Notas de Aula - Capítulo 5

Intervalos de Confiança

Curso de Inferência Estatística - PPGEST/UFPE

Compilado das notas de aula

Novembro 2025

Sumário

1 Introdução aos Intervalos de Confiança

1.1 Data: 10/11/25

Os intervalos de confiança constituem uma das ferramentas fundamentais da inferência estatística, permitindo quantificar a incerteza associada à estimação de parâmetros desconhecidos.

1.2 Probabilidade de Cobertura

Definição 5.1 - Probabilidade de Cobertura

Sejam $T_l(x)$ e $T_u(x)$ duas estatísticas baseadas em uma amostra $X = (x_1, \ldots, x_n)^T$. A **probabilidade de cobertura** do intervalo aleatório $J = [T_l(x), T_u(x)]$ para o parâmetro desconhecido $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$ é dada por:

$$P_\theta\left[\theta \in [T_l(x), T_u(x)]\right] \tag{1}$$

1.3 Coeficiente de Confiança

Coeficiente de Confiança

O **coeficiente de confiança** de J é dado por:

$$\inf_{\theta \in \Theta} \left\{\mathbb{P}_\theta\left[\theta \in [T_L(x), T_U(x)]\right]\right\} \tag{2}$$

Observações

Na maioria das aplicações, a probabilidade de cobertura não dependerá do parâmetro e será equivalente ao coeficiente de cobertura.

2 Questão 5.1: Comparação de Intervalos de Confiança

Questão 5.1

Sejam

$$J_1 = (X_1 - 1,96; X_1 + 1,96)$$

e

$$J_2 = \left(\bar{X} - \frac{1,96}{\sqrt{2}}, \bar{X} + \frac{1,96}{\sqrt{2}}\right)$$

dois intervalos aleatórios para μ, tais que $X_1, X_2 \sim N(\mu, 1)$ i.i.d. e

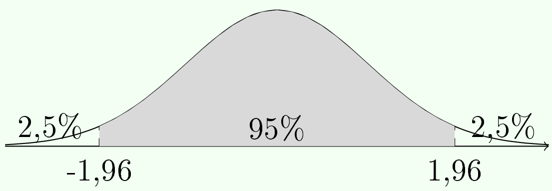
$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2}{2}.$$

Encontre as probabilidades de cobertura de J_1 e J_2.

Solução Detalhada

Probabilidade de Cobertura de J_1

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_\mu\{\mu \in J_1\} &= \mathbb{P}_\mu\{\mu \in (X_1 - 1,96; X_1 + 1,96)\} && (3)\\
&= \mathbb{P}_\mu\{X_1 - 1,96 < \mu < X_1 + 1,96\} && (4)\\
&= \mathbb{P}_\mu\{(X_1 - \mu) \leq 1,96 \ \cap \ (X_1 - \mu) \geq -1,96\} && (5)\\
&= \mathbb{P}_\mu\{|X_1 - \mu| < 1,96\} && (6)\\
&= \mathbb{P}_\mu\{|Z| < 1,96\} \quad \text{onde } Z \sim N(0,1) && (7)\\
&= \Phi(1,96) - \Phi(-1,96) && (8)\\
&= 95\% && (9)
\end{aligned}$$



Solução Detalhada

Probabilidade de Cobertura de J_2

$$P_\mu\{\mu \in J_2\} = P_\mu\left\{\mu \in \left(\bar{X} - \frac{1.96}{\sqrt{2}},\ \bar{X} + \frac{1.96}{\sqrt{2}}\right)\right\} \tag{10}$$

$$= P_\mu\left\{\bar{X} - \frac{1.96}{\sqrt{2}} < \mu < \bar{X} + \frac{1.96}{\sqrt{2}}\right\} \tag{11}$$

$$= P_\mu\left\{(\bar{X} - \mu)\sqrt{2} \leq 1.96 \ \wedge \ (\bar{X} - \mu)\sqrt{2} \geq -1.96\right\} \tag{12}$$

$$= P_\mu\left\{\left|(\bar{X} - \mu)\sqrt{2}\right| \leq 1.96\right\} \tag{13}$$

Como $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{1}{2}\right)$, temos:

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{1/2}} = (\bar{X} - \mu)\sqrt{2} \sim N(0, 1) \tag{14}$$

Portanto:

$$P_\mu\left\{|Z| \leq 1.96\right\} = 0.95 = 95\% \tag{15}$$

Observações

Conclusão: Ambos os intervalos J_1 e J_2 possuem a mesma probabilidade de cobertura de 95%. No entanto, J_2 é mais eficiente pois utiliza toda a informação disponível (ambas as observações) através da média amostral $\bar{X}$.

3 Métodos para Construção de Intervalos de Confiança

3.1 Data: 12/11/2015

Para construir intervalos de confiança, podem ser utilizadas duas abordagens principais:

1. **Procedimento de teste de hipótese** (Inversão de testes)
2. **Via estatística pivotal**

3.2 Inversão de um Procedimento de Teste

Em teste de hipóteses, a região de não rejeição de H_0 foi denotada como:

$$R^c = \begin{cases} \{x \in \mathcal{X}^n : T(x) > k_3\}^c & \text{para } H_1 : \theta \geq \theta_0, \\ \{x \in \mathcal{X}^n : T(x) < k_3\}^c & \text{para } H_1 : \theta \leq \theta_0, \\ \{x \in \mathcal{X}^n : |T(x)| > k_3\}^c & \text{para } H_1 : \theta \neq \theta_0. \end{cases}$$

A construção de intervalos de confiança é bastante relacionada a R^c.

4 Questão 5.2: IC para Normal (Variância Conhecida) via Inversão

Questão 5.2

Sejam $X_1, \dots, X_n$ uma amostra de $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ para $\mu \in \mathbb{R}$ desconhecida e $\sigma^2 > 0$ conhecida. Deseja-se testar:

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \mu > \mu_0 \tag{16}$$

Encontre o estimador intervalar para μ com nível de confiança de $1 - \alpha$ para $\alpha \in (0, 1)$.

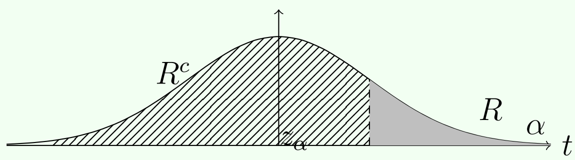
Solução Detalhada

Como já foi discutido (Capítulo 4), o teste UMP para H_0 vs H_1 de nível α tem função crítica dada por:

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & \sqrt{n}\dfrac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sigma} \geq z_\alpha, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \tag{17}$$

A região de não rejeição é dada por:

$$R^c = \left\{ x \in \mathcal{X} : \sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sigma} \leq z_\alpha \right\} \tag{18}$$



Solução Detalhada

Note que:

$$P_\mu \left\{ \sqrt{n} \frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\sigma} \leq z_\alpha \right\} = 1 - \alpha$$

Rearranjando:

$$P_\mu \left\{ \mu_0 \geq \overline{X}_n - z_\alpha n^{-1/2} \sigma \right\} = 1 - \alpha$$

Logo:

$$P_\mu \left\{ \mu \geq \overline{X}_n - z_\alpha n^{-1/2} \sigma \right\} = 1 - \alpha, \quad \forall \mu \in \mathbb{R}$$

Intervalo de Confiança:

$$\boxed{IC_{1-\alpha}(\mu) = \left[\overline{X}_n - z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ +\infty \right)} \tag{19}$$

Este é um intervalo de confiança **unilateral inferior** para μ com coeficiente de confiança $1 - \alpha$.

5 Questão 5.3: IC para Exponencial via Inversão

Questão 5.3

Sejam $X_1, \dots, X_n$ uma amostra de $X \sim \text{Exp}(\theta)$ para $\theta > 0$ desconhecido. Deseja-se testar:

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \theta > \theta_0$$

Encontre o estimador intervalar para θ com nível de confiança $1 - \alpha$.

Solução Detalhada

Como já foi discutido, o teste UMP para H_0 de nível α tem função crítica:

$$\psi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & 2\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\theta_0} > \chi^2_{2n,\alpha} \\ 0, & 2\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\theta_0} \leq \chi^2_{2n,\alpha} \end{cases}$$

A região de não rejeição é dada por:

$$R^c = \left\{ \mathbf{x} \in \mathcal{X} : 2\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\theta_0} \leq \chi^2_{2n,\alpha} \right\}$$

Note que:

$$P_{\theta_0}\left\{ 2\sum_{i=1}^{n} x_i/\theta_0 \leq \chi^2_{2n,\alpha} \right\} = 1 - P_{\theta_0}\left\{ 2\sum_{i=1}^{n} x_i/\theta_0 > \chi^2_{2n,\alpha} \right\} = 1 - \alpha \tag{20}$$

Portanto:

$$P_{\theta_0}\left\{ \theta_0 \geq \frac{2\sum_{i=1}^{n} x_i}{\chi^2_{2n,\alpha}} \right\} = 1 - \alpha \tag{21}$$

Dai:

$$P_{\theta}\left\{ \theta \geq \frac{2\sum_{i=1}^{n} x_i}{\chi^2_{2n,\alpha}} \right\} = 1 - \alpha, \quad \forall \theta \in \mathbb{R}_+ \tag{22}$$

Intervalo de Confiança:

$$\boxed{IC_{1-\alpha}(\theta) = \left[\frac{2\sum_{i=1}^{n} X_i}{\chi^2_{2n,\alpha}},\ +\infty \right)} \tag{23}$$

6 Abordagem pela Estatística Pivotal

Definição 5.3.1 - Pivô

Seja $T(x)$ (para $x = (x_1, \dots, x_n)^T$) uma estatística suficiente (mínima) para θ. Um **pivô** é uma variável aleatória U que depende de T e θ cuja distribuição **não depende** de θ.

Observações

Casos Especiais de Pivôs:

1. **Família Locação em $a(\theta)$:** A distribuição de $\{T - a(\theta)\}$ não depende de θ.
2. **Família Escala em $b(\theta)$:** A distribuição de $T/b(\theta)$ não depende de θ.
3. **Família Locação-Escala em $a(\theta)$ e $b(\theta)$:** A distribuição de $\{T - a(\theta)\}/b(\theta)$ não depende de θ.

7 Questão 5.4: IC para Exponencial usando Pivô

7.1 Data: 12/11/25

Questão 5.4

Seja $X \sim \text{Exp}(\theta)$ com densidade:

$$f(x;\theta) = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta} \mathbb{I}_{(0,\infty)}(x) \tag{24}$$

Construa um intervalo de confiança bilateral para θ usando a abordagem pivotal.

Solução Detalhada

Encontrando o Pivô

Note que $U = X/\theta$ tem densidade:

$$\begin{aligned} f_U(u) = \frac{dF_X(u\theta)}{du} &= \theta f_X(u\theta;\theta) && (25)\\ &= \theta \cdot \frac{1}{\theta} e^{-u\theta/\theta} && (26)\\ &= e^{-u}\mathbb{I}_{(0,\infty)}(u) && (27) \end{aligned}$$

Portanto, $U = X/\theta \sim \text{Exp}(1)$ é um pivô pela Definição 5.3.1, pois sua distribuição não depende de θ.

Construindo o Intervalo

É possível determinar dois pontos $a, b > 0$ tais que $a < b$ e:

$$P(U \le a) = P(U > b) = \frac{\alpha}{2} \quad \text{ou equivalentemente} \tag{28}$$

$$P(a < U < b) = 1 - \alpha \tag{29}$$

Com $\alpha \in (0, 1)$ fixado, calculamos:

$$\int_0^a e^{-x}\, dx = 1 - e^{-a} = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad a = -\log\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \tag{30}$$

Solução Detalhada

E:

$$\int_b^\infty e^{-x}\,dx = e^{-b} = \frac{\alpha}{2}$$

$$\therefore \quad b = -\log\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Assim:

$$P_\theta\left\{a < \frac{X}{\theta} < b\right\} = 1-\alpha$$

Invertendo para isolar θ:

$$P_\theta\left\{\frac{1}{b} < \frac{\theta}{X} < \frac{1}{a}\right\} = 1-\alpha$$

$$P_\theta\left\{\theta \in \left(\frac{X}{b}, \frac{X}{a}\right)\right\} = 1-\alpha$$

Intervalo de Confiança:

$$\boxed{IC_{1-\alpha}(\theta) = \left(\frac{X}{b}, \frac{X}{a}\right) = \left(\frac{X}{-\log(\alpha/2)}, \frac{X}{-\log(1-\alpha/2)}\right)} \tag{31}$$

Este é o **intervalo bilateral** para θ com confiança $1-\alpha$.

8 Questão 5.5: IC para Uniforme(0, θ) usando Pivô

Questão 5.5

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra de $X \sim U(0, \theta)$ para $\theta > 0$ desconhecido. Encontre o estimador intervalar bilateral para θ com confiança de $1 - \alpha$.

Solução Detalhada

Estatística Suficiente

A estatística $T(X) = X_{(n)} = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$ é suficiente mínima para θ com densidade:

$$f_T(t; \theta) = \frac{n}{\theta^n} t^{n-1} \mathbb{I}_{(0,\theta)}(t)$$

Construindo o Pivô

Note que $U = T/\theta$ tem densidade:

$$f_U(u) = \frac{dF_T(u\theta)}{du} = \theta f_T(u\theta; \theta) \tag{32}$$

$$= \theta \cdot \frac{n}{\theta^n} (u \cdot \theta)^{n-1} \tag{33}$$

$$= nu^{n-1}, \quad \text{para } u \in (0, 1) \tag{34}$$

Portanto, $U = T/\theta$ é um pivô com distribuição Beta$(n, 1)$.

Determinando os Limites

Considere $a, b \in (0, 1)$ tal que $0 < a < b < 1$ e:

$$P(U < a) = P(U > b) = \frac{\alpha}{2} \quad \text{ou, equivalentemente} \tag{35}$$

$$P(a < U < b) = 1 - \alpha \tag{36}$$

Solução Detalhada

Calculando os limites:

$$P(U < a) = \int_0^a n \cdot u^{n-1}\, du = [u^n]_0^a \tag{37}$$

$$= a^n = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad a = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{1/n} \tag{38}$$

E:

$$P(U > b) = \int_b^1 n \cdot u^{n-1}\, du = [u^n]_b^1 \tag{39}$$

$$= 1 - b^n = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad b = \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)^{1/n} \tag{40}$$

Assim:

$$P\left(a < \frac{T}{\theta} < b\right) = 1 - \alpha \quad \Rightarrow \quad P\left(\frac{1}{b} < \frac{\theta}{T} < \frac{1}{a}\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(\theta \in \left(\frac{T}{b}, \frac{T}{a}\right)\right) = 1 - \alpha$$

Intervalo de Confiança:

$$\boxed{IC_{1-\alpha}(\theta) = \left(\frac{X_{(n)}}{\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)^{1/n}}, \frac{X_{(n)}}{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{1/n}}\right)} \tag{41}$$

9 Questão 5.6: IC Bilateral para Normal (Variância Conhecida)

Questão 5.6

Sejam $X_1, \dots, X_n$ uma amostra de $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ com $\mu \in \mathbb{R}$ desconhecido e $\sigma^2 > 0$ conhecido.
Encontre o IC bilateral com $1 - \alpha$ de confiança para μ.

Solução Detalhada

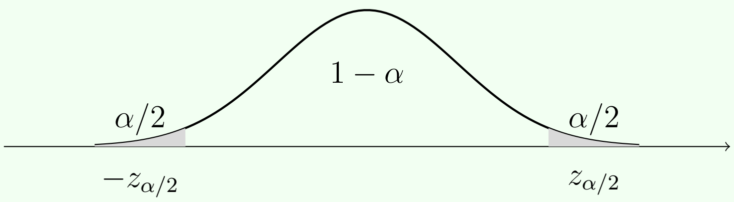
Estatística Suficiente e Pivô

De discussões anteriores, $T = \bar{X}_n$ é uma estatística suficiente mínima para μ e $T \sim N(\mu, \sigma^2/n)$.
Os X_i's e T pertencem a uma família locação. Note que:

$$U = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1) \tag{42}$$

é um pivô. Para $z_{\alpha/2} > 0$ tal que $P(Z > z_{\alpha/2}) = \alpha/2$, temos:

$$P\left(-z_{\alpha/2} < U < z_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha \tag{43}$$



Solução Detalhada

Portanto:

$$P\left(-z_{\alpha/2} < \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < z_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

Rearranjando para isolar μ:

$$P\left(\mu \in \left(\bar{X}_n - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{X}_n + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)\right) = 1 - \alpha$$

Intervalo de Confiança:

$$\boxed{IC_{1-\alpha}(\mu) = \left(\bar{X}_n \pm z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)} \tag{44}$$

Este é o intervalo de confiança bilateral para μ com coeficiente de confiança $1 - \alpha$.
Valores comuns de $z_{\alpha/2}$:

- Para $\alpha = 0.05$: $z_{0.025} = 1.96$
- Para $\alpha = 0.01$: $z_{0.005} = 2.576$
- Para $\alpha = 0.10$: $z_{0.05} = 1.645$

10 Questão 5.7: IC Bilateral para Normal (Variância Desconhecida)

Questão 5.7

Sejam $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. de $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ com $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma^2 > 0$ ambos desconhecidos. Encontre estimador bilateral intervalar com $1 - \alpha$ de confiança para μ.

Solução Detalhada

Estatística Suficiente

De discussões anteriores, $(\bar{X}_n, S_n)$ é uma estatística suficiente mínima para (μ, σ), onde:

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X}_n)^2$$

Os X_i's pertencem a uma família de locação-escala.

Construindo o Pivô

Note que:

$$U = \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{S_n} \sim t_{n-1} \tag{45}$$

é um pivô, pois segue a distribuição t de Student com $n-1$ graus de liberdade, que não depende de μ nem de σ^2.

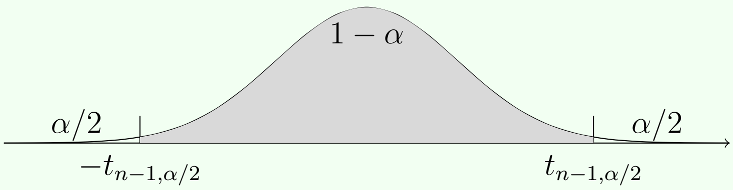
Para $t_{n-1,\alpha/2} > 0$ tal que:

$$P\left(|U| > t_{n-1,\alpha/2}\right) = \alpha \tag{46}$$

temos:

$$P\left\{-t_{n-1,\alpha/2} < U < t_{n-1,\alpha/2}\right\} = 1 - \alpha \tag{47}$$

Solução Detalhada



Portanto:

$$P\left\{-t_{n-1,\alpha/2} < \sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - \mu}{S_n} < t_{n-1,\alpha/2}\right\} = 1-\alpha$$

Rearranjando:

$$P\left\{\mu \in \left(\bar{X}_n \pm t_{n-1,\alpha/2}\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)\right\} = 1-\alpha$$

Intervalo de Confiança:

$$\boxed{IC_{1-\alpha}(\mu) = \left[\bar{X}_n \pm t_{n-1,\alpha/2}\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right]} \tag{48}$$

Este é o famoso **intervalo t de Student**, utilizado quando a variância populacional é desconhecida.

Observações

Diferenças entre Q5.6 e Q5.7:

- **Q5.6:** σ^2 conhecido $\Rightarrow$ usa distribuição $N(0,1)$ $\Rightarrow$ quantis $z_{\alpha/2}$
- **Q5.7:** σ^2 desconhecido $\Rightarrow$ usa distribuição t_{n-1} $\Rightarrow$ quantis $t_{n-1,\alpha/2}$

Quando n é grande, $t_{n-1} \approx N(0,1)$ e os intervalos ficam similares.

11 Exercícios Adicionais

11.1 Exercício: IC para a Variância

Exercício

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ com $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma^2 > 0$ ambos desconhecidos.
Mostre que:

$$IC_{1-\alpha}(\sigma^2) = \left[\frac{(n-1)S_n^2}{\chi^2_{n-1;\alpha/2}}, \frac{(n-1)S_n^2}{\chi^2_{n-1;1-\alpha/2}}\right] \tag{49}$$

é o IC bilateral para σ^2 com confiança de $1 - \alpha$.

Observações

Dica para resolução:
Use o fato de que:

$$\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

é um pivô, pois sua distribuição não depende de μ nem de σ^2.

12 Problema para Duas Amostras

12.1 Seção 5.3 - Extensão para Duas Amostras

Considere a dedução de IC pela abordagem pivotal. Para uma função paramétrica desconhecida $K(\theta)$, assuma que temos um estimador $\hat{K}(\theta)$ que é função de uma estatística suficiente (mínima) para $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^p$.

Observações

Contexto:
Muitos problemas práticos envolvem a comparação de dois grupos ou populações. Por exemplo:

- Comparar médias de dois tratamentos
- Comparar variâncias de dois processos
- Testar se $\mu_1 - \mu_2 = 0$

A construção de intervalos de confiança para diferenças ou razões de parâmetros segue os mesmos princípios, mas requer cuidado adicional na identificação do pivô apropriado.

13 Intervalos de Confiança para Duas Amostras

13.1 Abordagem Geral para Duas Amostras

Para uma função paramétrica diferenciável $K(\theta)$ para $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^p$, assuma que temos um estimador $\hat{K}(\hat{\theta})$ que é função de uma estatística suficiente (mínima) para θ.

Frequentemente, a distribuição de

$$U = \frac{\hat{K}(\theta) - K(\theta)}{\hat{\gamma}} \tag{50}$$

não dependerá de θ, $\forall \theta \in \Theta$, para algum $\gamma > 0$.

Se τ_Θ é conhecido, podem-se obter $a < b$ tais que

$$P_\Theta \left\{ a < \frac{\hat{K}(\Theta) - K(\Theta)}{\tau} < b \right\} = 1 - \alpha \tag{51}$$

Desta última identidade, obtém-se o intervalo de confiança $1 - \alpha$ para $K(\Theta)$.

Para τ_Θ desconhecido, estima-se $K(\Theta)$ por $\hat{K}(\Theta)$ e trabalha-se com

$$P_\Theta \left\{ a < \frac{\hat{K}(\Theta) - K(\Theta)}{\hat{\tau}} < b \right\} = 1 - \alpha \tag{52}$$

Desta relação, pode-se derivar o intervalo de confiança $1 - \alpha$ para $K(\Theta)$.

No parâmetro de escala, pode-se usar o pivô $\frac{\hat{K}(\Theta)}{K(\Theta)}$ cuja distribuição independe de $\Theta \in \Theta$.

Então, a e b tais que $a < b$ são obtidos de

$$P_\Theta \left\{ a < \frac{\hat{K}(\Theta)}{K(\Theta)} < b \right\} = 1 - \alpha \tag{53}$$

Desta identidade, obtém-se o intervalo com confiança de $1 - \alpha$ para $K(\theta)$.

13.2 Comparando Parâmetros de Localização

Aqui, vamos analisar a diferença de médias entre duas populações normais independentes.

Questão 5.16

Sejam $X_{i1}, \ldots, X_{in_i}$ para $i = 1, 2$ duas amostras aleatórias independentes de $X_i \sim N(\mu_i, \sigma^2)$, $X_1 \perp X_2$.
Vamos assumir que $\theta = (\mu_1, \mu_2, \sigma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ é desconhecido.
Encontre o intervalo bilateral com confiança $1 - \alpha$ para $K(\theta) = \mu_1 - \mu_2$.

Solução Detalhada

Pelo teorema (2.2), temos que

$$T_1 = \left[\sum_{i=1}^{n_1} X_{1i}, \; \sum_{i=1}^{n_2} X_{2i}, \; \sum_{i=1}^{n_1} X_{1i}^2 + \sum_{i=1}^{n_2} X_{2i}^2 \right] \tag{54}$$

é conjuntamente suficiente para $\theta = (\mu_1, \mu_2, \sigma)^T$.
Pelo Teorema (2.4),

$$T_3 = \left[\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} X_{1i},\ \frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2} X_{2i},\ \frac{1}{n_1+n_2-2}\left[\sum_{i=1}^{n_1}(X_{1i}-\bar{X}_1)^2 + \sum_{i=1}^{n_2}(X_{2i}-\bar{X}_2)^2\right]\right] \tag{55}$$

é também suficiente para θ. O termo $\hat{S}_p^2$ é chamado de variância amostral conjunta e pode ser descrito como:
Para

$$S_1^2 = (n_1-1)^{-1}\sum_{i=1}^{n_1}(X_{1i}-\bar{X}_1)^2$$

e

$$S_2^2 = (n_2-1)^{-1}\sum_{i=1}^{n_2}(X_{2i}-\bar{X}_2)^2$$

$$S_p^2 = (n_1+n_2-2)^{-1}\left[(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2\right] \tag{56}$$

Note que como $(n_1-1)\cdot\frac{S_1^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n_1-1}$ e $(n_2-1)\cdot\frac{S_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n_2-1}$, então

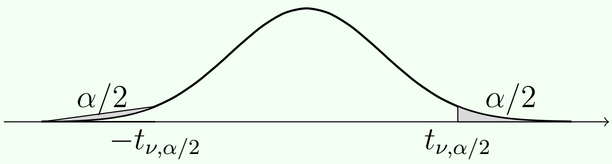
$$(n_1+n_2-2)\cdot\frac{S_p^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n_1+n_2-2} \tag{57}$$

Daí note que

$$U = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - (\mu_1-\mu_2)}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - (\mu_1-\mu_2)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \cdot \sqrt{\frac{n_1+n_2-2}{n_1+n_2-2}\cdot\frac{S_p^2}{\sigma^2}} \sim t_{n_1+n_2-2} \tag{58}$$

Para $\nu = n_1+n_2-2$ e $t_{\nu,\alpha/2}$ tal que

$$P(U > t_{\nu,\alpha/2}) = \frac{\alpha}{2} \tag{59}$$



$$P\{-t_{\nu,\alpha/2} < U < t_{\nu,\alpha/2}\} = 1-\alpha \tag{60}$$

$$P\left\{-t_{\nu,\alpha/2} < \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - (\mu_1-\mu_2)}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} < t_{\nu,\alpha/2}\right\} = 1-\alpha \tag{61}$$

$$\therefore P\left\{\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - t_{\nu,\alpha/2}\cdot S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}} < \mu_1-\mu_2 < \overline{X}_1 - \overline{X}_2 + t_{\nu,\alpha/2}\cdot S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right\} = 1-\alpha \tag{62}$$

Isto é

$$\boxed{IC_{1-\alpha}(\mu_1 - \mu_2) = \left[\overline{X}_1 - \overline{X}_2 \pm t_{\nu,\alpha/2} \cdot S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\right]} \tag{63}$$

13.3 Comparação de Escala

Vamos considerar um problema sobre variâncias (escalas) em distribuição normal.

Questão 5.11

Sejam $X_{i1}, \ldots, X_{in_i}$ uma amostra de $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ para $n_i \geq 2$ e $i = 1, 2$. Assuma que $X_1 \perp X_2$ e

$$\theta = (\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$$

é desconhecido.
Encontre o intervalo bilateral com confiança $1 - \alpha$ para

$$K(\theta) = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}.$$

Solução Detalhada

Pode-se mostrar (fica como exercício) que

$$\bar{X}_1 = n_1^{-1} \sum_{i=1}^{n_1} X_{1i}, \quad \bar{X}_2 = n_2^{-1} \sum_{i=1}^{n_2} X_{2i}, \quad S_1^2 = \frac{1}{n_1 - 1} \sum_{i=1}^{n_1} (X_{1i} - \bar{X}_1)^2 \tag{64}$$

e

$$S_2^2 = \frac{1}{n_2 - 1} \sum_{i=1}^{n_2} (X_{2i} - \bar{X}_2)^2 \tag{65}$$

são suficientes para $\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2$.
Note que (por definição da distribuição F - cenário i.c.):

$$U = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F_{n_1-1, n_2-1}. \tag{66}$$

Uma vez que

$$(n_1 - 1)\frac{S_1^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2_{n_1-1} \quad \text{e} \quad (n_2 - 1)\frac{S_2^2}{\sigma_2^2} \sim \chi^2_{n_2-1} \tag{67}$$

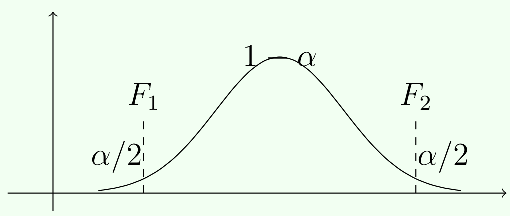
são independentes.
Logo U é uma quantidade pivotal. Sejam

$$F_{n_1-1, n_2-1, 1-\alpha/2} > 0 \quad \text{e} \quad F_{n_1-1, n_2-1, \alpha/2}$$

tais que

$$P(U < F_1) = \frac{\alpha}{2} \tag{68}$$

$$P(U > F_2) = \frac{\alpha}{2} \tag{69}$$



Daí:

$$P_\theta\{F_1 < U < F_2\} = 1 - \alpha \tag{70}$$

$$P_\theta\left\{F_1 \frac{S_2^2}{S_1^2} < \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} < F_2 \frac{S_2^2}{S_1^2}\right\} = 1 - \alpha \tag{71}$$

$$P_\theta\left\{F_2^{-1} \frac{S_1^2}{S_2^2} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < F_1^{-1} \frac{S_1^2}{S_2^2}\right\} = 1 - \alpha \tag{72}$$

$$\boxed{IC_{1-\alpha}\left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\right) = \left(F_2^{-1} \frac{S_1^2}{S_2^2},\ F_1^{-1} \frac{S_1^2}{S_2^2}\right)} \tag{73}$$

Resumo do Capítulo

Conceitos Fundamentais

1. **Intervalo de Confiança:** Intervalo aleatório $[T_L(X), T_U(X)]$ que contém o verdadeiro parâmetro θ com probabilidade pelo menos $1 - \alpha$.
2. **Coeficiente de Confiança:** $\inf_{\theta \in \Theta} P_\theta[\theta \in IC]$
3. **Interpretação Correta:** Em $1 - \alpha$ das amostras, o intervalo conterá o verdadeiro valor de θ.

Métodos de Construção

1. **Inversão de Testes de Hipóteses:**
   - Baseado na dualidade teste-IC
   - $IC = \{\theta_0 : \text{não rejeita } H_0 : \theta = \theta_0\}$
   - Útil quando teste UMP está disponível
2. **Método Pivotal:**
   - Encontrar quantidade $U(X, \theta)$ com distribuição conhecida
   - Inverter para obter limites do IC
   - Geralmente mais direto e intuitivo

Casos Importantes Cobertos

Distribuição	Parâmetro	Conhecido	Pivô/Estatística
$N(\mu, \sigma^2)$	μ	σ^2	$Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$
$N(\mu, \sigma^2)$	μ	—	$T = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$
$N(\mu, \sigma^2)$	σ^2	—	$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$
$\text{Exp}(\theta)$	θ	—	$U = \bar{X}/\theta$
$U(0, \theta)$	θ	—	$U = X_{(n)}/\theta$

Tipos de Intervalos

- **Bilateral:** $IC = [L, U]$ onde $P_\theta[\theta < L] = P_\theta[\theta > U] = \alpha/2$
- **Unilateral Inferior:** $IC = [L, +\infty)$
- **Unilateral Superior:** $IC = (-\infty, U]$

Fim das Notas do Capítulo 5