6. A arte de resolver problemas de Polya

Inocêncio Fernandes Balieiro Filho

BALIEIRO FILHO, I. F. A arte de resolver problemas de Polya. In: *Arquimedes, Pappus, Descartes e Polya*: quatro episódios da história da heurística [online]. São Paulo: Editora UNESP, 2017, pp. 133-147. ISBN: 978-85-9546-176-5. https://doi.org/10.7476/9788595461765.0008.

6
A arte de resolver problemas de Polya

Uma grande descoberta resolve um grande problema, mas há sempre uma pitada de descoberta na resolução de qualquer problema. O problema pode ser modesto, mas se ele desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolver por seus próprios meios, experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta.

George Polya, *A arte de resolver problemas,* 1994

O desenvolvimento da Matemática nos Estados Unidos recebeu um grande impulso com a imigração de matemáticos europeus durante o período nazista. Dentre esses matemáticos esteve George Polya (1887-1985) que, certamente, determinou uma linha divisória nas pesquisas sobre os procedimentos heurísticos envolvidos na resolução de problemas, influenciando o surgimento de um novo campo de pesquisa em Educação Matemática.

Nascido em Budapeste, capital da Hungria, Polya ingressou inicialmente no curso de Direito, talvez por tratar-se da profissão de seu pai, porém o curso pareceu-lhe monótono, passando para Línguas e Literaturas. Interessou-se por Latim, Física, Filosofia e finalmente por Matemática tendo, em 1912, concluído o seu doutoramento.

Em 1913, mudou-se para Göttingen, onde conheceu David Hilbert (1862-1943). Assumiu um cargo na Universidade de Zurique, em 1914, onde conheceu Adolf Hurwitz (1859-1919). Nesse mesmo ano, por ocasião da Primeira Guerra Mundial, foi requisitado pelo serviço militar de seu país, mas não respondeu à convocação. O medo de ser preso por não ter respondido a essa convocação fez com que Polya regressasse à Hungria apenas após o término da Segunda Guerra Mundial. Em Zurique conheceu sua futura esposa, Stella Weber. Casaram em 1918 e permaneceram juntos até à morte de Polya.

Trabalhou, em 1924, com Godfrey Harold Hardy (1877-1947) e John Edensor Littlewood (1885-1977) em Oxford e Cambridge. Publicou a classificação de dezessete grupos de simetria bidimensional,[1] resultado que, mais tarde, viria a inspirar Escher. Em 1925, juntamente com Gábor Szegö (1895-1995) publicou *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis* e *Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*.

Em 1940, temendo que a Suíça fosse invadida pelos alemães, decidiu ir para os Estados Unidos aceitando, em 1942, um cargo de professor na Universidade de Stanford, na qual permaneceu até à sua aposentadoria, em 1953.

Dentre as suas publicações relacionadas com aspectos inerentes ao processo heurístico, focam-se nesse capítulo as seguintes obras: *How to Solve it*, *Mathematics and Plausible Reasoning* e *Mathematical Discovery*.

Para explicar e discutir o processo heurístico e os elementos que dele fazem parte, Polya elabora um *Pequeno dicionário de heurística*[2] com 67 artigos, dando o significado e os fundamentos de cada um deles. Desses artigos, abordam-se os que apresentam uma maior relação com as discussões que estão sendo feitas no presente livro.

1 Segundo Struik (1992, p.306), "Federov, em 1891, também descobriu que havia precisamente dezessete grupos de simetria bidimensional, de padrões repetidos (tal como num papel de parede). Redescoberto por G. Polya e P. Niggli em 1924".

2 O *Pequeno dicionário de heurística* faz parte do Capítulo 3 do livro *How to Solve it*, traduzido para o português, em 1994, com o título *A arte de resolver problemas*.

O primeiro verbete que consta no dicionário é *Analogia*. Analogia é definida como uma relação de semelhança entre objetos distintos, ou seja, dois objetos são análogos se as relações entre suas partes são coincidentes. Por exemplo: dois ângulos opostos pelo vértice são iguais; dois diedros opostos pela aresta são iguais. Assim, ângulos e diedros são análogos, já que possuem relações semelhantes.

> Analogia é uma espécie de semelhança. Objetos semelhantes coincidem uns com os outros em algum aspecto; objetos análogos coincidem em certas relações das suas respectivas partes. (Polya, 1994, p.29)

Descartes, nas *Regras I* e *III*, aponta que perceber a semelhança de relações entre os objetos é uma experiência fundamental e primordial para a construção do conhecimento. Dessa forma, segundo ele,

> [...] cada um pode ver por intuição intelectual que existe, que pensa, que um triângulo é limitado somente por três linhas, um corpo esférico por uma só superfície, e outros fatos semelhantes que são muito mais numerosos do que a maioria observa, em consequência do desdém que experimentam em voltar a sua inteligência para coisas tão fáceis. (Descartes, 1908, p.14-5, tradução nossa)

Polya, do mesmo modo que Descartes, considera que a analogia, ainda que em diferentes níveis, é um princípio essencial que pode levar à descoberta da resolução de um problema.

> A analogia permeia todo o nosso pensamento, a nossa fala cotidiana e as nossas conclusões triviais, assim como os modos de expressão artística e as mais elevadas conclusões científicas. Ela é empregada nos mais diferentes níveis. É comum o uso de analogias vagas, incompletas ou obscuras, porém a analogia pode alçar-se ao nível do rigor matemático. Todos os tipos de analogia podem desempenhar uma função na descoberta da solução e, por isso, não devemos desprezar nenhum deles. (Polya, 1994, p.29)

O próximo verbete, *Conhece um problema correlato?,* refere-se especificamente à resolução de problemas, mas está relacionado com o procedimento de estabelecer analogias, porque ao procurar um problema que seja correlato ao que se pretende resolver, tem-se que buscar relações semelhantes entre eles.

> Conhece um problema correlato? É difícil imaginar um problema absolutamente novo, sem qualquer semelhança ou relação com qualquer outro que já haja sido resolvido; se um tal problema pudesse existir, ele seria insolúvel. De fato, ao resolver um problema, sempre aproveitamos algum problema anteriormente resolvido, usando o seu resultado, ou o seu método, ou a experiência adquirida ao resolvê-lo. Além do que, naturalmente, o problema de que nos aproveitamos deve ser, de alguma maneira, relacionado com o nosso problema atual. Daí a pergunta: Conhece um problema correlato? (ibidem, p.36)

Ao estar diante de uma proposição que deve ser demonstrada ou refutada, supondo que se tenha uma compreensão global dessa, Polya propõe que se deve passar ao exame de suas partes principais, a hipótese e a conclusão, sendo necessário compreender perfeitamente cada uma delas. Em alguns casos, é preciso decompor algumas partes em outras mais específicas e examiná-las separadamente. Com efeito, segundo Polya,

> Decomposição e recombinação constituem importantes operações mentais.
>
> Examina-se um objeto que desperta o interesse ou provoca a curiosidade: a casa que se pretende alugar, um telegrama importante mas obscuro, qualquer objeto cujas finalidades e origem intrigam, ou qualquer problema que se queira resolver. Tem-se uma impressão do objeto como um todo, mas esta impressão possivelmente não é bastante definida. Um detalhe sobressai e sobre ele se focaliza a atenção. Em seguida, concentra-se num outro detalhe, depois ainda outro. Diversas combinações de detalhes podem apresentar-se e,

> um pouco depois, considera-se novamente o objeto como um todo, mas agora ele é visto de maneira diferente. Decompõe-se o todo em suas partes e recombinam-se as partes num todo mais ou menos diferente. (ibidem, p.41)

Para Descartes (1908, p.97, tradução nossa), na *Regra XIII*, "se compreendemos perfeitamente uma questão, é necessário abstraí-la de todo o conceito supérfluo, deduzi-la à sua maior simplicidade e dividi-la em partes tão pequenas quanto possível enumerando-as". E afirma, na *Regra VII*, que para conhecer por completo o objeto pesquisado deve-se enumerar as partes que o compõem para analisá-las e conhecer as relações que existem entre elas. No entanto, após a decomposição e recombinação das partes do objeto, nem sempre é elementar a reconstituição das operações mentais que levaram a um resultado. De fato,

> a observação do que aqui é proposto é necessária para admitir como certas essas verdades que, ditas anteriormente, são deduzidas dos princípios primeiros e conhecidas por meio de si mesmo, mas não imediatamente. Com efeito, isto se faz às vezes por um encadeamento tão longo de consequências que após termos atingido essas verdades, não é fácil refazermos o percurso que para aí nos conduziu; é por isso que dizemos ser necessário remediar a fraqueza da memória por uma espécie de movimento contínuo do pensamento. Se, portanto, por exemplo, diversas operações me fizerem conhecer imediatamente que relação há entre as grandezas *A* e *B*, depois entre *B* e *C*, depois entre *C* e *D*, e enfim entre *D* e *E*, eu não vejo por isso qual é esta [relação] que existe entre *A* e *E*, e não posso fazer uma ideia precisa segundo as relações já conhecidas, a menos que me lembre de todas. Eis porque percorri certo número de vezes as espécies de movimento contínuo da imaginação, a qual vê simultaneamente cada objeto em particular e o conjunto ao qual pertence, até que eu tenha adquirido o automatismo de passar da primeira relação à última tão rapidamente que não deixe quase nenhum papel a memória, me pareça ver o todo simultaneamente por intuição. Com efeito,

> desta maneira, ajudando a memória, corrige-se, também, a lentidão do espírito e estende-se de alguma maneira sua capacidade. (ibidem, p.39-40, tradução nossa)

Os métodos de demonstração por absurdo e demonstração indireta são considerados por Polya instrumentos de descoberta e, desse modo, presentes na atividade heurística. Assim, são incluídos entre os artigos do *Dicionário*:

> Demonstração por absurdo e demonstração indireta. São procedimentos diferentes, porém correlatos.
>
> A demonstração por absurdo mostra a falsidade de uma suposição derivando dela um absurdo flagrante. É um procedimento matemático, mas se assemelha à ironia, que é o procedimento predileto dos satiristas. A ironia adota, com todas as aparências, uma determinada opinião, que é exagerada e repetida até conduzir a um manifesto absurdo.
>
> A demonstração indireta estabelece a verdade de uma afirmação por revelar a falsidade da suposição oposta. Desse modo, ela apresenta certa semelhança com a astúcia do político que procura firmar os méritos de um candidato pela demolição da reputação do seu oponente.
>
> Tanto a demonstração por absurdo quanto a demonstração indireta são eficazes instrumentos da descoberta, que se apresentam naturalmente a todo espírito atento. (Polya, 1994, p.52-3)

Na citação acima, Polya toma o cuidado de diferenciar demonstração indireta e demonstração por absurdo. Ainda que possam parecer processos idênticos, a demonstração por absurdo é assentada em convenções quanto ao uso da linguagem em Matemática, ao passo que a demonstração indireta envolve o *princípio do terceiro excluído*,[3] um axioma fundamental da Lógica.

---

3 O princípio do terceiro excluído afirma que ou *A* é verdadeiro, ou *A* é falso, em que *A* é qualquer proposição passível de análise. Em essência, o axioma exclui qualquer estado intermediário entre a veracidade e a falsidade de *A*.

Assim, suponha que se deseja provar que "se *A*, então *B*". Utilizando a demonstração por absurdo tem-se que provar que é impossível, ao mesmo tempo, termos *A* verdadeiro e *B* falso, ou seja, supondo a veracidade de *A* e a falsidade de *B*, chega-se a uma contradição. Já na demonstração indireta, tem-se de provar que "se *B* for falso, então *A* será falso", isto é, tem-se de supor *B* falso e deduzir que *A* será falso.

No Capítulo 1 foi mencionado que o método de redução ao absurdo, amplamente utilizado pelos matemáticos gregos, resulta do princípio da não contradição, base dos raciocínios do filósofo eleata Zenão, considerado por Aristóteles como o inventor da dialética. Conhecendo-se, *a priori*, a validade de uma proposição, aplica-se a redução ao absurdo, supondo válida a negação da hipótese, obtendo-se uma contradição. Convém salientar que o método de redução ao absurdo é uma forma de demonstração indireta e não de demonstração por absurdo.

Agora, chega-se ao verbete central para este trabalho: heurística. Para definir heurística moderna, Polya baseia-se nos significados que foram atribuídos ao termo *heurística* por autores que se dedicaram ao estudo dos processos de invenção, no transcorrer da história.

> Heurística, heurética ou *ars inveniendi* era o nome de um certo ramo de estudo, não bem delimitado, pertencente à Lógica, à Filosofia ou à Psicologia, muitas vezes delineado mas raramente apresentado com detalhes, hoje praticamente esquecido. O objetivo da heurística é o estudo dos métodos e das regras da descoberta e da invenção. Alguns indícios desse estudo podem ser encontrados em trabalho dos comentaristas de Euclides. A este respeito, Pappus tem uma passagem particularmente interessante. As mais famosas tentativas de sistematização da heurística devem-se a Descartes e a Leibniz, ambos grandes matemáticos e filósofos. Bernard Bolzano apresentou notável descrição pormenorizada da heurística. (ibidem, p.86)

Heurística moderna procura compreender o processo solucionador de problemas, particularmente as operações mentais, típicas

> desse processo, que tenham utilidade. Dispõe de várias fontes de informação, nenhuma das quais deve ser desprezada. Um estudo consciencioso da heurística deve levar em conta tanto as suas bases lógicas quanto as psicológicas. Não deve esquecer aquilo que os autores antigos como Pappus, Descartes, Leibniz e Bolzano escreveram sobre o assunto, mas muito menos pode desprezar a experiência imparcial. A experiência na resolução de problemas e a experiência na observação dessa atividade por parte de outros deve constituir a base em que se assenta a Heurística. Neste estudo, não devemos descurar de nenhum tipo de problema, e assim procurar aspectos comuns na maneira de tratar de problemas de toda sorte: devemos considerar os aspectos gerais, independente do assunto específico do problema. O estudo da heurística tem objetivos "práticos": melhor conhecimento das típicas operações mentais que se aplicam à resolução de problemas pode exercer uma certa influência benéfica sobre o ensino, particularmente sobre o ensino da Matemática. (ibidem, p.87)

Vestígios de heurística também são encontrados no trabalho *O método*, de Arquimedes. Antes da descrição de seu método mecânico de demonstração, na carta enviada a Eratóstenes, Arquimedes escreve que considera seu método diferente de uma demonstração, sendo ele uma investigação da demonstração. Também nota-se que uma das condições apontadas para a aplicação de seu método é o conhecimento prévio do que se quer demonstrar.

> Mas vejo-te, como afirmo, que tu és um estudioso sério, que tu dominas de uma maneira notável as questões de filosofia e que tu sabes apreciar com seu valor as questões de matemática que se apresentam, e tenho julgado a propósito descrever e desenvolver neste mesmo livro, as características próprias de um método segundo o qual te será permitido examinar alguns dos que primeiro me foram evidentes pela mecânica, foram demonstrados mais tarde pela geometria, por causa da investigação por este método ser diferente de uma demonstração; a investigação da demonstração preconcebida de um certo conhecimento dos problemas por intermédio desse

> método, com efeito, é mais fácil que sua investigação sem conhecimento. (Arquimedes, 1971, p.167-8, tradução nossa, ver Anexo)

Arquimedes deixa clara sua intenção em discutir o processo heurístico envolvido em seu método mecânico, considerando que tal discussão traria contribuições aos trabalhos de outros geômetras que poderiam aplicar o seu método para a demonstração de novos teoremas.

> Mas acontece-me também que a descoberta dos teoremas publicados agora tem sido gerada de modo semelhante anteriormente; também tenho querido redigir e publicar este método ao mesmo tempo porque, como disse anteriormente, tenho querido parecer seguro por ter proferido palavras vãs e estou persuadido de trazer uma contribuição muito útil à matemática, uma vez que, sou de opinião que alguns pósteros chegarão a encontrar por meio do método exposto outros teoremas que a mim ainda não me hão ocorrido. (ibidem, p.168, tradução nossa, ver Anexo)

Pelas razões apontadas e discutidas, pode-se considerar que *O método* de Arquimedes é um tratado que contém processos de atividade heurística. Fica evidente a preocupação em estabelecer um processo de raciocínio heurístico que pudesse auxiliá-lo na descoberta da solução de uma proposição para que, posteriormente, fosse aplicado o método da exaustão em sua demonstração.

> A heurística trata do comportamento humano em face de problemas. É de presumir que isto venha ocorrendo desde os primórdios da sociedade humana e a quintessência de antigas observações a respeito parece ter sido preservada na sabedoria dos provérbios. (Polya, 1994, p.88)

Uma das componentes do raciocínio heurístico é a indução, cuja definição, adotada por Polya, é aquela apresentada por Aristóteles e utilizada por Descartes na *Regra VII*, citada no Capítulo 5.

> Indução e indução matemática. A indução é o processo da descoberta de leis gerais pela observação de casos particulares. É utilizada em todas as ciências, inclusive na Matemática. A indução matemática é utilizada exclusivamente na Matemática, para demonstrar teoremas de um certo tipo. É de lamentar que estes nomes estejam relacionados, visto que há muito pouca conexão lógica entre os dois processos. Há, no entanto, alguma conexão prática, já que muitas vezes utilizamos ambos conjuntamente. (ibidem, p.91)

O raciocínio indutivo é um caso particular do raciocínio heurístico; dessa forma, a indução assume o mesmo papel tanto na investigação matemática quanto na investigação de outras ciências.

> Mas devemos acrescentar que muitos fatos matemáticos foram primeiro encontrados por indução e demonstrados depois. A Matemática, apresentada com rigor, é uma ciência sistemática, mas a Matemática em desenvolvimento é uma ciência indutiva experimental. (ibidem, p.93)

A indução faz parte da aprendizagem do homem ao longo da vida, isto é, ela está presente na construção cognitiva, constituindo um processo pelo qual se obtêm informações das experiências com o objetivo de chegar a conclusões verdadeiras, passando a ter um acúmulo de conhecimento que permita estabelecer estratégias eficientes para a resolução de problemas.

> A indução termina por adaptar nossa mente aos fatos. Quando comparamos nossas ideias com observações pode haver acordo ou desacordo. Se há acordo sentimos mais confiança em nossas ideias; se há desacordo, as modificamos. Depois de repetidas modificações, nossas ideias costumam adaptar-se aos fatos muito melhor. Nossas primeiras ideias sobre qualquer tema novo estão muito próximas de ser errôneas, ao menos em parte; o processo indutivo nos dá uma oportunidade para corrigi-las, adaptando-as à realidade. (idem, 1973a, p.55)

> A experiência modifica as crenças humanas. Nós aprendemos da experiência, ou, melhor dizendo, deveríamos aprender dela. Fazer o melhor uso possível da experiência é um dos grandes empreendimentos humanos e trabalhar por ela é a vocação dos cientistas.
>
> Um cientista digno desse nome tratará de extrair de uma determinada experiência as conclusões mais corretas e acumular as experiências mais úteis para estabelecer a melhor linha de investigação para uma dada questão. O procedimento do cientista para tratar a experiência pode ser chamado indução. (ibidem, p.3-4)

Na *Regra VII*, Descartes discute também a dedução, mas Polya não a menciona, já que ela está relacionada à demonstração de uma proposição em si e não aos processos heurísticos relacionados a sua resolução.

O próximo tópico discutido é a intuição, ainda que esse não seja um dos verbetes do *Pequeno dicionário de heurística* de Polya. Entretanto, a intuição, presente no processo heurístico, é tratada por Descartes e aparece em alguns trechos da obra de Polya.

> Para ser um bom matemático, ou um bom jogador, ou bom no que quer que seja, devemos ter uma boa intuição. Com o propósito de ter uma boa intuição, parece-me, que você deveria começar sendo, naturalmente, sagaz. Ainda que ser sagaz não é o bastante. Você deveria examinar suas intuições, compará-las com os objetivos, modificá-las se for necessário, e assim adquirir uma extensa (e intensa) experiência das intuições que fracassam e as que chegam a ser certas. Com tal experiência como base você será muito mais capaz de julgar competentemente quais intuições têm a oportunidade de se tornarem corretas e quais não. (ibidem, p.111-2)

Na *Regra III*, Descartes define a intuição ou método intuitivo como uma ação da mente pela qual se obtém um conhecimento imediato. A intuição e o discurso estão constantemente associados no ato do pensamento, já que todo trabalho mental parte de uma intuição para chegar a outra intuição, por intermédio do discurso.

Descartes diferencia dois tipos de intuição: intuição sensível e intuição intelectual. A primeira realiza-se a cada instante. Assim, quando com um só olhar capta-se um objeto, por exemplo, um livro, tem-se um tipo de intuição imediata, isto é, uma comunicação (relação) estritamente direta entre observador e o objeto. Já a segunda envolve um empenho, por parte do observador, para captar segundo um ato imediato da mente aquilo que constitui a natureza dos objetos, ou seja, aquilo que o objeto é. Para isso devem ser utilizados os elementos que constituem o raciocínio heurístico.

> Por intuição, entendo não a confiança flutuante que dão os sentidos ou o julgamento enganador de uma imaginação com más construções, mas o conceito que a inteligência pura e atenta forma com tanta facilidade e distinção que não resta absolutamente nenhuma dúvida sobre aquilo que compreendemos; ou então, o que é a mesma coisa, o conceito que forma a inteligência pura e atenta, sem dúvida possível, conceito que nasce somente da luz da razão e cuja certeza é maior, por causa de sua maior simplicidade, que a da própria dedução, ainda que essa última não possa ser mal feita mesmo pelo homem, como notamos mais acima. Assim, cada um pode ver por intuição intelectual que existe, que pensa, que um triângulo é limitado somente por três linhas, um corpo esférico por uma só superfície, e outros fatos semelhantes que são muito mais numerosos do que a maioria observa, em consequência do desdém que experimentam em voltar a sua inteligência para coisas tão fáceis. (Descartes, 1908, p.14-5, tradução nossa)

Polya (1973a, 1994) define *raciocínio demonstrativo* como o resultado do trabalho do matemático, por exemplo, a prova, e *raciocínio plausível* (*heurístico*) como o processo de descoberta dessa prova, segundo a intuição. Esta intuição intelectual a que Polya se refere tem o mesmo sentido da que consta nas *Regras III* e *VII* de Descartes e que foram discutidas no capítulo anterior.

> Raciocínio heurístico é aquele que não se considera final e rigoroso, mas apenas provisório e plausível, e que tem por objetivo descobrir a solução do problema que se apresenta. Somos muitas vezes levados a usar o raciocínio heurístico. Teremos a absoluta certeza quando chegarmos à solução completa, mas frequentemente, antes de chegarmos à certeza absoluta, teremos de nos satisfazer com uma estimativa mais ou menos plausível. É possível que precisemos do provisório antes de atingirmos o final. Para chegarmos a uma demonstração rigorosa, é necessário o raciocínio heurístico, assim como andaimes são necessários à construção de um edifício. (Polya, 1994, p.132)

Polya (1973a, p.V) enfatiza que apesar de ser considerada como uma ciência demonstrativa, ainda que essa seja somente uma das suas características, a Matemática, em seu desenvolvimento, assemelha-se a qualquer outro conhecimento humano:

> Asseguramos nosso conhecimento matemático por meio do raciocínio demonstrativo, mas apoiamos nossas conjecturas por meio do raciocínio plausível. Uma prova matemática é um raciocínio demonstrativo, mas a evidência indutiva do físico, a evidência circunstancial do advogado, a evidência documental do historiador e a evidência estatística do economista pertencem ao raciocínio plausível.

Para provar um teorema ou para escrever a prova desse teorema com todos os detalhes é necessário, antes de mais nada, intuir o teorema ou a sua prova; ou seja, é preciso combinar observações, seguir analogias e realizar a "prova" mais de uma vez. Ainda que a Matemática seja considerada como uma ciência demonstrativa, Polya enfatiza que, como disciplina escolar, é a única que possibilita a aprendizagem do raciocínio heurístico.

> Há outro ponto concernente a estas duas formas de raciocínio, que merece nossa atenção. Todos sabemos que a Matemática oferece uma excelente oportunidade de aprender o raciocínio demonstrativo,

> mas eu defendo também que não há disciplina nos programas usuais das escolas que ofereça uma oportunidade semelhante de aprender o raciocínio plausível. Dirijo-me a todos os estudantes interessados em Matemática de todos os graus e digo-lhes: "Aprendamos a provar, desde logo, mas aprendamos também a intuir". (ibidem, p.V-VI)

O último verbete do *Dicionário* citado, *termos, antigos e novos*, foi selecionado por fazer referência aos conceitos de análise e síntese, já discutidos no Capítulo 3 deste livro, quando foram abordados os processos heurísticos utilizados pelos geômetras gregos.

> Termos, antigos e novos, que descrevem a atividade de resolver problemas são muitas vezes ambíguos.
>
> 1. Análise foi muito bem defendida por Pappus e é um termo útil, que caracteriza um processo típico de estabelecer um plano, a partir da incógnita (ou da conclusão) e caminhando no sentido dos dados (ou da hipótese). Infelizmente, a palavra adquiriu muitos significados diferentes (como exemplos, análise matemática, química, lógica) e, portanto, lastima-se ter de evitá-la no presente trabalho.
>
> [...]
>
> 8. Síntese foi usada por Pappus com um sentido bem definido, que merecia ser conservado. Lamenta-se, porém, evitá-lo no presente livro, pelas mesmas razões apresentadas para a sua contraparte "análise" (ver 1). (idem, 1994, p.152-3)

Ainda que tenha evitado o uso de tais termos, Polya, em sua obra, faz uma paráfrase do trecho do Livro VII de *A coleção matemática* de Pappus, que define os processos de análise e de síntese, e para exemplificar tais processos, utiliza uma situação não matemática:

> Um homem primitivo deseja atravessar um riacho, mas não pode fazê-lo de maneira habitual porque o nível da água subiu desde a véspera. Por isso, a travessia tornou-se o objeto de um problema: "a travessia do riacho" é o x deste problema primário. O homem pode lembrar-se de já ter atravessado algum outro riacho por uma árvore

> caída. Ele procura ao redor uma árvore caída que lhe sirva, que se torna a sua nova incógnita, o seu y. O homem não encontra nenhuma nessas condições, mas há muitas árvores em pé à margem do riacho; ele deseja que uma delas caia. Ser-lhe-ia possível fazer uma árvore cair atravessada sobre o riacho? Surgem uma grande ideia e uma nova incógnita: por que meios poderia o homem derrubar a árvore sobre o riacho?
>
> Esta sequência de ideias deve chamar-se análise, se aceitamos a terminologia de Pappus. Se o homem primitivo conseguir concluir a sua análise, ele poderá tornar-se o inventor da ponte e do machado. Qual será a síntese? A tradução das ideias em ações. O ato final da síntese será a passagem do homem por sobre a árvore através do riacho. (ibidem, p.106)

Diante das discussões sobre os processos envolvidos na atividade heurística, feitos no livro *How do Solve it*, Polya elabora um plano sobre *Como resolver um problema*. Tal plano é composto por quatro fases: *compreensão do problema*, *estabelecimento de um plano*, *execução do plano* e *retrospecto*.

A primeira fase estabelece que se deve compreender o problema, ou seja, é necessário que os dados do problema e o que se pede estejam evidentes para que seja possível resolvê-lo. Na segunda fase, valendo-se da percepção das relações entre as partes do problema, que poderão dar uma ideia de sua resolução, é estabelecido um plano. Em seguida, na terceira fase, o plano estabelecido é executado e, finalmente, na quarta fase, o procedimento executado é revisto, fazendo-se uma análise e discussão da resolução apresentada.

Para Polya o pensamento matemático não está relacionado apenas com axiomas, definições e demonstrações rigorosas, mas também com analogias, induções, conjecturas, relações, generalizações e outros processos mentais. Nessa perspectiva, são discutidos nos dois livros analisados exemplos de problemas de Matemática que buscam estimular atitudes e hábitos de pensamento desejáveis para o desenvolvimento do raciocínio heurístico e que enfatizam o *saber-fazer*, ou seja, problemas que valorizem, mais do que a obtenção da resposta certa, os processos envolvidos na sua resolução.