{98} \times L_{97}, \ldots, L_2 \times L_1.$$

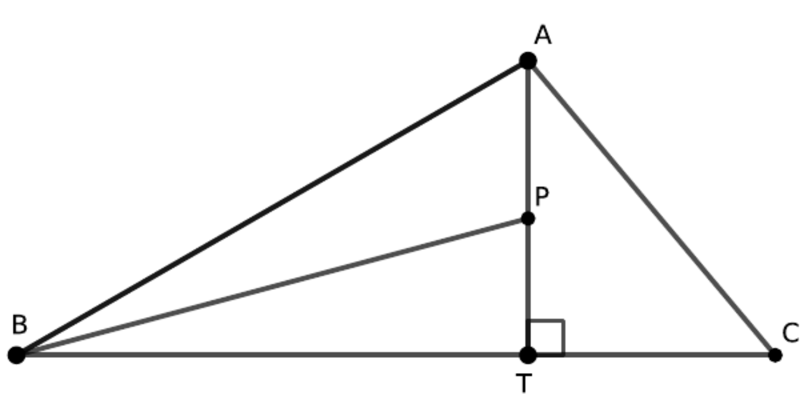
Assim, todos os jogadores com números ímpares perderam pelo menos uma partida. Na segunda rodada, considere os jogos:

$$L_{100} \times L_1, L_{99} \times L_{98}, \ldots, L_3 \times L_2.$$

Assim, todos os jogadores com números pares perderam pelo menos uma partida. Nessa situação, apenas L_{100} ganhará uma medalha.

24 *As medidas dos ângulos*

Seja ABC um triângulo tal que $\angle ACB = 50°$. A altura correspondente ao vértice A e a bissetriz do ângulo $\angle ABC$ se encontram em P, com P no interior do triângulo ABC e $\angle APB = 105°$. Encontre as medidas dos ângulos $\angle BAC$ e $\angle ABC$.



24 *As medidas dos ângulos – Solução*

Pelo Teorema do Ângulo Externo,

$$\begin{aligned} \angle BPA &= 105^\circ \\ \angle PBT + \angle BTP &= 105^\circ \\ \angle PBT + 90^\circ &= 105^\circ. \\ \angle PBT &= 15^\circ. \end{aligned}$$

Portanto, como BP é bissetriz de $\angle ABC$, segue que

$$\angle ABC = 2 \cdot \angle PBT = 30^\circ.$$

Assim, $\angle BAT = 180^\circ - \angle ABC - \angle ATB = 60^\circ$. Finalmente, como $\angle CAT = 180^\circ - \angle ATC - \angle ACT = 40^\circ$, segue que $\angle BAC = 60^\circ + 40^\circ = 100^\circ$. Ou seja, os ângulos do triângulo são 100°, 30° e 50°.

25 *Os números da Mônica*

Com os algarismos 1, 3 e 5, Mônica forma números de três algarismos que são maiores que 150. Quantos números Mônica pode formar?

25 *Os números da Mônica – Solução*

Existem três possibilidades para o primeiro dígito do número formado por Mônica.

a) O algarismo das centenas é o 1. Para que o número seja maior que 150, o algarismo das dezenas deve ser 5. Restam apenas três opções para o dígito das unidades, a saber: 1, 3 ou 5. Nesse caso, ela pode formar apenas 3 números.

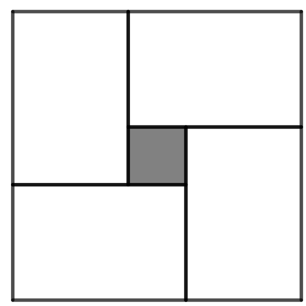
b) O algarismo das centenas é o 3. Para quaisquer escolhas das dezenas e unidades o número formado será maior que 150. Como existem três opções para as dezenas e três para as unidades, o total de números nesse caso é $3 \cdot 3 = 9$.

c) O algarismo das centenas é o 5. Assim, como no caso anterior, para quaisquer escolhas das dezenas e unidades o número formado será maior que 150. Temos 9 números nesse caso.

Portanto, o total de números de três algarismos que Mônica pode formar é $3 + 9 + 9 = 21$.

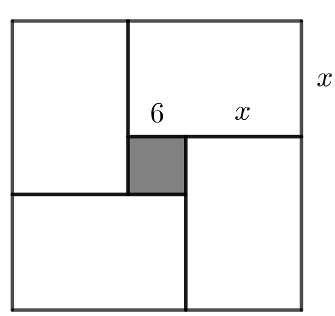
26 *As dimensões do quadrado*

Um quadrado está dividido em 4 retângulos iguais e um quadrado, como mostra a figura abaixo. O quadrado sombreado possui área de $36\,\text{m}^2$. Cada retângulo possui área de $216\,\text{m}^2$. Determine as dimensões dos retângulos.



26 *As dimensões do quadrado – Solução*

A área do quadrado maior é $4 \cdot 216 + 36 = 900\,\text{m}^2$. Assim, o lado do quadrado maior é $\sqrt{900} = 30\,\text{m}$. Se x é o comprimento do menor lado do retângulo, analisando o quadrado maior temos $2x + 6 = 30$ e daí $x = 12$. Portanto, as dimensões dos lados dos retângulos são $x = 12\,\text{m}$ e $x + 6 = 18\,\text{m}$.



27 *A conta de multiplicação*

Na conta de multiplicação abaixo, quase a metade dos dígitos foram trocados por asteriscos. Descubra quais dígitos foram trocados.

$$\begin{array}{rcccccc} & & & \ast & 1 & \ast \\ \times & & & 3 & \ast & 2 \\ \hline & & & \ast & 3 & \ast \\ + & 3 & \ast & 2 & \ast & \\ \ast & 2 & \ast & 5 & & \\ \hline 1 & \ast & 8 & \ast & 3 & 0. \end{array}$$

27 *A conta de multiplicação – Solução*

Numeremos as linhas da conta de multiplicar como indicado na figura a seguir.

$$\begin{array}{c|cccccc} (1) & & & & \ast & 1 & \ast \\ (2) & \times & & & 3 & \ast & 2 \\ \hline (3) & & & & \ast & 3 & \ast \\ (4) & + & 3 & \ast & 2 & \ast & \\ (5) & \ast & 2 & \ast & 5 & & \\ \hline (6) & 1 & \ast & 8 & \ast & 3 & 0 \end{array}.$$

Analisando a linha (6), podemos concluir que o último asterisco da linha (3) é 0. Consequentemente, o último asterisco da linha (1) é 5 ou 0. Estudando a linha (5), como a multiplicação desse algarismo por 3 produz 5, podemos concluir que ele é igual a 5. Assim, já descobrimos os seguintes asteriscos:

$$\begin{array}{c|cccccc} (1) & & & & \ast & 1 & 5 \\ (2) & \times & & & 3 & \ast & 2 \\ \hline (3) & & & & \ast & 3 & 0 \\ (4) & + & 3 & \ast & 2 & \ast & \\ (5) & \ast & 2 & \ast & 5 & & \\ \hline (6) & 1 & \ast & 8 & \ast & 3 & 0 \end{array}.$$

O último asterisco da linha (4) é 0, pois a soma na linha (6) possui 3 na casa das dezenas. Portanto, a linha (4) termina em 20 e foi obtida pela multiplicação do asterisco da linha (2) por 15. Os resultados da multiplicação de 15 pelos algarismos do conjunto $\{0,1,2,\ldots,9\}$ são:

$$00, 15, 30, 45, 60, 75, 90, 105, 120, 135.$$

Daí, o asterisco da linha (2) é 8. Nossas descobertas parciais estão no diagrama:

$$\begin{array}{rcccccc}
(1) & & & & * & 1 & 5\\
(2) & \times & & & 3 & 8 & 2\\ \cline{2-7}
(3) & & & & * & 3 & 0\\
(4) & + & 3 & * & 2 & 0 & \\
(5) & * & 2 & * & 5 & & \\ \cline{2-7}
(6) & 1 & * & 8 & * & 3 & 0
\end{array}.$$

Finalmente, perceba que a multiplicação do 8 da linha (2) pelo asterisco remanescente da linha (1) produz um número iniciado por 3. Os primeiros 10 múltiplos não negativos de 8 são:

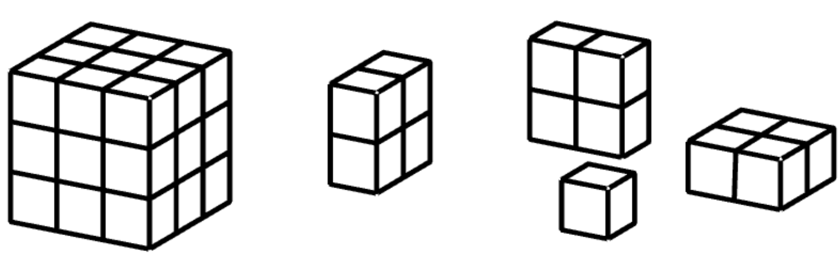
$$0, 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72.$$

Apenas um deles começa com 3 e assim o asterisco da linha (1) é 4. Tendo descoberto todos os asteriscos das duas primeiras linhas, podemos reconstituir por completo a multiplicação:

$$\begin{array}{rcccccc}
(1) & & & & 4 & 1 & 5\\
(2) & \times & & & 3 & 8 & 2\\ \cline{2-7}
(3) & & & & 8 & 3 & 0\\
(4) & + & 3 & 3 & 2 & 0 & \\
(5) & 1 & 2 & 4 & 5 & & \\ \cline{2-7}
(6) & 1 & 5 & 8 & 5 & 3 & 0
\end{array}.$$

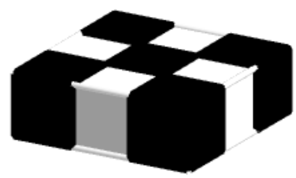
28 *O Cubo de Conway*

Determine como montar um cubo $3 \times 3 \times 3$ com 6 peças $1 \times 2 \times 2$ e três peças $1 \times 1 \times 1$.

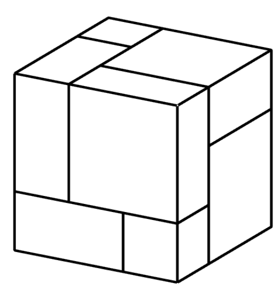


28 *O Cubo de Conway - Solução*

Fazendo cortes paralelos às faces do cubo, podemos decompô-lo em 3 camadas $1 \times 3 \times 3$ de três formas distintas. Considere uma camada qualquer $1 \times 3 \times 3$ pintada como um tabuleiro de xadrez:



Perceba que uma peça $1 \times 2 \times 2$ intersecta cada camada em um número par de cubinhos e, além disso, sempre contém a mesma quantidade de cubinhos brancos e pretos. Assim, como em uma camada existem mais cubinhos pretos do que brancos, um dos cubinhos pretos deve ser coberto por um dos cubinhos $1 \times 1 \times 1$. Como dispomos de apenas três cubinhos, podemos concluir que cada camada, para qualquer uma das 3 maneiras de cortarmos o cubo $3 \times 3 \times 3$ em camadas, deve existir exatamente um cubinho. Uma distribuição possível consiste em colocar os cubinhos formando uma diagonal do cubo maior e as peças restantes como indicado na figura abaixo.



Nessa figura, não estão visíveis um cubinho $1 \times 1 \times 1$ no centro e uma peça $1 \times 2 \times 2$ em pé na parte traseira do cubo maior.

29 *A idade do professor Antônio*

O professor Antônio descobriu uma interessante propriedade relacionada ao inteiro x que representa sua idade. Ele contou para seus alunos que $x^2 = \overline{abac}$ e que $x = \overline{ab} + \overline{ac}$. Qual a idade do professor?

Observação: Estamos usando uma barra para distinguir a representação decimal do número de quatro algarismos $\overline{abcd}$ do produto $a \cdot b \cdot c \cdot d$. Por exemplo, se $\overline{abcd} = 1267$, então $a = 1$, $b = 2$, $c = 6$ e $d = 7$. A notação é a mesma para os números com outras quantidades de algarismos.

29 *A idade do professor Antônio – Solução*

Dado que x^2 possui 4 dígitos, temos $31 < x < 100$. Note que $\overline{abcd} = \overline{ab} \cdot 100 + \overline{cd}$ e daí segue que

$$\begin{aligned} x^2 &= \overline{ab} \cdot 100 + \overline{cd} \\ &= 99\overline{ab} + \overline{ab} + \overline{cd} \\ &= 99 \cdot \overline{ab} + x. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} x^2 - x &= 11 \cdot 9 \cdot \overline{ab} \\ x(x-1) &= 11 \cdot 9 \cdot \overline{ab}. \end{aligned}$$

Como 11 é um número primo, segue que 11 divide x ou $x-1$. As possibilidades para x são:

i) Quando 11 divide x: 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99.

ii) Quando 11 divide $x-1$: 34, 45, 56, 67, 78, 89.

Sabemos também que 9 divide $x(x-1)$ e assim ficamos apenas com as seguintes possibilidades de x:

$$45, 55, 99.$$

Elevando ao quadrado esses três valores, podemos concluir que $x = 45$. De fato, $45^2 = 2025$ e $20 + 25 = 45$.

30 *Gavetas e cadeados*

Fernando é um cara precavido e o portão da casa dele possui 10 cadeados distintos, sendo que cada um só pode ser aberto pela respectiva chave, e cada chave abre apenas um cadeado. Para ser aberto, ele deve possuir pelo menos uma chave para cada cadeado. Por segurança, Fernando espalhou, exatamente, duas chaves diferentes nas 45 gavetas do seu trabalho, de modo que duas chaves de uma mesma gaveta abrem cadeados diferentes e não existem duas gavetas contendo chaves que abrem exatamente os mesmos cadeados.

a) Quantas são as duplas possíveis de chaves que podem ser formadas com 10 chaves distintas?

b) Quantas cópias de cada chave Fernando precisa ter para formar todos os pares de chaves possíveis?

c) Qual o número mínimo de gavetas que Fernando deve abrir para garantir a posse de 10 chaves distintas e abrir o portão de casa?

30 *Gavetas e cadeados – Solução*

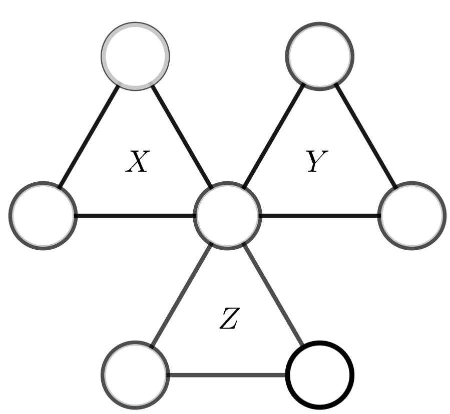
a) Perceba que a dupla $\{a, b\}$ é igual a $\{b, a\}$, pois elas abrirão os mesmos cadeados. Sendo assim, depois de escolhermos a chave a de 10 formas e a chave b de 9 formas, devemos dividir o resultado por 2, obtendo $\frac{10 \cdot 9}{2} = 45$ duplas.

b) Como cada chave fará par com todas as demais exatamente uma vez, Fernando precisa de 9 cópias de cada uma das chaves.

c) Pelo item anterior, cada chave está em 9 gavetas. Para Fernando tirar todas as gavetas que não aparece uma chave X, ele precisará abrir $45 - 9 = 36$ gavetas. Assim, abrir 36 gavetas não garante a abertura dos cadeados, pois pode ser que ele escolha exatamente as gavetas que não contêm a chave X. Por outro lado, se ele abrir 37 gavetas, não é possível que alguma chave esteja ausente. Logo o mínimo é 37.

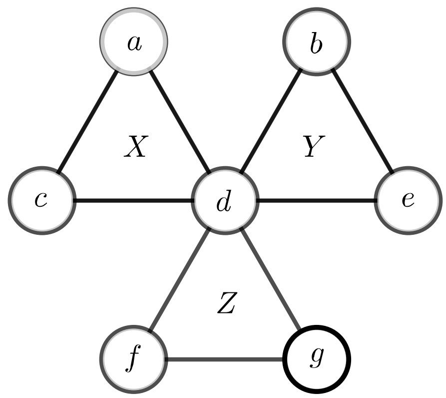
31 *Números no círculo*

Michel deve escrever os números de 1 a 7 em cada um dos círculos da figura abaixo, de modo que os resultados obtidos ao somar os 3 números que estão nos vértices dos triângulos X, Y e Z sejam 3 números consecutivos. Qual número pode constar no círculo central? Encontre todas as possibilidades.



31 *Números no círculo – Solução*

Vamos designar os números que serão escritos nos círculos pelas letras a, b, c, d, e, f e g, como indica a figura a seguir.



Suponha que os três números consecutivos obtidos das somas dos vértices dos triângulos X, Y e Z são k, $k+1$ e $k+2$. Assim,

$$\begin{aligned} 3k+3 &= k+(k+1)+(k+2) \\ &= (a+c+d)+(b+d+e)+(d+f+g) \\ &= (a+b+c+d+e+f+g)+2d. \end{aligned}$$

Como nos 7 círculos devemos encontrar cada número do conjunto $\{1,2,3,4,5,6,7\}$, então

$$a+b+c+d+e+f+g = 1+2+3+4+5+6+7 = 28.$$

Daí,

$$3k+3 = 28+2d.$$

Como o membro esquerdo dessa equação é um inteiro múltiplo de 3, o mesmo deve ocorrer com o membro direito. Substituindo os possíveis valores de d, temos as seguintes opções para $28+2d$:

$$2\cdot 1+28, 2\cdot 2+28, 2\cdot 3+28, 2\cdot 4+28, 2\cdot 5+28, 2\cdot 6+28, 2\cdot 7+28.$$

Nessa lista, apenas $2\cdot 1+28$, $2\cdot 4+28$ e $2\cdot 7+28$ são múltiplos de 3 e assim, a princípio, d pode ser apenas 1, 4 ou 7 (note que todos deixam resto 1 na divisão por 3). Para mostrar que esses valores de d são admissíveis, para cada um deles, precisamos exibir um exemplo de configuração satisfazendo o enunciado. Da última equação, podemos concluir que

$$\begin{aligned} d=1 &\quad\rightarrow\quad k=9 \\ d=4 &\quad\rightarrow\quad k=11 \\ d=7 &\quad\rightarrow\quad k=13. \end{aligned}$$

1. Para $d = 1$, os três números consecutivos são 9, 10 e 11. Uma distribuição possível é
$$a = 6, b = 4, c = 2, d = 1, e = 5, f = 7, g = 3.$$
2. Para $d = 4$, os três números consecutivos são 11, 12 e 13. Uma distribuição possível é
$$a = 6, b = 3, c = 1, d = 4, e = 5, f = 7, g = 2.$$
3. Para $d = 7$, os três números consecutivos são 13, 14 e 15. Uma distribuição possível é
$$a = 5, b = 3, c = 1, d = 7, e = 4, f = 6, g = 2.$$

ENUNCIADOS E SOLUÇÕES DO NÍVEL 2

$\boxed{1}$ *As somas da tabela*

As somas das três colunas e das três linhas da tabela são iguais.

4	9	2
8	1	6
3	5	7

Qual é o menor número de casas da tabela, que devem ser alteradas, para que todas as novas seis somas sejam diferentes entre si?

$\boxed{1}$ *As somas da tabela – Solução*

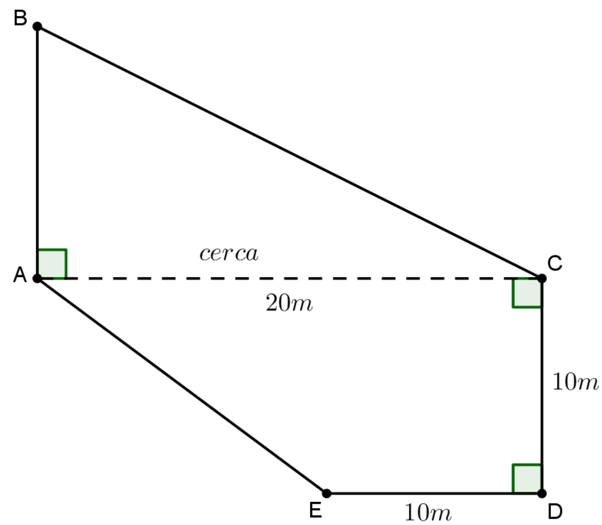
Se três ou menos casas são alteradas, ou existirão duas filas sem casas alteradas ou uma casa é a única alterada em sua linha e coluna. No primeiro caso, essas duas filas sem casas alteradas possuem a mesma soma. No segundo caso, se apenas uma casa é a única alterada na sua linha e coluna, elas também possuem a mesma soma. A tabela a seguir representa um exemplo com apenas 4 alterações e todas as 6 somas de linhas e colunas distintas.

5	9	**7**
8	**3**	**9**
3	5	7

Portanto, o mínimo de alterações é 4.

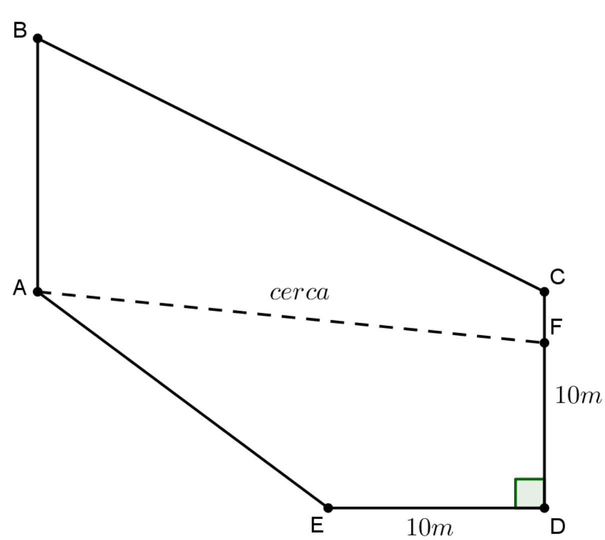
2 *Cerca, nova cerca, outra cerca*

A figura representa o terreno do Sr. Arlindo. Esse terreno é dividido por uma cerca, representada pelo segmento AC. A parte triangular ABC tem área igual a $120\,\text{m}^2$.

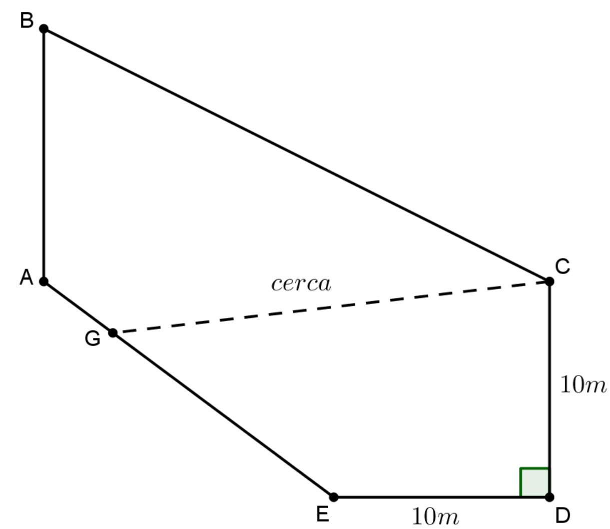


a) Qual é a área total do terreno?

b) Como este terreno será doado para os dois filhos do Sr. Arlindo, o filho mais velho, Marlindo, propõe que a cerca seja refeita, representada pelo segmento AF do novo desenho, sendo F pertencente ao segmento CD, de maneira que ela divida o terreno em duas áreas iguais. Qual deve ser a medida CF?



c) O filho mais novo, Solindo, concorda com seu irmão em relação à divisão em áreas iguais, mas acha que a cerca deve ligar os pontos C e G, sendo G um ponto do segmento AE. Qual a medida AG?

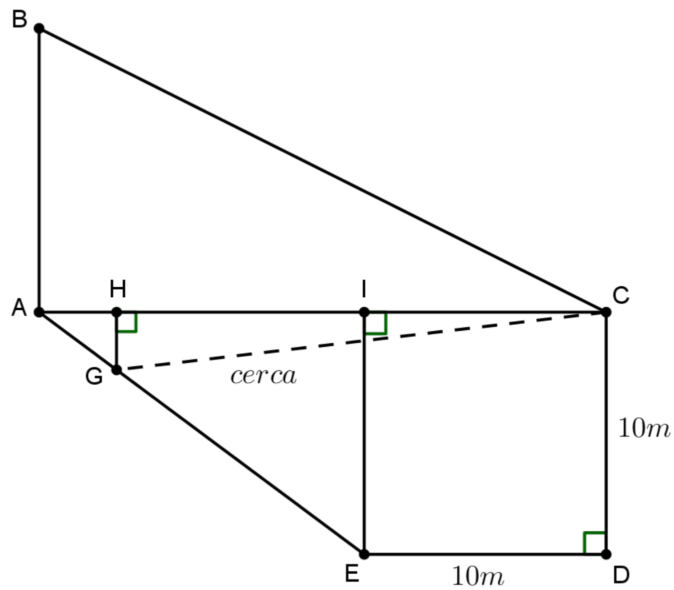


2 *Cerca, nova cerca, outra cerca – Solução*

a) Sendo A a área total, temos $A = 120 + \dfrac{(20+10)\cdot 10}{2} = 120 + 150 = 270\,\text{m}^2$.

b) Como a cerca deve dividi-lo em duas áreas iguais, então a área do quadrilátero $ABCF$ deve ser a metade da área total do terreno, ou seja, $135\,\text{m}^2$ e, consequentemente, a área do triângulo ACF deve ser $135 - 120 = 15\,\text{m}^2$. Para isso, devemos ter $\dfrac{20 \cdot CF}{2} = 15$ e daí segue que $CF = 1,5\,\text{m}$.

c) As perpendiculares ao segmento AC pelos pontos G e E intersectam este segmento em H e I, respectivamente. Como $CDEI$ é um quadrado de lado 10 m, I é ponto médio de AC. Daí o triângulo AEI é isósceles e retângulo. O mesmo ocorre com o triângulo AGH, que resulta em $AH = HG$. Assim como no item anterior, a área do triângulo ACG deve ser 15 m^2 e, por isso, temos $\dfrac{20 \cdot HG}{2} = 15$. Segue que $HG = 1,5\,\text{m}$. Por fim, aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo AGH, chegamos a $AG = 1,5\sqrt{2}\,\text{m}$.



3 *Sobre homens, mulheres, matemática e literatura*

Em uma classe com 35 estudantes, pesquisou-se sobre os gostos relativos a matemática e literatura e constatou-se que:

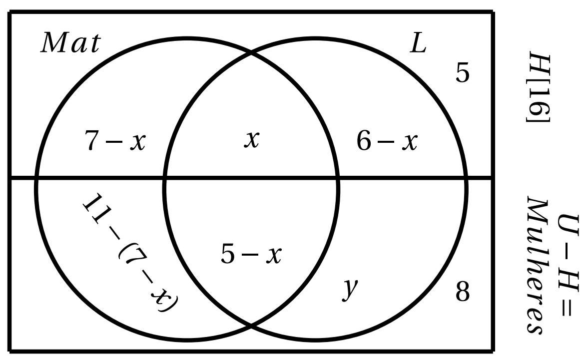
- 7 homens gostam de matemática;
- 6 homens gostam de literatura;
- 5 homens e 8 mulheres disseram não gostar de ambos;
- há 16 homens na classe;
- 5 estudantes gostam de ambos; e
- 11 estudantes gostam somente de matemática.

a) Quantos homens gostam de matemática e literatura?

b) Quantas mulheres gostam apenas de literatura?

$\boxed{3}$ *Sobre homens, mulheres, matemática e literatura – Solução*

Sejam H o conjunto dos homens e U o conjunto total de pessoas, portanto $U - H$ é o conjunto das mulheres. Além deles, considere os conjuntos Mat e L das pessoas que gostam de matemática e literatura, respectivamente. Se x representa a quantidade de homens que gostam de matemática e literatura e y as mulheres que gostam apenas de literatura, temos o seguinte diagrama:



a) Como existem 16 homens na sala,

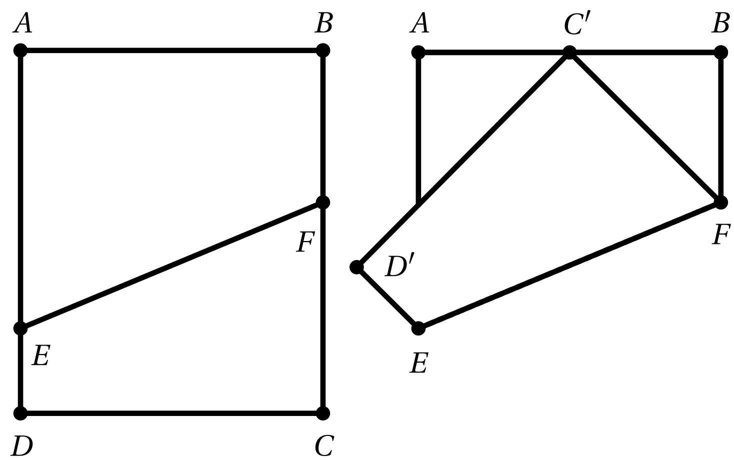
$$\begin{aligned} 5+7-x+x+6-x &= 16 \\ x &= 2. \end{aligned}$$

b) Como a sala é composta por 35 estudantes

$$\begin{aligned} |H|+|U-H| &= 35 \\ 16+4+x+5-x+y+8 &= 35 \\ y &= 2. \end{aligned}$$

4 *Vamos dobrar papel?!*

O retângulo $ABCD$ de medidas $AB = 240\,\text{cm}$ e $BC = 288\,\text{cm}$ representa um papel que será dobrado pelo segmento EF, onde E pertence a AD e F pertence a BC, de modo que o ponto C ficará sobre o ponto médio de AB.

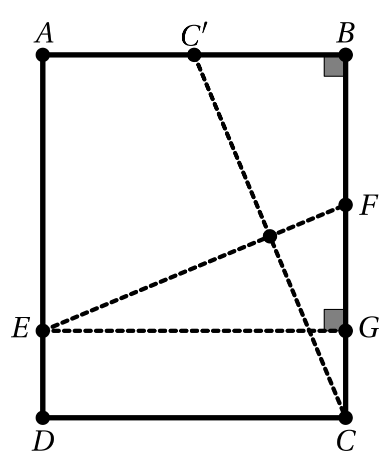


a) Qual o comprimento de CC'?

b) Qual o comprimento de EF?

4 *Vamos dobrar papel?! – Solução*

A operação de dobrar a folha de papel equivale a produzir uma reflexão ao longo da dobra. Para ver isso, perceba que segmentos correspondentes possuem o mesmo comprimento, por exemplo, $C'F = CF$ e $C'E = CE$. Assim, EF divide o segmento CC' ao meio e é ortogonal a ele.



a) Como o $\triangle CBC'$ é retângulo em B, pelo Teorema de Pitágoras, temos $CC' = \sqrt{120^2 + 288^2} = 312\,\text{m}$.

b) Como EF é ortogonal a CC', segue que

$$\angle CC'B = 90^\circ - \angle C'CB = \angle EFC.$$

Tomando $G \in BC$ tal que $EG \perp BC$, podemos concluir que o $\triangle EFG$ é semelhante ao $\triangle CC'B$. Assim

$$\begin{aligned} \frac{EF}{EG} &= \frac{CC'}{BC} \\ \frac{EF}{240} &= \frac{312}{288} \\ EF &= 260\,\text{m}. \end{aligned}$$

$\boxed{5}$ *A conta errada*

Ana multiplica dois números inteiros positivos cuja diferença é 202, mas comete um erro e obtém um número 1000 unidades menor que o correto. Ao dividir o resultado de Ana pelo menor dos números que deveria multiplicar, o quociente é 288 e o resto é 67. Quais os dois números que Ana multiplicou?

$\boxed{5}$ *A conta errada – Solução*

Sejam x e $x+202$ os inteiros que Ana multiplica. A partir do resultado da divisão de Ana, podemos escrever:

$$x(x+202) - 1000 = 288x + 67.$$

Daí,

$$x^2 - 86x - 1067 = 0.$$

Resolvendo a equação anterior, encontramos como raízes $x = -11$ e $x = 97$. Como x é um inteiro positivo, devemos ter $x = 97$. O outro número multiplicado por Ana é $97 + 202 = 299$.

$\boxed{6}$ *Os velhos problemas com os dígitos*

a) Quantos números de quatro algarismos têm soma de seus algarismos par?

b) Um número com dois dígitos distintos e não nulos é chamado de bonito se o dígito das dezenas é maior do que o dígito das unidades. Quantos números bonitos existem?

c) Quantos números pares de quatro dígitos podemos formar utilizando os algarismos $0, 1, 2, 3, 4, 5$ sem utilizar o mesmo algarismo duas vezes?

d) Qual a média de todos os números de 5 algarismos que podem ser formados usando cada um dos dígitos 1, 3, 5, 7 e 8 exatamente uma vez?

6 *Os velhos problemas com os dígitos – Solução*

a) Para que a soma seja par, devemos utilizar quatro, dois ou nenhum algarismo par. Eles podem ocupar as seguintes ordens: unidades de milhar, centenas, dezenas ou unidades.

   i) No primeiro caso, o zero não pode ocupar a maior ordem e as outras podem ser ocupadas por quaisquer dos 5 números pares, resultando num total de

   $$4 \times 5 \times 5 \times 5 = 500 \text{ números.}$$

   ii) No segundo caso, há duas formações, a saber:

   – Quando o primeiro dígito é ímpar, temos 5 opções para a maior ordem. Daí, ficamos com 3 opções para posicionar o outro algarismo ímpar. Separada a ordem desse algarismo, existem 5 opções de ímpares a serem colocados no local e, nas posições restantes, quaisquer um dos 5 pares podem ser postos. Isso gera

   $$5 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5 = 1875 \text{ números.}$$

   – Quando o primeiro dígito é par, mais uma vez, excluímos a possibilidade do zero ocupar a maior ordem. Existem três escolhas para a posição do outro par e as 5 opções para o seu valor. As duas ordens restantes podem ser ocupadas por qualquer um dos 5 ímpares, totalizando

   $$4 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5 = 1500 \text{ números.}$$

   No último caso, quando nenhum algarismo é par, temos

   $$5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625 \text{ possibilidades.}$$

   Daí, o total de número é $500 + 1875 + 1500 + 625 = 4500$.

b) Começando pelo 9, temos o conjunto de números bonitos $\{98, 97, \dots, 90\}$, que possui 9 números. Iniciando pelo 8, temos $\{87, 86, \dots, 80\}$, que possui 8 números, e assim por diante até o conjunto dos que começam pelo 1, que é $\{10\}$. Totalizando assim $9 + 8 + 7 + \cdots + 2 + 1 = 45$ números.

c) Existem apenas três algarismos pares e a contagem pode ser dividida em dois casos: se o último algarismo for zero, temos $5 \times 4 \times 3 = 60$ possibilidades; se o último dígito não for zero, temos $4 \times 4 \times 3 \times 2 = 96$. Portanto, o total de números é $60 + 96 = 156$.

d) Fixado um algarismo da lista, ele irá aparecer em uma dada ordem em outros $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ números. Cada vez que um número aparece em uma dada ordem, a sua contribuição na soma total é igual ao seu produto pela potência de 10 associada àquela ordem. Por exemplo, nos números 13578 e 13857, a contribuição do 5 é $5 \cdot 10^2$ e $5 \cdot 10^1$, respectivamente. Como todo número aparece igual número de vezes em cada ordem, a contribuição de cada algarismo na soma total é igual ao seu produto por $24 \cdot (10^4 + 10^3 + 10^2 + 10^1 + 10^0) = 24 \cdot 11111$. Além disso, a quantidade total de números é $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$. Portanto, a média é

$$\frac{(1+3+5+7+8) \cdot 24 \cdot 11111}{120} = 53332,8$$

$\boxed{7}$ *As folhas do livro*

José arrancou algumas folhas consecutivas de um livro com páginas numeradas com inteiros consecutivos e escritos em ambos os lados de cada folha. A soma dos números das páginas arrancadas é 344.

a) Determine a fatoração em números primos do número 344.

b) Encontre a soma do primeiro e do último número dentre os que foram escritos nas páginas arrancadas.

c) Qual a quantidade de páginas arrancadas?

$\boxed{7}$ *As folhas do livro – Solução*

a) Como 44 é múltiplo de 4, então $344 = 4 \cdot 86 = 2^3 \cdot 43$.

b) Se y é a quantidade de folhas arrancadas, sendo $2y$ a quantidade de páginas, e $x+1$ é o primeiro número que aparece nelas, temos

$$\begin{aligned} (x+1)+(x+2)+(x+3)+\ldots+(x+2y) &= 344 \\ 2xy+(1+2+\ldots+2y) &= 2^3 \cdot 43. \end{aligned}$$

Lembrando que

$$1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2},$$

segue que

$$\begin{aligned} 2^3 \cdot 43. &= 2xy + \frac{2y(2y+1)}{2} \\ &= y(2x+2y+1). \end{aligned}$$

Como $2x+2y+1$, que é a soma dos números da primeira e última página arrancadas, é um divisor ímpar de $2^3 \cdot 43$ maior que 1, segue que $2x+2y+1 = 43$.

c) Como $2x+2y+1=43$, da equação do item anterior, chegamos a $y=2^3=8$. Portanto, o número de páginas arrancadas é $2y=16$.

8 *A soma dos dígitos*

a) Encontre a soma dos dígitos de $99\cdot 33$.

b) Usando $999999=10^6-1$, encontre a soma dos dígitos de $999999\cdot 333333$.

c) Encontre a soma dos dígitos de $999\ldots 999\cdot 333\ldots 333$, em que cada dígito nos fatores anteriores aparece 2018 vezes.

8 *A soma dos dígitos – Solução*

a) Como $99\cdot 33=3267$, a soma procurada é $3+2+6+7=18$.

b) Temos que:

$$\begin{aligned} 999999\cdot 333333 &= (10^6-1)\cdot 333333\\ &= 333333\cdot 10^6-333333\\ &= 333332666667. \end{aligned}$$

Note que os 12 algarismos podem ser agrupados em 6 pares de números com soma 9: $2+7=9$, $3+6=9$. Assim, a soma procurada é $9\cdot 6=54$.

c) Repetindo o argumento do item anterior, temos

$$\begin{aligned} \underbrace{99\ldots 99}_{2018\text{ vezes}}\cdot\underbrace{33\ldots 33}_{2018\text{ vezes}} &= (10^{2018}-1)\cdot\underbrace{33\ldots 33}_{2018\text{ vezes}}\\ &= \underbrace{99\ldots 99}_{2018\text{ vezes}}\cdot 10^{2018}-\underbrace{33\ldots 33}_{2018\text{ vezes}}\\ &= \underbrace{33\ldots 33}_{2017\text{ vezes}}2\underbrace{66\ldots 66}_{2017\text{ vezes}}7 \end{aligned}$$

Os algarismos do número anterior podem ser agrupados em 2018 pares com soma 9. Assim, a soma dos dígitos é $2018\cdot 9=18162$.

9 *João e Maria no torneiro de xadrez*

a) Um campeonato terá 7 competidores. Cada um deles jogará exatamente um jogo contra todos os outros. Qual o total de jogos do campeonato?

b) Um campeonato terá n competidores e cada um deles jogará exatamente um jogo contra todos os outros. Verifique que o total de jogos é $\dfrac{n\cdot(n-1)}{2}$.

c) Um competidor A é chamado de *mestre* do campeonato se todo outro jogador ou perdeu para A ou perdeu para alguém que perdeu para A. Verifique que todo campeonato em que cada jogador joga exatamente uma vez contra todos os outros e que não existem empates, sempre admite um *mestre*.

d) João e Maria estavam num torneio em que cada atleta deveria jogar contra o outro exatamente uma vez. No entanto, Maria teve um problema de saúde e abandonou o torneio após disputar 10 jogos e João precisou sair após o seu primeiro jogo. Ao final do dia, foi contabilizado um total de 55 jogos. O jogo que João disputou foi contra Maria?

9 *João e Maria no torneiro de xadrez – Solução*

a) Sejam $\{a,b,c,d,e,f,g\}$ os jogadores. O jogador a participará dos jogos associados aos 6 pares: (a,b), (a,c), (a,d), (a,e), (a,f) e (a,g). A princípio, como já contamos o jogo associado a (a,b), para contar as partidas do jogador b, basta contabilizarmos as partidas associadas aos 6 pares (b,c), (b,d), (b,e), (b,f) e (b,g). Ao descontarmos os jogos já contabilizados, repetindo essa análise para os próximos jogadores, obteremos as seguintes quantidades de partidas: 4, 3, 2 e 1. Portanto, o total de jogos é

$$6+5+4+3+2+1=\frac{6\cdot 7}{2}=21.$$

b) Repetindo a contagem do item anterior, se $\{j_1, j_2, \dots, j_n\}$ são os jogadores, as partidas que j_1 participará estão associadas aos $n-1$ pares:

$$(j_1, j_2), (j_1, j_3), (j_1, j_4), \dots, (j_1, j_n).$$

Em geral, após listados sem repetição os pares dos jogadores $j_1, j_2, \dots, j_{k-1}$, precisaremos contar para o jogador j_k os $n-k-1$ jogos associados aos pares:

$$(j_k, j_{k+1}), (j_k, j_{k+2}), (j_k, j_{k+3}), \dots, (j_k, j_n).$$

Portanto, o total de jogos é

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n-1)}{2}.$$

Veja que essa é exatamente a quantidade de pares (j_l, j_m) com $l < m$ e poderia ser obtida com a seguinte contagem alternativa: Existem n opções para o primeiro elemento do par e $n-1$ para o segundo elemento produzindo $n(n-1)$ pares da forma (j_a, j_b) com $a \neq b$. Entretanto, os dois pares (j_a, j_b) e (j_b, j_a) foram contados e apenas um deles possui o jogador de índice menor na primeira posição. Assim, basta dividir a contagem anterior por 2 obtendo $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

c) Seja A o jogador com mais vitórias do campeonato. Considere qualquer outro competidor B. podem ocorrer duas situações:

1. A ganhou de B.
2. A perdeu de B. Como B não possui mais vitórias que A, em algum dos jogos de B contra as pessoas que perderam de A, devemos encontrar uma partida em que B foi o perdedor.

Diante dessas condições, podemos afirmar que A é um competidor *mestre*.

d) Considere que havia C_1, C_2, ..., C_n, João e Maria no torneio. Agora, perceba que tivemos $\dfrac{n\cdot(n-1)}{2}$ jogos entre os $C's$. Se João não jogou contra Maria, a soma da quantidade de todos os jogos fica

$$\begin{aligned}\frac{n\cdot(n-1)}{2}+10+1 &= 55\\ \frac{n\cdot(n-1)}{2} &= 44\\ n\cdot(n-1) &= 88.\end{aligned}$$

Podemos escrever 88 como produto de inteiros positivos das seguintes formas: $1\cdot 88$, $2\cdot 44$, $4\cdot 22$ e $8\cdot 11$. Daí $n\cdot(n-1) = 88$, com n inteiro positivo, não tem solução. Assim, conclui-se que João deve ter jogado contra Maria. Se João tiver jodado contra Maria, o total de jogos fica

$$\begin{aligned}\frac{n\cdot(n-1)}{2}+10 &= 55\\ \frac{n\cdot(n-1)}{2} &= 45\\ n\cdot(n-1) &= 90.\end{aligned}$$

Como $90 = 10\cdot 9$, uma solução é $n = 10$. A outra solução da equação do segundo grau $n^2 - n - 90 = 0$ é negativa e, portanto, não convém. Um exemplo de torneio satisfazendo às condições do enunciado com $10+2 = 12$ jogadores pode ser simbolizada pela seguinte lista de jogos:
$(j_1, j_2), (j_2, j_3), (j_2, j_4), (j_2, j_5), (j_2, j_6), (j_2, j_7), (j_2, j_8), (j_2, j_9), (j_2, j_{10}), (j_2, j_{11}), (j_a, j_b),$
com $a < b$ e $a, b \in \{3, 4, 5, \ldots, 12\}$, em que j_1 representa João e j_2 Maria.

10 *Triângulos na circunferência*

Juquinha marca pontos sobre uma circunferência e desenha triângulos ligando 3 destes pontos. Os comprimentos dos arcos de 2 pontos consecutivos são iguais.

a) Marcando 4 pontos na circunferência, quantos triângulos ele conseguirá desenhar?

b) Marcando 5 pontos na circunferência, quantos triângulos equiláteros ele conseguirá desenhar?

c) Quantos triângulos retângulos ele conseguirá desenhar se marcar 6 pontos?

10 *Triângulos na circunferência – Solução*

a) 4. Temos que escolher 3 pontos de um total de 4. Em situações como esta, ao escolhermos um triângulo qualquer, por exemplo o triângulo ABC, todas as permutações dos pontos A, B e C continuam sendo o triângulo ABC. Dessa forma, ao utilizarmos o princípio fundamental da contagem, devemos dividir pela quantidade de permutações de 3 pontos. Portanto, o total de triângulos que conseguimos desenhar, utilizando como vértices quatro pontos sobre uma circunferência, é $\frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 4$.

b) Nenhum. Como os comprimentos dos arcos delimitados por 2 pontos consecutivos são iguais, então cada um destes arcos mede $\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$. Ao desenharmos um triângulo equilátero inscrito a uma circunferência, cada arco mede $\frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$. Dessa forma, deveríamos ter 120° como múltiplo de 72°, o que é absurdo. Assim, não é possível desenhar triângulo equilátero com vértices em 3 dos 5 pontos desenhados simetricamente sobre uma circunferência.

c) 12. Um triângulo retângulo inscrito em uma circunferência deve ter um de seus lados (a hipotenusa) sobre o diâmetro. Como foram desenhados 6 pontos simétricos sobre a circunferência, a medida de cada arco delimitado por 2 pontos consecutivos é $\frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$, ou seja, devemos escolher 2 pontos com 3 arcos de cada lado. Isso é o mesmo que desenharmos um hexágono regular utilizando estes pontos e tomarmos a maior diagonal como sendo a hipotenusa. Dessa forma, existem 3 destas diagonais (diâmetros) e para cada uma delas 4 pontos para completar o triângulo. Sendo assim, o total de triângulos retângulos é $3 \cdot 4 = 12$.

11 *O ladrilho que faltava!*

Um ladrilho, em forma de polígono regular, foi retirado do lugar que ocupava em um painel. Observou-se, então, que se esse ladrilho sofresse uma rotação de 40° ou de 60° em torno do seu centro, poderia ser encaixado perfeitamente no lugar que ficou vago no painel. Qual o menor número de lados que esse polígono pode ter?

11 *O ladrilho que faltava! – Solução*

Para que seja possível efetuar tais rotações, com o encaixe do polígono, é necessário e suficiente que o ângulo central seja um divisor de 40° e 60°. Se n é o número de lados do ladrilho, o ângulo central é dado por $\dfrac{360^\circ}{n}$. Assim, as razões

$$\frac{40^\circ}{\dfrac{360^\circ}{n}} = \frac{n}{9} \text{ e } \frac{60^\circ}{\dfrac{360^\circ}{n}} = \frac{n}{6}$$

devem ser inteiras. O menor inteiro positivo múltiplo de 6 e 9 é 18. Claramente um polígono regular de 18 lados, por possuir ângulo central de 20°, satisfaz a condição do enunciado.

12 *Paulo ficou sem bolo*

Quando Paulo fez 15 anos, convidou 43 amigos para uma festa. O bolo tinha a forma de um polígono regular de 15 lados e havia 15 velas sobre ele. As velas foram colocadas de tal maneira que não havia três velas em linha reta. Paulo dividiu o bolo em pedaços triangulares onde cada corte ligava duas velas ou ligava uma vela a um vértice. Além disso, nenhum corte cruzou outro já realizado. Explique por que, ao fazer isso, Paulo pôde dar um pedaço de bolo a cada um de seus convidados, mas ele próprio ficou sem comer.

12 *Paulo ficou sem bolo – Solução*

Seja n o número de triângulos em que se pode dividir o bolo com as condições dadas. Somaremos os ângulos interiores destes triângulos de duas formas:

- Por um lado, como cada triângulo possui soma dos ângulos internos igual a 180°, a soma de todos os ângulos internos deles é $180^\circ \cdot n$.

- Por outro lado, cada ângulo interno de um triângulo está associado a uma vela ou vértice do bolo. A soma dos ângulos internos associados às velas é $360^\circ \cdot 15$ e a soma dos ângulos internos associados aos vértices coincide com a soma dos ângulos internos do polígono, que é $180^\circ \cdot (15-2)$. Assim, a soma total também é igual a

$$360^\circ \cdot 15 + 180^\circ \cdot (15-2).$$

Portanto,

$$180^\circ \cdot n = 360^\circ \cdot 15 + 180^\circ \cdot (15-2),$$

o que implica $n = 43$. Como são 43 convidados, Paulo fica sem comer!

13 *O Festival de Pesca*

A tabela abaixo mostra alguns dos resultados do último Festival de Pesca de Pirajuba, exibindo quantos competidores q pescaram n peixes para alguns valores de n.

n	0	1	2	3	...	13	14	15
q	9	5	7	23	...	5	2	1

A notícia publicada no jornal da cidade relatou que:

i) o vencedor pescou 15 peixes;

ii) dentre aqueles que pescaram 3 ou mais peixes, a média foi de 6 peixes pescados; e

iii) dentre aqueles que pescaram 12 ou menos peixes a média de peixes pescados foi 5.

a) Qual foi o número total de peixes pescados durante o festival?

b) Quantos competidores pescaram de 4 a 12 peixes?

13 *O Festival de Pesca – Solução*

Sejam N e P, os números de competidores e peixes pescados no evento, respectivamente. Analisando os competidores que pescaram 3 ou mais peixes, temos:

$$N-9-5-7 = N-21 \text{ pescadores e } P-0\cdot 9-1\cdot 5-2\cdot 7 = P-19 \text{ peixes},$$

sendo a média escrita como:

$$\begin{aligned}\frac{P-19}{N-21} &= 6\\ P-19 &= 6N-126\\ P &= 6N-126+19\\ P &= 6N-107.\end{aligned}$$

Observando agora os competidores que pescaram 12 ou menos peixes, obtemos:

$$N-5-2-1 = N-8 \text{ pescadores e } P-13\cdot 5-14\cdot 2-5\cdot 1 = P-98 \text{ peixes}$$

resultando em

$$\begin{aligned}
\frac{P-98}{N-8} &= 5\\
P-98 &= 5N-40\\
P &= 5N-40+98\\
P &= 5N+58\\
6N-107 &= 5N+58\\
6N-5N &= 58+107\\
N &= 165.
\end{aligned}$$

a) Substituindo o valor encontrado de N na equação $P = 6N - 107$, obtemos $P = 6 \cdot 165 - 107 = 883$ peixes no festival.

b) Para o número de competidores que pescaram de 4 a 12 peixes basta fazermos a diferença entre o total de competidores e aqueles que pescaram 0 peixe (9 pescadores), 1 peixe (5), 2 peixes (7), 3 peixes (23), 13 peixes (5), 14 peixes (2) e, finalmente, 15 peixes (1):

$$165 - 9 - 5 - 7 - 23 - 5 - 2 - 1 = 113.$$

14 *Sobre rios, correntezas e quem chega primeiro?!*

a) Helena e Gabriel pulam, simultaneamente, de uma jangada em um rio e nadam em direções opostas. Gabriel nada rio abaixo seguindo a corrente e Helena nada rio acima contra a corrente, possivelmente a uma velocidade diferente. Depois de 5 minutos, eles viram e voltam para a jangada, cada um mantendo uma velocidade constante durante todo o tempo. Quem chega primeiro? (Durante esse tempo, a jangada estava ancorada, ou seja, permaneceu parada, apesar da correnteza.)

b) Em sua velocidade usual, um homem desce um rio de 15 km de comprimento em 5 horas a menos que o tempo que ele gasta nadando no mesmo rio percorrendo o caminho contrário. Se ele dobrar a sua velocidade usual, ele passa a descer o rio gastando apenas 1 hora a menos que o tempo gasto na volta. Considerando que a velocidade da correnteza do rio se mantém constante durante os trajetos, qual o seu valor em km/h?

$\boxed{14}$ *Sobre rios, correntezas e quem chega primeiro?! – Solução*

a) A distância percorrida por Gabriel no tempo de 5 minutos foi $D_G = (V_G + V_C)\cdot 5$, em que V_G e V_C são as velocidades de Gabriel e da correnteza, respectivamente. Já Helena percorreu $D_H = (V_H - V_C)\cdot 5$, com V_H a velocidade dela. Na volta, o tempo t_G de Gabriel será $D_G = (V_G - V_C)\cdot t_G$ e t_H de Helena será $D_H = (V_H + V_C)\cdot t_H$. Perceba que

$$\begin{aligned}(V_H - V_C)\cdot 5 &= (V_H + V_C)\cdot t_H\\ t_H &= 5\cdot\frac{V_H - V_C}{V_H + V_C}\\ &< 5.\end{aligned}$$

Além disso, temos

$$\begin{aligned}(V_G + V_C)\cdot 5 &= (V_G - V_C)\cdot t_G\\ t_G &= 5\cdot\frac{V_G + V_C}{V_G - V_C}\\ &> 5.\end{aligned}$$

Como $t_H < t_G$, Helena chega antes.

b) Sejam c e v as velocidades da correnteza do rio e do homem, respectivamente, em km/h. O homem leva $\dfrac{15}{v+c}$ minutos, nadando a favor da correnteza e $\dfrac{15}{v-c}$ minutos, nadando contra a correnteza. Assim, os dados do enunciado podem ser traduzidos no seguinte sistema:

$$\begin{cases}\dfrac{15}{v+c} = \dfrac{15}{v-c} - 5\\[2ex] \dfrac{15}{2v+c} = \dfrac{15}{2v-c} - 1.\end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por $(v^2 - c^2)$ e a segunda por $(4v^2 - c^2)$, obtemos

$$\begin{cases}15(v-c) = 15(v+c) - 5(v^2 - c^2)\\[2ex] 15(2v-c) = 15(2v+c) - (4v^2 - c^2).\end{cases}$$

Por comparação, segue que

$$5(v^2 - c^2) = (4v^2 - c^2),$$

ou seja,

$$v^2 = 4c^2.$$

Usando uma das equações, chegamos a

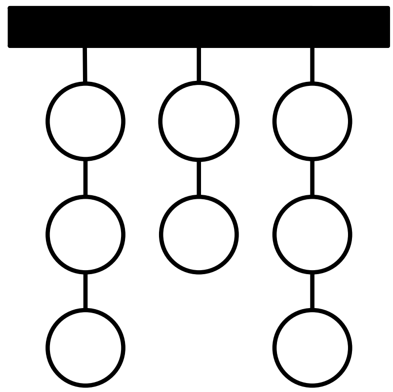
$$\begin{aligned}15(v-c) &= 15(v+c) - 5(v^2 - c^2)\\ -15c &= 15c - 5\cdot 3c^2\\ 15c^2 - 30c &=\\ c^2 - 2c &= 0.\end{aligned}$$

Portanto, a velocidade da corretenza é 2km/h (única solução positiva).

15 *Acertando os alvos*

Num concurso de tiros, 8 alvos são arrumados em duas colunas com 3 alvos e uma coluna com 2 alvos. As regras são:

- O atirador escolhe livremente em qual coluna atirar.
- Ele deve tentar o alvo mais baixo ainda não acertado.



a) Se o atirador desconsiderar a segunda regra, de quantos modos ele poderá escolher apenas 3 posições dos 8 discos distintos para atirar?

b) Se as regras forem cumpridas, então, de quantas maneiras os 8 alvos podem ser acertados?

15 *Acertando os alvos – Solução*

a) Se x, y e z são as posições dos alvos, em princípio, o atirador possui 8 escolhas para x, $8-1=7$ para y, pois não podemos repetir a posição já escolhida, e $8-2=6$ escolhas para z, pois não podemos repetir nenhuma das duas posições já selecionadas. Isso dá $8\cdot7\cdot6$ escolhas. Entretanto, as escolhas

$$xyz, xzy, yxz, yzx, zxy, zyx$$

produzem o mesmo conjunto de posições escolhidas. Para evitar contangens repetidas, basta dividirmos a contagem anterior pelo número de vezes que cada conjunto de posições foi contado, ou seja, o número total de escolhas é

$$\frac{8\cdot7\cdot6}{6}=56.$$

Em geral, o número de maneiras de escolhermos 3 objetos em um conjunto com n objetos distintos é

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{6}.$$

b) Suponha que as colunas estejam marcadas com as letras A, B, e C. Cada sequência de tiros pode ser codificada com uma disposição linear dessas letras seguindo a ordem dos tiros da esquerda para a direita, formando uma palavra com 3 letras A, 2 letras B e 3 letras C. Por exemplo, $AABCCCBA$, significa que iremos atirar duas vezes na primeira coluna, uma vez na segunda, três vezes na terceira, mais uma vez na segunda e, finalmente, uma vez na primeira. A ordem dos tiros em cada coluna está determinada pelas regras do concurso. Como existe uma correspondência entre essas palavras e a distribuição de tiros, basta contarmos o número de palavras distintas que podem ser criadas com essas letras. Para isso, vamos calcular o número de anagramas possíveis usando 3 A's, 2 B's e 3 C's, numa sequência de 8 letras. Observando as 8 posições, podemos escolher as 3 de A's de $\dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} = 56$ maneiras. Dentre os cinco espaços restantes, devemos escolher 2 para os B's e isso pode ser feito de $\dfrac{5 \cdot 4}{2} = 10$ maneiras. As três posições restantes serão ocupadas pelos C's. Portanto, há $56 \cdot 10 = 560$ formas de acertar todos os alvos com as regras impostas.

16 *A conferência de sucesso*

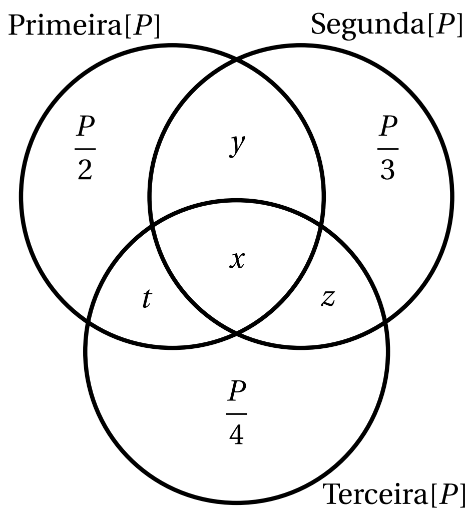
Um ciclo de três conferências teve sucesso constante, isto é, em cada sessão havia o mesmo número de participantes. No entanto, a metade dos que compareceram à primeira não voltou mais; um terço dos que compareceram à segunda conferência assistiu apenas a ela, e um quarto dos que compareceram à terceira não assistiu nem à primeira nem à segunda. Sabendo que havia 300 inscritos e que cada um assistiu a pelo menos uma conferência, determine:

a) Quantas pessoas compareceram a cada conferência?

b) Quantas pessoas compareceram às três conferências?

16 *A conferência de sucesso – Solução*

a) Chamemos de P o número de presentes em cada conferência, x, y, t e z serão os números inteiros dos que foram às três conferências; para às primeira e segunda, apenas; primeira e terceira, apenas; e segunda e terceira, apenas, respectivamente.



Podemos então escrever que:

- $y = 300 - \left(P + \frac{P}{2} + \frac{P}{3}\right) = 300 - \frac{11P}{6}$;
- $z = 300 - \left(P + \frac{P}{3} + \frac{P}{4}\right) = 300 - \frac{19P}{12}$;
- $t = 300 - \left(P + \frac{P}{2} + \frac{P}{4}\right) = 300 - \frac{7P}{4}$;
- $x = \frac{P}{2} - (y + t) = \frac{49P}{12} - 600$.

Como x é um inteiro, P é múltiplo de 12, então existe k inteiro tal que $P = 12k$. Daí, ficamos com $y = 300 - 22k$, $z = 300 - 19k$, $t = 300 - 21k$ e $x = 49k - 600$, todos não negativos, logo:

- $y = 300 - 22k \geq 0 \Rightarrow k \leq 13,63$,
- $z = 300 - 19k \geq 0 \Rightarrow k \leq 15,78$,
- $t = 300 - 21k \geq 0 \Rightarrow k \leq 14,28$,
- $x = 49k - 600 \geq 0 \Rightarrow k \geq 12,24$.

O único inteiro nesse intervalo é $k = 13$. Isso produz $P = 156$

b) Pelo item anterior, $x = 49k - 600 = 49 \cdot 13 - 600 = 37$.

$\boxed{17}$ *O ponto no interior*

No triângulo ABC, retângulo em A, tem-se $AB = 8\,\text{cm}$ e $AC = 6\,textcm$.

a) O ponto P, interior ao triângulo, dista $1\,\text{cm}$ do lado AB e $2\,\text{cm}$ do lado AC. Qual é a distância de P ao lado BC?

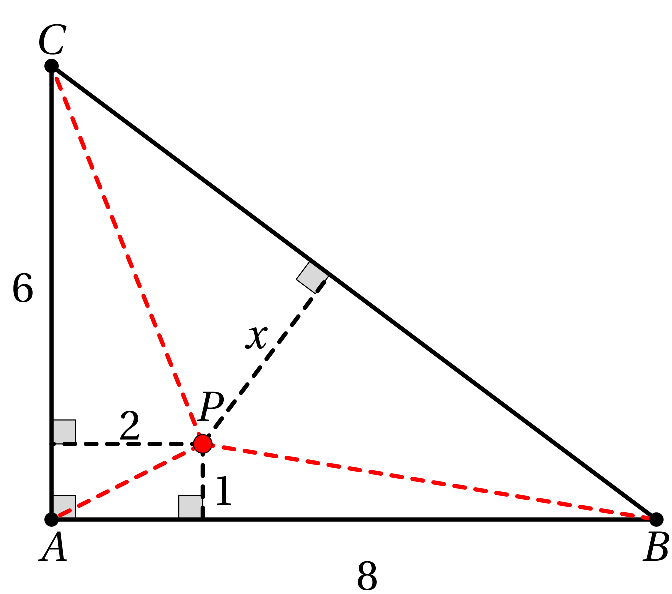
b) Calcule o raio da circunferência que é tangente ao lado AC e aos prolongamentos dos lados AB e BC.

$\boxed{17}$ *O ponto no interior – Solução*

a) Se x é a distância de P ao lado BC e usando a notação (XYZ) para indicar a área do polígono (XYZ), temos

$$\begin{aligned}(APB) + (BPC) + (CPA) &= (ABC)\\ \frac{8\cdot 1}{2} + \frac{10\cdot x}{2} + \frac{6\cdot 2}{2} &= \frac{6\cdot 8}{2}\\ 8 + 10x + 12 &= 48.\end{aligned}$$

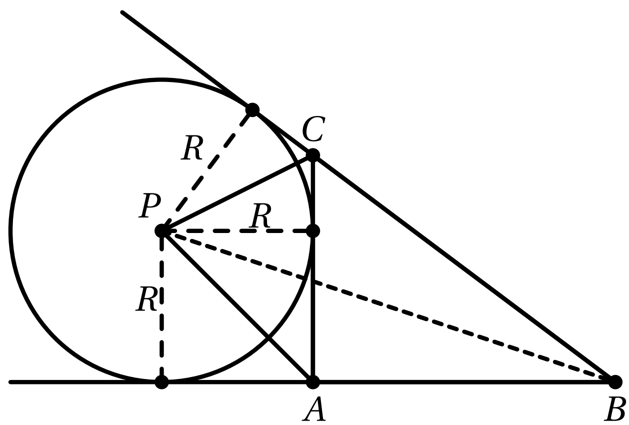
Por fim, chegamos a $x = 2,8\,\text{cm}$.



b) Sendo R o raio da circunferência, temos:

$$\begin{aligned}(APB)+(BPC)-(CPA) &= (ABC)\\ \frac{8\cdot R}{2}+\frac{10\cdot R}{2}-\frac{6\cdot R}{2} &= \frac{6\cdot 8}{2}\end{aligned}$$

Por fim, obtemos $R=4$.



18 *Os livros do pai de João*

O pai de João possui entre 200 e 300 livros em sua biblioteca. Um quinto destes livros está em inglês, um sétimo em francês, um quarto em italiano e o resto são livros em espanhol. Qual o total de livros em espanhol nessa biblioteca?

18 *Os livros do pai de João – Solução*

A quantidade de livros é um múltiplo de 5, 7 e 4. Como esses números não possuem fatores primos em comum, necessariamente deve ser um múltiplo de $5\cdot 7\cdot 4=140$. No intervalo dado, existe um único múltiplo de 140, a saber, o número 280. Portanto, as quantidades de livros que não estão em espanhol é

$$\frac{280}{5}+\frac{280}{7}+\frac{280}{4}=56+40+70=166.$$

Assim, existem $280-166=114$ livros de espanhol.

19 *Amigos no hotel*

Um hotel possui 5 quartos distintos, todos com camas individuais para até 2 pessoas. O hotel está sem outros hóspedes e 5 amigos querem passar a noite nele. De quantos modos os 5 amigos podem escolher seus quartos?

$\boxed{19}$ *Amigos no hotel – Solução*

Analisando apenas a quantidade de pessoas por quarto, sem levar em consideração a ordem, as possíveis distribuições podem ser associadas às listas:

$$(1,1,1,1,1),\ (1,1,1,2) \text{ ou } (2,2,1).$$

Analisaremos agora lista por lista o número de maneiras de distribuir os amigos.

i) Na lista $(1,1,1,1,1)$, todos os amigos ficarão em quartos distintos. Existem 5 escolhas de quarto para o primeiro amigo, 4 para o segundo, 3 para o terceiro e assim por diante. O total de escolhas é:
$$5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 120.$$

ii) Na lista $(1,1,1,2)$, podemos escolher o quarto que terá dois amigos de 5 maneiras e o quarto que não terá ninguém de 4 maneiras. Assim, existem $5\cdot 4 = 20$ maneiras de distribuirmos os amigos nos 5 quartos. Para escolher os dois amigos que ficarão juntos, temos $\dfrac{5\cdot 4}{2} = 10$ escolhas possíveis. Os outros três, a exemplo do item anterior, poderão ser distribuídos nos três quartos de $3\cdot 2\cdot 1 = 6$ modos. O total de distribuições nesse caso é $5\cdot 4\cdot 10\cdot 6 = 1200$.

iii) Na lista $(2,2,1)$, existem 5 modos de escolhermos o quarto que terá apenas um amigo. Dos quatro restantes, podemos escolher os que terão dois hóspedes de $\dfrac{4\cdot 3}{2} = 6$ modos. Uma vez escolhida a quantidade de amigos por quarto, existem $\dfrac{5\cdot 4}{2} = 10$ escolhas de dois amigos para o primeiro quarto duplo e $\dfrac{3\cdot 2}{2} = 3$ escolhas de 2 amigos, dentre os restantes, para o outro quarto duplo. Finalmente, o amigo que sobrou ficará no quarto restante. O total de distribuições nesse caso é
$$5\cdot 6\cdot 10\cdot 3\cdot 1 = 900.$$

Por fim, o total de distribuições é

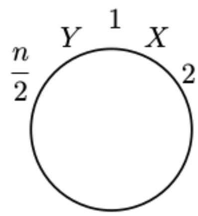
$$120 + 1200 + 900 = 2220.$$

$\boxed{20}$ *Espionagem na corte*

O rei Luis estava desconfiado de alguns de seus cortesãos. Ele fez uma lista completa de cada um dos seus cortesãos e disse a cada um deles para espionar um outro cortesão. O primeiro da lista foi espionar o cortesão que estava espionando o segundo da lista, o segundo da lista foi espionar o cortesão que estava espionando o terceiro da lista, e assim sucessivamente, o penúltimo foi espionar o cortesão que estava espionando o último e o último foi espionar o cortesão que estava espionando o primeiro. Verifique que o rei Luis tinha um número ímpar de cortesãos.

$\boxed{20}$ *Espionagem na corte – Solução*

Seja n o número de cortesãos da lista e suponha que n é par. Coloque-os sentados ao redor de uma mesa circular de modo que cada um esteja espionando o seu vizinho da esquerda.



O cortesão 1 espia o cortesão X que espia o cortesão 2, o cortesão 2 espia o cortesão Z que espia o cortesão 3, e assim sucessivamente até que o cortesão $\frac{n}{2}$ espia o cortesão Y que espia o cortesão $\frac{n}{2}+1$. Como os números $1,2,3,\ldots,n$ devem se alternar sobre o círculo, concluímos que o cortesão $\frac{n}{2}+1$ é igual ao cortesão 1, ou seja, $n=0$. Esse absurdo mostra que n é ímpar.

$\boxed{21}$ *Garotas, garotos e seus vizinhos*

Vinte e cinco garotos e vinte e cinco garotas estão sentados ao redor de uma mesa. Prove que é possível encontrar uma pessoa que tem garotas como vizinhas.

$\boxed{21}$ *Garotas, garotos e seus vizinhos – Solução*

Suponha que não haja uma pessoa que possua duas garotas como vizinhas. Marquemos com -1 cada garoto e com $+1$ cada garota. Cada pessoa ou possui como vizinhos $(-1,-1)$ ou $(+1,-1)$. Somando todos os 50 pares de números associados aos vizinhos de cada pessoa, contaremos a contribuição de cada um duas vezes. Assim ficamos com $x\cdot(-2)+y\cdot(0)=50\cdot(+1)+50\cdot(-1)$, em que x é o número de pessoas que têm 2 garotos como vizinhos e y é o número de pessoas que têm um garoto e uma garota. Notemos ainda que $x+y=50$. A primeira equação produz $x=0$. Substituindo esse valor na segunda equação, podemos concluir que todas as pessoas têm um garoto e uma garota como vizinhos. Considerando duas pessoas vizinhas com $\overline{+1}$ e $\overline{-1}$, a observação anterior nos permite concluir que em alguma ordem os vizinhos delas em ambos os lados serão: $(\ldots,-1,-1,+1,\overline{+1},\overline{-1},-1,+1,+1,\ldots)$. Daí, os garotos e as garotas terão que aparecer sempre aos pares e isso é um absurdo, pois obrigaria que a quantidade de cada um, que é 25, fosse par.

22 *Xadrez no nível Magistral.*

Em torneios de xadrez, geralmente [2] , cada vitória vale 1 ponto, cada empate, $0,5$ ponto e cada derrota, zero ponto. No "Campeonato Magistral" de xadrez participaram apenas **Mestres Internacionais – MI's** e **Grandes Mestres – GM's**. O número de GM's foi dez vezes o número de MI's. Cada enxadrista jogou apenas uma vez contra todos os adversários e assim, se n foi o número de jogadores, então ocorreram $\dfrac{n(n-1)}{2}$ jogos. A soma dos pontos de todos os GM's foi $4,5$ vezes a soma de todos os MI's. Sendo assim, pergunta-se:

a) Quantos Mestres Internacionais participaram desta competição?

b) Quantos Grandes Mestres participaram deste campeonato?

c) Quantos jogos teve o torneio?

22 *Xadrez no nível Magistral. – Solução*

a) Sejam i e g, os números de MI's e GM's, respectivamente. Denote as somas de pontuações de cada categoria por I e G e o total de jogadores por n. Do enunciado, $g = 10i$, $G = 4,5I$ e $n = i + g = i + 10i = 11i$. Agora, o total de jogos (e de pontos disputados [3]) foi

$$\frac{n(n-1)}{2} = \frac{11i \cdot (11i-1)}{2}.$$
$$I + G = I + 4,5I = 5,5I$$

Além disso, sabemos que cada enxadrista jogará $(11i - 1)$ jogos, que é também o máximo de pontos que um jogador pode alcançar [4]. Portanto, podemos escrever que

$$\begin{aligned}\frac{11i \cdot (11i-1)}{2} &= 5,5I\\ 11i \cdot (11i-1) &= 11I\\ i \cdot (11i-1) &= I.\end{aligned}$$

A equação $I = i \cdot (11i - 1)$ pode ser interpretada como se todos os MI's tivessem feito pontuação máxima, pois I é a soma total de pontos deles, $(11i - 1)$ é o número de partidas (e a pontuação máxima) de cada MI e i, o número de MI's. No entanto, isto não poderia acontecer, porque com dois ou mais MI's no torneio, eles se enfrentariam resultando para um deles empate ou derrota. Daí, só havia 1 MI na competição.

[2] Há torneios com a "Pontuação de Bilbao" ou "Regra de Sofia", que dentre outras condições, coloca a vitória valendo 3 pontos, o empate valendo 1 ponto e a derrota valendo zero ponto.

[3] Como cada jogo, independentemente do resultado, soma 1 ao total de pontos do torneio (na vitória do jogador das peças brancas, ele ganhará um ponto e vice-versa, e no empate, ambos ganham meio-ponto).

[4] Caso vença todos os jogos que disputar.

b) Como $g = 10i$, então $g = 10 \cdot 1 = 10$. Dez GM's participaram do torneio.

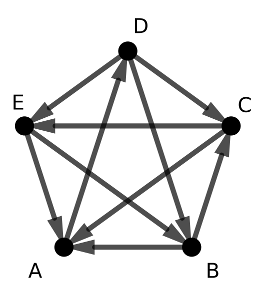
c) E houve $\dfrac{11(11-1)}{2} = 55$ jogos no campeonato.

$\boxed{23}$ *Torneio sem invictos e totalmente derrotados*

Em um torneio com 5 times, não existem empates. De quantos modos podem ocorrer os $\dfrac{5 \cdot 4}{2} = 10$ jogos do torneio de modo que, tanto não tenhamos um time que ganhou todas quanto um time que não perdeu todas as partidas?

$\boxed{23}$ *Torneio sem invictos e totalmente derrotados – Solução*

Represente cada time por um vértice de um pentágono e o resultado de cada jogo por uma seta partindo do jogador que ganhou para o jogador que perdeu.



Como cada partida possui 2 resultados possíveis, existem 2^{10} possíveis resultados para o torneio. Suponha que o jogador A ganhou todas as partidas, então os jogos restantes podem ser escolhidos de 2^6 maneiras. No torneio, apenas um jogador pode ter ganho todas as partidas e assim, como existem 5 jogadores, existem $5 \cdot 2^6$ distribuições das partidas em que um jogador ganhou todas as partidas. Do mesmo modo, existem $5 \cdot 2^6$ distribuições das partidas em que um jogador perdeu todos os seus jogos. Entretanto, esses dois grupos de torneios não são disjuntos. Para contar quantas distribuições são comuns a essas duas contagens, perceba que podemos escolher o jogador que ganhou todas de 5 formas e o jogador que perdeu todas de $5 - 1 = 4$ formas. Feitas essas escolhas, já temos definidos os resultados de 7 jogos. Os 3 jogos restantes podem ser escolhidos de 2^3 e não produzirão outros jogadores com o máximo de vitórias ou o mínimo de derrotas. Portanto, o número de torneios procurados é

$$2^{10} - 2 \cdot 5 \cdot 2^6 + 5 \cdot 4 \cdot 2^3 = 2^5 \cdot 17 = 544$$

24 *As potências sempre têm truques novos!*

a) Qual dos números é maior: $2^{100}+3^{100}$ ou 4^{100}?

b) Sejam x e y números naturais tais que

$$2^x \cdot 3^y = \left(24^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{60}}\right) \cdot \left(24^{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{60}}\right)^2 \cdot \left(24^{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{60}}\right)^3 \cdot \ldots \cdot \left(24^{\frac{1}{60}}\right)^{59}.$$

Determinar o valor de $x+y$.

24 *As potências sempre têm truques novos! – Solução*

a) Perceba que

$$4^{100} = 4^{99}+4^{99}+4^{99}+4^{99} = 3\cdot 4^{99}+4^{99}.$$

Comparemos as parcelas separadamente:

$$\begin{aligned} 4 &> 3 \\ 4^{99} &> 3^{99} \\ 3\cdot 4^{99} &> 3\cdot 3^{99} \\ 3\cdot 4^{99} &> 3^{100} \end{aligned}$$

e

$$4^{99} = 2^{198} > 2^{100}.$$

Somando as desigualdades

$$\begin{array}{rcl} 3\cdot 4^{99} & > & 3^{100} \\ 4^{99} & > & 2^{100}, \end{array}$$

obtemos

$$4^{100} > 3^{100}+2^{100}.$$

b) Observe que

$$\begin{aligned} \left(24^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{60}}\right) \cdot \left(24^{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{60}}\right)^2 \cdot \left(24^{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{60}}\right)^3 \cdot \ldots \cdot \left(24^{\frac{1}{60}}\right)^{59} &= \\ \left(24^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{60}}\right) \cdot \left(24^{\frac{2}{3}+\frac{2}{4}+\frac{2}{5}+\cdots+\frac{2}{60}}\right) \cdot \left(24^{\frac{3}{4}+\frac{3}{5}+\frac{3}{6}+\cdots+\frac{3}{60}}\right) \cdot \ldots \cdot \left(24^{\frac{59}{60}}\right) &= \\ \left(24^{\frac{1}{2}}\right) \cdot \left(24^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}\right) \cdot \left(24^{\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4}}\right) \cdot \left(24^{\frac{1}{5}+\frac{2}{5}+\frac{3}{5}+\frac{4}{5}}\right) \cdot \ldots \cdot \left(24^{\frac{1}{60}+\frac{2}{60}+\cdots+\frac{59}{60}}\right). & \end{aligned}$$

Como $2^x \cdot 3^y = 24^k$, segue que

$$\begin{aligned} k &= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{3}{5} + \frac{4}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{60} + \frac{2}{60} + \cdots + \frac{59}{60}\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2}{2} + \frac{3}{2} + \frac{4}{2} + \cdots + \frac{59}{2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(1+59)\cdot 59}{2} \\ &= 15 \cdot 59. \end{aligned}$$

Logo, $2^x \cdot 3^y = (2^3 \cdot 3^1)^{15\cdot 59}$, ou seja, $x = 45\cdot 59$ e $y = 15\cdot 59$. Portanto, $x + y = 60\cdot 59 = 3540$.

$\boxed{25}$ *A volta dos Repunits*

a) Se $A = \underbrace{111\ldots111}_{2m}$ e $B = \underbrace{444\ldots444}_{m}$, verifique que a soma $A+B+1$ é um quadrado perfeito para qualquer inteiro positivo m.

b) Se $p = \underbrace{111\ldots111}_{l}$ é um número primo, verifique que l também é um número primo.

c) Verifique que se $x = \underbrace{111\ldots111}_{n}$ é divisível por 41, então n é divisível por 5.

d) Se

$$y = \underbrace{\sqrt{111\ldots111}}_{2n \text{ vezes}} \cdot 10^n,$$

encontre o maior inteiro positivo que não é maior que y.

$\boxed{25}$ *A volta dos Repunits – Solução*

a) Observe que $\underbrace{11...11}_{2m} = \dfrac{10^{2m}-1}{9}$, pois

$$\begin{aligned} \underbrace{11\ldots11}_{k} &= \\ 10^k + 10^{k-1} + \cdots + 10^1 + 10^0 &= \\ &= \frac{10^k - 1}{9}. \end{aligned}$$

Assim, temos

$$\begin{aligned}\underbrace{44\ldots44}_{m} &= 4\cdot\underbrace{11\ldots11}_{m}\\ &= 4\cdot\left(\frac{10^m-1}{9}\right).\end{aligned}$$

O que gera

$$\begin{aligned}A+B+1 &=\\ \frac{10^{2m}-1}{9}+4\cdot\frac{(10^m-1)}{9}+\frac{9}{9} &=\\ \frac{10^{2m}-1+4\cdot10^m-4+9}{9} &=\\ \frac{(10^m)^2+2\cdot2\cdot10^m+2^2}{9} &=\\ &=\left(\frac{10^m+2}{3}\right)^2.\end{aligned}$$

Como o número 10^m+2 é múltiplo de 3, pois a soma dos seus algarismos é um múltiplo de 3, a expressão é um quadrado perfeito.

b) Suponha que l é um número composto, ou seja, $l = m\times n$, com $m, n > 1$. Então podemos fatorar p da seguinte forma:

$$x = \underbrace{11\ldots11}_{n}\cdot 1\underbrace{00\ldots0}_{n-1}1\ldots1\underbrace{00\ldots0}_{n-1}1,$$

com $m-1$ grupos de zeros. Portanto, p não seria primo. Vale comentar que o recíproco não é verdadeiro, pois 111 possui uma quantidade de dígitos dada por um número primo, mas $111 = 3\cdot37$ é um número composto.

c) Pelo Algoritmo da Divisão, podemos escrever $n = 5q+r$, com $r\in\{0,1,2,3,4\}$, e

$$\begin{aligned}\underbrace{11\ldots1}_{n\text{ vezes}} &=\\ \underbrace{11\ldots1}_{5q\text{ vezes}}\underbrace{00\ldots}_{r\text{ vezes}}+\underbrace{11\ldots1}_{r\text{ vezes}} &=\\ \underbrace{11\ldots1}_{5\text{ vezes}}100001\ldots00001+\underbrace{11\ldots1}_{r\text{ vezes}}.\end{aligned}$$

Como $11111 = 41\cdot271$, o resto que x deixa por 41 é o mesmo que $\underbrace{11\ldots1}_{r\text{ vezes}}$. Analisando a divisão dos números do conjunto $\{1,11,111,1111,1111\}$ por 41, notamos que nenhum deles é divisível por 41. Portanto, para que x seja múltiplo de 41 devemos ter $r = 0$ e assim n deve ser um múltiplo de 5.

d) Seja $k = \underbrace{111\ldots111}_{2n \text{ vezes}}$, então

$$\begin{array}{rcl} 9k & < & 10^{2n} \\ 9k^2 & < & 10^{2n}k \\ & = & y^2. \end{array}$$

Daí, extraindo a raiz quadrada da última desigualdade, temos $3k < y$. Por outro lado,

$$\begin{array}{rcl} 9k+6 & > & 10^{2n}+1 \\ 9k^2+6k & > & 10^{2n}k+k \\ 9k^2+6k+1 & > & 10^{2n}k+k+1 \\ & > & 10^{2n}k \\ & = & y^2. \end{array}$$

Daí segue que $(3k+1)^2 > y^2$, ou $3k+1 > y$. Portanto,

$$3k < y < 3k+1$$

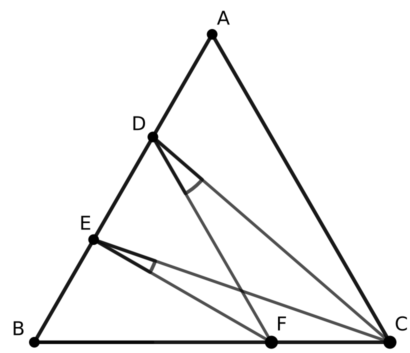
e o maior inteiro que não é maior que y é

$$3k = \underbrace{333\ldots33}_{2n \text{ vezes}}.$$

Observação: Um número da forma $\underbrace{111\ldots111}_{n \text{ vezes}}$ é comumente chamado de Repunit, termo que deriva da expressão "**rep**eated **unit**" e que foi cunhado, em 1966, por Albert H. Beiler no seu livro **Recreations in the Theory of Numbers**.

26 *A soma dos ângulos no triângulo equilátero*

Os pontos D e E dividem o lado AB do triângulo equilátero ABC em três partes iguais, D entre A e E. O ponto F está sobre o lado BC de modo que $CF = AD$. Encontre a soma dos ângulos $\angle CDF + \angle CEF$.



26 *A soma dos ângulos no triângulo equilátero – Solução*

Sejam $\angle CDF = \alpha$ e $\angle CEF = \beta$. Como $BF = BD = 2/3 \cdot AB$ e $\angle ABC = 60°$, segue que $\triangle BDF$ é equilátero. Além disso, como E é ponto médio de BD, temos que EF é altura e bissetriz relativa ao vértice F. Assim, $\angle BFE = 30°$. Pelo Teorema do Ângulo Externo, segue que $\angle BCE = 30° - \beta$. Novamente pelo Teorema do Ângulo Externo, como $\angle BFD = 60°$, segue que $\angle ECD = 30° + \beta - \alpha$. Finalmente, como $BE = AD$, $BC = AC$ e $\angle CBE = \angle CAD = 60°$, podemos concluir que $\triangle CBE \equiv \triangle CAD$ e assim $\angle ACD = \angle BCE = 30° - \beta$. Daí

$$\begin{aligned} \angle ACB &= \angle BCE + \angle ECD + \angle ACD \\ &= (30^\circ - \beta) + (30^\circ + \beta - \alpha) + (30^\circ - \beta) \\ &= 90 - (\alpha + \beta). \end{aligned}$$

Daí,

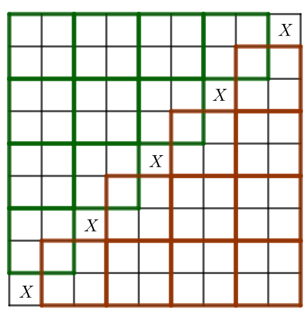
$$\angle CDF + \angle CEF = \alpha + \beta = 30^\circ.$$

27 *O jogo no tabuleiro*

Maria e Pedro jogam em um tabuleiro 9×9. Maria começa pintando de vermelho 46 quadradinhos do tabuleiro. Em seguida, Pedro deve escolher um quadrado 2×2. Se o quadrado escolhido por Pedro tem 3 ou mais casinhas pintadas de vermelho, ele vence o jogo. Caso contrário, vence Maria. Qual dos dois pode sempre garantir a vitória independentemente da jogada do adversário?

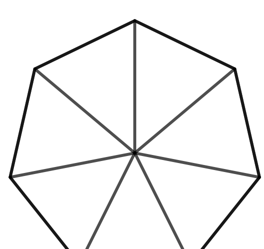
27 *O jogo no tabuleiro – Solução*

Pedro vence o jogo. Divida o tabuleiro em 20 tabuleiros 2×2 como indicado na figura abaixo. Existem 5 quadradinhos do tabuleiro que não fazem parte desses tabuleiros e que estão indicados com a letra X. Com a pintura dos 46 quadradinhos, pelo menos $46 - 5 = 41 = 2 \cdot 20 + 1$ serão colocados nesses 20 tabuleiros 2×2. Pelo Princípio da Casa dos Pombos, independente de como eles estejam distribuídos, pelo menos 3 deles estarão no mesmo tabuleiro 2×2.



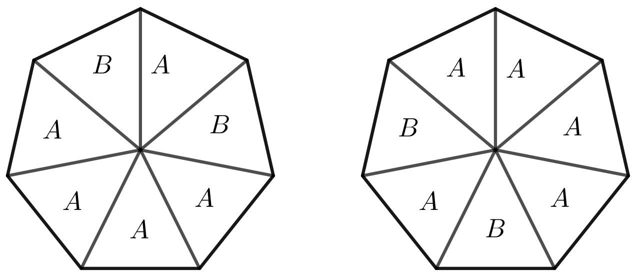
28 *A roleta heptacular*

Uma roleta circular possui 7 seções de igual tamanho e cada uma delas será pintada com uma dentre duas cores. Duas colorações são consideradas equivalentes se uma pode ser rotacionada para produzir a outra. De quantas maneiras não equivalentes a roleta pode ser pintada?



$\boxed{28}$ *A roleta heptacular – Solução*

Sem considerar as rotações, como cada setor admite duas possibilidades de pinturas, existem 2^7 preenchimentos das 7 seções com duas cores. Cada um desses preenchimentos pode ser rotacionado de 6 formas e gerar outros 6 preenchimentos equivalentes. Por exemplo, as cores são representadas por A e B, então as pinturas a seguir são equivalentes



$ABAAAAB$ $\qquad$ $AAABABA$

No desenho anterior, cada pintura está associada a uma palavra que representa a leitura das cores no sentido horário e a lista completa de pinturas equivalentes é:

$$\begin{gathered} ABAAAAB \\ BAAAABA \\ AAAABAB \\ AAABABA \\ AABABAA \\ ABABAAA \\ BABAAAA. \end{gathered}$$

Esses preenchimentos obtidos por rotação serão distintos se nem todas as cores escolhidas forem a mesma. Só existem duas pinturas em que todas as seções possuem a mesma cor. Retirando-as do total, as demais podem ser agrupadas em conjuntos de 7 pinturas equivalentes entre si. Portanto, o total de pinturas não equivalentes é

$$\frac{2^7-2}{7}+2=20.$$

29 *O Torneio Intergalático*

Considere um torneio de xadrez envolvendo terráqueos e alienígenas em que cada jogador joga contra todos os outros exatamente uma vez. Ao final do torneio, cada jogador obteve metade dos pontos que conquistou jogando contra terráqueos e metade jogando contra alienígenas. Sendo t e a os números de terráqueos e alienígenas, respectivamente, responda:

a) Qual o total de jogos desse torneio, em função de t e a?

b) Nesse torneio, cada vitória vale 1 ponto, cada empate vale $0,5$ ponto e cada derrota vale zero ponto. Qual o total de pontos dos terráqueos em função de t e a?

c) Verifique que o número total de jogadores do torneio é um quadrado perfeito.

29 *O Torneio Intergalático – Solução*

a) Sendo $n = t + a$ o total de enxadristas presentes, com cada dupla se enfrentando em partidas únicas, o torneio teve

$$\frac{n(n-1)}{2} = \frac{(t+a)(t+a-1)}{2} \text{ partidas.}$$

b) Se somarmos a pontuação que cada atleta recebeu por jogo (independentemente do resultado) obteremos sempre a soma 1 por jogo. Assim, existe uma relação direta entre a quantidade de jogos e os pontos distribuídos. Como cada terráqueo ganhou metade dos seus pontos jogando contra adversário da mesma raça e outra metade contra alienígenas, o total de pontos que os terráqueos tiveram contra terráqueos é igual ao número de pontos que os terráqueos obtiveram contra os extraterrestres. Cada terráqueo jogou $\dfrac{t(t-1)}{2}$ partidas contra terráqueos (total de pontos dos terráqueos contra terráqueos) e $\dfrac{a(a-1)}{2}$ contra aliens (total de pontos dos terráqueos contra os ET's). O mesmo raciocínio vale para os alienígenas. Portanto, o total de pontos dos terráqueos foi de

$$\frac{t(t-1)}{2} + \frac{a(a-1)}{2}$$

.

c) Em virtude dos itens anteriores, a quantidade de pontos distribuídas coincide com o total de jogos $\dfrac{n(n-1)}{2}$ e, além disso, é igual a soma dos pontos de todos os terráqueos contra seus idênticos e contra os de outra raça, mais a soma de todos os pontos obtidos pelos alienígenas entre si e contra os terráqueos. Sendo assim, podemos escrever que:

$$\begin{aligned}
\frac{(t+a)(t+a-1)}{2} &= 2\cdot\frac{t(t-1)}{2}+2\cdot\frac{a(a-1)}{2}\\
(t^2+ta-t+at+a^2-a) &= 2(t^2-t+a^2-a)\\
a^2-2at+t^2 &= t+a\\
(a-t)^2 &= n.
\end{aligned}$$

Assim, conseguimos escrever n como um quadrado perfeito.

$\boxed{30}$ *As pinturas dos quadrados*

Dois quadrados de um tabuleiro 7×7 são pintados de amarelo e o resto é pintado de verde. Dois esquemas de cores são equivalentes se um pode ser obtido do outro aplicando uma rotação no plano do tabuleiro. Quantos esquemas de cores não equivalentes podemos obter?

$\boxed{30}$ *As pinturas dos quadrados – Solução*

Como o tabuleiro possui $7\cdot7=49$ quadrados, existem $\dfrac{49\cdot48}{2}=1176$ maneiras de escolhermos dois deles para receberem a cor amarela. Quando eles não são diametralmente opostos, podemos rotacioná-los em 90° três vezes e obter configurações que geram esquemas equivalentes. Para contarmos os pares de quadrados diametralmente opostos, escolha um quadrado distinto do centro de $49-1=48$ formas. O outro quadrado está completamente determinado por essa escolha. Entretanto, como a ordem de escolha entre eles é irrelevante, o total de pares é $\dfrac{49-1}{2}=24$. Cada um desses 24 esquemas pode ser rotacionado uma vez por 180° gerando outro equivalente. Portanto, o número de esquemas é

$$\frac{1176-24}{4}+\frac{24}{2}=300.$$

31 *Os elos da corrente*

João possui um único pedaço de corrente com n elos, cada um pesando 1 g. Cada vez que um elo de algum pedaço de corrente é quebrado, obtemos 3 pedaços. Por exemplo, se um pedaço possui 9 elos e quebramos o quarto, passaremos a ter pedaços com as seguintes quantidades de elos: 3, 1 e 5. Um elo quebrado continua pesando 1 g.

a) Se $n = 8$, mostre um exemplo de como quebrarmos apenas 2 elos e obtermos pedaços que possam ser reunidos de modo a realizarmos qualquer peso de 1 g até 8 g.

b) Se $n = 16$, mostre um exemplo de como quebrarmos apenas 2 elos e obtermos pedaços que possam ser reunidos de modo a realizarmos qualquer peso de 1 g até 16 g.

c) Se $n = 63$ g, mostre um exemplo de como quebrarmos apenas 3 elos e obtermos pedaços que possam ser reunidos de modo a realizarmos qualquer peso de 1 g até 63 g.

d) Se $n = k \cdot 2^k - 1$, mostre um exemplo de como quebrarmos apenas $k-1$ elos e obtermos pedaços que possam ser reunidos de modo a realizarmos qualquer peso de 1 g até n g.

31 *Os elos da corrente – Solução*

a) Basta quebrarmos o primeiro e o sexto elos obtendo os pedaços de comprimentos: 1, 4, 1 e 2. Para realizarmos qualquer peso de 1 g a 8 g, considere as somas de pedaços:

$$\begin{aligned}
1 &= 1\\
2 &= 2\\
3 &= 1+2\\
4 &= 4\\
5 &= 1+4\\
6 &= 2+4\\
7 &= 1+2+4\\
8 &= 1+2+4+1.
\end{aligned}$$

b) Basta quebrarmos o terceiro e o oitavo elos obtendo os pedaços de comprimentos: 2, 1, 4, 1 e 8. Usando as somas do item anterior, podemos obter os pesos de 1 g até 8 g. Acrescentando a essas somas a parcela correspondente ao pedaço de 8 elos, poderemos obter as somas de 9 g até 16 g.

c) Basta quebrarmos o quinto, décimo quarto e trigésimo elos, obtendo os pedaços de comprimentos 4, 1, 8, 1, 16, 1 e 32. Quando dividimos qualquer número n do conjunto $\{1,2,3,\ldots,63\}$ por 4, obtemos um quociente q e um resto $r \in \{0,1,2,3\}$, ou seja, $n = 4q+r$. Os pedaços de peso 1 são suficientes para a realização de qualquer valor de r. Os pedaços restantes são todos os quádruplos dos números do conjunto $\{1,2,4,8\}$. Como vimos nos primeiros itens, com pedaços de pesos 1, 2, 4 e 8 podemos formar qualquer inteiro de 1 até 15. Assim, com os seus quádruplos, podemos formar qualquer múltiplo de 4 até 60, que somados a $\{0,1,2,3\}$ (pesos para os pedaços de 1 g), podemos obter qualquer peso de 1 g a 63 g

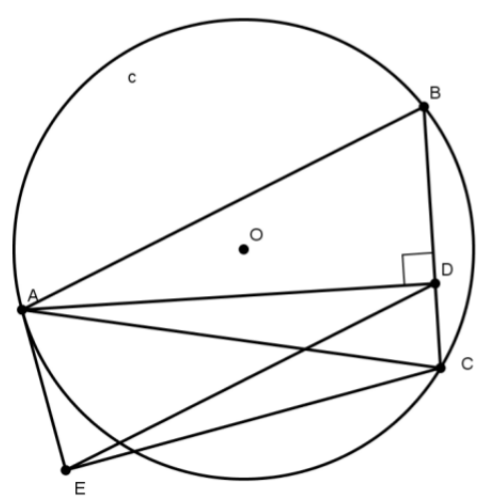
d) Basta quebrar a corrente com n elos para obter os pedaços indicados pelos parêntesis da soma abaixo:

$$(k)+(1)+(2k)+(1)+(4k)+(1)+(8k)+(1)+\ldots+(1)+(k\cdot 2^{k-1}) = (k-1)+k(2^k-1) = k\dot{2}^k-1.$$

Observação: Veja que não conseguiríamos com menos de $k-1$ pedaços, pois qualquer quantidade r de quebras, com $r < k-1$, só poderia gerar r parcelas de peso 1 g e no máximo $r+1$ parcelas de outros tamanhos. As parcelas não associadas às quebras geram no máximo 2^{r+1} somas. Combinando essas somas com o possível acréscimo de até r elos de peso 1 g, teremos no máximo $(r+1)\cdot 2^{r+1} < (r+1)\cdot 2^k < k\cdot 2^k$. Daí o número máximo de somas é menor ou igual a $k\cdot 2^k - 2 < k\cdot 2^k - 1 = n$.

32 *O segmento tangente*

Na figura a seguir, o segmento AE é tangente à circunferência c em A. O segmento AD é perpendicular ao segmento BC e o segmento DE é paralelo ao segmento AB. Além disso, $\angle EAC = 60°$.



a) Determine o valor de $\angle EDC$.

b) Encontre a medida do ângulo $\angle AEC$.

32 *O segmento tangente – Solução*

a) Como AE é tangente à circunferência c, temos $\angle EAC = \angle ABC$ (ângulo de segmento e ângulo inscrito olhando para o mesmo arco). Dado que DE e AB são paralelos, os ângulos correspondentes $\angle ABC$ e $\angle EDC$ são congruentes, ou seja, $\angle EDC = 60^\circ$.

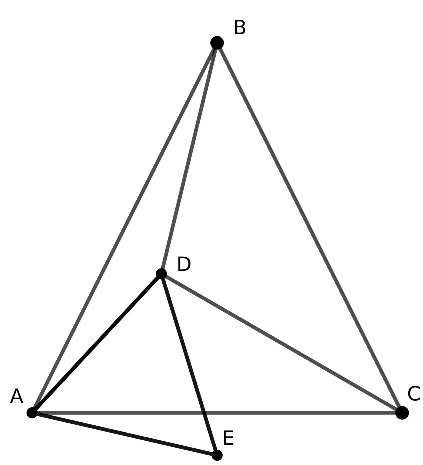
b) Considere a circunferência d de diâmetro AC. Seja P a interseção da reta AE com a circunferência d. Como $\angle PAC$ e $\angle PDC$ estão inscritos no mesmo arco, devemos ter

$$\angle PAC = \angle PDC = 60^\circ.$$

Do item anterior, $\angle PDC = \angle EDC$ e assim P também está na reta suporte do segmento ED. Portanto, P é a interseção das retas AE e ED, ou seja, $P = E$. Finalmente, dado que AC é diâmetro de d e E está em d, segue que $\angle AEC = 90^\circ$.

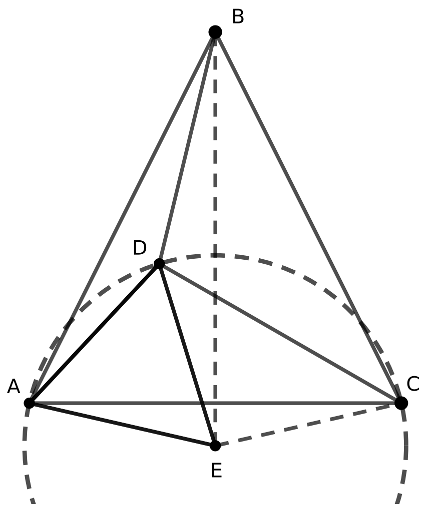
33 *Uma construção triangular*

Na figura a seguir, ABC é um triângulo isósceles com $BA = BC$. O Ponto D está em seu interior de modo que $\angle ABD = 13^\circ$, $\angle ADB = 150^\circ$ e $\angle ACD = 30^\circ$. Além disso, ADE é um triângulo equilátero. Determine o valor do ângulo $\angle DBC$.



33 *Uma construção triangular – Solução*

Trace os segmentos indicados na figura a seguir.

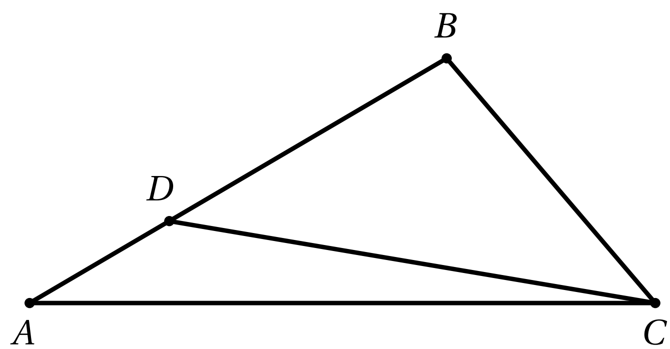


Como $\triangle ADE$ é equilátero, segue que $\angle ADE = 60^\circ$. Daí, $\angle BDE = 360^\circ - 150^\circ - 60^\circ = 150^\circ$. Além disso, de $AD = DE$, $BD = BD$ e $\angle ADB = \angle BDE$, segue pelo caso de congruência LAL que $\triangle ABD \equiv \triangle BDE$. Assim, $AB = BE$ e $\angle ABE = 2 \cdot \angle ABD = 26^\circ$. Considere agora o circunferência k que passa por A, D e C. O ângulo $\angle ACD$ está inscrito no arco correspondente a corda AD e assim o centro dessa circunferência produz um ângulo central de 60° em relação a essa corda. Ou seja, E é o centro de k. Portanto $AE = ED = EC$. Finalmente, de $BA = BC$, como os lados dos triângulos ABE e BCE são congruentes, o caso de congruência LLL produz $\triangle ABE \equiv \triangle BCE$ e isso nos dá $\angle ABE = \angle EBC$. Logo,

$$\angle DBC = \angle DBE + \angle EBC = 13^\circ + 26^\circ = 39^\circ.$$

$\boxed{34}$ *Triângulos isósceles e uma construção geométrica*

O triângulo ABC abaixo tem um ponto D no seu lado AB, tal que $AB = CD$, $A\hat{B}C = 100°$ e $D\hat{C}B = 40°$.



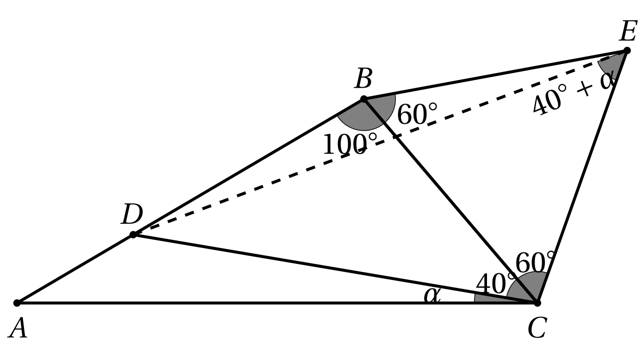
a) Qual a medida do ângulo $B\hat{D}C$?

b) Qual a medida do ângulo $A\hat{C}D$?

$\boxed{34}$ *Triângulos isósceles e uma construção geométrica – Solução*

a) Analisando a soma dos ângulos internos do triângulo $\triangle BDC$, temos $100°+40°+\angle BDC = 180°$, ou seja, $\angle BDC = 40°$.

b) Em virtude do item anterior, $\triangle BDC$ é isósceles de base CD e então $BC = BD$. Construa o triângulo auxiliar $\triangle BCE$, equilátero, e denote $\angle ACD = \alpha$.



Por construção, $\angle DCE = 100°$ e $CE = BC$. De $AB = DC$ e $\angle ABC = \angle DCE$, podemos escrever $\triangle ABC \equiv \triangle DCE$, pelo caso LAL Daí, chegamos a

$$\angle ACB = \angle DEC = 40° + \alpha.$$

Como $\triangle BCE$ é equilátero ($BC = CE = EB$); e $\triangle BCD$ é isósceles ($BC = BD$), concluímos que $\triangle BDE$ é isósceles com $BE = BD$ e base DE. Portanto, seus ângulos da base são iguais a $10°$. Por fim, como $\angle BEC = 60° = 10° + 40° + \alpha$, concluímos que $\alpha = 10°$.

35 *Algumas frações bem pequenas!*

a) Considere um primo p que divide $10^n + 1$ para algum n inteiro positivo. Por exemplo, $p = 7$ divide $10^3 + 1$. Analisando o período principal da representação decimal de $\frac{1}{p}$, verifique que o número de vezes que o dígito i aparece é igual ao número de vezes que o dígito $9 - i$ aparece para cada $i \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$.

b) Considere um número primo p que não divide 10 e suponha que o período da representação decimal de $\frac{1}{p}$ seja $2k$. É sempre possível quebrarmos o período em dois números que somam $10^k - 1$? Por exemplo, o período de $\frac{1}{7}$ tem tamanho $6 = 2k$, pois é igual à 142857. Veja que $142 + 857 = 999 = 10^3 - 1 = 10^k - 1$.

c) Sendo

$$x = \frac{1}{1998} + \frac{1}{19998} + \frac{1}{199998} + \ldots,$$

ao escrevermos $2x$ como um número decimal, qual será o 59° algarismo após a vírgula?

35 *Algumas frações bem pequenas! – Solução*

a) Podemos escrever $10^n + 1 = p \cdot a$ onde a é um número com não mais que n dígitos na base 10, digamos $a = a_1 a_2 \ldots a_n$. Queremos dizer com isso que cada número a_i é um dos dígitos de a. Mesmo que ele possua estritamente menos que n dígitos, podemos colocar alguns a_i's da esquerda como sendo 0. Temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p} &= \frac{a}{a \cdot p} \\
&= \frac{a}{10^n + 1} \\
&= \frac{a(10^n - 1)}{10^{2n} - 1} \\
&= \frac{[10^n(a-1) + (10^n - 1) - (a-1)]}{10^{2n} - 1}.
\end{aligned}$$

O número $10^n - 1$ é constituído por n números iguais a 9 e a diferença $(10^n - 1) - (a - 1)$ reduz cada um desses dígitos 9 por um dígito de a. Assim, a representação decimal do numerador é:

$$a_1 a_2 \ldots a_{n-1}(a_n - 1)(9 - a_1)(9 - a_2)\ldots(9 - a_{n-1})(10 - a_n).$$

O número anterior representa o período da representação de $\frac{1}{p}$ e cada dígito i pode ser pareado com um outro dígito da forma $9 - i$. Assim, as quantidades de aparições de tais dígitos são iguais. No exemplo do enunciado, o período de $1/7$ é 142857 e temos os seguintes pareamentos:

$$\begin{array}{ccc} 1 & \rightarrow & 8 \\ 4 & \rightarrow & 5 \\ 2 & \rightarrow & 7. \end{array}$$

b) Como $10^{2k}-1=(10^k-1)(10^k+1)$ e p é primo, um dentre 10^k-1 e 10^k+1 é múltiplo de p. Não podemos ter 10^k-1 múltiplo de p, pois caso contrário poderíamos escrever $\dfrac{1}{p}=\dfrac{(10^k-1)/p}{10^k-1}$ e obteríamos uma dízima periódica com período menor do que $2k$. Sendo assim, p divide 10^k+1 e podemos repetir a solução do item anterior para concluir que o período da representação decimal de $1/p$ é da forma:

$$a_1a_2\ldots a_{k-1}(a_k-1)(9-a_1)(9-a_2)\ldots(9-a_{k-1})(10-a_k).$$

Somando o número formado pelos k primeiros dígitos com o número formado pelos k últimos, obtemos $\underbrace{99\ldots9}_{k\text{ vezes}}=10^k-1$.

c) Perceba que

$$\begin{aligned} 2x &= \frac{1}{999}+\frac{1}{9999}+\frac{1}{99999}+\ldots \\ &= 0,\overline{001}+0,\overline{0001}+0,\overline{00001}+\ldots. \end{aligned}$$

Na primeira parcela, o 1 aparece nas ordens múltiplas de três, na segunda, nas múltiplas de quatro, na terceira, nas múltiplas de cinco, e assim sucessivamente. Ao somarmos as duas primeiras dízimas $0,\overline{001}$ e $0,\overline{0001}$, teremos a dízima periódica

$$0,001101011002\ldots$$

Nas posições múltiplas de apenas um dos números do conjunto $\{3,4\}$, teremos o número 1. Nas que são simultaneamente múltiplas de 3 e 4, teremos 2 e nas demais o número 0. Além disso, a representação será periódica com período de tamanho 12. Para descobrirmos os algarismos em uma dada posição na soma precisamos estudar quantos divisores maiores que 2 a posição possui. Dentre os números naturais menores que 60, nenhum possui mais de 8 divisores inteiros positivos maiores que 2. Assim, na soma de dízimas:

$$0,\overline{001}+0,\overline{0001}+0,\overline{00001}+\ldots+0,\overline{\underbrace{00\ldots01}_{59\text{ dígitos}}}.$$

não ocorrerá a operação de "vai um" nas primeiras 59 casas e o algarismo na posição 59 será 1, pois 59 possui apenas um divisor maior que 2. As outras posições terão números menores ou iguais a 8, pois 48 é o número natural menor que 60 que mais possui divisores positivos e apenas 8 deles são maiores que 2. Como 60 possui 10 divisores positivos maiores que 2, a saber, $3,4,5,6,10,12,15,20,30$ e 60, ocorrerá a operação de "vai um" ao somarmos essa dízima com as anteriores e assim a casa na posição 59 terá o acréscimo de uma unidade e passará a ter o algarismo 2. Resta verificarmos qual a contribuição das demais dízimas nas posições de ordem maior que 60, levando em conta a operação de "vai um". A demais casas dessas dízimas e das restantes que ainda não foram contabilizadas, poderão contribuir através da operação de "vai um" no algoritmo da soma com um número estimado por

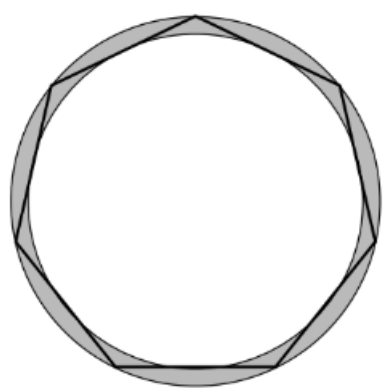
$$\begin{aligned}
\frac{60}{10^{61}} + 0,\underbrace{\overline{00\ldots01}}_{\text{61 dígitos}} + 0,\underbrace{\overline{00\ldots01}}_{\text{62 dígitos}} + \ldots &<\\
\frac{60}{10^{61}} + \frac{1}{9\cdot 10^{60}} + \frac{1}{9\cdot 10^{61}} + \ldots &=\\
\frac{60}{10^{61}} + \frac{1}{81\cdot 10^{59}} &<\\
\frac{1}{10^{59}}.
\end{aligned}$$

Portanto, não precisaremos contabilizar outras contribuições na posição 59 após a vírgula e o seu algarismo na soma é 2.

ENUNCIADOS E SOLUÇÕES DO NÍVEL 3

1 *A área do anel*

Um heptágono regular está imprensado entre dois círculos, como mostra a figura abaixo. Seus vértices estão inscritos na circunferência maior e seus lados são tangentes a circunferência menor. Os lados do polígono medem 2 cm e são tangentes ao círculo menor e, além disso, seus vértices pertencem à circunferência maior. Sendo assim, qual a área do anel sombreado da figura?



1 *A área do anel – Solução*

Se R_1 e R_2 denotam os raios do círculo externo e interno ao heptágono, respectivamente, podemos concluir que a área procurada é $\pi \cdot R_1^2 - \pi \cdot R_2^2$. O apótema do heptágono é igual a R_2 e forma com metade do lado e o raio R_1 um triângulo retângulo. Daí, pelo Teorema de Pitágoras, temos $R_1^2 = 1^2 + R_2^2$. Assim, a área procurada é π.

2 *A solução do sistema*

Se (x, y) é uma solução do sistema

$$\begin{cases} xy = 6 \\ x^2y + xy^2 + x + y = 63 \end{cases}$$

determine o valor de $x^2 + y^2$.

2 *A solução do sistema – Solução*

Temos

$$\begin{aligned} 63 &= x^2y + xy^2 + x + y \\ &= xy(x+y) + (x+y) \\ &= 6(x+y) + (x+y) \\ &= 7(x+y). \end{aligned}$$

Portanto, $x + y = 9$. Assim,

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (x+y)^2 - 2xy \\ &= 81 - 12 \\ &= 69. \end{aligned}$$

3 *A soma dos dígitos*

Seja $S(n)$ a soma dos dígitos de um inteiro n. Por exemplo, $S(327) = 3+2+7 = 12$. Encontre o valor de

$$A = S(1) - S(2) + S(3) - S(4) + \ldots - S(2016) + S(2017).$$

3 *A soma dos dígitos – Solução*

Se m é par, o número $m+1$ possui os mesmos dígitos que m com exceção do dígito das unidades, que é uma unidade maior. Portanto, $S(m+1) - S(m) = 1$. Isso nos permite agrupar os termos da sequência em pares com diferença igual a 1:

$$\begin{aligned} S(1) - S(2) + S(3) - S(4) + \ldots - S(2016) + S(2017) &= \\ S(1) + (S(3) - S(2)) + (S(5) - S(4)) + \ldots + (S(2017) - S(2016)) &= \\ 1 + 1 + 1 + \ldots + 1 &= \\ 1009. \end{aligned}$$

4 *Probabilidade no torneio*

Em um torneio com 10 times, cada um deles se enfrenta uma única vez. Além disso, não ocorrem empates e cada um possui 50% de chance de ganhar qualquer partida. Qual a probabilidade de, após contabilizadas as pontuações dos $\frac{10\cdot 9}{2} = 45$ jogos, não existirem dois jogadores com o mesmo número de vitórias?

4 *Probabilidade no torneio – Solução*

Como cada uma das 45 partidas possui dois resultados possíveis, existem 2^{45} maneiras distintas de distribuir as vitórias do torneio. Cada time pode vencer de 0 até 9 partidas. Como são 10 times, para que todos os números de vitórias sejam distintos, cada inteiro do conjunto $\{0,1,2,\ldots,9\}$ deve ser associado como número de vitórias de um único jogador. Isso pode ser feito de 10! formas. Resta saber se essa distribuição de números de vitórias é realizável neste torneio. Se j_i é o jogador que deverá vencer apenas i partidas, com $i \in \{0,1,2,\ldots,9\}$, então faça j_i ganhar de todos os jogadores $j_0, j_1, \ldots, j_{i-1}$ e perder de todos os jogadores $j_{i+1}, j_{i+2}, \ldots, j_{10}$. Isso garantirá a distribuição planejada. Portanto, a probabilidade é $10!/2^{45}$.

5 *TORRECOPOS*

O jogo TORRECOPOS consiste em guardar uma pilha de copos, previamente empilhados sobre uma mesa (Figura 1), com as "bocas"voltadas para baixo, de forma que todos fiquem um dentro do outro e apenas um em contato com a mesa (Figura 2). No primeiro andar, os copos são do tipo A, no segundo, do tipo B, no terceiro, do tipo C e assim por diante. Vence o jogo aquele que os recolher no menor tempo. Na Figura 3, podemos obter apenas três configurações depois de recolhidos: AAB, ABA e BAA.

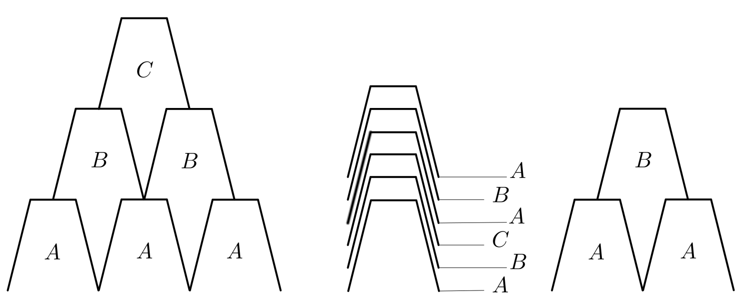


Figura 1 *Figura* 2 *Figura* 3

a) Na Figura 1, quantas configurações diferentes podemos obter após recolhê-los?

b) Quantas configurações diferentes podemos obter ao recolher os copos em uma torre com 4 andares?

c) Quantas configurações diferentes podemos obter ao recolher os copos de uma torre com n andares?

5 *TORRECOPOS – Solução*

a) O número de configurações finais é o mesmo que o número de permutações de uma palavra que possui três letras A, duas letras B e uma letra C, ou seja, $\dfrac{6!}{3!\cdot 2!} = 60$.

b) Usando o mesmo raciocínio do primeiro item, porém com quatro letras A, três letras B, duas letras C e uma letra D, temos $\dfrac{10!}{4!\cdot 3!\cdot 2!} = 12.600$.

c) Neste caso temos n letras A, $(n-1)$ letras B, $(n-2)$ letras C e assim por diante, sendo o total de letras igual à soma dos n primeiros naturais, ou seja, $\dfrac{n(n+1)}{2}$. Assim, a quantidade de configurações finais, após o recolhimento dos copos, é

$$\frac{\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)!}{n!\cdot(n-1)!\cdot(n-2)!\cdot\ldots\cdot 1!}.$$

6 *A cauda do fatorial*

Se $m!$ termina com exatamente n zeros, dizemos que n é a *cauda do fatorial* $m!$. Observe os exemplos e responda:

- $5! = 5\times 4\times 3\times 2\times 1 = 120$, termina em um zero, por isso, a *cauda do fatorial* $5!$ é 1; e
- $10! = 3628800$, termina em dois zeros, logo a *cauda do fatorial* $10!$ é igual a 2.

a) Quais são as *caudas dos fatoriais* de $20!$ e $25!$?

b) Qual o dígito das dezenas de $7!+8!+9!+\ldots+2018!$?

c) Algum $m!$ tem *cauda do fatorial* igual a 5?

d) Qual a *cauda do fatorial* de 2018! (dois mil e dezoito fatorial)?

e) Quantos inteiros positivos menores que 2018 não são *cauda do fatorial*?

6 *A cauda do fatorial – Solução*

a) Como $10 = 2\cdot 5$, basta contar as quantidades de fatores 2 e 5 nesses números. Observe que $20!$ é o mesmo que $20\cdot\ldots\cdot 15\cdot\ldots\cdot 10\cdot\ldots\cdot 5\cdot\ldots\cdot 1$, como são 4 múltiplos de 5 em sua representação fatorial e existem mais de 4 fatores 2 nesse produto, teremos 4 zeros à sua direita. Expandindo $25!$, temos 5 múltiplos de 5, sendo um múltiplo de 5^2. Como a quantidade de fatores 2 é maior, logo ele termina em 6 zeros. Como existem mais fatores 2 do que 5, a *cauda do fatorial* de $m!$ é determinada pelo expoente de 5 na fatoração de $m!$

b) Como 10! é múltiplo de 100, qualquer fatorial associado a um número maior que 10 é também múltiplo de 100. Portanto, os últimos dois dígitos da soma

$$10! + 11! + 12! + \ldots + 2018!$$

são 00. Os últimos dois dígitos de $7! + 8! + 9! = 5040 + 40320 + 362880 = 408240$ são 40. Logo o dígito das dezenas procurado é 4.

c) Pelos itens anteriores, com inclusão do produto por 25, o expoente do 5 na expansão do fatorial pula de 4 para 6. Os próximos fatoriais terão pelo menos 6 zeros e assim a não existe *cauda do fatorial* de tamanho 5.
Observação: Perceba que a cada novo múltiplo de 5, a cauda "pula" uma unidade, para múltiplos de 5^2 teremos duas unidades, para os de 5^3 serão três e assim por diante.

d) Devemos analisar os múltiplos das potências de 5 menores ou iguais a 2018: 5, 25, 125, 625. São 403 múltiplos de 5, 80 de 25, 16 de 125 e 3 de 625. Portanto, a cauda será igual a

$$403 + 80 + 16 + 3 = 502.$$

e) A cada pulo duplo associado a um múltiplo de 5^2, perdemos um inteiro como possível *cauda do fatorial*. A cada pulo triplo associado a um múltiplo de 5^3, perdemos dois possíveis inteiros como *cauda do fatorial* e assim sucessivamente. Analisando os múltiplos de 5 menores ou iguais a 2018, temos 80 pulos duplos, 16 triplos e 3 quádruplos. Portanto, chegamos a

$$80 \times 1 + 16 \times 2 + 3 \times 3 = 121$$

inteiros que não são *cauda do fatorial*.

7 *Anéis simétricos*

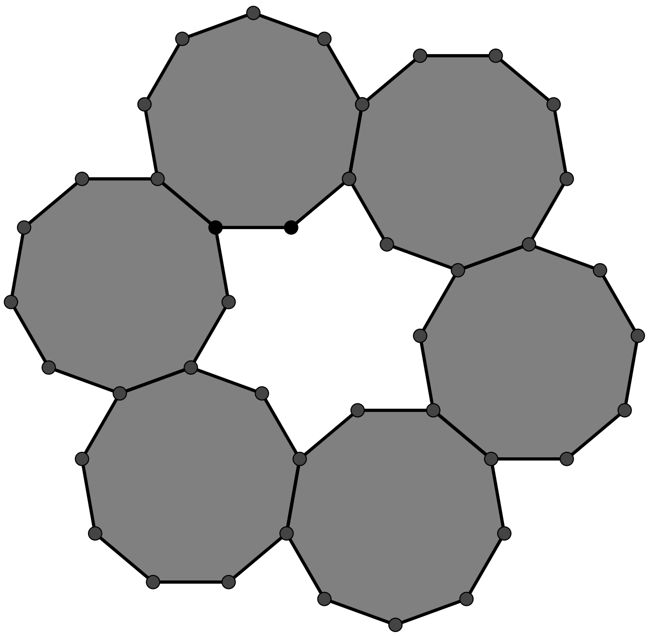
Um anel simétrico com m polígonos regulares de n lados cada é formado de acordo com as regras:

i) cada polígono no anel encontra dois outros;

ii) dois polígonos adjacentes têm apenas um lado em comum;

iii) o perímetro da região interna delimitada pelos polígonos consiste em exatamente dois lados de cada polígono.

O exemplo na figura a seguir mostra um anel com $m = 6$ e $n = 9$. Para quantos valores diferentes de n é possível construir esse anel?



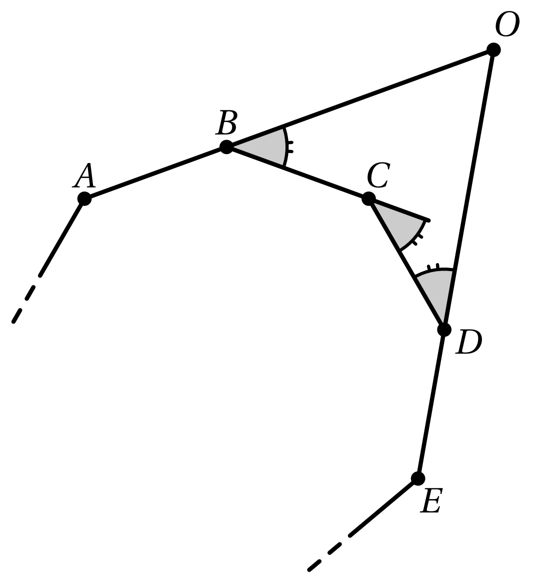
7 *Anéis simétricos – Solução*

Seja $\alpha = \dfrac{360^\circ}{n}$ a medida de cada ângulo externo de um polígono regular $ABCDE\ldots$. Suponha que o caminho BCD faz parte do perímetro da região interna de algum anel. Se O é o encontro dos prolongamentos de AB e DE, por simetria, ele é o centro da região interna. Como são m polígonos regulares, conclui-se que $\angle BOD = \dfrac{360^\circ}{m}$. Agora, a soma dos ângulos internos de $BCDO$ fica

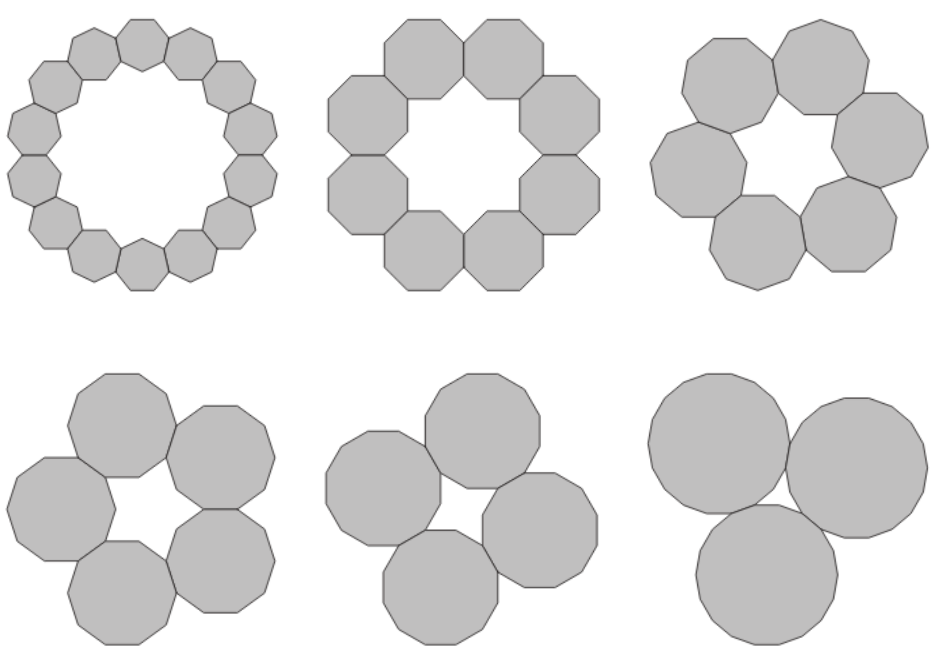
$$\begin{aligned}
360^\circ &= \frac{360^\circ}{m} + \alpha + (180 + \alpha) + \alpha \\
360^\circ &= \frac{360^\circ}{m} + \frac{3 \cdot 360^\circ}{n} + 180^\circ \\
1 &= \frac{2}{m} + \frac{6}{n}.
\end{aligned}$$

Daí, multiplicando a equação anterior por mn e fatorando a expressão encontrada, temos

$$\begin{aligned} mn &= 6m+2n \\ (m-2)(n-6) &= 12. \end{aligned}$$



Para o anel existir, precisamos de $m > 2$. Além disso, $(m-2)$ e $(n-6)$ precisam dividir 12 e $n > 0$, então $(n-6) \in \{1,2,3,4,6,12\}$, o que faz $n \in \{7,8,9,10,12,18\}$, sendo 6 valores possíveis diferentes para n. Para verificar que todos eles são soluções, basta considerar os seguintes exemplos de anéis



8 *A linha do trem*

Uma linha de trem está dividida em 10 trechos pelas estações A, B, C, D, E, F, G, H, I, J e K. A distância de A até K é igual a 56 km. O trajeto de dois trechos consecutivos é sempre menor ou igual a 12 km e o trajeto de três trechos consecutivos sempre é maior ou igual a 17 km. Determine as distâncias:

a) de J até K;

b) de D até H;

c) de B a G.

8 *A linha do trem – Solução*

a) Podemos escrever $AK = 56$ e $AK = AD + DG + GJ + JK$. Como AD, DG e $GJ \geq 17$, então $JK \leq 5$. Daí, para $HK \geq 17$, devemos ter $HJ \geq 12$. Mas, sabemos que $HJ \leq 12$, assim $HJ = 12$. A partir de $HK \geq 17$ e $HJ = 12$, concluímos $JK \geq 5$ e a única possibilidade é $JK = 5$.

b) Por simetria, teremos $AB = 5$ e $BD = 12$. Agora, seguimos com

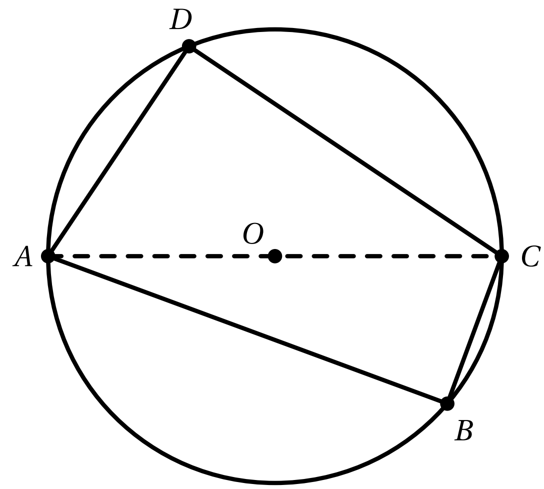
$$\begin{aligned} DH &= AK - AB - BD - HJ - JK \\ &= 56 - 5 - 12 - 5 - 12 = 22. \end{aligned}$$

c) Por fim, $GJ \geq 17$, mas $HJ = 12$. Assim $GH \geq 5$. A partir de $DG \geq 17$ e $DH = DG + GH = 22$, obtemos $DG = 17$ e $GH = 5$. Portanto

$$\begin{aligned} BG &= BD + DG \\ &= 12 + 17 \\ &= 29. \end{aligned}$$

9 Uma diagonal no diâmetro

Uma das diagonais de um quadrilátero inscritível é um diâmetro de seu círculo circunscrito.



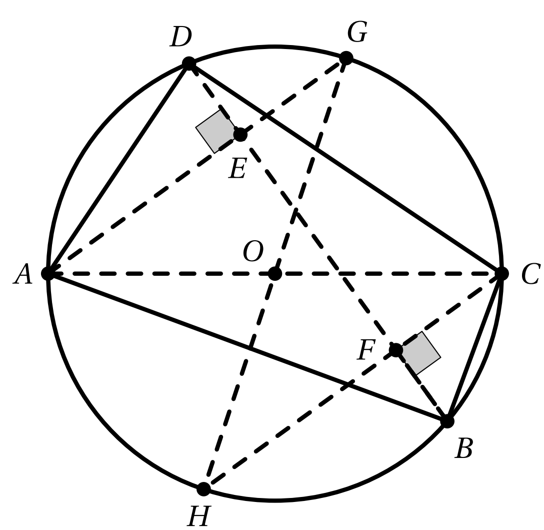
Verifique que as interseções E e F das retas perpendiculares por A e C, respectivamente, a reta BD satisfazem

$$DE = BF.$$

9 Uma diagonal no diâmetro – Solução

Estenda as perpendiculares CF e AE para a segunda interseção com o círculo nos pontos H e G, respectivamente. Como $AG \parallel CH$ e AC é um diâmetro, segue que $AGCH$ é um retângulo. Seja M o ponto médio de EF. Por ser uma corda da circunferência, temos OM perpendicular a BD. Usando que EF é perpendicular aos lados do retângulo, temos $EM = FM$ e daí

$$DE = DM - ME = BM - MF = BF.$$



10 *O jogo dos dados*

Um jogo é composto das seguintes regras:

i) Em cada rodada, ocorre o lançamento de um dado comum não viciado.

ii) Se sair o número 3, então o jogador A ganha.

iii) Se sair um dos números do conjunto $\{4,5,6\}$, então o jogador B ganha.

iv) Se sair um dos números do conjunto $\{1,2\}$, então o dado é lançado outra vez até resultar em 3 ou 4 ou 5 ou 6.

Qual a probabilidade do jogador B vencer?

10 *O jogo dos dados – Solução*

Seja $P_i(B)$ a probabilidade do jogador B vencer na rodada i, com i inteiro positivo, e $P_i(\overline{A+B})$ a probabilidade de A e B não vencerem na rodada i. Portanto, temos que

$$\begin{aligned}
&P_1(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2},\\
&P_2(B) = P_1(\overline{A+B}) \cdot P_2(B) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6},\\
&P_3(B) = P_1(\overline{A+B}) \cdot P_2(\overline{A+B}) \cdot P_3(B) = \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{18}\\
&\quad\vdots\\
&P_n(B) = P_1(\overline{A+B}) \cdot P_2(\overline{A+B}) \cdot \ldots \cdot P_{n-1}(\overline{A+B}) \cdot P_n(B) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Perceba que os resultados formam uma progressão geométrica de razão $1/3$ que precisaremos somar para encontrar a probabilidade $P(B)$ de B vencer. Temos, então

$$P(B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18} + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{4}.$$

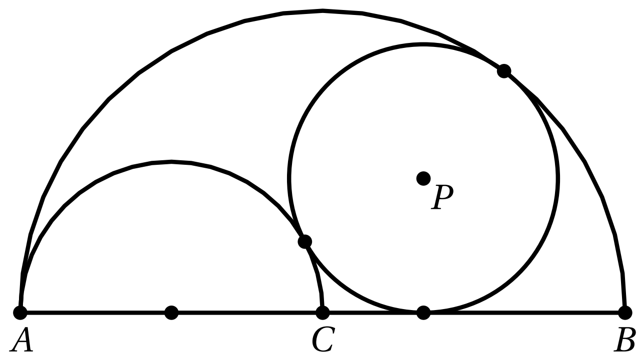
Observação: Se $|q| < 1$ e $S = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}$, então

$$Sq = q + q^2 + q^3 \ldots + q^n.$$

Daí, $Sq - S = q^n - 1$ e, consequentemente, $S = \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$. No final da solução anterior, aplicamos essa fórmula para a soma dos termos de uma progressão geométrica com $q = 1/3$.

11 *Aplicando áreas*

A figura a seguir mostra um segmento AB, seu ponto médio C e as semicircunferências de diâmetros AB e AC. Uma circunferência de centro P é tangente às duas semicircunferências e também ao segmento AB. Sendo $AB = 8\,\text{cm}$, e O, o ponto médio de AC, pergunta-se:



a) Qual a medida do perímetro do triângulo OCP?

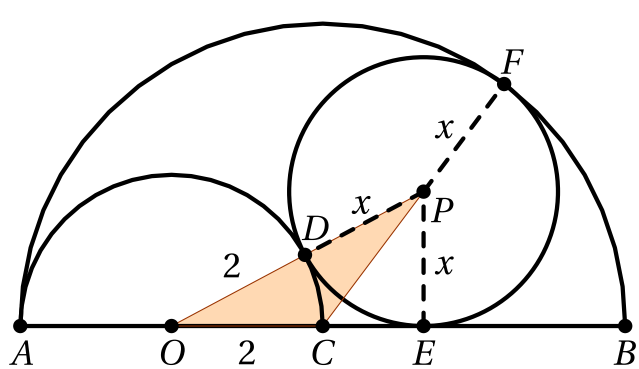
b) Qual a medida do raio da circunferência de centro P?

11 *Aplicando áreas – Solução*

a) Seja x o raio da circunferência de centro P. Traçamos OP, que passa pelo ponto de tangência D; CP, que passa pelo ponto de tangência F; e PE, perpendicular a AB (e raio da circunferência destacada na figura). Temos $CP = 4-x$ e $OP = 2+x$. O perímetro do triângulo OCP é

$$\begin{aligned} 2p &= OP + CP + CO \\ &= (2+x) + (4-x) + 2 \\ &= 8 \text{ cm}. \end{aligned}$$

b) Agora, calcularemos a área do $\triangle OCP$ de duas formas, pela fórmula de Heron, que usa o semi perímetro $p = 4\,\text{cm}$ e como metade do produto da base pela altura.



Sendo assim,

$$\sqrt{4\cdot(4-2)(4-(2+x))(4-(4-x))}=\frac{2\cdot x}{2}.$$

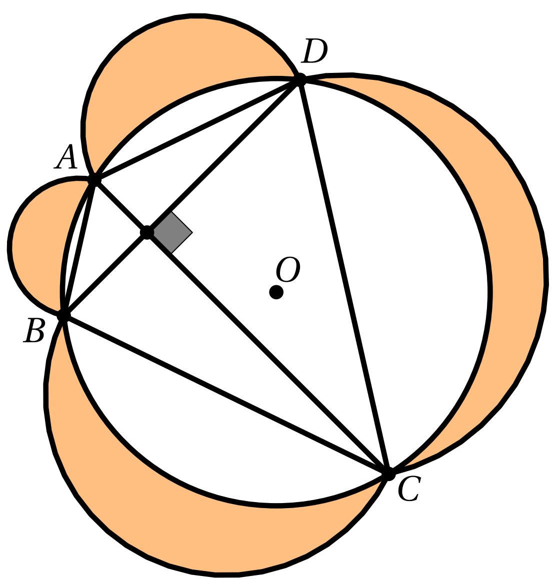
Resolvendo a equação anterior, ficamos com $x=\dfrac{16}{9}$ cm.

Observação: Um triângulo de perímetro $2p$ e lados de comprimentos a, b e c, pela Fórmula de Heron, possui área dada por

$$A=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

12 *Lúnulas*

Um quadrilátero $ABCD$ está inscrito numa circunferência de centro O. Sabe-se que as diagonais AC e BD são perpendiculares. Sobre cada um dos lados construímos semicírculos, externamente, como mostra a figura abaixo.



a) Mostre que os triângulos AOB e COD têm a mesma área.

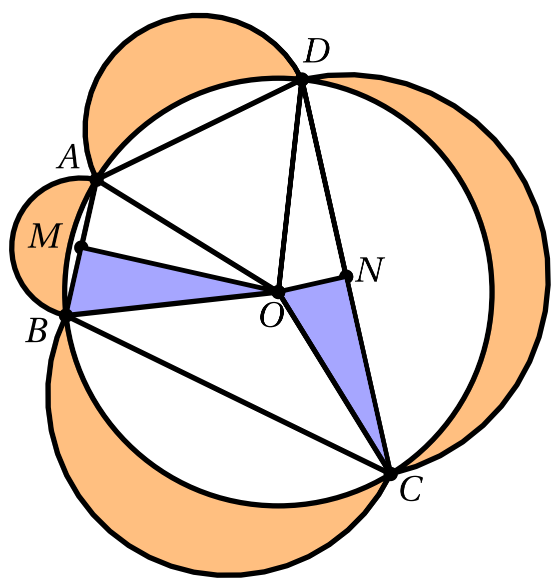
b) Se $AC=8\,\text{cm}$ e $BD=6\,\text{cm}$ determine a área da região pintada.

12 *Lúnulas – Solução*

a) Inicialmente, observe que

$$\begin{aligned} A\hat{O}B + C\hat{O}D &= \\ 2\cdot(A\hat{C}B + C\hat{B}D) &= \\ 2\cdot 90^\circ &= 180^\circ. \end{aligned}$$

Sejam M e N, respectivamente, os pontos médios dos lados AB e CD. Então $B\hat{O}M = \dfrac{A\hat{O}B}{2} = \dfrac{180^\circ - C\hat{O}D}{2} = C\hat{O}N$. Isso nos permite concluir que os triângulos retângulos $\triangle BMO$ e $\triangle CNO$ possuem os mesmos ângulos. Além disso, podemos concluir que eles são congruentes, pois possuem a mesma hipotenusa. Então eles têm a mesma área e, consequentemente, vale o mesmo para $\triangle AOB$ e $\triangle COD$.



b) Sejam $r_1 = \dfrac{AB}{2}$ e $r_2 = \dfrac{CD}{2}$ os raios das semicircunferências sobre os lados AB e CD, respectivamente. Pela congruência dos triângulos BMO e ONC, temos $ON = BM = r_1$. Dessa forma,

$$r_1^2 + r_2^2 = R^2.$$

Analogamente, se r_3 e r_4 são os raios das semicircunferências sobre AD e BC, temos

$$r_3^2 + r_4^2 = R^2.$$

Agora, somando as áreas dos quatro semicírculos, obtemos:

$$\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\left(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2\right) = \pi\cdot R^2.$$

Logo, as 4 semicircunferências preenchem completamente o círculo. Subtraindo-se as áreas dos segmentos circulares, concluímos que a área sombreada é igual à área do quadrilátero. Como as diagonais são perpendiculares, esta será igual a

$$\frac{AC \cdot BD}{2} = \frac{8 \cdot 6}{2} = 24\ \text{cm}^2.$$

13 *Combate com dados*

Dois jogadores se enfrentam em um jogo de combate com dados. O atacante lançará três dados e o defensor, dois. O atacante derrotará o defensor em apenas um lance de dados se, e somente se, as duas condições seguintes forem satisfeitas:

i) O maior dado do atacante for maior do que o maior dado do defensor.

ii) O segundo maior dado do atacante for maior do que o segundo maior dado do defensor (convencionamos que o "segundo maior dado" pode ser igual ao maior dado, caso dois ou mais dados empatem no maior valor).

Considerando que todos os dados são honestos com os resultados equiprováveis, calcule a probabilidade de o atacante vencer com o defensor conseguindo nos dados dele:

a) 2 cincos;

b) 1 cinco e 1 quatro.

13 *Combate com dados – Solução*

a) Para ganhar, precisamos tirar ao menos dois 6. A probabilidade será igual a tirar:

- três seis: $P_1 = \left(\frac{1}{6}\right)^3$; ou
- dois seis e outro número qualquer menor que 6: $P_2 = 3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{5}{6} = \frac{15}{6^3}$.

Portanto, a probabilidade é $\frac{1}{6^3} + \frac{15}{6^3} = \frac{16}{6^3} = \frac{2}{27}$.

b) Para ganhar, precisamos tirar ao menos um maior do que 5 e outro maior do que 4. A probabilidade será igual a tirar:

- três seis: $P_1 = \left(\frac{1}{6}\right)^3$; e
- dois seis e outro qualquer (< 6): $P_2 = 3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{5}{6} = \frac{15}{6^3}$;
- um seis e dois cincos: $P_2 = 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{3}{6^3}$; ou
- um seis, um cinco e outro qualquer (< 5): $P_2 = 3! \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{24}{6^3}$;

Portanto, ficamos com
$$\frac{1}{6^3} + \frac{15}{6^3} + \frac{3}{6^3} + \frac{24}{6^3} = \frac{43}{216}.$$

14 *Os ângulos do losango*

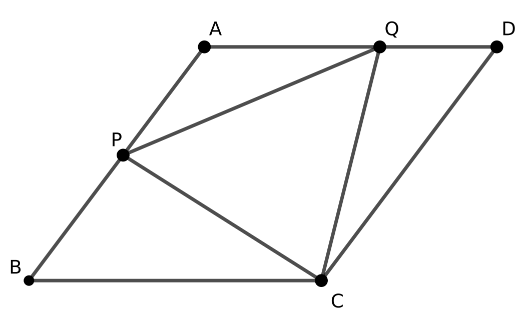
Sejam $ABCD$ um losango, com $\angle BAD > \angle ABC$, e P e Q pontos nos lados AB e AD, respectivamente, tais que o triângulo PCQ é equilátero, com lado igual ao lado do losango. Encontre as medidas dos ângulos do losango.

14 *Os ângulos do losango – Solução*

Como $\angle ABC = \angle QDC = \alpha$ e $BC = PC = QC = CD$, segue que $\angle BCP = \angle DCQ = 180^\circ - 2\alpha$. Assim,

$$\begin{aligned} 180^\circ - \alpha &= \angle BCD \\ &= (180^\circ - 2\alpha) + 60^\circ + (180^\circ - 2\alpha) \\ &= 420^\circ - 4\alpha. \end{aligned}$$

Portanto, $240^\circ = 3\alpha$, ou seja, $\alpha = 80^\circ$. Logo, os ângulos do losango são $80^\circ, 80^\circ, 100^\circ$ e 100°.

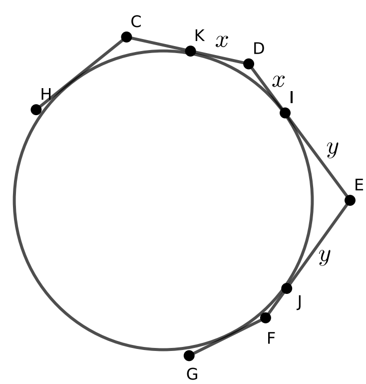


15 *Circunferência tangente aos lados*

Prove que se um polígono possui uma circunferência tangente a todos os seus lados, então é possível encontrar três lados do polígono que formam um triângulo.

15 *Circunferência tangente aos lados – Solução*

Seja DE o maior lado do polígono e considere os outros dois lados adjacentes a ele, denotados por CD e EF na figura a seguir.



Além disso, sejam K, em CD, e I, em DE, e J, em EF os pontos de tangências desses lados com a circunferência mencionada no enunciado. Como $KD = DI = x$ e $EI = EJ = y$, temos

$$\begin{aligned} DE &= x + y \\ &< CD + EF. \end{aligned}$$

Sabendo que DE é o maior lado do polígono, também temos $DE + CD > EF$ e $DE + EF > CD$. Em virtude da Desigualdade Triangular, os segmentos DE, CD e EF são lados de um triângulo.

16 *Os clubes da ilha*

Uma ilha possui 50 clubes. Cada habitante da ilha é sócio de 1 ou 2 clubes. Cada clube tem no máximo 55 sócios e para cada par de clubes existe um habitante da ilha que é sócio dos dois clubes. Encontre todas as possibilidades para as quantidades possíveis de habitantes da ilha. Justifique sua resposta.

16 *Os clubes da ilha – Solução*

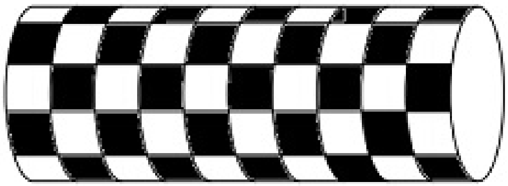
Existem $\binom{50}{2} = 1225$ pares de clubes e para cada um deles devemos ter um habitante que pertence a ambos. Denotemos esses habitantes por H_{ij} com $i, j \in \{1, 2, \ldots, 50\}$ e $i < j$. Se dois deles são iguais, um habitante estaria em três clubes e isso seria uma contradição. Portanto, todos os estudantes H_{ij} são distintos e isso nos mostra que a ilha precisa ter pelo menos 1225 pessoas e que cada clube tem pelo menos um habitante do tipo H_{ij}. Fixado um clube qualquer, ele possui 49 habitantes distintos em comum com os outros 49 clubes. Como ele pode ter no máximo 55 habitantes, conterá no máximo 6 que não são da forma H_{ij}. Assim, o número máximo de habitantes da ilha é $1225 + 50 \cdot 6 = 1525$. Considere agora um inteiro $n \in [1225, 1525]$ e 1225 pessoas distintas. A cada uma associe uma etiqueta H_{ij}, com $i, j \in \{1, 2, \ldots, 50\}$ e $i < j$, e coloque a pessoa com etiqueta de índice i no clube C_i. Essas serão as únicas pessoas em dois clubes. Como $n - 1225 \leq 300$, podemos distribuir as pessoas restantes inserindo-as em grupos de até 6 pessoas nas $55 - 49 = 6$ posições vazias de cada um desses 50 clubes criados. Elas serão as únicas pessoas que participarão de apenas um clube. Podemos concluir que o conjunto de valores possíveis é o intervalo de inteiros $[1225, 1525]$.

17 *Números no tabuleiro*

Alguns números reais estão escritos nas casas de um tabuleiro $n \times n$ de modo que a soma total dos números escritos é positiva. Mostre que existe alguma permutação das colunas do tabuleiro, de modo que a soma dos números escritos nas casas da diagonal principal do novo tabuleiro seja positiva.

17 *Números no tabuleiro – Solução*

Crie um cilindro a partir do tabuleiro como indicado na figura abaixo. Esse cilindro pode ser decomposto em n diagonais disjuntas que começam em um extremo do cilindro e terminam no outro. Como a soma de todos os números do tabuleiro é positiva, pelo menos uma das diagonais terá soma positiva. Ela correponde a uma permutação das colunas do tabuleiro que satisfaz as condições do problema.



18 *Desigualdade no triângulo*

Prove que a soma dos comprimentos dos catetos de um triângulo retângulo nunca excede $\sqrt{2}$ vezes a medida da hipotenusa do triângulo.

18 *Desigualdade no triângulo – Solução*

Sejam a e b os catetos de um triângulo retângulo e c a sua hipotenusa. Sabemos que

$$\begin{aligned}(a-b)^2 &\geq 0\\ a^2+b^2 &\geq 2ab.\end{aligned}$$

Pelo Teorema de Pitágoras, temos

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2\\ &\leq 2(a^2+b^2)\\ &= 2c^2.\end{aligned}$$

Daí,

$$a+b\leq\sqrt{2}c.$$

19 *O rei no tabuleiro*

Um rei está em um dos cantos de um tabuleiro $m\times n$. Dois jogadores movem o rei alternadamente para qualquer casa ainda não visitada. O primeiro jogador que não puder mais mover o rei perde. Determine, em função das dimensões do tabuleiro, quem possui a estratégia vencedora.

Observação: No xadrez, o rei se movimenta uma casa na horizontal, na vertical ou na diagonal.

19 *O rei no tabuleiro – Solução*

Sejam A o primeiro e B o segundo jogador. Dizemos que um jogador possui uma estatégia vencedora se ele pode sempre garantir a vitória independentemente de como o outro jogador faça seus movimentos. Vamos provar que:

(i) se mn é par, então A possui a estratégia vencedora;

(ii) se mn é ímpar, então B possui a estratégia vencedora.

No primeiro caso, cubra o tabuleiro utilizando dominós 2×1. A estratégia de A consiste em movimentar o rei para a casa adjacente no mesmo dominó em que B deixou a peça. Assim, enquanto B jogar, A sempre joga e, portanto, vence o jogo. No segundo caso, m e n são ímpares. Daí, com a exceção do canto em que o rei inicia o jogo, as casas podem ser cobertas por dominós 2×1. Logo, após o primeiro movimento de A, B aplica a mesma estratégia descrita no caso anterior.

20 *As raízes da equação*

Encontre a soma das raízes, reais e não reais, da equação $x^{2017} + \left(\frac{1}{2} - x\right)^{2017}$.

20 *As raízes da equação – Solução*

Trata-se de um polinômio de grau 2016. Se r é raiz, então $\frac{1}{2} - r$ também é raiz. Portanto, ao parearmos as raízes que somam $1/2$, obtemos soma $1008 \cdot 1/2 = 504$.

21 *Os pontos na circunferência*

Considere 2018 pontos em uma circunferência de raio 1. Verifique que existe um ponto P da circunferência para o qual a soma das distâncias de P aos 2018 pontos é pelo menos 2018.

21 *Os pontos na circunferência – Solução*

Escolha dois pontos A e B diametralmente opostos. Dado qualquer ponto Q no círculo, temos $d(Q,A) + d(Q,B) > 2$, em que $d(X,Y)$ denota a distância entre X e Y. Considere as somas S_A e S_B das distâncias de todos os 2018 pontos até A e B, respectivamente. Como $S_A + S_B > 2 \cdot 2018$, pelo menos uma dessas somas é maior que 2018.

22 *Quantas raízes quadradas diferentes?!*

a) Qual o valor de

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}?$$

b) Se $x = \sqrt{1 + 2 \cdot \sqrt{1 + 3 \cdot \sqrt{1 + 4 \cdot \sqrt{1 + 5 \cdot \sqrt{\ldots}}}}}$ é um número real, qual o seu valor?

22 *Quantas raízes quadradas diferentes?! – Solução*

a) Perceba que

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\cdot\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}} &= \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{\left(\sqrt{n}\right)^2-\left(\sqrt{n+1}\right)^2}\\ &= \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{n-(n-1)}\\ &= -\sqrt{n}+\sqrt{n+1}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}=$$
$$-1+\sqrt{2}-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{3}+\sqrt{4}-\sqrt{4}+\sqrt{5}-\sqrt{5}+\sqrt{6}-\ldots-\sqrt{99}+\sqrt{100}=$$
$$\sqrt{100}-1=9.$$

b) Observe a seguinte sequência de quadrados de inteiros positivos

$$\begin{array}{lcl} 3^2=1+8=1+2\cdot 4 & & \\ 4^2=1+15=1+3\cdot 5 & \Rightarrow & 4=\sqrt{1+3\cdot 5}\\ 5^2=1+24=1+4\cdot 6 & \Rightarrow & 5=\sqrt{1+4\cdot 6}\\ 6^2=1+35=1+5\cdot 7 & \Rightarrow & 6=\sqrt{1+5\cdot 7}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ n^2=1+n^2-1=1+(n-1)\cdot(n+1) & \Rightarrow & n=\sqrt{1+(n-1)\cdot(n+1)}.\end{array}$$

Podemos então iterar cada uma das equações anteriores de modo a obtermos

$$\begin{aligned}3^2 &= 1+2\cdot 4\\ 3^2 &= 1+2\cdot\sqrt{1+3\cdot 5}\\ 3^2 &= 1+2\cdot\sqrt{1+3\cdot\sqrt{1+4\cdot 6}}\\ 3^2 &= 1+2\cdot\sqrt{1+3\cdot\sqrt{1+4\cdot\sqrt{1+5\cdot 7}}}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}3^2 &= 1+2\cdot\sqrt{1+3\cdot\sqrt{1+4\cdot\sqrt{1+5\cdot\sqrt{\ldots}}}}\\ 3 &= \sqrt{1+2\cdot\sqrt{1+3\cdot\sqrt{1+4\cdot\sqrt{1+5\cdot\sqrt{\ldots}}}}}.\end{aligned}$$

23 *Duas equações bonitas*

a) Determine a soma das raízes reais da equação

$$x^2 + 18x + 30 = 2 \cdot \sqrt{x^2 + 18x + 45}.$$

b) Resolva a equação $\sqrt{5 - \sqrt{5 - x}} = x$, com $0 < x < 5$.

23 *Duas equações bonitas – Solução*

a) Seja $x^2 + 18x + 30 = y$. Temos, então

$$\begin{array}{rcl} y & = & 2 \cdot \sqrt{y + 15} \\ y^2 & = & (2 \cdot \sqrt{y + 15})^2 \\ y^2 & = & 4 \cdot (y + 15) \\ y^2 - 4y - 60 & = & 0. \end{array}$$

As raízes da última equação são $y = 2 \pm 8$, isto é, $y_1 = 10$ e $y_2 = -6$. Como estamos buscando raízes reais, y deve ser não negativo. Assim, devemos descartar $y_2 = -6$ e obtemos $x^2 + 18x + 30 = 10$. Como o discriminante dessa equação é positivo, ambas as raízes são reais e ambas satisfazem a equação, pois $y_1 + 15 \geq 0$. Assim, a soma das raízes é -18.

b) Seja x uma solução da equação. Então:

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{5 - \sqrt{5 - x}} & = & x \\ \left(\sqrt{5 - \sqrt{5 - x}}\right)^2 & = & x^2 \\ 5 - \sqrt{5 - x} & = & x^2 \\ 5 - x^2 & = & \sqrt{5 - x} \\ \left(5 - x^2\right)^2 & = & \left(\sqrt{5 - x}\right)^2 \\ \left(5 - x^2\right)^2 & = & (5 - x). \end{array}$$

Desenvolvendo os produtos notáveis anteriores, tem-se:

$$\begin{array}{rcl} \left(5 - x^2\right)^2 & = & (5 - x) \\ 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot x^2 + x^4 & = & 5 - x \\ 5^2 - (2x^2 + 1) \cdot 5 + (x^4 + x) & = & 0. \end{array}$$

Fixado x, o número 5 é raiz da equação do segundo grau:

$$z^2 - (2x^2+1)\cdot z + (x^4+x) = 0.$$

O discriminante da equação anterior é:

$$\begin{aligned}
\Delta &= [-(2x^2+1)]^2 - 4\cdot 1\cdot (x^4+x)\\
&= 4x^4+4x^2+1-4x^4-4x\\
&= (2x-1)^2.
\end{aligned}$$

Como $x>0$, $\sqrt{\Delta} = \pm(2x-1)$. Como 5 é uma das raízes da equação, tem-se:

$$5 = \frac{2x^2+1\pm(2x+1)}{2}.$$

Temos dois casos a considerar:

$$\begin{aligned}
\frac{2x^2+1+(2x-1)}{2} &= 5\\
x^2+x-5 &= 0\\
x &= \frac{-1\pm\sqrt{21}}{2}
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
\frac{2x^2+1-(2x-1)}{2} &= 5\\
x^2-x-4 &= 0\\
x &= \frac{1\pm\sqrt{17}}{2}.
\end{aligned}$$

Como $0<x<5$, precisa-se eliminar as duas raízes negativas. Além disso, é fácil verificar que as outras duas satisfazem a equação original. Portanto,

$$S = \left\{\frac{-1+\sqrt{21}}{2}, \frac{1+\sqrt{17}}{2}\right\}.$$

24 *Hora de fazer o desenho*

Seja ABC um triângulo qualquer, desenhe exteriormente a ABC os triângulos equiláteros ABD e ACE.

a) Verifique que $DC = BE$.

b) Sendo F o ponto de interseção de DC e BE, encontre o ângulo $\angle AFB$.

24 *Hora de fazer o desenho – Solução*

a) Observe que $AD = AB$, $AC = AE$ e $\angle DAC = \angle BAE = \angle BAC + 60^\circ$. Portanto, $\triangle ADC \equiv \triangle ABE$, peloa caso LAL, e assim $DC = BE$.

b) Pela congruência anterior,

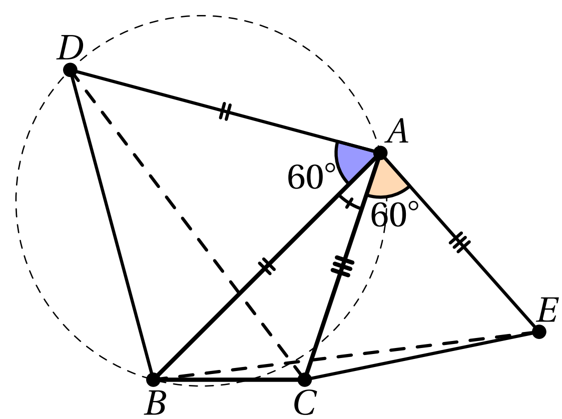
$$\angle ADF = \angle ADC = \angle ABE = \angle ABF.$$

Se CD corta a circunferência que passa por ABD em X, então

$$\begin{aligned} \angle ADC &= \angle ADX \\ \angle ABE &= \angle ABX. \end{aligned}$$

Comparando as últimas equações, podemos concluir que X também está na reta BE e assim deve coincidir com F. Portanto, F está na circunferência que passa por A, B e D e assim

$$\angle AFB = 180^\circ - \angle ADB = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ.$$



25 *Em busca do termo mínimo!*

Determine o termo mínimo da sequência

$$\sqrt{\frac{7}{6}} + \sqrt{\frac{96}{7}},\ \sqrt{\frac{8}{6}} + \sqrt{\frac{96}{8}},\ \sqrt{\frac{9}{6}} + \sqrt{\frac{96}{9}}, \ldots, \sqrt{\frac{95}{6}} + \sqrt{\frac{96}{95}}.$$

25 *Em busca do termo mínimo! – Solução*

Lembre que $(x-y)^2 \geq 0$ para todos os reais x e y. Assim, podemos reescrever a desigualdade como $\dfrac{x^2+y^2}{2} \geq xy$, e substituindo $x=\sqrt{a}$ e $y=\sqrt{b}$, com a e b reais não negativos, temos $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. Agora, observe que todos os termos são do tipo $\sqrt{\dfrac{n}{6}}+\sqrt{\dfrac{16\cdot 6}{n}} = \sqrt{\dfrac{n}{6}}+4\sqrt{\dfrac{6}{n}}$, com n inteiro e maior do que ou igual a 7. Tomando $a=\sqrt{\dfrac{n}{6}}$ e $b=4\sqrt{\dfrac{6}{n}}$, podemos fazer

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{\frac{n}{6}}+4\sqrt{\frac{6}{n}}}{2} &\geq \sqrt{\sqrt{\frac{n}{6}}\cdot 4\sqrt{\frac{6}{n}}}\\
\sqrt{\frac{n}{6}}+4\sqrt{\frac{6}{n}} &\geq 2\cdot 2\cdot\sqrt{\sqrt{\frac{n}{6}\cdot\frac{6}{n}}}\\
&= 4.
\end{aligned}$$

O valor mínimo de cada termo é 4 e ocorre quando $\sqrt{\dfrac{n}{6}}=4\sqrt{\dfrac{6}{n}}$, ou seja, $n=24$. O termo procurado é $\sqrt{\dfrac{24}{6}}+\sqrt{\dfrac{96}{24}}$.

26 *Inteiros em progressão geométrica*

Os números 10, 11 e 12 podem pertencer a uma mesma progressão geométrica?

26 *Inteiros em progressão geométrica – Solução*

Suponha que 10, 11 e 12 sejam termos de uma mesma progressão geométrica:

$$\begin{aligned}
10 &= ar^{p-1}\\
11 &= ar^{q-1}\\
12 &= ar^{k-1}.
\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
11/10 &= r^{q-p}\\
12/11 &= r^{k-q}.
\end{aligned}$$

Além disso, temos

$$\begin{aligned}
\left(\frac{11}{10}\right)^{k-q} &= (r^{q-p})^{k-q}\\
&= r^{(q-p)(k-q)}\\
\left(\frac{12}{11}\right)^{q-p} &= (r^{k-q})^{q-p}\\
&= r^{(k-q)(q-p)}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{11}{10}\right)^{k-q} &= \left(\frac{12}{11}\right)^{q-p}\\
(11)^{k-q+q-p} &= (10)^{k-q}(12)^{q-p}\\
(11)^{k-p} &= 5^{k-q}\cdot 2^{k-q}\cdot 2^{2(q-p)}\cdot 3^{q-p}\\
&= 5^{k-q}\cdot 2^{k+q-2p}\cdot 3^{q-p}.
\end{aligned}$$

Pelo Teorema Fundamental da Aritmética, temos

$$\begin{cases} k-p=0\\ k-q=0\\ k+q-2p=0\\ q-p=0.\end{cases}$$

Resolvendo o sistema associado, temos $k=p=q$. Isso produz um absurdo, pois p, q e k são distintos. Portanto, 10, 11 e 12 não podem pertencer a uma mesma progressão geométrica.

27 *As cidades de Pirajuba*

Pirajuba possui 10 cidades, chamadas $H_1, H_2, \ldots, H_{10}$, e algumas delas são ligadas por estradas de mão dupla. Sabe-se que é possível chegar de H_1 a H_{10}. Mostre que uma das situações abaixo ocorre:

(i) Existe um caminho ligando H_1 a H_{10} utilizando no máximo 3 estradas.

(ii) Existem 2 cidades H_i e H_j, $2 \le i < j \le 9$, tais que todo caminho ligando H_1 a H_{10} passa por H_i ou H_j.

27 *As cidades de Pirajuba – Solução*

Se H_1 ou H_{10} estão ligadas a no máximo 2 cidades, a condição ii) é claramente satisfeita, pois todo caminho ligando H_1 a H_{10} deve passar por elas. Suponha então que H_1 está ligada a A_1, A_2 e A_3 e que H_{10} está ligada a B_1, B_2 e B_3 (eventualmente podem existir mais cidades ligadas a H_1 e H_{10}). Se $\{H_1, A_1, A_2, A_3\} \cap \{H_{10}, B_1, B_2, B_3\} \neq \emptyset$, então existe um caminho ligando H_1 a H_{10} usando no máximo 2 estradas. Se isso não acontece e existe alguma estrada conectando uma cidade do conjunto $\{A_1, A_2, A_3\}$ a uma cidade de $\{B_1, B_2, B_3\}$, então teremos um caminho entre H_1 e H_{10} utilizando 3 estradas e i) é verificado. Finalmente, resta analisarmos a situação em que $\{H_1, A_1, A_2, A_3\} \cap \{H_{10}, B_1, B_2, B_3\} = \emptyset$ e que não existe uma estrada entre A_i e B_j, para $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Nesse caso, como existem apenas 10 cidades e é possível ir de uma delas a qualquer outra, um caminho que una H_1 a H_{10} deve passar por uma das duas cidades que não está no conjunto

$$\{H_1, H_{10}, A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3\}.$$

Ou seja, ii) é verificada. Em qualquer um dos casos analisados anteriormente, i) ou ii) é verificado.

28 *A construção de estradas*

Em um certo país há 21 cidades e o governo pretende construir n estradas (todas de mão dupla), sendo que cada estrada liga exatamente 2 das cidades do país. Qual o menor valor de n para que, independente de como as estradas sejam construídas, seja possível viajar entre quaisquer 2 cidades (passando, possivelmente, por cidades intermediárias)?

28 *A construção de estradas – Solução*

Diremos que um grupo de cidades é *conexo* se é possível viajar de uma delas para qualquer outra por meio de estradas. Naturalmente grupos de cidades *conexas* distintos não podem possuir cidades em comum. Se o governo construir todas as estradas de um grupo de 20 cidades e deixar uma cidade isolada sem estradas, a propriedade de todas as cidades pertencerem a um mesmo grupo *conexo* não será estabelecida. Portanto, $n > \binom{20}{2} = 190$. Mostraremos agora que se o governo construir 191 estradas todas as cidades farão parte de um mesmo grupo *conexo*. De fato, suponha que exista mais de um grupo *conexo* e seja k, com $1 \leq k \leq 20$ o número de vértices de um deles, que chamaremos de A. Recordamos que se ligarmos todas as estradas possíveis em um grupo de n cidades, obteremos $\dfrac{n(n-1)}{2}$ estradas. Como não devem existir estradas entre o grupo A e os demais grupos que contém as outras $21-k$ cidades, o total de estradas não é maior que

$$\begin{aligned}
\frac{k(k-1)}{2}+\frac{(21-k)(20-k)}{2} &= \\
k^2-21k+210 &= \\
(k-21/2)^2+399/4 &\leq \\
(19/2)^2+399/4 &= 190.
\end{aligned}$$

Isso é um absurdo, pois o governo construiu 191 estradas. Assim, o menor valor de n é 191.

29 *O torneio de xadrez*

Em um torneio de xadrez, cada um dos participantes jogou exatamente uma vez com cada um dos demais e não houve empates. Mostre que existe um jogador P tal que, para qualquer outro jogador Q, distinto de P, uma das situações a seguir ocorre:

i) Q perdeu de P;

ii) Q perdeu de alguém que perdeu de P.

29 *O torneio de xadrez – Solução*

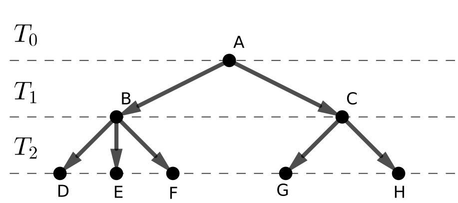
Seja P o jogador que mais venceu partidas no torneio. Digamos que P tenha vencido os jogadores do conjunto $S = \{P_1, P_2, \dots, P_k\}$. Considere um jogador qualquer Q diferente de P. Se Q perdeu para P, ele satisfaz o item i). Se além de vencer P, Q também ganhou de todos os elementos de S, então ele terá mais vitórias que P. Esse absurdo mostra que se Q tiver ganho de P, então ele perdeu para alguém de S e assim ii) é verdadeira. Em qualquer caso, i) ou ii) é satisfeita.

30 *O caminho fechado*

Existem 1999 cidades e 4000 estradas em um certo país (cada estrada conecta 2 cidades). Prove que existe um caminho fechado passando através de não mais que 20 cidades.

30 *O caminho fechado – Solução*

Inicialmente destrua as cidades, juntamente com suas estradas incidentes, se delas partem menos que 3 estradas. Como $2 \cdot 1999 < 4000$, eventualmente irão sobrar estradas e cidades após esse processo. Assim, podemos assumir que de todas as cidades restantes partem pelo menos 3 estradas. Escolha uma cidade qualquer, que será chamada de patamar T_0. A seguir, descreveremos uma construção ordenada de conjuntos de cidades. As cidades que podem ser acessadas a partir de T_0 serão denotadas por T_1. As que podem ser acessadas a partir de T_1 e ainda não estão em $\{T_0, T_1\}$ serão chamadas de T_2. Continuando esse processo, podemos definir $T_3, T_4, \dots$. Se não existir um ciclo com não mais que 20 cidades, como cada cidade possui grau pelo menos 3, então para cada um dos primeiros patamares T_i possui pelo menos o dobro de cidades de T_{i-1}.



Se existirem mais de 10 patamares, o número de cidades será de pelo menos

$$\begin{aligned} |T_0| + |T_1| + |T_2| + \dots + |T_{10}| &\geq \\ 1 + 2 + 4 + \dots + 2^{10} &= \\ 2047 &> \\ 1999. \end{aligned}$$

Esse absurdo mostra que existem no máximo 10 patamares. Isso significa que, para algum $i \leq 9$, as cidades que podem ser acessadas a partir de T_i estão em $\{T_0, T_1, \ldots, T_{i-1}\}$ e isso gera um ciclo com não mais que 20 cidades.

31 *Os ângulos do quadrilátero*

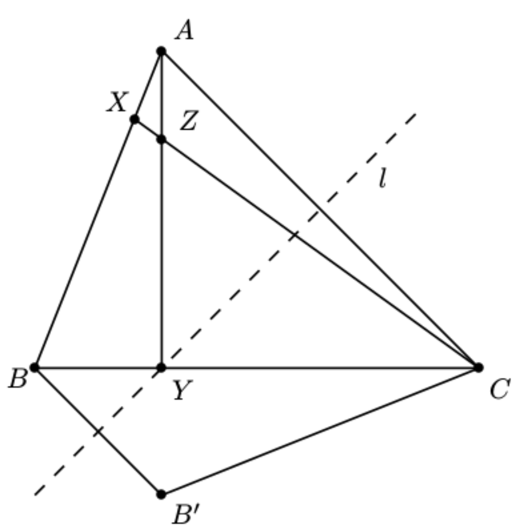
Num triângulo ABC, tomamos pontos X, Y sobre os lados AB, BC, respectivamente. Se AY e CX se intersectam em Z e

$$AY = YC \quad \text{e} \quad AB = ZC,$$

verifique que

$$\angle CZY = \angle ABY.$$

31 *Os ângulos do quadrilátero – Solução*



Sejam l a mediatriz do segmento AC e B' o simétrico de B com respeito a l. Então, como A é o simétrico de C, os triângulos ABY e $CB'Y$ são congruentes, donde

$$\begin{aligned} \angle CB'Y &= \angle ABY && (1)\\ CB' &= AB. && (2) \end{aligned}$$

Além disso, os pontos A, Y, B' são colineares (pois suas reflexões C, Y, B são). A última igualdade, juntamente com a segunda relação do enunciado, dá que

$$CB' = AB = CZ.$$

Como os ângulos da base do triângulo isósceles $\triangle ZB'C$ são iguais, segue que

$$\angle CZY = \angle CB'Y = \angle ABY.$$

32 *As equipes de alunos*

Alguns alunos de uma escola foram divididos em equipes satisfazendo as seguintes condições:

i) Quaisquer 2 equipes diferentes possuem exatamente 2 membros em comum.

ii) Toda equipe possui exatamente 4 elementos.

iii) Para quaisquer 2 alunos, existe uma equipe da qual ambos não fazem parte.

a) Explique por que um par qualquer de estudantes pode participar de no máximo 3 equipes.

b) Qual o número máximo de equipes?

32 *As equipes de alunos – Solução*

a) Suponha que existem estudantes A e B participando de 4 equipes chamadas de E_1, E_2, E_3 e E_4:

$$\begin{gathered} E_1 = \{A, B, C, D\} \\ E_2 = \{A, B, E, F\} \\ E_3 = \{A, B, G, H\} \\ E_4 = \{A, B, I, J\}. \end{gathered}$$

Pela condição (iii), existe uma equipe E_5 que não possui simultaneamente os estudantes A e B. Pela condição (i), a equipe E_5 deve possuir exatamente dois membros em comum com E_1, E_2 , E_3 e E_4. Se E_5 não possuir A e nem B, então deverá possuir os elementos dos seguintes 4 conjuntos disjuntos $\{C, D\}$, $\{E, F\}$, $\{G, H\}$ e $\{I, J\}$. Isso obriga E_5 a ter mais de 4 elementos. Digamos que E_5 não possua o estudante A, mas possua o estudante B (como A e B desempenham o mesmo papel nessa análise, o estudo que faremos para A é o mesmo para B). Assim, E_5 deverá possuir pelo menos um estudante de cada um dos mesmos 4 conjuntos anteriores e novamente essa equipe será forçada a ter mais que 4 elementos. Esse absurdo mostra que um par qualquer de estudantes não pode participar de 4 equipes.

b) Considere um par de estudantes (A, B) que participa de mais de uma equipe, cuja existência é garantida pelo item (i), e estudemos as seguintes possibilidades a partir das informações do item anterior.

   1) O par (A, B) participa de exatamente três outras equipes que são chamadas de E_1, E_2, E_3:

$$\begin{gathered} E_1 = \{A, B, C, D\} \\ E_2 = \{A, B, E, F\} \\ E_3 = \{A, B, G, H\} \end{gathered}$$

Iremos mostrar que nesse caso não podem existir mais que 4 outras equipes. Repetindo o argumento do item anterior, se uma equipe não possuir A e nem B, ela possuirá todos os elementos do conjunto $\{C, D, E, F, G, H\}$ e isso produzirá um absurdo com a condição (ii). Logo, todas as demais equipes possuem A ou B e, pela condição (i), qualquer outra equipe possui exatamente um elemento de cada um dos três conjuntos: $\{C, D\}$, $\{E, F\}$ e $\{G, H\}$. Analisando as possíveis combinações dos 3 elementos restantes, em princípio, teríamos no máximo $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ escolhas associadas aos conjuntos anteriores. Entretanto, existem alguns pares de escolhas que não podem estar simultaneamente presentes para que a condição (i) seja satisfeita:

$$\begin{array}{ccc} \{C, E, G\} & \text{e} & \{D, F, H\} \\ \{C, E, H\} & \text{e} & \{D, F, G\} \\ \{C, F, G\} & \text{e} & \{D, E, H\} \\ \{C, F, H\} & \text{e} & \{D, E, G\}. \end{array}$$

Assim, podem existir no máximo mais 4 equipes além de E_1, E_2 e E_3.

2) O par (A, B) participa de exatamente duas outras equipes que são chamadas de E_1, E_2:

$$\begin{aligned} E_1 &= \{A, B, C, D\} \\ E_2 &= \{A, B, E, F\}. \end{aligned}$$

Em virtude da condição (i), a única equipe que não pode possuir simultaneamente A e B é a $\{C, D, E, F\}$. Considerando uma equipe distinta dela, novamente pelo item (i), um elemento de cada um dos conjuntos $\{A, B\}$, $\{C, D\}$ e $\{E, F\}$ deve estar presente. Isso novamente gera $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ escolhas que podem ser divididas nos seguintes pares:

$$\begin{array}{ccc} \{A, C, E\} & \text{e} & \{B, D, F\} \\ \{A, C, F\} & \text{e} & \{B, D, E\} \\ \{A, D, E\} & \text{e} & \{B, C, F\} \\ \{A, D, F\} & \text{e} & \{B, C, E\}. \end{array}$$

De cada par, apenas uma escolha pode estar presente nas equipes de estudantes e isso nos mostra que existem no máximo mais 4 equipes que contém A ou B. Considerando as duas equipes que contém $\{A, B\}$, a eventual equipe $\{C, D, E, F\}$ e as possíveis 4 outras equipes, temos um total de no máximo $2 + 1 + 4 = 7$ equipes.

Em ambos os casos, o máximo de equipes é 7. Para mostrar que é possível satisfazermos as três condições com esse número, basta considerar o seguinte exemplo:

$$\{A, B, C, H\}, \{A, D, F, H\}, \{A, E, G, H\}, \{B, D, G, H\}, \{B, E, F, H\}, \{C, D, E, H\}, \{C, F, G, H\},$$

em que cada letra, como anteriormente, representa um certo estudante.

33 *Fatorações e divisibilidade*

Usando a fatoração da diferença de quadrados, $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$, podemos escrever

$$x^{2^n} - y^{2^n} = (x^{2^{n-1}} + y^{2^{n-1}})(x^{2^{n-1}} - y^{2^{n-1}}).$$

a) Explique por que $3^{2^{2018}} - 2^{2^{2018}}$ pode ser escrito como produto de 2018 inteiros maiores que 1 e distintos.

b) Verifique que $3^{2^n} - 1 = (3^{2^{n-1}} + 1)(3^{2^{n-2}} + 1)(3^{2^{n-3}} + 1)\dots(3^2+1)(3^1+1)(3^1-1)$.

c) Usando o item anterior, verifique que 2^{n+1} é um divisor de $3^{2^n} - 1$.

d) Conhecendo a fatoração

$$x^m - y^m = (x-y)(x^{m-1} + x^{m-2}y + x^{m-3}y^2 + \ldots + xy^{m-2} + y^{m-2}),$$

encontre um inteiro positivo n com mais de 2018 divisores positivos tal que $3^{n-1} - 2^{n-1}$ é múltiplo de n.

33 *Fatorações e divisibilidade – Solução*

a) Usando a fatoração da diferença de quadrados, temos:

$$\begin{array}{rcl} x^{2^n} - y^{2^n} & = & (x^{2^{n-1}} + y^{2^{n-1}})(x^{2^{n-1}} - y^{2^{n-1}}) \\ x^{2^{n-1}} - y^{2^{n-1}} & = & (x^{2^{n-2}} + y^{2^{n-2}})(x^{2^{n-2}} - y^{2^{n-2}}) \\ x^{2^{n-2}} - y^{2^{n-2}} & = & (x^{2^{n-3}} + y^{2^{n-3}})(x^{2^{n-3}} - y^{2^{n-3}}) \\ & \dots & \\ x^2 - y^2 & = & (x+y)(x-y). \end{array}$$

Multiplicando todas as equações e cancelando os fatores repetidos, obtemos

$$x^{2^n} - y^{2^n} = (x^{2^{n-1}} + y^{2^{n-1}})(x^{2^{n-2}} + y^{2^{n-2}})\dots(x^2+y^2)(x+y)(x-y).$$

Assim, em geral, substituindo $x = 3$ e $y = 2$, $3^{2^n} - 2^{2^n}$ é o produto de n fatores da forma $2^{2^i} + 3^{2^i}$ com i pertencente ao conjunto $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$.

b) Na fatoração obtida no item anterior, basta fazer $x = 3$ e $y = 1$.

c) Como cada termo da forma $3^{2^i} + 1$ possui o fator 2 por ser par, podemos concluir que o produto de todos os números da forma $3^{2^i} + 1$, com $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ é múltiplo de 2^{n-1}. Além disso, o fator $3^{2^0} + 1 = 2^2$ possui dois fatores 2. Assim, usando a expressão encontrada no item anterior, podemos concluir que $2^{n-1} \cdot 2^2 = 2^{n+1}$ é um divisor de $3^{2^n} + 1$.

d) Seja $n = 3^{2^{2017}} - 2^{2^{2017}}$. Pelo primeiro item, todos os 2019 números da lista

$$1, 2^{2^0} + 3^{2^0}, 2^{2^1} + 3^{2^1}, \ldots, 3^{2^{2017}} + 2^{2^{2017}}$$

são divisores de n. A partir da fatoração dada, podemos concluir que se x e y são inteiros, então $x - y$ é um divisor de $x^m - y^m$. Fazendo $x = 2^{2^{2017}}$ e $y = 3^{2^{2017}}$, obtemos que $n = 3^{2^{2017}} - 2^{2^{2017}}$ é um divisor de $3^{2^{2017}m} - 2^{2^{2017}m}$, para qualquer inteiro positivo m. Note agora que

$$n - 1 = (3^{2^{2017}} - 1) - 2^{2^{2017}}.$$

Pelo terceiro item, $3^{2^{2017}} - 1$ é um múltiplo de 2^{2017}. Como $2017 < 2^{2017}$, também temos que 2^{2017} é um divisor de $2^{2^{2017}}$. Assim, $(3^{2^{2017}} - 1) - 2^{2^{2017}}$ é um número da forma $2^{2017}m$. Daí, n divide $3^{n-1} - 2^{n-1}$ e, além disso, possui pelo menos de 2019 divisores positivos.

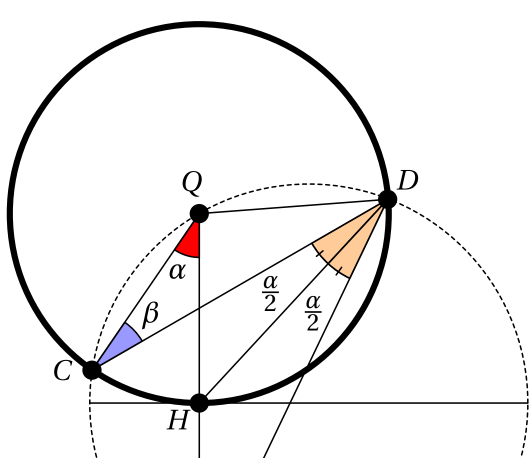
34 *Duas circunferências e uma perpendicular*

Seja Q um ponto na circunferência de diâmetro AB, sendo Q diferente de A e B. Seja QH a reta perpendicular a AB que passa por Q, sendo H pertencente a AB. Os pontos de interseção da circunferência de diâmetro AB e a circunferência de centro Q e raio QH são C e D. Prove que CD passa pelo ponto médio de QH.

34 *Duas Circunferências e uma perpendicular – Solução*

Consideremos as duas figuras a seguir. Sejam $\angle CQH = \alpha$, $\angle QCD = \beta$ e E a interseção de QH com a circunferência de diâmetro AB. Delas, podemos concluir que:

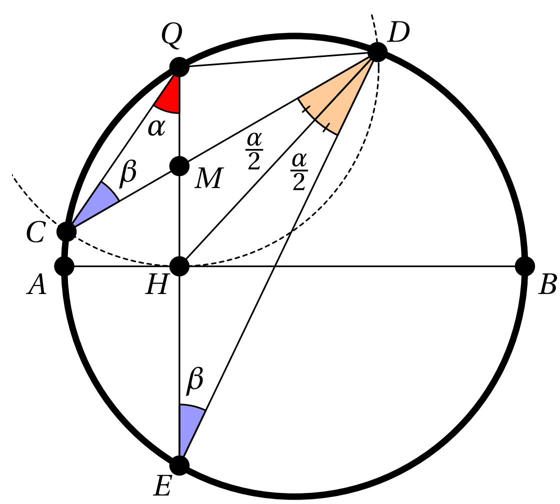
i) Temos $\angle CDH = \dfrac{\alpha}{2}$, pois na circunferência de centro em Q o seu ângulo central $\angle CQH$ é correspondente ao $\overset{\frown}{\mathrm{CH}} = \alpha$.



ii) $\angle CDE = \alpha$, pois ele está inscrito ao arco $\overset{\frown}{CE}$, assim como o ângulo $\angle CQE$, considerando a circunferência de diâmetro AB. Com isso, temos que:

$$\angle HDE = \alpha - \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}.$$

iii) $\angle QED = \beta$, pois está inscrito ao arco $\overset{\frown}{QD}$, assim como o ângulo $\angle QCD = \beta$.



iv) $QH = HE$, pois QE é perpendicular ao diâmetro AB.

Por fim,

- note que $\triangle QMC \sim \triangle DME$. Daí, podemos concluir que:

$$\frac{QM}{DM} = \frac{QC}{DE}$$
$$QM = QC \cdot \frac{DM}{DE}.$$

- Aplicando o Teorema da Bissetriz Interna no $\triangle MDE$, temos que:

$$\frac{DM}{HM} = \frac{DE}{HE}$$
$$HM = HE \cdot \frac{DM}{DE}.$$

Pelas duas conclusões anteriores e sabendo que

$$QC = HE = QH = \text{raio da circunferência de centro } Q,$$

podemos concluir que $QM = HM$. Portanto, CD passa pelo ponto médio de QH.

ÍNDICE REMISSIVO

ERRATA

1. Baralho Colorido - Página 60

   Trocar "Portanto, o total de cartas que possui o 1 é $100 + 7 \cdot 19 = 233$." por "Portanto, o total de cartas que possui o 1 é $100 + 8 \cdot 19 = 252$."

2. Dados icosaedricos - Página 61

   Trocar "Contando o total de possibilidades chegamos a 10." por "Contando o total de possibilidades chegamos a 5."