Caderno de Exercícios - Capítulo 3

Teoria Assintótica e Teoremas Limite

Curso de Inferência Estatística - PPGEST/UFPE

Novembro 2025

Sumário

Introdução

Este caderno contém exercícios cuidadosamente selecionados sobre Teoria Assintótica e Teoremas Limite, abordando desde conceitos fundamentais até aplicações avançadas. Os exercícios estão organizados por nível de dificuldade e tópico, com soluções detalhadas que fazem referência explícita ao material teórico.

Organização

- **Seção 1:** Notação Assintótica ($O(\cdot)$ e $o(\cdot)$)
- **Seção 2:** Expansões de Taylor
- **Seção 3:** Convergência em Probabilidade
- **Seção 4:** Convergência em Distribuição
- **Seção 5:** Teorema Central do Limite
- **Seção 6:** Teorema de Slutsky e Aplicações
- **Seção 7:** Método Delta
- **Seção 8:** Exercícios Integrados
- **Seção 9:** Respostas Detalhadas

Como Usar Este Caderno

1. Leia a **Revisão Teórica** no início de cada seção
2. Tente resolver os exercícios sem consultar as soluções
3. Use as **Dicas** quando estiver travado
4. Confira as soluções detalhadas na Seção 9
5. Estude as **Conexões** para integrar conceitos

Referências ao Material

- `teoria_cap3_completo.tex` - Teoria completa com demonstrações
- `questoes_cap3_completo.tex` - Questões resolvidas em sala
- `cap3_completo.tex` - Material original das aulas

1 Notação Assintótica: $O(\cdot)$ e $o(\cdot)$

Revisão Teórica

Conceitos Fundamentais

Definição (sequências):

- $a_n = O(b_n)$ se existe $k > 0$ e n_0 tais que $|a_n/b_n| \leq k$ para $n \geq n_0$
- $a_n = o(b_n)$ se $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = 0$

Propriedades importantes:

- Se $a_n = o(b_n)$ então $a_n = O(b_n)$
- $O(b_n) \cdot O(d_n) = O(b_n d_n)$
- $o(b_n) \cdot o(d_n) = o(b_n d_n)$

Referência: `teoria_cap3_completo.tex`, Seção 2

Exercício 1.1 - Nível Básico

Para as sequências a_n e b_n abaixo, determine se $a_n = O(b_n)$, $a_n = o(b_n)$, ou nenhum dos dois:
(a) $a_n = 5n^2 + 3n$, $b_n = n^2$
(b) $a_n = n$, $b_n = n^2$
(c) $a_n = n^2 + \sqrt{n}$, $b_n = n$
(d) $a_n = \log n$, $b_n = n$

Exercício 1.2 - Nível Intermediário

Mostre que se $X_n \sim N(\mu, \sigma^2/n)$, então:

$$P(|X_n - \mu| \geq \varepsilon) = O(1/n)$$

Dica: Use a desigualdade de Chebyshev.

Exercício 1.3 - Nível Avançado

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $E[X_i] = \mu$ e $\mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2 < \infty$. Mostre que:

$$E[(\bar{X}_n - \mu)^2] = O(1/n)$$

e interprete o resultado em termos da convergência de $\bar{X}_n$ para μ.

2 Expansões de Taylor

Revisão Teórica

Expansões Fundamentais

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + O(x^4)$$
$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + O(x^4)$$
$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + O(x^3)$$

Referência: `teoria_cap3_completo.tex`, Seção 2.3

Exercício 2.1 - Nível Básico

Use expansão de Taylor para mostrar que:

$$e^x \log(1+x) = x + O(x^2) \quad \text{quando } x \to 0$$

Exercício 2.2 - Nível Intermediário

Mostre que para $\lambda > 0$ fixo:

$$\left(1 + \frac{\lambda}{n}\right)^n \to e^\lambda \quad \text{quando } n \to \infty$$

Use este resultado para derivar a aproximação Poisson para a Binomial.

Exercício 2.3 - Nível Avançado

Seja $X_n \sim \text{Binomial}(n, p)$ com $p = \lambda/n$ e λ fixo. Usando expansão de Taylor da função geradora de momentos, mostre que:

$$X_n \xrightarrow{D} \text{Poisson}(\lambda)$$

3 Convergência em Probabilidade

Revisão Teórica

Definição e Resultados Principais

Definição: $U_n \xrightarrow{P} u$ se para todo $\varepsilon > 0$:

$$P(|U_n - u| \geq \varepsilon) \to 0 \quad \text{quando } n \to \infty$$

Resultado 1P (LFGN): Se X_i são i.i.d. com $E[X_i] = \mu$ e $\text{Var}(X_i) = \sigma^2 < \infty$, então $\bar{X}_n \xrightarrow{P} \mu$.

Resultado 4P: Se $U_n \xrightarrow{P} u$ e $V_n \xrightarrow{P} v$, então operações algébricas preservam convergência.
Resultado 5P: Se $U_n \xrightarrow{P} u$ e g é contínua, então $g(U_n) \xrightarrow{P} g(u)$.
Referência: `teoria_cap3_completo.tex`, Seção 3; `questoes_cap3_completo.tex`, Q. Extra 1-4

Exercício 3.1 - Consistência da Média (Básico)

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim \text{Exp}(\lambda)$.
(a) Calcule $E[X_i]$ e $\text{Var}(X_i)$.
(b) Mostre que $\bar{X}_n \xrightarrow{P} 1/\lambda$.
(c) Qual é a taxa de convergência?

Exercício 3.2 - Variância Amostral (Intermediário)

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $E[X_i] = \mu$ e $\text{Var}(X_i) = \sigma^2 < \infty$.
Mostre usando a transformação de Helmert que:

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X}_n)^2 \xrightarrow{P} \sigma^2$$

Conexão: Este é o exercício resolvido na Questão Extra 1.

Exercício 3.3 - Máximo da Uniforme (Intermediário)

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim U(0, \theta)$.
(a) Mostre que $T_n = X_{(n)} \xrightarrow{P} \theta$ calculando $E[(T_n - \theta)^2]$.
(b) Determine a taxa de convergência e compare com a taxa típica $O(1/n)$ da média amostral.
Conexão: Questão Extra 2.

Exercício 3.4 - Operações Algébricas (Básico)

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$.
Use o Resultado 4P para mostrar que:

$$\frac{\bar{X}_n}{S_n^2} \xrightarrow{P} \frac{\mu}{\sigma^2}$$

Conexão: Questão Extra 3.

Exercício 3.5 - Função Contínua (Básico)

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim U(0, \theta)$.
Use o Resultado 5P para mostrar que se $T_n = X_{(n)}$, então:

$$T_n^2 \xrightarrow{P} \theta^2$$

Conexão: Questão Extra 4.

Exercício 3.6 - Consistência do EMV (Avançado)

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim U(0, \theta)$.
Mostre diretamente pela definição de convergência em probabilidade que o EMV $\hat{\theta}_n = X_{(n)}$ é consistente, isto é:

$$\lim_{n\to\infty} P_\theta(|\hat{\theta}_n - \theta| < \varepsilon) = 1 \quad \text{para todo } \varepsilon > 0$$

Conexão: Questão 3.23.

4 Convergência em Distribuição

Revisão Teórica

Definição e Resultados Principais

Definição: $U_n \xrightarrow{D} U$ se $F_{U_n}(u) \to F_U(u)$ em todos os pontos de continuidade de F.
Resultado 1D: Convergência de MGF implica convergência em distribuição.
Resultado 2D: $U_n \xrightarrow{P} u \Rightarrow U_n \xrightarrow{D} u$. A recíproca vale apenas se u é constante.
Teorema 3.7.6.4(a): Se $U_n \xrightarrow{D} U$ e g é contínua, então $g(U_n) \xrightarrow{D} g(U)$.
Referência: `teoria_cap3_completo.tex`, Seção 4

Exercício 4.1 - Distribuição Limite (Básico)

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim U(0, \theta)$ e $T_n = X_{(n)}$.
Encontre a distribuição limite de:

$$U_n = \frac{n}{\theta}(\theta - T_n)$$

Dica: Calcule a fda de U_n e tome o limite quando $n \to \infty$.
Conexão: Questão Extra 5.

Exercício 4.2 - Qui-Quadrado Normalizada (Intermediário)

Seja $X_n \sim \chi^2_n$ e defina:

$$U_n = \frac{X_n - n}{\sqrt{2n}}$$

(a) Encontre a distribuição limite de U_n usando MGF.
(b) Interprete o resultado graficamente.
Conexão: Exemplo na `teoria_cap3_completo.tex`, Seção 4.

Exercício 4.3 - Função Contínua (Intermediário)

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $E[X_i] = \mu$ e $\text{Var}(X_i) = \sigma^2 < \infty$.
Mostre que:

$$n\left(\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma}\right)^2 \xrightarrow{D} \chi^2_1$$

Dica: Use o TCL seguido do Teorema 3.7.6.4(a).
Conexão: Exercício 11.

Exercício 4.4 - Poisson Normalizada (Avançado)

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim \text{Poisson}(\lambda)$.
Defina $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Note que $S_n \sim \text{Poisson}(n\lambda)$.
(a) Mostre que:

$$\frac{S_n - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} \xrightarrow{D} N(0,1)$$

(b) Use este resultado para derivar uma regra prática de quando a aproximação normal para Poisson é válida.

5 Teorema Central do Limite

Revisão Teórica

Teorema 3.7.6.1(a) - TCL Clássico

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $E[X_i] = \mu$ e $\text{Var}(X_i) = \sigma^2 < \infty$. Então:

$$Z_n = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} \xrightarrow{D} N(0,1)$$

Aplicações:

- Aproximação normal para médias amostrais
- Construção de intervalos de confiança
- Justificação teórica para testes Z

Referência: `teoria_cap3_completo.tex`, Seção 5.2

Exercício 5.1 - TCL Básico (Básico)

Sejam $X_1, \ldots, X_{100}$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim \text{Exp}(1)$.
(a) Calcule $P(\bar{X}_n > 1.2)$ usando a aproximação normal.
(b) Compare com o valor exato (se possível).
(c) Para qual n a aproximação normal seria considerada boa?

Exercício 5.2 - TCL para Bernoulli via MGF (Intermediário)

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim \text{Bernoulli}(1/2)$.
Defina:

$$U_n = 2\sqrt{n}\left(\bar{X}_n - \frac{1}{2}\right)$$

(a) Encontre a MGF de U_n.
(b) Use expansão de Taylor para mostrar que $M_{U_n}(t) \to e^{t^2/2}$.
(c) Conclua que $U_n \xrightarrow{D} N(0,1)$.
Conexão: Questão Extra 6.

Exercício 5.3 - TCL e Aproximação Normal (Intermediário)

Uma moeda possivelmente viciada é lançada 400 vezes, resultando em 220 caras.
(a) Use o TCL para testar $H_0 : p = 0.5$ vs $H_1 : p \neq 0.5$ ao nível 5%.
(b) Calcule o p-valor.
(c) Qual seria a decisão se fossem apenas 40 lançamentos com 22 caras?

Exercício 5.4 - TCL para Soma de Uniformes (Avançado)

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim U(0,1)$.
(a) Use o TCL para aproximar $P(\sum_{i=1}^{12} X_i \leq 7)$.
(b) Por que $n = 12$ é especial para a Uniforme(0,1)?
(c) Simule e compare com a aproximação normal.

6 Teorema de Slutsky e Aplicações

Revisão Teórica

Resultado 3D - Teorema de Slutsky

Se $U_n \xrightarrow{D} U$ e $V_n \xrightarrow{P} v$ (constante), então:

(a) $U_n + V_n \xrightarrow{D} U + v$

(b) $U_n V_n \xrightarrow{D} Uv$

(c) $U_n/V_n \xrightarrow{D} U/v$ (se $v \neq 0$)

Aplicação Principal: Substituir parâmetros desconhecidos por estimadores consistentes.
Referência: `teoria_cap3_completo.tex`, Seção 5.1

Exercício 6.1 - Teste t Assintótico (Básico)

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $E[X_i] = \mu$ e $\text{Var}(X_i) = \sigma^2 < \infty$.

Use Slutsky para mostrar que:

$$T_n = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{S_n} \xrightarrow{D} N(0,1)$$

onde S_n é o desvio padrão amostral.
Interpretação: Isto justifica a aproximação normal para o teste t quando n é grande.

Exercício 6.2 - Transformação de Q_n (Intermediário)

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim U(0,\theta)$ e $T_n = X_{(n)}$.
Defina:

$$Q_n = \frac{n(\theta - T_n)}{T_n}$$

(a) Reescreva Q_n como produto $Q_n = U_n \cdot \frac{\theta}{T_n}$.
(b) Use Slutsky para mostrar que $Q_n \xrightarrow{D} \text{Exp}(1)$.
Conexão: Questão Extra 7.

Exercício 6.3 - IC Assintótico para Variância (Avançado)

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $E[X_i] = \mu$ e $\text{Var}(X_i) = \sigma^2$.
(a) Mostre que:

$$\frac{\sqrt{n}(S_n^2 - \sigma^2)}{\sqrt{2}\sigma^2} \xrightarrow{D} N(0,1)$$

(Assuma normalidade ou use $\mu_4 = 3\sigma^4$)
(b) Construa um IC assintótico de 95% para σ^2.
(c) Aplique para dados com $n = 50$, $s^2 = 16$.
Conexão: Questão Extra 9.

7 Método Delta

Revisão Teórica

Teorema 3.7.6.2(a) - Método Delta

Se $\sqrt{n}(T_n - \theta) \xrightarrow{D} N(0, \sigma^2(\theta))$ e g é continuamente diferenciável com $g'(\theta) \neq 0$, então:

$$\sqrt{n}[g(T_n) - g(\theta)] \xrightarrow{D} N(0, \sigma^2(\theta)[g'(\theta)]^2)$$

Aplicação: Encontrar distribuição assintótica de transformações não-lineares.
Referência: `teoria_cap3_completo.tex`, Seção 5.3

Exercício 7.1 - Delta para Poisson (Básico)

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim \text{Poisson}(\lambda)$.
(a) Mostre que $\sqrt{n}(\bar{X}_n - \lambda) \xrightarrow{D} N(0, \lambda)$.

(b) Use o Método Delta com $g(\lambda) = \lambda^3$ para encontrar a distribuição assintótica de $\sqrt{n}(\bar{X}_n^3 - \lambda^3)$.
Conexão: Questão Extra 10.

Exercício 7.2 - Delta para Raiz Quadrada (Intermediário)

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $E[X_i] = \mu > 0$ e $\text{Var}(X_i) = \sigma^2$.
(a) Encontre a distribuição assintótica de $\sqrt{n}(\sqrt{\bar{X}_n} - \sqrt{\mu})$.
(b) Construa um IC assintótico de 95% para $\sqrt{\mu}$.
(c) Aplique para dados Poisson(λ) com $n = 100$, $\bar{x} = 9$.

Exercício 7.3 - Delta para Logaritmo (Intermediário)

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim \text{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$.
(a) Mostre que $\bar{X}_n$ é o EMV para $\theta = 1/\lambda$.
(b) Use o Método Delta para encontrar a distribuição assintótica de $\log(\bar{X}_n)$.
(c) Construa um IC assintótico para $\log(\theta)$ e transforme para obter IC para θ.

Exercício 7.4 - Delta Multivariado (Avançado)

Sejam $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$ pares i.i.d. com:

$$\begin{aligned} E[X_i] &= \mu_X, \quad \text{Var}(X_i) = \sigma_X^2 \\ E[Y_i] &= \mu_Y, \quad \text{Var}(Y_i) = \sigma_Y^2 \\ \text{Cov}(X_i, Y_i) &= \sigma_{XY} \end{aligned}$$

Defina $R_n = \bar{X}_n / \bar{Y}_n$ (razão de médias).
(a) Use o Método Delta bivariado com $g(x, y) = x/y$ para encontrar a distribuição assintótica de $\sqrt{n}(R_n - \mu_X/\mu_Y)$.
(b) Calcule a variância assintótica explicitamente.

8 Exercícios Integrados

Exercício 8.1 - Análise Completa: Uniforme

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim U(0, \theta)$.
(a) Mostre que $T_n = X_{(n)} \xrightarrow{P} \theta$.
(b) Encontre a distribuição limite de $U_n = n(\theta - T_n)/\theta$.
(c) Mostre que $Q_n = n(\theta - T_n)/T_n \xrightarrow{D} \text{Exp}(1)$ usando Slutsky.
(d) Construa um IC assintótico de 95% para θ baseado em Q_n.
(e) Para $n = 50$ e $x_{(50)} = 9.8$, estime θ e construa o IC.

Exercício 8.2 - Análise Completa: Variância

Sejam $X_1, \dots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$.

(a) Usando Helmert, mostre que $S_n^2 \xrightarrow{P} \sigma^2$.

(b) Mostre que $\sqrt{n-1}(S_n^2 - \sigma^2) \xrightarrow{D} N(0, 2\sigma^4)$ usando TCL.

(c) Use Slutsky para ajustar para $\sqrt{n}(S_n^2 - \sigma^2) \xrightarrow{D} N(0, 2\sigma^4)$.

(d) Construa um IC assintótico de 95% para σ^2.

(e) Para $n = 30$, $s^2 = 25$, construa o IC e compare com o IC exato baseado em χ^2.

Exercício 8.3 - Comparação de Estimadores

Sejam $X_1, \dots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim U(0, \theta)$.
Considere três estimadores para θ:

$$\hat{\theta}_1 = 2\bar{X}_n$$
$$\hat{\theta}_2 = X_{(n)}$$
$$\hat{\theta}_3 = \frac{n+1}{n} X_{(n)}$$

(a) Mostre que os três são consistentes.

(b) Calcule o viés e variância de cada um.

(c) Compare o EQM assintótico.

(d) Qual você recomendaria e por quê?

Exercício 8.4 - Teste Assintótico

Uma empresa afirma que seus chips têm taxa de defeito de no máximo 2%. Uma amostra de 500 chips revelou 15 defeituosos.

(a) Formule hipóteses apropriadas.

(b) Use o TCL para derivar a estatística de teste.

(c) Realize o teste ao nível 5%.

(d) Calcule o p-valor e interprete.

(e) Qual tamanho amostral seria necessário para detectar $p = 0.04$ com poder de 90%?

9 Respostas Detalhadas

Solução do Exercício 1.1

(a) $a_n = 5n^2 + 3n,\ b_n = n^2$

Calculemos o limite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5n^2+3n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \left(5 + \frac{3}{n}\right) = 5$$

Como o limite existe e é finito (5), temos que $|a_n/b_n| \leq 6$ para n suficientemente grande.
Resposta: $a_n = O(b_n)$, mas $a_n \neq o(b_n)$ (pois o limite não é zero).

(b) $a_n = n,\ b_n = n^2$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Resposta: $a_n = o(b_n)$ (e portanto também $a_n = O(b_n)$).

(c) $a_n = n^2 + \sqrt{n},\ b_n = n$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+\sqrt{n}}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(n + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \infty$$

Como o limite é infinito, não existe k tal que $|a_n/b_n| \leq k$ para todo n grande.
Resposta: Nenhum dos dois (a_n cresce mais rápido que b_n).

(d) $a_n = \log n,\ b_n = n$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n} = 0 \quad \text{(pela Regra de L'Hôpital)}$$

Resposta: $a_n = o(b_n)$.

Dica e Conexões

Conexão com Teoria: Este exercício aplica diretamente as Definições 3.7.2.1 e 3.7.2.2 da `teoria_cap3_completo.tex`.
Dica de Estudo: Sempre que $\lim a_n/b_n$ existir e for finito não-zero, temos $a_n = O(b_n)$. Se o limite for zero, temos $a_n = o(b_n)$. Se o limite for infinito, não se aplica nem O nem o.

Solução do Exercício 1.2

Estratégia

Usaremos a desigualdade de Chebyshev para limitar a probabilidade.

Desenvolvimento

Para $X_n \sim N(\mu, \sigma^2/n)$, temos:

- $E[X_n] = \mu$
- $\text{Var}(X_n) = \sigma^2/n$

Pela desigualdade de Chebyshev:

$$P(|X_n - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\text{Var}(X_n)}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2/n}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

Como σ^2 e ε^2 são constantes fixas, temos:

$$P(|X_n - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{k}{n} \quad \text{onde } k = \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

Portanto, $P(|X_n - \mu| \geq \varepsilon) = O(1/n)$. $\square$

Interpretação

Isto mostra que a probabilidade de erro decai linearmente com n, o que é consistente com $X_n \xrightarrow{P} \mu$.

Dica e Conexões

Conexão: A desigualdade de Chebyshev é fundamental na prova do Resultado 1P (Lei Fraca dos Grandes Números) na `teoria_cap3_completo.tex`.
Aplicação: Este resultado quantifica a taxa de convergência em probabilidade.

Solução do Exercício 1.3

Desenvolvimento

Sabemos que:

$$E[\bar{X}_n] = \mu$$
$$\text{Var}(\bar{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n}$$

Logo:

$$\begin{aligned} E[(\bar{X}_n - \mu)^2] &= \text{Var}(\bar{X}_n) + [E[\bar{X}_n] - \mu]^2 \\ &= \frac{\sigma^2}{n} + 0 \\ &= \frac{\sigma^2}{n} \end{aligned}$$

Como σ^2 é constante, temos:

$$E[(\bar{X}_n - \mu)^2] = O(1/n)$$

Interpretação

Pelo Resultado 2P da teoria, se $E[|T_n - a|^r] \to 0$, então $T_n \xrightarrow{P} a$.
Aqui, $E[(\bar{X}_n - \mu)^2] = \sigma^2/n \to 0$, logo $\bar{X}_n \xrightarrow{P} \mu$.
Além disso, o erro quadrático médio decai como $1/n$, o que quantifica a taxa de convergência.

Dica e Conexões

Conexão: Este resultado é usado na prova do Resultado 1P (LFGN) na `teoria_cap3_completo.tex`, Seção 3.2.
Importância: A taxa $O(1/n)$ do EQM é a taxa típica para médias amostrais. Compare com a Questão Extra 2, onde o máximo da uniforme tem taxa $O(1/n^2)$!

Solução do Exercício 2.1

Estratégia

Usaremos as expansões de Taylor fundamentais.

Desenvolvimento

Expandindo até ordem 2:

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + O(x^2) \\ \log(1+x) &= x + O(x^2) \end{aligned}$$

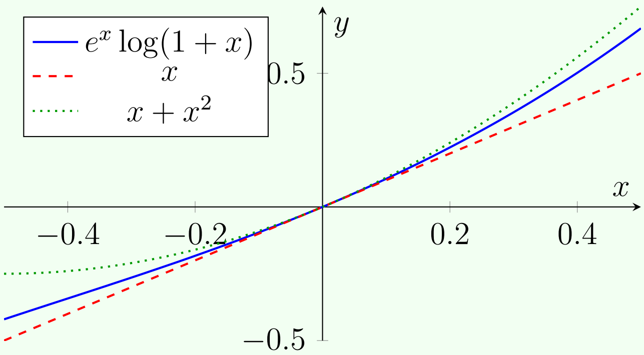
Multiplicando:

$$\begin{aligned} e^x \log(1+x) &= [1 + x + O(x^2)][x + O(x^2)] \\ &= 1 \cdot x + 1 \cdot O(x^2) + x \cdot x + x \cdot O(x^2) + O(x^2) \cdot x + O(x^2) \cdot O(x^2) \\ &= x + O(x^2) + x^2 + O(x^3) + O(x^3) + O(x^4) \end{aligned}$$

Como $x^2 = O(x^2)$, temos:

$$e^x \log(1+x) = x + O(x^2) \quad \square$$

Visualização



Dica e Conexões

Conexão: Este é o Exemplo worked out na `teoria_cap3_completo.tex`, Seção 2.3.
Técnica: Ao multiplicar expansões, use que $O(x^a) \cdot O(x^b) = O(x^{a+b})$.

Solução do Exercício 2.2

Parte 1: Limite

Queremos mostrar que:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{\lambda}{n}\right)^n = e^\lambda$$

Tomando logaritmo:

$$\log\left[\left(1 + \frac{\lambda}{n}\right)^n\right] = n \log\left(1 + \frac{\lambda}{n}\right)$$

Expansão de Taylor de $\log(1 + x)$ em torno de $x = 0$:

$$\log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + O(x^3)$$

Substituindo $x = \lambda/n$:

$$\log\left(1 + \frac{\lambda}{n}\right) = \frac{\lambda}{n} - \frac{\lambda^2}{2n^2} + O(n^{-3})$$

Multiplicando por n:

$$\begin{aligned} n \log\left(1 + \frac{\lambda}{n}\right) &= n\left[\frac{\lambda}{n} - \frac{\lambda^2}{2n^2} + O(n^{-3})\right] \\ &= \lambda - \frac{\lambda^2}{2n} + O(n^{-2}) \\ &\to \lambda \quad \text{quando } n \to \infty \end{aligned}$$

Portanto:

$$\left(1 + \frac{\lambda}{n}\right)^n \to e^\lambda \quad \square$$

Parte 2: Aproximação Poisson-Binomial

Seja $X_n \sim \text{Binomial}(n, p)$ com $p = \lambda/n$ fixo. Para k fixo:

$$\begin{aligned} P(X_n = k) &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \end{aligned}$$

Quando $n \to \infty$:

- $\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} \to 1$ (produto de k termos, cada $\to 1$)
- $\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \to e^{-\lambda}$ (resultado anterior)
- $\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \to 1$

Portanto:

$$P(X_n = k) \to \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \quad (\text{Poisson}(\lambda)) \quad \square$$

Dica e Conexões

Conexão: Este é o limite (R.3) fundamental usado repetidamente na `teoria_cap3_completo.tex`.
Aplicação Prática: Quando n é grande e p é pequeno tal que $np \approx \lambda$ é moderado, use Poisson(λ) para aproximar Binomial(n, p).
Regra Prática: Use a aproximação Poisson quando $n \geq 20$ e $p \leq 0.05$, ou quando $n \geq 100$ e $np \leq 10$.

Solução do Exercício 3.1

(a) Momentos da Exponencial

Para $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ com densidade $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x > 0$:
Esperança:

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \lambda \int_0^\infty x e^{-\lambda x} dx \\ &= \lambda \cdot \frac{1}{\lambda^2} \quad \text{(integração por partes)} \\ &= \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

Segundo momento:

$$E[X^2] = \int_0^\infty x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda^2}$$

Variância:

$$\text{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

$\boxed{E[X_i] = 1/\lambda, \quad \text{Var}(X_i) = 1/\lambda^2}$

(b) Consistência

Como $E[X_i] = 1/\lambda < \infty$ e $\text{Var}(X_i) = 1/\lambda^2 < \infty$, pelo **Resultado 1P** (Lei Fraca dos Grandes Números):

$$\bar{X}_n \xrightarrow{P} E[X_i] = \frac{1}{\lambda} \quad \square$$

(c) Taxa de Convergência

Pela desigualdade de Chebyshev:

$$P(|\bar{X}_n - 1/\lambda| \geq \varepsilon) \leq \frac{\text{Var}(\bar{X}_n)}{\varepsilon^2} = \frac{1/(n\lambda^2)}{\varepsilon^2} = \frac{1}{n\lambda^2\varepsilon^2}$$

Logo, a taxa de convergência é $O(1/n)$.
Alternativamente, o EQM é:

$$E[(\bar{X}_n - 1/\lambda)^2] = \text{Var}(\bar{X}_n) = \frac{1}{n\lambda^2} = O(1/n)$$

Dica e Conexões

Conexão: Este exercício aplica diretamente o Resultado 1P da `teoria_cap3_completo.tex`, Seção 3.2.
Interpretação: A média amostral $\bar{X}_n$ é um estimador consistente para a média populacional $1/\lambda$, com taxa de convergência quadrática $O(1/n)$.
Próximo Passo: Se quisermos a distribuição assintótica (não apenas convergência pontual), usaríamos o TCL (Seção 5).

Solução do Exercício 3.2

Estratégia

Usaremos a transformação de Helmert para representar S_n^2 como média amostral de variáveis i.i.d.

Passo 1: Transformação de Helmert

A transformação de Helmert produz variáveis ortogonais $Y_1, \ldots, Y_n$ tais que:

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=2}^{n} Y_i^2 \tag{1}$$

onde $Y_i \sim N(0, \sigma^2)$ são independentes quando $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$.
Propriedade Chave: Mesmo para X_i não-normais, podemos escrever:

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2 \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$$

para n grande.

Passo 2: Momentos de Y_i^2

Defina $Z_i = (X_i - \mu)^2$. Então:

- $E[Z_i] = E[(X_i - \mu)^2] = \text{Var}(X_i) = \sigma^2$
- $\text{Var}(Z_i) = E[Z_i^2] - (E[Z_i])^2 = E[(X_i - \mu)^4] - \sigma^4 = \mu_4 - \sigma^4 < \infty$

(onde $\mu_4 = E[(X_i - \mu)^4]$ é o quarto momento central)

Passo 3: Aplicação da LFGN

Como $\{Y_i^2\}_{i=2}^n$ são i.i.d. com:

- $E[Y_i^2] = \sigma^2$
- $\text{Var}(Y_i^2) = 2\sigma^4 < \infty$ (para normais)

Pelo **Resultado 1P**:

$$\frac{1}{n-1}\sum_{i=2}^{n} Y_i^2 \xrightarrow{P} E[Y_i^2] = \sigma^2$$

Portanto:

$$S_n^2 \xrightarrow{P} \sigma^2 \quad \square$$

Diagrama da Transformação de Helmert

$$X_1, \dots, X_n$$
$$\text{i.i.d. } N(\mu, \sigma^2)$$
$$\Big\downarrow \; \text{Helmert}$$
$$Y_1, \dots, Y_n$$
$$\text{independentes } N(0, \sigma^2)$$

$$\boxed{S_n^2 = \tfrac{1}{n-1}\textstyle\sum_{i=2}^n Y_i^2}$$

Dica e Conexões

Conexão: Este é exatamente a Questão Extra 1 resolvida em `questoes_cap3_completo.tex`.
Por que Helmert? A transformação de Helmert:

- Separa informação sobre média (Y_1) da informação sobre variância ($Y_2, \dots, Y_n$)
- Preserva a soma dos quadrados
- Produz variáveis independentes (crucial para normalidade)

Generalização: Para X_i não-normais, o resultado vale mas a transformação exata de Helmert não se aplica. Ainda assim, S_n^2 pode ser aproximado por média de $(X_i - \mu)^2$.
Próximo Passo: Para obter a distribuição assintótica (não apenas convergência), veja Exercício 6.3 ou Questão Extra 9.

Solução do Exercício 3.3

(a) Consistência via EQM

Distribuição de T_n:
Para o máximo da uniforme:

$$f_{T_n}(t) = \frac{n}{\theta^n} t^{n-1} \mathbf{1}_{(0,\theta)}(t)$$

Primeiro momento:

$$\begin{aligned} E[T_n] &= \int_0^\theta t \cdot \frac{n}{\theta^n} t^{n-1} dt = \frac{n}{\theta^n} \int_0^\theta t^n dt \\ &= \frac{n}{\theta^n} \cdot \frac{\theta^{n+1}}{n+1} = \frac{n\theta}{n+1} \end{aligned}$$

Segundo momento:

$$\begin{aligned} E[T_n^2] &= \int_0^\theta t^2 \cdot \frac{n}{\theta^n} t^{n-1} dt = \frac{n}{\theta^n} \int_0^\theta t^{n+1} dt \\ &= \frac{n}{\theta^n} \cdot \frac{\theta^{n+2}}{n+2} = \frac{n\theta^2}{n+2} \end{aligned}$$

EQM:

$$\begin{aligned} E[(T_n - \theta)^2] &= E[T_n^2] - 2\theta E[T_n] + \theta^2 \\ &= \frac{n\theta^2}{n+2} - 2\theta \cdot \frac{n\theta}{n+1} + \theta^2 \\ &= \theta^2 \left[\frac{n}{n+2} - \frac{2n}{n+1} + 1 \right] \end{aligned}$$

Colocando em denominador comum $(n+2)(n+1)$:

$$\begin{aligned} &= \theta^2 \left[\frac{n(n+1) - 2n(n+2) + (n+2)(n+1)}{(n+2)(n+1)} \right] \\ &= \theta^2 \left[\frac{n^2 + n - 2n^2 - 4n + n^2 + 3n + 2}{(n+2)(n+1)} \right] \\ &= \theta^2 \left[\frac{2}{(n+2)(n+1)} \right] = \frac{2\theta^2}{(n+2)(n+1)} \to 0 \end{aligned}$$

Pelo **Resultado 2P**, $T_n \xrightarrow{P} \theta$. $\square$

(b) Taxa de Convergência

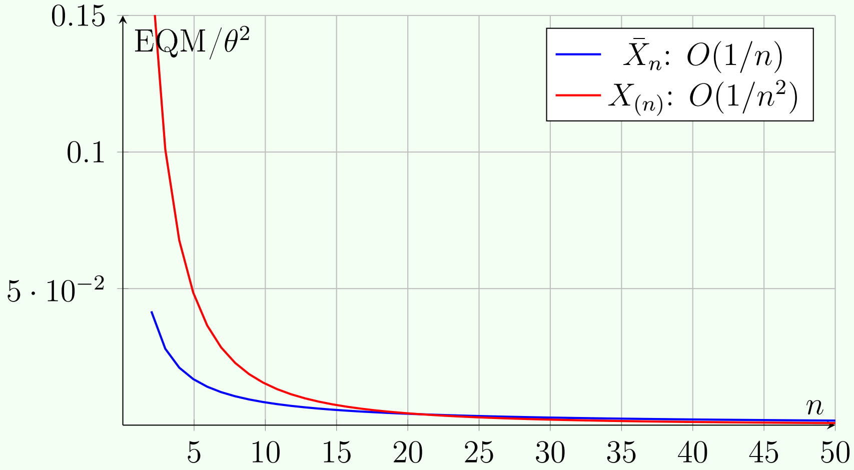
Observe que:

$$E[(T_n - \theta)^2] = \frac{2\theta^2}{(n+2)(n+1)} \approx \frac{2\theta^2}{n^2} = O(1/n^2)$$

Isto é muito mais rápido que a taxa típica $O(1/n)$ da média amostral!
Comparação:

Estimador	**Taxa EQM**	**n para EQM $< 0.01\theta^2$**
$\bar{X}_n$ (média)	$O(1/n)$	$n \approx 100$
$X_{(n)}$ (máximo)	$O(1/n^2)$	$n \approx 15$

Gráfico da Taxa de Convergência



Dica e Conexões

Conexão: Esta é a Questão Extra 2 de `questoes_cap3_completo.tex`.
Insight Importante: O máximo $X_{(n)}$ converge MUITO mais rápido que a média $\bar{X}_n$ para o parâmetro θ da uniforme. Isto ilustra que a taxa de convergência depende fortemente do estimador!
Estatística de Ordem: Quando o parâmetro de interesse está relacionado a extremos da distribuição (máximo, mínimo), estatísticas de ordem podem ser muito mais eficientes que médias.
Próximo Passo: Veja Exercício 4.1 para a distribuição limite de $n(\theta - X_{(n)})$.

Solução do Exercício 4.1

Estratégia

Calcularemos a fda de U_n e tomaremos o limite quando $n \to \infty$.

Passo 1: Função de Distribuição de T_n

Do Exercício 3.3:

$$F_{T_n}(t) = \left(\frac{t}{\theta}\right)^n \mathbf{1}_{(0,\theta)}(t) + \mathbf{1}_{[\theta,\infty)}(t)$$

Passo 2: Transformação

Para $u > 0$:

$$\begin{aligned}
F_{U_n}(u) &= P\left(\frac{n}{\theta}(\theta - T_n) \le u\right) \\
&= P\left(\theta - T_n \le \frac{\theta u}{n}\right) \\
&= P\left(T_n \ge \theta\left(1 - \frac{u}{n}\right)\right) \\
&= 1 - P\left(T_n < \theta\left(1 - \frac{u}{n}\right)\right) \\
&= 1 - F_{T_n}\left(\theta\left(1 - \frac{u}{n}\right)\right)
\end{aligned}$$

Passo 3: Cálculo para n Grande

Para n suficientemente grande, $0 < \theta(1 - u/n) < \theta$, logo:

$$\begin{aligned}
F_{U_n}(u) &= 1 - \left(\frac{\theta(1-u/n)}{\theta}\right)^n \\
&= 1 - \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n
\end{aligned}$$

Passo 4: Limite quando $n \to \infty$

Usando o limite fundamental $(R.3)$: $\lim_{n\to\infty}(1 + x/n)^n = e^x$:

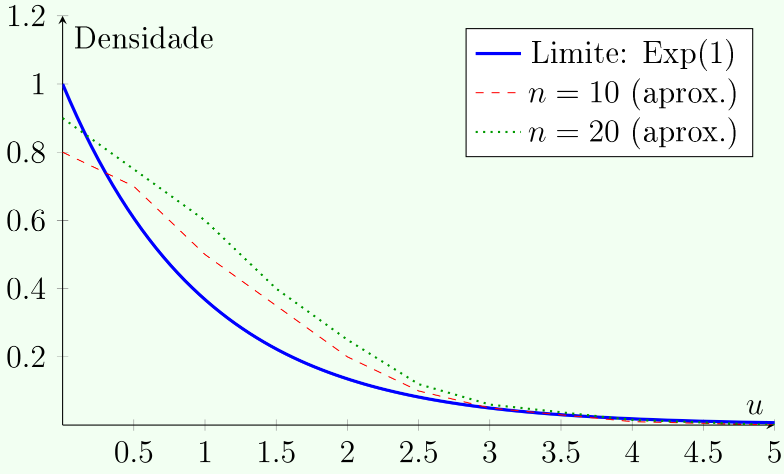
$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} F_{U_n}(u) &= \lim_{n\to\infty}\left[1 - \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n\right] \\
&= 1 - \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{(-u)}{n}\right)^n \\
&= 1 - e^{-u}, \quad u > 0
\end{aligned}$$

Conclusão

Reconhecemos que $F_U(u) = 1 - e^{-u}$ para $u > 0$ é a fda de Exp(1).
Portanto:

$$U_n = \frac{n(\theta - X_{(n)})}{\theta} \xrightarrow{D} \text{Exp}(1) \quad \square$$

Visualização Gráfica



Dica e Conexões

Conexão: Esta é a Questão Extra 5 de `questoes_cap3_completo.tex`.
Interpretação Importante:

- Exercício 3.3 mostrou: $X_{(n)} \xrightarrow{P} \theta$ (convergência pontual)
- Este exercício mostra: $n(\theta - X_{(n)})/\theta \xrightarrow{D} \text{Exp}(1)$ (distribuição do erro normalizado)

A distribuição limite dá informação sobre a *velocidade* de convergência!
Normalização: Note que usamos normalização n (não $\sqrt{n}$ como no TCL). Isto é consistente com a taxa $O(1/n^2)$ do EQM.
Aplicação: Este resultado pode ser usado para construir intervalos de confiança para θ (veja Exercício 8.1).
Teoria de Valores Extremos: Este é um resultado clássico da teoria de valores extremos. Distribuições limite de máximos/mínimos são tipicamente Gumbel, Fréchet ou Weibull (aqui é um caso especial relacionado à exponencial).

Solução do Exercício 5.2

(a) MGF de U_n

Reescrever U_n:

$$U_n = 2\sqrt{n}\left(\bar{X}_n - \frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{2}\right)$$
$$= \frac{2}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} X_i - \sqrt{n} = \frac{2\sum X_i - n}{\sqrt{n}}$$

MGF:

$$M_{U_n}(t) = E\left[\exp\left\{t \cdot \frac{2\sum X_i - n}{\sqrt{n}}\right\}\right]$$
$$= e^{-t\sqrt{n}} \cdot E\left[\exp\left\{\frac{2t}{\sqrt{n}}\sum X_i\right\}\right]$$
$$= e^{-t\sqrt{n}} \cdot \prod_{i=1}^{n} E\left[e^{\frac{2t}{\sqrt{n}}X_i}\right] \quad \text{(independência)}$$
$$= e^{-t\sqrt{n}} \cdot \left(E\left[e^{\frac{2t}{\sqrt{n}}X_1}\right]\right)^n$$

Para $X_1 \sim \text{Bernoulli}(1/2)$:

$$E\left[e^{\frac{2t}{\sqrt{n}}X_1}\right] = \frac{1}{2} \cdot e^0 + \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{2t}{\sqrt{n}}} = \frac{1}{2}\left(1 + e^{\frac{2t}{\sqrt{n}}}\right)$$

Logo:

$$M_{U_n}(t) = e^{-t\sqrt{n}}\left[\frac{1 + e^{\frac{2t}{\sqrt{n}}}}{2}\right]^n = \left[\frac{e^{-\frac{t}{\sqrt{n}}} + e^{\frac{t}{\sqrt{n}}}}{2}\right]^n$$

(b) Expansão de Taylor

Expandir as exponenciais:

$$e^{\frac{t}{\sqrt{n}}} = 1 + \frac{t}{\sqrt{n}} + \frac{t^2}{2n} + O(n^{-3/2})$$
$$e^{-\frac{t}{\sqrt{n}}} = 1 - \frac{t}{\sqrt{n}} + \frac{t^2}{2n} + O(n^{-3/2})$$

Somar:

$$e^{-\frac{t}{\sqrt{n}}} + e^{\frac{t}{\sqrt{n}}} = 2 + \frac{t^2}{n} + O(n^{-3/2})$$

MGF:

$$M_{U_n}(t) = \left[\frac{2 + \frac{t^2}{n} + O(n^{-3/2})}{2}\right]^n = \left[1 + \frac{t^2}{2n} + O(n^{-3/2})\right]^n$$

Logaritmo:

$$\log M_{U_n}(t) = n\log\left[1 + \frac{t^2}{2n} + O(n^{-3/2})\right]$$

Usando $\log(1+x) = x + O(x^2)$ com $x = \frac{t^2}{2n}$:

$$\log M_{U_n}(t) = n\left[\frac{t^2}{2n} + O(n^{-2})\right] = \frac{t^2}{2} + O(n^{-1}) \to \frac{t^2}{2}$$

Portanto:

$$M_{U_n}(t) \to e^{t^2/2}$$

(c) Conclusão

Reconhecemos que $M_Z(t) = e^{t^2/2}$ é a MGF de $Z \sim N(0,1)$.
Pelo **Resultado 1D**, como $M_{U_n}(t) \to M_Z(t)$:

$$U_n = 2\sqrt{n}\left(\bar{X}_n - \frac{1}{2}\right) \xrightarrow{D} N(0,1) \quad \square$$

Verificação com o TCL

Para Bernoulli(1/2): $E[X_i] = 1/2$ e $\text{Var}(X_i) = 1/4$.
Pelo TCL:

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - 1/2)}{\sqrt{1/4}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - 1/2)}{1/2} = 2\sqrt{n}(\bar{X}_n - 1/2) \xrightarrow{D} N(0,1) \quad \checkmark$$

Dica e Conexões

Conexão: Esta é a Questão Extra 6 de `questoes_cap3_completo.tex`.
Importância: Esta questão demonstra o TCL usando MGF, que é uma técnica alternativa à prova via função característica apresentada na teoria.
Passos Chave na Técnica MGF:

1. Calcular a MGF de U_n em termos das MGFs individuais
2. Expandir em Taylor até ordem necessária
3. Usar limites fundamentais $(1 + x/n)^n \to e^x$
4. Identificar a MGF limite

Aplicação: Aproximação Normal para Binomial$(n, 1/2)$:

$$P(S_n \le k) \approx \Phi\left(\frac{2(k - n/2)}{\sqrt{n}}\right)$$

Correção de Continuidade: Para melhor aproximação, use:

$$P(S_n \le k) \approx \Phi\left(\frac{2(k + 0.5 - n/2)}{\sqrt{n}}\right)$$

Tabelas de Referência Rápida

Resultados Fundamentais do Capítulo 3

Resultado	Enunciado	Aplicação
Resultado 1P (LFGN)	X_i i.i.d., $E[X_i] = \mu$, $\text{Var}(X_i) = \sigma^2 < \infty \Rightarrow \bar{X}_n \xrightarrow{P} \mu$	Consistência da média amostral
Resultado 2P	$E[\lvert T_n - a\rvert^r] \to 0 \Rightarrow T_n \xrightarrow{P} a$	Prova de consistência via momentos
Resultado 4P	Operações algébricas preservam conv. em P	$\frac{\bar{X}_n}{S_n^2} \xrightarrow{P} \frac{\mu}{\sigma^2}$
Resultado 5P	$U_n \xrightarrow{P} u$, g contínua $\Rightarrow g(U_n) \xrightarrow{P} g(u)$	$S_n = \sqrt{S_n^2} \xrightarrow{P} \sigma$
TCL (3.7.6.1)	$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} \xrightarrow{D} N(0,1)$	Aproximação normal, IC, testes
Slutsky (Res. 3D)	$U_n \xrightarrow{D} U$, $V_n \xrightarrow{P} v \Rightarrow U_n V_n \xrightarrow{D} Uv$	Teste t assintótico
Método Delta (3.7.6.2)	$\sqrt{n}(T_n - \theta) \xrightarrow{D} N(0, \sigma^2) \Rightarrow \sqrt{n}[g(T_n) - g(\theta)] \xrightarrow{D} N(0, \sigma^2[g'(\theta)]^2)$	Transf. não-lineares

Checklist de Estratégias

1. **Consistência?**
   - Use Resultado 1P (LFGN) para médias
   - Use Resultado 2P com EQM $\to 0$
   - Use definição direta (Questão 3.23)
2. **Distribuição Assintótica?**
   - TCL para médias padronizadas
   - MGF + limite (Questão Extra 6)
   - CDF direta + limite (Questão Extra 5)
3. **Transformação de Estimador?**
   - Slutsky se mistura conv. em D e conv. em P
   - Método Delta para transformações não-lineares
   - Teorema 3.7.6.4(a) para funções contínuas

Taxas de Convergência Típicas

Estatística	Taxa EQM	Normalização
$\bar{X}_n$ (média)	$O(1/n)$	$\sqrt{n}$
$X_{(n)}$ (máximo Uniforme)	$O(1/n^2)$	n
S_n^2 (variância)	$O(1/n)$	$\sqrt{n}$

— Fim do Caderno de Exercícios —

*"A teoria assintótica não é apenas matemática abstrata;
ela é a ponte entre a teoria e a prática estatística."*