Unidade 4 - Compilação Completa

Testes de Hipóteses e Tópicos Relacionados

Curso de Inferência Estatística

Outubro 2025

Sumário

Aula 19 (19/05/2025)

Unidade 4

Introdução:

Seja X uma v.a. populacional com fdp (ou fmp) $f(x;\theta)$ para $x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}$ e $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$.

Def.: Uma hipótese é uma afirmação sobre o parâmetro desconhecido θ.

Por exemplo:

$$H_1 : \mu = \mu_0, \quad H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2, \quad H_2 : \alpha \neq \alpha_0. \tag{1}$$

Neyman e Pearson formularam o problema de testar hipóteses como segue. Considere que se tenha escolher entre:

$$\begin{cases} H_0 : \theta \in \Theta_0, \\ H_1 : \theta \in \Theta_1, \end{cases} \tag{2}$$

tal que $\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$ e $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \varnothing$.

Então, baseando-se numa a.a. $X_1, \ldots, X_n$ de X, deve-se tomar a decisão de rejeitar H_0 ou não rejeitar H_0.

As hipóteses costumam ser classificadas como:

1. Simples: $H_0 : \theta = \theta_0$, $H_0 : \mu = \mu_0$
2. Composta unilateral: $H_0 : \theta \geq \theta_0$, $H_1 : \mu \leq \mu_1$
3. Composta bilateral: $H_1 : \theta \neq \theta_0$ (ou $\theta < \theta_0$ ou $\theta > \theta_0$)

Probabilidade de erro e função poder

Considere testar $H_0 : \theta \in \Theta_0$ e $H_1 : \theta \in \Theta_1$ a partir de $x_1, \ldots, x_n$, uma a.a. de X com fdp (ou fmp) f(x|θ).

H_0 é chamada de hipótese nula e H_1 é chamada de hipótese alternativa. Pode-se cometer dois tipos de erro.

Decisão	**Natureza da verdade** H_0 verdadeira	H_1 **verdadeira**
Não rejeitar H_0	—	erro do Tipo II
Rejeitar H_0	erro do Tipo I	—

Em termos objetivos, tendo observado $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$, um teste:

a) Procuraria evidenciar para (não) rejeitar H_0;

b) Isto é feito por particionar $\mathbb{R}^n$ em dois conjuntos $R \subset \mathbb{R}^n$ chamado de região crítica e seu complemento.

R_C^c tal que

$$R_C \cup R_C^c = \mathbb{R}^n \quad \text{e} \quad R_C \cap R_C^c = \emptyset \tag{3}$$

c) Se $x \in R_C$, rejeitamos $H_0 : \theta \in \Theta$.

Exemplo 1: Alguns exemplos de testes. Seja X_i uma a.a. de $X_i \sim N(\theta, 1)$ para $\theta \in \mathbb{R}$ desconhecido. A partir de um contexto, enunciam-se hipóteses:

$$H_0 : \theta = 5.5 \quad \times \quad H_1 : \theta = 8$$

Seja

$$\overline{X}_n = g^{-1} \sum_{i=1}^{g} X_i \tag{4}$$

Testes:

$$\begin{cases} \text{Teste } \#1\text{: Rejeitar } H_0 \text{ se } x_1 > 7; \\ \text{Teste } \#2\text{: Rejeitar } H_0 \text{ se } \frac{x_1+x_2}{2} > 7; \\ \text{Teste } \#3\text{: Rejeitar } H_0 \text{ se } \overline{X}_n > 6; \\ \text{Teste } \#4\text{: Rejeitar } H_0 \text{ se } \overline{X}_n > 7.5. \end{cases}$$

Suas respectivas regiões críticas:

$$\text{Teste } \#1\text{: } R_C = \{(x_1, \ldots, x_g) \in \mathbb{R}^g : x_1 > 7\} \tag{5}$$

$$\text{Teste } \#2\text{: } R_C = \left\{ x \in \mathbb{R}^g : \frac{x_1 + x_2}{2} > 7 \right\} \tag{6}$$

$$\text{Teste } \#3\text{: } R_C = \{x \in \mathbb{R}^g : \overline{X}_n > 6\} \tag{7}$$

$$\text{Teste } \#4\text{: } R_C = \{x \in \mathbb{R}^g : \overline{X}_n > 7.5\} \tag{8}$$

Aula 20 (26/05/2025)

Def 2 (Teste de hipótese): Um teste T para uma hipótese H é uma regra ou processo para decidir se H deve ser rejeitada.

Estudo Computacional

Suponha $x_1, \ldots, x_n$ uma a.a. de $X_n \sim N(\theta, e^S)$. Considere

$$H : \theta \leq 17.$$

Uma possível teste é: rejeitar H se, e só se,

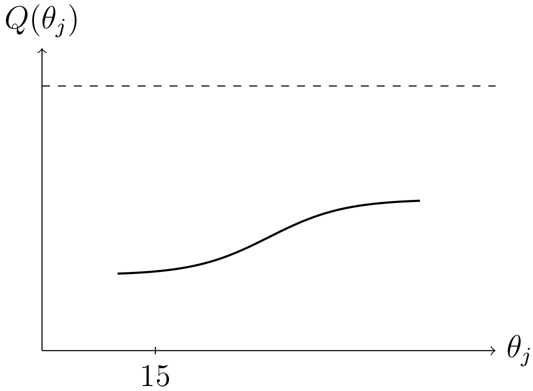
$$\bar{x}_n > 17 + \frac{s}{\sqrt{n}}. \tag{9}$$

1. Defina 100 valores para θ em $[15, 20]$, igualmente espaçados, digamos $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{100}$.
2. Para cada θ_j, gere $MC = 300$ réplicas de Monte Carlo.
3. Para cada réplica, gere uma amostra observada de tamanho $n = 100$ de $X_n \sim N(\theta, e^S)$, $x_1, \ldots, x_{100}$ com média amostral $\bar{x}$, e compute

$$Z_i(\theta_j) = \mathbb{I}\left(\bar{x} > 17 + \frac{s}{\sqrt{n}}, \theta_j\right), \quad \text{para } i = 1, \ldots, MC. \tag{10}$$

4. Finalmente, compute

$$Q(\theta_j) = MC^{-1} \sum_{i=1}^{MC} Z_i(\theta_j), \quad \text{para } j = 1, \ldots, 100. \tag{11}$$



A probabilidade dos erros do tipo I e II são dadas por:

$$\alpha = P(\text{Erro tipo I}) = P_{H_0}(\text{Rejeitar } H_0) = P_{H_0}(X \in R_C) \tag{12}$$

$$\beta = P(\text{Erro tipo II}) = P_{H_1}(\text{Não rejeitar } H_0) = P_{H_1}(X \notin R_C) \tag{13}$$

quando se quer testar

$$H_0 : t \in \Theta_0 \quad \text{e} \quad H_1 : t \in \Theta_1 \tag{14}$$

tal que H_0 é chamada de hipótese nula e H_1 é chamada de hipótese alternativa.

Exemplo: Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra de $X \sim N(\theta, 1)$ para $\theta \in \mathbb{R}$ desconhecido. Considera que se deseja testar... $H_0 : \theta = 5,5 \quad H_1 : \theta = 8$

Para tal considere o teste: Rejeitar-se H_0 se $x_1 > x_c$, $x_c = 7$. Calcule α e β.

Solução: Temos:

$$\alpha = P_{H_0}(\text{erro tipo I}) = P(x_1 > 7) = P\left(\frac{x_1 - 5,5}{\sigma} > \frac{7 - 5,5}{\sigma}\right) \quad \sigma = 1, \quad Z \sim N(0,1) \tag{15}$$

$$\alpha = P(Z > 1,5) = 1 - P(Z \leq 1,5) \tag{16}$$

$$\alpha = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{1,5} e^{-t^2/2}\, dt = 1 - \Phi(1,5) \tag{17}$$

$$\alpha = 0,06671 \tag{18}$$

$$\beta = P_{H_1}(\text{não rejeitar } H_0) = P(x_1 \leq 7) = P\left(\frac{x_1 - 8}{\sigma} \leq \frac{7 - 8}{\sigma}\right) \quad \sigma = 1, \quad Z \sim N(0,1) \tag{19}$$

$$\beta = P(Z \leq -1) = \Phi(-1) \tag{20}$$

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-1} e^{-t^2/2}\, dt = 0,15866 \tag{21}$$

Outra quantidade importante em teste de hipótese é a função poder.

Definição: O poder é a função poder de um teste T, denotada por $Q_T(\theta)$, e é a probabilidade de rejeitar H_0 quando $\theta \in \Theta_1$. 1ª verdade. Esta função é dada por:

$$Q_\gamma(\theta) = P_\theta(\hat{X} \in R_c), \quad \forall \theta \in \Theta. \tag{22}$$

Obs.: Note que $\alpha = Q_\gamma(\theta_0)$ e $1 - \beta = Q_\gamma(\theta_1)$ para

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{e} \quad H_1 : \theta = \theta_1. \tag{23}$$

Exemplo 3: Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma a.a. de $X \sim N(\theta, 1)$. Considere o teste

$$H_0 : \theta = 5,5 \quad \text{e} \quad H_1 : \theta = 8. \tag{24}$$

Para tal, considere o teste: rejeita-se H_0 se $\bar{X}_n > 7,5$. Calcule a função poder.
Solução: Temos:

$$\begin{aligned} Q_\gamma(\theta) &= P_\theta(\hat{X} \in R_c) = P_\theta(\bar{X}_n > 7,5) \\ &= P\left(\frac{\bar{X} - \theta}{1/\sqrt{n}} > \frac{7,5 - \theta}{1/\sqrt{n}}\right) \\ Z &\sim N(0,1) \\ &= P\left(Z > \sqrt{n}(7,5 - \theta)\right) \\ &= 1 - \Phi\left(\sqrt{n}(7,5 - \theta)\right) \end{aligned} \tag{25}$$

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\, dt \tag{26}$$

É a fda da normal padrão.
Outro conceito que será usado em discussão futura é o de função crítica.
Def. 4: A função $\psi_\gamma : \chi^n \to [0,1]$ é chamada de *função crítica* em *função de teste* χ, e, só se, $\psi_\gamma(X)$ representa a probabilidade com a qual H_0 é rejeitada quando $[X = x]$ é observada.
Obs.: Note que

$$Q_\gamma(\theta) = E_\theta\left[\psi_\gamma(X)\right], \quad \theta \in \Theta. \tag{27}$$

Os testes podem ser classificados como "aleatorizado" e "não aleatorizado".
Def. 5 (Tipos de testes): Um teste γ para hipótese H_0 pode ser: seja $(x_1, \ldots, x_n)^T$ uma realização de $(X_1, \ldots, X_n)^T$:

a) γ não aleatorizado: rejeita H_0 se, e só se, $(x_1, \ldots, x_n) \in R$ ou tem função crítica.

$$\psi_Y(x) = \begin{cases} 1, & x \in R_{c_i}, \\ 0, & x \in R_{c_i}^c \end{cases}$$

b) Y aleatorizado: O teste é definido pela função crítica:

$$\psi_Y(x) = \begin{cases} 1, & x \in R_{c_i}, \\ \delta, & x \in R_{\delta_i}, \\ 0, & x \in (R_{c_i} \cup R_{\delta_i})^c \end{cases}$$

Exemplo 4: Sejam $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. $X \sim N(\theta, 25)$. Neste caso, $\alpha = 1.2^n$. Considere o teste Y: Rejeitar $H_0 : \theta \leq 17$ se α, i.e.,

$$\bar{X}_n > 17 + \frac{5}{\sqrt{n}}$$

Y não aleatorizado com função crítica:

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & x \in \{x \in \mathbb{R}^n : \bar{x}_n > 17 + \frac{5}{\sqrt{n}}\}, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Exemplo 5: Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma a.a. de $X_i \sim$ Bernoulli(p). Neste caso $\alpha = \sum_{i=1}^n X_i \in \{0, \ldots, n\}$. Considere um teste Y para ... H_0: $t \leq 50\%$ como "Rejeita-se H_0 se, e só se, $\sum_{i=1}^n t_i > 5$."

Y é aleatorizado com função crítica:

$$\psi_Y(x) = \begin{cases} 1, & x \in \{3 \in \mathbb{X} \subset \{0,1\}^n : \sum_{i=1}^n z_i > 5\} \\ \delta, & x \in \{3 \in \mathbb{X} \subset \{0,1\}^n : \sum_{i=1}^n z_i = 5\} \\ 0, & x \in \{3 \in \mathbb{X} \subset \{0,1\}^n : \sum_{i=1}^n z_i < 5\} \end{cases} \tag{28}$$

Caso $\psi_Y(x) = \delta \in (0, 1)$ a decisão pela rejeição de H_0 se dará por obter "cara" no lançamento de uma moeda.

Aula 21 (27/05/2025)

O conceito de melhor teste

Considere testar:

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \quad \text{e} \quad H_1 : \theta \in \Theta_1$$

tal que $\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$ e $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \varnothing$.

Definição: Seja $\alpha \in (0, 1)$ um valor fixado. Um teste Y para H_0 e H_1, com função poder $Q_Y(\theta)$, é chamado de *tamanho* α se

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} Q_Y(\theta) = \alpha \tag{29}$$

<u>chamado de nível α se</u>

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} [Q_Y(\theta)] = \alpha. \tag{30}$$

Ou, equivalentemente, Y é um teste de tamanho α se

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} E_\theta [\psi(X)] = \alpha \tag{31}$$

ou de nível α se

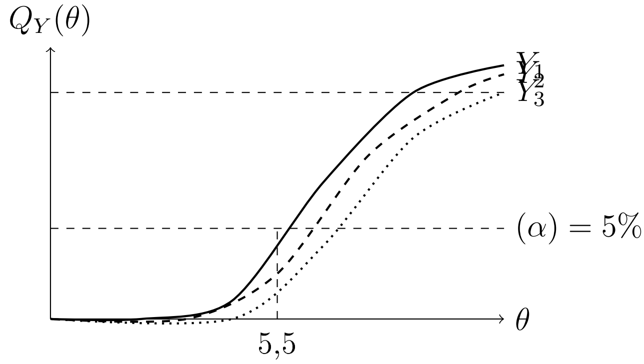
$$\sup_{\theta \in \Theta_0} E_\theta [\psi(X)] \leq \alpha. \tag{32}$$

A escolha do melhor teste se dará entre aqueles de nível α.

Def. 6: Considere uma classe $\mathcal{C}$ de todos os testes de nível α para H_0 e H_1. Um teste $Y \in \mathcal{C}$ com função poder $Q_Y(\theta)$ é o melhor teste de nível α ou o teste uniformemente mais poderoso (UMP) de nível α se, e só se,

$$Q_Y(\theta) \leq Q_{Y^*}(\theta), \quad \forall \theta \in \Theta_1, \tag{33}$$

em que $Y^* \in \mathcal{C}$ com função poder $Q_{Y^*}(\theta)$. Alternativa é simples, $H_1 : \theta = \theta_1$, então o melhor teste é chamado de mais poderoso (MP).



Comportamento de $Y \in C$ para testar $H_0 : \theta = 5,5$

Teste simples x simples

Considere o objetivo de derivar o teste MP para hipóteses do tipo simples x simples via o lema de Neyman e Pearson (1933).

Sejam $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^T$ uma a.a. de X com fdp (ou fmp) $f(x;\theta)$ para $x \in \mathbb{R}^n$, $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$ e $\alpha = (x_1, \ldots, x_n)^T$ uma a.o. Desejamos testar

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \times \quad H_1 : \theta = \theta_1 \tag{34}$$

em que $\theta_0, \theta_1 \in \Theta$ e $\theta_0 \neq \theta_1$. Seja $\hat{x}$ a função de verossimilhança associada à hipótese H_i.

$$L_i \triangleq L(\theta_i, x) = \prod_{k=1}^{n} f(x_k, \theta_i), \quad i = 0, 1. \tag{35}$$

Considere comparar o poder de todos os testes de nível α, com α fixado em $(0,1)$, comumente escolhendo-se valores $\alpha = 1\%, 5\%, 10\%$.

De modo intuitivo, um teste H_0 e H_1 procura comparar L_0 com L_1 e procurar qual quantidade é superior à outra. Com critério, a hipótese com verossimilhança mais significativa é favorecida como a mais razoável.

Teorema (Lema de Neyman-Pearson)

Seja X um teste para

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{e} \quad H_1 : \theta = \theta_1,$$

com região de rejeição e não rejeição de H_0 dadas por:

$$R_c = \{x \in \mathbb{R}^n : L(\theta_1, x) > k\, L(\theta_0, x)\} \tag{36}$$

$$R_c^c = \{x \in \mathbb{R}^n : L(\theta_1, x) < k\, L(\theta_0, x)\} \tag{37}$$

ou, equivalentemente, com função crítica dada por...

$$\psi(x^n) = \begin{cases} 1, & \text{se } L(\theta_1, x^n) > kL(\theta_0, x^n) \\ 0, & \text{se } L(\theta_1, x^n) < kL(\theta_0, x^n) \end{cases} \tag{38}$$

em que $k(\geq 0)$ é determinado por

$$E_{\theta_0}\left[\psi(x^n)\right] = \alpha \tag{39}$$

Qualquer teste satisfazendo (1) e (2) é um teste MP de nível α.

Dem: Considere a prova para o caso contínuo. Note que qualquer teste γ que satisfaz (2) tem tamanho α e, portanto, nível α. Seja γ^* um teste com função de teste $\psi_{\gamma^*}(x^n)$ e nível α. Sejam $Q_\gamma(\theta)$ e $Q_{\gamma^*}(\theta)$ as funções poder de γ e γ^*, respectivamente.

Vamos primeiramente verificar que

$$[\psi_\gamma(x^n) - \psi_{\gamma^*}(x^n)]\,[L(\theta_1, x^n) - kL(\theta_0, x^n)] \geq 0 \tag{40}$$

para todo $x \in X^n$. Note que

(i) Se $\psi_\gamma(x^n) = 1$, então

$$L(\theta_1, x^n) - kL(\theta_0, x^n) > 0 \tag{41}$$

De (1) e

$$\psi_Y(x^1) - \psi_{Y^c}(x^1) \leq 0 \tag{42}$$

Da definição da função crítica, tentamos (3) seguir. Se $\psi_Y(x^1) = 0$, então

$$l(\theta_i; x^1) - kl(\theta_i; x^1) < 0 \tag{43}$$

De (1) e

$$\psi_Y(x^1) - \psi_{Y^c}(x^1) \leq 0 \tag{44}$$

Decorre da definição de $\psi_Y(x^1)$. Tentamos (3) seguir. Se $\alpha\psi_Y(x^1) < 1$, então

$$l(\theta_i; x^1) - kl(\theta_i; x^1) = 0 \tag{45}$$

(3) se verifica.

Daí, tem-se

$$\begin{aligned} \alpha \int_{x^n} & \{\psi_Y(x^1) - \psi_{Y^c}(x^1)\}\{l(\theta_i; x^1) - kl(\theta_i; x^1)\}dx \\ & - \int_{x^n} \psi_Y(x^1)\{l(\theta_i; x^1) - kl(\theta_i; x^1)\}dx \\ & - \int_{x^n} \psi_{Y^c}(x^1)\{l(\theta_i; x^1) - kl(\theta_i; x^1)\}dx \end{aligned} \tag{46}$$

$$= \{E_{\theta_1}[\psi_Y(X|)] - kE_{\theta_1}[\psi_{Y^*}(X|)]\} - \{E_{\theta_0}[\psi_Y(X|)] - kE_{\theta_0}[\psi_{Y^*}(X|)]\} \tag{47}$$

Dando,

$$0 \leq \{Q_Y(\theta_1) - kQ_{Y^*}(\theta_1)\} - \{Q_Y(\theta_0) - kQ_{Y^*}(\theta_0)\} \tag{48}$$

$$= \{Q_Y(\theta_1) - Q_{Y^*}(\theta_1)\} - k\{Q_Y(\theta_0) - Q_{Y^*}(\theta_0)\} \tag{4}$$

Note que $Q_Y(\theta_0) = \alpha$ e $Q_{Y^*}(\theta_0) \leq \alpha$, portanto,

$$Q_Y(\theta_0) - Q_{Y^*}(\theta_0) \geq 0.$$

A desigualdade (4) pode ser reescrita como

$$Q_Y(\theta_1) - Q_{Y^*}(\theta_1) \geq k\{Q_Y(\theta_0) - Q_{Y^*}(\theta_0)\} \geq 0$$

O que mostra que Y é no mínimo tão poderoso quanto Y^*.

$\square$

Aula 22 (02/06/2025)

Exemplo 4: Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma a.a. de $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ com $\mu \in \mathbb{R}$ desconhecido e $\sigma > 0$ conhecido. Encontre o teste MP de nível α para:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{cases}$$

Tal que μ_0, μ_1, σ^2 são conhecidos e $\mu_1 > \mu_0$.

Solução: Como as hipóteses H_0 e H_1 são simples, o LNP se aplica. A verossimilhança em questão é:

$$l_i \triangleq L(y_i, \alpha) = (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \mu_i)^2\right\}. \tag{49}$$

O teste NP terá a seguinte forma:

Rejeita-se H_0 se, e só se, $\frac{l_1}{l_0} > k$.

Note que:

$$\frac{l_1}{l_0} = \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_1)^2 - \sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_0)^2\right]\right\} \tag{50}$$

$$= \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[-2\mu_1\sum_{i=1}^{n} x_i + n\mu_1^2 + 2\mu_0\sum_{i=1}^{n} x_i - n\mu_0^2\right]\right\} \tag{51}$$

$$= \exp\left\{\frac{(\mu_1 - \mu_0)}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{n(\mu_1^2 - \mu_0^2)}{2\sigma^2}\right\} \tag{52}$$

Daí, a região crítica deste teste é dada por: Para $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$ (espaço amostral)

$$R_c = \left\{x \in \mathcal{X} : \frac{l_1}{l_0} > k_1\right\} \tag{53}$$

$$= \left\{x \in \mathcal{X} : \exp\left[\frac{(\mu_1 - \mu_0)}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} x_i\right] > k_1 \cdot \exp\left[\frac{n(\mu_1^2 - \mu_0^2)}{2\sigma^2}\right]\right\} \tag{54}$$

$$\Rightarrow R_c = \left\{x \in \mathcal{X} : \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \frac{\sigma_i}{\mu_1 - \mu_0}\log(k_1)\right\}_{k_2}$$

(versão mais manipulável analiticamente)

$$R_c = \left\{x \in \mathcal{X} : \sqrt{n}\frac{\bar{x}_n - \mu_0}{\sigma} > \sqrt{n}\frac{k_2/n - \mu_0}{\sigma}\right\}_{k_3}$$

$$\therefore R_c = \left\{x \in \mathcal{X} : \sqrt{n}\frac{\bar{x}_n - \mu_0}{\sigma} > k_3\right\} \tag{1}$$

Definimos a função $Z : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$Z(\mathbf{x}) = \sqrt{n}\frac{\bar{x}_n - \mu_0}{\sigma},$$

em que

$$\bar{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

e $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ como uma v.a.

Quando $Z(\mathbf{x})$ é avaliada numa v.a.g., $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^T$, a quantidade resultante $Z(\mathbf{X})$ é uma estatística de teste com distribuição conhecida sob H_0:

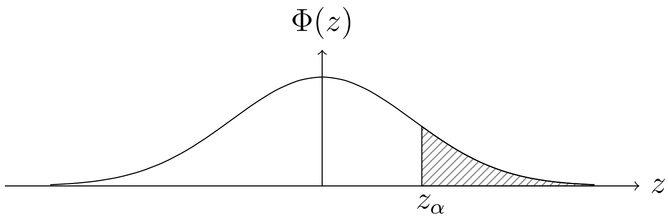
$$Z(\mathbf{X}) \overset{H_0}{\sim} N(0, 1).$$

A região crítica (1) é então definida (trocando-se k_3 por z_α) como:

$$R_c = \{x \in \mathcal{X} : Z(\mathbf{x}) > z_\alpha\},$$

em que z_α é um quantil da normal padrão obtido. Da equação: Para $Z \sim N(0, 1)$,

$$P(Z > z_\alpha) = \alpha \implies 1 - \Phi(z_\alpha) = \alpha \ \therefore\ \Phi(z_\alpha) = 1 - \alpha \tag{55}$$



Exemplo: (Teste Z)
Suposição: $X_1, \ldots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$ e σ^2 é conhecida.
Hipóteses:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu = \mu_1 (> \mu_0) \end{cases}$$

Estatística de teste:

$$Z(x_1) = \sqrt{n}\left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma}\right) \overset{H_0}{\sim} N(0, 1) \tag{56}$$

Regra de decisão: (*método tradicional*) Dada uma amostra $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$, rejeitamos H_0 se $Z(x_1) > z_\alpha$.

(*Método do valor-p*): seja $z_{cal} = Z(x_1)$. Rejeitamos H_0 se

$$\hat{\alpha} = P(Z > z_{cal}) \leq \alpha \tag{57}$$

Obs.: $\hat{\alpha}$ é chamado de valor-p. **Exemplo 5:** Sejam $x_1, \ldots, x_n$ uma amostra de $Exp(\theta)$ com densidade

$$f(x_i; \theta) = \frac{1}{\theta} e^{-x_i/\theta}, \quad \text{para } x > 0 \tag{58}$$

e $\theta > 0$ desconhecido. Encontre o teste MP de nível α para

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{e} \quad H_1 : \theta = \theta_1\ (> \theta_0) \tag{59}$$

Dica: Como as hipóteses H_0 e H_1 são simples, o LNP se aplica. A verossimilhança no caso é:

$$L_i = L(\theta_i, x) = \frac{1}{\theta_i^n} \exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\theta_i}\right\}, \quad i = 0, 1 \tag{60}$$

O teste MP terá a seguinte forma:
Rejeita-se H_0 se, e somente se, $\frac{L_1}{L_0} > k$.
Note que:

$$\frac{L_1}{L_0} = \left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^n \exp\left\{\sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{1}{\theta_0} - \frac{1}{\theta_1}\right)\right\} \tag{61}$$

Daí, a região crítica do teste é dada por: para α fixo,

$$RC = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^n \exp\left[\sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{1}{\theta_0} - \frac{1}{\theta_1}\right)\right] > k\right\} \tag{62}$$

Unidade 4

Dado,

$$R_C = \left\{x \in \mathcal{X} : \left(\frac{1}{\theta_0} - \frac{1}{\theta_1}\right) \sum_{i=1}^n x_i > \log\left[\left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^n\right]\right\} \Rightarrow \tag{63}$$

$$R_C = \left\{x \in \mathcal{X} : \sum_{i=1}^n x_i > \frac{\log\left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^n}{\left(\frac{\theta_0 - \theta_1}{\theta_0\theta_1}\right)} = u_2\right\} \Rightarrow \tag{64}$$

$$R_C = \left\{x \in \mathcal{X} : \sum_{i=1}^n x_i > u_2\right\} \tag{65}$$

Para se ter uma estatística manipulável, requer-se que na distribuição sob H_0 não dependa do parâmetro. Note que $\dot{X}_i := \theta^{-1}X_i$ tem densidade

$$f_{\dot{X}_i}(x) = \theta f_{X_i}(\theta x) = \theta\left(\frac{1}{\theta}e^{-\frac{\theta x}{\theta}}\right) = e^{-x}, \tag{66}$$

conhecida como exponencial padrão. Ainda, note que $\ddot{X}_i := 2\dot{X}_i = 2\theta^{-1}X_i$ tem densidade

$$f_{\ddot{X}_i}(x) = \frac{1}{2} f_{\dot{X}_i}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}e^{-x/2}, \tag{67}$$

então $\ddot{X}_i \sim \chi^2_2$. Assim, $\sum_{i=1}^n \ddot{X}_i \sim \chi^2_{2n}$. Com isso,

$$R_C = \left\{x \in \mathcal{X} : \frac{2}{\theta_0}\sum_{i=1}^n x_i > \frac{2}{\theta_0}u_2\right\} \tag{68}$$

Dado,

$$R_c = \left\{x \in \mathcal{X} : \frac{2}{\theta_0}\sum_{i=1}^n x_i > u_\alpha\right\}$$

Definamos a função $Q : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ tal que

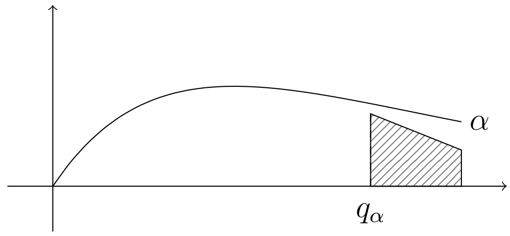
$$Q(x) = \frac{2}{\theta_0} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Note que $Q(x) \xrightarrow{H_0} \chi^2_{2n}$. A região crítica fica definida como

$$R_c = \{x \in \mathcal{X} : Q(x) > q_\alpha\},$$

em que q_α é o quantil $(1-\alpha)\%$ de $Q \sim \chi^2_{2n}$, obtido da equação

$$P(Q > q_\alpha) = \alpha$$



Resumo (Teste χ^2)
Exponencial: $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \text{Exp}(\theta)$
Hipóteses:

$$\begin{cases} H_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta \neq \theta_0 \text{ (ou } \theta > \theta_0) \end{cases}$$

Estatística do teste:

$$Q(\vec{x}) = \frac{2}{\theta_0} \sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i \quad \text{s.t. } H_0 = \alpha^2_n \tag{69}$$

Regra de decisão: (*Método tradicional*) Dada uma $\alpha_0 = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^T$, rejeita-se H_0 se $Q(\vec{x}) > q_\alpha$.

(*Método do valor p*) Seja $Q_{\text{cal}} = Q(\vec{x})$. Rejeita-se H_0 se

$$\hat{\alpha} = P(Q > Q_{\text{cal}}) < \alpha \tag{70}$$

Obs.: $\hat{\alpha}$ é chamado de valor p.

Aula 22 (04/06/2021)

Exemplo 6: Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma a.a. de v.a. Bernoulli(p) para $0 < p < 1$ desconhecido. Derive o teste MP para

$$H_0 : p = p_0 \quad \text{e} \quad H_1 : p > p_0.$$

Solução: Como as hipóteses são simples, o LNP se aplica. A verossimilhança é dada por:

$$L_p \triangleq L(p; \vec{x}) = \prod_{i=1}^{n} p^{x_i}(1-p)^{1-x_i} \tag{71}$$

$$= p^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i} \tag{72}$$

$$= \left(\frac{p}{1-p}\right)^{\sum_{i=1}^n x_i} (1-p)^n \tag{73}$$

em que $x_i \in \{0,1\}$, $\forall i$. O teste NP é da forma:

Rejeitamos H_0 se, e só se, $\frac{L_1}{L_0} > k$.

Note que:

$$\frac{L_1}{L_0} = \underbrace{\left[\frac{(1-p_0)p_1}{p_0(1-p_1)}\right]}_{A_1}^{\sum_{i=1}^n x_i} \underbrace{\left[\frac{1-p_1}{1-p_0}\right]}_{A_2}^{n} \tag{74}$$

Daí, a região crítica do teste é dada por: Seja $\mathcal{X} = \{0,1\}^n$ o espaço amostral,

$$\begin{aligned} R_c &= \left\{x \in \mathcal{X} : A_1^{\sum_{i=1}^n x_i} \cdot A_2^n > k\right\} \\ &= \left\{x \in \mathcal{X} : A_1^{\sum_{i=1}^n x_i} > k \cdot A_2^{-n}\right\} \\ &= \left\{x \in \mathcal{X} : \sum_{i=1}^n x_i > \frac{\log\left(k \cdot A_2^{-n}\right)}{\log A_1}\right\} \\ &= \left\{x \in \mathcal{X} : \sum_{i=1}^n x_i > k_1\right\} \end{aligned} \tag{75}$$

Onde,

$$R_c = \left\{x \in \mathcal{X} : \sum_{i=1}^n x_i > k_1\right\} \tag{76}$$

A função crítica é dada por:

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } \sum_{i=1}^n x_i > k_1 \\ \delta, & \text{se } \sum_{i=1}^n x_i = k_1 \\ 0, & \text{se } \sum_{i=1}^n x_i < k_1 \end{cases} \tag{77}$$

Um que o inteiro positivo k_i, e $g \in (0,1)$ são escolhidos dos tais que o teste tem tamanho α. Note que, sob H_0,

$$\sum_{i=1}^n k_i \sim \text{Binomial}(n, p_0) \tag{78}$$

Primeiramente, determine o menor inteiro u_1 tal que

$$p_{p_0}\left(\sum_{i=1}^n k_i = u_1\right) < \alpha, \quad g = \frac{\alpha - p_{p_0}\left(\sum_{i=1}^n k_i > u_1\right)}{p_{p_0}\left(\sum_{i=1}^n k_i = u_1\right)} \tag{79}$$

em que

$$p_{p_0}\left(\sum_{i=1}^n k_i = k_1\right) = \binom{n}{u_1} p_0^{u_1}(1-p_0)^{n-u_1} \tag{80}$$

$$p_{p_0}\left(\sum_{i=1}^n k_i > u_1\right) = \sum_{l=u_1+1}^{n} \binom{n}{l} p_0^{l}(1-p_0)^{n-l} \tag{81}$$

Da discussão anterior, a probabilidade do erro tipo I é dada por

$$\alpha = g \cdot p_{p_0}\left(\sum_{i=1}^{n} k_i = u_1\right) + p_{p_0}\left(\sum_{i=1}^{n} k_i > u_1\right) \tag{82}$$

Contexto: $k_1, \ldots, k_n \overset{a.o.}{\sim} X \in \mathbb{A}$, em que $X \sim \text{Bernoulli}(p_1)$
Hipóteses:

$$\begin{cases} H_0 : p = p_0 \\ H_1 : p = p_1 \ (> p_0) \end{cases} \tag{83}$$

Estatística de teste

$$S = S(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \quad \text{sob } H_0 \quad \sim \text{Binomial}(n, p_0) \tag{84}$$

Função crítica

$$\psi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{se } S(\mathbf{x}) > k_1, \\ \delta, & \text{se } S(\mathbf{x}) = k_1, \\ 0, & \text{se } S(\mathbf{x}) < k_1, \end{cases} \tag{85}$$

em que k_1 é o menor inteiro tal que

$$P\left(S(\mathbf{x}) > k_1\right) < \alpha \tag{86}$$

$$\delta = \frac{\alpha - P_{H_0}\left(S(\mathbf{x}) > k_1\right)}{P_{H_0}\left(S(\mathbf{x}) = k_1\right)} \tag{87}$$

Regra de decisão

Método tradicional: Dado $\mathbf{x}$, se $\psi(\mathbf{x}) = 1$, rejeita-se H_0.
Método do valor-p: Seja $S_{\text{cal}} = S(\mathbf{x})$.

$$\hat{\alpha} = \delta \cdot P_{H_0}\left(S(\mathbf{x}) = S_{\text{cal}}\right) + P_{H_0}\left(S(\mathbf{x}) > S_{\text{cal}}\right) \tag{88}$$

Se $\hat{\alpha} < \alpha$, rejeita-se H_0. **Exemplo 7** Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma a.a. de $X_i \sim \text{Poisson}(\lambda)$ para $\lambda > 0$ desconhecido. Derive o teste MP para

$$H_0 : \lambda = \lambda_0 \quad \text{e} \quad H_1 : \lambda = \lambda_1 \ (\lambda_1 > \lambda_0).$$

Id.: como as hipóteses são simples, o LNP se aplica. A verossimilhança é dada por:

$$L_X \triangleq L(\lambda; x) = \prod_{k=1}^{n} \left\{ \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x_k}}{x_k!} \right\} = \frac{e^{-n\lambda}\lambda^{\sum_{k=1}^{n} x_k}}{\prod_{k=1}^{n} x_k!} \tag{89}$$

em que $x_k \in \{0, 1, \ldots\}$. O teste MP é da forma:
Rejeitar H_0 se, e só se, $\frac{L_1}{L_0} > k$.

Note que:

$$\frac{L_1}{L_0} = \left[\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right]^n \cdot \left[\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right]^{\sum_{k=1}^n x_k} = \left[\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right]^{\sum_{k=1}^n x_k - n(\lambda_1-\lambda_0)} \tag{90}$$

Daí, a região crítica do teste é dada por: $x \in \mathbb{X} \subset \mathbb{Z}^n$, o espaço amostral

$$R_c = \left\{ x \in \mathbb{X} : \left[\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right]^{\sum_{i=1}^n x_i - n(\lambda_1-\lambda_0)} > k \right\} \Rightarrow \tag{91}$$

$$R_c = \left\{ x \in \mathcal{X} : \left(\sum_{i=1}^n x_i\right) \log\left[\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right] > \log\left[k \cdot e^{-n(\lambda_1-\lambda_0)}\right] \right\} \tag{92}$$

$$= \left\{ x \in \mathcal{X} : \sum_{i=1}^n x_i > \frac{\log\left[k \cdot e^{-n(\lambda_1-\lambda_0)}\right]}{\log\left[\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right]} \right\} \tag{93}$$

Dado,

$$R_c = \left\{ x \in \mathcal{X} : \sum_{i=1}^n x_i > u_1 \right\} \tag{94}$$

A função crítica correspondente é dada por:

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } \sum_{i=1}^n x_i > u_1, \\ \delta, & \text{se } \sum_{i=1}^n x_i = u_1, \\ 0, & \text{se } \sum_{i=1}^n x_i < u_1, \end{cases}$$

Note que, sob H_0:

$$\sum_{i=1}^n x_i \sim \text{Poisson}(n\lambda_0) \tag{95}$$

Primeiramente, determine o menor inteiro u_1 tal que:

$$P_{\lambda_0}\left(\sum_{i=1}^n x_i > u_1\right) < \alpha, \quad \delta = \frac{\alpha - P_{\lambda_0}\left(\sum_{i=1}^n x_i > u_1\right)}{P_{\lambda_0}\left(\sum_{i=1}^n x_i = u_1\right)} \tag{96}$$

Um que

$$P_{H_0}\left(\sum_{i=1}^n X_i = k_1\right) = e^{-n\lambda_0}\frac{(n\lambda_0)^{k_1}}{k_1!} \tag{97}$$

$$P_{H_0}\left(\sum_{i=1}^n X_i > k_1\right) = \sum_{l=k_1+1}^{\infty} \frac{e^{-n\lambda_0}(n\lambda_0)^l}{l!} \tag{98}$$

Da discussão anterior, a probabilidade do erro tipo 1 é dada por:

$$\alpha = \delta\, P_{H_0}\left(\sum_{i=1}^n X_i = k_1\right) + P_{H_0}\left(\sum_{i=1}^n X_i > k_1\right) \tag{99}$$

Resumo:
Contexto: $X_1, \ldots, X_n$ a.c. tal que $X_i \sim \text{Poisson}(\lambda)$

Hipóteses:

$$\begin{cases} H_0 : \lambda = \lambda_0 \\ H_1 : \lambda = \lambda_1 \end{cases}$$

Estatística de teste:

$$T(X) = \left(\sum_{i=1}^{n} X_i \right) \sim \text{Poisson}(n\lambda)$$

Função crítica:

$$\psi(T) = \begin{cases} 1, & \text{se } T > k_1, \\ \delta, & \text{se } T = k_1, \\ 0, & \text{se } T < k_1 \end{cases}$$

em que n_1 é o menor inteiro tal que

$$P_{H_0}\left(\mathcal{X}(x_1) > n_1\right) \leq \alpha \tag{100}$$

$$\delta = \left[\alpha - P_{H_0}\left(\mathcal{X}(x_1) > n_1\right)\right] / P_{H_0}\left(\mathcal{X}(x_1) = n_1\right) \tag{101}$$

Regra de decisão:
(método tradicional) Dado x_1, se $\mathcal{X}(x_1) = 1$, rejeitamos H_0.
(método do valor-p) sejam $P_{cal} = \mathcal{X}(x_1)$ e

$$\hat{\alpha} = \delta \cdot P_{H_0}\left(\mathcal{X}(x_1) = P_{cal}\right) + P_{H_0}\left(\mathcal{X}(x_1) > P_{cal}\right) \tag{102}$$

Se $\hat{\alpha} < \alpha$, rejeita-se H_0.

Note que um teste NP de nível α sempre depende de uma estatística (completamente) suficiente. Considere uma decisão mais geral.

Pelo TFN no teorema 6.1,

$$L(\theta, x^n) = g(T(x^n), \theta) \cdot h(x^n), \tag{103}$$

$\forall x^n \in \mathcal{X}^n$, em que $h(x^n)$ independe de θ. Mostra-se no LNP no teorema 3.1, que o teste NP rejeita $H_0 : \theta = \theta_0 \quad \times \quad H_1 : \theta = \theta_1$ para valores grandes de $\frac{L_1}{L_0}$

$$\frac{L(\theta_1; x)}{L(\theta_0; x)} = \frac{g(T(x); \theta_1)}{g(T(x); \theta_0)} \tag{104}$$

que implica que a rejeição de H_0 também acontece se, e só se,

$$\frac{g(T(x); \theta_1)}{g(T(x); \theta_0)} \tag{105}$$

assume um valor grande.

O LNP também pode ser utilizado para comparar distribuições com densidades distintas.

Exemplo 8: Seja X uma a.a. com densidade f(x) para $x \in \mathbb{R}$. Considere outra densidade:

$$f_0(x) = \begin{cases} \frac{3}{64} x^5, & 0 < x < 4, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{2}{16}\sqrt{x}, & 0 < x < 4, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Determine o teste MP de nível α para ... Há: $H_0 : f_1(x) = f_0(x)$ e $H_1 : f_1(x) = f_1(x)$.

Solução: Como o teste é do tipo simples x simples, podemos usar o LNP. Assim, temos que:

Rejeitamos H_0 se, e só se,

$$\frac{f_1(x)}{f_0(x)} > k. \tag{106}$$

Note que

$$\frac{f_1(x)}{f_0(x)} = 4x^{-3/2}. \tag{107}$$

O teste pode ser escrito como: rejeitamos H_0 para x pertencente a

$$R_c = \left\{x \in (0,4);\ 4x^{-3/2} > k\right\} \Rightarrow \tag{108}$$

$$R_c = \left\{x \in (0,4);\ x < \left(\frac{4}{k}\right)^{2/3}\right\} = \{x \in (0,4);\ x < k_1\}. \tag{109}$$

Onde,

$$R_c = \{x \in (0,4);\ x < k_1\}. \tag{110}$$

Este teste tem tamanho dado por:

$$\alpha = P_{\theta_0}(X < q) = \int_0^q \frac{3}{64}x^2\,dx = \frac{3}{64}\cdot\frac{q^3}{3} = \frac{q^3}{64} \tag{111}$$

Donde,

$$k_1 = (64\cdot\alpha)^{1/3} = 4\cdot\alpha^{1/3} \tag{112}$$

O poder associado é dado por:

$$P_{\theta_1}(X \le k_1) = \int_0^{k_1} \frac{3}{16}\sqrt{x}\,dx = \frac{3}{16}\cdot\frac{x^{3/2}}{3/2} = \frac{4}{8}k_1^{3/2} = \alpha \tag{113}$$

Exercício: Sejam X_1, X_2 duas v.a.s independentes com densidade $f(x)$. Determine o teste MP de nível α para

$$H_0 : f_{X_1} = f_{X_2} \quad \text{e} \quad H_1 : f_{X_1} \neq f_{X_2}.$$

Teste para H_1 composta unilateral

Considere hipÃ³teses do tipo:

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{vs} \quad \begin{cases} H_1 : \theta > \theta_0 \\ H_1 : \theta < \theta_0 \end{cases} \tag{1}$$

No que segue, apresentamos as abordagens para deduzir o teste UMP para (1).

Teste UMP via Lema de Neyman Pearson

Inicialmente, devemos fixar um valor arbitrário $\theta_1 \in \Theta$ tal que $\theta_1 > \theta_0$. A hipótese alternativa em (a) pode ser reescrita como

$$H_1 : \theta = \theta_1. \tag{114}$$

Agora, temos um problema de duas hipóteses simples e, pelo LNP, existe um teste NP para

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \times \quad H_1 : \theta = \theta_1. \tag{115}$$

Se este teste particular não é afetado pela escolha de um valor para θ_1, então dizemos que ele é UMP.

Exemplo 9

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma a.a. de $N(\theta, \sigma^2)$, em que $\sigma \in \mathbb{R}^+$ é desconhecido. Fixando o nível $\alpha \in (0, 1)$, considere que se deseja obter o teste UMP de nível α para

$$H_0 : \sigma = \sigma_0 \quad \times \quad H_1 : \sigma < \sigma_0, \tag{116}$$

em que $\sigma_0 > 0$.

Solução: Fixamos $\sigma_1 \in \Theta = \mathbb{R}^+_*$ tal que $\sigma_1 < \sigma_0$ e então... Adotamos a hipótese alternativa como $H_1 : \sigma = \sigma_1 (< \sigma_0)$. Assim, o LNP se aplica. A função de verossimilhança é dada por:

$$\frac{L_1}{L_0} = L(\sigma_i, \alpha) = \prod_{i=1}^{n} f(\alpha_i, \sigma_k)_{N(0,\sigma_k^2)} = (2\pi\sigma_k^2)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_k^2}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2\right\} \tag{117}$$

Portanto, H_0 é rejeitada quando a razão é maior que k (para $\alpha \in \mathbb{R}^n$):

$$\mathcal{R}_c = \left\{\alpha \in \mathcal{X} : \frac{L_1}{L_0} > k\right\} \tag{118}$$

$$= \left\{\alpha \in \mathcal{X} : \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_0}\right)^{-n/2} \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2\left(\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_0^2}\right)\right] > k\right\} \tag{119}$$

$$= \left\{\alpha \in \mathcal{X} : -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2\left(\frac{\sigma_0^2 - \sigma_1^2}{\sigma_0^2\sigma_1^2}\right) > \log\left[k\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_0}\right)^{n/2}\right]\right\} \tag{120}$$

$$= \left\{\alpha \in \mathcal{X} : \sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2\frac{1}{\sigma_0^2} < \frac{2\sigma_0^2\sigma_1^2}{\sigma_0^2 - \sigma_1^2}\log\left[k\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_0}\right)^{n/2}\right]\right\} \tag{121}$$

$$= \left\{\alpha \in \mathcal{X} : \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\alpha_i}{\sigma_0}\right)^2 < k_1\right\} \tag{122}$$

Definimos a função $Q : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^+$ tal que...

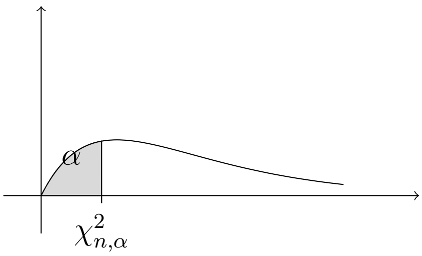
$$Q(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\sigma_0}\right)^2 \tag{123}$$

Note que para $\mathbf{x}^T = (x_1, \ldots, x_n)^T$, $Q(\mathbf{x}) \overset{H_0}{\sim} \chi^2_n$.
Assim, o teste típico: Rejeitamos H_0 se

$$\mathbf{x} \notin R_c = \left\{\mathbf{x} \in \mathcal{X} : Q(\mathbf{x}) < \chi^2_{n,\alpha}\right\},$$

em que $\chi^2_{n,\alpha}$ é solução de, para $Q \sim \chi^2_n$,

$$P_{H_0}\left(Q < \chi^2_{n,\alpha}\right) = \alpha.$$



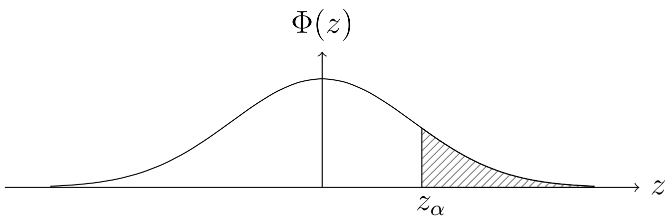
Aula 21 (09/06/2023)

Teste UMP via razão de verossimilhança.
Seja $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^T$ uma a.a. de X tendo fdp (ou fmp) $f(x;\theta)$ para $x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}$ e $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$.
Definição (razão de verossimilhança monotona - RVM): A família

$$\{f(x|\theta),\ \theta \in \Theta\}$$

Da equação: Para $Z \sim N(0,1)$,

$$P(Z > z_\alpha) = \alpha \implies 1 - \Phi(z_\alpha) = \alpha \ \therefore\ \Phi(z_\alpha) = 1 - \alpha \tag{124}$$



Exemplo: (Teste Z)
Suposição: $X_1, \ldots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$ e σ^2 é conhecida.
Hipóteses:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu = \mu_1 (> \mu_0) \end{cases}$$

Estatística de teste:

$$Z(x_1) = \sqrt{n}\left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma}\right) \overset{H_0}{\sim} N(0,1) \tag{125}$$

Regra de decisão: (*método tradicional*) Dada uma amostra $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$, rejeitamos H_0 se $Z(x_1) > z_\alpha$.

(*Método do valor-p*): seja $z_{cal} = Z(x_1)$. Rejeitamos H_0 se

$$\hat{\alpha} = P(Z > z_{cal}) \leq \alpha \tag{126}$$

Obs.: $\hat{\alpha}$ é chamado de valor-p.

$$\frac{l(\theta', x)}{l(\theta, x)} = \left(\frac{\theta}{\theta'}\right)^n \frac{\prod_{(0,\theta')} T(x_i)}{\prod_{(0,\theta)} T(x_i)}, \tag{127}$$

que é não decrescente em $T(x)$ para $\theta' > \theta$. Logo, $l(x, \theta)$ tem RVM.
Exemplo: Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma a.a. de X tendo uma família de PDFs em forma f dada por:

$$g(x; \theta) = a(\theta) \cdot c(x) \cdot e^{x \cdot b(\theta)}, \tag{128}$$

para $x \in \mathbb{X}$ e $\theta \in \Theta$. Para $\theta' > \theta$:

$$\frac{l(\theta'; x)}{l(\theta; x)} = \frac{\prod_{i=1}^n g(x_i; \theta')}{\prod_{i=1}^n g(x_i; \theta)} = \frac{a^n(\theta')}{a^n(\theta)} \cdot \frac{e^{\sum_i b(\theta')x_i}}{e^{\sum_i b(\theta)x_i}} \tag{129}$$

$$= \left(\frac{a(\theta')}{a(\theta)}\right)^n \exp\left\{\sum_i x_i \left[b(\theta') - b(\theta)\right]\right\}. \tag{130}$$

Assim, $g(x; \theta)$ tem RVM se $b(\theta)$ é não decrescente.
Por exemplo:

$$g(x; \lambda) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = e^{-\lambda} \cdot \frac{1}{x!} \cdot e^{x \log(\lambda)} \tag{131}$$

tem RVM uma vez que $b(\lambda) = \log(\lambda)$ é não decrescente. R_C^c tal que

$$R_C \cup R_C^c = \mathbb{R}^n \quad \text{e} \quad R_C \cap R_C^c = \emptyset \tag{132}$$

c) Se $x \in R_C$, rejeitamos $H_0 : \theta \in \Theta$.
Exemplo 1: Alguns exemplos de testes. Seja X_i uma a.a. de $X_i \sim N(\theta, 1)$ para $\theta \in \mathbb{R}$ desconhecido. A partir de um contexto, enunciam-se hipóteses:

$$H_0 : \theta = 5.5 \quad \times \quad H_1 : \theta = 8$$

Seja

$$\overline{X}_n = g^{-1} \sum_{i=1}^{g} X_i \tag{133}$$

Testes:

$$\begin{cases} \text{Teste \#1: Rejeitar } H_0 \text{ se } x_1 > 7; \\ \text{Teste \#2: Rejeitar } H_0 \text{ se } \frac{x_1 + x_2}{2} > 7; \\ \text{Teste \#3: Rejeitar } H_0 \text{ se } \overline{X}_n > 6; \\ \text{Teste \#4: Rejeitar } H_0 \text{ se } \overline{X}_n > 7.5. \end{cases}$$

Suas respectivas regiões críticas:

$$\text{Teste \#1: } R_C = \{(x_1, \ldots, x_g) \in \mathbb{R}^g : x_1 > 7\} \tag{134}$$

$$\text{Teste \#2: } R_C = \left\{ x \in \mathbb{R}^g : \frac{x_1 + x_2}{2} > 7 \right\} \tag{135}$$

$$\text{Teste \#3: } R_C = \{ x \in \mathbb{R}^g : \overline{X}_n > 6 \} \tag{136}$$

$$\text{Teste \#4: } R_C = \{ x \in \mathbb{R}^g : \overline{X}_n > 7.5 \} \tag{137}$$

$$\psi_Y(x) = \begin{cases} 1, & x\ T(x) > u \\ \delta, & x\ T(x) = u \\ 0, & x\ T(x) < u \end{cases}$$

Obs.: No Teorema de Karlin-Rubin, se a família

$$\{g(x;\theta),\ \theta \in \Theta\}$$

tem RVU não crescente em $T(x)$, então o teste UMP de nível α tem função crítica

$$\psi_Y(x) = \begin{cases} 1, & x\ T(x) < u \\ 0, & x\ T(x) > u \end{cases} \quad \text{e} \quad \psi_Y(x) = \begin{cases} 1, & x\ T(x) < u \\ \delta, & x\ T(x) = u \\ 0, & x\ T(x) > u \end{cases}$$

Prova: Seja Y o teste definido em (1) com poder

$$Q_Y(\theta) = P_\theta(\text{Rejeitar } H_0)$$

e $Q_Y(\theta_0) = \alpha$. Sem perda de generalidade, seja $\theta_1 > \theta_0$. Pelo Lema de NP o teste MP para

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{e} \quad H_1 : \theta = \theta_1$$

é baseado na razão entre verossimilhanças (RV) e, então, rejeita-se H_0 se, e só se,

$$\frac{L(x;\theta_1)}{L(x;\theta_0)} > u' \tag{138}$$

para algum x'. Mas, pela monotonicidade da RV, a última condição se reduz a $T(x) < k$ para algum k. Como essa última condição independe da média de θ, Y é UMP para

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{e} \quad H_1 : \theta > \theta_0. \tag{139}$$

Mostraremos que o poder de Y, $Q_Y(\theta)$, é não decrescente. Considere uma classe C de poder ou testar para

$$H_0 : \theta = \theta' \quad \text{e} \quad H_1 : \theta = \theta''. \tag{140}$$

Do LNP, o teste Y é o MP em C, isto é, para algum $Y' \in C$,

$$Q_Y(\theta'') \geq Q_{Y'}(\theta''). \tag{141}$$

Por outro lado, o teste aleatorizado Y_0 "rejeitar $H_0 : \theta = \theta'$ com probabilidade α independente da observação" satisfaz a condição

$$Q_{Y_0}(\theta) = \alpha, \quad \forall \theta \in \Theta. \tag{142}$$

Claramente, $Y_0 \in C$. Daí,

$$Q_Y(\theta'') \geq Q_{Y_0}(\theta'') = \alpha = Q_Y(\theta'). \tag{143}$$

Para completar a prova, deve-se mostrar que Y é UMP não apenas em C (satisfazendo $Q_Y(\theta_0) \leq \alpha$), mas em C^* satisfazendo $\sup_{\theta \in \Theta_0} Q_Y(\theta) \leq \alpha$. Pode-se mostrar que $C^* \subset C$, pela monotonicidade de $Q_Y(\theta)$, temos que $\forall \theta \in C^*$

$$Q_Y(\theta) \leq Q_Y(\theta_0) \leq \alpha. \tag{144}$$

Exemplo: Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma a.a. de $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ com μ desconhecido e $\sigma > 0$ conhecido. Encontre o teste UMP para

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \mu > \mu_0 \tag{145}$$

de nível α.
Solução: Pelo LFN, a partir de

$$L(\mu; x) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_i x_i^2 - 2\mu \sum_i x_i + n\mu^2\right)\right\} \tag{146}$$

$$= (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_i x_i^2\right\} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(n\mu^2 - 2\mu \sum_i x_i\right)\right\} \tag{147}$$

$$\underbrace{(2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_i x_i^2\right\}}_{h(x)} \quad \underbrace{\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(n\mu^2 - 2\mu \sum_i x_i\right)\right\}}_{g(t(x),\mu)}$$

Logo,

$$T(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \tag{148}$$

é suficiente para μ e tem a densidade

$$T \sim N(n\mu, n\sigma^2)$$

$$U(t; \mu) = (2\pi n\sigma^2)^{-1/2} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2n\sigma^2}(t - n\mu)^2\right\}$$

para $\mu^* > \mu$.

$$\frac{L(t; \mu^*)}{L(t; \mu)} = \exp\left\{-\frac{1}{2n\sigma^2}\left(t^2 - 2nt\mu^* + n^2(\mu^*)^2 - t^2 + 2nt\mu - n^2\mu^2\right)\right\}$$

$$= \exp\left\{\frac{1}{2n\sigma^2}\left(2nt(\mu - \mu^*) + n^2\left(\mu^2 - (\mu^*)^2\right)\right)\right\}$$

O que implica que $L(t; \mu)$ tem RVM não decrescente em t. Logo, o seguinte teste de nível α é UMP pelo teorema de Karlin-Rubin:

$$\psi_Y(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } T(x) > k_1, \\ 0, & \text{se } T(x) < k_1. \end{cases}$$

Ou, equivalentemente,

$$\psi_Y(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } \sqrt{n}\frac{\bar{x}_n - \mu_0}{\sigma} > k_1, \\ 0, & \text{se } \sqrt{n}\frac{\bar{x}_n - \mu_0}{\sigma} < k_1. \end{cases}$$

Aula 25 (14/01/2025)

Exemplo: Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra de $X_i \sim \text{Poisson}(\lambda)$ com λ desconhecido. Encontre o teste UMP para

$$H_0 : \lambda \leq \lambda_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \lambda > \lambda_0 \tag{149}$$

de nível $\alpha \in (0, 1)$, em que $\lambda_0 > 0$.

Solução: Pelo LNP, a partir de

$$L(\lambda; x) = \frac{e^{-n\lambda}\lambda^{\sum_{i=1}^n x_i}}{\prod_{i=1}^n x_i!} = \left(\prod_{i=1}^n x_i!\right)^{-1} \lambda^{\sum_{i=1}^n x_i} e^{-n\lambda} = h(x)\, g(T(x), \lambda) \tag{150}$$

Logo, $T(X) = \sum_{i=1}^n X_i$ é suficiente para λ. Note que $T \sim \text{Poisson}(n\lambda)$ tem função de probabilidade dada por:

$$f_T(t; \lambda) = \frac{e^{-n\lambda}(n\lambda)^t}{t!} \tag{151}$$

E, para $\lambda^* > \lambda$, como

$$\frac{f_T(t; \lambda^*)}{f_T(t; \lambda)} = \left(\frac{\lambda^*}{\lambda}\right)^t e^{-n(\lambda^* - \lambda)} \tag{152}$$

é não decrescente, $f_T(t; \lambda)$ tem RVM não decrescente. Portanto, pelo teorema de Karlin-Rubin, o teste UMP de nível α... Y tem função crítica dada por:

$$\psi_Y(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } T(x) > u, \\ \delta, & \text{se } T(x) = u, \\ 0, & \text{se } T(x) < u, \end{cases} \tag{153}$$

em que u é o menor inteiro tal que

$$P(T(X) > k) < \alpha \tag{154}$$

$$\delta = \frac{\alpha - P(T(X) > k)}{P(T(X) = k)} \tag{155}$$

Teste para H_1 composta bilateral

Condição testar

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{e} \quad H_1 : \theta \neq \theta_0$$

para θ_0 fixado. Existe teste UMP? Sim, em algumas situaÃ§Ãµes. Dois exemplos:

Exemplo: Para $x_1, \ldots, x_n$ i.i.d. tal que $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ com μ desconhecido e $\sigma^2 > 0$ conhecido. Para

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{e} \quad H_1 : \mu \neq \mu_0,$$

não há um teste UMP. **Exemplo:** Seja $X_1, \ldots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} U(0, \theta)$. Haverá um teste UMP para

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{x} \quad H_1 : \theta \neq \theta_1. \tag{156}$$

Exemplo de não existência do teste UMP:

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra de $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ com $\mu \in \mathbb{R}$ desconhecida e σ conhecido. Como discutido,

$$T(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i \tag{157}$$

é suficiente para μ. Considere testar:

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{x} \quad H_1 : \mu \neq \mu_0 \tag{158}$$

Assuma que existe o teste UMP. Se quisermos testar

$$H_0' : \mu = \mu_0 \quad \text{e} \quad H_1' : \mu > \mu_0, \tag{159}$$

o teste UMP ψ_1 de nível α tem função crítica:

$$\psi(X) = \begin{cases} 1, & \sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sigma} > z_\alpha, \\ 0, & \sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sigma} < z_\alpha. \end{cases} \tag{160}$$

Por outro lado, para testar

$$H_0'' : \mu = \mu_0 \quad \text{e} \quad H_1'' : \mu < \mu_0, \tag{161}$$

Como para $\mu^* < \mu$,

$$\frac{f(t_i; \mu^*)}{f(t_i; \mu)} = \exp\left\{\frac{n}{2\sigma^2}\left[2u(\mu^* - \mu_0) + nt^2(\mu^{*2} - \mu^2)\right]\right\} \tag{162}$$

é não crescente, então o seguinte teste de média é UMP; pelo teorema K.R., ψ_Y tal que

$$\psi_Y(x_1) = \begin{cases} 1, & \sqrt{n}\left(\frac{\bar{x}_n - \mu_0}{\sigma}\right) \leq -z_\alpha, \\ 0, & \sqrt{n}\left(\frac{\bar{x}_n - \mu_0}{\sigma}\right) > -z_\alpha. \end{cases} \tag{163}$$

Suponha que x_0 é uma a.a. tal que a estatística calculada

$$Z_{cal} = \sqrt{n}\left(\frac{\bar{x}_n - \mu_0}{\sigma}\right) \tag{164}$$

não excede $-z_\alpha$. Então, $\psi_{Y_1}(x_0) = 0$ e $\psi_{Y_2}(x_0) = 1$, portanto o $\psi_Y(x_1)$ fica indefinido.

Exemplo de existência do teste UMP

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma a.a. de $X \sim U(0, \theta)$ com θ desconhecido. Note que $T(X) = X_{(n)}$ é suficiente para θ e tem densidade dada por:

$$f(t; \theta) = u \cdot t^{n-1} \cdot \theta^{-n} \cdot \mathbb{I}_{(0,\theta)}(t) \tag{165}$$

Para $\theta > 0$,

$$\frac{f(t;\theta_1)}{f(t;\theta_0)} = \left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^n \cdot \frac{\prod_{(1,\theta_0,\theta_1)}}{\prod_{(1,\theta_0,\theta_1)}} \tag{166}$$

t não é decrescente, portanto $f(t;\theta)$ tem RUM não decrescente. Assim, o seguinte teste ψ de nível α é UMP para

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \theta > \theta_0.$$

Pelo Teorema de KR, ψ com função crítica:

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & T(x) > k, \\ 0, & T(x) \leq k, \end{cases}$$

em que k é tal que

$$\alpha = P_{\theta_0}(T(X) > k) = \int_k^{\theta_0} nt^{n-1}\theta_0^{-n}\, dt \tag{167}$$

$$= \frac{n}{\theta_0^n}\left[\frac{t^n}{n}\right]_k^{\theta_0} = \frac{1}{\theta_0^n}\left[\theta_0^n - k^n\right] \tag{168}$$

$$= 1 - \left(\frac{k}{\theta_0}\right)^n \tag{169}$$

Dado,

$$\frac{k}{\theta_0} = (1-\alpha)^{1/n} \quad \therefore \quad k = \theta_0(1-\alpha)^{1/n}. \tag{170}$$

Considere o problema de definir o teste UMP de nível α para

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \theta \neq \theta_0. \tag{171}$$

Primeiramente, vamos mostrar que algum teste ψ^* com $\psi^*(x)$ tal que:

i) $E_{\theta_0}\left[\psi(x)\right] = \alpha$;

ii) $E_\theta\left[\psi(x)\right] \leq \alpha \quad \text{para} \quad \theta \leq \theta_0$;

iii) $\psi^*(x) = 1, \quad x \quad T(x) > \theta_0$

são suficientes para um teste UMP de nível α para

$$H_0' : \theta \leq \theta_0 \quad \text{vs} \quad H_1' : \theta > \theta_0. \tag{172}$$

Pelo Teorema de Karlin-Rubin, um teste UMP, ψ_0^*, para H_0' e H_1' tem função crítica:

$$\psi_0^*(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } T(x) > \theta_0(1-\alpha)^{1/n}, \\ 0, & \text{se } T(x) < \theta_0(1-\alpha)^{1/n}. \end{cases} \tag{173}$$

Daí, a função poder associada é:

$$\pi_{\psi_0^*}(\theta) = E_\theta\left[\psi_0^*(x)\right] = P_\theta\left(T(x) > \theta_0(1-\alpha)^{1/n}\right) \tag{174}$$

$$= \int_{\theta_0(1-\alpha)^{1/n}}^{\infty} \frac{n}{\theta^n} t^{n-1}\, dt = \frac{n}{\theta^n} \left[\frac{t^n}{n} \right]_{\theta_0(1-\alpha)^{1/n}}^{\infty}. \tag{175}$$

$$Q_{\psi_{Y^*}}(\theta) = \frac{1}{\theta^n} \left[\theta_0^{-n} - \theta_0^{n}(1-\alpha) \right] = 1 - (1-\alpha) \left(\frac{\theta_0}{\theta} \right)^n \tag{1}$$

Vamos computar o poder de Y^* e mostrar que sua expressão coincide com (1). Defina

$$g(t) = E\left[\psi_{Y^*}(X) \mid T(X) = t \right]$$

que não depende de θ, pois $T(X)$ é suficiente para θ e é contínuo.

$$\alpha = E_{\theta_0}\left[\psi_{Y^*}(X) \right] = E_{\theta_0}\left[E\left[\psi_{Y^*}(X) \mid T \right] \right] = E_{\theta_0}\left[g(T) \right]$$

Note que $\psi_{Y^*}(t) = 1$ para $t > \theta_0$, implica $g(t) = 1$ para $t > \theta_0$. Assim, para $\theta > \theta_0$,

$$\begin{aligned} E_\theta\left[\psi_{Y^*}(X) \right] &= \int_0^{\theta_0} g(t)\, n\, t^{n-1} \theta^{-n}\, dt + \int_{\theta_0}^{\infty} g(t)\, n\, t^{n-1} \theta^{-n}\, dt \\ &= \left(\frac{\theta_0}{\theta} \right)^n \int_0^{\theta_0} g(t)\, n\, t^{n-1} \theta_0^{-n}\, dt + \int_{\theta_0}^{\infty} n\, t^{n-1} \theta^{-n}\, dt \end{aligned} \tag{176}$$

$$\alpha = \int_0^{\theta_0} g(t)\, n\, t^{n-1} \theta_0^{-n}\, dt$$

$$g(t) = 1 \quad \text{para} \quad t > \theta_0$$

Portanto:

$$\begin{aligned} E_\theta\left[\psi_{Y^*}(X) \right] &= \left(\frac{\theta_0}{\theta} \right)^n \alpha + \left\{ \left(\frac{\theta_0}{\theta} \right)^n - \left(\frac{\theta_0}{\theta} \right)^n \right\} \\ &= \alpha \left(\frac{\theta_0}{\theta} \right)^n + 1 - \left(\frac{\theta_0}{\theta} \right)^n \\ &= 1 - (1-\alpha) \left(\frac{\theta_0}{\theta} \right)^n \end{aligned} \tag{177}$$

Daí, $\psi_{Y^*}(\cdot)$ e $\psi_{Y_c^*}(\cdot)$ são funções críticas de teste UMP. para $\theta_0' < \theta_1'$.
Agora, estamos em posição de mostrar o seguinte resultado.
Teorema: Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra de $X_i \sim U(0, \theta)$. Considere testar

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \theta > \theta_0 \tag{178}$$

tal que θ_0 é fixado. O teste Y^* com função crítica

$$\psi_{Y^*}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } T(x) \geq \theta_0 \text{ ou } T(x) \leq \theta_0 \alpha^{1/n} \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \tag{179}$$

é um UMP de nível α.

Prova: Como $P_{\theta_0}(T(X) > \theta_0) = 0$,

$$\begin{aligned} E_{\theta_0}[\psi_{Y^*}(X)] &= P_{\theta_0}\left(T(X) \le \theta_0\alpha^{1/n}\right) \\ &= \int_0^{\theta_0\alpha^{1/n}} u \cdot u^{n-1}\theta_0^{-n}\, du \\ &= \left[\frac{u^n}{\theta_0^n}\right]_0^{\theta_0\alpha^{1/n}} \\ &= \alpha. \end{aligned} \tag{180}$$

Pelo Teorema K.R., um teste Y^{**} UMP para

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \theta \le \theta_0 \tag{181}$$

Tem função crítica

$$\psi(X) = \begin{cases} 1, & T(X) \le \theta_0 \cdot \alpha^{\frac{1}{n}} \\ 0, & T(X) > \theta_0 \cdot \alpha^{\frac{1}{n}} \end{cases} \tag{182}$$

Ambos ψ^* e ψ^{**} coincidem, portanto ψ^* é UMP de nível α para testar $H_0 + H_1$.