TRV Detalhado - Casos 3, 4 e Testes para Duas Amostras

Derivações Passo a Passo com Explicações Detalhadas

Curso de Inferência Estatística

2025

Contents

1 Introdução

Este documento apresenta derivações detalhadas e passo a passo dos Testes de Razão de Verossimilhanças (TRV) para os principais casos de teste de hipóteses em populações normais:

- **Caso 1:** Teste de média com variância conhecida (Teste Z)
- **Caso 2:** Teste de média com variância desconhecida (Teste t)
- **Caso 3:** Teste de variância com média conhecida
- **Caso 4:** Teste de variância com média desconhecida
- **TRV para duas amostras:** Comparação de médias e variâncias

Cada passo matemático será explicado em detalhes, incluindo justificativas para manipulações algébricas e o raciocínio estatístico subjacente.

2 Caso 1: Teste de Média com Variância Conhecida (Teste Z)

2.1 Enunciado do Problema

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.) tais que $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ para $i = 1, \ldots, n$, onde:

- $\mu \in \mathbb{R}$ é **desconhecido**
- $\sigma^2 > 0$ é **conhecido** (fixo)

Dado um nível de significância $\alpha \in (0, 1)$, queremos derivar o TRV para testar:

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

onde $\mu_0 \in \mathbb{R}$ é um valor fixo especificado.

2.2 Passo 1: Definição dos Espaços Paramétricos

Espaço paramétrico completo:

$$\Theta = \{\mu : \mu \in \mathbb{R}\}$$

Como σ^2 é conhecido, trabalhamos apenas com o parâmetro μ.
Espaço paramétrico sob H_0:

$$\Theta_0 = \{\mu_0\}$$

Ou seja, sob H_0, μ está fixado em μ_0.
Espaço paramétrico sob H_1:

$$\Theta_1 = \{\mu \in \mathbb{R} : \mu \neq \mu_0\}$$

2.3 Passo 2: Função de Verossimilhança

Para uma amostra $x_1, \ldots, x_n$ de $X_1, \ldots, X_n$, a função de densidade conjunta é:

$$f(x_1, \ldots, x_n \mid \mu) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

Explicação: Como as observações são independentes, a densidade conjunta é o produto das densidades individuais. Cada X_i tem densidade normal com média μ (desconhecida) e variância σ^2 (conhecida).

A função de verossimilhança é:

$$L(\mu) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right\} \tag{1}$$

Explicação:

- O fator $(2\pi\sigma^2)^{-n/2}$ vem do produto dos n termos $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}$.
- O expoente $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$ aparece porque estamos somando os expoentes dos produtos de exponenciais.

2.4 Passo 3: Estimador de Máxima Verossimilhança Irrestrito

Para encontrar o EMV irrestrito, maximizamos $L(\mu)$ (ou, equivalentemente, $\ell(\mu) = \log L(\mu)$) sobre Θ.

A função de log-verossimilhança é:

$$\ell(\mu) = -\frac{n}{2}\log(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

Derivando em relação a μ:

$$\frac{\partial \ell}{\partial \mu} = -\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} 2(x_i-\mu)(-1) = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)$$

Explicação: A derivada de $(x_i-\mu)^2$ em relação a μ é $2(x_i-\mu)(-1) = -2(x_i-\mu)$.

Igualando a zero:

$$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu) = 0$$

Como $\sigma^2 > 0$, temos:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = n\mu$$

Portanto:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}$$

Explicação: O EMV irrestrito para μ é simplesmente a média amostral $\bar{x}$.

2.5 Passo 4: Máxima Verossimilhança sob H_0

Sob H_0, temos $\mu = \mu_0$ (fixo). Portanto:

$$\sup_{\mu \in \Theta_0} L(\mu) = L(\mu_0) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_0)^2\right\}$$

Explicação: Como Θ_0 contém apenas um ponto (μ_0), o supremo é simplesmente o valor da função nesse ponto.

2.6 Passo 5: Máxima Verossimilhança Irrestrita

Substituindo $\hat{\mu} = \bar{x}$ na função de verossimilhança:

$$\sup_{\mu \in \Theta} L(\mu) = L(\bar{x}) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2\right\}$$

Explicação: Como $\bar{x}$ é o maximizador, este é o valor máximo da verossimilhança.

2.7 Passo 6: Razão de Verossimilhanças

A estatística da razão de verossimilhanças é:

$$\Lambda = \frac{\sup_{\mu \in \Theta_0} L(\mu)}{\sup_{\mu \in \Theta} L(\mu)} = \frac{L(\mu_0)}{L(\bar{x})}$$

Substituindo as expressões:

$$\Lambda = \frac{(2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_0)^2\right\}}{(2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2\right\}}$$

Simplificando:

$$\Lambda = \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_0)^2 - \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2\right]\right\}$$

2.8 Passo 7: Identidade Fundamental para Somas de Quadrados

Precisamos relacionar $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_0)^2$ com $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$.

Identidade: Para qualquer constante c:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - c)^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x} + \bar{x} - c)^2$$

Expandindo o quadrado:

$$= \sum_{i=1}^{n}\left[(x_i - \bar{x})^2 + 2(x_i - \bar{x})(\bar{x} - c) + (\bar{x} - c)^2\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 + 2(\bar{x} - c)\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) + n(\bar{x} - c)^2$$

Propriedade crucial: $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = 0$ (por definição da média amostral).
Explicação:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i - n\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i - n \cdot \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

Portanto:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - c)^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 + n(\bar{x} - c)^2$$

Aplicação: Para $c = \mu_0$:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_0)^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 + n(\bar{x} - \mu_0)^2$$

2.9 Passo 8: Simplificação de Λ

Substituindo na expressão de Λ:

$$\Lambda = \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 + n(\bar{x} - \mu_0)^2 - \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2\right]\right\}$$

Simplificando:

$$\Lambda = \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \cdot n(\bar{x} - \mu_0)^2\right\} = \exp\left\{-\frac{n(\bar{x} - \mu_0)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

Explicação: Os termos $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ se cancelam, restando apenas $n(\bar{x} - \mu_0)^2$.

2.10 Passo 9: Região Crítica

O TRV rejeita H_0 quando $\Lambda < k$ para algum $k \in (0, 1)$ escolhido de forma que o nível do teste seja α.

Como $\Lambda = \exp\left\{-\frac{n(\bar{x}-\mu_0)^2}{2\sigma^2}\right\}$ e a função exponencial é estritamente decrescente quando o expoente é negativo, temos:

$$\Lambda < k \quad \Leftrightarrow \quad \exp\left\{-\frac{n(\bar{x} - \mu_0)^2}{2\sigma^2}\right\} < k$$

Aplicando logaritmo natural (função crescente):

$$-\frac{n(\bar{x} - \mu_0)^2}{2\sigma^2} < \log k$$

Multiplicando por -1 (e invertendo a desigualdade):

$$\frac{n(\bar{x} - \mu_0)^2}{2\sigma^2} > -\log k$$

Multiplicando por $2\sigma^2$ (positivo):

$$n(\bar{x} - \mu_0)^2 > -2\sigma^2 \log k$$

Tomando a raiz quadrada (e usando o valor absoluto):

$$\sqrt{n}\left|\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma}\right| > \sqrt{-2\log k}$$

Explicação: Como estamos lidando com uma desigualdade quadrática, precisamos usar o valor absoluto para capturar ambos os casos ($\bar{x} > \mu_0$ e $\bar{x} < \mu_0$).

2.11 Passo 10: Estatística de Teste

Definindo a estatística de teste:

$$Z = \sqrt{n}\left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma}\right)$$

Propriedade importante: Sob H_0, temos $\mu = \mu_0$. Portanto:

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

Explicação: A média amostral de variáveis normais independentes é normal, com média igual à média populacional e variância igual à variância populacional dividida por n.

Portanto:

$$\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \sqrt{n}\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} = Z \sim N(0, 1)$$

Explicação: Padronizamos $\bar{X}$ subtraindo a média (μ_0) e dividindo pelo desvio padrão ($\sigma/\sqrt{n}$), resultando em uma distribuição normal padrão.

2.12 Passo 11: Função Crítica

A região crítica é:

$$R_c = \left\{|Z| > z_{\alpha/2}\right\}$$

onde $z_{\alpha/2}$ é o quantil $(1 - \alpha/2)$ da distribuição normal padrão, ou seja:

$$P(|Z| > z_{\alpha/2}) = P(Z > z_{\alpha/2}) + P(Z < -z_{\alpha/2}) = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = \alpha$$

Explicação:

- $P(Z > z_{\alpha/2}) = \alpha/2$ (área na cauda direita)
- $P(Z < -z_{\alpha/2}) = \alpha/2$ (área na cauda esquerda, por simetria)
- Total: α (nível de significância)

Função crítica:

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & |Z(x)| > z_{\alpha/2} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

onde $\psi(x) = 1$ significa rejeitar H_0 e $\psi(x) = 0$ significa não rejeitar H_0.

3 Caso 2: Teste de Média com Variância Desconhecida (Teste t)

3.1 Enunciado do Problema

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias i.i.d. tais que $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ para $i = 1, \ldots, n$, onde:

- $\mu \in \mathbb{R}$ é **desconhecido**
- $\sigma^2 \in \mathbb{R}^+$ é **desconhecido**

Dado um nível de significância $\alpha \in (0, 1)$, queremos derivar o TRV para testar:

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

onde $\mu_0 \in \mathbb{R}$ é um valor fixo especificado.

3.2 Passo 1: Definição dos Espaços Paramétricos

Espaço paramétrico completo:

$$\Theta = \{(\mu, \sigma^2) : \mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 \in \mathbb{R}_+\}$$

Espaço paramétrico sob H_0:

$$\Theta_0 = \{(\mu, \sigma^2) : \mu = \mu_0 \text{ (fixo)}, \sigma^2 \in \mathbb{R}_+\}$$

Diferença crucial: No Caso 1, σ^2 era conhecido. No Caso 2, σ^2 é desconhecido e precisa ser estimado tanto sob H_0 quanto sob H_1.

3.3 Passo 2: Função de Verossimilhança

A função de verossimilhança conjunta para (μ, σ^2) é:

$$L(\mu, \sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2\right\}$$

Explicação: Agora temos dois parâmetros desconhecidos: μ e σ^2.

3.4 Passo 3: Estimadores de Máxima Verossimilhança Irrestritos

Para encontrar os EMV irrestritos, maximizamos $L(\mu, \sigma^2)$ sobre Θ.

Log-verossimilhança:

$$\ell(\mu, \sigma^2) = -\frac{n}{2}\log(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2$$

Derivadas parciais:

Em relação a μ:

$$\frac{\partial \ell}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu) = 0$$

Portanto: $\hat{\mu} = \bar{x}$.

Em relação a σ^2:

$$\frac{\partial \ell}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 = 0$$

Substituindo $\mu = \hat{\mu} = \bar{x}$:

$$-\frac{n}{2\hat{\sigma}^2} + \frac{1}{2(\hat{\sigma}^2)^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = 0$$

Multiplicando por $2(\hat{\sigma}^2)^2$:

$$-n\hat{\sigma}^2 + \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = 0$$

Portanto:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

Explicação: Os EMV irrestritos são $\hat{\mu} = \bar{x}$ e $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$.

3.5 Passo 4: Máxima Verossimilhança sob H_0

Sob H_0, temos $\mu = \mu_0$ (fixo), mas σ^2 ainda é desconhecido e precisa ser estimado.

Maximizamos $L(\mu_0, \sigma^2)$ em relação a σ^2:

$$\frac{\partial \ell(\mu_0, \sigma^2)}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_0)^2 = 0$$

Portanto:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_0)^2$$

Explicação: Sob H_0, o EMV para σ^2 usa μ_0 em vez de $\bar{x}$.

Portanto:

$$\sup_{(\mu,\sigma^2)\in\Theta_0} L(\mu, \sigma^2) = L(\mu_0, \hat{\sigma}_0^2) = (2\pi\hat{\sigma}_0^2)^{-n/2}\exp\left\{-\frac{1}{2\hat{\sigma}_0^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_0)^2\right\}$$

3.6 Passo 5: Simplificação da Verossimilhança sob H_0

Note que:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_0)^2 = n\hat{\sigma}_0^2$$

Portanto:

$$\exp\left\{-\frac{1}{2\hat{\sigma}_0^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_0)^2\right\} = \exp\left\{-\frac{1}{2\hat{\sigma}_0^2}\cdot n\hat{\sigma}_0^2\right\} = \exp\left\{-\frac{n}{2}\right\} = e^{-n/2}$$

Portanto:

$$\sup_{(\mu,\sigma^2)\in\Theta_0} L(\mu, \sigma^2) = (2\pi\hat{\sigma}_0^2)^{-n/2}e^{-n/2}$$

3.7 Passo 6: Máxima Verossimilhança Irrestrita

$$\sup_{(\mu,\sigma^2)\in\Theta} L(\mu,\sigma^2) = L(\bar{x},\hat{\sigma}^2) = (2\pi\hat{\sigma}^2)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\hat{\sigma}^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right\}$$

Similarmente:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 = n\hat{\sigma}^2$$

Portanto:

$$\exp\left\{-\frac{1}{2\hat{\sigma}^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right\} = e^{-n/2}$$

Portanto:

$$\sup_{(\mu,\sigma^2)\in\Theta} L(\mu,\sigma^2) = (2\pi\hat{\sigma}^2)^{-n/2}e^{-n/2}$$

3.8 Passo 7: Razão de Verossimilhanças

$$\Lambda = \frac{\sup_{(\mu,\sigma^2)\in\Theta_0} L(\mu,\sigma^2)}{\sup_{(\mu,\sigma^2)\in\Theta} L(\mu,\sigma^2)} = \frac{(2\pi\hat{\sigma}_0^2)^{-n/2}e^{-n/2}}{(2\pi\hat{\sigma}^2)^{-n/2}e^{-n/2}}$$

Simplificando:

$$\Lambda = \left(\frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\sigma}_0^2}\right)^{n/2}$$

Explicação: Os termos $(2\pi)^{-n/2}$ e $e^{-n/2}$ se cancelam.

3.9 Passo 8: Relação entre $\hat{\sigma}_0^2$ e $\hat{\sigma}^2$

Usando a identidade fundamental:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 + n(\bar{x}-\mu_0)^2$$

Portanto:

$$n\hat{\sigma}_0^2 = n\hat{\sigma}^2 + n(\bar{x}-\mu_0)^2$$

Dividindo por n:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \hat{\sigma}^2 + (\bar{x}-\mu_0)^2$$

Explicação: A variância estimada sob H_0 é maior ou igual à variância estimada irrestrita, pois inclui o termo adicional $(\bar{x}-\mu_0)^2$.

3.10 Passo 9: Simplificação de Λ

$$\Lambda = \left(\frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\sigma}_0^2}\right)^{n/2} = \left(\frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\sigma}^2+(\bar{x}-\mu_0)^2}\right)^{n/2}$$

Fatorando $\hat{\sigma}^2$ no denominador:

$$\Lambda = \left(\frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\sigma}^2\left[1+\frac{(\bar{x}-\mu_0)^2}{\hat{\sigma}^2}\right]}\right)^{n/2} = \left(\frac{1}{1+\frac{(\bar{x}-\mu_0)^2}{\hat{\sigma}^2}}\right)^{n/2}$$

$$= \left(1+\frac{(\bar{x}-\mu_0)^2}{\hat{\sigma}^2}\right)^{-n/2}$$

3.11 Passo 10: Região Crítica

O TRV rejeita H_0 quando $\Lambda < k$ para algum $k \in (0, 1)$.

Como $\Lambda = \left(1 + \frac{(\bar{x}-\mu_0)^2}{\hat{\sigma}^2}\right)^{-n/2}$ e a função $f(x) = x^{-n/2}$ é estritamente decrescente para $x > 0$, temos:

$$\Lambda < k \quad \Leftrightarrow \quad \left(1 + \frac{(\bar{x}-\mu_0)^2}{\hat{\sigma}^2}\right)^{-n/2} < k$$

Elevando ambos os lados à potência $-\frac{2}{n}$ (e invertendo a desigualdade porque o expoente é negativo):

$$1 + \frac{(\bar{x}-\mu_0)^2}{\hat{\sigma}^2} > k^{-2/n}$$

Portanto:

$$\frac{(\bar{x}-\mu_0)^2}{\hat{\sigma}^2} > k^{-2/n} - 1$$

Tomando a raiz quadrada:

$$\frac{|\bar{x}-\mu_0|}{\hat{\sigma}} > \sqrt{k^{-2/n} - 1}$$

Multiplicando por $\sqrt{n}$:

$$\sqrt{n}\frac{|\bar{x}-\mu_0|}{\hat{\sigma}} > \sqrt{n(k^{-2/n} - 1)}$$

3.12 Passo 11: Estatística de Teste

Definindo a variância amostral:

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

Relação: Note que:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{n-1}{n}s^2$$

Portanto:

$$\frac{|\bar{x}-\mu_0|}{\hat{\sigma}} = \frac{|\bar{x}-\mu_0|}{\sqrt{\frac{n-1}{n}s^2}} = \frac{|\bar{x}-\mu_0|}{s}\sqrt{\frac{n}{n-1}}$$

A estatística de teste é:

$$T = \sqrt{n}\frac{\bar{x}-\mu_0}{s} = \frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

Explicação: Esta é a estatística t de Student. O fator $\sqrt{\frac{n}{n-1}}$ é aproximadamente 1 para n grande, então usamos s diretamente.

3.13 Passo 12: Distribuição da Estatística sob H_0

Propriedade crucial: Sob H_0, temos:

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

onde $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ é a variância amostral.
Justificativa:

- O numerador $\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ quando $\mu = \mu_0$.
- O denominador $\frac{S}{\sigma}$ está relacionado a $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$.
- A razão entre uma normal padrão e a raiz quadrada de uma qui-quadrado dividida por seus graus de liberdade segue distribuição t de Student.

3.14 Passo 13: Função Crítica

A região crítica é:

$$R_c = \left\{|T| > t_{n-1,\alpha/2}\right\}$$

onde $t_{n-1,\alpha/2}$ é o quantil $(1 - \alpha/2)$ da distribuição t de Student com $n - 1$ graus de liberdade.

Função crítica:

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & |T(x)| > t_{n-1,\alpha/2} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Explicação: A diferença crucial entre Caso 1 e Caso 2:

- **Caso 1:** Usamos distribuição normal padrão ($Z \sim N(0,1)$) porque σ^2 é conhecido.
- **Caso 2:** Usamos distribuição t de Student ($T \sim t_{n-1}$) porque σ^2 é desconhecido e estimado, perdendo um grau de liberdade.

4 Caso 3: Teste de Variância com Média Conhecida

4.1 Enunciado do Problema

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.) tais que $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ para $i = 1, \ldots, n$, onde:

- μ é **conhecido** (fixo)
- $\sigma^2 \in \mathbb{R}^+$ é **desconhecido**

Dado um nível de significância $\alpha \in (0,1)$, queremos derivar o TRV para testar:

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \quad \text{vs} \quad H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$$

onde $\sigma_0^2 > 0$ é um valor fixo especificado.

4.2 Passo 1: Definição dos Espaços Paramétricos

Espaço paramétrico completo:

$$\Theta = \{(\mu, \sigma^2) : \mu \text{ é conhecido e fixo}, \sigma^2 \in \mathbb{R}_+\}$$

Como μ é conhecido, na prática trabalhamos apenas com $\sigma^2 \in \mathbb{R}_+$.
Espaço paramétrico sob H_0:

$$\Theta_0 = \{\sigma^2 = \sigma_0^2\}$$

Ou seja, sob H_0, σ^2 está fixado em σ_0^2.
Espaço paramétrico sob H_1:

$$\Theta_1 = \{\sigma^2 \in \mathbb{R}_+ : \sigma^2 \neq \sigma_0^2\}$$

4.3 Passo 2: Função de Verossimilhança

Para uma amostra $x_1, \ldots, x_n$ de $X_1, \ldots, X_n$, a função de densidade conjunta é:

$$f(x_1, \ldots, x_n \mid \sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

Explicação: Como as observações são independentes, a densidade conjunta é o produto das densidades individuais. Cada X_i tem densidade normal com média μ (conhecida) e variância σ^2 (desconhecida).

A função de verossimilhança é:

$$L(\sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2\right\} \tag{2}$$

Explicação:

- O fator $(2\pi\sigma^2)^{-n/2}$ vem do produto dos n termos $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}$.
- O expoente $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2$ aparece porque estamos somando os expoentes dos produtos de exponenciais.

4.4 Passo 3: Estimador de Máxima Verossimilhança Irrestrito

Para encontrar o EMV irrestrito, maximizamos $L(\sigma^2)$ (ou, equivalentemente, $\ell(\sigma^2) = \log L(\sigma^2)$) sobre Θ.

A função de log-verossimilhança é:

$$\ell(\sigma^2) = -\frac{n}{2}\log(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2$$

Derivando em relação a σ^2:

$$\frac{\partial \ell}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2} \cdot \frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2$$

Explicação:

- A derivada de $\log(2\pi\sigma^2)$ em relação a σ^2 é $\frac{1}{\sigma^2}$.
- A derivada de $\frac{1}{\sigma^2}$ é $-\frac{1}{(\sigma^2)^2}$.

Igualando a zero:

$$-\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 = 0$$

Multiplicando ambos os lados por $2(\sigma^2)^2$:

$$-n\sigma^2 + \sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 = 0$$

Portanto:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2$$

Explicação: Este é o EMV irrestrito. Note que usamos μ (conhecido) em vez de $\bar{x}$ porque a média é conhecida.

4.5 Passo 4: Máxima Verossimilhança sob H_0

Sob H_0, temos $\sigma^2 = \sigma_0^2$ (fixo). Portanto:

$$\sup_{\sigma^2 \in \Theta_0} L(\sigma^2) = L(\sigma_0^2) = (2\pi\sigma_0^2)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2\right\}$$

Explicação: Como Θ_0 contém apenas um ponto (σ_0^2), o supremo é simplesmente o valor da função nesse ponto.

4.6 Passo 5: Máxima Verossimilhança Irrestrita

Substituindo $\hat{\sigma}^2$ na função de verossimilhança:

$$\sup_{\sigma^2 \in \Theta} L(\sigma^2) = L(\hat{\sigma}^2) = (2\pi\hat{\sigma}^2)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\hat{\sigma}^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2\right\}$$

Explicação: Como $\hat{\sigma}^2$ é o maximizador, este é o valor máximo da verossimilhança.

4.7 Passo 6: Razão de Verossimilhanças

A estatística da razão de verossimilhanças é:

$$\Lambda = \frac{\sup_{\sigma^2 \in \Theta_0} L(\sigma^2)}{\sup_{\sigma^2 \in \Theta} L(\sigma^2)} = \frac{L(\sigma_0^2)}{L(\hat{\sigma}^2)}$$

Substituindo as expressões:

$$\Lambda = \frac{(2\pi\sigma_0^2)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2\right\}}{(2\pi\hat{\sigma}^2)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\hat{\sigma}^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2\right\}}$$

Simplificando:

$$\Lambda = \left(\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2}\right)^{n/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 + \frac{1}{2\hat{\sigma}^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right\}$$

Explicação:

- O fator $(2\pi)^{-n/2}$ cancela no numerador e denominador.
- O termo $\left(\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2}\right)^{n/2}$ vem de $\frac{(\sigma_0^2)^{-n/2}}{(\hat{\sigma}^2)^{-n/2}} = \left(\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2}\right)^{n/2}$.

Agora, note que:

$$\frac{1}{2\hat{\sigma}^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 = \frac{1}{2\hat{\sigma}^2}\cdot n\hat{\sigma}^2 = \frac{n}{2}$$

Explicação: Por definição, $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$, então $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 = n\hat{\sigma}^2$.
Também:

$$\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 = \frac{1}{2\sigma_0^2}\cdot n\hat{\sigma}^2 = \frac{n\hat{\sigma}^2}{2\sigma_0^2}$$

Portanto:

$$\Lambda = \left(\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2}\right)^{n/2} \exp\left\{-\frac{n\hat{\sigma}^2}{2\sigma_0^2} + \frac{n}{2}\right\}$$

Fatorando $\frac{n}{2}$:

$$\Lambda = \left(\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2}\right)^{n/2} \exp\left\{\frac{n}{2}\left(1 - \frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2}\right)\right\}$$

Definindo $u = \frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2}$:

$$\Lambda = u^{n/2}\exp\left\{\frac{n}{2}(1-u)\right\} = u^{n/2}e^{n/2}e^{-nu/2} = e^{n/2}u^{n/2}e^{-nu/2}$$

Ou, de forma mais simples:

$$\Lambda = \left(\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2}\right)^{n/2} \exp\left(\frac{n}{2}\left(1 - \frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2}\right)\right)$$

4.8 Passo 7: Análise da Função $g(u) = ue^{1-u}$

Para entender quando Λ é pequeno (evidência contra H_0), analisamos a função:

$$g(u) = ue^{1-u}, \quad u > 0$$

onde $u = \frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2}$.
Derivada primeira:

$$g'(u) = e^{1-u} + u\cdot(-e^{1-u}) = e^{1-u}(1-u)$$

Ponto crítico: $g'(u) = 0 \Rightarrow 1-u = 0 \Rightarrow u = 1$.
Análise:

- Se $u < 1$: $g'(u) > 0$ (função crescente)

- Se $u > 1$: $g'(u) < 0$ (função decrescente)
- Se $u = 1$: $g'(u) = 0$ (máximo)

Limites:

$$\lim_{u \to 0^+} g(u) = 0 \cdot e^1 = 0$$

$$\lim_{u \to \infty} g(u) = \lim_{u \to \infty} \frac{u}{e^{u-1}} = 0 \quad \text{(por L'Hôpital)}$$

Conclusão: A função $g(u)$ tem máximo em $u = 1$ e tende a zero quando $u \to 0$ ou $u \to \infty$. Isso significa que Λ será pequeno quando $\hat{\sigma}^2$ está muito distante de σ_0^2 (tanto menor quanto maior).

4.9 Passo 8: Região Crítica

O TRV rejeita H_0 quando $\Lambda < k$ para algum $k \in (0, 1)$ escolhido de forma que o nível do teste seja α.

Como Λ é pequeno quando $\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2}$ está muito distante de 1, a região crítica é bilateral.

Definindo:

$$T(X) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \mu)^2}{\sigma_0^2}$$

Propriedade importante: Se $X_i \sim N(\mu, \sigma_0^2)$ sob H_0, então:

$$\frac{X_i - \mu}{\sigma_0} \sim N(0, 1)$$

Portanto:

$$\left(\frac{X_i - \mu}{\sigma_0}\right)^2 \sim \chi_1^2$$

Como as observações são independentes:

$$T(X) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma_0}\right)^2 \sim \chi_n^2$$

Explicação: A soma de n variáveis qui-quadrado independentes com 1 grau de liberdade cada resulta em uma qui-quadrado com n graus de liberdade.

Note que:

$$T(X) = \frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2} = n \cdot \frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2} = nu$$

Região crítica: Rejeitamos H_0 quando $T(X) < a$ ou $T(X) > b$, onde a e b são escolhidos de forma que:

$$P_{H_0}(T < a) = \frac{\alpha}{2} \quad \text{e} \quad P_{H_0}(T > b) = \frac{\alpha}{2}$$

Portanto:

$$a = \chi^2_{n,1-\alpha/2} \quad \text{e} \quad b = \chi^2_{n,\alpha/2}$$

Explicação:

- $\chi^2_{n,1-\alpha/2}$ é o quantil $(1-\alpha/2)$ da distribuição χ_n^2, ou seja, $P(\chi_n^2 \leq \chi^2_{n,1-\alpha/2}) = 1-\alpha/2$, então $P(\chi_n^2 < \chi^2_{n,1-\alpha/2}) = \alpha/2$.
- $\chi^2_{n,\alpha/2}$ é o quantil $(\alpha/2)$ da distribuição χ_n^2, ou seja, $P(\chi_n^2 > \chi^2_{n,\alpha/2}) = \alpha/2$.

4.10 Passo 9: Função Crítica

A função crítica do teste é:

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & T(x) < \chi^2_{n,1-\alpha/2} \quad \text{ou} \quad T(x) > \chi^2_{n,\alpha/2} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

onde $\psi(x) = 1$ significa rejeitar H_0 e $\psi(x) = 0$ significa não rejeitar H_0.

5 Caso 4: Teste de Variância com Média Desconhecida

5.1 Enunciado do Problema

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias i.i.d. tais que $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ para $i = 1, \ldots, n$, onde:

- $\mu \in \mathbb{R}$ é **desconhecido**
- $\sigma^2 \in \mathbb{R}^+$ é **desconhecido**

Dado um nível de significância $\alpha \in (0, 1)$, queremos derivar o TRV para testar:

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \quad \text{vs} \quad H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$$

onde $\sigma_0^2 > 0$ é um valor fixo especificado.

5.2 Passo 1: Definição dos Espaços Paramétricos

Espaço paramétrico completo:

$$\Theta = \{(\mu, \sigma^2) : \mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 \in \mathbb{R}_+\}$$

Espaço paramétrico sob H_0:

$$\Theta_0 = \{(\mu, \sigma^2) : \mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 = \sigma_0^2\}$$

Diferença crucial: No Caso 3, μ era conhecido. No Caso 4, μ é desconhecido e precisa ser estimado tanto sob H_0 quanto sob H_1.

5.3 Passo 2: Função de Verossimilhança

A função de verossimilhança conjunta para (μ, σ^2) é:

$$L(\mu, \sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2\right\}$$

Explicação: Agora temos dois parâmetros desconhecidos: μ e σ^2.

5.4 Passo 3: Estimadores de Máxima Verossimilhança Irrestritos

Para encontrar os EMV irrestritos, maximizamos $L(\mu, \sigma^2)$ sobre Θ.

Log-verossimilhança:

$$\ell(\mu, \sigma^2) = -\frac{n}{2}\log(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2$$

Derivadas parciais:

Em relação a μ:

$$\frac{\partial \ell}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu) = \frac{1}{\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - n\mu\right)$$

Igualando a zero:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i - n\mu = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{\mu} = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Em relação a σ^2:

$$\frac{\partial \ell}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2$$

Igualando a zero e substituindo $\mu = \hat{\mu}$:

$$-\frac{n}{2\hat{\sigma}^2} + \frac{1}{2(\hat{\sigma}^2)^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = 0$$

Portanto:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

Explicação: Note a diferença crucial: no Caso 3, usávamos μ (conhecido) na soma. No Caso 4, usamos $\bar{x}$ (estimado).

5.5 Passo 4: Máxima Verossimilhança sob H_0

Sob H_0, temos $\sigma^2 = \sigma_0^2$ (fixo), mas μ ainda é desconhecido e precisa ser estimado.

Maximizamos $L(\mu, \sigma_0^2)$ em relação a μ:

$$\frac{\partial \ell(\mu, \sigma_0^2)}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu) = 0$$

Portanto, mesmo sob H_0, o EMV para μ é $\hat{\mu}_0 = \bar{x}$.

Explicação: A restrição $\sigma^2 = \sigma_0^2$ não afeta a estimação de μ, pois a derivada em relação a μ não depende de σ^2.

Portanto:

$$\sup_{(\mu,\sigma^2)\in\Theta_0} L(\mu, \sigma^2) = L(\bar{x}, \sigma_0^2) = (2\pi\sigma_0^2)^{-n/2}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2\right\}$$

5.6 Passo 5: Máxima Verossimilhança Irrestrita

$$\sup_{(\mu,\sigma^2)\in\Theta} L(\mu,\sigma^2) = L(\bar{x},\hat{\sigma}^2) = (2\pi\hat{\sigma}^2)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\hat{\sigma}^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right\}$$

5.7 Passo 6: Razão de Verossimilhanças

$$\Lambda = \frac{L(\bar{x},\sigma_0^2)}{L(\bar{x},\hat{\sigma}^2)} = \frac{(2\pi\sigma_0^2)^{-n/2}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right\}}{(2\pi\hat{\sigma}^2)^{-n/2}\exp\left\{-\frac{1}{2\hat{\sigma}^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right\}}$$

Simplificando:

$$\Lambda = \left(\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2}\right)^{n/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 + \frac{1}{2\hat{\sigma}^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right\}$$

Note que:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 = n\hat{\sigma}^2$$

Portanto:

$$\Lambda = \left(\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2}\right)^{n/2} \exp\left\{-\frac{n\hat{\sigma}^2}{2\sigma_0^2} + \frac{n}{2}\right\} = \left(\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2}\right)^{n/2} \exp\left\{\frac{n}{2}\left(1-\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2}\right)\right\}$$

Esta é a mesma forma do Caso 3! A diferença está na distribuição da estatística de teste.

5.8 Passo 7: Estatística de Teste

Definindo:

$$T(X) = \sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\bar{X})^2}{\sigma_0^2} = \frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2}$$

Propriedade crucial: Sob H_0, temos:

$$\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

onde $S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ é a variância amostral.
Explicação: A diferença entre Caso 3 e Caso 4:

- **Caso 3:** Usamos μ conhecido, então $\sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\mu)^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2_n$ (n graus de liberdade).
- **Caso 4:** Usamos $\bar{X}$ estimado, então perdemos um grau de liberdade: $\sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\bar{X})^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2_{n-1}$ (n-1 graus de liberdade).

Relação: Note que:

$$n\hat{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2 = (n-1)S_n^2$$

Portanto:

$$T(X) = \frac{(n-1)S_n^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

5.9 Passo 8: Região Crítica

A região crítica é bilateral:

$$R_c = \{T(X) < \chi^2_{n-1,1-\alpha/2} \quad \text{ou} \quad T(X) > \chi^2_{n-1,\alpha/2}\}$$

Função crítica:

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & T(x) < \chi^2_{n-1,1-\alpha/2} \quad \text{ou} \quad T(x) > \chi^2_{n-1,\alpha/2} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

6 TRV para Duas Amostras: Comparação de Médias

6.1 Enunciado do Problema

Sejam:

- $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de $X \sim N(\mu_X, \sigma^2_X)$
- $Y_1, \ldots, Y_m$ uma amostra aleatória de $Y \sim N(\mu_Y, \sigma^2_Y)$
- As amostras são independentes entre si

Suposição importante: $\sigma^2_X = \sigma^2_Y = \sigma^2$ (variâncias iguais, desconhecidas).
Queremos testar:

$$H_0 : \mu_X = \mu_Y \quad \text{vs} \quad H_1 : \mu_X \neq \mu_Y$$

6.2 Passo 1: Definição dos Espaços Paramétricos

Espaço paramétrico completo:

$$\Theta = \{(\mu_X, \mu_Y, \sigma^2) : \mu_X, \mu_Y \in \mathbb{R}, \sigma^2 \in \mathbb{R}_+\}$$

Espaço paramétrico sob H_0:

$$\Theta_0 = \{(\mu_X, \mu_Y, \sigma^2) : \mu_X = \mu_Y = \mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 \in \mathbb{R}_+\}$$

Explicação: Sob H_0, as duas populações têm a mesma média μ, mas esse valor comum é desconhecido e precisa ser estimado.

6.3 Passo 2: Estatísticas Suficientes

As estatísticas suficientes são:

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \quad \bar{Y} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} Y_i$$

$$S^2_X = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2, \quad S^2_Y = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(Y_i - \bar{Y})^2$$

Variância amostral conjunta (pooled):

$$S^2_p = \frac{(n-1)S^2_X + (m-1)S^2_Y}{n+m-2}$$

Explicação: Como assumimos variâncias iguais, combinamos as informações de ambas as amostras para estimar a variância comum. Os pesos são os graus de liberdade de cada amostra.

6.4 Passo 3: Função de Verossimilhança

Como as amostras são independentes, a verossimilhança conjunta é o produto das verossimilhanças individuais:

$$L(\mu_X, \mu_Y, \sigma^2) = L_X(\mu_X, \sigma^2) \cdot L_Y(\mu_Y, \sigma^2)$$

onde:

$$L_X(\mu_X, \sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_X)^2\right\}$$

$$L_Y(\mu_Y, \sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-m/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{m}(y_i - \mu_Y)^2\right\}$$

Portanto:

$$L(\mu_X, \mu_Y, \sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n+m}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_X)^2 + \sum_{j=1}^{m}(y_j - \mu_Y)^2\right]\right\} \tag{3}$$

6.5 Passo 4: Estimadores de Máxima Verossimilhança Irrestritos

Log-verossimilhança:

$$\ell(\mu_X, \mu_Y, \sigma^2) = -\frac{n+m}{2}\log(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_X)^2 + \sum_{j=1}^{m}(y_j - \mu_Y)^2\right]$$

Derivadas parciais:
Em relação a μ_X:

$$\frac{\partial \ell}{\partial \mu_X} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_X) = \frac{1}{\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - n\mu_X\right) = 0$$

Portanto: $\hat{\mu}_X = \bar{x}$.
Em relação a μ_Y:

$$\frac{\partial \ell}{\partial \mu_Y} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{j=1}^{m}(y_j - \mu_Y) = \frac{1}{\sigma^2}\left(\sum_{j=1}^{m} y_j - m\mu_Y\right) = 0$$

Portanto: $\hat{\mu}_Y = \bar{y}$.
Em relação a σ^2:

$$\frac{\partial \ell}{\partial \sigma^2} = -\frac{n+m}{2\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - \hat{\mu}_X)^2 + \sum_{j=1}^{m}(y_j - \hat{\mu}_Y)^2\right] = 0$$

Portanto:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n+m}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 + \sum_{j=1}^{m}(y_j - \bar{y})^2\right]$$

Explicação: Note que este é o EMV irrestrito. Ele usa as médias amostrais separadas ($\bar{x}$ e $\bar{y}$) para cada população.

6.6 Passo 5: Máxima Verossimilhança sob H_0

Sob H_0, temos $\mu_X = \mu_Y = \mu$ (desconhecido). Precisamos estimar μ e σ^2 sujeitos a essa restrição.

Log-verossimilhança sob H_0:

$$\ell(\mu, \sigma^2) = -\frac{n+m}{2}\log(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 + \sum_{j=1}^{m}(y_j-\mu)^2\right]$$

Derivada em relação a μ:

$$\frac{\partial \ell}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu) + \sum_{j=1}^{m}(y_j-\mu)\right] = \frac{1}{\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{n}x_i + \sum_{j=1}^{m}y_j - (n+m)\mu\right] = 0$$

Portanto:

$$\hat{\mu} = \frac{n\bar{x} + m\bar{y}}{n+m}$$

Explicação: Este é uma média ponderada das médias amostrais, onde os pesos são os tamanhos das amostras.

Derivada em relação a σ^2:

$$\frac{\partial \ell}{\partial \sigma^2} = -\frac{n+m}{2\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\hat{\mu})^2 + \sum_{j=1}^{m}(y_j-\hat{\mu})^2\right] = 0$$

Portanto:

$$\hat{\sigma}_c^2 = \frac{1}{n+m}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\hat{\mu})^2 + \sum_{j=1}^{m}(y_j-\hat{\mu})^2\right]$$

onde o subscrito c indica "restrito" (constrained).

Explicação: Este é o EMV restrito. Ele usa a média comum estimada $\hat{\mu}$ para ambas as populações.

6.7 Passo 6: Simplificação das Expressões

Precisamos simplificar as expressões para calcular Λ. Vamos trabalhar com as somas de quadrados.

Identidade fundamental: Para qualquer constante c:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-c)^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x}+\bar{x}-c)^2$$

Expandindo:

$$= \sum_{i=1}^{n}\left[(x_i-\bar{x})^2 + 2(x_i-\bar{x})(\bar{x}-c) + (\bar{x}-c)^2\right]$$

Como $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x}) = 0$, temos:

$$= \sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 + n(\bar{x}-c)^2$$

Aplicação: Para a amostra X sob H_0:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \hat{\mu})^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 + n(\bar{x} - \hat{\mu})^2$$

Para a amostra Y sob H_0:

$$\sum_{j=1}^{m}(y_j - \hat{\mu})^2 = \sum_{j=1}^{m}(y_j - \bar{y})^2 + m(\bar{y} - \hat{\mu})^2$$

Portanto:

$$\hat{\sigma}_c^2 = \frac{1}{n+m}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 + n(\bar{x} - \hat{\mu})^2 + \sum_{j=1}^{m}(y_j - \bar{y})^2 + m(\bar{y} - \hat{\mu})^2\right]$$

6.8 Passo 7: Cálculo de $(\bar{x} - \hat{\mu})^2$ e $(\bar{y} - \hat{\mu})^2$

Temos:

$$\hat{\mu} = \frac{n\bar{x} + m\bar{y}}{n+m}$$

Portanto:

$$\bar{x} - \hat{\mu} = \bar{x} - \frac{n\bar{x} + m\bar{y}}{n+m} = \frac{(n+m)\bar{x} - n\bar{x} - m\bar{y}}{n+m} = \frac{m(\bar{x} - \bar{y})}{n+m}$$

Explicação:

$$(n+m)\bar{x} - n\bar{x} = m\bar{x}$$

Similarmente:

$$\bar{y} - \hat{\mu} = \bar{y} - \frac{n\bar{x} + m\bar{y}}{n+m} = \frac{(n+m)\bar{y} - n\bar{x} - m\bar{y}}{n+m} = \frac{n(\bar{y} - \bar{x})}{n+m} = -\frac{n(\bar{x} - \bar{y})}{n+m}$$

Portanto:

$$n(\bar{x} - \hat{\mu})^2 + m(\bar{y} - \hat{\mu})^2 = n\left(\frac{m(\bar{x} - \bar{y})}{n+m}\right)^2 + m\left(\frac{n(\bar{x} - \bar{y})}{n+m}\right)^2$$

$$= \frac{nm^2}{(n+m)^2}(\bar{x} - \bar{y})^2 + \frac{mn^2}{(n+m)^2}(\bar{x} - \bar{y})^2$$

$$= \frac{nm(m+n)}{(n+m)^2}(\bar{x} - \bar{y})^2 = \frac{nm}{n+m}(\bar{x} - \bar{y})^2$$

Explicação: Fatoramos $(\bar{x} - \bar{y})^2$ e simplificamos.

6.9 Passo 8: Expressão Final para $\hat{\sigma}_c^2$

$$\hat{\sigma}_c^2 = \frac{1}{n+m}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 + \sum_{j=1}^{m}(y_j-\bar{y})^2 + \frac{nm}{n+m}(\bar{x}-\bar{y})^2\right]$$

Definindo:

$$SS_X = \sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 = (n-1)s_x^2$$

$$SS_Y = \sum_{j=1}^{m}(y_j-\bar{y})^2 = (m-1)s_y^2$$

onde s_x^2 e s_y^2 são as variâncias amostrais (observações de S_X^2 e S_Y^2).
Portanto:

$$\hat{\sigma}_c^2 = \frac{1}{n+m}\left[(n-1)s_x^2 + (m-1)s_y^2 + \frac{nm}{n+m}(\bar{x}-\bar{y})^2\right]$$

6.10 Passo 9: Razão de Verossimilhanças

$$\Lambda = \frac{\sup_{(\mu_X,\mu_Y,\sigma^2)\in\Theta_0} L(\mu_X,\mu_Y,\sigma^2)}{\sup_{(\mu_X,\mu_Y,\sigma^2)\in\Theta} L(\mu_X,\mu_Y,\sigma^2)} = \frac{L(\hat{\mu},\hat{\sigma}_c^2)}{L(\bar{x},\bar{y},\hat{\sigma}^2)}$$

Substituindo as expressões:

$$\Lambda = \frac{(2\pi\hat{\sigma}_c^2)^{-\frac{n+m}{2}}\exp\left\{-\frac{n+m}{2\hat{\sigma}_c^2}\hat{\sigma}_c^2\right\}}{(2\pi\hat{\sigma}^2)^{-\frac{n+m}{2}}\exp\left\{-\frac{n+m}{2\hat{\sigma}^2}\hat{\sigma}^2\right\}}$$

Simplificação: Note que:

$$\exp\left\{-\frac{n+m}{2\hat{\sigma}_c^2}\hat{\sigma}_c^2\right\} = \exp\left\{-\frac{n+m}{2}\right\} = e^{-\frac{n+m}{2}}$$

Similarmente:

$$\exp\left\{-\frac{n+m}{2\hat{\sigma}^2}\hat{\sigma}^2\right\} = e^{-\frac{n+m}{2}}$$

Portanto:

$$\Lambda = \left(\frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\sigma}_c^2}\right)^{\frac{n+m}{2}}$$

Explicação: Os termos exponenciais se cancelam porque ambos são $e^{-\frac{n+m}{2}}$.

6.11 Passo 10: Manipulação Algébrica

Temos:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n+m}\left[(n-1)s_x^2 + (m-1)s_y^2\right]$$

$$\hat{\sigma}_c^2 = \frac{1}{n+m}\left[(n-1)s_x^2 + (m-1)s_y^2 + \frac{nm}{n+m}(\bar{x}-\bar{y})^2\right]$$

Portanto:

$$\hat{\sigma}_c^2 = \hat{\sigma}^2 + \frac{1}{n+m} \cdot \frac{nm}{n+m}(\bar{x}-\bar{y})^2 = \hat{\sigma}^2 + \frac{nm}{(n+m)^2}(\bar{x}-\bar{y})^2$$

Definindo:

$$R(\bar{x},\bar{y}) = \frac{\frac{nm}{n+m}(\bar{x}-\bar{y})^2}{(n-1)s_x^2 + (m-1)s_y^2}$$

Temos:

$$\hat{\sigma}_c^2 = \hat{\sigma}^2\left(1 + R(\bar{x},\bar{y})\right)$$

Verificação:

$$\hat{\sigma}_c^2 = \hat{\sigma}^2 + \frac{nm}{(n+m)^2}(\bar{x}-\bar{y})^2 = \hat{\sigma}^2\left[1 + \frac{\frac{nm}{(n+m)^2}(\bar{x}-\bar{y})^2}{\hat{\sigma}^2}\right]$$

$$= \hat{\sigma}^2\left[1 + \frac{\frac{nm}{(n+m)^2}(\bar{x}-\bar{y})^2}{\frac{1}{n+m}[(n-1)s_x^2 + (m-1)s_y^2]}\right]$$

$$= \hat{\sigma}^2\left[1 + \frac{nm(\bar{x}-\bar{y})^2}{(n+m)[(n-1)s_x^2 + (m-1)s_y^2]}\right] = \hat{\sigma}^2(1 + R(\bar{x},\bar{y}))$$

Portanto:

$$\Lambda = \left(\frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\sigma}_c^2}\right)^{\frac{n+m}{2}} = \left(\frac{1}{1+R(\bar{x},\bar{y})}\right)^{\frac{n+m}{2}} = [1 + R(\bar{x},\bar{y})]^{-\frac{n+m}{2}}$$

6.12 Passo 11: Região Crítica

O TRV rejeita H_0 quando $\Lambda < k$ para algum $k \in (0,1)$.

Como $\Lambda = [1 + R(\bar{x},\bar{y})]^{-\frac{n+m}{2}}$ é uma função decrescente de $R(\bar{x},\bar{y})$, temos:

$$\Lambda < k \quad \Leftrightarrow \quad [1 + R(\bar{x},\bar{y})]^{-\frac{n+m}{2}} < k$$

Elevando ambos os lados à potência $-\frac{2}{n+m}$ (e invertendo a desigualdade porque o expoente é negativo):

$$1 + R(\bar{x},\bar{y}) > k^{-\frac{2}{n+m}}$$

Portanto:

$$R(\bar{x},\bar{y}) > k^{-\frac{2}{n+m}} - 1$$

Explicação: Como a função $f(x) = x^{-\frac{n+m}{2}}$ é estritamente decrescente para $x > 0$, quando aplicamos a inversa, a desigualdade se inverte.

6.13 Passo 12: Estatística de Teste

Temos:

$$R(\bar{x},\bar{y}) = \frac{\frac{nm}{n+m}(\bar{x}-\bar{y})^2}{(n-1)s_x^2 + (m-1)s_y^2}$$

Tomando a raiz quadrada:

$$\sqrt{R(\bar{x},\bar{y})} = \sqrt{\frac{nm}{n+m}} \cdot \frac{|\bar{x}-\bar{y}|}{\sqrt{(n-1)s_x^2 + (m-1)s_y^2}}$$

Definindo a variância amostral conjunta:

$$s_p^2 = \frac{(n-1)s_x^2 + (m-1)s_y^2}{n+m-2}$$

Temos:

$$(n-1)s_x^2 + (m-1)s_y^2 = (n+m-2)s_p^2$$

Portanto:

$$\sqrt{R(\bar{x},\bar{y})} = \sqrt{\frac{nm}{n+m}} \cdot \frac{|\bar{x}-\bar{y}|}{\sqrt{(n+m-2)s_p^2}} = \sqrt{\frac{nm}{n+m}} \cdot \frac{|\bar{x}-\bar{y}|}{s_p\sqrt{n+m-2}}$$

Simplificando:

$$= \frac{|\bar{x}-\bar{y}|}{s_p} \cdot \sqrt{\frac{nm}{(n+m)(n+m-2)}}$$

Para grandes amostras, $(n+m-2) \approx (n+m)$, então:

$$\sqrt{\frac{nm}{(n+m)(n+m-2)}} \approx \sqrt{\frac{nm}{(n+m)^2}} = \sqrt{\frac{nm}{n+m}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n+m}} = \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}$$

Estatística de teste:

$$T(\bar{x},\bar{y}) = \frac{\bar{x}-\bar{y}}{s_p\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}}$$

Distribuição sob H_0: $T(\bar{x},\bar{y}) \sim t_{n+m-2}$

Explicação: Esta é a estatística t de Student para duas amostras com variâncias iguais. Os graus de liberdade são $n+m-2$ porque estimamos duas médias.

6.14 Passo 13: Função Crítica Final

$$\psi(\bar{x},\bar{y}) = \begin{cases} 1, & |T(\bar{x},\bar{y})| > t_{n+m-2,\alpha/2} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

onde $t_{n+m-2,\alpha/2}$ é o quantil $(1-\alpha/2)$ da distribuição t de Student com $n+m-2$ graus de liberdade.

7 TRV para Duas Amostras: Comparação de Variâncias

7.1 Enunciado do Problema

Sejam:

- $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$
- $Y_1, \ldots, Y_m$ uma amostra aleatória de $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$

- As amostras são independentes entre si

Queremos testar:

$$H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2 \quad \text{vs} \quad H_1 : \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$$

Observação: Agora não assumimos que as variâncias são iguais. Na verdade, queremos testar se elas são iguais.

7.2 Passo 1: Definição dos Espaços Paramétricos

Espaço paramétrico completo:

$$\Theta = \{(\mu_X, \mu_Y, \sigma_X^2, \sigma_Y^2) : \mu_X, \mu_Y \in \mathbb{R}, \sigma_X^2, \sigma_Y^2 \in \mathbb{R}_+\}$$

Espaço paramétrico sob H_0:

$$\Theta_0 = \{(\mu_X, \mu_Y, \sigma_X^2, \sigma_Y^2) : \mu_X, \mu_Y \in \mathbb{R}, \sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \sigma^2 \in \mathbb{R}_+\}$$

Explicação: Sob H_0, as variâncias são iguais a um valor comum σ^2 (desconhecido).

7.3 Passo 2: Função de Verossimilhança

Como as amostras são independentes:

$$L(\mu_X, \mu_Y, \sigma_X^2, \sigma_Y^2) = L_X(\mu_X, \sigma_X^2) \cdot L_Y(\mu_Y, \sigma_Y^2)$$

onde:

$$L_X(\mu_X, \sigma_X^2) = (2\pi\sigma_X^2)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_X^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_X)^2\right\}$$

$$L_Y(\mu_Y, \sigma_Y^2) = (2\pi\sigma_Y^2)^{-m/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_Y^2}\sum_{i=1}^{m}(y_i - \mu_Y)^2\right\}$$

Portanto:

$$L(\mu_X, \mu_Y, \sigma_X^2, \sigma_Y^2) = (2\pi)^{-\frac{n+m}{2}}(\sigma_X^2)^{-n/2}(\sigma_Y^2)^{-m/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_X^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_X)^2 - \frac{1}{2\sigma_Y^2}\sum_{i=1}^{m}(y_i - \mu_Y)^2\right\} \tag{4}$$

Explicação: Note que agora temos variâncias diferentes (σ_X^2 e σ_Y^2) para cada população.

7.4 Passo 3: Estimadores de Máxima Verossimilhança Irrestritos

As estimativas irrestritas são obtidas maximizando cada verossimilhança separadamente:

Para a amostra X:

$$\hat{\mu}_X = \bar{x}, \quad \hat{\sigma}_X^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

Para a amostra Y:

$$\hat{\mu}_Y = \bar{y}, \quad \hat{\sigma}_Y^2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(y_i - \bar{y})^2$$

Explicação: Como as amostras são independentes e os parâmetros são diferentes, maximizamos cada verossimilhança separadamente.

7.5 Passo 4: Máxima Verossimilhança sob H_0

Sob H_0, temos $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \sigma^2$ (desconhecido). A verossimilhança sob H_0 é:

$$L(\mu_X, \mu_Y, \sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n+m}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_X)^2 + \sum_{i=1}^{m}(y_i-\mu_Y)^2\right]\right\}$$

Log-verossimilhança:

$$\ell(\mu_X, \mu_Y, \sigma^2) = -\frac{n+m}{2}\log(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_X)^2 + \sum_{i=1}^{m}(y_i-\mu_Y)^2\right]$$

Derivadas parciais:
Em relação a μ_X:

$$\frac{\partial \ell}{\partial \mu_X} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_X) = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{\mu}_X = \bar{x}$$

Em relação a μ_Y:

$$\frac{\partial \ell}{\partial \mu_Y} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{m}(y_i-\mu_Y) = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{\mu}_Y = \bar{y}$$

Em relação a σ^2:

$$\frac{\partial \ell}{\partial \sigma^2} = -\frac{n+m}{2\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\hat{\mu}_X)^2 + \sum_{i=1}^{m}(y_i-\hat{\mu}_Y)^2\right] = 0$$

Portanto:

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n+m}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 + \sum_{i=1}^{m}(y_i-\bar{y})^2\right]$$

Explicação: Usamos $\tilde{\sigma}^2$ para denotar o EMV restrito (sob H_0), para diferenciá-lo de $\hat{\sigma}^2$ usado anteriormente.

7.6 Passo 5: Razão de Verossimilhanças

$$\begin{aligned}\Lambda &= \frac{\sup_{(\mu_X,\mu_Y,\sigma_X^2,\sigma_Y^2)\in\Theta_0} L(\mu_X, \mu_Y, \sigma_X^2, \sigma_Y^2)}{\sup_{(\mu_X,\mu_Y,\sigma_X^2,\sigma_Y^2)\in\Theta} L(\mu_X, \mu_Y, \sigma_X^2, \sigma_Y^2)} \\ &= \frac{L(\bar{x}, \bar{y}, \tilde{\sigma}^2, \tilde{\sigma}^2)}{L(\bar{x}, \bar{y}, \hat{\sigma}_X^2, \hat{\sigma}_Y^2)}\end{aligned}$$

Substituindo:

$$\Lambda = \frac{(2\pi\tilde{\sigma}^2)^{-\frac{n+m}{2}} \exp\left\{-\frac{n+m}{2\tilde{\sigma}^2}\tilde{\sigma}^2\right\}}{(2\pi)^{-\frac{n+m}{2}}(\hat{\sigma}_X^2)^{-n/2}(\hat{\sigma}_Y^2)^{-m/2}\exp\left\{-\frac{n}{2\hat{\sigma}_X^2}\hat{\sigma}_X^2 - \frac{m}{2\hat{\sigma}_Y^2}\hat{\sigma}_Y^2\right\}}$$

Simplificando os expoentes:

$$\exp\left\{-\frac{n+m}{2\tilde{\sigma}^2}\tilde{\sigma}^2\right\} = e^{-\frac{n+m}{2}}$$

$$\exp\left\{-\frac{n}{2\hat{\sigma}_X^2}\hat{\sigma}_X^2 - \frac{m}{2\hat{\sigma}_Y^2}\hat{\sigma}_Y^2\right\} = e^{-\frac{n+m}{2}}$$

Portanto:

$$\Lambda = \frac{(\hat{\sigma}_X^2)^{n/2}(\hat{\sigma}_Y^2)^{m/2}}{(\tilde{\sigma}^2)^{\frac{n+m}{2}}}$$

7.7 Passo 6: Simplificação de $\tilde{\sigma}^2$

Temos:

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}^2 &= \frac{1}{n+m}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 + \sum_{i=1}^{m}(y_i-\bar{y})^2\right] \\ &= \frac{1}{n+m}\left[n\hat{\sigma}_X^2 + m\hat{\sigma}_Y^2\right]\end{aligned}$$

Explicação: Por definição, $\hat{\sigma}_X^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$ e $\hat{\sigma}_Y^2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(y_i-\bar{y})^2$. Definindo $\lambda = \frac{n}{n+m}$, temos:

$$\tilde{\sigma}^2 = \lambda\hat{\sigma}_X^2 + (1-\lambda)\hat{\sigma}_Y^2$$

Explicação:

$$\frac{1}{n+m}(n\hat{\sigma}_X^2 + m\hat{\sigma}_Y^2) = \frac{n}{n+m}\hat{\sigma}_X^2 + \frac{m}{n+m}\hat{\sigma}_Y^2 = \lambda\hat{\sigma}_X^2 + (1-\lambda)\hat{\sigma}_Y^2$$

7.8 Passo 7: Manipulação Algébrica de Λ

$$\Lambda = \frac{(\hat{\sigma}_X^2)^{n/2}(\hat{\sigma}_Y^2)^{m/2}}{[\lambda\hat{\sigma}_X^2 + (1-\lambda)\hat{\sigma}_Y^2]^{\frac{n+m}{2}}}$$

Fatorando $(\hat{\sigma}_Y^2)^{\frac{n+m}{2}}$:

$$\begin{aligned}\Lambda &= \frac{(\hat{\sigma}_X^2)^{n/2}(\hat{\sigma}_Y^2)^{m/2}}{(\hat{\sigma}_Y^2)^{\frac{n+m}{2}}\left[\lambda\frac{\hat{\sigma}_X^2}{\hat{\sigma}_Y^2} + (1-\lambda)\right]^{\frac{n+m}{2}}} \\ &= \frac{(\hat{\sigma}_X^2)^{n/2}}{(\hat{\sigma}_Y^2)^{n/2}} \cdot \frac{1}{\left[\lambda\frac{\hat{\sigma}_X^2}{\hat{\sigma}_Y^2} + (1-\lambda)\right]^{\frac{n+m}{2}}} \\ &= \left(\frac{\hat{\sigma}_X^2}{\hat{\sigma}_Y^2}\right)^{n/2} \cdot \left[\lambda\frac{\hat{\sigma}_X^2}{\hat{\sigma}_Y^2} + (1-\lambda)\right]^{-\frac{n+m}{2}}\end{aligned}$$

Definindo $u = \frac{\hat{\sigma}_X^2}{\hat{\sigma}_Y^2}$:

$$\Lambda = u^{n/2}[\lambda u + (1-\lambda)]^{-\frac{n+m}{2}}$$

Multiplicando e dividindo por $\lambda^{-\frac{n+m}{2}}$:

$$\Lambda = \lambda^{-\frac{n+m}{2}} \cdot u^{n/2}\lambda^{\frac{n+m}{2}}[\lambda u + (1-\lambda)]^{-\frac{n+m}{2}}$$

$$= \lambda^{-\frac{n+m}{2}}\left(\frac{u}{\lambda u + (1-\lambda)}\right)^{n/2}\left(\frac{1}{\lambda u + (1-\lambda)}\right)^{m/2}$$

$$= \lambda^{-\frac{n+m}{2}} \left(\frac{u}{\lambda u + (1-\lambda)} \right)^{\frac{n+m}{2}}$$

Definindo $b = \frac{1-\lambda}{\lambda} = \frac{m}{n}$:

$$\lambda u + (1-\lambda) = \lambda u + \lambda b = \lambda(u+b)$$

Portanto:

$$\Lambda = \lambda^{-\frac{n+m}{2}} \left(\frac{u}{\lambda(u+b)} \right)^{\frac{n+m}{2}} = \lambda^{-\frac{n+m}{2}} \lambda^{-\frac{n+m}{2}} \left(\frac{u}{u+b} \right)^{\frac{n+m}{2}}$$

$$= \lambda^{-(n+m)} \left(\frac{u}{u+b} \right)^{\frac{n+m}{2}}$$

Correção: Vamos refazer com mais cuidado. Temos:

$$\Lambda = u^{n/2}[\lambda u + (1-\lambda)]^{-\frac{n+m}{2}}$$

Com $b = \frac{1-\lambda}{\lambda} = \frac{m}{n}$, temos $1 - \lambda = \lambda b$, então:

$$\lambda u + (1-\lambda) = \lambda u + \lambda b = \lambda(u+b)$$

Portanto:

$$\Lambda = u^{n/2}[\lambda(u+b)]^{-\frac{n+m}{2}} = u^{n/2} \lambda^{-\frac{n+m}{2}} (u+b)^{-\frac{n+m}{2}}$$

$$= \lambda^{-\frac{n+m}{2}} \cdot \frac{u^{n/2}}{(u+b)^{\frac{n+m}{2}}}$$

7.9 Passo 8: Análise da Função $g(u)$

Definindo:

$$g(u) = \frac{u^{n/2}}{(u+b)^{\frac{n+m}{2}}}, \quad u > 0$$

onde $b = \frac{m}{n}$.
Derivada:

$$g'(u) = \frac{\frac{n}{2} u^{\frac{n}{2}-1} (u+b)^{\frac{n+m}{2}} - u^{n/2} \frac{n+m}{2} (u+b)^{\frac{n+m}{2}-1}}{(u+b)^{n+m}}$$

Fatorando:

$$= \frac{u^{\frac{n}{2}-1} (u+b)^{\frac{n+m}{2}-1}}{(u+b)^{n+m}} \left[\frac{n}{2}(u+b) - u\frac{n+m}{2} \right]$$

$$= \frac{u^{\frac{n}{2}-1} (u+b)^{\frac{n+m}{2}-1}}{(u+b)^{n+m}} \cdot \frac{1}{2}[n(u+b) - u(n+m)]$$

$$= \frac{u^{\frac{n}{2}-1} (u+b)^{\frac{n+m}{2}-1}}{(u+b)^{n+m}} \cdot \frac{1}{2}[nu + nb - nu - mu]$$

$$= \frac{u^{\frac{n}{2}-1} (u+b)^{\frac{n+m}{2}-1}}{(u+b)^{n+m}} \cdot \frac{1}{2}[nb - mu]$$

Simplificando o denominador:

$$(u+b)^{n+m} = (u+b)^{\frac{n+m}{2}} \cdot (u+b)^{\frac{n+m}{2}}$$

Portanto:

$$g'(u) = \frac{u^{\frac{n}{2}-1}}{(u+b)^{\frac{n+m}{2}+1}} \cdot \frac{1}{2}[nb - mu]$$

Ponto crítico: $g'(u) = 0 \Rightarrow nb - mu = 0 \Rightarrow u = \frac{nb}{m} = \frac{n \cdot m/n}{m} = 1$.

Conclusão: $g(u)$ tem máximo em $u = 1$, ou seja, quando $\frac{\hat{\sigma}_X^2}{\hat{\sigma}_Y^2} = 1$, o que corresponde a $\hat{\sigma}_X^2 = \hat{\sigma}_Y^2$ (evidência a favor de H_0).

Quando $u \to 0$ ou $u \to \infty$, temos $g(u) \to 0$, então $\Lambda \to 0$ (evidência contra H_0).

7.10 Passo 9: Região Crítica e Estatística de Teste

Como Λ é pequeno quando $\frac{\hat{\sigma}_X^2}{\hat{\sigma}_Y^2}$ está muito distante de 1, a região crítica é bilateral.

Propriedade conhecida: Sob H_0, temos:

$$\frac{(n-1)S_X^2}{\sigma_X^2} \sim \chi^2_{n-1}, \quad \frac{(m-1)S_Y^2}{\sigma_Y^2} \sim \chi^2_{m-1}$$

e essas variáveis são independentes.

Portanto:

$$F = \frac{S_X^2/\sigma_X^2}{S_Y^2/\sigma_Y^2} = \frac{S_X^2/\sigma_X^2}{S_Y^2/\sigma_Y^2} \sim F_{n-1,m-1}$$

Sob H_0, $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$, então:

$$F = \frac{S_X^2}{S_Y^2} \sim F_{n-1,m-1}$$

Função crítica:

$$\psi(x,y) = \begin{cases} 1, & F < F_{n-1,m-1,1-\alpha/2} \quad \text{ou} \quad F > F_{n-1,m-1,\alpha/2} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

onde $F_{n-1,m-1,\alpha/2}$ é o quantil $(1-\alpha/2)$ da distribuição F com $(n-1, m-1)$ graus de liberdade.

8 Conclusão

Este documento apresentou derivações detalhadas passo a passo dos TRV para:

1. **Caso 1:** Teste de média com variância conhecida - usa distribuição normal padrão $N(0,1)$ (Teste Z)

2. **Caso 2:** Teste de média com variância desconhecida - usa distribuição t_{n-1} (Teste t de Student)

3. **Caso 3:** Teste de variância com média conhecida - usa distribuição χ^2_n

4. **Caso 4:** Teste de variância com média desconhecida - usa distribuição χ^2_{n-1} (perde um grau de liberdade por estimar a média)

5. **TRV para duas amostras - médias:** Compara médias de duas populações normais com variâncias iguais - usa distribuição t_{n+m-2}
6. **TRV para duas amostras - variâncias:** Compara variâncias de duas populações normais - usa distribuição $F_{n-1,m-1}$

Cada passo foi explicado em detalhes, incluindo justificativas para manipulações algébricas e o raciocínio estatístico subjacente. Esperamos que este material facilite a compreensão desses conceitos importantes em inferência estatística.