Questões Resolvidas em Sala - Unidade 4

Curso de Inferência Estatística

Outubro 2025

Sumário

1 Introdução

Este documento reúne questões resolvidas em sala referentes à Unidade 4.

2 Questões

2.1 Q1 — Teste Z (Normal com σ^2 conhecido)

Enunciado. Sejam $X_1, \dots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$ com σ^2 conhecido. Testar

$$H_0: \ \mu = \mu_0 \quad \text{vs} \quad H_1: \ \mu > \mu_0.$$

Solução. Estatística de teste

$$Z = \sqrt{n}\,\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \overset{H_0}{\sim} N(0,1).$$

Regra: rejeitar H_0 se $Z > z_\alpha$. Valor-p: $\hat{\alpha} = P(Z \geq z_{cal})$. (cf. notas: regiões sombreadas em $z > z_\alpha$)

2.2 Q2 — Exponencial: teste via soma (χ^2)

Enunciado. Sejam $X_1, \dots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} \text{Exp}(\theta)$. Testar

$$H_0: \ \theta = \theta_0 \quad \text{vs} \quad H_1: \ \theta > \theta_0 \text{ (ou } \theta \neq \theta_0).$$

Solução. Pelo LNP a razão depende de $\sum X_i$. Sob H_0,

$$\frac{2}{\theta_0} \sum_{i=1}^{n} X_i \overset{H_0}{\sim} \chi^2_{2n}.$$

Logo, rejeitar para cauda à direita: $\frac{2}{\theta_0} \sum X_i > q_{\alpha, \chi^2_{2n}}$. Valor-p: $P\big(\chi^2_{2n} \geq \frac{2}{\theta_0} \sum x_i\big)$.

2.3 Q3 — Poisson: UMP unilateral por soma

Enunciado. Sejam $X_1, \dots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} \text{Poisson}(\lambda)$. Testar

$$H_0: \ \lambda = \lambda_0 \quad \text{vs} \quad H_1: \ \lambda > \lambda_0.$$

Solução. $T = \sum X_i \sim \text{Poisson}(n\lambda)$. Pela RVM, o teste que rejeita para T grande é UMP: escolher u_1 tal que $P_{\lambda_0}(T > u_1) \leq \alpha$ e rejeitar se $T > u_1$. Valor-p: $P_{\lambda_0}(T \geq t_{cal})$.

2.4 Q4 — Bernoulli: LNP simples $\times$ simples

Enunciado. Sejam $X_i \sim \text{Bernoulli}(p)$ i.i.d. Testar

$$H_0: \ p = p_0 \quad \text{vs} \quad H_1: \ p = p_1 \ (> p_0).$$

Solução. LNP: rejeitar H_0 se e somente se

$$\frac{L(p_1; \mathbf{x})}{L(p_0; \mathbf{x})} = \left[\frac{(1-p_0)p_1}{p_0(1-p_1)}\right]^{\sum x_i} \left[\frac{1-p_1}{1-p_0}\right]^n > k,$$

equivalente a $\sum x_i > k_1$ para certo limiar k_1 (determinado por α). Em unilateral $p > p_0$, a região crítica é $\{\sum x_i > k_1\}$.

2.5 Q5 — Curva de poder (Normal)

Enunciado. Para Q1, derive $Q(\mu)$. **Solução.**

$$Q(\mu) = P_\mu(Z > z_\alpha) = 1 - \Phi\left(z_\alpha - \frac{\sqrt{n}(\mu - \mu_0)}{\sigma}\right).$$

2.6 Q6 — Regra crítica no caso Exponencial

Enunciado. Mostrar a transformação para χ^2. **Solução.** Note $\dot{X}_i = \theta_0^{-1} X_i \sim \text{Exp}(1)$ e $\ddot{X}_i = 2\dot{X}_i \sim \chi_2^2$. Então $\sum \ddot{X}_i \sim \chi_{2n}^2$ e a regra segue.

2.7 Q7 — Cálculo de α e β (Normal, teste simples)

Enunciado. Seja $X_1 \sim N(\theta, 1)$ e teste $H_0 : \theta = 5{,}5$ vs. $H_1 : \theta = 8$. Regra: rejeitar H_0 se $x_1 > 7$ ($x_c = 7$). Calcule α e β.

Solução.

$$\begin{aligned}\alpha = P_{H_0}(x_1 > 7) = P\left(\frac{x_1 - 5{,}5}{1} > \frac{7 - 5{,}5}{1}\right) = P(Z > 1{,}5)\\ = 1 - \Phi(1{,}5) = 0{,}06671.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta = P_{H_1}(x_1 \le 7) = P\left(\frac{x_1 - 8}{1} \le \frac{7 - 8}{1}\right) = P(Z \le -1)\\ = \Phi(-1) = 0{,}15866.\end{aligned}$$

2.8 Q8 — Função poder (Exemplo 3)

Enunciado. Sejam $X_1, \ldots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} N(\theta, 1)$ e teste $H_0 : \theta = 5{,}5$ vs. $H_1 : \theta = 8$. Regra: rejeitar H_0 se $\bar{X}_n > 7{,}5$. Derive a função poder $Q(\theta)$.

Solução.

$$\begin{aligned}Q(\theta) &= P_\theta(\bar{X}_n > 7{,}5)\\ &= P\left(\frac{\bar{X}_n - \theta}{1/\sqrt{n}} > \frac{7{,}5 - \theta}{1/\sqrt{n}}\right)\\ &= P\left(Z > \sqrt{n}(7{,}5 - \theta)\right)\\ &= 1 - \Phi\left(\sqrt{n}(7{,}5 - \theta)\right).\end{aligned}$$

Note que $Q(5{,}5) = \alpha$ e $Q(8) = 1 - \beta$.

2.9 Q9 — Comparação de múltiplos testes (Exemplo 1)

Enunciado. Sejam $X_i \overset{i.i.d.}{\sim} N(\theta, 1)$ e $H_0 : \theta = 5{,}5$ vs. $H_1 : \theta = 8$. Compare as regiões críticas:

- Teste #1: $R_C = \{x : x_1 > 7\}$
- Teste #2: $R_C = \{x : (x_1 + x_2)/2 > 7\}$

- Teste #3: $R_C = \{x : \bar{X}_n > 6\}$
- Teste #4: $R_C = \{x : \bar{X}_n > 7{,}5\}$

Discussão. O teste #4 usa toda a informação via média amostral e é mais poderoso quando o nível α é fixado. O teste #1 desperdiça informação usando apenas x_1. O teste #3 tem região crítica maior que #4, logo maior poder mas também maior α (se não ajustado).

2.10 Q10 — Teste MP para densidades diferentes

Enunciado. Sejam X_1, X_2 duas v.a.s independentes com densidade $f(x)$. Determine o teste MP de nível α para

$$H_0 : \ f_{X_1} = f_0(x) \quad \text{e} \quad H_1 : \ f_{X_1} = f_1(x),$$

onde f_0 e f_1 são densidades distintas conhecidas.

Solução. Como é simples vs. simples, usar LNP: rejeitar H_0 se e somente se

$$\frac{L_1(x_1, x_2)}{L_0(x_1, x_2)} = \frac{f_1(x_1) f_1(x_2)}{f_0(x_1) f_0(x_2)} > k,$$

onde k é determinado por $P_{H_0}(L_1/L_0 > k) = \alpha$.

2.11 Q11 — Teste para variância (Normal, σ^2 desconhecido)

Enunciado. Sejam $X_1, \ldots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} N(0, \sigma^2)$ e teste $H_0 : \sigma = \sigma_0$ vs. $H_1 : \sigma < \sigma_0$. Derive a região crítica usando LNP.

Solução. Adotando $H_1 : \sigma = \sigma_1 < \sigma_0$ (simples), a razão é:

$$\frac{L(\sigma_1, \mathbf{x})}{L(\sigma_0, \mathbf{x})} = \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_1}\right)^n \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \left(\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_0^2}\right)\right\}.$$

Como $\sigma_1 < \sigma_0$, temos $\frac{1}{\sigma_1^2} > \frac{1}{\sigma_0^2}$, logo a razão é crescente em $\sum x_i^2$. A região crítica é $\{\sum x_i^2/\sigma_0^2 < k_1\}$, que sob H_0 segue χ^2_n. Definindo $Q(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n (x_i/\sigma_0)^2 \sim \chi^2_n$, rejeitar se $Q(\mathbf{x}) < \chi^2_{n,\alpha}$ (quantil inferior).

2.12 Q12 — Função crítica e testes aleatorizados

Enunciado. Defina função crítica $\psi_\gamma : \mathcal{X}^n \to [0, 1]$ e relacione com poder $Q_\gamma(\theta)$.

Solução. A função crítica $\psi_\gamma(x)$ dá a probabilidade de rejeitar H_0 ao observar x. Então

$$Q_\gamma(\theta) = E_\theta[\psi_\gamma(X)] = \int \psi_\gamma(x) f(x; \theta)\, dx.$$

Testes determinísticos têm $\psi \in \{0, 1\}$; testes aleatorizados admitem $\psi = \delta \in (0, 1)$ numa fronteira (ex.: quando a estatística suficiente assume um valor limite que igualaria o nível exatamente).

2.13 Q13 — Prova de monotonicidade do poder (UMP)

Enunciado. Mostre que, sob condições de RVM, a função poder $Q_Y(\theta)$ é não decrescente para testes UMP unilaterais.

Esboço de Solução. Para $\theta'' > \theta' > \theta_0$, considere classes C de testes de nível α para $H_0' : \theta = \theta'$ vs. $H_1' : \theta = \theta''$. Pelo LNP, o teste MP em C tem poder maior ou igual ao teste aleatorizado trivial Y_0 com poder constante α. Como Y é UMP, $Q_Y(\theta'') \geq Q_{Y_0}(\theta'') = \alpha = Q_Y(\theta')$, mostrando que Q_Y é não decrescente.

3 Comentários Adicionais

- Para testes bilaterais, UMP geralmente não existe; use-se testes não-viesados ou razão de verossimilhança generalizada.
- A função poder ajuda a comparar testes quando múltiplas alternativas são consideradas.
- Estatísticas suficientes simplificam a construção de regiões críticas via LNP ou Karlin–Rubin.