Demonstrações dos Teoremas - Unidade 4

Testes de Hipóteses

Todas as Provas Apresentadas em Aula

Curso de Inferência Estatística

Outubro 2025

Sumário

1 Introdução

Este documento contém todas as demonstrações de teoremas apresentadas nas aulas da Unidade 4. O objetivo é fornecer um material de estudo organizado para preparação para as avaliações, onde demonstrações são frequentemente cobradas.

Ao final do documento, apresentamos um **ranking de prioridade** das demonstrações mais importantes para estudo, considerando complexidade técnica, importância fundamental e aplicabilidade em questões.

2 Lema de Neyman-Pearson

Lema 2.1 (Neyman-Pearson). *Seja* $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^T$ *uma amostra aleatória de* X *com fdp (ou fmp)* $f(x;\theta)$ *para* $x \in \mathbb{R}^n$, $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$. *Desejamos testar*

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad vs. \quad H_1 : \theta = \theta_1,$$

onde $\theta_0, \theta_1 \in \Theta$ *e* $\theta_0 \neq \theta_1$.

Seja $\psi_\gamma(x^n)$ *uma função crítica que satisfaz:*

1. *Para* $k \geq 0$,
$$\psi_\gamma(x^n) = \begin{cases} 1, & se\ L(\theta_1, x^n) > kL(\theta_0, x^n) \\ 0, & se\ L(\theta_1, x^n) < kL(\theta_0, x^n) \end{cases}$$

2. *O parâmetro* k *é determinado por*
$$E_{\theta_0}[\psi_\gamma(x^n)] = \alpha$$

Então, qualquer teste que satisfaz (1) e (2) é um teste ***mais poderoso (MP)*** *de nível* α.

Demonstração (caso contínuo). Note que qualquer teste γ que satisfaz (2) tem tamanho α e, portanto, nível α. Seja γ^* um teste com função de teste $\psi_{\gamma^*}(x^n)$ e nível α. Sejam $Q_\gamma(\theta)$ e $Q_{\gamma^*}(\theta)$ as funções poder de γ e γ^*, respectivamente.

Vamos primeiramente verificar que

$$[\psi_\gamma(x^n) - \psi_{\gamma^*}(x^n)]\,[L(\theta_1, x^n) - kL(\theta_0, x^n)] \geq 0 \tag{1}$$

para todo $x \in \mathcal{X}^n$.

Note que:

- (i) Se $\psi_\gamma(x^n) = 1$, então $L(\theta_1, x^n) - kL(\theta_0, x^n) > 0$ pela definição de ψ_γ.

  Como $\psi_{\gamma^*}(x^n) \in [0, 1]$, temos:
$$[1 - \psi_{\gamma^*}(x^n)]\,[L(\theta_1, x^n) - kL(\theta_0, x^n)] \geq 0$$

- (ii) Se $\psi_\gamma(x^n) = 0$, então $L(\theta_1, x^n) - kL(\theta_0, x^n) < 0$.

  Como $\psi_{\gamma^*}(x^n) \geq 0$, temos:
$$[0 - \psi_{\gamma^*}(x^n)]\,[L(\theta_1, x^n) - kL(\theta_0, x^n)] \geq 0$$

- (iii) Se $\psi_\gamma(x^n) \in (0,1)$ (teste aleatorizado na fronteira), então $L(\theta_1, x^n) = kL(\theta_0, x^n)$ e a expressão é zero.

Portanto, a desigualdade (3) é válida.
Agora, integrando ambos os lados de (3) sobre $\mathcal{X}^n$:

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \int_{\mathcal{X}^n} \left[\psi_\gamma(x^n) - \psi_{\gamma^*}(x^n)\right]\left[L(\theta_1, x^n) - kL(\theta_0, x^n)\right] dx^n && (2)\\
&= \int_{\mathcal{X}^n} \psi_\gamma(x^n) L(\theta_1, x^n) dx^n - \int_{\mathcal{X}^n} \psi_{\gamma^*}(x^n) L(\theta_1, x^n) dx^n && (3)\\
&\quad - k\left[\int_{\mathcal{X}^n} \psi_\gamma(x^n) L(\theta_0, x^n) dx^n - \int_{\mathcal{X}^n} \psi_{\gamma^*}(x^n) L(\theta_0, x^n) dx^n\right] && (4)\\
&= Q_\gamma(\theta_1) - Q_{\gamma^*}(\theta_1) - k\left[Q_\gamma(\theta_0) - Q_{\gamma^*}(\theta_0)\right] && (5)
\end{aligned}
$$

Como ambos os testes têm nível α, temos:

$$Q_\gamma(\theta_0) = E_{\theta_0}[\psi_\gamma(x^n)] = \alpha$$

$$Q_{\gamma^*}(\theta_0) = E_{\theta_0}[\psi_{\gamma^*}(x^n)] = \alpha$$

Portanto:

$$Q_\gamma(\theta_0) - Q_{\gamma^*}(\theta_0) = 0$$

Da desigualdade obtida:

$$Q_\gamma(\theta_1) - Q_{\gamma^*}(\theta_1) \geq 0$$

Ou seja, $Q_\gamma(\theta_1) \geq Q_{\gamma^*}(\theta_1)$. Como γ^* era um teste arbitrário de nível α, o teste γ é MP de nível α. □

Observação 2.2 (Pontos-chave da demonstração).

1. A ideia central é usar a desigualdade (3) que conecta a diferença entre funções críticas com a diferença entre verossimilhanças.
2. A constante k garante que ambos os testes têm o mesmo tamanho α sob H_0.
3. O LNP garante que, para hipóteses simples, o teste baseado na razão de verossimilhanças é sempre MP.
4. No caso discreto, pode ser necessário usar um teste aleatorizado na fronteira para atingir exatamente o nível α.

Observação 2.3 (Aplicações Importantes). O LNP é aplicado para construir testes MP quando:

- Ambas as hipóteses são simples ($H_0 : \theta = \theta_0$ vs. $H_1 : \theta = \theta_1$)
- Pode ser usado como passo intermediário na construção de testes UMP via RVM
- Permite identificar a estatística suficiente que deve ser usada na região crítica

3 Teorema de Karlin-Rubin

Antes de enunciar o teorema, precisamos da definição de Razão de Verossimilhança Monótona (RVM).

Definição 3.1 (Família com Razão de Verossimilhança Monótona)**.** Uma família de densidades (ou funções de probabilidade) $\{f(x;\theta) : \theta \in \Theta\}$ tem **razão de verossimilhança monótona não decrescente (RVM)** em uma estatística $T(x)$ se, para $\theta_1 > \theta_0$, a razão

$$\frac{f(x;\theta_1)}{f(x;\theta_0)}$$

é uma função não decrescente de $T(x)$.

Teorema 3.2 (Karlin-Rubin)**.** *Seja $\{f(x;\theta) : \theta \in \Theta\}$ uma família de densidades com RVM não decrescente em $T(x)$.*

Para testar

$$H_0 : \theta \le \theta_0 \quad vs. \quad H_1 : \theta > \theta_0,$$

o teste ψ com função crítica

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & se\ T(x) > u \\ \delta, & se\ T(x) = u \\ 0, & se\ T(x) < u \end{cases}$$

onde u e $\delta \in [0,1]$ são escolhidos tais que $E_{\theta_0}[\psi(X)] = \alpha$, é ***uniformemente mais poderoso (UMP)*** *de nível α.*

Demonstração. Seja Y o teste definido em (1) com poder

$$Q_Y(\theta) = P_\theta(\text{Rejeitar } H_0)$$

e $Q_Y(\theta_0) = \alpha$.

Sem perda de generalidade, seja $\theta_1 > \theta_0$. Pelo Lema de Neyman-Pearson, o teste MP para

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \theta = \theta_1$$

é baseado na razão entre verossimilhanças (RV) e, então, rejeita-se H_0 se, e só se,

$$\frac{L(x;\theta_1)}{L(x;\theta_0)} > u' \tag{6}$$

para alguma constante u'.

Como a família tem RVM não decrescente em $T(x)$, existe uma função g não decrescente tal que:

$$\frac{L(x;\theta_1)}{L(x;\theta_0)} = g(T(x);\theta_1,\theta_0)$$

onde $g(\cdot;\theta_1,\theta_0)$ é não decrescente. Portanto, (4) é equivalente a

$$T(x) > c$$

para alguma constante c (que pode depender de u', mas não de θ_1 específico).

Ou seja, o teste MP para $H_0 : \theta = \theta_0$ vs. $H_1 : \theta = \theta_1$ é da forma $\{T(x) > c\}$ e, como esta forma não depende de θ_1 (apenas da direção $\theta_1 > \theta_0$), o teste é UMP para $H_0 : \theta \leq \theta_0$ vs. $H_1 : \theta > \theta_0$.

Para completar a prova, deve-se mostrar que Y é UMP não apenas na classe C satisfazendo $Q_Y(\theta_0) \leq \alpha$, mas na classe C^* satisfazendo $\sup_{\theta \in \Theta_0} Q_Y(\theta) \leq \alpha$.

Pode-se mostrar que $C^* \subset C$, e pela monotonicidade de $Q_Y(\theta)$ (que decorre da RVM), temos que $\forall \theta \in C^*$:

$$Q_Y(\theta) \leq Q_Y(\theta_0) \leq \alpha \tag{7}$$

Portanto, o teste Y tem nível α e é UMP dentro de C^*. □

Observação 3.3 (Propriedade de Monotonicidade do Poder). Sob as condições do Teorema de Karlin-Rubin, a função poder $Q_Y(\theta)$ é não decrescente para $\theta > \theta_0$. Isto decorre da estrutura da região crítica e da propriedade RVM.

Observação 3.4 (Importância Prática). O Teorema de Karlin-Rubin permite:

- Construir testes UMP para hipóteses unilaterais quando a família tem RVM
- Identificar a estatística suficiente $T(x)$ que deve ser usada na região crítica
- Estender resultados de testes simples vs. simples para testes compostos unilaterais

4 Construção de Testes MP/UMP para Famílias Clássicas

4.1 Teste MP para Normal (Média, Variância Conhecida)

Teorema 4.1 (Teste MP para Normal). *Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ com σ^2 conhecido. Para testar*

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad vs. \quad H_1 : \mu = \mu_1 \quad (\mu_1 > \mu_0),$$

o teste MP de nível α rejeita H_0 se, e só se,

$$\bar{X}_n > \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_\alpha$$

ou equivalentemente, se

$$Z = \sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sigma} > z_\alpha$$

Demonstração. Como as hipóteses são simples, o Lema de Neyman-Pearson se aplica. A verossimilhança é:

$$L(\mu; x) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2\right\}$$

A razão de verossimilhanças é:

$$\frac{L(\mu_1; x)}{L(\mu_0; x)} = \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_1)^2 - \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2\right]\right\} \tag{8}$$

$$= \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[-2\mu_1\sum_{i=1}^{n}x_i + n\mu_1^2 + 2\mu_0\sum_{i=1}^{n}x_i - n\mu_0^2\right]\right\} \tag{9}$$

$$= \exp\left\{\frac{(\mu_1-\mu_0)}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}x_i - \frac{n(\mu_1^2-\mu_0^2)}{2\sigma^2}\right\} \tag{10}$$

Como $\mu_1 > \mu_0$, a razão $\frac{L(\mu_1;x)}{L(\mu_0;x)} > k$ é equivalente a

$$\sum_{i=1}^{n} x_i > k_1$$

para alguma constante k_1.

Ou, equivalentemente:

$$\bar{X}_n > c$$

para alguma constante c.

Como $\bar{X}_n \sim N(\mu, \sigma^2/n)$ sob H_0, temos:

$$P_{\mu_0}(\bar{X}_n > c) = P\left(\frac{\bar{X}_n-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{c-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = \alpha$$

Portanto:

$$\frac{c-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = z_\alpha$$

$$c = \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_\alpha$$

O teste MP rejeita H_0 se $\bar{X}_n > \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_\alpha$. □

Observação 4.2 (Extensão para UMP). Como a família Normal tem RVM não decrescente em $\bar{X}_n$ (pode ser verificado diretamente), pelo Teorema de Karlin-Rubin, o teste acima é UMP para $H_0 : \mu \leq \mu_0$ vs. $H_1 : \mu > \mu_0$.

4.2 Teste MP para Exponencial

Teorema 4.3 (Teste MP para Exponencial via χ^2)**.** *Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de $X_i \sim Exp(\theta)$ (com parâmetro de escala θ). Para testar*

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad vs. \quad H_1 : \theta = \theta_1 \quad (\theta_1 \neq \theta_0),$$

o teste MP de nível α é baseado na estatística $\sum_{i=1}^{n} X_i$.

Especificamente, para $H_1 : \theta > \theta_0$, o teste rejeita H_0 se

$$\frac{2}{\theta_0}\sum_{i=1}^{n} X_i > \chi^2_{2n,\alpha}$$

onde $\chi^2_{2n,\alpha}$ é o quantil α da distribuição qui-quadrado com $2n$ graus de liberdade.

Demonstração. A verossimilhança é:

$$L(\theta; x) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta} e^{-x_i/\theta} = \theta^{-n} \exp\left\{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i\right\}$$

A razão de verossimilhanças é:

$$\frac{L(\theta_1; x)}{L(\theta_0; x)} = \left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^n \exp\left\{-\sum_{i=1}^{n} x_i \left(\frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_0}\right)\right\} \tag{11}$$

Para $\theta_1 > \theta_0$, temos $\frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_0} < 0$, então a razão é crescente em $\sum_{i=1}^{n} x_i$.
Portanto, o teste MP rejeita H_0 se $\sum_{i=1}^{n} X_i > k$ para alguma constante k.
Para obter uma estatística com distribuição conhecida sob H_0, note que:

- Se $X_i \sim \text{Exp}(\theta)$, então $\dot{X}_i = X_i/\theta \sim \text{Exp}(1)$ (exponencial padrão).
- Se $\dot{X}_i \sim \text{Exp}(1)$, então $Y_i = 2\dot{X}_i = 2X_i/\theta \sim \chi^2_2$ (qui-quadrado com 2 graus de liberdade).

Portanto, sob H_0:

$$\frac{2}{\theta_0}\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{2X_i}{\theta_0} = \sum_{i=1}^{n} Y_i \sim \chi^2_{2n}$$

O teste MP rejeita H_0 se $\frac{2}{\theta_0}\sum_{i=1}^{n} X_i > \chi^2_{2n,\alpha}$. □

4.3 Teste MP para Poisson

Teorema 4.4 (Teste MP para Poisson)**.** *Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de $X_i \sim Poisson(\lambda)$. Para testar*

$$H_0 : \lambda = \lambda_0 \quad vs. \quad H_1 : \lambda = \lambda_1 \quad (\lambda_1 > \lambda_0),$$

o teste MP de nível α rejeita H_0 se $T = \sum_{i=1}^{n} X_i > k_1$, onde k_1 é determinado por

$$P_{\lambda_0}(T > k_1) \leq \alpha \quad e \quad P_{\lambda_0}(T \geq k_1) > \alpha$$

Se necessário, usa-se aleatorização na fronteira $T = k_1$ para atingir exatamente o nível α.

Demonstração. A verossimilhança é:

$$L(\lambda; x) = \prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x_i}}{x_i!} = \frac{e^{-n\lambda}\lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!}$$

A razão de verossimilhanças é:

$$\frac{L(\lambda_1; x)}{L(\lambda_0; x)} = \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right)^n \cdot \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)^{\sum_{i=1}^{n} x_i} \tag{12}$$

$$= \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)^{\sum_{i=1}^{n} x_i - n(\lambda_1 - \lambda_0)} \tag{13}$$

Como $\lambda_1 > \lambda_0$, a razão é crescente em $\sum_{i=1}^{n} x_i$. Portanto, o teste MP rejeita H_0 se $T = \sum_{i=1}^{n} X_i > k_1$.

Sob H_0, $T \sim \text{Poisson}(n\lambda_0)$. O limiar k_1 é determinado de forma que $P_{\lambda_0}(T > k_1) \leq \alpha$. Como a distribuição é discreta, pode ser necessário usar aleatorização para atingir exatamente α. □

4.4 Teste MP para Bernoulli

Teorema 4.5 (Teste MP para Bernoulli)**.** *Sejam* $X_1, \ldots, X_n$ *uma amostra aleatória de* $X_i \sim$ *Bernoulli*(p)*. Para testar*

$$H_0 : p = p_0 \quad vs. \quad H_1 : p = p_1 \quad (p_1 > p_0),$$

o teste MP de nível α *rejeita* H_0 *se* $T = \sum_{i=1}^n X_i > k_1$*, onde* k_1 *é determinado por*

$$P_{p_0}(T > k_1) \leq \alpha \quad e \quad P_{p_0}(T \geq k_1) > \alpha$$

com aleatorização na fronteira se necessário.

Demonstração. A verossimilhança é:

$$L(p; x) = \prod_{i=1}^n p^{x_i}(1-p)^{1-x_i} = p^{\sum_{i=1}^n x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^n x_i}$$

A razão de verossimilhanças é:

$$\frac{L(p_1; x)}{L(p_0; x)} = \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\sum_{i=1}^n x_i} \left(\frac{1-p_1}{1-p_0}\right)^{n-\sum_{i=1}^n x_i} \tag{14}$$

$$= \left[\frac{(1-p_0)p_1}{p_0(1-p_1)}\right]^{\sum_{i=1}^n x_i} \left[\frac{1-p_1}{1-p_0}\right]^n \tag{15}$$

Como $p_1 > p_0$, temos $\frac{p_1}{p_0} > 1$ e $\frac{1-p_1}{1-p_0} < 1$, mas o produto $\frac{(1-p_0)p_1}{p_0(1-p_1)} > 1$, então a razão é crescente em $\sum_{i=1}^n x_i$.

Portanto, o teste MP rejeita H_0 se $T = \sum_{i=1}^n X_i > k_1$. Sob H_0, $T \sim \text{Binomial}(n, p_0)$, então k_1 é determinado conforme descrito. □

5 Teste UMP para Distribuição Uniforme

Teorema 5.1 (Teste UMP para Uniforme)**.** *Sejam* $X_1, \ldots, X_n$ *uma amostra aleatória de* $X_i \sim U(0, \theta)$ *com* θ *desconhecido. Considere testar*

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad vs. \quad H_1 : \theta > \theta_0,$$

onde $\theta_0 > 0$ *é fixado.*

O teste Y^* *com função crítica*

$$\psi_{Y^*}(x) = \begin{cases} 1, & se\ T(x) \geq \theta_0\ ou\ T(x) \leq \theta_0 \alpha^{1/n} \\ 0, & caso\ contrário \end{cases}$$

onde $T(x) = X_{(n)} = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$*, é um teste UMP de nível* α*.*

Demonstração. Primeiro, note que $T(X) = X_{(n)}$ é suficiente para θ e tem densidade:

$$f(t; \theta) = n \cdot t^{n-1} \cdot \theta^{-n} \cdot \mathbb{I}_{(0,\theta)}(t)$$

Para mostrar que o teste tem nível α, calculamos:

$$E_{\theta_0}[\psi_{Y^*}(X)] = P_{\theta_0}(T(X) \geq \theta_0) + P_{\theta_0}\left(T(X) \leq \theta_0 \alpha^{1/n}\right)$$

Como $P_{\theta_0}(T(X) > \theta_0) = 0$ (pois $T \leq \theta_0$ com probabilidade 1 sob H_0), temos:

$$\begin{aligned}
E_{\theta_0}[\psi_{Y^*}(X)] &= P_{\theta_0}\left(T(X) \leq \theta_0 \alpha^{1/n}\right) && (16)\\
&= \int_0^{\theta_0 \alpha^{1/n}} n t^{n-1} \theta_0^{-n}\, dt && (17)\\
&= \frac{n}{\theta_0^n}\left[\frac{t^n}{n}\right]_0^{\theta_0 \alpha^{1/n}} && (18)\\
&= \frac{1}{\theta_0^n}(\theta_0 \alpha^{1/n})^n = \alpha && (19)
\end{aligned}$$

Para mostrar que é UMP, verifica-se que a família tem RVM não decrescente em $T(x)$. Para $\theta_1 > \theta_0$:

$$\frac{f(t;\theta_1)}{f(t;\theta_0)} = \left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^n \cdot \frac{\mathbb{I}_{(0,\theta_1)}(t)}{\mathbb{I}_{(0,\theta_0)}(t)}$$

Para $t < \theta_0$, ambas as funções indicadoras são 1, então a razão é constante $(\theta_0/\theta_1)^n < 1$.
Para $t \in [\theta_0, \theta_1)$, a razão é ∞ (ou não definida na fronteira).
Para $t \geq \theta_1$, a razão é $0/0$ ou $0/1$.
Pode-se mostrar que a razão é não decrescente em t no sentido apropriado. Pelo Teorema de Karlin-Rubin, o teste é UMP. □

Observação 5.2 (Características Especiais). A distribuição uniforme apresenta particularidades:

- O suporte depende do parâmetro, o que requer cuidado na verificação de RVM
- A estatística máxima $X_{(n)}$ é suficiente e tem distribuição conhecida
- O teste UMP rejeita tanto para valores muito grandes quanto para valores muito pequenos de $T(X)$ relativos a θ_0

6 Função Poder e Propriedades

Definição 6.1 (Função Poder)**.** Para um teste ψ com função crítica $\psi(x)$, a **função poder** é definida por

$$Q_\psi(\theta) = E_\theta[\psi(X)] = P_\theta(\text{Rejeitar } H_0), \quad \theta \in \Theta$$

Observação 6.2 (Propriedades da Função Poder).

1. Para $\theta \in \Theta_0$ (hipótese nula), $Q_\psi(\theta)$ é a probabilidade de erro tipo I.
2. Para $\theta \in \Theta_1$ (hipótese alternativa), $1 - Q_\psi(\theta)$ é a probabilidade de erro tipo II (β).
3. O tamanho do teste é $\sup_{\theta \in \Theta_0} Q_\psi(\theta)$.
4. Para testes unilaterais com RVM, a função poder é monotônica.

6.1 Exemplo: Função Poder para Teste Z

Teorema 6.3 (Função Poder do Teste Z)**.** *Sejam* $X_1, \ldots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$ *com* σ^2 *conhecido. Para o teste* $H_0 : \mu = \mu_0$ *vs.* $H_1 : \mu > \mu_0$ *que rejeita* H_0 *se* $\bar{X}_n > \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_\alpha$*, a função poder é*

$$Q(\mu) = 1 - \Phi\left(z_\alpha - \frac{\sqrt{n}(\mu - \mu_0)}{\sigma}\right)$$

Demonstração. Temos:

$$\begin{aligned}
Q(\mu) &= P_\mu\left(\bar{X}_n > \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_\alpha\right) && (20) \\
&= P_\mu\left(\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{\mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_\alpha - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) && (21) \\
&= P\left(Z > \frac{\mu_0 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} + z_\alpha\right) && (22) \\
&= P\left(Z > z_\alpha - \frac{\sqrt{n}(\mu - \mu_0)}{\sigma}\right) && (23) \\
&= 1 - \Phi\left(z_\alpha - \frac{\sqrt{n}(\mu - \mu_0)}{\sigma}\right) && (24)
\end{aligned}$$

onde $Z \sim N(0, 1)$. □

Observação 6.4 (Comportamento da Função Poder).

- $Q(\mu_0) = 1 - \Phi(z_\alpha) = \alpha$ (tamanho do teste)
- $Q(\mu)$ é crescente em μ para $\mu > \mu_0$
- Quando $\mu \to \infty$, $Q(\mu) \to 1$
- O poder aumenta com n (tamanho da amostra) e diminui com σ

7 Ranking de Prioridade das Demonstrações

Esta seção apresenta um ranking das demonstrações mais importantes para estudo, considerando três critérios com pesos diferentes:

- **Complexidade Técnica** (30%): Dificuldade matemática e número de passos
- **Importância Fundamental** (40%): Base para outros resultados e centralidade no curso
- **Aplicabilidade em Questões** (30%): Frequência de uso em exercícios e exames

7.1 Tabela de Avaliação

Teorema	**Compl.** (0-10)	**Import.** (0-10)	**Aplic.** (0-10)	**Nota Final** (ponderada)
Lema de Neyman-Pearson	7.0	10	9.5	**8.85**
Teorema de Karlin-Rubin	8.5	9.5	9.0	**8.95**
Teste MP para Normal	5.0	8.5	9.0	**7.75**
Teste MP para Exponencial	6.0	7.5	7.5	**7.05**
Teste UMP para Uniforme	7.5	7.0	6.5	**6.95**
Função Poder (Z-test)	4.0	7.0	8.0	**6.60**
Teste MP para Poisson	5.5	7.0	7.0	**6.55**
Teste MP para Bernoulli	5.0	7.0	7.0	**6.40**

Tabela 1: Avaliação e ranking dos teoremas

7.2 Ranking Final: Top 5 Demonstrações

7.2.1 1º Lugar: Teorema de Karlin-Rubin (Nota: 8.95)

Por que estudar em detalhes:

- É o teorema que permite construir testes UMP para hipóteses compostas unilaterais
- Demonstração técnica que combina LNP com propriedade de RVM
- Praticamente garantido ser cobrado em avaliações
- Base para toda construção de testes UMP em famílias clássicas
- A prova da monotonicidade é sutil e importante

Dica de estudo: Entenda bem a definição de RVM e como ela conecta com a estrutura do teste ótimo. Veja como o LNP é usado como passo intermediário.

7.2.2 2º Lugar: Lema de Neyman-Pearson (Nota: 8.85)

Por que estudar em detalhes:

- É o resultado fundamental para testes com hipóteses simples
- A prova usa uma técnica elegante com desigualdades
- Fundamento para o Teorema de Karlin-Rubin
- Frequentemente aplicado diretamente em questões
- Mostra como a razão de verossimilhanças aparece naturalmente

Dica de estudo: Foque na desigualdade chave (3) na demonstração e entenda por que ela funciona. Veja como a constante k garante o nível α.

7.2.3 3º Lugar: Teste MP para Normal (Nota: 7.75)

Por que estudar em detalhes:

- Aplicação direta e prática do LNP
- Mostra como transformar razão de verossimilhanças em estatística padronizada
- Frequente em questões práticas
- Base para extensão via Karlin-Rubin para UMP
- Demonstração relativamente acessível mas importante

Dica de estudo: Veja como a manipulação algébrica leva naturalmente ao teste Z. Entenda a conexão com distribuições conhecidas.

7.2.4 4º Lugar: Teste MP para Exponencial (Nota: 7.05)

Por que estudar em detalhes:

- Aplicação importante do LNP
- Mostra técnicas de transformação de variáveis (χ^2)
- Combina propriedades de distribuições conhecidas
- Útil para questões que envolvem testes para parâmetros de escala

Dica de estudo: Foque na transformação $2X/\theta \sim \chi^2_2$ e como isso permite usar tabelas conhecidas.

7.2.5 5º Lugar: Teste UMP para Uniforme (Nota: 6.95)

Por que estudar em detalhes:

- Demonstração mais técnica entre as aplicações
- Mostra particularidades de famílias com suporte dependente do parâmetro
- Exemplo interessante de como RVM funciona em casos especiais
- Útil para entender limitações e generalizações

Dica de estudo: Entenda por que o teste rejeita tanto para valores grandes quanto pequenos. Veja como a distribuição de $X_{(n)}$ é calculada.

7.3 Estratégia de Estudo Recomendada

1. **Primeira semana:** Estude profundamente o Lema de Neyman-Pearson (2º lugar) e o Teorema de Karlin-Rubin (1º lugar). Esses são os fundamentos teóricos.
2. **Segunda semana:** Aplique os teoremas para construir testes MP/UMP:
   - Teste MP para Normal (3º lugar)
   - Teste MP para Exponencial (4º lugar)
   - Teste MP para Poisson e Bernoulli
3. **Terceira semana:** Estude casos especiais:
   - Teste UMP para Uniforme (5º lugar)
   - Função poder e seus cálculos
   - Propriedades de monotonicidade
4. **Revisão:** Compare as técnicas comuns:
   - Como identificar a estatística suficiente via LNP
   - Como verificar RVM em diferentes famílias
   - Quando usar testes aleatorizados
5. **Prática:** Resolva exercícios aplicando cada teorema:
   - Questões que pedem construção de teste MP usando LNP
   - Questões que pedem verificação de RVM e aplicação de Karlin-Rubin
   - Questões que pedem cálculo de função poder

7.4 Observações Finais

- O LNP e Karlin-Rubin são os "pilares teóricos- domine-os e as aplicações ficam mais claras
- As demonstrações de construção de testes MP mostram um padrão comum:
  1. Calcular razão de verossimilhanças
  2. Identificar estatística suficiente na qual a razão depende monotonicamente
  3. Determinar limiar pela distribuição sob H_0
- Entender *por que* cada teorema é verdadeiro é tão importante quanto saber aplicar
- Em avaliações, provas de LNP e Karlin-Rubin geralmente valem mais pontos
- Os exemplos específicos (Normal, Poisson, etc.) são importantes para fixar as técnicas
- A função poder conecta teoria com prática - saber calculá-la é essencial
- Testes aleatorizados aparecem em distribuições discretas - não os ignore
- A verificação de RVM é uma técnica útil que deve ser dominada