MS211 – Cálculo Numérico (2^o Semestre de 2025)
Professor: Marcos Eduardo Valle
PED: Roberto Andrés Pereira Torres

Atividade 01 – Sistemas Lineares e Erros e Aritmética de Ponto Flutuante.

Condições e Datas

O projeto deve ser realizado **individualmente** utilizando `Python`. Lembramos que o `Python` é livre e pode ser instalado, por exemplo, usando o ambiente `Conda` disponível em `https://conda.io`. Ele também pode ser acessado online usando o Google Colab através do link `https://research.google.com/colaboratory/`.

O projeto deve ser entregue no prazo especificado no Google Classroom. O arquivo deve descrever de forma clara os procedimentos adotados e as conclusões. Em particular, responda a(s) pergunta(s) abaixo de forma clara, objetiva e com fundamentos matemáticos. Recomenda-se que os códigos sejam anexados, mas **não serão aceitos trabalhos contendo apenas os códigos**! Pode-se submeter o arquivo .ipynb do Google Colab com os comandos e comentários.

Questão 1:

Considere o sistema linear $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ em que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.3 \\ 0.4 & 0.5 & 0.6 \\ 0.7 & 0.8 & 0.9 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.3 \\ 0.5 \end{bmatrix}.$$

(a) Mostre que a matriz $\mathbf{A}$ é singular e descreva o conjunto de soluções do sistema linear $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

(b) Se fôssemos usar o método da eliminação de Gauss com pivotamento parcial para resolver este sistema usando aritmética exata, em que ponto o processo falha?

(c) Como algumas das entradas da matriz $\mathbf{A}$ não são exatamente representáveis em um sistema de ponto flutuante na base 2, a matriz não é singular quando inserida num computador. Portanto, o método da eliminação de Gauss não falha ao tentar resolver o sistema linear. Resolva o sistema linear $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ em `python` usando a biblioteca `Numpy` ou `SciPy`.. Compare a solução calculada com sua descrição do conjunto solução definida no item (a).

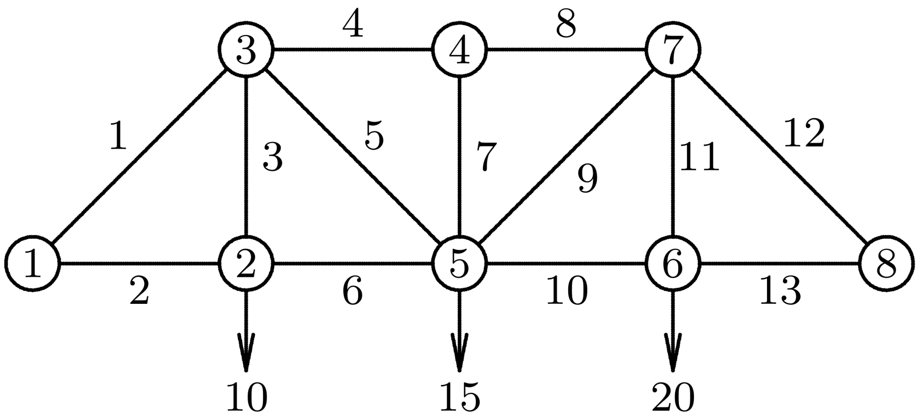
(d) Qual é o número de condição da matriz $\mathbf{A}$? Quantos dígitos de precisão você espera na solução numérica do sistema linear?

Questão 2:

A Figura 1 representa uma treliça plana com 13 barras (as linhas numeradas) ligados por 10 juntas (os círculos numerados). As cargas indicadas, em toneladas, são aplicadas nas juntas 2, 5 e 6. Desejamos determinar a força resultante em cada barra da treliça, denotadas por $f_1, \ldots, f_{13}$.

Para que a treliça esteja em equilíbrio estático, não deve haver nenhuma força resultante, horizontal ou verticalmente, em qualquer junta. Assim, podemos determinar as forças da barra igualando as forças horizontais a esquerda e a direita em cada junta, e da mesma forma igualando as forças verticais para cima e para baixo em cada junta. Para as oito juntas, isso daria 16 equações, que é mais do que as 13 forças desconhecidas a serem determinadas. Para que a treliça seja estaticamente determinada, isto é, para que haja uma solução única, assumimos que a junta 1 é fixada rigidamente horizontalmente e verticalmente. Além disso, a junta 8 é fixada verticalmente. Resolvendo as forças das barras nas componentes verticais

Figura 1: Diagrama da treliça da Questão 2.



e horizontais e tomando $\alpha = \cos(\pi/4) = \text{sen}(\pi/4) = \sqrt{2}/2$, encontramos o seguinte sistema de equações para as forças $f_1, \ldots, f_{13}$ das barras:

$$\text{Junta 2: } \begin{cases} f_2 = f_6 \\ f_3 = 10 \end{cases}$$

$$\text{Junta 3: } \begin{cases} \alpha f_1 = f_4 + \alpha f_5 \\ \alpha f_1 + f_3 + \alpha f_5 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Junta 4: } \begin{cases} f_4 = f_8 \\ f_7 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Junta 5: } \begin{cases} \alpha f_5 + f_6 = \alpha f_9 + f_{10} \\ \alpha f_5 + f_7 + \alpha f_9 = 15 \end{cases}$$

$$\text{Junta 6: } \begin{cases} f_{10} = f_{13} \\ f_{11} = 20 \end{cases}$$

$$\text{Junta 7: } \begin{cases} f_8 + \alpha f_9 = \alpha f_{12} \\ \alpha f_9 + f_{11} + \alpha f_{12} = 0 \end{cases}$$

$$\text{Junta 8: } \begin{cases} f_{13} + \alpha f_{12} = 0 \end{cases}$$

(a) Determine a matriz $\mathbf{A}$ e o vetor $\mathbf{b}$ do sistema linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ cuja solução corresponde ao vetor $\mathbf{f} = [f_1, \ldots, f_{13}]$ contendo as forças nas barras da treliça.

(b) Resolva o sistema linear usando o `python` usando a biblioteca `Numpy` ou `SciPy`.

(c) Observe que a matriz $\mathbf{A}$ do sistema linear é esparsa. É possível resolver o sistema linear usando os métodos de Gauss-Jacobi? E usando o método de Gauss-Seidel, é possível resolver o sistema linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$? Justifique sua resposta.