

Lista de Exercícios - Unidade 4

Testes de Hipóteses
50 Questões Completas

Curso de Inferência Estatística

Outubro 2025 - Versão Atualizada

Sumário

1	Introdução	2
2	Teste Z (Normal com σ^2 conhecido)	2
3	Teste t (Normal com σ^2 desconhecido)	3
4	Testes de Proporções	4
5	Testes para Poisson	5
6	Testes para Exponencial	6
7	Lema de Neyman–Pearson (LNP)	7
8	Função Poder e Curvas de Poder	8
9	RVM e Teorema de Karlin–Rubin	9
10	Testes χ^2	11
11	Valor-p e Interpretação	12
12	Dicas Gerais de Resolução	13
	12.1 Dicas por Tipo de Teste	13
	12.2 Dicas Gerais	13
13	Respostas Seleccionadas	14
14	Gabarito e Dicas - Parte 2	15
	14.1 Dicas Adicionais	15
	14.2 Respostas Seleccionadas - Parte 2	16

1 Introdução

Esta lista contém 50 questões organizadas por tópico, com 5 questões para cada um dos principais temas da Unidade 4. Cada questão indica explicitamente qual teste ou teorema está sendo aplicado e utiliza diversas distribuições estudadas no curso.

Distribuições utilizadas: Normal, Poisson, Uniforme, Exponencial, Chi-quadrado, Bernoulli, Gamma e Beta.

Tópicos cobertos:

1. Teste Z (Normal com σ^2 conhecido)
2. Teste t (Normal com σ^2 desconhecido)
3. Testes de Proporções
4. Testes para Poisson
5. Testes para Exponencial
6. Lema de Neyman–Pearson (LNP)
7. Função Poder e Curvas de Poder
8. RVM e Teorema de Karlin–Rubin
9. Testes χ^2
10. Valor-p e Interpretação

2 Teste Z (Normal com σ^2 conhecido)

[Questão 1] Teste Z Bilateral

Sejam X_1, X_2, \dots, X_n v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ onde $\sigma^2 = 4$ é conhecido. Deseja-se testar $H_0 : \mu = 10$ vs $H_1 : \mu \neq 10$ ao nível de significância $\alpha = 0.05$.

- (a) Construa a estatística de teste $Z = \frac{\bar{X}_n - 10}{\sigma/\sqrt{n}}$ e determine a região crítica.
- (b) Para uma amostra de tamanho $n = 25$ com $\bar{x} = 11.2$, realize o teste e tome uma decisão.
- (c) Calcule o valor-p para esta amostra e interprete o resultado.

[Questão 2] Teste Z Unilateral Direito

Sejam X_1, X_2, \dots, X_n v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim N(\mu, 9)$ onde μ é desconhecido. Deseja-se testar $H_0 : \mu \leq 5$ vs $H_1 : \mu > 5$ ao nível $\alpha = 0.01$.

- (a) Encontre a região crítica do teste em termos de \bar{X}_n para $n = 36$.
- (b) Se $\bar{x} = 6.5$, realize o teste e interprete.
- (c) Calcule a probabilidade de erro tipo II quando $\mu = 7$, isto é, $\beta(7)$.

[Questão 3] Teste Z Unilateral Esquerdo

Uma máquina produz peças com diâmetro normalmente distribuído, média desconhecida e desvio padrão $\sigma = 0.5$ mm. O processo está sob controle se $\mu \geq 20$ mm. Uma amostra de $n = 50$ peças apresentou $\bar{x} = 19.8$ mm.

- (a) Formule o teste apropriado: $H_0 : \mu \geq 20$ vs $H_1 : \mu < 20$ ao nível $\alpha = 0.05$.
- (b) Realize o teste usando a estatística Z.
- (c) Interprete o resultado no contexto do problema.

[Questão 4] Poder do Teste Z

Sejam X_1, X_2, \dots, X_n i.i.d. com $X_i \sim N(\mu, 16)$. Teste $H_0 : \mu = 8$ vs $H_1 : \mu \neq 8$ ao nível $\alpha = 0.05$ com $n = 64$.

- (a) Encontre a região crítica do teste.
- (b) Calcule a função poder $\pi(\mu)$ para este teste.
- (c) Avalie o poder em $\mu = 9$ e $\mu = 10$.

[Questão 5] Tamanho Amostral para Teste Z

Deseja-se testar $H_0 : \mu = 100$ vs $H_1 : \mu \neq 100$ com $\sigma = 15$ conhecido, ao nível $\alpha = 0.05$.

- (a) Encontre o tamanho amostral mínimo n tal que o poder do teste seja pelo menos 0.90 quando $\mu = 105$.
- (b) Repita para $\alpha = 0.01$ mantendo o poder em 0.90.
- (c) Discuta como o tamanho amostral varia com α e com a diferença $|\mu - 100|$.

3 Teste t (Normal com σ^2 desconhecido)

[Questão 6] Teste t Bilateral

Sejam X_1, X_2, \dots, X_n v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ onde ambos são desconhecidos. Deseja-se testar $H_0 : \mu = 50$ vs $H_1 : \mu \neq 50$ ao nível $\alpha = 0.05$.

- (a) Construa a estatística de teste $t = \frac{\bar{X}_n - 50}{S_n / \sqrt{n}}$ onde $S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$.
- (b) Para $n = 16$, determine a região crítica usando a distribuição t de Student.
- (c) Se $\bar{x} = 52.3$ e $s_n = 4.8$, realize o teste e conclua.

[Questão 7] Teste t Unilateral com Variância Desconhecida

Uma amostra de $n = 10$ observações de uma população normal forneceu $\bar{x} = 12.5$ e $s_n^2 = 9$.

- (a) Teste $H_0 : \mu \leq 10$ vs $H_1 : \mu > 10$ ao nível $\alpha = 0.05$.
- (b) Calcule o valor-p aproximado.
- (c) Compare os graus de liberdade da distribuição t com os do teste Z e discuta as diferenças.

[Questão 8] Teste t com Dados Específicos

Dados: $\{8.5, 9.2, 10.1, 8.9, 9.7, 10.3, 9.5, 8.8\}$ de uma população normal.

- (a) Calcule \bar{x} e s_n^2 para esta amostra.
- (b) Teste $H_0 : \mu = 9$ vs $H_1 : \mu \neq 9$ ao nível $\alpha = 0.10$.
- (c) Construa um intervalo de confiança de 90% para μ e verifique a consistência com o teste.

[Questão 9] Propriedades Assintóticas do Teste t

Sejam X_1, X_2, \dots, X_n i.i.d. com $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$.

- (a) Mostre que $S_n \xrightarrow{P} \sigma$ quando $n \rightarrow \infty$.
- (b) Use o Teorema de Slutsky para mostrar que $\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{S_n} \xrightarrow{D} N(0, 1)$.
- (c) Discuta a relação entre o teste t para n finito e o teste Z assintótico.

[Questão 10] Teste t para Média com Amostra Grande

Uma amostra de $n = 100$ observações normais independentes forneceu $\bar{x} = 25.3$ e $s_n = 6.2$.

- (a) Realize o teste $H_0 : \mu = 24$ vs $H_1 : \mu \neq 24$ ao nível $\alpha = 0.05$ usando a estatística t .
- (b) Aproxime usando a distribuição normal padrão (válido para n grande) e compare os resultados.
- (c) Interprete as diferenças entre usar t_{99} e $N(0, 1)$ neste caso.

4 Testes de Proporções

[Questão 11] Teste para Proporção Binomial

Uma amostra de $n = 200$ observações de uma variável Bernoulli forneceu $\hat{p} = 0.35$. Deseja-se testar $H_0 : p = 0.40$ vs $H_1 : p \neq 0.40$ ao nível $\alpha = 0.05$.

- (a) Construa a estatística de teste $Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}$ e determine a região crítica.
- (b) Realize o teste com os dados fornecidos.
- (c) Calcule o valor-p e interprete.

[Questão 12] Teste Unilateral para Proporção

Em uma pesquisa, 180 de 500 pessoas entrevistadas aprovaram uma medida. Teste $H_0 : p \leq 0.30$ vs $H_1 : p > 0.30$ ao nível $\alpha = 0.01$.

- (a) Formule a estatística de teste apropriada.
- (b) Realize o teste e conclua.
- (c) Calcule a probabilidade de erro tipo II quando $p = 0.35$.

[Questão 13] Teste de Proporção com Correção de Continuidade

Para uma distribuição Binomial com $n = 100$ e $H_0 : p = 0.5$, observou-se $x = 45$ sucessos.

- (a) Realize o teste $H_0 : p = 0.5$ vs $H_1 : p \neq 0.5$ ao nível $\alpha = 0.05$ sem correção.
- (b) Aplique a correção de continuidade de Yates: $Z = \frac{|x - np_0| - 0.5}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}$.
- (c) Compare os dois resultados e discuta quando a correção é mais importante.

[Questão 14] Teste de Proporção com Amostra Pequena

Uma amostra de $n = 15$ observações de Bernoulli forneceu 6 sucessos. Teste $H_0 : p = 0.4$ vs $H_1 : p \neq 0.4$ ao nível $\alpha = 0.10$.

- (a) Use a distribuição binomial exata para calcular o valor-p.
- (b) Compare com o teste assintótico usando a aproximação normal.
- (c) Discuta as condições de validade da aproximação normal para proporções.

[Questão 15] Poder do Teste de Proporção

Teste $H_0 : p = 0.6$ vs $H_1 : p \neq 0.6$ ao nível $\alpha = 0.05$ com $n = 100$.

- (a) Determine a região crítica do teste.
- (b) Calcule a função poder $\pi(p)$ para este teste.
- (c) Avalie o poder em $p = 0.50$ e $p = 0.70$. Interprete os resultados.

5 Testes para Poisson

[Questão 16] Teste para Parâmetro Poisson

Sejam X_1, X_2, \dots, X_n v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim \text{Poisson}(\lambda)$. Deseja-se testar $H_0 : \lambda = 3$ vs $H_1 : \lambda \neq 3$ ao nível $\alpha = 0.05$.

- (a) Sabendo que $S_n = \sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Poisson}(n\lambda)$, construa o teste usando S_n .
- (b) Para $n = 20$, determine a região crítica baseada na distribuição de S_n sob H_0 .
- (c) Se $\sum_{i=1}^{20} x_i = 68$, realize o teste e conclua.

[Questão 17] Teste Unilateral para Poisson

Em uma linha de produção, contam-se os defeitos em $n = 50$ unidades amostradas. A soma observada foi $S_{50} = 180$. Teste $H_0 : \lambda \leq 3$ vs $H_1 : \lambda > 3$ ao nível $\alpha = 0.01$.

- (a) Use o fato de que para $n\lambda$ grande, $S_n \approx N(n\lambda, n\lambda)$ para aproximar o teste.
- (b) Realize o teste usando a aproximação normal.
- (c) Calcule o valor-p exato usando a distribuição Poisson e compare.

[Questão 18] Teste Poisson com Aproximação Normal

Para uma amostra de $n = 100$ observações Poisson com $\bar{x} = 4.2$, teste $H_0 : \lambda = 4$ vs $H_1 : \lambda \neq 4$ ao nível $\alpha = 0.05$.

- (a) Use a aproximação normal: $\frac{\bar{X}_n - \lambda_0}{\sqrt{\lambda_0/n}} \xrightarrow{D} N(0, 1)$.
- (b) Realize o teste com os dados fornecidos.
- (c) Discuta as condições para que esta aproximação seja válida.

[Questão 19] Teste Poisson com Soma Amostral

Sejam X_1, \dots, X_n i.i.d. Poisson(λ). Para $n = 25$ e $\sum_{i=1}^{25} x_i = 82$, teste $H_0 : \lambda = 3$ vs $H_1 : \lambda > 3$ ao nível $\alpha = 0.05$.

- (a) Use a distribuição exata de $S_{25} \sim \text{Poisson}(75)$ sob H_0 .
- (b) Calcule $P(S_{25} \geq 82)$ usando a aproximação normal com correção de continuidade.
- (c) Compare os resultados e discuta a adequação da aproximação.

[Questão 20] Curva de Poder para Teste Poisson

Teste $H_0 : \lambda = 5$ vs $H_1 : \lambda \neq 5$ ao nível $\alpha = 0.05$ com $n = 30$.

- (a) Determine a região crítica usando a aproximação normal.
- (b) Calcule a função poder $\pi(\lambda)$ para este teste.
- (c) Avalie o poder em $\lambda = 4$, $\lambda = 6$ e $\lambda = 7$. Interprete os resultados.

6 Testes para Exponencial

[Questão 21] Teste para Parâmetro Exponencial via χ^2

Sejam X_1, X_2, \dots, X_n v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim \text{Exp}(\lambda)$ (taxa λ). Sabe-se que $2\lambda \sum_{i=1}^n X_i \sim \chi_{2n}^2$.

- (a) Use esta propriedade para construir um teste de $H_0 : \lambda = \lambda_0$ vs $H_1 : \lambda \neq \lambda_0$ ao nível α .
- (b) Para $n = 15$, $\lambda_0 = 2$ e $\sum_{i=1}^{15} x_i = 6.5$, realize o teste ao nível $\alpha = 0.05$.
- (c) Interprete o resultado no contexto do problema.

[Questão 22] Teste Unilateral para Exponencial

Uma amostra de $n = 20$ observações de uma distribuição exponencial forneceu $\sum_{i=1}^{20} x_i = 25$. Teste $H_0 : \lambda \geq 1$ vs $H_1 : \lambda < 1$ ao nível $\alpha = 0.10$.

- (a) Use a transformação qui-quadrado para construir o teste.
- (b) Realize o teste e conclua.
- (c) Calcule a probabilidade de erro tipo II quando $\lambda = 0.8$.

[Questão 23] Teste Exponencial com Aproximação Normal

Para uma amostra grande ($n = 100$) de uma distribuição exponencial com $\bar{x} = 1.8$, teste $H_0 : \lambda = 0.5$ vs $H_1 : \lambda \neq 0.5$ ao nível $\alpha = 0.05$.

- (a) Use o TCL para justificar que $\bar{X}_n \approx N(1/\lambda, 1/(n\lambda^2))$.
- (b) Construa a estatística de teste apropriada.
- (c) Realize o teste e compare com o teste exato baseado em χ^2 .

[Questão 24] Intervalo de Confiança e Teste Exponencial

Sejam X_1, \dots, X_n i.i.d. $\text{Exp}(\lambda)$. Para $n = 25$ e $\sum_{i=1}^{25} x_i = 50$:

- (a) Construa um intervalo de confiança de 95% para λ usando a distribuição χ^2 .
- (b) Use este intervalo para testar $H_0 : \lambda = 0.4$ vs $H_1 : \lambda \neq 0.4$ ao nível $\alpha = 0.05$.
- (c) Verifique a equivalência entre o intervalo de confiança e o teste de hipóteses.

[Questão 25] Função Poder para Teste Exponencial

Teste $H_0 : \lambda = 2$ vs $H_1 : \lambda \neq 2$ ao nível $\alpha = 0.05$ com $n = 30$.

- (a) Determine a região crítica do teste usando a distribuição χ_{60}^2 .
- (b) Calcule a função poder $\pi(\lambda)$ para este teste.
- (c) Avalie o poder em $\lambda = 1.5$, $\lambda = 2.5$ e $\lambda = 3$. Discuta o comportamento do poder.

7 Lema de Neyman–Pearson (LNP)

[Questão 26] Construção de Teste MP pelo LNP

Sejam X_1, X_2, \dots, X_n v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim N(\mu, 1)$. Deseja-se testar $H_0 : \mu = 0$ vs $H_1 : \mu = 1$ ao nível $\alpha = 0.05$.

- (a) Escreva as funções de verossimilhança $L(0)$ e $L(1)$.
- (b) Use o Lema de Neyman–Pearson para construir o teste mais poderoso (MP).
- (c) Determine a constante crítica k e a região de rejeição em termos de \bar{X}_n .

[Questão 27] LNP para Distribuição Poisson

Sejam X_1, \dots, X_n i.i.d. $\text{Poisson}(\lambda)$. Teste $H_0 : \lambda = 2$ vs $H_1 : \lambda = 4$ ao nível $\alpha = 0.05$ com $n = 10$.

- (a) Escreva a razão de verossimilhança $\frac{L(4)}{L(2)}$.
- (b) Use o LNP para construir o teste MP.
- (c) Encontre a região crítica em termos de $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

[Questão 28] LNP para Distribuição Exponencial

Sejam X_1, \dots, X_n i.i.d. $\text{Exp}(\lambda)$. Teste $H_0 : \lambda = 1$ vs $H_1 : \lambda = 2$ ao nível $\alpha = 0.10$ com $n = 15$.

- (a) Construa a razão de verossimilhança e use o LNP para encontrar o teste MP.
- (b) Expresse a região crítica em termos de \bar{X}_n ou $\sum_{i=1}^n X_i$.
- (c) Calcule o poder do teste, isto é, $\pi(2)$.

[Questão 29] LNP para Distribuição Uniforme

Sejam X_1, \dots, X_n i.i.d. $U(0, \theta)$. Teste $H_0 : \theta = 1$ vs $H_1 : \theta = 2$ ao nível $\alpha = 0.05$ com $n = 5$.

- (a) Escreva as funções de verossimilhança. Note que $L(\theta) = \theta^{-n} I(X_{(n)} \leq \theta)$.
- (b) Use o LNP para construir o teste MP.
- (c) Discuta as particularidades deste caso (região de rejeição baseada na estatística de ordem).

[Questão 30] Propriedades do Teste MP pelo LNP

Sejam X_1, \dots, X_n i.i.d. com densidade $f(x; \theta)$.

- (a) Explique o que significa um teste ser "mais poderoso"(MP).
- (b) Discuta as condições sob as quais o LNP garante a existência de um teste MP.
- (c) Mostre que o teste MP pelo LNP é único (a menos de um conjunto de medida zero).

8 Função Poder e Curvas de Poder

[Questão 31] Cálculo de Função Poder

Sejam X_1, \dots, X_n i.i.d. $N(\mu, 4)$ com $n = 25$. Teste $H_0 : \mu = 10$ vs $H_1 : \mu \neq 10$ ao nível $\alpha = 0.05$.

- (a) Determine a região crítica do teste.
- (b) Calcule a função poder $\pi(\mu)$ explicitamente.
- (c) Avalie $\pi(9)$, $\pi(11)$, $\pi(12)$ e discuta o comportamento do poder.

[Questão 32] Curva de Poder para Teste t

Para o teste $H_0 : \mu = 50$ vs $H_1 : \mu \neq 50$ com σ^2 desconhecido, $n = 16$ e $\alpha = 0.05$:

- (a) Escreva a função poder $\pi(\mu)$ para este teste.
- (b) Calcule o poder em $\mu = 48$, $\mu = 52$ e $\mu = 55$.
- (c) Esboce a curva de poder e discuta suas propriedades (simetria, comportamento em μ_0 , etc.).

[Questão 33] Poder e Erro Tipo II

No contexto do teste $H_0 : p = 0.5$ vs $H_1 : p \neq 0.5$ para proporção, com $n = 100$ e $\alpha = 0.05$:

- (a) Calcule a função poder $\pi(p)$.
- (b) Determine $\beta(p)$ (probabilidade de erro tipo II) e relacione com $\pi(p)$.
- (c) Avalie $\beta(0.45)$ e $\beta(0.55)$. Interprete os resultados.

[Questão 34] Comparação de Curvas de Poder

Considere dois testes para $H_0 : \lambda = 3$ vs $H_1 : \lambda \neq 3$ em uma distribuição Poisson:

- Teste 1: $n = 20$, $\alpha = 0.05$
 - Teste 2: $n = 40$, $\alpha = 0.05$
- (a) Calcule as funções poder $\pi_1(\lambda)$ e $\pi_2(\lambda)$.
 - (b) Compare o poder em $\lambda = 2.5$ e $\lambda = 3.5$ para ambos os testes.
 - (c) Discuta o efeito do tamanho amostral sobre o poder.

[Questão 35] Interpretação da Curva de Poder

Para um teste de hipóteses qualquer, discuta:

- (a) O que significa uma curva de poder "mais íngreme"? Quando isso é desejável?
- (b) Por que $\pi(\theta_0) = \alpha$ quando θ_0 é o valor da hipótese nula?
- (c) Como a escolha de α afeta a forma da curva de poder?

9 RVM e Teorema de Karlin–Rubin

[Questão 36] Família de Razão de Verossimilhança Monótona

Sejam X_1, \dots, X_n i.i.d. $N(\mu, 1)$. Mostre que esta família tem razão de verossimilhança monótona (RVM) em $T(X) = \bar{X}_n$.

- (a) Calcule a razão de verossimilhança $\frac{L(\mu_2)}{L(\mu_1)}$ para $\mu_2 > \mu_1$.
- (b) Mostre que esta razão é uma função crescente de \bar{X}_n .
- (c) Conclua que a família é RVM e aplique o Teorema de Karlin–Rubin.

[Questão 37] Construção de Teste UMP Unilateral via Karlin–Rubin

Sejam X_1, \dots, X_n i.i.d. $\text{Poisson}(\lambda)$. Teste $H_0 : \lambda \leq 2$ vs $H_1 : \lambda > 2$ ao nível $\alpha = 0.05$ com $n = 20$.

- (a) Mostre que a família Poisson tem RVM em $T(X) = \sum_{i=1}^n X_i$.
- (b) Use o Teorema de Karlin–Rubin para construir o teste UMP (uniformemente mais poderoso).
- (c) Determine a região crítica em termos de $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

[Questão 38] RVM para Distribuição Exponencial

Sejam X_1, \dots, X_n i.i.d. $\text{Exp}(\lambda)$. Teste $H_0 : \lambda \geq 1$ vs $H_1 : \lambda < 1$ ao nível $\alpha = 0.10$ com $n = 25$.

- (a) Mostre que a família exponencial tem RVM em $T(X) = \sum_{i=1}^n X_i$.
- (b) Use o Teorema de Karlin–Rubin para construir o teste UMP.
- (c) Expresse a região crítica usando a distribuição χ^2 .

[Questão 39] Teste UMP para Distribuição Bernoulli

Sejam X_1, \dots, X_n i.i.d. $\text{Bernoulli}(p)$. Teste $H_0 : p \leq 0.3$ vs $H_1 : p > 0.3$ ao nível $\alpha = 0.05$ com $n = 50$.

- (a) Mostre que a família Bernoulli tem RVM em $T(X) = \sum_{i=1}^n X_i$.
- (b) Construa o teste UMP usando o Teorema de Karlin–Rubin.
- (c) Para $\sum_{i=1}^{50} x_i = 20$, realize o teste e conclua.

[Questão 40] Limitações do Teorema de Karlin–Rubin

Discuta as limitações do Teorema de Karlin–Rubin:

- (a) Por que o teorema não se aplica a testes bilaterais?
- (b) Dê um exemplo de uma família de distribuições que não possui RVM.
- (c) Explique a diferença entre um teste MP (para hipóteses simples) e um teste UMP (para hipóteses compostas).

10 Testes χ^2

[Questão 41] Teste χ^2 para Variância Normal

Sejam X_1, \dots, X_n i.i.d. $N(\mu, \sigma^2)$ onde μ é desconhecido. Teste $H_0 : \sigma^2 = 4$ vs $H_1 : \sigma^2 \neq 4$ ao nível $\alpha = 0.05$ com $n = 20$.

- (a) Use o fato de que $\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$ para construir o teste.
- (b) Determine a região crítica em termos de S_n^2 .
- (c) Se $s_n^2 = 5.2$, realize o teste e conclua.

[Questão 42] Teste Unilateral para Variância

Uma amostra de $n = 15$ observações normais forneceu $s_n^2 = 3.8$. Teste $H_0 : \sigma^2 \geq 5$ vs $H_1 : \sigma^2 < 5$ ao nível $\alpha = 0.10$.

- (a) Construa o teste usando a distribuição χ_{14}^2 .
- (b) Realize o teste e interprete.
- (c) Calcule a probabilidade de erro tipo II quando $\sigma^2 = 4$.

[Questão 43] Teste χ^2 com Média Conhecida

Sejam X_1, \dots, X_n i.i.d. $N(\mu, \sigma^2)$ onde $\mu = 10$ é conhecido. Teste $H_0 : \sigma^2 = 9$ vs $H_1 : \sigma^2 \neq 9$ ao nível $\alpha = 0.05$ com $n = 25$.

- (a) Note que $\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - 10)^2}{\sigma^2} \sim \chi_n^2$ (não $n - 1$ pois μ é conhecido).
- (b) Construa o teste apropriado.
- (c) Discuta a diferença entre este teste e o do item 41 (com μ desconhecido).

[Questão 44] Intervalo de Confiança e Teste χ^2

Para $n = 30$ observações normais com $s_n^2 = 6.5$:

- (a) Construa um intervalo de confiança de 95% para σ^2 .
- (b) Use este intervalo para testar $H_0 : \sigma^2 = 8$ vs $H_1 : \sigma^2 \neq 8$ ao nível $\alpha = 0.05$.
- (c) Verifique a equivalência entre os dois procedimentos.

[Questão 45] Função Poder para Teste χ^2

Teste $H_0 : \sigma^2 = 10$ vs $H_1 : \sigma^2 \neq 10$ ao nível $\alpha = 0.05$ com $n = 20$ (população normal).

- (a) Calcule a função poder $\pi(\sigma^2)$ para este teste.
- (b) Avalie o poder em $\sigma^2 = 8$, $\sigma^2 = 12$ e $\sigma^2 = 15$.
- (c) Esboce a curva de poder e discuta seu comportamento assimétrico.

11 Valor-p e Interpretação

[Questão 46] Cálculo e Interpretação do Valor-p

Para o teste $H_0 : \mu = 100$ vs $H_1 : \mu \neq 100$ com $\sigma = 15$ conhecido e $n = 36$:

- (a) Defina formalmente o valor-p (p-value) para este teste bilateral.
- (b) Se $\bar{x} = 105$, calcule o valor-p.
- (c) Interprete o valor-p: o que ele representa? Como usá-lo para tomar decisões?

[Questão 47] Valor-p para Teste Unilateral

Teste $H_0 : \mu \leq 50$ vs $H_1 : \mu > 50$ com $\sigma = 8$ conhecido, $n = 25$ e $\bar{x} = 53.2$.

- (a) Calcule o valor-p para este teste unilateral direito.
- (b) Compare com o valor-p que obteríamos em um teste bilateral.
- (c) Discuta a relação entre valor-p e nível de significância na tomada de decisão.

[Questão 48] Valor-p e Decisão Estatística

Considere os seguintes valores-p obtidos em diferentes testes:

- Teste A: valor-p = 0.03
- Teste B: valor-p = 0.08
- Teste C: valor-p = 0.001
- Teste D: valor-p = 0.25

- (a) Para cada teste, decida se H_0 deve ser rejeitada ao nível $\alpha = 0.05$.
- (b) Para cada teste, decida ao nível $\alpha = 0.01$.
- (c) Discuta a interpretação: "valor-p menor indica evidência mais forte contra H_0 ".

[Questão 49] Valor-p para Teste t

Para o teste $H_0 : \mu = 20$ vs $H_1 : \mu \neq 20$ com σ^2 desconhecido, $n = 16$, $\bar{x} = 21.5$ e $s_n = 3.2$:

- (a) Calcule a estatística t observada.
- (b) Determine o valor-p usando a distribuição t de Student com 15 graus de liberdade.
- (c) Se $\alpha = 0.05$, qual a decisão? E se $\alpha = 0.10$?

[Questão 50] Interpretação Conceitual do Valor-p

Discuta os seguintes aspectos do valor-p:

- (a) O que o valor-p NÃO representa? (Erro comum: "probabilidade de H_0 ser verdadeira").
- (b) Qual a relação entre valor-p e o tamanho do efeito?
- (c) Por que é importante reportar o valor-p além de apenas "rejeitar" ou "não rejeitar" H_0 ?

12 Dicas Gerais de Resolução

12.1 Dicas por Tipo de Teste

1. **Teste Z:** Use quando σ^2 é conhecido. A estatística é $Z = \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$ sob H_0 .
2. **Teste t:** Use quando σ^2 é desconhecido. A estatística é $t = \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{S_n/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$ sob H_0 .
3. **Teste de Proporções:** Use a aproximação normal: $Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}$ quando np_0 e $n(1-p_0)$ são grandes.
4. **Testes para Poisson:** Use que $S_n = \sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Poisson}(n\lambda)$. Para $n\lambda$ grande, use aproximação normal.
5. **Testes para Exponencial:** Use que $2\lambda \sum_{i=1}^n X_i \sim \chi_{2n}^2$ para construir testes exatos.
6. **Lema de Neyman–Pearson:** Construa a razão de verossimilhança $\frac{L(\theta_1)}{L(\theta_0)}$ e encontre k tal que $P_{\theta_0}(\text{rejeitar}) = \alpha$.
7. **Função Poder:** $\pi(\theta) = P_{\theta}(\text{rejeitar } H_0)$. Calcule usando a distribuição da estatística de teste sob H_1 .
8. **Teorema de Karlin–Rubin:** Verifique se a família tem RVM. Se sim, o teste da forma $\{T(X) > c\}$ é UMP para $H_1: \theta > \theta_0$.
9. **Testes χ^2 para Variância:** Use que $\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$ quando μ é desconhecido.
10. **Valor-p:** Para teste bilateral, valor-p = $2P(Z \geq |z_{\text{obs}}|)$. Para unilateral, valor-p = $P(Z \geq z_{\text{obs}})$ (ou \leq conforme o caso).

12.2 Dicas Gerais

- Sempre verifique as condições de aplicabilidade de cada teste (tamanho amostral, distribuição, etc.).
- Para amostras grandes, muitas vezes pode-se usar aproximações normais mesmo quando a distribuição exata está disponível.
- Testes unilaterais têm maior poder que testes bilaterais para a mesma direção da alternativa, mas menor poder na direção oposta.

- O valor-p é a probabilidade de observar uma estatística de teste tão ou mais extrema que a observada, assumindo H_0 verdadeira.
- Regra prática: rejeite H_0 se valor-p $\leq \alpha$, não rejeite se valor-p $> \alpha$.
- Para testes de variância, lembre-se: se μ é conhecido, use χ_n^2 ; se μ é desconhecido, use χ_{n-1}^2 .
- A função poder deve ser calculada para diferentes valores do parâmetro na hipótese alternativa para avaliar o desempenho do teste.
- Testes MP (mais poderosos) existem apenas para hipóteses simples; para hipóteses compostas, busque testes UMP.
- O Teorema de Karlin–Rubin garante testes UMP apenas para hipóteses unilaterais quando a família tem RVM.
- Sempre interprete os resultados no contexto do problema prático, não apenas mecanicamente.

13 Respostas Seleccionadas

Questão 1(b): $z_{\text{obs}} = \frac{11.2-10}{2/5} = 3.0$. Como $|z_{\text{obs}}| = 3.0 > 1.96 = z_{0.025}$, rejeitamos H_0 ao nível 5%.

Questão 2(c): $\beta(7) = P(\bar{X}_{36} \leq c | \mu = 7)$ onde c é tal que $P(\bar{X}_{36} > c | \mu = 5) = 0.01$. Com $\sigma = 3$, $c = 5 + 3 \cdot 2.326/\sqrt{36} \approx 6.163$. Então $\beta(7) = P(\bar{X}_{36} \leq 6.163 | \mu = 7) = \Phi\left(\frac{6.163-7}{3/6}\right) = \Phi(-1.67) \approx 0.047$.

Questão 6(c): $t_{\text{obs}} = \frac{52.3-50}{4.8/4} = 1.92$. Com $t_{15,0.025} = 2.131$, temos $|t_{\text{obs}}| = 1.92 < 2.131$, logo não rejeitamos H_0 ao nível 5%.

Questão 11(b): $z_{\text{obs}} = \frac{0.35-0.40}{\sqrt{0.40 \cdot 0.60/200}} = \frac{-0.05}{0.0346} \approx -1.44$. Como $|z_{\text{obs}}| = 1.44 < 1.96$, não rejeitamos H_0 ao nível 5%.

Questão 16(c): Sob H_0 , $S_{20} \sim \text{Poisson}(60)$. Como 60 é grande, usamos aproximação normal: $Z = \frac{68-60}{\sqrt{60}} \approx 1.03$. Como $|z| = 1.03 < 1.96$, não rejeitamos H_0 .

Questão 21(b): Sob H_0 , $2 \cdot 2 \cdot 6.5 = 26 \sim \chi_{30}^2$. Com $\chi_{30,0.025}^2 = 16.79$ e $\chi_{30,0.975}^2 = 46.98$, temos $16.79 < 26 < 46.98$, logo não rejeitamos H_0 .

Questão 26(c): O LNP leva ao teste que rejeita H_0 se $\bar{X}_n > k$. Determinando k tal que $P(\bar{X}_n > k | \mu = 0) = 0.05$ com n fixo, obtemos $k = 0 + z_{0.05} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Questão 31(b): $\pi(\mu) = 1 - \Phi\left(\frac{10+z_{0.025} \cdot \frac{2}{5} - \mu}{2/5}\right) + \Phi\left(\frac{10-z_{0.025} \cdot \frac{2}{5} - \mu}{2/5}\right)$.

Questão 36(b): A razão é $\exp\{n(\mu_2 - \mu_1)\bar{X}_n - \frac{n}{2}(\mu_2^2 - \mu_1^2)\}$, que é crescente em \bar{X}_n quando $\mu_2 > \mu_1$.

Questão 41(c): Sob H_0 , $\frac{19.5.2}{4} = 24.7 \sim \chi_{19}^2$. Com $\chi_{19,0.025}^2 = 8.91$ e $\chi_{19,0.975}^2 = 32.85$, temos $8.91 < 24.7 < 32.85$, logo não rejeitamos H_0 .

Questão 46(b): Valor-p = $2P(Z \geq |\frac{105-100}{15/6}|) = 2P(Z \geq 2.0) = 2(1 - \Phi(2.0)) = 2(1 - 0.9772) = 0.0456$.

Questão 49(b): $t_{\text{obs}} = \frac{21.5-20}{3.2/4} = 1.875$. Valor-p = $2P(t_{15} \geq 1.875) \approx 2(1 - 0.96) = 0.08$ (aproximado).

14 Gabarito e Dicas - Parte 2

14.1 Dicas Adicionais

Testes Unilaterais vs Bilaterais:

- Testes unilaterais têm maior poder na direção da alternativa, mas não têm poder na direção oposta.
- A escolha entre unilateral e bilateral deve ser feita antes de coletar os dados, baseada na pergunta de interesse.
- Valor-p unilateral é metade do valor-p bilateral para a mesma estatística observada (quando a distribuição é simétrica).

Lema de Neyman–Pearson:

- O LNP garante que existe um teste MP para hipóteses simples $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta = \theta_1$.
- O teste MP é baseado na razão de verossimilhança: rejeite se $\frac{L(\theta_1)}{L(\theta_0)} > k$ onde k é tal que $P_{\theta_0}(\text{rejeitar}) = \alpha$.
- Este teste é único (a menos de um conjunto de medida zero) e tem poder máximo entre todos os testes de nível α .

Função Poder:

- A função poder $\pi(\theta)$ deve satisfazer: $\pi(\theta) = \alpha$ quando $\theta \in H_0$ (para testes não-viésados).
- Para testes "bons", $\pi(\theta) \rightarrow 1$ quando θ se afasta de H_0 na direção de H_1 .
- O poder aumenta com o tamanho amostral e com a magnitude do efeito.
- O poder diminui quando α diminui (trade-off entre tipos de erro).

Teorema de Karlin–Rubin:

- Requer que a família de distribuições tenha razão de verossimilhança monótona (RVM).
- Quando aplicável, garante um teste UMP para hipóteses unilaterais.
- Famílias exponenciais uniparamétricas frequentemente têm RVM.
- A estatística suficiente é usada como estatística de teste.

Testes χ^2 para Variância:

- Quando μ é desconhecido: $\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$.
- Quando μ é conhecido: $\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi_n^2$.
- A diferença de 1 grau de liberdade é importante: afeta a região crítica e o poder.

- Para testes bilaterais, a região crítica é não-simétrica (devido à assimetria da distribuição χ^2).

Valor-p:

- Valor-p NÃO é a probabilidade de H_0 ser verdadeira (erro comum!).
- Valor-p é a probabilidade de observar dados tão ou mais extremos que os observados, assumindo H_0 verdadeira.
- Valor-p menor indica evidência mais forte contra H_0 , mas não mede a "magnitude do efeito".
- Um valor-p significativo não implica necessariamente um efeito prático importante (depende do tamanho amostral).
- Sempre reporte o valor-p exato quando possível, não apenas " $p < 0.05$ ".

14.2 Respostas Selecionadas - Parte 2

Questão 5(a): Para poder ≥ 0.90 quando $\mu = 105$: precisamos que $\beta(105) \leq 0.10$. Resolvendo, obtemos $n \geq \left(\frac{(z_{0.025} + z_{0.10}) \cdot 15}{5} \right)^2 = \left(\frac{(1.96 + 1.28) \cdot 15}{5} \right)^2 = (9.72)^2 \approx 95$.

Questão 13(b): Com correção de continuidade: $Z = \frac{|45-50|-0.5}{\sqrt{100 \cdot 0.5 \cdot 0.5}} = \frac{4.5}{5} = 0.9$. Valor-p $= 2P(Z \geq 0.9) = 2(1 - 0.8159) = 0.3682$, maior que sem correção.

Questão 19(b): $P(S_{25} \geq 82) \approx P(Z \geq \frac{81.5-75}{\sqrt{75}}) = P(Z \geq 0.75) = 1 - \Phi(0.75) = 1 - 0.7734 = 0.2266$ (usando correção de continuidade).

Questão 23(c): Usando aproximação normal: $Z = \frac{1.8-2}{\sqrt{1/(100 \cdot 0.25)}} = \frac{-0.2}{0.2} = -1.0$. Como $|z| = 1.0 < 1.96$, não rejeitamos H_0 .

Questão 27(c): A razão $\frac{L(4)}{L(2)} = \exp\{S_n(\log 4 - \log 2) - n(4 - 2)\} = \exp\{S_n \log 2 - 2n\}$. O teste MP rejeita se $S_n > c$ onde c é tal que $P(S_{10} > c | \lambda = 2) = 0.05$.

Questão 32(b): $\pi(48) \approx 0.35$, $\pi(52) \approx 0.65$, $\pi(55) \approx 0.90$ (valores aproximados usando distribuição t).

Questão 37(c): O teste UMP rejeita H_0 se $S_{20} > c$ onde c é tal que $P(S_{20} > c | \lambda = 2) = 0.05$. Como $S_{20} \sim \text{Poisson}(40)$ sob H_0 no limite, podemos usar aproximação normal.

Questão 42(c): $\beta(4) = P(\text{não rejeitar} | \sigma^2 = 4) = P(\frac{14 \cdot S_n^2}{4} \geq \chi_{14,0.90}^2 | \sigma^2 = 4)$, onde a distribuição de $\frac{14 \cdot S_n^2}{4}$ sob $\sigma^2 = 4$ é χ_{14}^2 .

Questão 45(b): $\pi(8) \approx 0.42$, $\pi(12) \approx 0.38$, $\pi(15) \approx 0.65$ (valores aproximados). Note que o poder não é simétrico em torno de $\sigma_0^2 = 10$.

Questão 48: Ao nível $\alpha = 0.05$: Teste A (rejeitar), B (não rejeitar), C (rejeitar), D (não rejeitar). Ao nível $\alpha = 0.01$: Apenas C rejeita.