Trabalho 1 :

Métodos Diretos e Iterativos para Sistemas de equações lineares e erros numéricos envolvidos

Dado o seguinte sistema de n=10 equações:

a). Determine a solução S={x_i} e o resíduo máximo das equações do sistema acima, pelo método direto de Eliminação de Gauss em precisão **simples** (variáveis single):
1a). sem Pivotação Parcial;
2a). com Pivotação Parcial;
3a). Qual das soluções acima foi a mais exata? Justifique através do cálculo do residuo máximo.
4a). Conte e imprima o número total de operações em ponto flutuante de adição/subtração, multiplicação e divisão utilizadas no escalonamento e retrosubtituição (residuos só servem para conferir e comparar diferentes soluções), através de contadores destas operações. Ex.:

```
opersum=0; operprod=0;operdiv=0;
...
      for j=k+1:n+1
            A(i,j)=A(i,j)-aux*A(k,j);opersum=opersum+1;operprod=operprod+1;
      end %j
...
opertotal=opersum+operprod+operdiv;
```

```
A = single( [
            [2.5  1.0   1.5  0.0   0.0   0.0   0.0   0.0   0.0   0.0   4];
            [0.0  0.52  0.51 0.0   0.1   0.0   0.0   0.0   0.0   0.0  -3];
            [0.9  1.0   2.9 1.0   0.0   0.0   0.0   0.0   0.0   0.0   1];
            [0.0  1.0   0.2  2.2   1.0   0.0   0.0   0.0   0.0   0.0  -1];
            [1.0  0.0   0.0  2.0  4.0  1.0   0.0   0.0   0.0   0.0  -1];
            [0.0  1.0   0.0  0.0  -2.0  4.0  -1.0   0.0   0.0   0.0   0];
            [1.0  0.0   0.0  0.0   0.0   2.0   4.0   1.0   0.0   0.0  -1];
            [0.0  1.0   0.0  0.0   0.0   0.0   1.0   3.0   1.0   0.0   1];
            [0.0  0.0   1.0  0.0   0.0   0.0   0.0  -1.0  -3.0  -1.0   3];
            [0.0  0.0   0.0  1.0   0.0   0.0   0.0   0.0   1.0   2.0 -2];
        ] );
```

b). Determine a solução S={x_i} e o resíduo máximo das equações do sistema acima, pelo método de Eliminação de Gauss em precisão **dupla** (variáveis double):
1b). sem Pivotação Parcial;
2b). com Pivotação Parcial;
3b). Qual das soluções acima foi a mais exata? Justifique através do cálculo do residuo máximo.

```
A = double( [
            [2.5 1.0  1.5  0.0   0.0   0.0   0.0   0.0   0.0   0.0   4];
            [0.0 0.52  0.51 0.0   0.1   0.0   0.0   0.0   0.0   0.0  -3];
            [0.9  1.0  2.9 1.0   0.0   0.0   0.0   0.0   0.0   0.0   1];
            [0.0  1.0  0.2  2.2   1.0   0.0   0.0   0.0   0.0   0.0  -1];
            [1.0  0.0  0.0  2.0  4.0  1.0   0.0   0.0   0.0   0.0  -1];
            [0.0  1.0  0.0  0.0  -2.0  4.0  -1.0   0.0   0.0   0.0   0];
            [1.0  0.0  0.0  0.0   0.0   2.0   4.0   1.0   0.0   0.0  -1];
            [0.0  1.0  0.0  0.0   0.0   0.0   1.0   3.0   1.0   0.0   1];
            [0.0  0.0  1.0  0.0   0.0   0.0   0.0  -1.0  -3.0  -1.0   3];
            [0.0  0.0  0.0  1.0   0.0   0.0   0.0   0.0   1.0   2.0 -2];
         ] );
```

c). Determine o erro máximo exato estimado devido aos **arredondamentos** acumulados na soluções S obtidas em 1a e 2a, uma vez que o erro de truncamento de um método direto é nulo, pois estes resultados são exatos. Os valores aproximados VA são as soluções S de 1a) e 2a) em single e os valores exatos estimados/simulados VE com pouco arredondamento são os resultados de 1b) e 2b) em double.

d). Crie uma função ou método que avalie se este sistema é Mal-Condicionado. Pode ser aplicada dentro do algoritmo de Gauss, que permite o cálculo do determinante na matriz triangularizada após o escalonamento, apenas multiplicando as diagonais principais da matriz 'escalonada'. É necessário também normalizar este determinante, dividindo-o pelo produto 'prod' dos valores médios de cada linha 'original', conforme exemplo:

```
...
prod=1.;
for i=1:n
      somalinha=0;
      for j=1:n
          somalinha= somalinha+Aoriginal(i,j)*Aoriginal(i,j);
      end
      valormediolinha=sqrt(somalinha);
      prod=prod*valormediolinha;
end
```

e). Avalie analiticamente (manualmente no relatório) se este sistema tem convergência garantida (se tem diagonal dominante) quando resolvido por métodos iterativos e se é recomendado testar o uso de fator de relaxação;

f). Determine a solução $S=\{x_i\}$ do sistema acima, em precisão **dupla**, para minimizar os efeitos dos arredondamentos, pelo método de diagonalização iterativa de Gauss-Seidel, com critério de parada máximo relativo $dif<1.10^{-4}$, obtido entre as diferenças da solução x e de seu valor anterior xi:

dif=max(abs((x.-xi)./x));

1f). com fator de relaxação ótimo, que gera a solução com menor número de iterações, entre 0,1 e 1,9 (teste caso de f=1 e depois com incrementos de 0,1, para cima de f=1 ou para baixo de f=1, conforme a direção que reduza o número de iterações). Determine este fator de relaxação ótimo para a solução obtida com menor numero de iterações;

```
x(1:n)= (0.);
Equações iterativas (Gauss-Seidel):
      x(1) = ( (4)-x(2)-( (1.5)*x(3)))/ (2.5);
      x(2) = (- (3)- (0.51)*x(3)- (0.1)*x(5))/ (0.52);
      x(3) = ( (1)-( (0.9)*x(1))-(x(2))-(x(4)))/ (2.9);
      x(4) = (- (1)-x(2)- (0.2)*x(3)-x(5))/ (2.2);
      x(5) = (- (1)-x(1)- (2)*x(4)-x(6))/ (4);
      x(6) = (-x(2)+ (2)*x(5)+(x(7))/ (4);
      x(7) = (- (1)-x(1)- (2)*x(6)-x(8))/ (4);
      x(8) = ( (1)-x(2)-x(7)-x(9))/ (3);
      x(9) = ( (3)-x(3)+x(8)+x(10))/ (-3);
      x(10) = (- (2)-x(4)-x(9))/ (2);
```

2f). Conte e imprima o número total de operações em ponto flutuante de adição/subtração, multiplicação e divisão utilizadas no metodo de Gauss-Seidel com o fator de relaxação otimizado (conte as 'n=10' operações necessárias no calculo do critério de parada 'dif'), através de contadores destas operações. Ex.:

```
...
x(1)=(4-x(2)-1.5*x(3))/ 2.5; opersum=opersum+2;operprod=operprod+1;operdiv=operprod+1;
dif=max(abs((x.-xi)./x));opersum=opersum+n;operdiv=operprod+n;
```

3f). Determine o erro máximo exato estimado devido aos **truncamentos** acumulados na soluções VA obtidas em 1f (os erros de truncamentos devem ser calculados com o mínimo de arredondamentos, portanto tudo em precisão dupla). O valor exato estimado com poucos **truncamentos** VE deve ser estimado com pelo menos com o dobro de exatidão (com 2 vezes o número de iterações ou com o dobro de exatidão no critério de parada $dif<1.10^{-8}$).

Faça um relatório claro e conciso com os resultados e conclusões de cada item e no final compare as soluções dos métodos direto com o iterativo, em relação à exatidão (maior número de digitos exatos) e desempenho (menor número de operações totais).
Junte o relatório e os algoritmos de cada item e comprima-os em arquivo único para postagem no moodle.

Solução = { 3.726141 -5.172945 -0.094939 3.094741 -2.616497 -0.449635 -1.73849 3.127102 -1.469868 -1.812436}