MS211 – Cálculo Numérico (1^o Semestre de 2022)
Marcos Eduardo Valle

Atividade 03 – Métodos numéricos para resolução de problemas de valor inicial e de contorno.

Condições e Datas

O projeto deve ser realizado **individualmente** utilizando `Python`. Lembramos que o `Python` é livre e pode ser instalado, por exemplo, usando o ambiente `Conda` disponível em `https://conda.io`. Ele também pode ser acessado online usando o Google Colab através do link `https://research.google.com/colaboratory/`.

O projeto deve ser entregue no prazo especificado no Google Classroom. O arquivo deve descrever de forma clara os procedimentos adotados e as conclusões. Em particular, responda a(s) pergunta(s) abaixo de forma clara, objetiva e com fundamentos matemáticos. Recomenda-se que os códigos sejam anexados, mas **não serão aceitos trabalhos contendo apenas os códigos**! Pode-se submeter o arquivo .ipynb do Google Colab com os comandos e comentários.

Questão 1:

O modelo SIR – abreviação de suceptível, infectado e recuperados – proposto por Kermack e MacKendrich é um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem amplamente usado no estudo de doenças infecciosas. Nesse modelo, diante a exposição de uma doença infecciosa, a população é dividida em compartimentos $S \equiv S(t)$, $I \equiv I(t)$ e $R \equiv R(t)$, que representam a quantidade de indivíduos susceptíveis, infectados e recuperados, respectivamente. A interação entre os compartimentos se dá pelo seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\frac{dS}{dt} = -\beta IS \tag{1}$$
$$\frac{dI}{dt} = \beta IS - \nu I, \tag{2}$$
$$\frac{dR}{dt} = \nu I \tag{3}$$

em que $\beta > 0$ e $\nu > 0$ são parâmetros relacionados às taxas de infecção e recuperação, respectivamente. Considere $\beta = 0.8$, $\nu = 0.3125$ e a condição inicial $S(0) = 0.99$, $I(0) = 0.01$ e $R(0) = 0$, expressa em termos de porcentagem da população total.

(a) Calcule a porcentagem de indivíduos susceptíveis, infectados e recuperados em $t = 50$, ou seja, determine $S(50)$, $I(50)$ e $R(50)$.

(b) Quando houve o maior número de infectados? Ou seja, determine t^* tal que $I(t^*)$ é máximo. Justifique sua resposta.

(c) Apresente, no mesmo gráfico, a população de indivíduos susceptíveis, infectados e recuperados em função do tempo, para $t \in [0, 50]$.

Questão 2:

Considere o problema de valor de contorno

$$v'' + \operatorname{sen}(x)v' + v = \big(1 - \cos(x)\big)e^{\cos(x)}, \quad v'(0) = 0 \quad \text{e} \quad v(4\pi) = e.$$

(a) Escreva explicitamente o sistema de equações lineares que deve ser resolvido para obter uma aproximação numérica da solução do problema de valor de contorno acima usando o método de diferenças finitas com $h = \pi$.

(b) Encontre uma aproximação numérica do problema de valor de contorno acima usando o método de diferenças finitas com $h = \pi/16$.

(c) Compare graficamente a solução numérica obtida pelo método da diferenças finitas com a solução analítica $v(x) = e^{\cos(x)}$.