Questões Resolvidas do Capítulo 3

Teoria Assintótica - Soluções Detalhadas

Curso de Inferência Estatística - PPGEST/UFPE

Compilado e detalhado

Novembro 2025

Sumário

Introdução

Este documento apresenta todas as questões extras resolvidas em sala de aula do Capítulo 3 sobre Teoria Assintótica e Teoremas Limite. As soluções foram expandidas com explicações detalhadas, intuições e comentários didáticos para facilitar o entendimento completo dos conceitos.

Organização do Documento

Cada questão está organizada da seguinte forma:

1. **Enunciado** - apresentação completa do problema
2. **Solução Detalhada** - desenvolvimento passo a passo
3. **Observações e Intuição** - comentários sobre o método e interpretações
4. **Resumo** - síntese dos principais resultados

Questões Incluídas

- Q(Extra 1) - Convergência da variância amostral S_n^2
- Q(Extra 2) - Consistência do máximo: $X_{(n)} \xrightarrow{P} \theta$
- Q(Extra 3) - Convergência do quociente $\bar{X}_n / S_n^2$
- Q(Extra 4a) - Transformação do máximo: $T_n^2 = X_{n:n}^2$
- Q(Extra 4b) - Convergência de $Q_n = n(\theta - T_n)/T_n$
- Q(Extra 5) - Distribuição limite do máximo uniforme (Exponencial)
- Q(Extra 6) - TCL para Bernoulli via MGF
- Q(Questão 4) - Distribuição assintótica de χ^2 normalizada
- Q(Extra 9) - Distribuição assintótica de $\sqrt{n}(S_n^2 - \sigma^2)$
- Q(Extra 10) - Método Delta para Poisson: $\bar{X}_n^3$
- Q(Exercício 11) - Estatística qui-quadrado via TCL
- Q(3.23) - Consistência do EMV para Uniforme

1 Questão Extra 1: Convergência da Variância Amostral

Questão Extra 1

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $E[X_i] = \mu < \infty$ e $\text{Var}(X_i) = \sigma^2 < \infty$. Mostre que:

$$S_n^2 \xrightarrow{P}_{n\to\infty} \sigma^2 \tag{1}$$

onde $S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$ é a variância amostral.

Solução Detalhada

Estratégia da Demonstração

Usaremos a **transformação de Helmert** para representar S_n^2 como uma média amostral de variáveis com propriedades conhecidas, permitindo aplicar a Lei Fraca dos Grandes Números.

Passo 1: Transformação de Helmert

A transformação de Helmert produz variáveis ortogonais $Y_1, \ldots, Y_n$ a partir de $X_1, \ldots, X_n$ tais que:

$$Y_i \sim N(0, \sigma^2) \text{ são independentes para } i = 1, \ldots, n \tag{2}$$

E, crucialmente:

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=2}^n Y_i^2 \tag{3}$$

Interpretação: A variância amostral pode ser vista como uma média (com $n-1$ termos) de quadrados de variáveis normais padrão.

Solução Detalhada

Passo 2: Momentos de Y_i^2

Calculemos $E[Y_i^2]$ e $\text{Var}(Y_i^2)$.

Esperança:

$$E[Y_i^2] = \text{Var}(Y_i) + (E[Y_i])^2 = \sigma^2 + 0 = \sigma^2 \tag{4}$$

Variância: Precisamos calcular $E[Y_i^4]$. Como $Y_i \sim N(0, \sigma^2)$, a MGF de Y_i^2 é conhecida. Calculando as derivadas da MGF:

$$M_{Y_i^2}(t) = (1 - 2\sigma^2 t)^{-1/2} \tag{5}$$

Derivando sucessivamente e avaliando em $t = 0$:

$$M'_{Y_i^2}(t)\Big|_{t=0} = 0 = E[Y_i] \tag{6}$$

$$M''_{Y_i^2}(t)\Big|_{t=0} = \sigma^2 = E[Y_i^2] \tag{7}$$

$$M'''_{Y_i^2}(t)\Big|_{t=0} = 0 = E[Y_i^3] \tag{8}$$

$$M''''_{Y_i^2}(t)\Big|_{t=0} = 3\sigma^4 = E[Y_i^4] \tag{9}$$

(Os cálculos completos das derivadas estão nas notas n9, linhas 21-38)
Portanto:

$$\text{Var}(Y_i^2) = E[Y_i^4] - (E[Y_i^2])^2 = 3\sigma^4 - \sigma^4 = 2\sigma^4 < \infty \tag{10}$$

Solução Detalhada

Passo 3: Aplicação do Resultado 1P

Como $S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=2}^{n} Y_i^2$ é uma média amostral de $n-1$ variáveis i.i.d. com:

- $E[Y_i^2] = \sigma^2$
- $\text{Var}(Y_i^2) = 2\sigma^4 < \infty$

Pelo **Resultado 1P (Lei Fraca dos Grandes Números - versão simples)**:

$$S_n^2 \xrightarrow{P}_{n\to\infty} E[Y_i^2] = \sigma^2 \quad \square \tag{11}$$

Observações e Intuição

Pontos Importantes

1. **Transformação de Helmert:** Esta é uma transformação ortogonal crucial que:
   - Preserva a soma dos quadrados: $\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \sum_{i=1}^{n} Y_i^2$
   - Separa a informação sobre média (Y_1) da informação sobre variância ($Y_2, \ldots, Y_n$)
   - Produz variáveis independentes quando $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

2. **Por que funciona para não-normais?** Embora a transformação de Helmert seja exata para normais, o resultado vale para qualquer distribuição com variância finita. A chave é que:

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2 \tag{12}$$

   pode ser aproximada por $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$ e aplicar a LFGN diretamente.

Observações e Intuição

Pontos Importantes (continuação)

5. **Taxa de convergência:** Pelo Resultado 2P, a variância de S_n^2 decai como $O(1/n)$:
$$\text{Var}(S_n^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1} \to 0 \tag{13}$$

6. **Distribuição assintótica:** Além de convergência em probabilidade, veremos na Questão Extra 9 que:
$$\sqrt{n}(S_n^2 - \sigma^2) \xrightarrow{D} N(0, \mu_4 - \sigma^4) \tag{14}$$
fornecendo informação sobre a velocidade de convergência.

Resumo da Questão

Resultado Principal:
$$S_n^2 \xrightarrow{P} \sigma^2$$

Método Utilizado:

- Representação via Helmert: $S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=2}^n Y_i^2$
- Lei Fraca dos Grandes Números (Resultado 1P)
- Momentos: $E[Y_i^2] = \sigma^2$, $\text{Var}(Y_i^2) = 2\sigma^4 < \infty$

Conclusão: S_n^2 é consistente para σ^2.

2 Questão Extra 2: Consistência do Máximo da Uniforme

Questão Extra 2

Sejam $X_1, \dots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim \text{Uniforme}(0, \theta)$ para $\theta > 0$. Mostre que:

$$T_n = X_{(n)} = \max\{X_1, \dots, X_n\} \xrightarrow{P} \theta \tag{15}$$

Solução Detalhada

Estratégia da Demonstração

Calcularemos $E[(T_n - \theta)^2]$ e mostraremos que converge para zero. Pelo **Resultado 2P**, isso implica convergência em probabilidade.

Passo 1: Distribuição de $T_n = X_{(n)}$

Para a maior estatística de ordem:

$$\begin{aligned}
F_{T_n}(t) &= P(T_n \leq t) = P(\max\{X_1, \dots, X_n\} \leq t) && (16)\\
&= P(X_1 \leq t, \dots, X_n \leq t) && (17)\\
&\overset{\text{i.i.d.}}{=} [P(X_1 \leq t)]^n && (18)\\
&= [F_{X_1}(t)]^n && (19)
\end{aligned}$$

Para $X_i \sim U(0, \theta)$:

$$F_{X_1}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{t}{\theta}, & 0 \leq t \leq \theta \\ 1, & t > \theta \end{cases} \quad \text{e} \quad f_{X_1}(t) = \frac{1}{\theta}\mathbf{1}_{(0,\theta)}(t) \tag{20}$$

Portanto:

$$F_{T_n}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \left(\frac{t}{\theta}\right)^n, & 0 \leq t \leq \theta \\ 1, & t > \theta \end{cases} \tag{21}$$

A densidade é:

$$f_{T_n}(t) = n[F_{X_1}(t)]^{n-1} f_{X_1}(t) = \frac{n}{\theta^n} t^{n-1} \mathbf{1}_{(0,\theta)}(t) \tag{22}$$

Solução Detalhada

Passo 2: Cálculo dos Momentos

Primeiro momento:

$$E[T_n] = \int_0^\theta t \cdot \frac{n}{\theta^n} t^{n-1} dt \tag{23}$$
$$= \frac{n}{\theta^n} \int_0^\theta t^n dt \tag{24}$$
$$= \frac{n}{\theta^n} \cdot \frac{t^{n+1}}{n+1}\Big|_0^\theta \tag{25}$$
$$= \frac{n}{\theta^n} \cdot \frac{\theta^{n+1}}{n+1} \tag{26}$$
$$= \frac{n\theta}{n+1} \tag{27}$$

Segundo momento:

$$E[T_n^2] = \int_0^\theta t^2 \cdot \frac{n}{\theta^n} t^{n-1} dt \tag{28}$$
$$= \frac{n}{\theta^n} \int_0^\theta t^{n+1} dt \tag{29}$$
$$= \frac{n}{\theta^n} \cdot \frac{t^{n+2}}{n+2}\Big|_0^\theta \tag{30}$$
$$= \frac{n}{\theta^n} \cdot \frac{\theta^{n+2}}{n+2} \tag{31}$$
$$= \frac{n\theta^2}{n+2} \tag{32}$$

Solução Detalhada

Passo 3: Erro Quadrático Médio

$$E[(T_n - \theta)^2] = E[T_n^2] - 2\theta E[T_n] + \theta^2 \tag{33}$$

$$= \frac{n\theta^2}{n+2} - 2\theta \cdot \frac{n\theta}{n+1} + \theta^2 \tag{34}$$

$$= \theta^2 \left[\frac{n}{n+2} - \frac{2n}{n+1} + 1\right] \tag{35}$$

Colocando em denominador comum $(n+2)(n+1)$:

$$= \theta^2 \left[\frac{n(n+1) - 2n(n+2) + (n+2)(n+1)}{(n+2)(n+1)}\right] \tag{36}$$

$$= \theta^2 \left[\frac{n^2 + n - 2n^2 - 4n + n^2 + 3n + 2}{(n+2)(n+1)}\right] \tag{37}$$

$$= \theta^2 \left[\frac{2}{(n+2)(n+1)}\right] \tag{38}$$

$$= \frac{2\theta^2}{(n+2)(n+1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \tag{39}$$

Passo 4: Conclusão

Como $E[(T_n - \theta)^2] \to 0$, pelo **Resultado 2P** (com $r = 2$ e $a = \theta$):

$$T_n = X_{(n)} \xrightarrow{P}_{n\to\infty} \theta \quad \square \tag{40}$$

Observações e Intuição

Pontos Importantes

1. **Estatística de Ordem:** $X_{(n)} = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$ é um estimador natural para o extremo superior θ da uniforme.

2. **Viés do Estimador:** Note que:

$$E[T_n] = \frac{n\theta}{n+1} = \theta\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) < \theta \tag{41}$$

   O estimador é viesado negativamente, mas o viés $\to 0$ quando $n \to \infty$.

3. **Estimador Não-Viesado:** Se quisermos um estimador não-viesado, podemos usar:

$$\tilde{T}_n = \frac{n+1}{n} X_{(n)} \tag{42}$$

   pois $E[\tilde{T}_n] = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n\theta}{n+1} = \theta$.

4. **Taxa de Convergência:** O EQM decai como $O(1/n^2)$:

$$E[(T_n - \theta)^2] = O\left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{43}$$

   Isso é mais rápido que a taxa típica $O(1/n)$ de muitos estimadores!

5. **EMV:** Na Questão 3.23, veremos que $X_{(n)}$ é de fato o Estimador de Máxima Verossimilhança para θ neste modelo.

6. **Comparação com $\bar{X}_n$:** A média amostral também é consistente ($\bar{X}_n \xrightarrow{P} \theta/2$), mas $X_{(n)}$ converge para o parâmetro de interesse θ, não $\theta/2$.

Interpretação Gráfica

Resumo da Questão

Resultado Principal:

$$X_{(n)} \xrightarrow{P} \theta$$

Método Utilizado:

- Cálculo da densidade: $f_{T_n}(t) = \frac{n}{\theta^n} t^{n-1} \mathbf{1}_{(0,\theta)}(t)$
- Momentos: $E[T_n] = \frac{n\theta}{n+1}$, $E[T_n^2] = \frac{n\theta^2}{n+2}$
- EQM: $E[(T_n - \theta)^2] = \frac{2\theta^2}{(n+2)(n+1)} \to 0$
- Resultado 2P: $E[|T_n - \theta|^2] \to 0 \Rightarrow T_n \xrightarrow{P} \theta$

Importância: Prova a consistência de $X_{(n)}$ como estimador de θ para $U(0, \theta)$.

3 Questão Extra 3: Convergência do Quociente

Questão Extra 3

Sejam $X_1, \dots, X_n$ v.a.'s i.i.d. tais que $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ para $\mu, \sigma^2 < \infty$. Mostre que:

$$\frac{\bar{X}_n}{S_n^2} \xrightarrow{P}_{n\to\infty} \frac{\mu}{\sigma^2} \tag{44}$$

Solução Detalhada

Estratégia da Demonstração

Usaremos o **Resultado 4P** sobre operações algébricas com convergências em probabilidade.

Passo 1: Convergências Individuais

Pelo **Resultado 1P** (Lei Fraca dos Grandes Números):

$$\bar{X}_n \xrightarrow{P}_{n\to\infty} \mu \tag{45}$$

Pela **Questão Extra 1** (já demonstrada):

$$S_n^2 \xrightarrow{P}_{n\to\infty} \sigma^2 \tag{46}$$

Passo 2: Aplicação do Resultado 4P

O **Resultado 4P** afirma que se $U_n \xrightarrow{P} u$ e $V_n \xrightarrow{P} v$ com $v \neq 0$ e $P(V_n = 0) = 0$ para todo n, então:

$$\frac{U_n}{V_n} \xrightarrow{P} \frac{u}{v} \tag{47}$$

Verificação das condições:

- $U_n = \bar{X}_n \xrightarrow{P} \mu$ ✓
- $V_n = S_n^2 \xrightarrow{P} \sigma^2$ ✓
- $\sigma^2 > 0$ (por hipótese) ✓
- $P(S_n^2 = 0) = 0$ para todo $n \geq 2$ ✓(precisa de pelo menos 2 observações diferentes)

Passo 3: Conclusão

Pelo Resultado 4P (item iii):

$$\frac{\bar{X}_n}{S_n^2} \xrightarrow{P}_{n\to\infty} \frac{\mu}{\sigma^2} \quad \square \tag{48}$$

Observações e Intuição

Pontos Importantes

1. **Operações Algébricas Preservam Convergência:** O Resultado 4P é fundamental porque permite operar com limites em probabilidade como se fossem limites determinísticos:
   - Soma: $U_n + V_n \xrightarrow{P} u + v$
   - Produto: $U_n \cdot V_n \xrightarrow{P} u \cdot v$
   - Quociente: $U_n/V_n \xrightarrow{P} u/v$ (se $v \neq 0$)
2. **Condição de Não-Degeneração:** A condição $P(V_n = 0) = 0$ é crucial para o quociente. Se S_n^2 pudesse ser zero com probabilidade positiva, o quociente não estaria bem definido.
3. **Interpretação Estatística:** O quociente $\frac{\bar{X}_n}{S_n^2}$ não é uma estatística comum, mas o resultado ilustra que podemos trabalhar com funções racionais de estimadores consistentes.
4. **Generalização:** Se $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é contínua em (u, v), então:
   $$g(\bar{X}_n, S_n^2) \xrightarrow{P} g(\mu, \sigma^2) \tag{49}$$
   O quociente é o caso especial $g(x, y) = x/y$.
5. **Exemplo Relacionado:** O coeficiente de variação amostral:
   $$CV_n = \frac{S_n}{\bar{X}_n} \xrightarrow{P} \frac{\sigma}{\mu} \quad (\text{se } \mu \neq 0) \tag{50}$$

Cuidado com Quocientes

Contraexemplo: Se $V_n \xrightarrow{P} 0$, o quociente U_n/V_n pode divergir mesmo que $U_n \xrightarrow{P} u$. Por exemplo:

- Se $U_n = 1/n$ e $V_n = 1/n^2$
- Então $U_n \xrightarrow{P} 0$ e $V_n \xrightarrow{P} 0$
- Mas $U_n/V_n = n \to \infty$ (não converge!)

Por isso a condição $v \neq 0$ é essencial.

Resumo da Questão

Resultado Principal:

$$\frac{\bar{X}_n}{S_n^2} \xrightarrow{P} \frac{\mu}{\sigma^2}$$

Método Utilizado:

- Resultado 1P: $\bar{X}_n \xrightarrow{P} \mu$
- Questão Extra 1: $S_n^2 \xrightarrow{P} \sigma^2$
- Resultado 4P (item iii): quociente de convergentes converge

Lição: Operações algébricas preservam convergência em probabilidade (com cuidados para divisão).

4 Questão Extra 4: Função Contínua de Convergente

Questão Extra 4

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. tais que $X_i \sim U(0, \theta)$ para $\theta > 0$. Mostre que:

$$T_n^2 = X_{n:n}^2 \xrightarrow[n\to\infty]{P} \theta^2 \tag{51}$$

Solução Detalhada

Estratégia da Demonstração

Usaremos o **Resultado 5P** (teorema da função contínua para convergência em probabilidade).

Passo 1: Convergência do Máximo

Pela **Questão Extra 2** (já demonstrada):

$$X_{n:n} \xrightarrow[n\to\infty]{P} \theta \tag{52}$$

Passo 2: Aplicação do Resultado 5P

O **Resultado 5P** afirma que se $U_n \xrightarrow{P} u$ e $g(\cdot)$ é uma função contínua, então:

$$g(U_n) \xrightarrow[n\to\infty]{P} g(u) \tag{53}$$

Aplicação ao nosso caso:

- $U_n = X_{n:n}$
- $u = \theta$
- $g(x) = x^2$ (função contínua em $\mathbb{R}$)

Portanto:

$$g(X_{n:n}) = X_{n:n}^2 \xrightarrow[n\to\infty]{P} g(\theta) = \theta^2 \quad \square \tag{54}$$

Observações e Intuição

Pontos Importantes

1. **Preservação de Convergência por Funções Contínuas:** Este é um dos teoremas mais úteis em teoria assintótica. Se uma sequência converge em probabilidade, podemos aplicar qualquer função contínua e a convergência é preservada.

2. **Exemplos de Funções Contínuas Úteis:**
   - $g(x) = x^2$: $U_n \xrightarrow{P} u \Rightarrow U_n^2 \xrightarrow{P} u^2$
   - $g(x) = \sqrt{x}$ (para $x > 0$): $U_n \xrightarrow{P} u \Rightarrow \sqrt{U_n} \xrightarrow{P} \sqrt{u}$
   - $g(x) = e^x$: $U_n \xrightarrow{P} u \Rightarrow e^{U_n} \xrightarrow{P} e^u$
   - $g(x) = \log x$ (para $x > 0$): $U_n \xrightarrow{P} u \Rightarrow \log U_n \xrightarrow{P} \log u$

3. **Aplicação ao nosso exemplo:** Como $S_n^2 \xrightarrow{P} \sigma^2$, temos:

$$S_n = \sqrt{S_n^2} \xrightarrow{P} \sqrt{\sigma^2} = \sigma \tag{55}$$

4. **Cuidado com Descontinuidades:** Se g tem descontinuidade em u, o resultado pode falhar. Por exemplo:

$$g(x) = \mathbf{1}_{x>0} = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \tag{56}$$

   é descontínua em $x = 0$.

5. **Demonstração do Resultado 5P:** A prova usa ε-δ da continuidade:

$$|x - u| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(u)| < \varepsilon \tag{57}$$

   Logo,

$$P(|g(U_n) - g(u)| \geq \varepsilon) \leq P(|U_n - u| \geq \delta) \to 0 \tag{58}$$

Resumo da Questão

Resultado Principal:

$$X_{n:n}^2 \xrightarrow{P} \theta^2$$

Método Utilizado:

- Questão Extra 2: $X_{n:n} \xrightarrow{P} \theta$
- Resultado 5P: função contínua preserva convergência em P
- Função $g(x) = x^2$ é contínua

Lição: Transformações contínuas de estimadores consistentes são consistentes.

5 Questão Extra 5: Distribuição Limite do Máximo Uniforme

Questão Extra 5

Sejam $X_1, \dots, X_n$ v.a.'s i.i.d tais que $X_i \sim U(0, \theta)$ para $\theta > 0$.
Encontre a distribuição limite da sequência:

$$U_n = \frac{n}{\theta}(\theta - T_n) \quad \text{para} \quad T_n \triangleq X_{n:n} \tag{59}$$

Solução Detalhada

Estratégia da Demonstração

Calcularemos a função de distribuição acumulada (fda) de U_n e tomaremos o limite quando $n \to \infty$.

Passo 1: Função de Distribuição de T_n

Da Questão Extra 2, sabemos que:

$$F_{T_n}(t) = \left(\frac{t}{\theta}\right)^n \mathbf{1}_{(0,\theta)}(t) + \mathbf{1}_{[\theta,\infty)}(t) \tag{60}$$

Passo 2: Função de Distribuição de U_n

Para $u > 0$, calculemos $F_{U_n}(u) = P(U_n \leq u)$:

$$\begin{aligned} F_{U_n}(u) &= P\left(\frac{n}{\theta}(\theta - T_n) \leq u\right) && (61)\\ &= P\left(\theta - T_n \leq \frac{\theta u}{n}\right) && (62)\\ &= P\left(-T_n \leq \frac{\theta u}{n} - \theta\right) && (63)\\ &= P\left(T_n \geq \theta\left(1 - \frac{u}{n}\right)\right) && (64) \end{aligned}$$

Solução Detalhada

Passo 3: Cálculo da Probabilidade

$$F_{U_n}(u) = P\left(T_n \geq \theta\left(1 - \frac{u}{n}\right)\right) \tag{65}$$
$$= 1 - P\left(T_n < \theta\left(1 - \frac{u}{n}\right)\right) \tag{66}$$
$$= 1 - F_{T_n}\left(\theta\left(1 - \frac{u}{n}\right)\right) \tag{67}$$

Como $0 < \theta(1 - u/n) < \theta$ para n suficientemente grande:

$$F_{U_n}(u) = 1 - \left(\frac{\theta(1 - u/n)}{\theta}\right)^n \tag{68}$$
$$= 1 - \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n \tag{69}$$

Passo 4: Limite quando $n \to \infty$

Usando o resultado limite $(R.3)$: $\lim_{n\to\infty}(1 + x/n)^n = e^x$, temos:

$$\lim_{n\to\infty} F_{U_n}(u) = \lim_{n\to\infty}\left[1 - \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n\right] \tag{70}$$
$$= 1 - \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{(-u)}{n}\right)^n \tag{71}$$
$$= 1 - e^{-u}, \quad u > 0 \tag{72}$$

Passo 5: Identificação da Distribuição

Reconhecemos que $F_U(u) = 1 - e^{-u}$ para $u > 0$ é a fda de uma distribuição **Exponencial**(1).
Verificação: Para $E \sim \text{Exp}(1)$ com densidade $f_E(u) = e^{-u}\mathbf{1}_{u>0}$:

$$F_E(u) = \int_0^u e^{-t}dt = -e^{-t}\Big|_0^u = 1 - e^{-u} \quad \checkmark \tag{73}$$

Conclusão

$$U_n = \frac{n}{\theta}(\theta - X_{n:n}) \xrightarrow{D} E \sim \text{Exp}(1) \quad \square \tag{74}$$

Observações e Intuição

Pontos Importantes

1. **Normalização Não-Padrão:** Diferente do TCL onde normalizamos com $\sqrt{n}$, aqui a normalização correta é n (linear). Isso indica uma taxa de convergência mais rápida.

2. **Distribuição Limite Não-Normal:** Este é um exemplo importante onde a distribuição limite NÃO é normal. O TCL não se aplica aqui porque $X_{n:n}$ não é uma média.

3. **Interpretação do Resultado:** A distância normalizada $n(\theta - X_{n:n})/\theta$ entre o máximo e o limite superior converge para uma Exponencial(1).

4. **Relação com Resultados Anteriores:**

   - Questão Extra 2 mostra: $X_{n:n} \xrightarrow{P} \theta$
   - Esta questão refina: $n(\theta - X_{n:n})/\theta$ tem distribuição limite não-degenerada
   - Isso dá informação sobre a *taxa* de convergência

5. **Aplicação ao Limite** $(R.3)$**:** A chave da demonstração é o limite:

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n = e^{-u} \tag{75}$$

   Este é um dos resultados limites fundamentais apresentados no início do capítulo.

6. **Estatística de Valores Extremos:** Este resultado é um exemplo clássico da teoria de valores extremos, onde distribuições limite de máximos/mínimos são estudadas.

Consequências Práticas

- **Intervalos de Confiança:** Podemos construir IC para θ usando a distribuição de U_n:

$$P\left(a < \frac{n}{\theta}(\theta - X_{n:n}) < b\right) \approx P(a < E < b) = e^{-a} - e^{-b} \tag{76}$$

- **Quantis:** Para $\alpha = 0.05$, os quantis de Exp(1) são:
  - $P(E > 2.996) = 0.05$
  - $P(E > 0.051) = 0.95$

- **IC Aproximado para** θ**:**

$$\left[X_{n:n}, X_{n:n} + \frac{\theta \cdot 2.996}{n}\right] \approx \text{IC de } 95\% \tag{77}$$

  (mas θ é desconhecido, então precisamos estimar)

Resumo da Questão

Resultado Principal:

$$U_n = \frac{n}{\theta}(\theta - X_{n:n}) \xrightarrow{D} \text{Exp}(1)$$

Método Utilizado:

- Cálculo da fda: $F_{U_n}(u) = 1 - (1 - u/n)^n$
- Limite $(R.3)$: $(1 - u/n)^n \to e^{-u}$
- Identificação: $F_U(u) = 1 - e^{-u}$ é fda de Exp(1)

Importância: Mostra que a taxa de convergência de $X_{n:n}$ é $O(1/n)$, mais rápida que a típica $O(1/\sqrt{n})$.

6 Exercício 11: Estatística Qui-Quadrado via TCL

Exercício 11

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. reais tais que $\mu = E\{X_i\} < \infty$ e $\sigma^2 = \mathrm{Var}\{X_i\} < \infty$. Mostre que:

$$n\left(\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma}\right)^2 \xrightarrow[n\to\infty]{d} Q, \tag{78}$$

tal que $Q \sim \chi_1^2$.

Solução Detalhada

Estratégia da Demonstração

Usaremos o **Teorema Central do Limite** seguido do **Teorema 3.7.6.4(a)** (função contínua preserva convergência em distribuição).

Passo 1: Aplicação do TCL

Pelo **Teorema 3.7.6.1(a)** (Teorema Central do Limite):

$$Z_n \triangleq \sqrt{n}\left(\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{d} Z \sim N(0,1) \tag{79}$$

Passo 2: Transformação Contínua

Considere a função $g(x) = x^2$. Claramente, g é contínua em $\mathbb{R}$.
Pelo **Teorema 3.7.6.4(a)** (teorema da função contínua em distribuição), se $U_n \xrightarrow{d} U$ e g é contínua, então:

$$g(U_n) \xrightarrow[n\to\infty]{d} g(U) \tag{80}$$

Passo 3: Aplicação ao Nosso Caso

Aplicando com $U_n = Z_n$ e $g(x) = x^2$:

$$\begin{aligned}
g(Z_n) &= Z_n^2 && (81)\\
&= \left[\sqrt{n}\left(\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma}\right)\right]^2 && (82)\\
&= n\left(\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma}\right)^2 && (83)\\
&\xrightarrow[n\to\infty]{d} Z^2 && (84)
\end{aligned}$$

onde $Z \sim N(0,1)$.

Solução Detalhada

Passo 4: Distribuição de Z^2

Se $Z \sim N(0,1)$, então $Z^2 \sim \chi_1^2$ (qui-quadrado com 1 grau de liberdade).
Verificação: Para $Z \sim N(0,1)$ e $Q = Z^2$:

$$\begin{aligned} F_Q(q) = P(Z^2 \leq q) &= P(-\sqrt{q} \leq Z \leq \sqrt{q}) && (85) \\ &= \Phi(\sqrt{q}) - \Phi(-\sqrt{q}) && (86) \\ &= 2\Phi(\sqrt{q}) - 1 && (87) \end{aligned}$$

Derivando:

$$f_Q(q) = \frac{d}{dq}[2\Phi(\sqrt{q}) - 1] = 2\phi(\sqrt{q}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{q}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi q}} e^{-q/2} \tag{88}$$

que é a densidade de $\chi_1^2 = \Gamma(1/2, 1/2)$. ✓

Conclusão

$$n\left(\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma}\right)^2 \xrightarrow[n\to\infty]{d} \chi_1^2 \quad \square \tag{89}$$

Observações e Intuição

Pontos Importantes

1. **Combinação de Dois Teoremas:** Esta questão ilustra a composição de resultados:
$$\text{TCL} + \text{Função Contínua} = \text{Distribuição de } \chi^2 \tag{90}$$

2. **Relação $N(0,1)$ e χ_1^2:** Este resultado estabelece a conexão fundamental:
$$Z \sim N(0,1) \Rightarrow Z^2 \sim \chi_1^2 \tag{91}$$

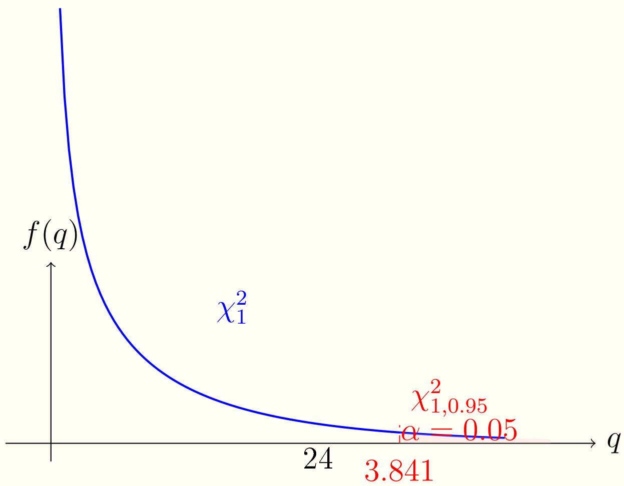
3. **Aplicação Prática (Testes):** Esta estatística é a base para:
   - Teste Z bilateral: rejeitamos $H_0 : \mu = \mu_0$ se $n(\bar{x} - \mu_0)^2/\sigma^2 > \chi^2_{1,1-\alpha}$
   - Equivalente a rejeitar se $|Z| > z_{\alpha/2}$

4. **Generalização para p Dimensões:** Se $\bar{X}_n \in \mathbb{R}^p$ e:
$$\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu) \xrightarrow{D} N_p(0, \Sigma) \tag{92}$$
então:
$$n(\bar{X}_n - \mu)^\top \Sigma^{-1}(\bar{X}_n - \mu) \xrightarrow{D} \chi_p^2 \tag{93}$$

5. **Exemplos Numéricos:**
   - Para $\alpha = 0.05$: $\chi^2_{1,0.95} = 3.841$
   - Logo, rejeitamos se $n(\bar{x} - \mu_0)^2/\sigma^2 > 3.841$
   - Equivalentemente, $|\bar{x} - \mu_0| > \sigma \cdot 1.96/\sqrt{n}$ ($z_{0.025} = 1.96$)

6. **Conexão com Variância Amostral:** Para normalidade, temos a decomposição:
$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right)^2 = n\left(\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma}\right)^2 + \frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} \tag{94}$$
onde o primeiro termo $\xrightarrow{D} \chi_1^2$ e o segundo $\sim \chi^2_{n-1}$ exatamente.

Visualização



Densidade de χ_1^2

Resumo da Questão

Resultado Principal:

$$n\left(\frac{\bar{X}_n-\mu}{\sigma}\right)^2 \xrightarrow{D} \chi^2_1$$

Método Utilizado:

- TCL: $Z_n = \sqrt{n}(\bar{X}_n-\mu)/\sigma \xrightarrow{D} N(0,1)$
- Teorema 3.7.6.4(a): $g(Z_n) = Z_n^2 \xrightarrow{D} Z^2$
- Propriedade: $Z^2 \sim \chi^2_1$ quando $Z \sim N(0,1)$

Importância: Base para testes bilaterais e intervalos de confiança.

7 Questão Extra 6: TCL para Bernoulli via MGF

Questão Extra 6

Sejam $X_1, \dots, X_n$ v.a.'s i.i.d. tais que $X_i \sim \text{Bernoulli}(p)$ com $p = \frac{1}{2}$ e

$$U_n = 2\sqrt{n}\left(\bar{X}_n - \frac{1}{2}\right).$$

Estude a distribuição limite de U_n.

Solução Detalhada

Estratégia da Demonstração

Usaremos o **Resultado 1D** (convergência via função geradora de momentos) para encontrar a distribuição limite.

Passo 1: Reescrever U_n

Primeiro, reescrevemos U_n em termos da soma:

$$\begin{aligned} U_n &= 2\sqrt{n}\left(\bar{X}_n - \frac{1}{2}\right) && (95)\\ &= 2\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{2}\right) && (96)\\ &= \frac{2}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} X_i - \sqrt{n} && (97)\\ &= \frac{2\sum_{i=1}^{n} X_i - n}{\sqrt{n}} && (98) \end{aligned}$$

Passo 2: Função Geradora de Momentos de U_n

$$\begin{aligned} M_{U_n}(t) &= E\left[e^{tU_n}\right] && (99)\\ &= E\left[\exp\left\{t \cdot \frac{2\sum_{i=1}^{n} X_i - n}{\sqrt{n}}\right\}\right] && (100)\\ &= E\left[\exp\left\{\frac{2t}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} X_i - t\sqrt{n}\right\}\right] && (101)\\ &= e^{-t\sqrt{n}} \cdot E\left[\exp\left\{\frac{2t}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} X_i\right\}\right] && (102) \end{aligned}$$

Solução Detalhada

Passo 3: Usando Independência

Como as X_i são independentes:

$$M_{U_n}(t) = e^{-t\sqrt{n}} \cdot \prod_{i=1}^{n} E\left[e^{\frac{2t}{\sqrt{n}}X_i}\right] \quad (103)$$

$$= e^{-t\sqrt{n}} \cdot \left(E\left[e^{\frac{2t}{\sqrt{n}}X_1}\right]\right)^n \quad (104)$$

Para $X_1 \sim \text{Bernoulli}(p)$, sabemos que $X_1 \in \{0, 1\}$:

$$E\left[e^{\frac{2t}{\sqrt{n}}X_1}\right] = (1-p) \cdot e^{\frac{2t}{\sqrt{n}}\cdot 0} + p \cdot e^{\frac{2t}{\sqrt{n}}\cdot 1} \quad (105)$$

$$= (1-p) + p \cdot e^{\frac{2t}{\sqrt{n}}} \quad (106)$$

Logo:

$$M_{U_n}(t) = e^{-t\sqrt{n}}\left[(1-p) + p \cdot e^{\frac{2t}{\sqrt{n}}}\right]^n \quad (107)$$

Passo 4: Caso Especial $p = \frac{1}{2}$

Substituindo $p = 1/2$:

$$M_{U_n}(t) = e^{-t\sqrt{n}}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{2t}{\sqrt{n}}}\right]^n \quad (108)$$

$$= e^{-t\sqrt{n}}\left[\frac{1}{2}\left(1 + e^{\frac{2t}{\sqrt{n}}}\right)\right]^n \quad (109)$$

$$= \frac{1}{2^n}e^{-t\sqrt{n}}\left[1 + e^{\frac{2t}{\sqrt{n}}}\right]^n \quad (110)$$

Podemos reescrever como:

$$M_{U_n}(t) = \frac{1}{2^n}\left[e^{-\frac{t}{\sqrt{n}}} + e^{\frac{t}{\sqrt{n}}}\right]^n \quad (111)$$

Ou ainda:

$$M_{U_n}(t) = \left[\frac{1}{2}\left(e^{-\frac{t}{\sqrt{n}}} + e^{\frac{t}{\sqrt{n}}}\right)\right]^n \quad (112)$$

Solução Detalhada

Passo 5: Expansão de Taylor

Expandimos as exponenciais usando Taylor em torno de 0:

$$e^{\frac{t}{\sqrt{n}}} = 1 + \frac{t}{\sqrt{n}} + \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right) \tag{113}$$

$$e^{-\frac{t}{\sqrt{n}}} = 1 - \frac{t}{\sqrt{n}} + \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right) \tag{114}$$

Somando:

$$e^{-\frac{t}{\sqrt{n}}} + e^{\frac{t}{\sqrt{n}}} = 2 + \frac{t^2}{n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right) \tag{115}$$

Logo:

$$M_{U_n}(t) = \left[\frac{1}{2}\left(2 + \frac{t^2}{n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right)\right]^n \tag{116}$$

$$= \left[1 + \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right]^n \tag{117}$$

Passo 6: Aplicação do Limite $(R.3)$

Pelo resultado limite $(R.3)$: $\lim_{n\to\infty}(1 + x/n)^n = e^x$, temos:

$$\lim_{n\to\infty} M_{U_n}(t) = \lim_{n\to\infty} \left[1 + \frac{t^2/2}{n}\right]^n = e^{t^2/2} \tag{118}$$

Passo 7: Identificação da Distribuição

Reconhecemos que $M_U(t) = e^{t^2/2}$ é a MGF de $Z \sim N(0,1)$.
Verificação: Para $Z \sim N(0,1)$:

$$M_Z(t) = E[e^{tZ}] = e^{t^2/2} \quad \checkmark \tag{119}$$

Conclusão

Pelo **Resultado 1D**, como $M_{U_n}(t) \to M_Z(t)$:

$$U_n = 2\sqrt{n}\left(\bar{X}_n - \frac{1}{2}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0,1) \quad \square \tag{120}$$

Observações e Intuição

Pontos Importantes

1. **Verificação do TCL:** Podemos verificar que este resultado está de acordo com o TCL:
   - Para Bernoulli(1/2): $E[X_i] = 1/2$ e $\text{Var}(X_i) = 1/2 \cdot 1/2 = 1/4$
   - Pelo TCL: $\sqrt{n}(\bar{X}_n - 1/2) \xrightarrow{D} N(0, 1/4)$
   - Multiplicando por 2: $2\sqrt{n}(\bar{X}_n - 1/2) \xrightarrow{D} N(0, 4 \cdot 1/4) = N(0, 1)$ ✓
2. **Demonstração via MGF:** Esta questão demonstra o TCL usando a função geradora de momentos, que é uma técnica alternativa à prova via função característica.
3. **Expansões de Taylor Cruciais:** Os passos chave são:
   - Expandir $e^{\pm t/\sqrt{n}}$ até ordem 2
   - Cancelar os termos lineares (aparecem com sinais opostos)
   - Reconhecer a forma $(1 + x/n)^n \to e^x$
4. **Normalização:** O fator 2 na frente vem de:

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - 1/2)}{\sqrt{\text{Var}(X_i)}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - 1/2)}{1/2} = 2\sqrt{n}(\bar{X}_n - 1/2) \tag{121}$$

5. **Aproximação Normal para Binomial:** Como $S_n = \sum X_i \sim \text{Binomial}(n, 1/2)$:

$$\frac{S_n - n/2}{\sqrt{n/4}} = \frac{2(S_n - n/2)}{\sqrt{n}} \xrightarrow{D} N(0, 1) \tag{122}$$

6. **Caso Geral $p \neq 1/2$:** Para p arbitrário:

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - p)}{\sqrt{p(1-p)}} \xrightarrow{D} N(0, 1) \tag{123}$$

Aplicação Prática

Para testar $H_0 : p = 1/2$ em uma moeda:

- Jogar a moeda n vezes e observar S_n caras
- Calcular $Z = 2(S_n - n/2)/\sqrt{n}$
- Rejeitar H_0 ao nível α se $|Z| > z_{\alpha/2}$

Exemplo: $n = 100$ jogadas, observamos 60 caras.

$$Z = \frac{2(60 - 50)}{\sqrt{100}} = \frac{20}{10} = 2 \tag{124}$$

$$|Z| = 2 > 1.96 = z_{0.025} \tag{125}$$

Concluímos que há evidência contra $p = 1/2$ ao nível 5%.

Resumo da Questão

Resultado Principal:

$$2\sqrt{n}\left(\bar{X}_n - \frac{1}{2}\right) \xrightarrow{D} N(0,1)$$

Método Utilizado:

- Cálculo da MGF de U_n
- Expansão de Taylor de $e^{\pm t/\sqrt{n}}$
- Limite $(R.3)$: $(1 + x/n)^n \to e^x$
- Resultado 1D: convergência via MGF

Importância: Demonstração alternativa do TCL via MGF para Bernoulli.

8 Questão Extra 7: Transformação de Q_n via Slutsky

Questão Extra 7 (continuação da Extra 4)

Sejam $\{X_n, n \geq 1\}$ i.i.d. com $X_n \sim U(0, \theta)$, $T_n = X_{n:n}$,

$$U_n = n \cdot (\theta - T_n)/\theta \quad \text{e} \quad Q_n = n \cdot (\theta - T_n)/T_n.$$

Encontre a distribuição limite de Q_n.

Solução Detalhada

Estratégia da Demonstração

Usaremos o **Teorema de Slutsky** (Resultado 3D) combinando convergências em distribuição e em probabilidade.

Passo 1: Resultados Conhecidos

Da **Questão Extra 5**, sabemos que:

$$U_n = \frac{n(\theta - T_n)}{\theta} \xrightarrow{d} E \sim \text{Exp}(1) \tag{126}$$

Da **Questão Extra 2**, sabemos que:

$$T_n \xrightarrow{p} \theta \tag{127}$$

Passo 2: Convergência de θ/T_n

Pelo **Resultado 4P** (operações com convergência em probabilidade), se $T_n \xrightarrow{p} \theta$ e $\theta \neq 0$:

$$\frac{\theta}{T_n} \xrightarrow{p} \frac{\theta}{\theta} = 1 \tag{128}$$

Passo 3: Reescrever Q_n

Observe que podemos reescrever Q_n como:

$$\begin{aligned} Q_n &= \frac{n(\theta - T_n)}{T_n} && (129) \\ &= \frac{n(\theta - T_n)}{\theta} \cdot \frac{\theta}{T_n} && (130) \\ &= U_n \cdot \frac{\theta}{T_n} && (131) \end{aligned}$$

Passo 4: Aplicação do Teorema de Slutsky

Temos:

- $U_n \xrightarrow{d} E \sim \text{Exp}(1)$ (convergência em distribuição)
- $\theta/T_n \xrightarrow{p} 1$ (convergência em probabilidade)

Pelo **Resultado 3D (Teorema de Slutsky)**, item (b):

$$Q_n = U_n \cdot \frac{\theta}{T_n} \xrightarrow{d} E \cdot 1 = E \tag{132}$$

Conclusão

$$Q_n = \frac{n(\theta - T_n)}{T_n} \xrightarrow{d} \text{Exp}(1) \quad \square \tag{133}$$

Observações e Intuição

Pontos Importantes

1. **Poder do Teorema de Slutsky:** Esta questão ilustra perfeitamente o uso do Slutsky:
   - Combinamos uma convergência em distribuição ($U_n \xrightarrow{d} E$)
   - Com uma convergência em probabilidade ($\theta/T_n \xrightarrow{p} 1$)
   - E obtemos convergência em distribuição do produto
2. **Comparação U_n vs Q_n:**
   - $U_n = n(\theta - T_n)/\theta$ normaliza usando o valor verdadeiro θ
   - $Q_n = n(\theta - T_n)/T_n$ normaliza usando o estimador T_n
   - Ambos têm a MESMA distribuição limite (Exponencial)!
   - Isso mostra que podemos substituir θ por T_n sem alterar a distribuição limite
3. **Aplicação Prática:** Na prática, não conhecemos θ, então usamos:
   $$Q_n = \frac{n(\theta - X_{n:n})}{X_{n:n}} \tag{134}$$
   que tem distribuição assintótica Exp(1), permitindo construir testes e IC.
4. **Estrutura da Demonstração:**
   (a) Identificar a fatoração: $Q_n = U_n \cdot (\theta/T_n)$
   (b) Verificar: $U_n \xrightarrow{d} E$ e $\theta/T_n \xrightarrow{p} 1$
   (c) Aplicar Slutsky: produto converge para $E \cdot 1 = E$
5. **Generalização:** Se $U_n \xrightarrow{d} U$ e $V_n \xrightarrow{p} c$ (constante), então:
   $$\frac{U_n}{V_n} \xrightarrow{d} \frac{U}{c} \tag{135}$$
   Este é o item (c) do Teorema de Slutsky.

Exemplo Numérico

Suponha $\theta = 10$ (desconhecido), $n = 50$, e observamos $x_{n:n} = 9.8$.
Estimamos:

$$Q_{\text{obs}} = \frac{50(10 - 9.8)}{9.8} = \frac{50 \cdot 0.2}{9.8} \approx 1.02 \tag{136}$$

Para IC de 95%: queremos a e b tais que $P(a < E < b) = 0.95$.
Para Exp(1): $P(E < 2.996) = 0.95$, então um IC aproximado para θ é:

$$\theta \approx X_{n:n} + \frac{X_{n:n} \cdot 2.996}{n} = 9.8 + \frac{9.8 \cdot 2.996}{50} \approx 10.39 \tag{137}$$

Resumo da Questão

Resultado Principal:

$$Q_n = \frac{n(\theta - X_{n:n})}{X_{n:n}} \xrightarrow{D} \text{Exp}(1)$$

Método Utilizado:

- Fatoração: $Q_n = U_n \cdot (\theta/T_n)$
- Extra 5: $U_n \xrightarrow{d} \text{Exp}(1)$
- Extra 2: $T_n \xrightarrow{p} \theta \Rightarrow \theta/T_n \xrightarrow{p} 1$
- Slutsky: produto converge

Importância: Permite construir IC para θ usando apenas dados observados.

9 Questão Extra 9: Distribuição Assintótica de $\sqrt{n}(S_n^2 - \sigma^2)$

Questão Extra 9

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma a.a. de $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ tal que $\mu, \sigma^2 < \infty$. Encontre a distribuição assintótica de:

$$H_n = \sqrt{n}(S_n^2 - \sigma^2) \tag{138}$$

Solução Detalhada

Estratégia da Demonstração

Usaremos a transformação de Helmert, o TCL e o Teorema de Slutsky.

Passo 1: Representação via Helmert

Usando a transformação de Helmert:

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=2}^{n} Y_i^2, \quad \text{para } Y_i \sim N(0, \sigma^2) \tag{139}$$

Isso caracteriza S_n^2 como uma média amostral de Y_i^2.

Passo 2: Aplicação do TCL

As variáveis $\{Y_i^2, i = 2, \ldots, n\}$ são i.i.d. com:

- $E[Y_i^2] = \sigma^2$
- $\text{Var}(Y_i^2) = E[Y_i^4] - (E[Y_i^2])^2 = 3\sigma^4 - \sigma^4 = 2\sigma^4$

(Cálculo de $E[Y_i^4] = 3\sigma^4$ visto na Questão Extra 1)
Pelo **Teorema 3.7.6.1(a)** (TCL) aplicado à média $\frac{1}{n-1}\sum_{i=2}^{n} Y_i^2$:

$$U_n = \sqrt{n-1}\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=2}^{n} Y_i^2 - E[Y_i^2]\right] \xrightarrow{d} N(0, \text{Var}(Y_i^2)) \tag{140}$$

Logo:

$$U_n = \sqrt{n-1}(S_n^2 - \sigma^2) \xrightarrow{d} N(0, 2\sigma^4) \tag{141}$$

Solução Detalhada

Passo 3: Ajuste para $\sqrt{n}$

Queremos a distribuição de $H_n = \sqrt{n}(S_n^2 - \sigma^2)$.
Defina:

$$V_n = \frac{n}{n-1} = 1 + \frac{1}{n-1} \tag{142}$$

Então:

$$H_n = \sqrt{n}(S_n^2 - \sigma^2) = \sqrt{\frac{n}{n-1}} \cdot \sqrt{n-1}(S_n^2 - \sigma^2) = \sqrt{V_n} \cdot U_n \tag{143}$$

Passo 4: Convergência de V_n

Precisamos mostrar que $V_n \xrightarrow{p} 1$.
Pela desigualdade de Chebyshev:

$$\begin{aligned}
P(|V_n - 1| \geq \varepsilon) &= P\left(\left|\frac{1}{n-1}\right| \geq \varepsilon\right) && (144)\\
&\leq P\left(\left|\frac{1}{n-1}\right|^2 \geq \varepsilon^2\right) && (145)\\
&\leq \frac{E[(V_n-1)^2]}{\varepsilon^2} && (146)\\
&= \frac{(n/(n-1)-1)^2}{\varepsilon^2} && (147)\\
&= \frac{1}{(n-1)^2\varepsilon^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0 && (148)
\end{aligned}$$

Logo, $V_n \xrightarrow{p} 1$, e portanto $\sqrt{V_n} \xrightarrow{p} 1$ (Resultado 5P).

Passo 5: Aplicação do Teorema de Slutsky

Temos:

- $U_n \xrightarrow{d} N(0, 2\sigma^4)$ (convergência em distribuição)
- $\sqrt{V_n} \xrightarrow{p} 1$ (convergência em probabilidade)

Pelo **Resultado 3D (Teorema de Slutsky)**, item (b):

$$H_n = U_n \cdot \sqrt{V_n} \xrightarrow{d} N(0, 2\sigma^4) \cdot 1 = N(0, 2\sigma^4) \tag{149}$$

Conclusão

$$\sqrt{n}(S_n^2 - \sigma^2) \xrightarrow{d} N(0, 2\sigma^4) \quad \square \tag{150}$$

Observações e Intuição

Pontos Importantes

1. **Caso Especial do Teorema 3.7.6.3(a):** Para $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$:
   - $\mu_4 = E[(X_i - \mu)^4] = 3\sigma^4$ (momento de quarta ordem da normal)
   - Logo, $\mu_4 - \sigma^4 = 3\sigma^4 - \sigma^4 = 2\sigma^4$
   - O resultado geral dá: $\sqrt{n}(S_n^2 - \sigma^2) \xrightarrow{D} N(0, \mu_4 - \sigma^4) = N(0, 2\sigma^4)$
2. **Diferença $\sqrt{n-1}$ vs $\sqrt{n}$:**
   - A transformação de Helmert produz $n-1$ variáveis para S_n^2
   - O TCL aplicado diretamente dá $\sqrt{n-1}(S_n^2 - \sigma^2) \xrightarrow{D} N(0, 2\sigma^4)$
   - Precisamos ajustar para $\sqrt{n}$ usando Slutsky
3. **Aplicação a Testes:** Este resultado permite testar $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$:
$$Z = \frac{\sqrt{n}(S_n^2 - \sigma_0^2)}{\sqrt{2}\sigma_0^2} \xrightarrow{D} N(0,1) \tag{151}$$
4. **Intervalo de Confiança Assintótico:** IC de $(1-\alpha)$ para σ^2:
$$S_n^2 \pm z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sqrt{2}\sigma^2}{\sqrt{n}} \tag{152}$$
   (na prática, substituímos σ^2 por S_n^2)
5. **Taxa de Convergência:** A variância assintótica é $2\sigma^4$, então:
$$\text{Var}(S_n^2) \approx \frac{2\sigma^4}{n} \tag{153}$$
6. **Generalização para Não-Normais:** Para distribuições não-normais, a variância assintótica é $\mu_4 - \sigma^4$, que pode ser diferente de $2\sigma^4$.

Conexão com Helmert

A transformação de Helmert separa:

- $Y_1 = \sqrt{n}\,\bar{X}_n$ (relacionado à média)
- $Y_2, \dots, Y_n$ (relacionados à variância)

E preserva:
$$\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 = \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 = n\bar{X}_n^2 + (n-1)S_n^2 \tag{154}$$

Resumo da Questão

Resultado Principal:

$$\sqrt{n}(S_n^2 - \sigma^2) \xrightarrow{D} N(0, 2\sigma^4)$$

Método Utilizado:

- Helmert: $S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=2}^{n} Y_i^2$
- TCL: $\sqrt{n-1}(S_n^2 - \sigma^2) \xrightarrow{D} N(0, 2\sigma^4)$
- Slutsky: ajuste de $\sqrt{n-1}$ para $\sqrt{n}$

Importância: Base para testes e IC para σ^2.

10 Questão Extra 10: Método Delta para Poisson

Questão Extra 10

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. tais que $X_i \sim \text{Poisson}(\lambda)$. Encontre a distribuição assintótica de:

$$\sqrt{n}\left(\bar{X}_n^3 - \lambda^3\right) \tag{155}$$

Solução Detalhada

Estratégia da Demonstração

Usaremos o **Teorema de Mann–Wald (Método Delta)** - Teorema 3.7.6.2(a).

Passo 1: Verificar Condições

Para aplicar o Método Delta, precisamos:

1. Uma estatística T_n com normalidade assintótica: $\sqrt{n}(T_n - \theta) \xrightarrow{D} N(0, \sigma^2(\theta))$
2. Uma função g continuamente diferenciável com $g'(\theta) \neq 0$

Passo 2: Normalidade Assintótica de $\bar{X}_n$

Para $X_i \sim \text{Poisson}(\lambda)$:

- $E[X_i] = \lambda$
- $\text{Var}(X_i) = \lambda$ (propriedade da Poisson)

Pode-se mostrar que $E[X_i^3] < \infty$ e $\text{Var}(X_i^3) < \infty$.
Pelo **Teorema Central do Limite**:

$$\sqrt{n}(\bar{X}_n - \lambda) \xrightarrow{d} N(0, \lambda) \tag{156}$$

Ou equivalentemente (forma padronizada):

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \lambda)}{\sqrt{\lambda}} \xrightarrow{d} N(0, 1) \tag{157}$$

Passo 3: Escolha da Função

Definimos:

$$g(\lambda) = \lambda^3 \tag{158}$$

Esta função é continuamente diferenciável com:

$$g'(\lambda) = 3\lambda^2 \neq 0 \quad (\text{para } \lambda > 0) \tag{159}$$

Solução Detalhada

Passo 4: Aplicação do Método Delta

Pelo **Teorema 3.7.6.2(a)** (Método Delta):
Se $\sqrt{n}(T_n - \theta) \xrightarrow{D} N(0, \sigma^2(\theta))$ e $g'(\theta) \neq 0$, então:

$$\sqrt{n}[g(T_n) - g(\theta)] \xrightarrow{D} N(0, \sigma^2(\theta) \cdot [g'(\theta)]^2) \tag{160}$$

Aplicação ao nosso caso:

- $T_n = \bar{X}_n$
- $\theta = \lambda$
- $\sigma^2(\lambda) = \lambda$
- $g(\lambda) = \lambda^3$
- $g'(\lambda) = 3\lambda^2$

Portanto:

$$\sqrt{n}[g(\bar{X}_n) - g(\lambda)] \xrightarrow{D} N(0, \lambda \cdot [3\lambda^2]^2) \tag{161}$$

$$\sqrt{n}(\bar{X}_n^3 - \lambda^3) \xrightarrow{D} N(0, \lambda \cdot 9\lambda^4) \tag{162}$$

$$\xrightarrow{D} N(0, 9\lambda^5) \tag{163}$$

Conclusão

$$\sqrt{n}(\bar{X}_n^3 - \lambda^3) \xrightarrow{d} N(0, 9\lambda^5) \quad \square \tag{164}$$

Observações e Intuição

Pontos Importantes

1. **Método Delta em Ação:** Esta questão demonstra perfeitamente como o Método Delta funciona:
   - Começamos com normalidade de $\bar{X}_n$
   - Aplicamos transformação não-linear $g(\lambda) = \lambda^3$
   - A derivada amplifica a variância: Var $\leftarrow \lambda \cdot (3\lambda^2)^2 = 9\lambda^5$
2. **Fórmula do Método Delta:** A variância assintótica sempre tem a forma:
$$\text{Var}_{\text{assintótica}}[g(\bar{X}_n)] = [g'(\theta)]^2 \cdot \text{Var}_{\text{assintótica}}[\bar{X}_n] \tag{165}$$
3. **Interpretação da Derivada:** $g'(\lambda) = 3\lambda^2$ mede a "sensibilidade"de λ^3 a mudanças em λ. Valores grandes de λ amplificam mais o erro.
4. **IC Assintótico para λ^3:** Podemos construir:
$$\bar{X}_n^3 \pm z_{\alpha/2} \cdot \frac{3\bar{X}_n^{5/2}}{\sqrt{n}} \tag{166}$$
(substituindo λ por $\bar{X}_n$)
5. **Comparação com Estimação Direta:** Se quiséssemos estimar λ^3 diretamente:
   - Poderíamos usar $\bar{X}_n^3$ (pelo Método Delta)
   - Ou usar a média de X_i^3 (que também funciona, mas requer calcular $E[X_i^3]$ e $\text{Var}(X_i^3)$)
6. **Generalização:** Para qualquer g diferenciável:
$$\sqrt{n}[g(\bar{X}_n) - g(\lambda)] \xrightarrow{D} N(0, [g'(\lambda)]^2\lambda) \tag{167}$$
Exemplos:
   - $g(\lambda) = \sqrt{\lambda}$: variância assintótica $= \frac{1}{4\lambda} \cdot \lambda = \frac{1}{4}$
   - $g(\lambda) = \log\lambda$: variância assintótica $= \frac{1}{\lambda^2} \cdot \lambda = \frac{1}{\lambda}$
   - $g(\lambda) = e^\lambda$: variância assintótica $= e^{2\lambda} \cdot \lambda$

Exemplo Numérico

Suponha $n = 100$, observamos $\bar{x}_n = 5$.
Estimativa pontual: $\hat{\lambda}^3 = 5^3 = 125$
Erro padrão assintótico:
$$\text{SE} = \frac{3 \cdot 5^{5/2}}{\sqrt{100}} = \frac{3 \cdot 55.90}{10} \approx 16.77 \tag{168}$$
IC de 95%:

$$125 \pm 1.96 \cdot 16.77 = 125 \pm 32.87 = [92.13, 157.87] \tag{169}$$

Resumo da Questão

Resultado Principal:

$$\sqrt{n}(\bar{X}_n^3 - \lambda^3) \xrightarrow{D} N(0, 9\lambda^5)$$

Método Utilizado:

- TCL: $\sqrt{n}(\bar{X}_n - \lambda) \xrightarrow{D} N(0, \lambda)$
- Função: $g(\lambda) = \lambda^3$ com $g'(\lambda) = 3\lambda^2$
- Método Delta: variância $= \lambda \cdot (3\lambda^2)^2 = 9\lambda^5$

Importância: Demonstra como obter distribuição assintótica de transformações não-lineares.

11 Questão 3.23: Consistência do EMV para Uniforme

Questão 3.23

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra de $X \sim U(0, \theta)$. Mostre que o estimador de máxima verossimilhança para θ, $T_n = X_{n:n}$, é consistente para θ.

Solução Detalhada

Estratégia da Demonstração

Mostraremos diretamente que $P_\theta(|X_{n:n} - \theta| < \varepsilon) \to 1$ para todo $\varepsilon > 0$.

Passo 1: Função de Distribuição de $X_{n:n}$

Da Questão Extra 2, temos:

$$F_{X_{n:n}}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \left(\frac{t}{\theta}\right)^n, & 0 \le t \le \theta, \\ 1, & t > \theta \end{cases} \tag{170}$$

Passo 2: Probabilidade de Estar Próximo de θ

Para $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned} P_\theta(|X_{n:n} - \theta| < \varepsilon) &= P_\theta(\theta - \varepsilon < X_{n:n} < \theta + \varepsilon) && (171) \\ &= P_\theta(\theta - \varepsilon < X_{n:n} < \theta) && (172) \end{aligned}$$

(pois $X_{n:n} \le \theta$ sempre, já que todas as observações $\le \theta$)

$$\begin{aligned} &= F_{X_{n:n}}(\theta) - F_{X_{n:n}}(\theta - \varepsilon) && (173) \\ &= 1 - F_{X_{n:n}}(\theta - \varepsilon) && (174) \end{aligned}$$

Passo 3: Análise por Casos

Caso 1: $\varepsilon \ge \theta$ Se $\varepsilon \ge \theta$, então $\theta - \varepsilon \le 0$, logo:

$$F_{X_{n:n}}(\theta - \varepsilon) = 0 \tag{175}$$

Portanto:

$$P_\theta(|X_{n:n} - \theta| < \varepsilon) = 1 - 0 = 1 \tag{176}$$

Caso 2: $\varepsilon < \theta$ Se $0 < \varepsilon < \theta$, então $0 < \theta - \varepsilon < \theta$, logo:

$$\begin{aligned} F_{X_{n:n}}(\theta - \varepsilon) &= \left(\frac{\theta - \varepsilon}{\theta}\right)^n && (177) \\ &= \left(1 - \frac{\varepsilon}{\theta}\right)^n && (178) \end{aligned}$$

Portanto:

$$P_\theta(|X_{n:n} - \theta| < \varepsilon) = 1 - \left(1 - \frac{\varepsilon}{\theta}\right)^n \tag{179}$$

Solução Detalhada

Passo 4: Limite quando $n \to \infty$

Para $\varepsilon < \theta$ fixado:

$$\lim_{n\to\infty} P_\theta(|X_{n:n} - \theta| < \varepsilon) = \lim_{n\to\infty} \left[1 - \left(1 - \frac{\varepsilon}{\theta}\right)^n\right] \tag{180}$$
$$= 1 - 0 \tag{181}$$
$$= 1 \tag{182}$$

pois $0 < 1 - \varepsilon/\theta < 1$ e portanto $(1 - \varepsilon/\theta)^n \to 0$ quando $n \to \infty$.

Conclusão

Para todo $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} P_\theta(|X_{n:n} - \theta| < \varepsilon) = 1 \tag{183}$$

Equivalentemente:

$$\lim_{n\to\infty} P_\theta(|X_{n:n} - \theta| \geq \varepsilon) = 0 \tag{184}$$

Portanto, pela definição de convergência em probabilidade:

$$X_{n:n} \xrightarrow[n\to\infty]{P} \theta \quad \square \tag{185}$$

Logo, o EMV $\hat{\theta}_n = X_{n:n}$ é consistente para θ.

Observações e Intuição

Pontos Importantes

1. **Método Direto vs. EQM:** Esta solução usa a *definição* de convergência em probabilidade diretamente, enquanto a Questão Extra 2 usou o EQM. Ambas são válidas!

2. **Tamanho Amostral Mínimo:** Das notas (n32), podemos encontrar o menor n_0 tal que:
$$P(|X_{n:n} - \theta| < \varepsilon) \geq 1 - \delta \tag{186}$$
Resolvendo $1 - (1 - \varepsilon/\theta)^n \geq 1 - \delta$:
$$(1 - \varepsilon/\theta)^n \leq \delta \tag{187}$$
$$n \geq \frac{\log \delta}{\log(1 - \varepsilon/\theta)} \tag{188}$$
Logo:
$$n_0 = \left\lceil \frac{\log \delta}{\log(1 - \varepsilon/\theta)} \right\rceil + 1 \tag{189}$$

3. **Exemplo Numérico:** Para $\theta = 10$, $\varepsilon = 1$, $\delta = 0.05$:
$$n_0 \geq \frac{\log(0.05)}{\log(1 - 0.1)} \tag{190}$$
$$= \frac{-2.996}{-0.1054} \tag{191}$$
$$\approx 28.43 \tag{192}$$
Portanto, $n_0 = 29$. Com 29 ou mais observações, temos pelo menos 95% de chance de $X_{n:n}$ estar a menos de 1 unidade de $\theta = 10$.

4. **EMV para Uniforme:** A verossimilhança é:
$$L(\theta; x) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta} \mathbf{1}_{0 < x_i < \theta} = \frac{1}{\theta^n} \mathbf{1}_{\theta > \max\{x_i\}} \tag{193}$$
Maximizar L é equivalente a minimizar θ^n sujeito a $\theta \geq \max\{x_i\}$, logo $\hat{\theta} = \max\{x_i\} = X_{n:n}$.

5. **Comparação com Método dos Momentos:** O estimador de momentos seria:
$$\tilde{\theta}_n = 2\bar{X}_n \tag{194}$$
(pois $E[X] = \theta/2$). Ambos são consistentes, mas o EMV é preferível por ter menor variância assintótica.

Resumo da Questão

Resultado Principal:

$$\hat{\theta}_n = X_{n:n} \xrightarrow{P} \theta$$

Método Utilizado:

- Definição direta de convergência em probabilidade
- Cálculo de $P(|X_{n:n} - \theta| < \varepsilon)$ via fda
- Limite: $(1 - \varepsilon/\theta)^n \to 0$

Importância: Prova rigorosa da consistência do EMV para a Uniforme(0,θ).

Conclusão

Este documento apresentou soluções detalhadas e didáticas para as principais questões extras do Capítulo 3 sobre Teoria Assintótica resolvidas em sala de aula.

Síntese dos Tópicos Abordados

1. **Convergência em Probabilidade (Q Extra 1–4):**
   - Variância amostral S_n^2 via transformação de Helmert
   - Máximo da uniforme via cálculo de momentos
   - Operações algébricas com convergentes (quociente)
   - Funções contínuas preservam convergência
2. **Convergência em Distribuição (Q Extra 5, Exercício 11):**
   - Distribuição limite Exponencial do máximo normalizado
   - Estatística qui-quadrado via TCL e função contínua
3. **Consistência de Estimadores (Q 3.23):**
   - Consistência do EMV para Uniforme
   - Demonstração via definição direta

Conexões Entre as Questões

- Q Extra 1 $\to$ Q Extra 3: S_n^2 consistente $\Rightarrow$ quociente converge
- Q Extra 2 $\to$ Q Extra 4: $X_{n:n}$ consistente $\Rightarrow$ $X_{n:n}^2$ consistente
- Q Extra 2 $\to$ Q Extra 5: Convergência em P $\to$ distribuição limite
- TCL $\to$ Exercício 11: Normal $\to$ qui-quadrado via função contínua

Principais Técnicas Demonstradas

1. **Transformação de Helmert** - representar estatísticas como médias
2. **Cálculo de momentos** - mostrar EQM $\to 0$
3. **Operações algébricas** - Resultado 4P
4. **Funções contínuas** - Resultados 5P e Teorema 3.7.6.4(a)
5. **Cálculo de fda** - identificar distribuições limite
6. **Limites fundamentais** - $(R.1)$, $(R.2)$, $(R.3)$

Mensagens Principais

- Convergência em probabilidade permite trabalhar com estimadores como se fossem constantes
- Funções contínuas preservam ambos os tipos de convergência
- Distribuições limite nem sempre são normais (Ex: Exponencial)
- EMVs são geralmente consistentes (sob condições de regularidade)
- Transformações de normalização revelam taxas de convergência

Recomendações de Estudo

Para dominar o material:

1. Refaça todas as questões sem consultar as soluções
2. Identifique qual resultado/teorema aplicar em cada passo
3. Conecte as questões com a teoria do arquivo `teoria_cap3_completo.tex`
4. Pratique variações (e.g., $U(a, b)$ em vez de $U(0, \theta)$)
5. Simule dados no R/Python para visualizar as convergências

Bom estudo! Dominar estas técnicas é essencial para inferência estatística.