Teste de Hipótese em ANOVA para Delineamento Inteiramente Casualizado

Marina Oliveira Cunha
Universidade Federal de Pernambuco

17 de novembro de 2025

1 Introdução

A Análise de Variância (ANOVA), desenvolvida por Fisher, permite testar a igualdade das médias de múltiplos tratamentos. No Delineamento Inteiramente Casualizado (DIC), os tratamentos são distribuídos aleatoriamente às unidades experimentais. O objetivo é testar:

$$H_0 : \mu_1 = \cdots = \mu_t \quad \text{versus} \quad H_1 : \text{pelo menos uma média difere.}$$

A ANOVA de um fator pode ser vista como caso particular do modelo linear geral $y = X\beta+\epsilon$, onde a matriz de delineamento $\mathbf{X}$ tem estrutura específica determinada pelo arranjo experimental. O modelo DIC assume $y_{ij} = \mu + \tau_i + \epsilon_{ij}$ para $i = 1, \ldots, t$ tratamentos e $j = 1, \ldots, r$ repetições, sendo $\epsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$ independentes. Este trabalho fundamenta o teste F via decomposição de soma de quadrados e aplicação do Teorema de Cochran, que estabelece condições para que somas de quadrados sigam distribuições qui-quadrado independentes, essencial para a validade estatística exata do teste.

2 Modelo Estatístico

O modelo do DIC, para $i = 1, \ldots, t$ tratamentos e $j = 1, \ldots, r$ repetições, é:

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \epsilon_{ij}, \qquad \epsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2) \text{ independentes,}$$

onde μ é a média geral e τ_i o efeito do tratamento i. Para garantir identificabilidade, impomos a restrição $\sum_{i=1}^{t} \tau_i = 0$. As hipóteses são:

$$H_0 : \tau_1 = \cdots = \tau_t = 0 \quad \text{e} \quad H_1 : \exists\, i : \tau_i \neq 0.$$

Em notação matricial, temos $\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon}$, onde $\mathbf{y}$ é o vetor de observações, $\mathbf{X}$ é a matriz de delineamento com estrutura de blocos correspondente aos tratamentos, $\boldsymbol{\beta} = (\mu, \tau_1, \ldots, \tau_t)^T$ e $\boldsymbol{\epsilon} \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2\mathbf{I})$. Como $\mu_i = \mu + \tau_i$ e $\sum_{i=1}^{t} \tau_i = 0$, segue que $\mu_1 = \cdots = \mu_t \iff \tau_1 = \cdots = \tau_t = 0$, estabelecendo a equivalência entre formular as hipóteses em termos de médias ou de efeitos.

3 Pressupostos e Diagnósticos

A validade do teste F com distribuições exatas requer os seguintes pressupostos: (i) **normalidade**: $\epsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$; (ii) **homogeneidade das variâncias**: $\text{Var}(\epsilon_{ij}) = \sigma^2$ para todo i, j; (iii) **independência**: as observações ϵ_{ij} são mutuamente independentes.

Estes pressupostos são necessários para que as somas de quadrados sigam distribuições qui-quadrado exatas e independentes via Teorema de Cochran. Em particular, a normalidade e independência garantem que projeções ortogonais de vetores normais resultem em distribuições χ^2 independentes. Testes como Shapiro–Wilk, Breusch–Pagan e gráficos de resíduos podem ser utilizados para avaliar tais pressupostos. A violação destes pressupostos compromete a validade das distribuições exatas e pode exigir métodos alternativos.

4 Partição da Soma de Quadrados

A partir da decomposição

$$y_{ij} - \bar{y} = (y_{ij} - \bar{y}_i) + (\bar{y}_i - \bar{y}),$$

obtemos

$$SQ_T = SQ_E + SQ_A,$$

onde $SQ_T = \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{r} (y_{ij} - \bar{y})^2$ é a soma de quadrados total, $SQ_A = r \sum_{i=1}^{t} (\bar{y}_i - \bar{y})^2$ é a soma de quadrados entre tratamentos, e $SQ_E = \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{r} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2$ é a soma de quadrados residual. A validade da decomposição decorre da ortogonalidade dos componentes: $\sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{r} (y_{ij} - \bar{y}_i)(\bar{y}_i - \bar{y}) = 0$, pois $\sum_{j=1}^{r} (y_{ij} - \bar{y}_i) = 0$ para cada i. Esta ortogonalidade é essencial para garantir a independência entre SQ_A e SQ_E sob normalidade. Aqui, SQ_A mede a variação entre as médias dos tratamentos e SQ_E a variação dentro dos tratamentos.

5 Distribuições das Somas de Quadrados

Para justificar as distribuições qui-quadrado das somas de quadrados, utilizamos o Teorema de Cochran. Este teorema estabelece condições sob as quais somas de quadrados de variáveis aleatórias normais seguem distribuições qui-quadrado independentes, sendo essencial para a validade exata do teste F.

5.1 Teorema de Cochran

Sob normalidade e independência, se $\mathbf{y} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \sigma^2 \mathbf{I})$ e $\mathbf{Q}_1, \ldots, \mathbf{Q}_k$ são matrizes simétricas idempotentes tais que $\mathbf{Q}_1 + \cdots + \mathbf{Q}_k = \mathbf{I}$ e $\text{rank}(\mathbf{Q}_i) = r_i$, então:

1. $\mathbf{y}^T \mathbf{Q}_i \mathbf{y} / \sigma^2 \sim \chi^2_{r_i}(\delta_i)$ são independentes, onde δ_i são parâmetros de não-centralidade
2. Se $\mathbf{Q}_i \boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$, temos distribuições qui-quadrado centrais (não-centralidade zero)

A intuição é que, quando decompomos o vetor de observações em componentes ortogonais (via matrizes de projeção que somam a identidade), cada componente gera uma soma de quadrados que segue distribuição qui-quadrado independente.

5.2 Aplicação ao Modelo DIC

No modelo DIC, podemos escrever as somas de quadrados na forma matricial $\mathbf{y}^T\mathbf{Q}\mathbf{y}$, onde $\mathbf{Q}$ são matrizes de projeção específicas. A decomposição ortogonal da Seção 4 garante que existem matrizes $\mathbf{Q}_1$ e $\mathbf{Q}_2$ tais que:

- $\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2 + \mathbf{P}_0 = \mathbf{I}$, onde $\mathbf{P}_0$ projeta no espaço da média geral
- $\mathbf{Q}_1$ corresponde à projeção no espaço dos efeitos dos tratamentos, com $\text{rank}(\mathbf{Q}_1) = t - 1$
- $\mathbf{Q}_2$ corresponde à projeção no espaço residual, com $\text{rank}(\mathbf{Q}_2) = t(r - 1)$
- $\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2 = \mathbf{0}$, garantindo ortogonalidade e independência

Aplicando o Teorema de Cochran, segue que:

$$\frac{SQ_E}{\sigma^2} = \frac{\mathbf{y}^T\mathbf{Q}_2\mathbf{y}}{\sigma^2} \sim \chi^2_{t(r-1)},$$

pois $\mathbf{Q}_2$ projeta no espaço residual onde a média é zero.

Sob H_0 ($\tau_1 = \cdots = \tau_t = 0$), temos $\mathbf{Q}_1\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$, logo:

$$\frac{SQ_A}{\sigma^2} = \frac{\mathbf{y}^T\mathbf{Q}_1\mathbf{y}}{\sigma^2} \sim \chi^2_{t-1}.$$

A independência entre SQ_A e SQ_E decorre diretamente da ortogonalidade entre $\mathbf{Q}_1$ e $\mathbf{Q}_2$ ($\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2 = \mathbf{0}$), garantida pela estrutura de projeções ortogonais no modelo linear, conforme estabelecido pela decomposição da Seção 4.

6 Estatística F

Como SQ_A e SQ_E são independentes e seguem distribuições χ^2 com graus de liberdade $t-1$ e $t(r-1)$ respectivamente, a razão de suas médias é:

$$F = \frac{MS_A}{MS_E} = \frac{SQ_A/(t-1)}{SQ_E/[t(r-1)]} = \frac{(SQ_A/\sigma^2)/(t-1)}{(SQ_E/\sigma^2)/[t(r-1)]}.$$

Como a estatística F é a razão entre duas variáveis qui-quadrado independentes divididas por seus graus de liberdade, ela elimina o parâmetro de escala desconhecido σ^2, tornando-se uma **estatística pivotal**. Sob H_0,

$$F \sim F_{t-1,\, t(r-1)},$$

sendo a distribuição completamente especificada e independente de parâmetros desconhecidos. Valores grandes de F indicam rejeição de H_0, pois a variância explicada pelos tratamentos (MS_A) é significativamente maior que a variância residual (MS_E).

7 Esperanças dos Quadrados Médios

$$E[MS_E] = \sigma^2, \qquad E[MS_A] = \sigma^2 + \frac{r}{t-1}\sum_{i=1}^{t} \tau_i^2.$$

Sob H_0, as esperanças são iguais; sob H_1, MS_A tende a ser maior, justificando o uso do teste F.

8 Tabela Geral da ANOVA

Fonte	GL	SQ	QM	F
Tratamentos	$t-1$	SQ_A	MS_A	MS_A/MS_E
Erro	$t(r-1)$	SQ_E	MS_E	
Total	$tr-1$	SQ_T		

9 Exemplo Aplicado

Dados de produtividade (quatro variedades, cinco repetições):

A	B	C	D
25	31	22	33
26	25	26	29
20	28	28	31
23	27	25	34
21	24	29	28
Totais: 115	135	130	155
Médias: 23	27	26	31

Verificação de Pressupostos

Antes de aplicar o teste F, é necessário verificar os pressupostos. Testes de normalidade (Shapiro–Wilk) e homogeneidade de variâncias (Levene) podem ser aplicados aos resíduos. Para este exemplo, assumimos que os pressupostos são satisfeitos.

Cálculos

A soma de quadrados total é:

$$SQT = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{5} y_{ij}^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{5} y_{ij})^2}{20} = 14587 - \frac{535^2}{20} = 275{,}75.$$

A soma de quadrados entre tratamentos é:

$$SQA = \frac{1}{5}(115^2 + 135^2 + 130^2 + 155^2) - \frac{535^2}{20} = \frac{72375}{5} - 14311{,}25 = 14475 - 14311{,}25 = 163{,}75.$$

A soma de quadrados residual é:

$$SQE = SQT - SQA = 275{,}75 - 163{,}75 = 112{,}00.$$

Os quadrados médios são: $MS_A = SQA/3 = 54{,}583$ e $MS_E = SQE/16 = 7{,}000$.

Tabela ANOVA

Fonte	GL	SQ	QM	F
Tratamentos	3	163,75	54,583	7,798
Erro	16	112,00	7,000	
Total	19	275,75		

Conclusão

Como $F_{calc} = 7{,}798 > F_{crit} = 3{,}24$ ($\alpha = 0{,}05$), rejeitamos H_0. Há evidência suficiente de diferença significativa entre as variedades ao nível de 5% de significância. A variedade D apresentou maior produtividade média (31), indicando que os tratamentos diferem estatisticamente.

Referências

[1] FISHER, R. A. *The design of experiments.* 1935.

[2] BOX, G. E. P. et al. *Statistics for experimenters.* Wiley, 1978.

[3] SNEDECOR, G. W.; COCHRAN, W. G. *Statistical methods.* Iowa State, 1989.