# Material Auxiliar de Teoria

## Capítulo 4 - Teste de Hipóteses

Definições, Conceitos e Teoremas

Curso de Inferência Estatística - PPGEST/UFPE

Material de Apoio para Estudo

Novembro 2025

**AVISO IMPORTANTE:** Este documento contém toda a teoria fundamental do Capítulo 4, com ênfase especial na demonstração COMPLETA e DETALHADA do Lema de Neyman-Pearson (LNP), que tem alta probabilidade de ser cobrado na prova. Estude com atenção cada passo da demonstração.

# Sumário

# 1 Conceitos Fundamentais

## 1.1 Definições Básicas

**Definição 4.1.1: Hipótese Estatística**

Uma **hipótese estatística** é uma afirmação sobre o parâmetro desconhecido $\theta$ de uma distribuição populacional.
**Exemplos:**

- $H : \mu = \mu_0$ (hipótese sobre a média)
- $H : \sigma^2 > \sigma_0^2$ (hipótese sobre a variância)
- $H : \alpha \neq \alpha_0$ (hipótese de diferença)

**Classificação de Hipóteses**

Seja $\theta \in \Theta$ um parâmetro desconhecido. As hipóteses podem ser classificadas como:

**1. Hipótese Simples:** Especifica completamente o valor de $\theta$.

$$H_0 : \theta = \theta_0 \tag{1}$$

**2. Hipótese Composta Unilateral:** Especifica um intervalo semi-infinito.

$$H_0 : \theta \leq \theta_0 \quad \text{ou} \quad H_0 : \theta \geq \theta_0 \tag{2}$$
$$H_1 : \theta > \theta_0 \quad \text{ou} \quad H_1 : \theta < \theta_0 \tag{3}$$

**3. Hipótese Composta Bilateral:** Especifica valores em ambos os lados.

$$H_0 : \theta \neq \theta_0 \quad \text{ou} \quad H_0 : |\theta - \theta_0| > c \tag{4}$$

**Nomenclatura:**

- $H_0$ é chamada de **hipótese nula**
- $H_1$ (ou $H_a$) é chamada de **hipótese alternativa**

**Definição 4.2.1: Teste de Hipóteses**

Um **teste** $\Upsilon$ para uma hipótese $H$ é uma regra ou processo para decidir se $H$ deve ser rejeitada.
Formalmente, um teste particiona o espaço amostral $\mathcal{X}^n$ em dois conjuntos disjuntos:

- **Região Crítica** $R_c \subset \mathcal{X}^n$: região de rejeição de $H_0$
- **Região de Aceitação** $R_c^c = \mathcal{X}^n \setminus R_c$: região de não-rejeição de $H_0$

tal que:

$$R_c \cup R_c^c = \mathcal{X}^n \quad \text{e} \quad R_c \cap R_c^c = \varnothing \tag{5}$$

**Regra de decisão:** Se $X \in R_c$, rejeita-se $H_0$.

## 1.2 Tipos de Erro

**Erros Tipo I e Tipo II**

Em um teste de hipóteses, podem ocorrer dois tipos de erro:

| **Decisão** | $H_0$ **verdadeira** | $H_1$ **verdadeira** |
|---|---|---|
| Não rejeitar $H_0$ | Decisão correta | Erro Tipo II ($\beta$) |
| Rejeitar $H_0$ | Erro Tipo I ($\alpha$) | Decisão correta (Poder) |

**Erro Tipo I:** Probabilidade de rejeitar $H_0$ quando ela é verdadeira.

$$\alpha = P_{\theta \in \Theta_0}\{\text{Rejeitar } H_0\} = P_{H_0}\{X \in R_c\} \tag{6}$$

**Erro Tipo II:** Probabilidade de não rejeitar $H_0$ quando ela é falsa (i.e., $H_1$ verdadeira).

$$\beta = P_{\theta \in \Theta_1}\{\text{Não rejeitar } H_0\} = P_{H_1}\{X \in R_c^c\} \tag{7}$$

**Poder do Teste:** Probabilidade de rejeitar $H_0$ quando ela é falsa.

$$\text{Poder} = 1 - \beta = P_{H_1}\{X \in R_c\} \tag{8}$$

**Definição 4.2.2: Função Poder**

A **função poder** de um teste $\Upsilon$, denotada por $Q_\Upsilon(\theta)$, é a probabilidade de rejeitar $H_0$ quando o verdadeiro valor do parâmetro é $\theta$.

$$Q_\Upsilon(\theta) = P_\theta[X \in R_c], \quad \forall \theta \in \Theta \tag{9}$$

**Propriedades:**

- Para $\theta \in \Theta_0$: $Q_\Upsilon(\theta)$ representa a probabilidade de Erro Tipo I
- Para $\theta \in \Theta_1$: $Q_\Upsilon(\theta) = 1 - \beta(\theta)$ representa o poder
- $Q_\Upsilon(\theta) \in [0, 1]$ para todo $\theta$

**Definição 4.2.3: Função Crítica**

A **função crítica** ou **função do teste** $\psi_\Upsilon : \mathcal{X}^n \to [0, 1]$ representa a probabilidade com a qual $H_0$ é rejeitada quando $X = x$ é observada.

$$\psi_\Upsilon(x) = P[\text{Rejeitar } H_0 \mid X = x] \tag{10}$$

**Relação com a função poder:**

$$Q_\Upsilon(\theta) = E_\theta[\psi_\Upsilon(X)] = \int_{\mathcal{X}^n} \psi_\Upsilon(x) f(x; \theta)\, dx \tag{11}$$

**Definição 4.2.4: Tipos de Teste**

Um teste $\Upsilon$ pode ser classificado como:

**a) Teste Não Aleatorizado:** A decisão é determinística. A função crítica é:

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in R_c \\ 0, & \text{se } x \in R_c^c \end{cases} \tag{12}$$

**b) Teste Aleatorizado:** A decisão pode envolver aleatorização. A função crítica é:

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in R_c \\ \delta, & \text{se } x \in R_\delta \quad (0 < \delta < 1) \\ 0, & \text{se } x \in (R_c \cup R_\delta)^c \end{cases} \tag{13}$$

onde $\delta$ é a probabilidade de rejeitar $H_0$ quando $x \in R_\delta$.
**Interpretação prática:** Quando $x \in R_\delta$, lança-se uma moeda com $P(\text{cara}) = \delta$ e rejeita-se $H_0$ se der cara.

**Definição 4.2.5: Tamanho e Nível de um Teste**

Seja $\alpha \in (0, 1)$ fixado e $\Upsilon$ um teste com função poder $Q_\Upsilon(\theta)$.

**Tamanho do Teste:**

$$\text{Tamanho} = \sup_{\theta \in \Theta_0} Q_\Upsilon(\theta) = \sup_{\theta \in \Theta_0} P_\theta[X \in R_c] \tag{14}$$

O teste tem **tamanho** $\alpha$ se:

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} Q_\Upsilon(\theta) = \alpha \tag{15}$$

**Nível do Teste:** O teste tem **nível** $\alpha$ se:

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} Q_\Upsilon(\theta) \leq \alpha \tag{16}$$

**Interpretação:**

- Tamanho $\alpha$: a máxima probabilidade de Erro Tipo I é exatamente $\alpha$
- Nível $\alpha$: a máxima probabilidade de Erro Tipo I é no máximo $\alpha$
- Todo teste de tamanho $\alpha$ é de nível $\alpha$, mas a recíproca não é verdadeira

**Definição 4.2.6: Teste Uniformemente Mais Poderoso (UMP)**

Seja $\mathcal{C}$ a classe de todos os testes de nível $\alpha$ para $H_0$ vs $H_1$.
Um teste $\Upsilon \in \mathcal{C}$ com função poder $Q_\Upsilon(\theta)$ é chamado de **Teste Uniformemente Mais Poderoso (UMP) de nível** $\alpha$ se e somente se:

$$Q_\Upsilon(\theta) \geq Q_{\Upsilon^*}(\theta), \quad \forall \theta \in \Theta_1, \quad \forall \Upsilon^* \in \mathcal{C} \tag{17}$$

**Caso Especial:** Se $H_1$ é simples ($H_1 : \theta = \theta_1$), o melhor teste é chamado de **Teste Mais Poderoso (MP)**.
**Interpretação:** Um teste UMP tem o maior poder possível entre todos os testes de mesmo nível, para qualquer valor de $\theta$ em $\Theta_1$.

# 2 LEMA DE NEYMAN-PEARSON (LNP)

**MUITO IMPORTANTE PARA A PROVA**

**ATENÇÃO:** Este é um dos teoremas mais importantes do capítulo e tem ALTA PROBABILIDADE de ser cobrado na prova com demonstração completa. Estude cada detalhe da demonstração apresentada a seguir.
O Lema de Neyman-Pearson (LNP) fornece o teste MAIS PODEROSO para testar hipóteses simples vs simples. É a base fundamental da teoria de testes ótimos.

## 2.1 Contexto e Motivação

Queremos testar duas hipóteses **simples**:

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \theta = \theta_1 \tag{18}$$

onde $\theta_0, \theta_1 \in \Theta$ são valores conhecidos e $\theta_0 \neq \theta_1$.

**Questão fundamental:** Dado um nível de significância $\alpha$ fixado, qual é o teste que maximiza o poder (i.e., minimiza $\beta$)?

**Resposta:** O Lema de Neyman-Pearson!

## 2.2 Enunciado do Teorema

**Teorema 4.3.1: Lema de Neyman-Pearson (LNP)**

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de $X$ com fdp (ou fmp) $f(x;\theta)$ para $x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}$ e $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$.
Considere testar:

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \theta = \theta_1 \tag{4.3.1}$$

Seja $L(\theta; x) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)$ a função de verossimilhança.
Considere um teste $\Upsilon$ com região crítica e região de não-rejeição dadas por:

$$R_c = \{x \in \mathcal{X}^n : L(\theta_1; x) > k \cdot L(\theta_0; x)\} \tag{19}$$

$$R_c^c = \{x \in \mathcal{X}^n : L(\theta_1; x) < k \cdot L(\theta_0; x)\} \tag{20}$$

ou, equivalentemente, usando a função crítica:

$$\psi_\Upsilon(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } L(\theta_1; x) > k \cdot L(\theta_0; x) \\ \gamma, & \text{se } L(\theta_1; x) = k \cdot L(\theta_0; x) \\ 0, & \text{se } L(\theta_1; x) < k \cdot L(\theta_0; x) \end{cases} \tag{21}$$

onde $k \geq 0$ e $0 \leq \gamma \leq 1$ são escolhidos tal que:

$$E_{\theta_0}[\psi_\Upsilon(X)] = \alpha \tag{4.3.2}$$

**Conclusão:** Qualquer teste $\Upsilon$ satisfazendo (4.3.1) e (4.3.2) é um **teste Mais Poderoso (MP) de nível $\alpha$.**

**Em outras palavras:** Entre todos os testes de nível $\alpha$, o teste baseado na razão de verossimilhanças $\frac{L(\theta_1;x)}{L(\theta_0;x)}$ tem o maior poder.

## 2.3 Demonstração Completa do LNP

**MUITO IMPORTANTE PARA A PROVA**

**ESTUDE COM MUITA ATENÇÃO!**
Esta demonstração tem ALTA probabilidade de cair na prova. Você deve ser capaz de:

1. Reproduzir todos os passos
2. Justificar cada desigualdade
3. Explicar a lógica de cada etapa
4. Interpretar o significado matemático

**Demonstração Detalhada**

### Demonstração do Lema de Neyman-Pearson

Apresentaremos a prova para o caso contínuo. O caso discreto é análogo, substituindo integrais por somas.

**Objetivo:** Mostrar que o teste $\Upsilon$ baseado na razão de verossimilhanças é MP, ou seja, tem poder máximo entre todos os testes de nível $\alpha$.

**Configuração:**

- $\Upsilon$ é o teste proposto (baseado em $\frac{L_1}{L_0}$)
- $\Upsilon^*$ é qualquer outro teste de nível $\alpha$
- $\psi_\Upsilon(x)$ é a função crítica de $\Upsilon$
- $\psi_{\Upsilon^*}(x)$ é a função crítica de $\Upsilon^*$
- $Q_\Upsilon(\theta)$ e $Q_{\Upsilon^*}(\theta)$ são as respectivas funções poder

**O que queremos provar:**

$$Q_\Upsilon(\theta_1) \geq Q_{\Upsilon^*}(\theta_1) \tag{22}$$

Isso significa que $\Upsilon$ tem poder maior (ou igual) que qualquer outro teste $\Upsilon^*$ de nível $\alpha$.

### Passo 1: Estabelecer uma Desigualdade Fundamental

**Afirmação:** Para todo $x \in \mathcal{X}^n$, vale:

$$[\psi_\Upsilon(x) - \psi_{\Upsilon^*}(x)] \cdot [L(\theta_1; x) - k \cdot L(\theta_0; x)] \geq 0 \tag{4.3.3}$$

**Prova da desigualdade (4.3.3):**
Vamos analisar os três casos possíveis para $\psi_\Upsilon(x)$:

**Caso [i]:** $\psi_\Upsilon(x) = 1$ Pela definição do teste $\Upsilon$ (equação da região crítica):

$$\psi_\Upsilon(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad L(\theta_1; x) > k \cdot L(\theta_0; x) \tag{23}$$

Portanto:

$$L(\theta_1; x) - k \cdot L(\theta_0; x) > 0 \quad \text{(primeiro fator positivo)} \tag{24}$$

Além disso, como $\psi_{\Upsilon^*}(x) \in [0, 1]$ (por definição de função crítica):

$$\psi_\Upsilon(x) - \psi_{\Upsilon^*}(x) = 1 - \psi_{\Upsilon^*}(x) \geq 0 \quad \text{(segundo fator não-negativo)} \tag{25}$$

Conclusão: produto de não-negativo por positivo $\geq 0$. Logo (4.3.3) vale. ✓

**Caso [ii]:** $\psi_\Upsilon(x) = 0$ Pela definição do teste $\Upsilon$:

$$\psi_\Upsilon(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad L(\theta_1; x) < k \cdot L(\theta_0; x) \tag{26}$$

Portanto:

$$L(\theta_1; x) - k \cdot L(\theta_0; x) < 0 \quad \text{(primeiro fator negativo)} \tag{27}$$

Além disso:

$$\psi_\Upsilon(x) - \psi_{\Upsilon^*}(x) = 0 - \psi_{\Upsilon^*}(x) \leq 0 \quad \text{(segundo fator não-positivo)} \tag{28}$$

Conclusão: produto de não-positivo por negativo $\geq 0$. Logo (4.3.3) vale. ✓

**Caso [iii]:** $0 < \psi_\Upsilon(x) < 1$ **(teste aleatorizado)** Pela definição do teste $\Upsilon$:

$$0 < \psi_\Upsilon(x) < 1 \quad \Rightarrow \quad L(\theta_1; x) = k \cdot L(\theta_0; x) \tag{29}$$

Portanto:

$$L(\theta_1; x) - k \cdot L(\theta_0; x) = 0 \quad \text{(primeiro fator zero)} \tag{30}$$

Conclusão: produto com zero é zero $\geq 0$. Logo (4.3.3) vale. ✓
**Conclusão do Passo 1:** A desigualdade (4.3.3) vale para todo $x \in \mathcal{X}^n$, independentemente do valor de $\psi_\Upsilon(x)$.

## Passo 2: Integrar a Desigualdade

Como (4.3.3) vale para todo $x$, podemos integrar ambos os lados sobre todo o espaço amostral:

$$\int_{\mathcal{X}^n} [\psi_\Upsilon(x) - \psi_{\Upsilon^*}(x)] [L(\theta_1; x) - k \cdot L(\theta_0; x)] \, dx \geq 0 \tag{31}$$

**Expandindo o produto dentro da integral:**

$$\int_{\mathcal{X}^n} [\psi_\Upsilon(x) - \psi_{\Upsilon^*}(x)] [L(\theta_1; x) - k \cdot L(\theta_0; x)] \, dx \tag{32}$$

$$= \int_{\mathcal{X}^n} \psi_\Upsilon(x) \cdot L(\theta_1; x) \, dx - \int_{\mathcal{X}^n} \psi_\Upsilon(x) \cdot k \cdot L(\theta_0; x) \, dx \tag{33}$$

$$- \int_{\mathcal{X}^n} \psi_{\Upsilon^*}(x) \cdot L(\theta_1; x) \, dx + \int_{\mathcal{X}^n} \psi_{\Upsilon^*}(x) \cdot k \cdot L(\theta_0; x) \, dx \tag{34}$$

Reorganizando:

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\mathcal{X}^n} \psi_\Upsilon(x) \cdot L(\theta_1; x)\, dx - \int_{\mathcal{X}^n} \psi_{\Upsilon^*}(x) \cdot L(\theta_1; x)\, dx \\
&\quad - k \left[ \int_{\mathcal{X}^n} \psi_\Upsilon(x) \cdot L(\theta_0; x)\, dx - \int_{\mathcal{X}^n} \psi_{\Upsilon^*}(x) \cdot L(\theta_0; x)\, dx \right]
\end{aligned} \tag{35}
$$

## Passo 3: Reconhecer as Funções Poder

**Observação crucial:** A integral $\int \psi(x) \cdot L(\theta; x)\, dx$ é exatamente a função poder! Lembre que $L(\theta; x)$ é a densidade conjunta sob $\theta$. Portanto:

$$\int_{\mathcal{X}^n} \psi(x) \cdot L(\theta; x)\, dx = E_\theta[\psi(X)] \tag{36}$$

$$= Q(\theta) \quad \text{(função poder)} \tag{37}$$

**Aplicando essa observação:**

$$
\begin{aligned}
\int \psi_\Upsilon(x) L(\theta_1; x)\, dx &= E_{\theta_1}[\psi_\Upsilon(X)] = Q_\Upsilon(\theta_1) \\
\int \psi_{\Upsilon^*}(x) L(\theta_1; x)\, dx &= E_{\theta_1}[\psi_{\Upsilon^*}(X)] = Q_{\Upsilon^*}(\theta_1) \\
\int \psi_\Upsilon(x) L(\theta_0; x)\, dx &= E_{\theta_0}[\psi_\Upsilon(X)] = Q_\Upsilon(\theta_0) \\
\int \psi_{\Upsilon^*}(x) L(\theta_0; x)\, dx &= E_{\theta_0}[\psi_{\Upsilon^*}(X)] = Q_{\Upsilon^*}(\theta_0)
\end{aligned} \tag{38}
$$

## Passo 4: Reescrever em Termos das Funções Poder

Substituindo na desigualdade do Passo 2:

$$
\begin{aligned}
0 \leq\ & Q_\Upsilon(\theta_1) - Q_{\Upsilon^*}(\theta_1) \\
& - k \left[ Q_\Upsilon(\theta_0) - Q_{\Upsilon^*}(\theta_0) \right]
\end{aligned} \tag{4.3.4}
$$

Rearranjando:

$$Q_\Upsilon(\theta_1) - Q_{\Upsilon^*}(\theta_1) \geq k \left[ Q_\Upsilon(\theta_0) - Q_{\Upsilon^*}(\theta_0) \right] \tag{4.3.5}$$

## Passo 5: Usar as Condições de Tamanho/Nível

Pela construção do teste $\Upsilon$ (condição 4.3.2):

$$Q_\Upsilon(\theta_0) = E_{\theta_0}[\psi_\Upsilon(X)] = \alpha \tag{39}$$

Como $\Upsilon^*$ é um teste de **nível** $\alpha$:

$$Q_{\Upsilon^*}(\theta_0) \leq \alpha \tag{40}$$

**Portanto:**

$$Q_\Upsilon(\theta_0) - Q_{\Upsilon^*}(\theta_0) = \alpha - Q_{\Upsilon^*}(\theta_0) \geq 0 \tag{41}$$

## Passo 6: Concluir a Demonstração

Da desigualdade (4.3.5):

$$Q_\Upsilon(\theta_1) - Q_{\Upsilon^*}(\theta_1) \geq k \underbrace{[Q_\Upsilon(\theta_0) - Q_{\Upsilon^*}(\theta_0)]}_{\geq 0} \tag{42}$$

Como $k \geq 0$ e o termo entre colchetes é $\geq 0$, temos:

$$k\,[Q_\Upsilon(\theta_0) - Q_{\Upsilon^*}(\theta_0)] \geq 0 \tag{43}$$

Logo:

$$Q_\Upsilon(\theta_1) - Q_{\Upsilon^*}(\theta_1) \geq 0 \tag{44}$$

**Conclusão:**

$$\boxed{Q_\Upsilon(\theta_1) \geq Q_{\Upsilon^*}(\theta_1)} \tag{45}$$

Isso prova que o teste $\Upsilon$ tem poder maior ou igual ao de qualquer outro teste $\Upsilon^*$ de nível $\alpha$.
Como $\Upsilon^*$ foi escolhido arbitrariamente, isso vale para **todos** os testes de nível $\alpha$.
Portanto, $\Upsilon$ é o **Teste Mais Poderoso (MP) de nível** $\alpha$. $\square$

## 2.4 Análise Detalhada da Demonstração

**Observações e Comentários**

### Pontos-Chave da Demonstração

**1. A Desigualdade Fundamental (4.3.3)** A demonstração começa provando que:

$$[\psi_\Upsilon(x) - \psi_{\Upsilon^*}(x)] \cdot [L(\theta_1; x) - k \cdot L(\theta_0; x)] \geq 0 \tag{46}$$

**Por que isso é verdade?**
A chave está em observar que os dois fatores do produto têm sinais correlacionados:

- Quando $\psi_\Upsilon = 1$: temos $L_1 > kL_0$, então ambos os fatores são $\geq 0 \Rightarrow$ produto $\geq 0$
- Quando $\psi_\Upsilon = 0$: temos $L_1 < kL_0$, então ambos os fatores são $\leq 0 \Rightarrow$ produto $\geq 0$
- Quando $0 < \psi_\Upsilon < 1$: temos $L_1 = kL_0$, então um fator é zero $\Rightarrow$ produto $= 0$

**2. A Técnica da Integração** Integramos a desigualdade (4.3.3) sobre todo o espaço amostral. Como a desigualdade vale para cada $x$, ela também vale para a integral.
**Truque importante:** A integral de $\psi(x) \cdot L(\theta; x)$ é precisamente a função poder!

**3. O Papel de $k$** A constante $k$ é determinada pela condição de tamanho:

$$E_{\theta_0}[\psi_\Upsilon(X)] = \alpha \tag{47}$$

Isso garante que o teste tem exatamente nível $\alpha$.

**4. A Comparação Final** A desigualdade (4.3.5) compara os poderes dos dois testes:

$$Q_\Upsilon(\theta_1) - Q_{\Upsilon^*}(\theta_1) \geq k \underbrace{[Q_\Upsilon(\theta_0) - Q_{\Upsilon^*}(\theta_0)]}_{\geq 0} \tag{48}$$

O termo $[Q_\Upsilon(\theta_0) - Q_{\Upsilon^*}(\theta_0)]$ é a diferença entre os tamanhos:

- $Q_\Upsilon(\theta_0) = \alpha$ (tamanho exato)
- $Q_{\Upsilon^*}(\theta_0) \leq \alpha$ (no máximo $\alpha$)

Portanto $Q_\Upsilon(\theta_0) - Q_{\Upsilon^*}(\theta_0) \geq 0$, e multiplicado por $k \geq 0$ permanece $\geq 0$.

**MUITO IMPORTANTE PARA A PROVA**

### Resumo da Lógica da Demonstração (MEMORIZE)

A demonstração do LNP segue esta estrutura lógica:

1. **Estabelecer desigualdade fundamental:** Mostrar que

$$[\psi - \psi^*] \cdot [L_1 - kL_0] \geq 0$$

por análise de casos ($\psi = 0, 1$ ou entre 0 e 1)

2. **Integrar:** Como vale para todo $x$, integrar sobre $\mathcal{X}^n$
3. **Reconhecer funções poder:** $\int \psi L(\theta) = Q(\theta)$
4. **Simplificar:** Obter $Q(\theta_1) - Q^*(\theta_1) \geq k[Q(\theta_0) - Q^*(\theta_0)]$
5. **Usar condições de nível:** $Q(\theta_0) = \alpha$ e $Q^*(\theta_0) \leq \alpha$
6. **Concluir:** $Q(\theta_1) \geq Q^*(\theta_1)$ (teste $\Upsilon$ é MP)

**Mensagem central:** O teste baseado na razão de verossimilhanças $\frac{L_1}{L_0}$ é ótimo porque:

- Rejeita $H_0$ quando $L_1$ é muito maior que $L_0$ (evidência favorece $H_1$)
- Controla o erro Tipo I em exatamente $\alpha$
- Maximiza o poder (minimiza o erro Tipo II)

## 2.5 Interpretação Geométrica do LNP

**Observações e Comentários**

### Visualização da Razão de Verossimilhanças

A região crítica do LNP é definida por:

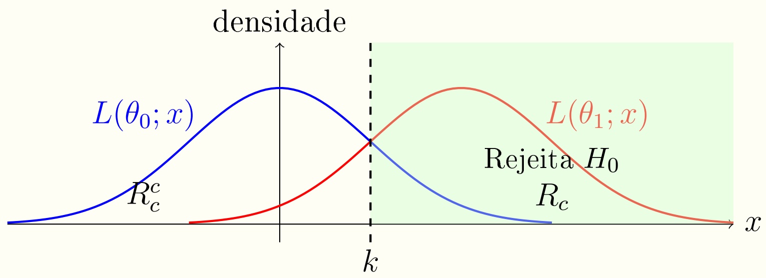
$$R_c = \left\{ x : \frac{L(\theta_1; x)}{L(\theta_0; x)} > k \right\} \tag{49}$$

**Interpretação:**

- Se $\frac{L_1}{L_0}$ é grande: os dados favorecem fortemente $H_1$ sobre $H_0 \Rightarrow$ rejeitamos $H_0$
- Se $\frac{L_1}{L_0}$ é pequeno: os dados favorecem $H_0$ sobre $H_1 \Rightarrow$ não rejeitamos $H_0$
- O limiar $k$ é ajustado para que o teste tenha tamanho $\alpha$

### Exemplo Visual

Considere $X \sim N(\theta, 1)$ com $n = 1$, $\theta_0 = 0$, $\theta_1 = 2$.




Para valores de $x$ na região verde ($R_c$), a verossimilhança sob $H_1$ domina significativamente a verossimilhança sob $H_0$.

## 2.6 Observações Importantes sobre o LNP

**Observação 1: Caso de Igualdade na Razão**

No enunciado do LNP, nada é dito sobre o conjunto:

$$R^* = \{x \in \mathcal{X}^n : L(\theta_1; x) = k \cdot L(\theta_0; x)\} \tag{50}$$

**Caso Contínuo:** Quando $X$ é contínua, $P(X \in R^*) = 0$ e esse detalhe não tem importância prática.

**Caso Discreto:** Quando $X$ é discreta, deve-se aleatorizar o evento $X \in R^*$ (usando $\psi(x) = \gamma$ para $0 < \gamma < 1$) para que o teste tenha tamanho exato $\alpha \in (0, 1)$.
**Exemplo:** Para distribuições Bernoulli e Poisson, a aleatorização é necessária.

**Observação 2: Unicidade do Teste MP**

O teste MP proposto pelo LNP é **essencialmente único**.
**Precisamente:** Se dois testes $\Upsilon_1$ e $\Upsilon_2$ são ambos MP de nível $\alpha$, então:

$$Q_{\Upsilon_1}(\theta_1) = Q_{\Upsilon_2}(\theta_1) \tag{51}$$

Ou seja, têm o mesmo poder. As regiões críticas podem diferir em conjuntos de probabilidade zero.

**Observação 3: Relação com Estatísticas Suficientes**

Seja $T(X)$ uma estatística suficiente para $\theta$. Pelo Teorema da Fatoração:

$$L(\theta; x) = g(T(x); \theta) \cdot h(x) \tag{52}$$

onde $h(x)$ não depende de $\theta$.
Então a razão de verossimilhanças é:

$$\frac{L(\theta_1; x)}{L(\theta_0; x)} = \frac{g(T(x); \theta_1) \cdot h(x)}{g(T(x); \theta_0) \cdot h(x)} = \frac{g(T(x); \theta_1)}{g(T(x); \theta_0)} \tag{53}$$

**Conclusão:** O teste MP depende apenas de $T(x)$, confirmando o princípio da suficiência: estatísticas suficientes contêm toda a informação relevante para testes.

# 3 Teste para Hipóteses Compostas Unilaterais

## 3.1 Razão de Verossimilhança Monótona (RVM)

**Definição 4.4.2.1: Razão de Verossimilhança Monótona**

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra de $X$ com fdp (ou fmp) $f(x;\theta)$ para $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$ e $x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}$.
A família $\{f(x;\theta) : \theta \in \Theta\}$ possui **Razão de Verossimilhança Monótona (RVM)** em uma estatística $T(X) \in \mathbb{R}$ se:
Para todo $\theta^*, \theta \in \Theta$ com $\theta^* > \theta$ e todo $x \in \mathcal{X}^n$:

$$\frac{L(\theta^*;x)}{L(\theta;x)} \text{ é função não-decrescente de } T(x) \tag{54}$$

**Em outras palavras:** Se $T(x_1) < T(x_2)$, então:

$$\frac{L(\theta^*;x_1)}{L(\theta;x_1)} \leq \frac{L(\theta^*;x_2)}{L(\theta;x_2)} \tag{55}$$

**Observações e Comentários**

### Intuição da RVM

A propriedade RVM significa que valores maiores de $T(x)$ tornam a razão $\frac{L(\theta^*)}{L(\theta)}$ maior, favorecendo mais $\theta^*$ sobre $\theta$.
**Importância:** Quando uma família tem RVM, podemos construir testes UMP simples baseados apenas em $T(x)$.

## 3.2 RVM na Família Exponencial

**Propriedade: Família Exponencial tem RVM**

Seja $X$ com densidade (ou fmp) na forma:

$$f(x;\theta) = a(\theta) \cdot c(x) \cdot e^{t(x)\cdot b(\theta)} \tag{56}$$

para $x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}$ e $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$.
**Resultado:** Se $b(\theta)$ é função não-decrescente de $\theta$, então a família $\{f(x;\theta) : \theta \in \Theta\}$ possui RVM em $T(x) = \sum_{i=1}^n t(x_i)$.
**Demonstração:**
Para $\theta^* > \theta$:

$$\frac{L(\theta^*;x)}{L(\theta;x)} = \frac{\prod_{i=1}^n a(\theta^*)c(x_i)e^{t(x_i)b(\theta^*)}}{\prod_{i=1}^n a(\theta)c(x_i)e^{t(x_i)b(\theta)}} \tag{57}$$

$$= \frac{[a(\theta^*)]^n}{[a(\theta)]^n} \cdot \exp\left\{\sum_{i=1}^n t(x_i)[b(\theta^*) - b(\theta)]\right\} \tag{58}$$

$$= \frac{[a(\theta^*)]^n}{[a(\theta)]^n} \cdot \exp\{T(x)[b(\theta^*) - b(\theta)]\} \tag{59}$$

Como $\theta^* > \theta$ e $b(\cdot)$ é não-decrescente: $b(\theta^*) \geq b(\theta)$, logo $b(\theta^*) - b(\theta) \geq 0$. Portanto, $\frac{L(\theta^*)}{L(\theta)}$ é função não-decrescente de $T(x)$. $\square$

Observações e Comentários

## Distribuições com RVM

As seguintes distribuições importantes possuem RVM:

1. **Normal** $N(\mu, \sigma^2)$ com $\sigma^2$ conhecido: RVM em $\sum X_i$ (parâmetro $\mu$)
2. **Normal** $N(\mu, \sigma^2)$ com $\mu$ conhecido: RVM em $\sum X_i^2$ (parâmetro $\sigma^2$)
3. **Bernoulli**$(p)$: RVM em $\sum X_i$
4. **Poisson**$(\lambda)$: RVM em $\sum X_i$
5. **Exponencial**$(\theta)$: RVM em $\sum X_i$
6. **Gamma**$(\alpha, \beta)$: RVM em $\sum X_i$ ou $\sum \log X_i$ (depende do parâmetro)

**Contraexemplo:** Uniforme$(0, \theta)$ NÃO possui RVM, mas ainda assim existe teste UMP (baseado em $\max X_i$).

# 4 Teorema de Karlin-Rubin

**Teorema 4.4.2.1: Teorema de Karlin-Rubin**

Assuma que se deseja testar:

$$H_0 : \theta \leq \theta_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \theta > \theta_0 \tag{60}$$

Sejam:

- $T = T(X) \in \mathbb{R}$ uma estatística suficiente para $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$
- $g(t; \theta)$ a densidade (ou fmp) induzida de $T$
- $\{g(t; \theta) : \theta \in \Theta\}$ possui RVM

Então o teste $\Upsilon$ com função crítica:

$$\psi_\Upsilon(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } T(x) > c \\ \gamma, & \text{se } T(x) = c \\ 0, & \text{se } T(x) < c \end{cases} \tag{61}$$

onde $c$ e $0 \leq \gamma \leq 1$ são escolhidos tal que:

$$E_{\theta_0}[\psi_\Upsilon(X)] = \alpha \tag{62}$$

é um **teste UMP de nível** $\alpha$.
**Em outras palavras:** Quando há RVM, o teste UMP rejeita $H_0$ para valores grandes da estatística suficiente $T(x)$.

**Observações e Comentários**

## Comparação: LNP vs Karlin-Rubin

| **Aspecto** | **LNP** | **Karlin-Rubin** |
|---|---|---|
| Tipo de hipóteses | Simples vs Simples<br><br>$H_0 : \theta = \theta_0$<br>$H_1 : \theta = \theta_1$ | Composta vs Composta<br>$H_0 : \theta \leq \theta_0$<br>$H_1 : \theta > \theta_0$ |
| Requisito | Nenhum (sempre aplicável) | Requer RVM |
| Resultado | Teste MP | Teste UMP |
| Estatística | Razão $\frac{L_1}{L_0}$ | Estatística suficiente $T(x)$ |
| Aplicabilidade | Mais limitada | Mais ampla (hipóteses compostas) |

**Relação:** O TKR generaliza o LNP para hipóteses compostas unilaterais.

# 5 Todas as Definições Importantes

**Definição: p-valor**

O **p-valor** (ou valor-p) é o menor nível de significância $\alpha$ para o qual os dados observados levariam à rejeição de $H_0$.
Equivalentemente, para uma estatística de teste $T$ com valor observado $t_{\text{obs}}$:

$$\text{p-valor} = P_{H_0}[T \geq t_{\text{obs}}] \quad \text{(teste unilateral à direita)} \tag{63}$$

**Regra de decisão:** Rejeita-se $H_0$ ao nível $\alpha$ se e somente se:

$$\text{p-valor} < \alpha \tag{64}$$

**Interpretação:**

- p-valor pequeno ($< 0.01$): evidência muito forte contra $H_0$
- p-valor moderado (0.01 a 0.05): evidência moderada contra $H_0$
- p-valor grande ($> 0.10$): evidência fraca ou nenhuma contra $H_0$

**Definição: Teste UMPNV**

Um teste é chamado de **Uniformemente Mais Poderoso Não-Viesado (UMPNV)** se:

1. É UMP entre todos os testes de nível $\alpha$
2. É não-viesado: $Q(\theta) \geq \alpha$ para todo $\theta \in \Theta_1$

**Aplicação:** Testes UMPNV são úteis para hipóteses bilaterais onde não existe teste UMP.

# 6 Resumo de Todos os Teoremas Principais

## 6.1 Quadro Comparativo dos Teoremas

Tabela 1: Principais Teoremas do Capítulo 4

| **Teorema** | **Hipóteses** | **Resultado** |
|---|---|---|
| **LNP** | Simples vs Simples: $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta = \theta_1$ | Teste MP rejeita quando $\frac{L(\theta_1;x)}{L(\theta_0;x)} > k$ |
| **Karlin-Rubin** | Composta unilateral: $H_0 : \theta \leq \theta_0$ vs $H_1 : \theta > \theta_0$ (com RVM) | Teste UMP rejeita quando $T(x) > c$ onde $T$ é suficiente |
| **Teste UMPNV** | Bilateral: $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta \neq \theta_0$ | Para famílias com RVM, teste baseado em $\|T - c\|$ pode ser UMPNV |

# 7 Guia de Estudo para a Prova

## 7.1 Checklist de Conteúdos para Dominar

**Nível 1: Definições Fundamentais (ESSENCIAL)**

- ☐ Definição de hipótese estatística
- ☐ Classificação: simples, composta unilateral, bilateral
- ☐ Região crítica e região de aceitação
- ☐ Erro Tipo I e Erro Tipo II
- ☐ Função poder $Q(\theta)$
- ☐ Função crítica $\psi(x)$
- ☐ Tamanho e nível de um teste
- ☐ Teste aleatorizado vs não-aleatorizado

**Nível 2: Teoremas Principais (MUITO IMPORTANTE)**

- ☐ **Lema de Neyman-Pearson** - enunciado
- ☐ **Lema de Neyman-Pearson** - demonstração completa
- ☐ Teorema de Karlin-Rubin - enunciado
- ☐ Definição de RVM
- ☐ RVM na família exponencial

**Nível 3: Aplicações (IMPORTANTE)**

- ☐ Teste Z para média (Normal com $\sigma^2$ conhecido)
- ☐ Teste para Exponencial (usando $\chi^2$)
- ☐ Teste para Bernoulli (com aleatorização)
- ☐ Teste para Poisson (com aleatorização)
- ☐ Relação entre suficiência e testes ótimos

## 7.2 Estratégias para Demonstrações na Prova

**MUITO IMPORTANTE PARA A PROVA**

### Se pedirem para demonstrar o LNP:

**Estrutura da resposta (em ordem):**

1. **Setup inicial** (2-3 linhas):

- Considere $\Upsilon$ o teste proposto e $\Upsilon^*$ qualquer outro teste de nível $\alpha$
- Objetivo: mostrar $Q_\Upsilon(\theta_1) \geq Q_{\Upsilon^*}(\theta_1)$

2. **Desigualdade fundamental** (5-10 linhas):
   - Mostrar que $[\psi - \psi^*][L_1 - kL_0] \geq 0$
   - Análise de casos: $\psi = 1$, $\psi = 0$, $0 < \psi < 1$
3. **Integração** (3-5 linhas):
   - Integrar a desigualdade sobre $\mathcal{X}^n$
   - Expandir o produto
4. **Reconhecer funções poder** (2-3 linhas):
   - $\int \psi L(\theta) = Q(\theta)$
   - Reescrever em termos de $Q_\Upsilon$ e $Q_{\Upsilon^*}$
5. **Usar condições de nível** (2-3 linhas):
   - $Q_\Upsilon(\theta_0) = \alpha$
   - $Q_{\Upsilon^*}(\theta_0) \leq \alpha$
6. **Conclusão** (1-2 linhas):
   - $Q_\Upsilon(\theta_1) \geq Q_{\Upsilon^*}(\theta_1)$ $\square$

**Tempo estimado:** 15-20 minutos para escrever completamente.
**Pontos que não podem faltar:**

- Análise dos três casos para $\psi$
- Justificativa de por que cada caso satisfaz a desigualdade
- Reconhecimento de que $\int \psi L = Q$
- Uso explícito de $Q(\theta_0) = \alpha$ e $Q^*(\theta_0) \leq \alpha$

# 8 Formulário de Referência Rápida

## 8.1 Estatísticas de Teste Principais

Tabela 2: Estatísticas Clássicas e Suas Distribuições

| Situação | Estatística | Distribuição | Nome |
|---|---|---|---|
| $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\sigma^2$ conhecido | $\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ | $N(0,1)$ | Teste Z |
| $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\sigma^2$ desconhecido | $\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$ | $t_{n-1}$ | Teste t |
| $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, teste para $\sigma^2$ | $\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$ | $\chi^2_{n-1}$ | Teste $\chi^2$ |
| $X_i \sim \text{Exp}(\theta)$ | $\frac{2}{\theta_0}\sum X_i$ | $\chi^2_{2n}$ | Teste $\chi^2$ |
| $X_i \sim \text{Bernoulli}(p)$ | $\sum X_i$ | $\text{Binomial}(n, p_0)$ | Teste Binomial |
| $X_i \sim \text{Poisson}(\lambda)$ | $\sum X_i$ | $\text{Poisson}(n\lambda_0)$ | Teste Poisson |

## 8.2 Fórmulas Importantes

Fórmulas para Memorizar

**Razão de Verossimilhanças:**

$$\Lambda(x) = \frac{L(\theta_1; x)}{L(\theta_0; x)} \tag{65}$$

**Função Poder:**

$$Q(\theta) = P_\theta[\text{Rejeitar } H_0] = E_\theta[\psi(X)] \tag{66}$$

**Relação Poder-Erro Tipo II:**

$$\text{Poder}(\theta) = 1 - \beta(\theta), \quad \theta \in \Theta_1 \tag{67}$$

**Quantis Normais Comuns:**

- $z_{0.10} = 1.282$ (90% de confiança)
- $z_{0.05} = 1.645$ (95% de confiança)
- $z_{0.025} = 1.960$ (97.5% de confiança)
- $z_{0.01} = 2.326$ (99% de confiança)

# 9 Exemplos Trabalhados da Teoria

## 9.1 Exemplo 1: Verificando RVM para Normal

Exemplo: RVM na $N(\mu, \sigma^2)$

**Problema:** Mostrar que $f(x; \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\}$ (com $\sigma^2$ fixo) tem RVM em $T(x) = \sum x_i$.
**Solução:**
Para $\mu^* > \mu$, calcule a razão:

$$\frac{L(\mu^*; x)}{L(\mu; x)} = \exp\left\{\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum (x_i - \mu)^2 - \sum (x_i - \mu^*)^2\right]\right\} \tag{68}$$

$$= \exp\left\{\frac{1}{2\sigma^2}\left[2(\mu^* - \mu)\sum x_i - n(\mu^*)^2 + n\mu^2\right]\right\} \tag{69}$$

$$= \exp\left\{\frac{\mu^* - \mu}{\sigma^2} T(x) + \frac{n(\mu^2 - (\mu^*)^2)}{2\sigma^2}\right\} \tag{70}$$

Como $\mu^* > \mu$, o coeficiente $\frac{\mu^* - \mu}{\sigma^2} > 0$.
Logo, $\frac{L(\mu^*)}{L(\mu)}$ é função crescente de $T(x) = \sum x_i$. ✓
**Conclusão:** A família Normal tem RVM em $\sum X_i$ para o parâmetro $\mu$.

## 9.2 Exemplo 2: Aplicando LNP para Normal

Exemplo: Teste MP via LNP

**Problema:** $X_1, \ldots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ com $\sigma^2$ conhecido. Teste MP para $H_0 : \mu = \mu_0$ vs $H_1 : \mu = \mu_1$ ($\mu_1 > \mu_0$) ao nível $\alpha$.
**Solução via LNP:**

**Passo 1:** Razão de verossimilhanças:

$$\frac{L_1}{L_0} = \exp\left\{\frac{(\mu_1 - \mu_0)}{\sigma^2}\sum x_i - \frac{n(\mu_1^2 - \mu_0^2)}{2\sigma^2}\right\} \tag{71}$$

**Passo 2:** Região crítica ($\frac{L_1}{L_0} > k$):

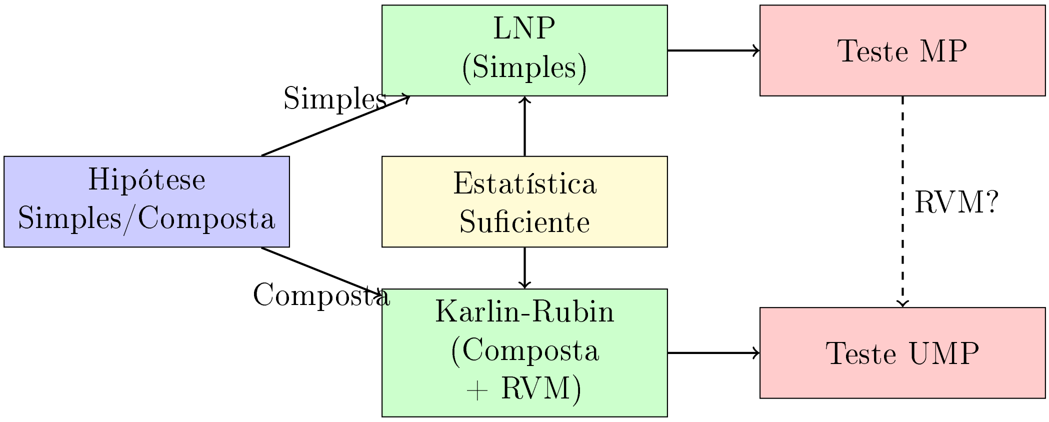
$$\sum x_i > \text{constante} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{x} > c \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > z_\alpha \tag{72}$$

**Passo 3:** Teste final:

$$\text{Rejeita } H_0 \text{ se } Z = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{\sigma} > z_\alpha \tag{73}$$

onde $z_\alpha$ satisfaz $P(Z > z_\alpha) = \alpha$ para $Z \sim N(0, 1)$.
**Resultado:** Este é o teste Z clássico, e o LNP prova que ele é MP!

# 10 Conexões Entre os Conceitos




**Fluxo lógico:**

1. Identifique se as hipóteses são simples ou compostas
2. Determine a estatística suficiente
3. Se simples: use LNP $\rightarrow$ obtém teste MP
4. Se composta unilateral: verifique RVM
5. Se tem RVM: use Karlin-Rubin $\rightarrow$ obtém teste UMP
6. Se bilateral: considere teste UMPNV ou razão de verossimilhanças

# 11 Perguntas Frequentes para a Prova

## 11.1 Dúvidas Comuns sobre o LNP

FAQ 1: Por que a desigualdade (4.3.3) vale?

**Pergunta:** Como garantimos que $[\psi - \psi^*][L_1 - kL_0] \geq 0$?
**Resposta:** Pela análise de casos. O ponto crucial é que:

- $\psi = 1 \Rightarrow L_1 - kL_0 > 0$ (por construção)
- $\psi = 0 \Rightarrow L_1 - kL_0 < 0$ (por construção)
- $\psi \in (0, 1) \Rightarrow L_1 - kL_0 = 0$ (por construção)

Em cada caso, os sinais são compatíveis, resultando em produto $\geq 0$.

FAQ 2: Por que $Q(\theta_0) - Q^*(\theta_0) \geq 0$?

**Pergunta:** Como sabemos que $Q_\Upsilon(\theta_0) - Q_{\Upsilon^*}(\theta_0) \geq 0$?
**Resposta:** Por construção:

- $Q_\Upsilon(\theta_0) = \alpha$ (teste tem tamanho exato $\alpha$)
- $Q_{\Upsilon^*}(\theta_0) \leq \alpha$ ($\Upsilon^*$ é de nível $\alpha$)

Logo: $Q_\Upsilon(\theta_0) - Q_{\Upsilon^*}(\theta_0) = \alpha - Q_{\Upsilon^*}(\theta_0) \geq 0$.

FAQ 3: O que acontece se $k < 0$?

**Pergunta:** O LNP permite $k < 0$?
**Resposta:** NÃO. No enunciado, especificamos $k \geq 0$.
**Justificativa:** A razão de verossimilhanças $\frac{L_1}{L_0}$ é sempre não-negativa (é um produto de densidades/probabilidades). Portanto, comparar com $k < 0$ não faria sentido.

FAQ 4: LNP se aplica a hipóteses compostas?

**Pergunta:** Posso usar LNP para $H_0 : \theta \leq \theta_0$ vs $H_1 : \theta > \theta_0$?
**Resposta:** NÃO diretamente. O LNP é apenas para hipóteses simples.
**Solução:** Para hipóteses compostas unilaterais, use o Teorema de Karlin-Rubin (se houver RVM).

# 12 Material de Revisão Final

## 12.1 Principais Equações para Memorizar

**MUITO IMPORTANTE PARA A PROVA**

### TOP 10 Equações Mais Importantes

1. **Erro Tipo I:**
$$\alpha = P_{H_0}[X \in R_c] \tag{74}$$

2. **Erro Tipo II:**
$$\beta = P_{H_1}[X \notin R_c] \tag{75}$$

3. **Função Poder:**
$$Q(\theta) = P_\theta[X \in R_c] = E_\theta[\psi(X)] \tag{76}$$

4. **LNP - Região Crítica:**
$$R_c = \left\{x : \frac{L(\theta_1; x)}{L(\theta_0; x)} > k\right\} \tag{77}$$

5. **LNP - Condição de Tamanho:**
$$E_{\theta_0}[\psi(X)] = \alpha \tag{78}$$

6. **RVM - Definição:**
$$\frac{L(\theta^*; x)}{L(\theta; x)} \text{ não-decrescente em } T(x) \text{ quando } \theta^* > \theta \tag{79}$$

7. **Karlin-Rubin - Região Crítica:**
$$R_c = \{x : T(x) > c\} \text{ com } E_{\theta_0}[\psi(X)] = \alpha \tag{80}$$

8. **Teste Z:**
$$Z = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{\sigma} \sim N(0, 1) \text{ sob } H_0 \tag{81}$$

9. **Qui-Quadrado (Exponencial):**
$$Q = \frac{2}{\theta_0} \sum X_i \sim \chi^2_{2n} \text{ sob } H_0 \tag{82}$$

10. **p-valor:**
$$p = P_{H_0}[T \geq t_{\text{obs}}] \tag{83}$$

## 12.2 Simulado de Questões Teóricas

**Questões Tipo Prova**

**Questão 1 (Peso 3.0):** Enuncie e demonstre completamente o Lema de Neyman-Pearson.
**Questão 2 (Peso 1.5):** Defina função poder e explique sua relação com os erros Tipo I e II.
**Questão 3 (Peso 1.5):** O que é RVM? Mostre que a distribuição Poisson possui RVM.
**Questão 4 (Peso 2.0):** Enuncie o Teorema de Karlin-Rubin e explique sua relação com o LNP.
**Questão 5 (Peso 2.0):** Derive o teste MP para $H_0 : p = p_0$ vs $H_1 : p = p_1$ ($p_1 > p_0$) quando $X_i \sim \text{Bernoulli}(p)$.

## 12.3 Gabarito Resumido

**Respostas Esperadas**

**Q1:** Seguir a estrutura da Seção 2 (demonstração em 6 passos).
**Q2:** $Q(\theta) = P_\theta[\text{Rej } H_0]$. Para $\theta \in \Theta_0$: $Q(\theta) = \alpha$. Para $\theta \in \Theta_1$: $Q(\theta) = 1 - \beta$.
**Q3:** RVM: $\frac{L(\theta^*)}{L(\theta)}$ não-dec em $T$ para $\theta^* > \theta$. Para Poisson: $\frac{L(\lambda^*)}{L(\lambda)} = e^{-n(\lambda^*-\lambda)}(\frac{\lambda^*}{\lambda})^{\sum x_i}$ é crescente em $\sum x_i$.
**Q4:** TKR fornece teste UMP para hipóteses compostas unilaterais quando há RVM. Generaliza LNP de simples para composta.
**Q5:** Aplicar LNP: $\frac{L_1}{L_0} > k \Rightarrow \sum X_i > k_1$ com $\sum X_i \sim \text{Binomial}(n, p_0)$ sob $H_0$.

# 13 Conclusão e Recomendações

## 13.1 Prioridades de Estudo

1. **PRIORIDADE MÁXIMA:**
   - Demonstração completa do LNP (saiba fazer de olhos fechados)
   - Definições de erro Tipo I, II, função poder, tamanho, nível
   - Enunciado do LNP e do TKR
2. **PRIORIDADE ALTA:**
   - Definição de RVM e exemplos
   - Aplicações do LNP (Normal, Exponencial, Bernoulli, Poisson)
   - Relação entre suficiência e testes ótimos
3. **PRIORIDADE MÉDIA:**
   - Testes bilaterais e UMPNV
   - p-valor e interpretação
   - Comparação de testes

## 13.2 Como Estudar para a Prova

1. **Dia 1-2:** Memorize todas as definições. Escreva-as sem consultar.
2. **Dia 3-4:** Pratique a demonstração do LNP 5-10 vezes até conseguir fazer fluentemente.
3. **Dia 5-6:** Resolva as questões Q(4.1) a Q(4.12) sem consultar.
4. **Dia 7:** Revise os teoremas (LNP, TKR) e faça o simulado.
5. **Dia da prova:** Releia apenas este material auxiliar (resume tudo).

## 13.3 Frases para Lembrar

- *"O LNP é para hipóteses simples, Karlin-Rubin para compostas com RVM"*
- *"Teste MP maximiza poder mantendo tamanho $\alpha$ fixo"*
- *"RVM + suficiência $\Rightarrow$ teste UMP simples"*
- *"Razão de verossimilhanças compara qual hipótese é mais plausível"*
- *"Testes ótimos dependem apenas de estatísticas suficientes"*

**BOA PROVA!**
Lembre-se: a demonstração do LNP é fundamental.
Pratique até dominar completamente!