

Capítulo 3 - Compilação Completa

Teoria Assintótica e Teoremas Limite

Curso de Inferência Estatística - PPGEST/UFPE

Novembro 2025

Introdução ao Capítulo 3: Teoria Assintótica e Teoremas Limite

O Capítulo 3 apresenta os fundamentos da **Teoria Assintótica** em Estatística, um dos pilares mais importantes da inferência estatística moderna. Esta teoria estuda o comportamento de sequências de variáveis aleatórias e estatísticas quando o tamanho amostral tende ao infinito, fornecendo justificativas teóricas para muitos procedimentos estatísticos amplamente utilizados na prática.

Contexto e Motivação

A teoria assintótica responde a questões fundamentais como: “*O que acontece com a média amostral \bar{X}_n quando $n \rightarrow \infty$? Ela converge para a média populacional μ ? Em que sentido? Qual é a distribuição limite?*”

Estas questões são essenciais porque:

- Na prática, raramente conhecemos a distribuição exata de estatísticas complexas para amostras finitas
- Resultados assintóticos fornecem aproximações que são válidas para amostras grandes
- Justificam teoricamente o uso de testes baseados na distribuição normal, mesmo quando os dados não são normais
- Permitem comparar a eficiência de diferentes estimadores e testes

Estrutura do Capítulo

O capítulo está organizado de forma a construir progressivamente os conceitos de convergência e suas aplicações:

3.7.2 Notação Assintótica: $O(\cdot)$ e $o(\cdot)$ Introduce ferramentas matemáticas essenciais para análise assintótica:

- Notação O grande e o pequeno para sequências numéricas
- Notação O grande e o pequeno para funções reais

- Propriedades e manipulações algébricas
- Expansões de Taylor e sua relação com notação assintótica

3.7.4 Convergência em Probabilidade Desenvolve o primeiro tipo de convergência estocástica:

- Definição formal: $U_n \xrightarrow{P} u$
- Lei Fraca dos Grandes Números (versões simples e de Khinchine)
- Propriedades de convergência em probabilidade (soma, produto, quociente)
- Teorema da aplicação contínua (Slutsky)

3.7.5 Convergência em Distribuição Apresenta o conceito mais geral de convergência:

- Definição: $U_n \xrightarrow{D} U$ através de funções de distribuição
- Convergência via função geradora de momentos
- Teorema Central do Limite (TCL)
- Relação entre convergência em probabilidade e em distribuição
- Método Delta para funções de variáveis aleatórias

3.7.6 Aplicações e Exemplos Ilustra a teoria com exemplos práticos:

- Convergência de estatísticas de ordem
- Normalização de distribuições discretas (Binomial, Poisson)
- Distribuições limite para transformações não-lineares
- Aplicações do Método Delta

Objetivos de Aprendizagem

Ao final deste capítulo, espera-se que o estudante seja capaz de:

1. Utilizar corretamente a notação $O(\cdot)$ e $o(\cdot)$ em manipulações algébricas
2. Compreender e distinguir os diferentes tipos de convergência estocástica
3. Aplicar a Lei Fraca dos Grandes Números em problemas práticos
4. Reconhecer quando o Teorema Central do Limite é aplicável
5. Determinar distribuições limite de sequências de variáveis aleatórias
6. Utilizar o Método Delta para aproximar distribuições de transformações
7. Justificar aproximações normais em inferência estatística

Importância da Teoria Assintótica

A teoria assintótica é fundamental porque:

- **Justificação Teórica:** Fornece base rigorosa para aproximações usadas na prática
- **Simplicidade:** Resultados assintóticos são geralmente mais simples que resultados exatos
- **Universalidade:** O TCL explica por que a distribuição normal aparece em tantos contextos
- **Comparação:** Permite comparar a eficiência assintótica de estimadores e testes

Este capítulo não apenas fornece ferramentas técnicas essenciais, mas também desenvolve a intuição fundamental para compreender o comportamento de longo prazo de processos estatísticos, preparando o terreno para os capítulos seguintes sobre estimação e testes de hipóteses.

13♥10♥25

- Revisão: James Baxly.

3.7(a) Revisão de Convergência Estocástica

3.7.1(a) Alguns resultados limites

$$(R.1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/n} = 1, \quad (1)$$

$$(R.2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e, \quad (2)$$

$$(R.3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x. \quad (3)$$

Exemplo: Uma ilustração do uso destes resultados é a aproximação da Binomial para Poisson: Seja $X \sim \text{Binomial}(n, p_n)$ tal que $p_n = \frac{\lambda}{n} \in (0, 1)$, então

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k} \quad (4)$$

$$= \frac{n!}{(n-k)! k!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \quad (5)$$

$$= \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{n^k} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \quad (6)$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} \left(\frac{n-j}{n}\right) \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right) \quad (7)$$

e, portanto, ...

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p(X = k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=0}^{k-1} \left(1 - \frac{i}{n}\right) \quad (8)$$

$$= e \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda^k}{k!} \times \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \times \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \quad (R2)$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} \cdot 1 \quad (\text{usando R3 e R2})$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad \text{isto é } X \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \text{Poisson}(\lambda)$$

3.7.2 (O) e (o) para sequências de números reais

Sejam $\{a_n, n \geq 1\}$ e $\{b_n, n \geq 1\}$ duas sequências de números reais. Os seguintes conceitos são importantes:

$$a_n = O(b_n) \quad \text{se e só se} \quad \exists k > 0, n_0 \in \mathbb{N}(k) : \frac{|a_n|}{|b_n|} \leq k, \quad \forall n \geq n_0$$

isto é, se $|a_n/b_n|$ é limitada para n suficientemente grande. Em particular:

$$a_n = O(1) \quad \text{implica} \quad \exists k > 0, n_0 : |a_n| \leq k, \quad \forall n \geq n_0$$

Ex: $10n^2 + n = O(n^2)$ pois

$$\frac{10n^2 + n}{n^2} = 10 + \frac{1}{n} \leq 11, \quad \forall n \geq 1$$

$$10 + \frac{1}{1} = 11, \quad 10 + \frac{1}{2} = 10.5, \quad 10 + \frac{1}{3} \approx 10.333$$

Ex: $n^2 = O(6n^2 + n)$ pois

$$\frac{n^2}{6n^2 + n} = \frac{1}{6 + n^{-1}} \leq \frac{1}{6}, \quad \forall n \geq 1 \quad (9)$$

$$\frac{n^2}{6n^2 + n} = \frac{1}{6 + n^{-1}} \leq \frac{1}{6 + (1)^{-1}} = \frac{1}{7}$$

$a_n = \theta(b_n)$ se, sse, $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\varepsilon) : \frac{|a_n|}{|b_n|} \leq \varepsilon, \forall n \geq n_0$, isto é, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$. Em particular, $a_n = \theta(1)$ implica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \quad (10)$$

Ex: $n = \theta(n^2)$ pois

$$\frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (11)$$

Ex: $n^{-1} = \theta(1)$ pois

$$\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (12)$$

Teorema (Extra 1) [Propriedades de $O(\cdot)$ e $\theta(\cdot)$]

Sejam $\{a_n, n \geq 1\}$, $\{b_n, n \geq 1\}$, $\{c_n, n \geq 1\}$ e $\{d_n, n \geq 1\}$ seqüências de números reais, valem-se:

(i) Se $a_n = \theta(b_n)$, então $a_n = o(b_n)$.

(ii) Se $a_n = O(b_n)$ e $c_n = O(d_n)$, então:

$$O(b_n) \cdot O(d_n) \quad (13)$$

(ii.1) $a_n \cdot c_n = O(b_n \cdot d_n)$

(ii.2) $|a_n|^r = O(|b_n|^r)$

(ii.3) $a_n + c_n = O(\max\{|b_n|, |d_n|\})$, em que $r > 0$

(iii) Se $a_n = \theta(b_n)$ e $c_n = \theta(d_n)$, então:

(iii.1) $a_n \cdot c_n = \theta(b_n \cdot d_n)$

(iii.2) $|a_n|^r = \theta(|b_n|^r)$

(iii.3) $a_n + c_n = \theta(\max\{|b_n|, |d_n|\})$

(iv) Se $a_n = O(b_n)$ e $c_n = \theta(d_n)$, então:

$$a_n \cdot c_n = \theta(b_n \cdot d_n) \quad (14)$$

(v) Se $a_n = O(b_n)$ e $b_n = \theta(c_n)$, então $O(\theta(c_n)) = \theta(c_n)$, isto é:

$$a_n = \theta(c_n) \quad (15)$$

Exemplo:

$$O(n^{-1/3}) + O(n^{-1/2}) \stackrel{\text{ii.3}}{=} O(\max\{n^{-1/3}, n^{-1/2}\}) = O(n^{-1/3})$$

Exemplo:

$$o(1) + O(n^{-1/3}) + O(n^{-1/2}) = o(1) + O(n^{-1/3})$$

$$\stackrel{\text{ii.3}}{=} \theta(1) + O(\theta(1)) \stackrel{\text{v}}{=} \theta(1) + \theta(1)$$

$$\stackrel{\text{iii}}{=} \theta(1)$$

$$O(b_n)O(d_n)$$

$$\langle \text{iii.1} \rangle \quad a_n \cdot c_n = O(b_n \cdot d_n)$$

$$\langle \text{iii.2} \rangle \quad |a_n|^5 = O(|b_n|^5)$$

$$\langle \text{iii.3} \rangle \quad a_n + c_n = O(\max\{|b_n|, |d_n|\}), \quad \text{em que } r > 0$$

(iii) Se $a_n = \Theta(b_n)$ e $c_n = \Theta(d_n)$, então

$$\langle \text{iii.1} \rangle \quad a_n \cdot c_n = \Theta(b_n \cdot d_n)$$

$$\langle \text{iii.2} \rangle \quad |a_n|^5 = \Theta(|b_n|^5)$$

$$\langle \text{iii.3} \rangle \quad a_n + c_n = \Theta(\max\{|b_n|, |d_n|\})$$

(iv) Se $a_n = O(b_n)$ e $c_n = \Theta(d_n)$, então

$$a_n \cdot c_n = \Theta(b_n \cdot d_n)$$

(v) Se $a_n = O(b_n)$ e $b_n = \Theta(c_n)$, $O(\Theta(c_n)) = \Theta(c_n)$

$$a_n = \Theta(c_n)$$

Exemplo:

$$O(n^{-1/3}) + O(n^{-1/2}) \stackrel{\text{iii.3}}{=} O(\max\{n^{-1/3}, n^{-1/2}\}) = O(n^{-1/3})$$

Exemplo:

$$O(1) + O(n^{-1/3}) + O(n^{-1/2}) = O(1) + O(n^{-1/3})$$

$$\stackrel{\text{iii.3}}{=} \Theta(1) + O(\Theta(1)) \stackrel{\text{v}}{=} \Theta(1) + \Theta(1)$$

$$\stackrel{\text{iii}}{=} \Theta(1)$$

3.7.3 (2) $O(\cdot)$ e $o(\cdot)$ para função reais de valor real

$\Rightarrow f(x) = O(g(x))$ quando $x \rightarrow x_0$ se, e só se

$$\forall k > 0, \exists \varepsilon > 0 : \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq k, \forall x, |x - x_0| < \varepsilon$$

$$x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$$

$\Rightarrow f(x) = O(g(x))$ quando $x \rightarrow \infty (-\infty)$ se, e só se

$$\forall k > 0, \exists M > 0 (M > 0) : \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq k, \forall x > M (\forall x < M)$$

Ex: $8x^2 = O(x^2)$ quando $x \rightarrow \infty$ pois

$$\frac{8x^2}{x^2} = 8$$

$\Rightarrow f(x) = o(g(x))$ quando $x \rightarrow x_0$ se, e só se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < \varepsilon, \forall x, |x - x_0| < \delta$$

$$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

$\Rightarrow f(x) = o(g(x))$ quando $x \rightarrow \infty (-\infty)$ se, e só se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0 (M > 0) : \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < \varepsilon, \forall x > M (\forall x < M)$$

Ex: $8x^2 \neq o(x^2)$ pois

$$\frac{8x^2}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 8$$

Ex: $8x^2 = o(x^3)$ pois

$$\frac{8x^2}{x^3} = \frac{8}{x} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$$

Pode-se mostrar que se $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função derivável até a ordem n em um ponto x_0 , sua expansão em série de Taylor em torno de x_0 pode ser escrita como: Quando $x \rightarrow x_0$,

$$F(x) = \sum_{k=0}^n \frac{F^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n) \quad (\text{Expansão de Taylor})$$

Em que $F^{(k)}$ é a derivada de ordem k de $F(\cdot)$.

Ex: Mostre que

$$\log(1+x) \cdot e^x = x + O(x^2), \quad \text{quando } x \rightarrow 0 \quad (16)$$

Solução: Note que, usando a expansão de Taylor ([Expansão de Taylor](#)), valem-se

$$e^x = e^0 + x \cdot e^0 + o(x) = 1 + x + O(x^2) \quad (17)$$

e

$$\log(1+x) = \log(1) + \frac{1}{1+x} \Big|_{x=0} \cdot x + o(x) = x + O(x^2) \quad (18)$$

Logo,

$$e^x \log(1+x) = [1+x+O(x^2)] [x+O(x^2)] \quad (19)$$

$$= [1+x+O(x^2)] x + [1+x+O(x^2)] O(x^2) \quad (20)$$

$$= x + x^2 + x \cdot O(x^2) + O(x^2) + x \cdot O(x^2) + O(x^2) \cdot O(x^2) \quad (21)$$

$$= x + x^2 + O(x^3) + O(x^2) + O(x^3) + O(x^4) \quad (22)$$

$$= x + x^2 + O(x^2) + O(x^3) + O(x^4) \quad (23)$$

$$= x + x^2 + O(x^2) = x + O(x^2) + O(x^2) \quad (24)$$

$$= x + O(x^2) \quad (25)$$

3.7.4(a) Convergência em Probabilidade

Definições (3.7.4.1(a)) Considere uma sequência de v.a.'s de valores reais $\{U_n, n \geq 1\}$. U_n converge em probabilidade a um número u para $n \rightarrow \infty$ se, e só se:

$$P(|U_n - u| \geq \varepsilon) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0, \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (26)$$

Este caso é denotado como:

$$U_n \xrightarrow{P} u \quad (27)$$

15/10/25

Definição 3.7.42(a)

Sejam $\{U_n, n \geq 1\}$ uma sequência de v.a.'s e U uma v.a.

$$U_n \xrightarrow{P} U \text{ se e só se } U_n - U \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} 0.$$

Resultado 1P: Versão simples da Lei fraca dos grandes números

Sejam X_1, \dots, X_n v.a.'s i.i.d. com $\mathbb{E}(X_i) = \mu < \infty$ e $\text{Var}(X_i) = \sigma^2 < \infty$. Então:

$$\overline{X}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \mu.$$

Prova

Para um $\varepsilon > 0$ qualquer, pela desigualdade de Tchebysheff:

$$\begin{aligned} P(|\bar{X}_n - \mu| \geq \varepsilon) &= P\left((\bar{X}_n - \mu)^2 \geq \varepsilon^2\right) \\ &\leq \varepsilon^{-2} \mathbb{E}\left[(\bar{X}_n - \mu)^2\right] \\ &= \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \xrightarrow{P}_{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Logo,

$$\bar{X}_n \xrightarrow{P}_{n \rightarrow \infty} \mu.$$

Questão (extra 1)

Sejam X_1, \dots, X_n v.a.'s com $\mu < \infty$ e $\sigma^2 < \infty$. Mostre que:

$$S_n^2 \xrightarrow{P}_{n \rightarrow \infty} \sigma^2.$$

Solução Note que

$$S_n^2 = (n-1)^{-1} \sum_{i=2}^n Y_i^2 \quad \text{para } Y_i \sim N(0, \sigma^2), \quad (29)$$

em que Y_1, \dots, Y_n são v.a.'s de Helmert.

Além disso,

$$\text{Var}(Y_i^2) = \mathbb{E}[Y_i^4] - \mathbb{E}^2[Y_i^2] \quad (30)$$

$$= 3\sigma^4 - \sigma^4 = 2\sigma^4 < \infty, \quad \text{uma vez que:} \quad (31)$$

Como

$$M_{Y_i^2}(t) = e^{\frac{t^2\sigma^2}{2}}, \quad (32)$$

calculamos as derivadas:

$$\left. \frac{dM_{Y_i^2}(t)}{dt} \right|_{t=0} = t\sigma^2 e^{\frac{t^2\sigma^2}{2}} \Big|_{t=0} = 0 = \mathbb{E}(Y_i) \quad (33)$$

$$\left. \frac{d^2 M_{Y_i^2}(t)}{dt^2} \right|_{t=0} = t^2\sigma^4 e^{\frac{t^2\sigma^2}{2}} + \sigma^2 e^{\frac{t^2\sigma^2}{2}} \Big|_{t=0} = \sigma^2 = \mathbb{E}(Y_i^2) \quad (34)$$

$$\left. \frac{d^3 M_{Y_i^2}(t)}{dt^3} \right|_{t=0} = t^3\sigma^6 e^{\frac{t^2\sigma^2}{2}} + 2t\sigma^4 e^{\frac{t^2\sigma^2}{2}} + t\sigma^4 e^{\frac{t^2\sigma^2}{2}} \Big|_{t=0} = 0 = \mathbb{E}(Y_i^3) \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^4 M_{Y_i^2}(t)}{dt^4} \right|_{t=0} &= t^4\sigma^8 e^{\frac{t^2\sigma^2}{2}} + 3t^2\sigma^6 e^{\frac{t^2\sigma^2}{2}} \\ &\quad + 2t^2\sigma^6 e^{\frac{t^2\sigma^2}{2}} + 2\sigma^4 e^{\frac{t^2\sigma^2}{2}} + t^2\sigma^6 e^{\frac{t^2\sigma^2}{2}} + \sigma^4 e^{\frac{t^2\sigma^2}{2}} \Big|_{t=0} \\ &= 3\sigma^4 = \mathbb{E}(Y_i^4) \end{aligned} \quad (36)$$

Note que S_n^2 tem uma representação de média amostral, então pelo resultado 1P,

$$S_n^2 = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i^2}{n-1} \xrightarrow{P} \mathbb{E}[Y_i^2] = \sigma^2 \quad (37)$$

Resultado 2P: Sejam $\{T_n, n \geq 1\}$ uma sequência de variáveis reais tais que para algum $r \geq 0$ e $a \in \mathbb{R}$ vale-se que

$$\mathbb{E}_{g_n} = \mathbb{E}[|T_n - a|^r] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad \text{então} \quad (38)$$

$$T_n \xrightarrow{P}_{n \rightarrow \infty} a \quad (39)$$

Prova: Para qualquer $\varepsilon > 0$, por usar a desigualdade de Markov:

$$P\{|T_n - a| \geq \varepsilon\} = P\{|T_n - a|^r \geq \varepsilon^r\} \quad (40)$$

$$\leq \frac{\mathbb{E}[|T_n - a|^r]}{\varepsilon^r} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (41)$$

Logo,

$$T_n \xrightarrow{P}_{n \rightarrow \infty} a \quad (42)$$

Questão (Extra 2)

Sejam X_1, \dots, X_n v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim \text{Uniforme}(0, \theta)$ para $\theta > 0$. Mostre que

$$T_n = X_{(n)} \xrightarrow{P} \theta. \quad (43)$$

Solução

Note que

$$F_{T_n}(t) = [F_{X_1}(t)]^n \quad \text{e} \quad f_{T_n}(t) = n[F_{X_1}(t)]^{n-1} f_{X_1}(t) \quad (44)$$

e como

$$F_{X_1}(t) = \frac{t}{\theta} I_{(0, \theta)}(t) + I_{(\theta, \infty)}(t) \quad (45)$$

e

$$f_{X_1}(t) = \frac{1}{\theta} I_{(0, \theta)}(t), \quad (46)$$

temos

$$F_{T_n}(t) = \frac{t}{\theta^n} t^{n-1} I_{(0, \theta)}(t) + I_{(\theta, \infty)}(t) \quad (47)$$

e

$$f_{T_n}(t) = \frac{n}{\theta^n} t^{n-1} I_{(0, \theta)}(t). \quad (48)$$

As seguintes expressões tipo momento podem ser derivadas:

$$E[T_n] = \int_0^\theta t \cdot \frac{n}{\theta^n} t^{n-1} dt \quad (49)$$

$$= \frac{n}{\theta^n} \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^\theta = \frac{n}{n+1} \theta. \quad (50)$$

$$E[T_n^2] = \int_0^\theta t^2 \cdot \frac{n \cdot t^{n-1}}{\theta^n} dt \quad (51)$$

$$= \frac{n}{\theta^n} \left[\frac{t^{n+2}}{n+2} \right]_0^\theta = \frac{n}{n+2} \theta^2 \quad (52)$$

$$E[(T_n - \theta)^2] = E[T_n^2] - 2\theta E[T_n] + \theta^2 \quad (53)$$

$$= \frac{n}{n+2} \theta^2 - \frac{2n}{n+1} \theta^2 + \theta^2 \quad (54)$$

$$= \theta^2 \left\{ \frac{n}{n+2} - \frac{2n}{n+1} + 1 \right\} \quad (55)$$

$$= \theta^2 \left\{ \frac{n^2 + n - 2n^2 - 4n + n^2 + 3n + 2}{(n+2)(n+1)} \right\} \quad (56)$$

$$= \frac{2\theta^2}{(n+2)(n+1)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (57)$$

Logo, pelo resultado 2p:

$$T_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \theta \quad (58)$$

Resultado 3P (Lei fraca dos grandes números de Khinchine)

Sejam X_1, \dots, X_n v.a.'s reais i.i.d. com

$$E[X_i] = \mu < \infty, \quad \text{Então} \quad \bar{X}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \mu \quad (59)$$

Prova

Sejam $M_{\bar{X}_n}(t)$ e $M_{X_i}(t)$ f.m.g. de $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ e X_i , respectivamente. Logo, para $t \in \mathbb{R}$, vale-se:

$$M_{\bar{X}_n}(t) = M_{\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}}(t) \stackrel{\text{p.v.}}{=} \prod_{i=1}^n M_{X_i} \left(\frac{t}{n} \right) \quad (60)$$

$$= \left[M_{X_1} \left(\frac{t}{n} \right) \right]^n \quad (3P.1)$$

Expandindo em série de Taylor $M_{X_1} \left(\frac{t}{n} \right)$ em torno de zero (dado que $M_{X_1}(0) = 1$ e $M'_{X_1}(0) = \mu$) até a 1ª ordem, tem-se:

$$M_{X_1} \left(\frac{t}{n} \right) = M_{X_1}(0) + M'_{X_1}(0) \frac{t}{n} + o \left(\frac{t}{n} \right) \quad (61)$$

$$= 1 + \mu \frac{t}{n} + o \left(\frac{t}{n} \right) \quad (62)$$

Daí, usando resultado limite (R.3):

$$\left(1 + \frac{k}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^k \quad (63)$$

$$M_{\bar{X}_n}(t) = \left[1 + \frac{\mu t}{n} + o\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{t\mu} = M_\mu(t) \quad (64)$$

Como a variável limite é degenerada em

$$\mu, \quad \bar{X}_n \xrightarrow{P}_{n \rightarrow \infty} \mu \quad (65)$$

Resultado 4P Sejam $\{U_n, n \geq 1\}$ e $\{V_n, n \geq 1\}$ duas sequências de v.a.'s tais que

$$U_n \xrightarrow{P}_{n \rightarrow \infty} u \quad \text{e} \quad V_n \xrightarrow{P}_{n \rightarrow \infty} v \quad (66)$$

então:

- (i) $U_n + V_n \xrightarrow{P}_{n \rightarrow \infty} u + v$
- (ii) $U_n \cdot V_n \xrightarrow{P}_{n \rightarrow \infty} u \cdot v$
- (iii) $\frac{U_n}{V_n} \xrightarrow{P}_{n \rightarrow \infty} \frac{u}{v}$ se $P(V_n = 0) = 0, \forall n$, e $v \neq 0$

(Extra 3) Sejam X_1, \dots, X_n v.a.'s i.i.d. tais que $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ para $\mu, \sigma^2 < \infty$. Mostre que:

$$\frac{\bar{X}_n}{S_n^2} \xrightarrow{P}_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu}{\sigma^2} \quad (67)$$

Solução: Pelo resultado 1P,

$$\bar{X}_n \xrightarrow{P}_{n \rightarrow \infty} \mu \quad \text{e} \quad S_n^2 \xrightarrow{P}_{n \rightarrow \infty} \sigma^2 \quad (68)$$

Pelo resultado 4P:

$$\frac{\bar{X}_n}{S_n^2} \xrightarrow{P}_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu}{\sigma^2} \quad (69)$$

Resultado 5P

Sejam $\{U_n, n \geq 1\}$ uma sequência de v.a.'s tal que

$$U_n \xrightarrow{P} u \quad \text{e} \quad g(\cdot) \text{ uma função contínua.} \quad (70)$$

Então

$$g(U_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} g(u) \quad (71)$$

Prova: Note que se $g(x)$ é contínua, então: dado algum $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|g(x) - g(u)| \geq \varepsilon \Rightarrow |x - u| \geq \delta \quad (72)$$

Assim, para n suficientemente grande

$$0 \leq P(|g(U_n) - g(u)| \geq \varepsilon) \leq P(|U_n - u| \geq \delta) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (73)$$

Então,

$$g(U_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} g(u) \quad \square \quad (74)$$

Q (extra 4) Sejam X_1, \dots, X_n v.a.'s i.i.d. tais que $X_i \sim U(0, \theta)$ para $\theta > 0$. Mostre que

$$T_n^2 = X_{n:n}^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \theta^2 \quad (75)$$

Solução:

Como $X_{n:n} \xrightarrow{P} \theta$ e $g(x) = x^2$ é contínua, então pelo resultado 5P

$$X_{n:n}^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \theta^2 \quad (76)$$

3.15(a) Convergência em Distribuição

Definição (3.15.1(a)) Sejam $\{U_n, n \geq 1\}$ uma sequência de v.a.'s tal que $F_n(u)$ é a f.d.a de U_n e U uma v.a com f.d.a $F(u)$.

U_n converge em distribuições para U quando $n \rightarrow \infty$, denotado por

$$U_n \xrightarrow{D} U \quad \text{quando } n \rightarrow \infty,$$

se e somente se

$$F_n(u) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} F(u) \quad \text{em todos os pontos de continuidade de } F(\cdot).$$

Q (Extra 5) Sejam X_1, \dots, X_n v.a.'s i.i.d tais que $X_i \sim U(0, \theta)$ para $\theta > 0$. Encontre a distribuição limite da sequência

$$U_n = \frac{n}{\theta}(\theta - T_n) \quad \text{para } T_n \triangleq X_{n:n}.$$

Solução Note que a f.d.a de T_n é

$$F_{T_n}(t) = \left(\frac{t}{\theta}\right)^n \mathbb{I}_{(0,\theta)}(t) + \mathbb{I}_{(\theta,\infty)}(t) \quad (77)$$

A f.d.a de U_n é dada por (para $u \in (0, \theta)$):

$$\begin{aligned} F_{U_n}(u) &= \mathbb{P}(U_n \leq u) = \mathbb{P}\left(\frac{n}{\theta}(\theta - T_n) \leq u\right) \\ &= \mathbb{P}\left(-T_n \leq \frac{\theta}{n}u - \theta\right) \\ &= \mathbb{P}\left(T_n \geq \theta\left(1 - \frac{u}{n}\right)\right) \\ &= 1 - F_{T_n}\left(\theta\left(1 - \frac{u}{n}\right)\right) \\ &= 1 - \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n, \quad u > 0. \end{aligned} \quad (78)$$

Daí,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{U_n}(u) = 1 - e^{-u} = F_U(u), \quad \text{que é a fda de } E \in \text{EXP}(1).$$

Então,

$$U_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} E.$$

Resultado 1D: Sejam $\{U_n, n \geq 1\}$ uma sequência de v.a.'s tal que $M_{U_n}(t)$ é a fgm de U_n e U uma v.a. com fgm $M_U(t)$, então

$$\text{Se } M_{U_n}(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} M_U(t), \text{ então } U_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} U.$$

Q (extra 6) Sejam X_1, \dots, X_n v.a.'s i.i.d. tais que $X_i \sim \text{Bernoulli}(p)$ com $p = \frac{1}{2}$ e

$$U_n = 2\sqrt{n} \left(\bar{X}_n - \frac{1}{2} \right).$$

Estude a distribuição limite de U_n .

Solução: Note que

$$U_n = \frac{2 \sum_{i=1}^n X_i - n}{\sqrt{n}}.$$

$$\begin{aligned} M_{U_n}(t) &= E \left[e^{\frac{2t}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n X_i - t\sqrt{n}} \right] = e^{-t\sqrt{n}} E \left[e^{\frac{2t}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n X_i} \right] \\ &= e^{-t\sqrt{n}} \left(E \left[e^{\frac{2t}{\sqrt{n}} X_1} \right] \right)^n \\ &= e^{-t\sqrt{n}} \left((1-p) + p \cdot e^{\frac{2t}{\sqrt{n}}} \right)^n \end{aligned}$$

$$p = \frac{1}{2} : \quad \frac{1}{2} e^{-t\frac{\sqrt{n}}{n}} \left[1 + e^{\frac{2t}{\sqrt{n}}} \right] \quad (79)$$

$$= \frac{1}{2^n} \left[e^{-t\sqrt{n}} + e^{t\sqrt{n}} \right] \quad (80)$$

$$M_{U_n}(t) = \frac{1}{2} \left(e^{-t\frac{\sqrt{n}}{n}} + e^{t\frac{\sqrt{n}}{n}} \right)^n \quad (81)$$

$$= \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{t}{\sqrt{n}} + \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right) \right) \left(1 + \frac{t}{\sqrt{n}} + \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right) \right) \right]^n \quad (82)$$

$$= \frac{1}{2} \left[2 + \frac{t^2}{n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right) \right]^n \quad (83)$$

$$R_n = o\left(\max\left[\frac{t^2}{n}, \frac{t^2}{n^2}\right]\right) \quad (84)$$

$$= \left\{ \frac{1}{2} + \frac{t^2}{n} + R_n \right\} \quad (85)$$

Em que $R_n = O(n^{-2})$. Assim, de

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{t^2}{2n} \right)^n = e^{t^2/2} \quad (86)$$

$$M_{U_n}(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} e^{t^2/2} = M_U(t) \quad (87)$$

que é a fgm de $Z \sim N(0, 1)$, logo

$$U_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} Z \quad (88)$$

20-10-25

Questão 4 Sejam $X_n \sim \chi_n^2$ e $U_n = \frac{1}{\sqrt{2n}}(X_n - n)$. Para $n \rightarrow \infty$ encontre a distribuição limite de U_n .

Lembre: $\frac{X_n - E(X_n)}{\sqrt{Var(X_n)}} \xrightarrow{d} N(0, 1)$.

Solução

$$M_{U_n}(t) = E[e^{tU_n}] = E\left[e^{\frac{t}{\sqrt{2n}}(X_n - n)}\right] \quad (89)$$

$$= e^{-\frac{tn}{\sqrt{2n}}} \cdot M_{X_n}\left(\frac{t}{\sqrt{2n}}\right) \quad (90)$$

A fmg de $G \sim \Gamma(\alpha, \beta)$ é $M_G(t) = (1 - \frac{t}{\beta})^{-\alpha}$.

Como $X_n \sim \chi_n^2$ é equivalente a $\Gamma(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$, então:

$$M_{U_n}(t) = e^{-\sqrt{\frac{n}{2}}t} \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{2}{n}}t\right)^{-n/2} \quad (91)$$

$$= \left(1 - \sqrt{\frac{2}{n}}t\right)^{-n/2} \cdot e^{-\sqrt{\frac{n}{2}}t} \quad (92)$$

Tomando o $\log(\cdot)$ em ambos os lados da última identidade:

$$\log M_{U_n}(t) = -\sqrt{\frac{n}{2}}t - \frac{n}{2} \log\left(1 - \sqrt{\frac{2}{n}}t\right) \quad (93)$$

Note que a seguinte expressão em série de Taylor em torno de zero se verifica:

$$\log(1 - x) = 0 + \left[-\frac{1}{1-x}\right]_{x=0} x + \frac{\left[-\frac{1}{(1-x)^2}\right]_{x=0}}{2} x^2 + O(x^3) \quad (94)$$

$$\log M_{U_n}(t) = -\sqrt{\frac{n}{2}}t - \frac{n}{2} \left(-\sqrt{\frac{2}{n}}t - \frac{t^2}{n} + O\left(\frac{t^3}{n^{3/2}}\right)\right) \quad (95)$$

$$\begin{aligned} \log M_{U_n}(t) &= \sqrt{\frac{n}{2}} \left[t + \frac{t^2}{2n} - \sqrt{1 + \frac{2t^2}{n}}\right] + O\left(\sqrt{\frac{2t^2}{n}} \cdot O\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right)\right) \\ &= \frac{t^2}{2} + O\left(\frac{t^2}{n} + \left(\sqrt{\frac{2}{n}} \cdot \frac{t^2}{n^{3/2}}\right)\right) \\ &= \frac{t^2}{2} + \frac{t^2}{n} + O\left(\sqrt{\frac{2}{n}} \cdot \frac{t^2}{n^{3/2}}\right) = O\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right) \\ &= \frac{t^2}{2} + O\left(\frac{t^2}{n}\right) \\ t \rightarrow 0 \quad &\frac{t^2}{2} + O\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

Então:

$$M_{U_n}(t) = \exp\left(\frac{t^2}{2} + O(n^{-1})\right)$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_{U_n}(t) = e^{t^2/2} = M_Z(t) \quad \text{tal que} \quad Z \sim N(0, 1)$$

Logo:

$$U_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} Z$$

Resultado 2D: Seja $\{U_n, n \geq 1\}$ uma sequência de VAs. Se $U_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p} U$ então $U_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} U$. A recíproca não é verdadeira, exceto quando U é uma VA degenerada em um valor.

20♥10♥25

Resultado 3D (Teorema de Slutsky) Sejam $\{U_n, n \geq 1\}$ e $\{V_n, n \geq 1\}$ duas sequências de v.a.'s tais que

$$U_n \xrightarrow{d} U \quad \text{e} \quad V_n \xrightarrow{p} v,$$

então:

1. $U_n + V_n \xrightarrow{d} U + v$
2. $U_n V_n \xrightarrow{d} U \cdot v$
3. $U_n/V_n \xrightarrow{d} U/v$, assumindo que $P(V_n = 0) = 0, \forall n$ e $v \neq 0$.

Q (Extra 4) Sejam $\{X_n, n \geq 1\} \stackrel{i.i.d.}{\sim} U(0, \theta)$, $T_n = X_{n:n}$,

$$U_n = n \cdot (\theta - T_n)/\theta \quad \text{e} \quad Q_n = n \cdot (\theta - T_n)/T_n.$$

Encontre a distribuição limite de Q_n .

Solução: Como já discutido,

$$T_n \xrightarrow[p \rightarrow n \rightarrow \infty]{} \theta \quad \text{e} \quad U_n \xrightarrow{d} E$$

tal que $E \stackrel{d}{\sim} \text{Exp}(1)$. Pelo resultado 4P,

$$\frac{\theta}{T_n} \xrightarrow[p \rightarrow n \rightarrow \infty]{} 1.$$

Logo, do resultado 39:

$$Q_n = \frac{n \cdot (\theta - T_n)}{\theta} \cdot \frac{\theta}{T_n} \xrightarrow[p \rightarrow n \rightarrow \infty]{d} E.$$

3.7.6 (a) Teorema Central do Limite (TCL)

Sejam X_1, \dots, X_n VAs iid tais que $\mu = \mathbb{E}\{X_i\} < \infty$ e $\sigma^2 = \text{Var}\{X_i\} < \infty$.

Considere estudar a distribuição limite de \bar{X}_n e S_n^2 . Na literatura,

$$Z_n = \sqrt{n} \left(\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \right) \quad (96)$$

Versão padronizada da média amostral para σ conhecido.

$$T_n = \sqrt{n} \left(\frac{\bar{X}_n - \mu}{S_n} \right) \quad (97)$$

Versão padronizada da média amostral para σ desconhecido.

No que segue, apresentam-se algumas versões do TCL.

Teorema 3.7.6.1(a) [TCL]

Sejam X_1, \dots, X_n uma VA tal que $\mu = \mathbb{E}\{X_i\} < \infty$ e $\sigma^2 = \text{Var}\{X_i\} < \infty$.

Então

$$\sqrt{n} \left(\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \right) \xrightarrow{d} N(0, 1), \quad n \rightarrow \infty \quad (98)$$

Q (extra 9)

Sejam X_1, \dots, X_n uma a.a de $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ tal que $\mu, \sigma^2 < \infty$. Encontre a distribuição assintótica de

$$H_n = \sqrt{n} (S_n^2 - \sigma^2) \quad (99)$$

Solução

Usando a transformação de Helmet:

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=2}^n Y_i^2, \quad \text{para } Y_i \sim N(0, \sigma^2) \quad (100)$$

Que caracteriza S_n^2 como uma média amostral de Y_i^2 . Pelo Teo (3.7, 6.1(a)):

$$U_n = (n-1)^{-1/2} [S_n^2 - E(Y_i^2)] \xrightarrow{d} N(0, \text{Var}(Y_i^2)) \quad (101)$$

Como $E(Y_i^2) = \sigma^2$ e $\text{Var}(Y_i^2) = 2\sigma^4$:

$$U_n = (n-1)^{-1/2} [S_n^2 - \sigma^2] \xrightarrow{d} N(0, 2\sigma^4) \quad (102)$$

Defina

$$V_n = \frac{n}{n-1} \quad (103)$$

$$P(|V_n - 1| \geq \varepsilon) = P(|V_n - 1|^2 \geq \varepsilon^2) \quad (\text{Desigualdade de Tschebisheff}) \quad (104)$$

$$\Rightarrow \leq \frac{E[|V_n - 1|^2]}{\varepsilon^2} = \frac{\left(\frac{n}{n-1} - 1\right)^2}{\varepsilon^2} \quad (105)$$

$$= \frac{1}{(n-1)^2 \varepsilon^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (106)$$

Logo $V_n \rightarrow 1$. Então $\sqrt{V_n} \xrightarrow{P} 1$, pelo resultado 5P.

Finalmente,

$$H_n = \sqrt{V_n} \cdot U_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} N(0, 2\theta^4) \quad (107)$$

Teorema (3.7.6.2(a)) [Teorema de Man Wald]

Seja $\{T_n, n \geq 1\}$ uma sequência de v.a.'s reais tais que

$$\sqrt{n}(T_n - \theta) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} N(0, \sigma^2(\theta)) \quad (108)$$

Seja $g(\cdot)$ uma função contínua de valor real tal que

$$g'(\theta) = \frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta} \quad (109)$$

é finita e não nula.

Então tem-se

$$\sqrt{n}[g(T_n) - g(\theta)] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} N(0, \sigma^2(\theta) g'(\theta)^2) \quad (110)$$

Prova:

Considere

$$\sqrt{n}[g(T_n) - g(\theta)] = U_n \cdot V_n, \quad (111)$$

em que

$$U_n = \sqrt{n}(T_n - \theta) \quad \text{e} \quad V_n = \frac{g(T_n) - g(\theta)}{T_n - \theta}. \quad (112)$$

Note que

$$T_n - \theta = \frac{U_n}{\sqrt{n}}. \quad (113)$$

Como

$$U_n \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2) \quad \text{e} \quad \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} 0, \quad \text{do Teo. Slutsky,} \quad (114)$$

temos

$$T_n - \theta \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} 0. \quad (115)$$

Daí,

$$V_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} g'(\theta), \quad \text{pela definição} \quad (116)$$

$$g'(x) = \lim_{g \rightarrow x} \frac{g(x) - g(z)}{g - x}. \quad (117)$$

Assim, pelo Teo. Slutsky,

$$\sqrt{n}[g(T_n) - g(\theta)] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} N(0, [g'(\theta)]^2 \sigma^2). \quad (118)$$

Q (extra 10)

Sejam X_1, \dots, X_n v.a.'s i.i.d. tais que $X_i \sim \text{Poisson}(\lambda)$. Encontre a distribuição assintótica de

$$\sqrt{n} \left(\bar{X}_n^3 - \lambda^3 \right). \quad (119)$$

Solução

Pode-se mostrar que

$$E\{X_i^3\} = \lambda < \infty \quad \text{e} \quad \text{Var}\{X_i^3\} = \lambda < \infty. \quad (120)$$

Pelo Teo. (3.7.6.1(a)).

$$\sqrt{n} (\bar{X}_n - \lambda) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} N(0, 1) \quad (121)$$

Tomando $g(\lambda) = \lambda^3$ e usando Teo (3.7.6.2(a)),

$$\sqrt{n} (\bar{X}_n^3 - \lambda^3) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} N \left(0, \left[3 \cdot \lambda^2 \cdot \sqrt{\lambda} \right]^2 \right) \quad (122)$$

Teorema (3.7.6.3(a)) [TCL para variância amostral]

Sejam X_1, \dots, X_n v.a.'s i.i.d. com média μ , variância σ^2 e $\mu_4 = \mathbb{E}[(X_1 - \mu)^4]$. Assuma que $0 < \mu_4 < \infty$ e $\mu_4 > \sigma^4$ (curtose > 1). Então,

$$\sqrt{n} (S_n^2 - \sigma^2) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} N(0, \mu_4 - \sigma^4) \quad (123)$$

Prova:

Considere

$$W_n \triangleq (n-1)n^{-1}S_n^2, \quad Y_i \triangleq (X_i - \mu)^2 \quad \text{para } i = 1, \dots, n$$

e

$$\bar{Y}_n = n^{-1} \sum_{i=1}^n Y_i.$$

Assim,

$$W_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 \quad (124)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu + \mu - \bar{X}_n)^2 \quad (125)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [(X_i - \mu)^2 + 2(X_i - \mu)(\mu - \bar{X}_n) + (\mu - \bar{X}_n)^2] \quad (126)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 - 2(\bar{X}_n - \mu)^2 + (\bar{X}_n - \mu)^2 \quad (127)$$

$$= \bar{Y}_n - (\bar{X}_n - \mu)^2 \quad (128)$$

Ainda, vale-se

$$\sqrt{n} (W_n - \sigma^2) = \sqrt{n} (\bar{Y}_n - \sigma^2) - \sqrt{n} (\bar{X}_n - \mu)^2 \quad (129)$$

$$= U_n + V_n \quad (130)$$

Note que $\{Y_i\} \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} [\mathbb{E}[Y_i] = \sigma^2, \text{Var}(Y_i) = \mu_4 - \sigma^4]$. Daí, pelo Teorema (3.7.6.1(a)) (TCL),

$$U_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} N(0, \mu_4 - \sigma^4) \quad \text{como já discutido,} \quad (131)$$

$$U_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} 0 \quad (132)$$

Daí, pelo Teorema de Slutsky,

$$\sqrt{n} (W_n - \sigma^2) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} N(0, \mu_4 - \sigma^4) \quad (133)$$

Agora escrevemos

$$\sqrt{n} (S_n^2 - \sigma^2) = \sqrt{n} \left(\frac{n}{n-1} W_n - \sigma^2 \right) \quad (134)$$

$$= \sqrt{n} \left(\frac{n}{n-1} - 1 + 1 \right) (W_n - \sigma^2) \quad (135)$$

$$= \sqrt{n} (W_n - \sigma^2) + \frac{\sqrt{n}}{n-1} W_n \quad (136)$$

Como

$$\sqrt{n} (W_n - \sigma^2) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} N(0, \mu_4 - \sigma^4), \quad (137)$$

$$W_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \sigma^2, \quad \frac{\sqrt{n}}{n-1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0, \quad \text{e} \quad \frac{\sqrt{n}}{n-1} W_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} 0, \quad (138)$$

então, do Teorema de Slutsky,

$$\sqrt{n} (S_n^2 - \sigma^2) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} N(0, \mu_4 - \sigma^4) \quad (139)$$

Teorema (3.7.6.4(a))

Sejam $\{U_n, n \geq 1\}$ uma sequência de reais e U uma variável real. Seja $g(\cdot)$ uma função contínua de valor real.

Se $U_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} U$, então $g(U_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} g(U)$.

Exercício (11) Q

Sejam X_1, \dots, X_n v.a.'s i.i.d. reais tais que $\mu = \mathbb{E}\{X_i\} < \infty$ e $\sigma^2 = \text{Var}\{X_i\} < \infty$. Mostre que

$$n \left(\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \right)^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} Q, \quad (140)$$

tal que $Q \sim \chi_1^2$.

Solução

Pelo $Z_n \triangleq \sqrt{n} \left(\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \right)$, tem-se

$$Z_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} Z \sim N(0, 1). \quad (141)$$

Pelo Teorema (3.7.6.4(a)), como $g(x) = x^2$ é uma função contínua,

$$g(Z_n) = n \left(\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \right)^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} Z^2, \quad (142)$$

isto é, converge para $Q \sim \chi_1^2$.

3.7 Estimadores Consistentes

Consistência é uma propriedade de grandes amostras introduzida por Fisher (1922).

Seja

$$\{T_n = T_n(X_1, \dots, X_n); n \geq 1\}$$

uma sequência de estimadores para $\tau(\theta)$ tal que $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^p$.

Definição (3.7.1): T_n é consistente no sentido fraco para $\tau(\theta)$ se, e só se

$$T_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \tau(\theta) \quad (143)$$

T_n é inconsistente para $\tau(\theta)$ se T_n não converge em probabilidade para $\tau(\theta)$.

Obs 1: Dados $\varepsilon > 0$ e $\delta \in (0, 1)$, $n_0 = n_0(\varepsilon, \delta, \theta)$:

$$P_\theta\{|T_n - \theta| > \varepsilon\} \leq \delta \iff P_\theta\{|T_n - \theta| \leq \varepsilon\} \geq 1 - \delta, \quad \forall n \geq n_0 \quad (144)$$

Obs 2: T_n é consistente se, e só se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_\theta\{|T_n - \theta| > \varepsilon\} = 0 \quad (145)$$

ou

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_\theta\{|T_n - \theta| \leq \varepsilon\} = 1 \quad (146)$$

(Q 3.23) Sejam X_1, \dots, X_n uma amostra de $X \sim U(0, \theta)$. Mostre que o estimador de MV para θ , $T_n = X_{n:n}$, é consistente para θ .

Solução

Note que

$$F_{T_n}(t) = P_\theta(T_n \leq t) \quad (147)$$

$$= P_\theta \left\{ \bigcap_{i=1}^n X_i \leq t \right\} \quad (148)$$

$$\stackrel{\text{iid}}{=} [F_{X_1}(t)]^n = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \left(\frac{t}{\theta}\right)^n, & 0 \leq t \leq \theta, \\ 1, & t > \theta \end{cases} \quad (149)$$

Para $\varepsilon > 0$:

$$P_\theta\{|X_{n:n} - \theta| < \varepsilon\} = P_\theta\{\theta - \varepsilon < X_{n:n} < \theta + \varepsilon\} \quad (150)$$

$$= P_{\theta} \{ \theta - \varepsilon < X_{n:n} < \theta \} \quad (151)$$

$$= F_{X_{n:n}}(\theta) - F_{X_{n:n}}(\theta - \varepsilon) \quad (152)$$

$$= \begin{cases} 1, & \varepsilon \geq \theta, \\ 1 - \left(\frac{\theta - \varepsilon}{\theta}\right)^n, & \varepsilon < \theta \end{cases} \quad (153)$$

É, portanto:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{\theta} \{ |X_{n:n} - \theta| < \varepsilon \} = 1 \quad (154)$$

Logo,

$$X_{n:n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \theta \quad (155)$$

Obs 3: Um fato interessante é que se pode obter o tamanho amostral mínimo, diga-se n_0 , tal que

$$P(|X_{n:n} - \theta| < \varepsilon) \geq 1 - \delta, \quad (156)$$

em que $\varepsilon > 0$ e $\delta \in (0, 1)$ são constantes pré-especificadas para $\varepsilon < \theta$.

$$P(|X_{n:n} - \theta| < \varepsilon) \geq 1 - \delta \quad (157)$$

$$\begin{aligned} \therefore 1 - \left(\frac{\theta - \varepsilon}{\theta}\right)^n &\geq 1 - \delta \\ \therefore \left(\frac{\theta - \varepsilon}{\theta}\right)^n &\leq \delta \\ \therefore n &\geq \frac{\log \delta}{\log \left(\frac{\theta - \varepsilon}{\theta}\right)} \end{aligned}$$

Assim:

$$n_0 = \left\lceil \frac{\log \delta}{\log \left(\frac{\theta - \varepsilon}{\theta}\right)} \right\rceil + 1 \quad (158)$$

Para $\theta \leq \varepsilon$:

$$n_0 = 1$$

Obs: $T_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \theta$ se $EQM_{\theta}[T_n] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

Isto pode ser verificado pela desigualdade de Chebyshev. Para qualquer $\varepsilon > 0$ e $\theta \in \Theta$,

$$P_{\theta}(|T_n - \theta| > \varepsilon) \leq \frac{E_{\theta}[(T_n - \theta)^2]}{\varepsilon^2} \quad (159)$$

$$= \frac{EQM_{\theta}[T_n]}{\varepsilon^2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \quad (160)$$

Deste último resultado, $T_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \theta$ implica que

$$B_{\theta}[T_n], \text{ Var}_{\theta}[T_n] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \quad \text{se } T_n \text{ é centrado}$$

basta checar

$$\text{Var}_{\theta}[T_n] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

3.8 Propriedades assintóticas do EMV

Neste seção veremos a normalidade assintótica para os EMVs, propriedades que é também satisfeita por outros estimadores. Para isto, temos que definir o conceito de eficiência.

Definição (3.4.1) Se dois estimadores $T_n^{(1)}$ e $T_n^{(2)}$ para $g(\theta)$ são ambos assintoticamente normais,

$$\sqrt{n} (T_n^{(1)} - g(\theta)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} N(0, \sigma_1^2(\theta)) \quad (161)$$

e

$$\sqrt{n} [T_n^{(2)} - g(\theta)] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} N(0, \sigma_2^2(\theta)), \quad (162)$$

então a eficiência relativa assintótica de $T^{(2)}$ com respeito a $T^{(1)}$ é definida como

$$\frac{\sigma_1^2(\theta)}{\sigma_2^2(\theta)} \quad (163)$$

Os EMVs são assintoticamente eficientes pelo teorema abaixo.

Teorema (3.8.1) [TCL para os EMVs]

Sejam X_1, \dots, X_n uma amostra de X com fdp (ou fmp) $f(x; \theta)$ para $x \in \mathbb{X} \subset \mathbb{R}$ e $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$ tal que Θ é um intervalo aberto.

Assuma que:

(A1) $\theta \mapsto f(x; \theta)$ é três vezes diferenciável sobre Θ , $\forall x \in \mathbb{X}$.

(A2)

$$\int_{\mathbb{X}} \frac{\partial}{\partial \theta} f(x; \theta) dx = 0 \quad \left(= \frac{\partial}{\partial \theta} \int_{\mathbb{X}} f(x; \theta) dx \right) \quad (164)$$

e

$$\int_{\mathbb{X}} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} f(x; \theta) dx = 0 \quad \left(= \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \int_{\mathbb{X}} f(x; \theta) dx \right) \quad (165)$$

$$(A3) \quad 0 < I_X(\theta) \triangleq E_{\theta} \left[\left(\frac{\partial \log f(x; \theta)}{\partial \theta} \right)^2 \right] < \infty, \quad \forall \theta \in \Theta$$

(A4) Para cada $\theta_0 \in \Theta$, $\exists \varepsilon \in E(\theta_0) > 0$

$$\left| \frac{\partial^3 \log f(x; \theta)}{\partial \theta^3} \right| \leq g(x), \quad \forall \theta \in [\theta_0 - \varepsilon, \theta_0 + \varepsilon],$$

em que

$$\int_{\mathbb{X}} g(x) f(x; \theta) dx < \infty.$$

(A5) A equação de verossimilhança

$$\frac{\partial l(\theta)}{\partial \theta} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^n \frac{\partial \log f(x_i; \theta)}{\partial \theta} = 0$$

tem uma solução consistente $\hat{\theta}_n$. Então

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0) \xrightarrow{D} N(0, I_X^{-1}(\theta_0)), \quad n \rightarrow \infty.$$

27/10/2025

Prova (3.8.1) Usando a expansão de Taylor de $\frac{\partial l(\theta)}{\partial \theta}$ em torno de θ_0 , tem-se

$$0 = \frac{\partial l(\theta)}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\hat{\theta}_n} = \frac{\partial l(\theta)}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_0} + \frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial \theta^2} \Big|_{\theta=\theta_0} (\hat{\theta}_n - \theta_0).$$

27/10/25

$$+\frac{2^3 l(\theta)}{2\theta^3}(\hat{\theta}_n - \theta)^2$$

Em que θ^* cai em segmento formado por θ e $\hat{\theta}_n$. Assim, colocando $(\hat{\theta}_n - \theta)$ em evidência. Por TCL:

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) - \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\partial l(\theta)}{\partial \theta} = 0 \quad (166)$$

$$\frac{1}{n} \frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial \theta^2} (\hat{\theta}_n - \theta) + \frac{1}{n} \frac{\partial^3 l(\theta)}{\partial \theta^3} \frac{(\hat{\theta}_n - \theta)^2}{2} = 0 \quad (167)$$

Note que

$$E_\theta \frac{\partial^2 \log f(X_i, \theta)}{\partial \theta^2} = -I_{X_i}(\theta)$$

que é (A_1) .

Finito pela condição (A_2) . Daí, pela Lei Forte (fraca) dos grandes números:

$$\frac{1}{n} \frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial \theta^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \log f(X_i, \theta)}{\partial \theta^2} \xrightarrow{q.c.(P)} -I_X(\theta), \quad \theta = \theta_0, \quad n \rightarrow \infty \quad (168)$$

De (A_4) :

$$\frac{1}{n} \frac{\partial^3 l(\theta)}{\partial \theta^3} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(X_i), \quad \forall \theta \in [\theta_0 - \varepsilon, \theta_0 + \varepsilon] \quad (169)$$

Adicionalmente, de (A_5) :

$$P_{\theta_0} \left(\left| \hat{\theta}_n - \theta^* \right| \leq \varepsilon \right) \leq P_{\theta_0} \left(\left| \hat{\theta}_n - \theta_0 \right| \leq \varepsilon \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

Usando isso e o fato de

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(X_i) \xrightarrow{P} E[g(X_i)] \leq \infty,$$

tem-se

$$\frac{1}{n} g(\hat{\theta}_n) \quad \text{permanece limitada em probabilidade quando } n \rightarrow \infty.$$

Obs: Uma sequência de v.a.'s Y_n é limitada em probabilidade se $\forall \varepsilon > 0, \exists A(\varepsilon)$ tal que $P(|Y_n| > A) \leq \varepsilon$. Como consequência, se $E[Y_n]$ é uma sequência limitada, $\{Y_n, n \geq 1\}$ é limitada em probabilidade.

Como $\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta_0$, vale-se que

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \theta} g(\theta) \xrightarrow{P} \frac{\partial}{\partial \theta} g(\theta_0).$$

Aplicando (3.4.1(b)) em (3.4.1(a)):

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0) \approx \frac{\sqrt{n} \frac{\partial l(\theta)}{\partial \theta} \big|_{\theta=\theta_0}}{I_X(\theta_0)}.$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial \log f(X_i; \theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta_0} \xrightarrow{P} \frac{1}{I_X(\theta_0)}.$$

Note que

$$\left. \frac{\partial \log f(X_i; \theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta_0}$$

para $i = 1, \dots, n$ são v.a.'s i.i.d.

Com média zero e variância $I_{X_i}(\theta_0)$. Portanto, pelo TCL clássico, para $Z \xrightarrow{d} N(0, I_{X_i}(\theta_0))$:

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0) \xrightarrow{d} Z \xrightarrow{d} N\left(0, \frac{I_{X_i}(\theta_0)}{I_{X_i}^2(\theta_0)}\right) = N\left(0, \frac{1}{I_{X_i}(\theta_0)}\right) \quad (170)$$

Teorema (3.9.2) Sejam X_1, \dots, X_n uma amostra de X com fdp (ou fdm) $f(x; \theta)$ para $x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}$ e $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^p$.

Assuma os seguintes pressupostos:

(B1) $\mathcal{C} = \{x : F(x; \theta) > 0\}$ independe de θ .

(B2) $f(x; \theta)$ é três vezes diferenciável em θ para todo $x \in \mathcal{C}$.

(B3)

$$\frac{\partial}{\partial \theta_r} \int_{\mathcal{C}} F(x; \theta) dx = \int_{\mathcal{C}} \frac{\partial}{\partial \theta_r} F(x; \theta) dx = 0 \quad (171)$$

e

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{\partial^2}{\partial \theta_r \partial \theta_s} F(x; \theta) dx = \frac{\partial^2}{\partial \theta_r \partial \theta_s} \int_{\mathcal{C}} F(x; \theta) dx = 0, \quad (172)$$

para $r, s = 1, \dots, p$ e para todo $\theta \in \Theta$.

(B4) A matriz

$$I_{X_i}(\theta) = \left[E \left(\frac{\partial \log f(X_i; \theta)}{\partial \theta_r} \frac{\partial \log f(X_i; \theta)}{\partial \theta_s} \right) \right] \quad (173)$$

é finita e não singular para todo $\theta \in \Theta$, $r, s = 1, \dots, p$.

27/10/25

(B5) Para cada $\theta_0 \in \Theta$, $\exists \varepsilon > 0$ e uma função integrável $g(x)$ tal que, $\forall x, y^1, y^2, \dots, y^p$

$$\frac{\partial^3 \log f(x; \theta)}{\partial \theta^j \partial \theta^l \partial \theta^m} \leq g(x), \quad \text{se } |\theta - \theta_0| < \varepsilon \quad (174)$$

Então para cada $\theta_0 \in \Theta$, existe uma sequência $\hat{\theta}_n$ que satisfaz:

1. $\hat{\theta}_n$ é solução da equação de verossimilhança

$$\left. \frac{\partial}{\partial \theta} \sum_{i=1}^n \log f(x_i; \theta) \right|_{\theta=\hat{\theta}_n} = 0 \quad (\text{para } x_1, \dots, x_n) \quad (175)$$

2. $\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta_0$ quando $n \rightarrow \infty$

3. $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0) \xrightarrow{d} N_p(0, I^{-1}(\theta_0))$

Resumo e Consolidação: Capítulo 3 - Teoria Assintótica

Visão Geral

Este capítulo apresentou os fundamentos da teoria assintótica em estatística, focando em diferentes tipos de convergência de sequências de variáveis aleatórias e suas aplicações práticas. A seguir, consolidamos os principais conceitos e resultados.

1. Notação Assintótica

Tabela 1: Notação $O(\cdot)$ e $o(\cdot)$

Notação	Definição	Interpretação
$a_n = O(b_n)$	$\exists k > 0, n_0 : a_n/b_n \leq k, \forall n \geq n_0$	a_n cresce no máximo tão rápido q
$a_n = o(b_n)$	$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n/b_n = 0$	a_n cresce mais lentamente que b_n
$f(x) = O(g(x))$	$\exists k > 0, \delta > 0 : f(x)/g(x) \leq k$ para $ x - x_0 < \delta$	f limitada por g perto de x_0
$f(x) = o(g(x))$	$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)/g(x) = 0$	f vai a zero mais rápido que g

Propriedades Importantes:

- Se $a_n = o(b_n)$, então $a_n = O(b_n)$
- $O(b_n) + O(d_n) = O(\max\{|b_n|, |d_n|\})$
- $O(b_n) \cdot O(d_n) = O(b_n \cdot d_n)$
- $o(b_n) \cdot o(d_n) = o(b_n \cdot d_n)$

2. Tipos de Convergência

Tabela 2: Modos de Convergência Estocástica

Tipo	Notação e Definição	Significado
Convergência em Probabilidade	$U_n \xrightarrow{P} u$ $P(U_n - u \geq \varepsilon) \rightarrow 0$	A probabilidade de U_n estar longe de u vai a zero
Convergência em Distribuição	$U_n \xrightarrow{D} U$ $F_{U_n}(x) \rightarrow F_U(x)$	As distribuições de U_n convergem para a distribuição de U

Relação entre Convergências:

- Convergência em Probabilidade \Rightarrow Convergência em Distribuição
- A recíproca só vale quando U é degenerada (constante)
- Convergência de MGF \Rightarrow Convergência em Distribuição

3. Teoremas Fundamentais

Tabela 3: Principais Resultados Teóricos

Teorema	Enunciado	Aplicação
Lei Fraca dos Grandes Números (versão simples)	X_i i.i.d., $E[X_i] = \mu < \infty$, $\text{Var}(X_i) = \sigma^2 < \infty$ $\Rightarrow \bar{X}_n \xrightarrow{P} \mu$	Justifica uso da média amostral como estimador de μ
Lei Fraca dos Grandes Números (Khinchine)	X_i i.i.d., $E[X_i] = \mu < \infty$ $\Rightarrow \bar{X}_n \xrightarrow{P} \mu$	Versão mais geral (não requer variância finita)
Teorema da Aplicação Contínua (Slutsky)	$U_n \xrightarrow{P} u$ e $g(\cdot)$ contínua $\Rightarrow g(U_n) \xrightarrow{P} g(u)$	Preservação de convergência sob transformações
Propriedades de Convergência em P	$U_n \xrightarrow{P} u, V_n \xrightarrow{P} v$ $\Rightarrow U_n \pm V_n \xrightarrow{P} u \pm v$ $U_n \cdot V_n \xrightarrow{P} u \cdot v$ $U_n/V_n \xrightarrow{P} u/v$ (se $v \neq 0$)	Operações algébricas preservam convergência
Teorema Central do Limite	X_i i.i.d., $E[X_i] = \mu$, $\text{Var}(X_i) = \sigma^2 < \infty$ $\Rightarrow \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} \xrightarrow{D} N(0, 1)$	Justifica aproximação normal para médias amostrais
Método Delta	$\sqrt{n}(U_n - \mu) \xrightarrow{D} N(0, \sigma^2)$, $g'(\mu) \neq 0$ $\Rightarrow \sqrt{n}(g(U_n) - g(\mu)) \xrightarrow{D} N(0, [g'(\mu)]^2 \sigma^2)$	Distribuição limite de transformações não-lineares

4. Aplicações Clássicas

Convergência de Estatísticas de Ordem: Para $X_i \sim \text{Uniforme}(0, \theta)$:

- $X_{(n)} \xrightarrow{P} \theta$ (máximo converge para o limite superior)
- $\frac{n}{\theta}(\theta - X_{(n)}) \xrightarrow{D} \text{Exp}(1)$

Normalização de Distribuições Discretas:

- Binomial: $\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow{D} N(0, 1)$, onde $S_n \sim \text{Binomial}(n, p)$
- Poisson: $\frac{X_n - n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{D} N(0, 1)$, onde $X_n \sim \text{Poisson}(n)$
- Qui-quadrado: $\frac{X_n - n}{\sqrt{2n}} \xrightarrow{D} N(0, 1)$, onde $X_n \sim \chi_n^2$

5. Expansão de Taylor e Notação Assintótica

Fórmula Geral: Para $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivável até ordem n em x_0 :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n) \quad \text{quando } x \rightarrow x_0 \quad (176)$$

Expansões Úteis:

- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + O(x^3)$
- $\log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + O(x^3)$
- $(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + O(x^3)$

6. Estratégia para Problemas de Convergência

Etapa 1: Identificar o Tipo de Problema

- Convergência em probabilidade? \rightarrow Use Lei Fraca ou propriedades
- Convergência em distribuição? \rightarrow Use TCL, MGF ou FDAs
- Distribuição limite de transformação? \rightarrow Use Método Delta

Etapa 2: Escolher o Método

- Para médias amostrais \rightarrow Lei Fraca dos Grandes Números ou TCL
- Para funções de convergentes \rightarrow Teorema da aplicação contínua
- Para estatísticas complexas \rightarrow MGF ou aproximações via Taylor

Etapa 3: Normalização (se necessário)

- Identificar $E[U_n]$ e $\text{Var}(U_n)$
- Padronizar: $\frac{U_n - E[U_n]}{\sqrt{\text{Var}(U_n)}}$
- Aplicar TCL ou resultado apropriado

Etapa 4: Verificar Condições

- i.i.d.? Momentos finitos? Continuidade?
- Todas as condições dos teoremas satisfeitas?

7. Conexões Importantes

Teoria Assintótica e Estimação:

- Consistência de estimadores: $\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta$
- Normalidade assintótica: $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{D} N(0, \sigma^2)$
- Eficiência assintótica via comparação de variâncias assintóticas

Teoria Assintótica e Testes:

- Justifica aproximação normal para testes com amostras grandes
- Permite construir intervalos de confiança assintóticos
- Fundamenta testes baseados na razão de verossimilhança

8. Checklist de Verificação

Ao resolver problemas de convergência, verifique:

- ☐ As variáveis são independentes e identicamente distribuídas?
- ☐ Os momentos necessários existem e são finitos?
- ☐ A função envolvida é contínua (para aplicação contínua)?
- ☐ A normalização está correta (para TCL)?
- ☐ A derivada não é zero no ponto de interesse (para Método Delta)?
- ☐ O limite foi calculado corretamente?
- ☐ A interpretação está no contexto do problema?

9. Tabela de Referência Rápida

Tabela 4: Guia Rápido de Resultados Assintóticos

Situação	Resultado	Teorema
\bar{X}_n para qualquer distribuição	$\bar{X}_n \xrightarrow{P} \mu$	Lei Fraca
\bar{X}_n normalizado	$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} \xrightarrow{D} N(0, 1)$	TCL
S_n^2 (variância amostral)	$S_n^2 \xrightarrow{P} \sigma^2$	Lei Fraca
Máximo de Uniforme(0, θ)	$X_{(n)} \xrightarrow{P} \theta$	Resultado direto
Função de estatística convergente	$g(\hat{\theta}_n) \xrightarrow{P} g(\theta)$	Aplicação contínua
Transformação não-linear	$\sqrt{n}(g(\hat{\theta}_n) - g(\theta)) \xrightarrow{D} N(0, [g'(\theta)]^2 \sigma^2)$	Método Delta

10. Conclusão

O Capítulo 3 forneceu os fundamentos essenciais da teoria assintótica, que é absolutamente central para toda a inferência estatística moderna. Os principais aprendizados são:

- A notação $O(\cdot)$ e $o(\cdot)$ permite manipulações precisas de aproximações
- Diferentes tipos de convergência têm aplicações distintas
- A Lei Fraca dos Grandes Números justifica o uso de médias amostrais

- O Teorema Central do Limite explica a ubiquidade da distribuição normal
- O Método Delta estende resultados de normalidade para transformações

Recomendação de Estudo: Para dominar este capítulo:

1. Pratique manipulações com notação $O(\cdot)$ e $o(\cdot)$
2. Resolva muitos exemplos de aplicação da Lei Fraca e do TCL
3. Visualize convergências através de simulações
4. Conecte a teoria com os capítulos de estimação e testes
5. Compreenda as condições de aplicabilidade de cada teorema

Este capítulo estabelece a base teórica para compreender o comportamento de estimadores e testes quando o tamanho amostral é grande, preparando o terreno para os métodos avançados nos capítulos subsequentes.