

# Capítulo 4 - Compilação Completa

## Teste de Hipótese

Curso de Inferência Estatística - PPGEST/UFPE

Novembro 2025

## Introdução ao Capítulo 4: Teste de Hipóteses

O Capítulo 4 apresenta uma das ferramentas mais fundamentais e amplamente utilizadas na inferência estatística: os **Testes de Hipóteses**. Esta metodologia permite que tomemos decisões informadas sobre parâmetros populacionais desconhecidos com base em evidências amostrais, fornecendo um arcabouço rigoroso para validar ou refutar afirmações científicas.

### Contexto e Motivação

A teoria de testes de hipóteses, desenvolvida principalmente por Neyman e Pearson, responde à seguinte questão fundamental: *“Dada uma afirmação sobre um parâmetro populacional desconhecido  $\theta$ , como podemos usar uma amostra aleatória para decidir se devemos aceitar ou rejeitar tal afirmação?”*

Esta questão permeia praticamente todas as áreas da ciência onde dados empíricos são coletados: desde estudos clínicos que avaliam a eficácia de novos tratamentos, passando por controle de qualidade industrial, até pesquisas sociais e econômicas.

### Estrutura do Capítulo

O capítulo está organizado de forma a construir progressivamente os conceitos fundamentais e suas aplicações:

**4.1 Introdução e Conceitos Fundamentais** Apresenta a formulação básica do problema de teste de hipóteses, incluindo:

- Definição de hipótese estatística (nula  $H_0$  e alternativa  $H_1$ )
- Classificação das hipóteses: simples, compostas unilaterais e bilaterais
- Região crítica e regra de decisão
- Conceito de erro Tipo I ( $\alpha$ ) e Tipo II ( $\beta$ )

**4.2 Probabilidade de Erro e Função Poder** Desenvolve a teoria quantitativa dos testes, introduzindo:

- Função poder  $Q_T(\theta)$  e sua interpretação
- Conceitos de tamanho e nível de significância
- Testes aleatorizados versus não aleatorizados
- Função crítica ou função do teste  $\psi_T(x)$

**4.3 Lema de Neyman-Pearson (LNP)** Este é um dos resultados mais importantes da teoria, que estabelece:

- O teste mais poderoso (MP) para hipóteses simples
- A razão de verossimilhança como estatística de teste
- Relação entre testes MP e estatísticas suficientes

**4.4 Testes para Hipóteses Compostas Unilaterais** Estende a teoria para o caso mais geral de hipóteses compostas:

- Conceito de Teste Uniformemente Mais Poderoso (UMP)
- Razão de Verossimilhança Monótona (RVM)
- Teorema de Karlin-Rubin
- Aplicações para distribuições da família exponencial

**4.5 Testes para Hipóteses Bilaterais** Aborda testes do tipo  $H_0 : \theta = \theta_0$  versus  $H_1 : \theta \neq \theta_0$ :

- Testes Uniformemente Mais Poderosos Não Viesados (UMPNV)
- Aplicações para parâmetros de locação e escala

**4.6 Estatísticas de Teste Clássicas** Apresenta as principais estatísticas de teste utilizadas na prática:

- Teste Z (distribuição normal com variância conhecida)
- Teste t de Student (variância desconhecida)
- Teste Qui-quadrado ( $\chi^2$ ) para variância
- Teste F para comparação de variâncias

## Objetivos de Aprendizagem

Ao final deste capítulo, espera-se que o estudante seja capaz de:

1. Formular corretamente hipóteses estatísticas para problemas práticos
2. Compreender e interpretar os erros Tipo I e II e suas implicações
3. Calcular a função poder de um teste e utilizá-la para comparar testes
4. Aplicar o Lema de Neyman-Pearson para construir testes MP
5. Utilizar o Teorema de Karlin-Rubin para obter testes UMP
6. Selecionar e aplicar apropriadamente as estatísticas de teste clássicas
7. Interpretar p-valores e tomar decisões estatísticas fundamentadas

## Filosofia do Teste de Hipóteses

É importante destacar a filosofia subjacente ao teste de hipóteses:

- **Princípio da Falsificabilidade:** Procuramos evidências contra  $H_0$  (não provamos que  $H_0$  é verdadeira)
- **Controle de Erro:** Fixamos um nível máximo aceitável para o erro Tipo I ( $\alpha$ )
- **Maximização do Poder:** Buscamos testes que maximizem a probabilidade de detectar quando  $H_0$  é falsa
- **Decisão com Incerteza:** Reconhecemos que toda decisão estatística está sujeita a erro

Este capítulo fornece não apenas as ferramentas técnicas necessárias para realizar testes de hipóteses, mas também desenvolve a intuição estatística fundamental para aplicar essas ferramentas de forma apropriada em contextos reais.

# Capítulo 4

## Teste de Hipótese

### 4.1 Introdução

Seja  $X$  uma v.a. populacional com fdp (ou fmp)  $f(x; \theta)$  para  $x \in \mathbb{R}$  e  $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$ .

**Definição (4.1.1)** Uma hipótese é uma afirmação sobre o parâmetro desconhecido  $\theta$ . Por exemplo:

$$H : \mu = \mu_0, \quad H : \sigma^2 > \sigma_0^2, \quad H : \alpha \neq \alpha_0$$

Neyman e Pearson formularam o problema de testar hipótese como se segue.

Considere que se deseja escolher entre:

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \quad \times \quad H_1 : \theta \in \Theta_1 \tag{1}$$

tal que  $\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$  e  $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$ .

Então, baseado-se em uma amostra  $X_1, \dots, X_n \in X$ , deve-se tomar a decisão de rejeitar  $H_0$  ou não rejeitar.

As hipóteses costumam ser classificadas como:

**1) Simples:**

$$H_0 : \theta = \theta_0, \quad H_1 : \mu = \mu_1 \tag{2}$$

**2) Composta unilateral:**

$$H_0 : \theta \geq \theta_0, \quad H_1 : \mu < \mu_1 \tag{3}$$

**3) Composta bilateral:**

$$H_0 : \theta \neq \theta_0 \quad \text{ou} \quad [\theta \leq \theta_0 \text{ ou } \theta \geq \theta_1] \tag{4}$$

**Obs:**  $H_0$  é chamada de hipótese nula.

$H_1$  é chamada de hipótese alternativa.

## 4.2 Probabilidade de erro e função poder

Considere testar:

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \quad \times \quad H_1 : \theta \in \Theta_1 \quad (5)$$

A partir de  $X_1, \dots, X_n$  uma amostra de  $X$  com fdp  $f(x; \theta)$ , podem-se cometer dois tipos de erro:

Natureza da escolha	$H_0$ verdadeira	$H_1$ verdadeira
Não rejeitar	—	Erro tipo II
Rejeitar	Erro tipo I	—

Em termos objetivos, tendo observados

$$X = (X_1, \dots, X_n),$$

um teste:

1. Encontraria evidências para (não) rejeitar  $H_0$ .
2. Isto é feito por particionar  $\mathbb{R}^n$  em dois conjuntos:  $R_c \subset \mathbb{R}^n$  chamado de região crítica e seu complementar  $R_c^c$  tal que

$$R_c \cup R_c^c = \mathbb{R}^n \quad \text{e} \quad R_c \cap R_c^c = \emptyset \quad (6)$$

3. Se  $X \in R_c$ , rejeita-se  $H_0 : \theta \in \Theta_0$ .

## Q(4.1) Alguns exemplos de testes

Sejam  $X_1, \dots, X_9$  uma amostra de  $X \sim N(\theta, 1)$  para  $\theta \in \mathbb{R}$  desconhecido.  
No contexto, deseja-se testar:

$$H_0 : \theta = 5.5 \quad \text{vs} \quad H_1 : \theta = 8 \quad (7)$$

Seja

$$\bar{X}_n = 9^{-1} \sum_{i=1}^9 X_i \quad (8)$$

### Testes

- Teste #1: rejeitam-se  $H_0$  se e só se  $X_1 > 7$
- Teste #2: rejeitam-se  $H_0$  se e só se  $\frac{X_1+X_2}{2} > 7$
- Teste #3: rejeitam-se  $H_0$  se e só se  $\bar{X}_n > 6$
- Teste #4: rejeitam-se  $H_0$  se e só se  $\bar{X}_n > 7.5$

### Suas regiões críticas

Para teste #1:

$$R_c = \{(x_1, \dots, x_9) \in \mathbb{R}^9 : x_1 > 7\} \quad (9)$$

Para teste #2:

$$R_c = \{(x_1, \dots, x_9) \in \mathbb{R}^9 : \frac{x_1 + x_2}{2} > 7\} \quad (10)$$

Para teste #3:

$$R_c = \{(x_1, \dots, x_9) \in \mathbb{R}^9 : \bar{x} > 6\} \quad (11)$$

Para teste #4:

$$R_c = \{(x_1, \dots, x_9) \in \mathbb{R}^9 : \bar{x} > 7.5\} \quad (12)$$

## Definição (4.2.1) Teste de hipóteses

**Data:** 27/10/25

Um teste  $T$  para uma hipótese  $H$  é uma regra ou processo para decidir se  $H$  deve ser rejeitada.

Um conceito importante é o de probabilidade dos erros dos Tipos I e II.

### Erro Tipo I

$$\begin{aligned} H_0, \quad \alpha &= P\{\text{Erro do tipo I}\} \\ &= P\{\text{Rejeitar } H_0 \wedge H_0 \text{ é verdadeira}\} \\ &= P_{H_0}\{X \in R_c\} \end{aligned}$$

### Erro Tipo II

$$\begin{aligned} H_1, \quad \beta &= P\{\text{Erro do tipo II}\} \\ &= P\{\text{Não rejeitar } H_0 \wedge H_0 \text{ é falsa}\} \\ &= P_{H_1}\{X \in R'_c\} \end{aligned}$$

### Exemplo (4.2)

Para teste #1 em (4.1) tem-se:

$$\begin{aligned} \alpha &= P_{H_0:\theta=5.5}\{X_1 > 7\} \\ \beta &= P_{H_1:\theta=8}\{X_1 \leq 7\} \\ \alpha &= P\left\{\frac{X_1 - 5.5}{\sigma} > \frac{7 - 5.5}{\sigma}\right\}, \quad Z \sim N(0, 1) \\ &= P\{Z > 1.5\} \\ &= 1 - \Phi(1.5) = 0.06691 \\ \beta &= P\left\{\frac{X_1 - 8}{\sigma} < \frac{7 - 8}{\sigma}\right\}, \quad Z \sim N(0, 1) \\ &= P\{Z < -1\} \\ &= \Phi(-1) = 0.15866 \end{aligned}$$

**29/10/25**

Outra quantidade importante é Poder do teste.

**Definição (4.22)** O Poder ou função poder de um  $\Upsilon$ , denotada como  $Q_{\Upsilon}(\theta)$ , é a probabilidade de rejeitar  $H_0$  quando  $\theta \in \Theta$  é verdadeira.

Essa função é dada por

$$Q_{\Upsilon}(\theta) = P_{\theta}[X \in R_c], \quad X \in \mathbb{R}^n, \quad \theta \in \Theta \quad (13)$$

**Obs:** Note que

$$\alpha = Q_{\Upsilon}(\theta_0) \quad (14)$$

e

$$1 - \beta = Q_{\Upsilon}(\theta_1) \quad (15)$$

Para  $H_0 : \theta = \theta_0$  e  $H_1 : \theta = \theta_1$ .

**Q(4.3)** Para o teste #4 da questão Q(4.1) tem-se

$$Q_{\Upsilon}(\theta) = P_{\theta}[X \in R_c] \quad (16)$$

$$= P_{\theta}[\bar{X}_n > 7.5] \quad (17)$$

$$\Rightarrow Q_{\Upsilon}(\theta) = P_{\theta} \left[ \frac{\bar{X}_n - \theta}{1/\sqrt{n}} > \frac{7.5 - \theta}{1/\sqrt{n}} \right], \quad Z \sim N(0, 1) \quad (18)$$



29/10/25

$$P_\theta[Z > \sqrt{n}(7, 5 - \theta)] = 1 - \Phi(\sqrt{n}(7, 5 - \theta)), \quad (19)$$

em que

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt \quad \text{é fda de } Z \text{ e} \quad (20)$$

$$\phi(t) \quad \text{é a fdp de } Z. \quad (21)$$

Outro conceito importante é o de função crítica ou função do teste.

**Definição (4.2.3)** A função  $\psi_\Upsilon : \chi^n \rightarrow [0, 1]$  é chamada de função crítica ou função de teste se, e só se,  $\psi_\Upsilon(x)$  representa a probabilidade com a qual  $H_0$  é rejeitada quando  $[X = x]$  é observada.

**Obs:**

$$Q_\Upsilon(\theta) = E_\theta[\psi_\Upsilon(X)], \quad \forall \theta \in \Theta \quad (22)$$

Os testes podem ser classificados como “aleatorizados” e “não aleatorizados”.

**Definição (4.2.4) Tipos de Teste** Um teste  $\Upsilon$  para a hipótese  $H_0$  pode ser:

Seja  $x = (x_1, \dots, x_n)^T$  uma possível realização de  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$ .

**a)  $\Upsilon$  não aleatorizados:** Rejeita-se  $H_0$  se e só se  $x \in R_c$  ou tem função crítica

$$\Upsilon(x) = \begin{cases} 1, & x \in R_c \\ 0, & x \in R_c^c \end{cases}$$

**b)  $\Upsilon$  aleatorizado:** O teste é definido por uma função crítica dada por:

$$\Upsilon(x) = \begin{cases} 1, & x \in R_c \\ \delta, & x \in R_\delta \\ 0, & x \in (R_c \cup R_\delta)^c \end{cases}$$

**Exemplo:** Sejam  $X_1, \dots, X_n$  uma amostra de  $X \sim N(\theta, 25)$ .

Neste caso  $\mathbb{X} = \mathbb{R}^n$  é o espaço amostral. Considere o teste “Rejeitar  $H_0 : \theta \leq 17$  se e só se  $\bar{X}_n > 17 + \frac{5}{\sqrt{n}}$ ”.

$\Upsilon$  é não aleatorizado com função crítica dada por:

$$\Upsilon(x) = \begin{cases} 1, & x \in \{z \in \mathbb{R}^n : \bar{z}_n > 17 + \frac{5}{\sqrt{n}}\} \\ 0, & x \in \{z \in \mathbb{R}^n : \bar{z}_n \leq 17 + \frac{5}{\sqrt{n}}\} \end{cases}$$

**Exemplo:** Sejam  $X_1, \dots, X_n$  uma amostra de  $X \sim \text{Bernoulli}(\theta)$  para  $\theta \in (0, 1)$ .

Neste caso  $\mathbb{X} = \{0, 1\}^n$  é o espaço amostral.

**29/10/25**

Considere  $\Upsilon$  um teste para  $H_0 : \theta \leq \frac{1}{2}$  tal que  $H_0$  é rejeitada se só se  $\sum x_i > 5$ .  $\Upsilon$  é um teste aleatorizado com função crítica

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & x \in \{z \in \{0, 1\}^n : \sum_{i=1}^n z_i > 5\} \\ \delta, & x \in \{z \in \{0, 1\}^n : \sum_{i=1}^n z_i = 5\} \\ 0, & x \in \{z \in \{0, 1\}^n : \sum_{i=1}^n z_i < 5\} \end{cases} \quad (23)$$

Caso  $\psi(x) = \delta \in (0, 1)$  a decisão para rejeição de  $H_0$  se dará por “obter cara” no lançamento de uma moeda com  $P(\text{cara}) = \delta$ .

### 4.2.1 O Conceito de Melhor Teste

Considere testar  $H_0 : \theta \in \Theta_0$  x  $H_1 : \theta \in \Theta_1$  tal que  $\Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$ ,  $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$ .

**Definição (4.2.5)** Seja  $\alpha \in (0, 1)$  um valor fixado. Um teste  $\Upsilon$  para  $H_0$  x  $H_1$  com função poder  $Q_\Upsilon(\theta)$  é chamado de um teste de tamanho  $\alpha$  se

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} \{Q_\Upsilon(\theta)\} = \alpha \quad (24)$$

e é chamado de um teste de nível  $\alpha$  se

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} \{Q_\Upsilon(\theta)\} \leq \alpha \quad (25)$$

Ou, equivalentemente, teste de tamanho  $\alpha$  se

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} \{\psi_\Upsilon(x)\} = \alpha \quad (26)$$

e de nível se

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} \{\psi_\Upsilon(x)\} \leq \alpha \quad (27)$$

A escolha do melhor teste é dentro daqueles de nível  $\alpha$ .

**Definição (4.2.6).** Considere uma classe  $C$  de todos os testes de nível  $\alpha$  para  $H_0$  contra  $H_1$ . Um teste  $\Upsilon \in C$  com função poder  $Q_\Upsilon(\theta)$  é o **Melhor teste de nível  $\alpha$**  ou o **teste uniformemente mais poderoso (UMP)** de nível  $\alpha$  se e só se

$$Q_\Upsilon(\theta) \geq Q_{\Upsilon^*}(\theta), \quad \forall \theta \in \Theta_1 \quad (28)$$

em que  $\Upsilon^* \in C$  com função poder  $Q_{\Upsilon^*}(\theta)$ .

Se  $H_1$  é do tipo simples,  $H_1 : \theta = \theta_1$ , então o melhor teste é chamado de **Mais Poderoso (MP)**.

### 4.3 Teste Simples x Simples

Considere derivar o teste MP para o tipo simples x simples via o Lema de Neyman e Pearson (1933).

Sejam  $X = (X_1, \dots, X_n)^T$  uma a.a. de  $X$  com fdp (ou fmp)  $f(x; \theta)$  para  $x \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}$  e  $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}$  e  $x = (x_1, \dots, x_n)^T$  uma a.o. de  $X$ . Desejamos testar

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{x} \quad H_1 : \theta = \theta_1, \quad (29)$$

em que  $\theta_0, \theta_1 \in \Theta$  e  $\theta_0 \neq \theta_1$ . Note que a função de verossimilhança do contexto é dada por

$$L(\theta_i; x) = \prod_{k=1}^n f(x_k; \theta_i), \quad \text{para } i = 0, 1. \quad (30)$$

Considere comparar os poderes de todos os testes de nível  $\alpha$ , com  $\alpha$  pré-fixado em  $(0, 1)$ . Comumente, escolhe-se os valores  $\alpha = 1\%, 5\%, 10\%$ . Intuitivamente, um teste de  $H_0$  x  $H_1$  vem de comparar  $L(\theta_1; x)$  com  $L(\theta_0; x)$  e procurar qual quantidade é superior à outra. Como critério, a hipótese com verossimilhança significativamente maior é mais favorecida.

#### Teorema (4.3.1) [Lema de Neyman Pearson]

Considere um teste de  $H_0 : \theta = \theta_0$  x  $H_1 : \theta = \theta_1$  com região de rejeição e não rejeição de  $H_0$  dados por:

$$R_c = \{x \in \mathbb{R}^n : L(\theta_1; x) > k L(\theta_0; x)\}$$

e

$$R_c^c = \{x \in \mathbb{R}^n : L(\theta_1; x) < k L(\theta_0; x)\}$$

ou equivalentemente, usando a função crítica

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } L(\theta_1; x) > k L(\theta_0; x) \\ 0, & \text{se } L(\theta_1; x) < k L(\theta_0; x) \end{cases}$$

em que  $k \geq 0$  é determinado por

$$E_{\theta_0} [\psi(x)] = \alpha \quad (4.3.2)$$

Qualquer teste satisfazendo (4.3.1) e (4.3.2) é um teste MP de nível  $\alpha$ .

**Prova:** Consideremos a prova para o caso contínuo. Note que qualquer teste  $\Upsilon$  que satisfaça (4.3.2) tem tamanho  $\alpha$  e portanto nível  $\alpha$ .

Seja  $\Upsilon^*$  um teste com função crítica  $\psi_{\Upsilon^*}(x)$  e nível  $\alpha$ . Sejam  $Q_{\Upsilon}(\theta)$  e  $Q_{\Upsilon^*}(\theta)$  as funções poder de  $\Upsilon$  e  $\Upsilon^*$ , respectivamente.

**29/10/25**

Vamos primeiro a verificar que

$$\psi_{\Upsilon}(x) - \psi_{\Upsilon^*}(x) \cdot L(\theta_1, x) - k \cdot L(\theta_1, x) \geq 0 \quad (4.3.3)$$

$$x \in \mathcal{X}^n$$

Note que:

**[i]** Se  $\psi_{\Upsilon}(x) = 1$ , então

$$L(\theta_1, x) - k \cdot L(\theta_0, x) \geq 0 \quad \text{de (4.3.1)} \quad (31)$$

e

$$\psi_{\Upsilon}(x) - \psi_{\Upsilon^*}(x) \geq 0 \quad \text{da definição da função crítica (4.3.3)} \quad (32)$$

se verifica.

**[ii]** Se  $\psi_{\Upsilon}(x) = 0$ , então

$$L(\theta_1, x) - k \cdot L(\theta_0, x) \leq 0 \quad \text{de (4.3.1)} \quad (33)$$

e

$$\psi_{\Upsilon}(x) - \psi_{\Upsilon^*}(x) \leq 0 \quad \text{da definição da função crítica (4.3.3)} \quad (34)$$

se verifica.

**[iii]** Se  $0 < \psi_{\Upsilon}(x) < 1$ , então

$$L(\theta_1, x) - k \cdot L(\theta_0, x) = 0 \quad \text{e (4.3.3) se verifica} \quad (35)$$

Daí, tem-se

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\mathcal{X}^n} \{\psi_{\Upsilon}(x) - \psi_{\Upsilon^*}(x)\} [L(\theta_1; x) - k \cdot L(\theta_0; x)] dx \\ &= \int_{\mathcal{X}^n} \psi_{\Upsilon}(x) [L(\theta_1; x) - k L(\theta_0; x)] dx \\ &\quad - \int_{\mathcal{X}^n} \psi_{\Upsilon}^*(x) [L(\theta_1; x) - k L(\theta_0; x)] dx \\ &= [E_{\theta_1} \psi_{\Upsilon}(x) - k E_{\theta_0} \psi_{\Upsilon}(x)] \\ &\quad - [E_{\theta_1} \psi_{\Upsilon}^*(x) - k E_{\theta_0} \psi_{\Upsilon}^*(x)] \\ 0 &\leq \{Q_{\Upsilon}(\theta_1) - k Q_{\Upsilon}(\theta_0)\} \\ &\quad - \{Q_{\Upsilon}^*(\theta_1) - k Q_{\Upsilon}^*(\theta_0)\} \\ &= Q_{\Upsilon}(\theta_1) - Q_{\Upsilon}^*(\theta_1) - k [Q_{\Upsilon}(\theta_0) - Q_{\Upsilon}^*(\theta_0)] \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

Note que  $Q_{\Upsilon}(\theta_0) = \alpha$  e  $Q_{\Upsilon}^*(\theta_0) \leq \alpha$  e, portanto,

$$Q_{\Upsilon}(\theta_0) - Q_{\Upsilon}^*(\theta_0) \geq 0 \quad (37)$$

A (4.3.4) pode ser reescrita como

$$Q_{\Upsilon}(\theta_1) - Q_{\Upsilon}^*(\theta_1) \geq k [Q_{\Upsilon}(\theta_0) - Q_{\Upsilon}^*(\theta_0)] \geq 0 \quad (38)$$

$$Q_{\Upsilon}(\theta_1) \geq Q_{\Upsilon^*}(\theta_1)$$

O que mostra que  $\Upsilon$  é no mínimo tão poderoso quanto  $\Upsilon^*$ .

**03/11/2025**

**Obs 1: (LNP)** No Lema de Neyman Pearson nada é dito sobre o conjunto

$$R^* := \{x \in \mathbb{R}^n : L(\theta_1; x) - k L(\theta_0; x) = 0\}$$

Quando  $X$  é contínua, a probabilidade de  $X$  pertencer a  $R^*$  é zero e esse detalhe não tem importância na prática. Quando  $X$  é discreta, deve-se aleatorizar o evento  $X \in R^*$  tal que o teste MP tenha tamanho  $\alpha \in (0, 1)$ .

**Obs 2: (LNP)** O teste MP proposto a partir de LNP é início.

**Q(4.4)** Sejam  $X_1, \dots, X_n$  uma amostra aleatória de  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  com  $\mu$  desconhecido e  $\sigma^2 \in \mathbb{R}^+$  conhecido. Encontre o teste MP de nível  $\alpha$  para

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \mu = \mu_1$$

tal que  $\mu_0$  e  $\mu_1$  são conhecidos e  $\mu_1 > \mu_0$ .

### Solução

Como as hipóteses são do tipo simples x simples, o LNP se aplica.

A verossimilhança em questão é

$$L(\mu; x) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \right\} \quad (39)$$

Para  $i = 0, 1$

O teste MP tem a seguinte forma:

$$\text{Rejeitar } H_0 \text{ se } \frac{L_1}{L_0} > k$$

Note que:

$$\frac{L_1}{L_0} = \frac{L(\mu_1; x)}{L(\mu_0; x)} = \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left[ \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_1)^2 - \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2 \right] \right\} \quad (40)$$

$$= \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left[ -2\mu_1 \sum_{i=1}^n x_i + n\mu_1^2 + 2\mu_0 \sum_{i=1}^n x_i - n\mu_0^2 \right] \right\} \quad (41)$$

$$= \exp \left\{ \frac{(\mu_1 - \mu_0)}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n x_i - \frac{n(\mu_1^2 - \mu_0^2)}{2\sigma^2} \right\} \quad (42)$$

Daí, a região crítica deste teste é dada por:

Para  $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$  como o espaço amostral.

03/11/25

$$R_c = \left\{ x \in \mathcal{X} : \frac{L_1}{L_0} > k \right\} = \left\{ x \in \mathcal{X} : \exp \left\{ \frac{(\mu_1 - \mu_0)}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n x_i - \frac{n(\mu_1^2 - \mu_0^2)}{2\sigma^2} \right\} > k \right\} \quad (43)$$

$$= \left\{ x \in \mathcal{X} : \exp \left\{ \frac{(\mu_1 - \mu_0)}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n x_i \right\} > k \cdot e^{\frac{n(\mu_1^2 - \mu_0^2)}{2\sigma^2}} \right\} \quad (44)$$

onde  $k_1 = k \cdot e^{\frac{n(\mu_1^2 - \mu_0^2)}{2\sigma^2}}$

$$= \left\{ x \in \mathcal{X} : \sum_{i=1}^n x_i > \frac{\sigma^2}{\mu_1 - \mu_0} \log(k_1) \right\} \quad (45)$$

onde  $k_2 = \frac{\sigma^2}{\mu_1 - \mu_0} \log(k_1)$   
(uma versão mais manipulável)

$$R_c = \left\{ x \in \mathcal{X} : \sqrt{n} \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma} > \sqrt{n} \frac{k_2 - n\mu_0}{n\sigma} \right\} \quad (46)$$

$$\therefore R_c = \left\{ x \in \mathcal{X} : \sqrt{n} \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma} > k_3 \right\} \quad (4.3.5), \quad (47)$$

Definamos a função  $Z: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por:

$$Z(x) \triangleq \sqrt{n} \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma} \quad (48)$$

Quando  $Z(x)$  é avaliada numa aa  $X = (X_1, \dots, X_n)^T$ , a quantidade resultante  $Z(x)$  é uma estatística de teste com distribuição conhecida sob  $H_0$ .

$$Z(X) \stackrel{H_0}{\sim} N(0, 1) \quad (49)$$

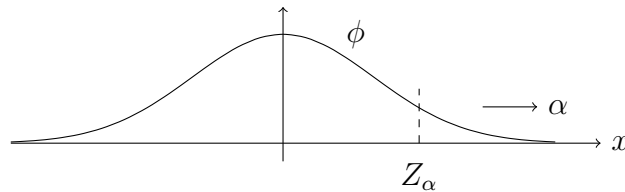
A região crítica (4.3.5) é então definida (trocando  $k_3$  em (4.3.5)) por  $z_\alpha$  como

$$R_c = \left\{ x \in \mathcal{X} : \sqrt{n} \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma} > z_\alpha \right\} \quad (50)$$

$$= \{x \in \mathcal{X} : Z(X) > z_\alpha\} \quad (51)$$

em que  $z_\alpha$  é tal que

$$P(Z > z_\alpha) = \alpha \quad (52)$$



## Resumo Teste Z

### Suposição

$X_1, \dots, X_n \stackrel{i.i.d.}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$  e  $\sigma^2 > 0$  conhecido.

### Hipóteses

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu = \mu_1 (> \mu_0) \end{cases} \quad (53)$$

### Estatística de Teste

$$Z(X) = \sqrt{n} \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma} \stackrel{H_0}{\sim} N(0, 1) \quad (54)$$

## Regra de decisão

(Método tradicional) Rejeita-se  $H_0$  se  $Z(x) > z_\alpha$ .

(Método do valor P) Seja  $Z_{cal} = Z(x)$ , rejeita-se  $H_0$  se

$$\hat{p} = P(Z \geq Z_{cal}) < \alpha \quad (\text{obs: } \hat{p} \text{ se chama de valor P})$$

## Q(4.5)

Sejam  $X_1, \dots, X_n$  uma amostra de  $X \sim \exp(\theta)$  com densidade

$$f(x; \theta) = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}, \quad x > 0 \quad (55)$$

em que  $\theta > 0$  é desconhecido. Encontre o teste MP de nível  $\alpha$  para

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \theta = \theta_1 \quad (\theta_1 > \theta_0)$$

## Solução

Como o contexto é do tipo simples vs simples, pode-se aplicar o LNP. A verossimilhança é dada por:

$$L_i \triangleq L(\theta_i; x) = \theta_i^{-n} \exp \left\{ -\frac{\sum_{j=1}^n X_j}{\theta_i} \right\}, \quad \text{para } i = 0, 1 \quad (56)$$

O teste MP é da forma:

$$\left\{ \text{Rejeita-se } H_0 \text{ se, e somente se } \frac{L_1}{L_0} > k \right.$$

Note que:

$$\frac{L_1}{L_0} = \left( \frac{\theta_0}{\theta_1} \right)^n \exp \left[ \sum_{i=1}^n x_i \left( \frac{1}{\theta_0} - \frac{1}{\theta_1} \right) \right] \quad (57)$$

Daí, a região crítica de teste é dada por: Para  $\mathcal{X} = \mathbb{R}_+^n$

$$R_c = \left\{ x \in \mathcal{X} : \left( \frac{\theta_0}{\theta_1} \right)^n \exp \left[ \sum_{i=1}^n x_i \left( \frac{1}{\theta_0} - \frac{1}{\theta_1} \right) \right] > k \right\} \quad (58)$$

$$= \left\{ x \in \mathcal{X} : \left( \frac{1}{\theta_0} - \frac{1}{\theta_1} \right) \sum_{i=1}^n x_i > \underbrace{\log \left[ k \cdot \left( \frac{\theta_1}{\theta_0} \right)^n \right]}_{k_1} \right\} \quad (59)$$

$$= \left\{ x \in \mathcal{X} : \sum_{i=1}^n x_i > \underbrace{\left( \frac{\theta_1 - \theta_0}{\theta_0 \theta_1} \right)^{-1} k_1}_{k_2} \right\} \quad (60)$$



$$= \left\{ x \in \mathcal{X} : \sum_{i=1}^n x_i > k_2 \right\} \quad (61)$$

Para se ter uma estatística manipulável, requer-se que sua distribuição sob  $H_0$  não dependa do parâmetro. Note que

$$\dot{X} \triangleq \theta^{-1} X \quad \text{tem densidade} \quad (62)$$

$$f_{\dot{X}}(x) = \theta f(\theta x; \theta) \quad (63)$$

$$= \theta \left[ \frac{1}{\theta} e^{-\frac{\theta x}{\theta}} \right] = e^{-x} \quad (64)$$

**03/11/25**

Que é a densidade da exponencial padrão.

Ainda note que  $\dot{X}_i \triangleq 2\frac{X_i}{\theta} = 2\theta^{-1}X_i$  tem densidade

$$f_{\dot{X}_i}(x) = \frac{1}{2}f_{X_i}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}e^{-x/2}, \quad x > 0 \quad (65)$$

que é a densidade de  $\chi_2^2$ , pois  $\frac{1}{2}e^{-x/2} = \frac{1}{2^1\Gamma(1)}e^{-x/2}x^{1-1}$ .

Assim,  $\sum_{i=1}^n \dot{X}_i \sim \chi_{2n}^2$ , para  $\dot{X}_i$  i.i.d.

Logo

$$R_c = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \frac{2}{\theta_0} \sum_{i=1}^n x_i > k_3 \right\} \quad (66)$$

Definimos a função  $Q : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}_+$

$$Q(x) = \frac{2}{\theta_0} \sum_{i=1}^n x_i \quad (67)$$

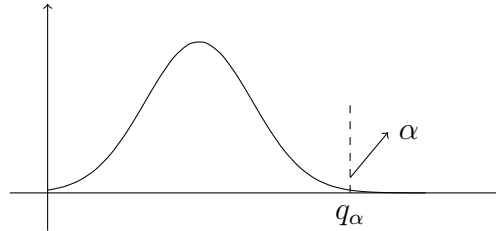
Note que para  $X = (x_1, \dots, x_n)^T$ ,  $Q(X) \stackrel{H_0}{\sim} \chi_{2n}^2$ .

A região crítica fica definida como:

$$R_c = \{x \in \mathcal{X} : Q(x) > q_\alpha\} \quad (68)$$

em que  $q_\alpha$  é tal que

$$P(Q > q_\alpha) = \alpha, \quad Q \sim \chi_{2n}^2 \quad (69)$$



## Resumo Teste $\chi^2$

### Suposição

$$X_1, \dots, X_n \stackrel{i.i.d.}{\sim} \exp(\theta)$$

### Hipóteses

$$H_0 : \theta = \theta_0$$

$$H_1 : \theta = \theta_1 \quad (\theta_1 > \theta_0)$$

### Estatística de Teste

$$Q(X) = \frac{2}{\theta_0} \sum_{i=1}^n X_i \sim \chi_{2n}^2 \quad \text{para } H_0 \quad (70)$$
$$Q_{\text{cal}} = Q(x)$$

### Regra de decisão

Rejeita-se  $H_0$  se  $Q_{\text{cal}} > q_\alpha$

Rejeita-se  $H_0$  se  $P(Q > Q_{\text{cal}}) < \alpha$

### Questão (4.6)

Sejam  $X_1, \dots, X_n$  uma amostra de  $X \sim \text{Bernoulli}(p)$  para  $p \in (0, 1)$  desconhecida. Encontre o teste MP para:

$$H_0 : p = p_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : p > p_0$$

### Solução

Como o contexto é do tipo simples vs simples, aplica-se o LNP. A verossimilhança associada é dada por:

$$\begin{aligned} L_i &\triangleq L(p_i; x) = \prod_{k=1}^n [p_i^{x_k} (1 - p_i)^{1-x_k}] \\ &= p_i^{\sum_{k=1}^n x_k} \cdot (1 - p_i)^{n - \sum_{k=1}^n x_k} \\ &= \left( \frac{p_i}{1 - p_i} \right)^{\sum_{k=1}^n x_k} \cdot (1 - p_i)^n \end{aligned} \quad (71)$$

O Teste MP é da forma:

$$\text{Rejeita-se } H_0 \quad \text{se e só se} \quad \left[ \frac{L_1}{L_0} > k \right]$$

Note que:

$$\frac{L_1}{L_0} = \left[ \frac{p_1(1 - p_0)}{p_0(1 - p_1)} \right]^{\sum_{i=1}^n x_i} \cdot \left[ \frac{1 - p_1}{1 - p_0} \right]^n$$

$$A_1 > 1 \quad A_2 < 1$$

Daí, a região crítica é dada por:

$$\begin{aligned} R_c &= \left\{ x \in \mathcal{X} : A_1^{\sum_{i=1}^n x_i} \cdot A_2^n > k \right\} \\ &= \left\{ x \in \mathcal{X} : \sum_{i=1}^n x_i > \frac{\log(A_2^{-n} k)}{\log(A_1)} \right\} = \left\{ x \in \mathcal{X} : \sum_{i=1}^n x_i > k_1 \right\} \end{aligned}$$

A função correspondente é dada por

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } \sum_{i=1}^n x_i > k_1, \\ \delta, & \text{se } \sum_{i=1}^n x_i = k_1, \\ 0, & \text{se } \sum_{i=1}^n x_i < k_1. \end{cases} \quad (72)$$

Em que o inteiro positivo  $k_1$  e  $\delta \in (0, 1)$  são escolhidos tais que o teste tem tamanho  $\alpha$ .

Note que sob  $H_0$ ,  $\sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Binomial}(n, p_0)$ .

Primeiramente, determine o menor inteiro  $k_1$  tal que

$$P_{p_0} \left[ \sum_{i=1}^n X_i > k_1 \right] < \alpha, \quad (73)$$

então

$$\delta = \frac{\alpha - P_{p_0} [\sum_{i=1}^n X_i > k_1]}{P_{p_0} [\sum_{i=1}^n X_i = k_1]}, \quad (74)$$

em que

$$P_{p_0} \left[ \sum_{i=1}^n X_i = k_1 \right] = \binom{n}{k_1} p_0^{k_1} (1 - p_0)^{n-k_1}, \quad (75)$$

e

$$P_{p_0} \left[ \sum_{i=1}^n X_i > k_1 \right] = \sum_{j=k_1+1}^n \binom{n}{j} p_0^j (1 - p_0)^{n-j}. \quad (76)$$

Da discussão anterior, a probabilidade o erro do Tipo I é dada por:

$$\alpha = \delta \cdot P_{p_0} \left[ \sum_{i=1}^n X_i = k_1 \right] + P_{p_0} \left[ \sum_{i=1}^n X_i > k_1 \right] \quad (77)$$

**05/11/25**

**Q(4.7)** Sejam  $X_1, \dots, X_n$  uma amostra de  $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$  para  $\lambda > 0$  desconhecido. Derive teste MP para:

$$H_0 : \lambda = \lambda_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \lambda = \lambda_1 \quad (\lambda_1 > \lambda_0) \quad (78)$$

**Solução:** Como as hipóteses são simples, o LNP se aplica. A verossimilhança é dada por:

$$L_i \triangleq L(\lambda_i; x) = \prod_{k=1}^n \left[ e^{-\lambda_i} \frac{\lambda_i^{x_k}}{x_k!} \right] \quad (79)$$

$$= e^{-n\lambda_i} \cdot \lambda_i^{\sum_{k=1}^n x_k} \cdot \prod_{k=1}^n \frac{1}{x_k!} \quad (80)$$

O teste MP é da forma:

$$\text{Rejeitar } H_0 \quad \text{se e somente se} \quad \frac{L_1}{L_0} > k$$

Note que:

$$\frac{L_1}{L_0} = \left[ \frac{e^{-\lambda_1}}{e^{-\lambda_0}} \right]^n \cdot \left[ \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \right]^{\sum_{k=1}^n x_k} = e^{-n(\lambda_1 - \lambda_0)} \cdot \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \right)^{\sum_{k=1}^n x_k} \quad (81)$$

Daí, a região crítica, é dada por:

Para  $\mathcal{X} = \mathbb{Z}_+^n$ :

$$R_c = \left\{ x \in \mathcal{X} : \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \right)^{\sum x_i} e^{-n(\lambda_1 - \lambda_0)} > k \right\} \quad (82)$$

$$= \left\{ x \in \mathcal{X} : \sum x_i \log \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \right) > n(\lambda_1 - \lambda_0) + \log k \right\} \quad (83)$$

$$= \left\{ x \in \mathcal{X} : \sum x_i > \frac{n(\lambda_1 - \lambda_0) + \log k}{\log(\lambda_1/\lambda_0)} \right\} \quad (84)$$

$$R_c = \left\{ x \in \mathcal{X} : \sum_{i=1}^n x_i > k_1 \right\} \quad (85)$$

A função crítica corresponde a:

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & \sum_{i=1}^n x_i > k_1 \\ \delta, & \sum_{i=1}^n x_i = k_1 \\ 0, & \sum_{i=1}^n x_i < k_1 \end{cases} \quad (86)$$

Note que sob  $H_0$ ,

$$\sum_{i=1}^n x_i \sim \text{Poisson}(n\lambda_0) \quad (87)$$

Primeiramente, determine o menor inteiro  $k_1$  tal que:

$$P_{n\lambda_0} \left\{ \sum_{i=1}^n x_i > k_1 \right\} < \alpha \quad (88)$$

e

$$\delta = \frac{\alpha - P_{n\lambda_0} [\sum_{i=1}^n X_i > k_1]}{P_{n\lambda_0} [\sum_{i=1}^n X_i = k_1]} \quad (89)$$

em que,

$$P_{n\lambda_0} \left[ \sum_{i=1}^n X_i = k_1 \right] = \frac{(n\lambda_0)^{k_1} e^{-n\lambda_0}}{k_1!} \quad (90)$$

e

$$P_{n\lambda_0} \left[ \sum_{i=1}^n X_i > k_1 \right] = \sum_{l=k_1+1}^{\infty} \frac{(n\lambda_0)^l e^{-n\lambda_0}}{l!} \quad (91)$$

Note que um teste MP de nível  $\alpha$  simples depende de uma estatística (conjuntamente) suficiente.

Considere uma discussão mais geral. Pelo LFN, seja  $L(\cdot; x)$  a verossimilhança associada a  $x \in \mathcal{X}^n$ . Então:

$$L(\theta; x) = g(T(x); \theta) \cdot h(x), \quad \forall x \in \mathcal{X}^n, \text{ em que } h(x) \text{ independe de } \theta. \quad (92)$$

Mostramos que LNP o teste MP rejeita  $H_0 : \theta = \theta_0$  em favor de  $H_1 : \theta = \theta_1$  para valores grandes de  $L(\theta_1; x)/L(\theta_0; x)$ :

$$\frac{L(\theta_1; x)}{L(\theta_0; x)} = \frac{g(T(x); \theta_1)}{g(T(x); \theta_0)} \quad (93)$$

que implica que a rejeição de  $H_0$  acontece também se  $\frac{g(T(x); \theta_1)}{g(T(x); \theta_0)}$  é grande.

O LNP também pode ser utilizado para comparar distribuições com densidade distintas.

**Q(4.8)** Seja  $X$  uma v.a com densidade  $f(x)$  para  $x \in \mathbb{R}$ . Considere duas outras densidades:

$$f_0(x) = \begin{cases} \frac{3x^2}{64}, & 0 < x < 4 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \quad \text{e} \quad f_1(x) = \begin{cases} \frac{3}{16}\sqrt{x}, & 0 < x < 4 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Determine o teste MP de nível  $\alpha$  para

$$H_0 : f(x) = f_0(x), \quad H_1 : f(x) = f_1(x)$$

**Solução:**

Como as hipóteses são do tipo simples x simples, aplica-se LNP. Assim:

$$\text{Rejeita-se } H_0 \text{ se e só se } \left[ \frac{f_1(x)}{f_0(x)} > k \right]$$

Note que:

$$\frac{f_1(x)}{f_0(x)} = \frac{\frac{3}{16}x^{1/2}}{\frac{3}{64}x^2} = \frac{3 \cdot 64 \cdot x^{1/2}}{3 \cdot 16 \cdot x^2} = 4 \cdot x^{-3/2} \quad (94)$$

E o teste pode ser escrito como: rejeita-se  $H_0$  se  $x$  pertence a

$$R_c = \{x \in (0, 4) : 4x^{-3/2} > k\} \quad (95)$$

$$= \{x \in (0, 4) : x < \left(\frac{4}{k}\right)^{2/3}\} \quad (96)$$

$$= \{x \in (0, 4) : x < k_1\} \quad (97)$$

Este teste tem tamanho dado por

$$\alpha = P_{f_0}\{X < k_1\} = \int_0^{k_1} \frac{3}{64}x^2 dx \quad (98)$$

$$\alpha = \frac{3}{64} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^{k_1} = \frac{k_1^3}{64} \quad (99)$$

$$\Rightarrow k_1 = (64\alpha)^{1/3} = 4\alpha^{1/3} \quad (100)$$

O poder associado é dado por

$$P_{f_1}\{X < k_1\} = \int_0^{k_1} \frac{3}{16} \sqrt{x} \, dx \quad (101)$$

$$= \frac{3}{16} \cdot \frac{x^{3/2}}{3/2} \Big|_0^{k_1} = \frac{k_1^{3/2}}{8} = \alpha^{1/2} \quad (102)$$

## Q(4.9)

Sejam  $X_1$  e  $X_2$  duas v.a.'s independentes com densidade  $f(x)$ . Determine o teste MP de nível  $\alpha$  para

$$H_0 : f(x) = f_0(x) \quad \text{vs} \quad H_1 : f(x) = f_1(x) \quad (103)$$

## Solução

Do LNP, rejeita-se  $H_0$  para  $(x_1, x_2)$  em

$$R_c = \left\{ (x_1, x_2) \in (0, 4) \times (0, 4) : \frac{f_1(x_1)f_1(x_2)}{f_0(x_1)f_0(x_2)} > k \right\} \quad (104)$$

$$= \left\{ (x_1, x_2) \in (0, 4) \times (0, 4) : 4x_1^{-3/2} \cdot 4x_2^{-3/2} > k \right\} \quad (105)$$

$$= \left\{ (x_1, x_2) \in (0, 4) \times (0, 4) : \left( \frac{16}{k} \right)^{2/3} > x_1 x_2 \right\} \quad (106)$$

$$= \{ (x_1, x_2) \in (0, 4) \times (0, 4) : x_1 x_2 < K_1 \} \quad (107)$$

## Note que

$$F_0(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{x^3}{64}, & 0 < x < 4 \\ 1, & x \geq 4 \end{cases} \quad (108)$$

Uma vez que (para  $x \in (0, 4)$ )

$$F_0(x) = \int_0^x \frac{3}{64} t^2 dt = \frac{3}{64} \left[ \frac{t^3}{3} \right]_0^x = \frac{x^3}{64} \quad (109)$$

Como discutido sob  $H_0$

$$-2 \log F_0(x_i) \sim \chi_2^2, \quad \text{para } i = 1, 2 \quad (110)$$

Daí,

$$R_c = \{ (x_1, x_2) \in (0, 4) \times (0, 4) : F_0(x_1) \cdot F_0(x_2) < k_2 \} \quad (111)$$

$$F_0(x) = \frac{x^3}{64} \quad \Rightarrow \quad \frac{x_1^3}{64} \cdot \frac{x_2^3}{64} < k_2 \quad (112)$$

$$\{ (x_1, x_2) \in (0, 4) \times (0, 4) : \sum_{i=1}^2 -2 \log F_0(x_i) > -2 \log k_2 \} \quad (113)$$

Note que

$$Q(x_1, x_2) \triangleq -2 \sum_{i=1}^2 \log F_0(x_i) \sim \chi_4^2 \quad (114)$$

Daí, o teste MP de nível  $\alpha$  é:

$$\text{Rejeita-se } H_0 \text{ se e só se } Q(x_1, x_2) > \chi_{4,\alpha}^2 \quad (115)$$



tal que

$$P_2(Q > \chi_{4,\alpha}^2) = \alpha \quad \text{e} \quad Q \sim \chi_4^2 \quad (116)$$

## 4.4 Teste para H composta unilateral

Considere estudar hipóteses do tipo

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{vs} \quad \begin{cases} H_1 : \theta > \theta_0 \\ H_1 : \theta < \theta_0 \end{cases} \quad (4.4.1)$$

No que segue, apresentam-se abordagem para deduzir teste UMP para (4.4.1).

### 4.4.1 Teste UMP via Lema de Neyman Pearson

Inicialmente fixemos um valor arbitrário  $\theta_1 \in \Theta$  tal que  $\theta_1 > \theta_0$ . A hipótese alternativa de (4.4.1) pode ser escrita como  $H_1 : \theta = \theta_1$ .

Agora tem-se um problema de duas hipóteses simples e, pelo LNP, existe um teste MP tal que para

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \theta = \theta_1 \quad (117)$$

Se esse teste particular não é afetado pela escolha de  $\theta_1$ , então diz-se que tal teste é UMP.

07/11/25

### Q(4.10)

Sejam  $x_1, \dots, x_n$  uma amostra de  $X \sim N(0, \sigma^2)$ , em que  $\sigma^2 > 0$  e é desconhecido. Fixando  $\alpha \in (0, 1)$ , considere obter o teste **UMP** de nível  $\alpha$  para

$$H_0 : \sigma = \sigma_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \sigma < \sigma_0, \quad \text{em que} \quad \sigma_0 > 0. \quad (118)$$

### Solução

Fixemos  $\sigma_1 \in \Theta = \mathbb{R}^+$  tal que  $\sigma_1 < \sigma_0$  e reescrevemos a hipótese alternativa como

$$H'_1 : \sigma = \sigma_1 \quad (\sigma_1 < \sigma_0). \quad (119)$$

Assim, o LNP pode ser aplicado para  $H_0 \times H'_1$ .

A função de verossimilhança é dada por:

$$L_k \triangleq L(\sigma_k; x) = \prod_{j=1}^n f(x_j; \sigma_k) = \prod_{j=1}^n (2\pi\sigma_k^2)^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_k^2} \sum_{j=1}^n x_j^2 \right\}, \quad k = 0, 1. \quad (120)$$

Portanto,  $H_0$  é rejeitada quando o vetor  $x = (x_1, \dots, x_n)^T$  pertence a (para  $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$ ):

$$\begin{aligned} R &= \left\{ x \in \mathcal{X} : \frac{L_1}{L_0} > k \right\} \\ &= \left\{ x \in \mathcal{X} : \left( \frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2} \right)^{-n/2} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i^2 \left( \frac{1}{\sigma_0^2} - \frac{1}{\sigma_1^2} \right)} > k \right\} \\ &= \left\{ x \in \mathcal{X} : -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i^2 \left( \frac{\sigma_0^2 - \sigma_1^2}{\sigma_0^2 \sigma_1^2} \right) > \log \left[ k \left( \frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2} \right)^{n/2} \right] \right\}. \\ &= \left\{ x \in \mathcal{X} : \sum_{i=1}^n x_i^2 \left( \frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_0^2} \right) < \underbrace{-2 \log \left[ k \left( \frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2} \right)^{n/2} \right]}_{k_1} \right\} \\ &= \left\{ x \in \mathcal{X} : \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{\sigma_0^2} < \underbrace{\frac{\sigma_0^2}{\sigma_0^2 - \sigma_1^2} k_1}_{k_2} \right\} \end{aligned} \quad (121)$$

Definamos a função  $Q : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^*$  tal que

$$Q(x) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i}{\sigma_0} \right)^2$$

Note que para  $X = (x_1, \dots, x_n)^T$ ,  $Q(X) \stackrel{\text{sob } H_0}{\sim} \chi_n^2$ . Assim o teste fica definido como: rejeita-se  $H_0$  se

$$x \in \mathcal{R}_c := \{x \in \mathcal{X} : Q(x) < \chi_{n, 1-\alpha}^2\}$$

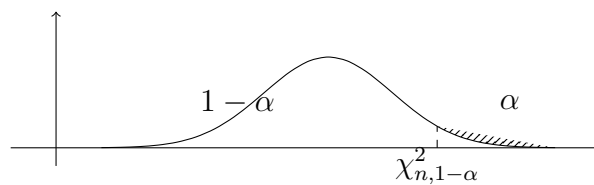
em que  $\chi_{n,1-\alpha}^2$  é solução de

$$P_{H_0} \{Q < \chi_{n,1-\alpha}^2\} = \alpha$$

Finalmente

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & Q(x) < \chi_{n,1-\alpha}^2 \\ 0, & Q(x) \geq \chi_{n,1-\alpha}^2 \end{cases}$$

é a função crítica do teste UMP para  $H_0 \times H_1$ , também além de ser o teste MP para  $H_0 \times H_1$ .



07/11/25

#### 4.4.2 Teste UMP via razão de verossimilhanças monótonas

Sejam  $x_1, \dots, x_n$  uma amostra de  $X$  tendo fdp (ou FMP)  $f(x; \theta)$  para  $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$  e  $x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}$ .

##### Definição (4.4.2.1) [Razão de verossimilhanças monótonas - RVM]

A família  $\{f(x; \theta), \theta \in \Theta\}$  tem RVM em uma estatística  $T(x) \in \mathbb{R}$  se pode ser verificado o seguinte resultado: para todo  $\theta^*, \theta \in \Theta$  e  $x \in \mathcal{X}^n$ , vale-se

$$\frac{L(\theta^*; x)}{L(\theta; x)} \text{ é não decrescente em } T(x) \text{ sempre que } \theta^* > \theta \quad (122)$$

Seguem duas ilustrações para a Def. (4.4.2.1):

**Exemplo:** Sejam  $X_1, \dots, X_n$  uma amostra de  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  com  $\mu$  desconhecida e  $\sigma \in \mathbb{R}^+$  conhecido. Suponha que  $\mu^* \in \mathbb{R}$  tal que  $\mu^* > \mu$  e seja

$$T(x) = \sum_{i=1}^n x_i \quad \text{como } x^t = (x_1, \dots, x_n). \quad (123)$$

Assim:

$$\frac{L(\mu^*; x)}{L(\mu; x)} = \frac{\exp \left[ -\frac{1}{2\sigma^2} (\sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\mu^* \sum_{i=1}^n x_i + n(\mu^*)^2) \right]}{\exp \left[ -\frac{1}{2\sigma^2} (\sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\mu \sum_{i=1}^n x_i + n\mu^2) \right]} \quad (124)$$

$$= \exp \left[ \frac{\mu^* - \mu}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n x_i + \frac{n}{2\sigma^2} (\mu^2 - (\mu^*)^2) \right] = \exp \left[ \frac{\mu^* - \mu}{\sigma^2} T(x) + \frac{n}{2\sigma^2} (\mu^2 - (\mu^*)^2) \right] \quad (125)$$

que é não decrescente em  $T(x)$  para  $\mu^* > \mu$ . Logo  $f(x; \mu)$  tem RVM.

**Ex:** Sejam  $x_1, \dots, x_n$  uma amostra de  $X$  tendo uma família de fdp (ou fmp)

$$g(x; \theta) = a(\theta) \cdot c(x) \cdot e^{t(x) \cdot b(\theta)}, \quad \text{para } t \in \mathbb{X} \subset \mathbb{R} \text{ e } \theta \in \Theta.$$

Para  $\theta^*, \theta \in \Theta$  tal que  $\theta^* \geq \theta$ ,

$$\begin{aligned} \frac{l(\theta^*; \mathbf{x})}{l(\theta; \mathbf{x})} &= \frac{\prod_{i=1}^n g(x_i; \theta^*)}{\prod_{i=1}^n g(x_i; \theta)} = \frac{a^n(\theta^*) \prod_{i=1}^n c(x_i) \cdot \exp \left\{ \sum_{i=1}^n t(x_i) b(\theta^*) \right\}}{a^n(\theta) \prod_{i=1}^n c(x_i) \cdot \exp \left\{ \sum_{i=1}^n t(x_i) b(\theta) \right\}} \\ &= \frac{a^n(\theta^*)}{a^n(\theta)} \cdot \exp \left\{ \sum_{i=1}^n t(x_i) [b(\theta^*) - b(\theta)] \right\}. \end{aligned} \quad (126)$$

Assim  $\{g(x; \theta) : \theta \in \Theta\}$  tem RVM se  $b(\theta)$  é não decrescente.

**Exemplo (Poisson):** Seja  $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ , então

$$f(x; \lambda) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = e^{-\lambda} \cdot \frac{1}{x!} \cdot e^{x \log \lambda},$$

ou seja,

$$f(x; \lambda) = a(\lambda) \cdot c(x) \cdot e^{t(x) \cdot b(\lambda)},$$

onde  $a(\lambda) = e^{-\lambda}$ ,  $c(x) = \frac{1}{x!}$ ,  $t(x) = x$  e  $b(\lambda) = \log \lambda$ .

Como  $b(\lambda) = \log \lambda$  é uma função não decrescente em  $\lambda > 0$ , a família Poisson tem RVM.

## Teorema (4.4.2.1) Teo. Karlin-Rubin

Assuma que se deseja testar:

$$H_0 : \theta \leq \theta_0, \quad H_1 : \theta > \theta_0 \quad (127)$$

Considere  $T = T(X) \in \mathbb{R}$  (para  $X^n : (x_1, \dots, x_n)$  como uma v.a.) como uma estatística suficiente para  $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$ .

Assuma que  $\{g(t; \theta) : \theta \in \Theta\}$  é uma família de f.d.p (ou fmp) induzida de  $T$  com RVM. Então o teste  $\Upsilon$  com função crítica:

$$\psi_{\Upsilon}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } T(x) > k \\ 0, & \text{se } T(x) < k \end{cases} \quad (128)$$

corresponde a um teste UMP de nível  $\alpha$  se  $k$  é escolhido tal que:

$$E_{\theta_0} [\psi_{\Upsilon}(x)] = \alpha \quad (129)$$

### Q (4.12)

Sejam  $X_1, \dots, X_n$  uma a.a. de  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  com  $\mu \in \mathbb{R}$  desconhecida e  $\sigma^2 \in \mathbb{R}$  conhecida. Encontre o teste UMP para:

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \mu > \mu_0, \quad \text{de nível } \alpha \quad (130)$$

### Solução

Pelo LFN:

$$L(\mu; x) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma^2} \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\mu \sum_{i=1}^n x_i + n\mu^2 \right) \right] \quad (131)$$

$$= \underbrace{(2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n x_i^2}}_{h(x)} \cdot \underbrace{\exp \left[ -\frac{n}{2\sigma^2} \mu^2 + \frac{2\mu}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n x_i \right]}_{g(t; \mu) \text{ para } T(x) = \sum_{i=1}^n x_i} \quad (132)$$

$T(X) = \sum x_i$  é suficiente para  $\mu$  e tem densidade induzida:

$$f(t; \mu) = (2\pi n\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2n\sigma^2} (t - n\mu)^2 \right\} \quad (133)$$

e para  $\mu^* > \mu$ :

$$\frac{f(t; \mu^*)}{f(t; \mu)} = \exp \left\{ \frac{1}{2n\sigma^2} [t^2 - 2nt\mu^* + n^2(\mu^*)^2 - t^2 + 2nt\mu - n^2\mu^2] \right\} \quad (134)$$

$$= \exp \left\{ \frac{1}{2n\sigma^2} [2nt(\mu - \mu^*) + n^2((\mu^*)^2 - \mu^2)] \right\} \quad (135)$$

que é não decrescente em termos de  $t$ , e portanto  $\{f(t; \mu) : \mu \in \mathbb{R}\}$  tem RVM. Pelo Teo K.R., o teste  $\Upsilon$  com função crítica:

$$\psi_{\Upsilon}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } T(x) > k, \\ 0, & \text{se } T(x) < k \end{cases} \quad \text{com} \quad E_{\theta_0} [\psi_{\Upsilon}(x)] = \alpha \quad (136)$$

ou equivalentemente:

$$\psi_{\Upsilon}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sigma} > z_{\alpha}, \\ 0, & \text{se } \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sigma} < z_{\alpha} \end{cases} \quad (137)$$



## 4.5 Teste para $H_1$ composta bilateral

Considere testar:

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \theta \neq \theta_0 \quad (138)$$

Para  $\theta$  fixado. Existe teste UMP?

Sim em algumas situações e não em outras.

Vamos considerar dois exemplos.

**Ex.** Para  $X_1, \dots, X_n \stackrel{i.i.d.}{\sim} X \sim N(\mu, \sigma^2)$  com  $\mu \in \mathbb{R}$  desconhecido e  $\sigma^2$  conhecido. Para

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \mu \neq \mu_0 \quad (139)$$

não existe teste UMP.

**Ex.** Para  $X_1, \dots, X_n \stackrel{i.i.d.}{\sim} X \sim U(0, \theta)$ . Há um teste UMP para

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \theta \neq \theta_0 \quad (140)$$

### 4.5.1 Exemplo de não existência do teste UMP

Sejam  $X_1, \dots, X_n$  uma amostra de  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  com  $\mu \in \mathbb{R}$  desconhecido e  $\sigma^2 > 0$  conhecido. Como discutido,

$$T(x) = \sum_{i=1}^n x_i \quad (141)$$

é suficiente para  $\mu$ .

Considere testar:

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \mu \neq \mu_0 \quad (142)$$

Admita que existe o teste UMP se quiséssemos testar:

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \mu > \mu_0 \quad (143)$$

Prova-se que o seguinte teste é UMP para  $\alpha \in (0, 1)$  nível nominal  $\alpha$  tal que:

$$\psi_T(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } \sqrt{n} \frac{(\bar{X}_n - \mu_0)}{\sigma} > z_\alpha \\ 0, & \text{o.c.} \end{cases}$$

Por outro lado, para testar  $H_0 : \mu = \mu_0$  vs  $H_1 : \mu < \mu_0$ , vale-se o seguinte argumento, para  $\mu^* < \mu$ :

$$\frac{f(t; \mu^*)}{f(t; \mu)} = \exp \left\{ \frac{1}{2n\sigma^2} [2nt(\mu^* - \mu) + n^2(\mu^{*2} - \mu^2)] \right\}$$

Tem RVM não crescente, então o seguinte teste de nível  $\alpha$  é UMP.

Pelo teorema KR,  $\psi_T$  tal que

$$\psi_T(x) = \begin{cases} 1, & \sqrt{n} \frac{(\bar{X}_n - \mu_0)}{\sigma} < -z_\alpha \\ 0, & \sqrt{n} \frac{(\bar{X}_n - \mu_0)}{\sigma} \geq -z_\alpha \end{cases}$$

Suponha que  $x$  é uma amostra tal que a estatística calculada

$$z_{\text{cal}} = \sqrt{n} \frac{(\bar{X}_n - \mu_0)}{\sigma}$$

não excede  $-z_\alpha$ .

Então  $\psi_T(x) = 0$  e  $\psi_T(x) = 1$  e, portanto,  $\psi_T(x)$  fica indefinido.

# Resumo e Consolidação: Capítulo 4 - Teste de Hipóteses

## Visão Geral

Este capítulo apresentou a teoria fundamental de testes de hipóteses, uma das principais ferramentas da inferência estatística. A seguir, consolidamos os principais conceitos, resultados teóricos e suas conexões.

## 1. Conceitos Fundamentais e Terminologia

Tabela 1: Terminologia Básica em Testes de Hipóteses

Conceito	Definição/Interpretação
Hipótese nula ( $H_0$ )	Afirmção a ser testada (status quo)
Hipótese alternativa ( $H_1$ )	Afirmção rival a $H_0$
Região crítica ( $R_c$ )	Conjunto de valores amostrais que levam à rejeição de $H_0$
Estatística de teste	Função dos dados usada para decidir sobre $H_0$
Erro Tipo I	Rejeitar $H_0$ quando é verdadeira
Erro Tipo II	Não rejeitar $H_0$ quando é falsa
Nível de significância ( $\alpha$ )	Probabilidade máxima do Erro Tipo I
Tamanho do teste	Probabilidade do Erro Tipo I: $\sup_{\theta \in \Theta_0} P_\theta(X \in R_c)$
Função poder $Q_T(\theta)$	$P_\theta(\text{Rejeitar } H_0) = P_\theta(X \in R_c)$
p-valor	Menor nível $\alpha$ para o qual $H_0$ seria rejeitada

## 2. Classificação de Hipóteses

Tabela 2: Tipos de Hipóteses Estatísticas

Tipo	Forma	Exemplo
Simples	Especifica completamente $\theta$	$H_0 : \theta = \theta_0$
Composta unilateral	Um intervalo semi-infinito	$H_0 : \theta \leq \theta_0$ ou $H_0 : \theta \geq \theta_0$
Composta bilateral	Dois intervalos ou um intervalo	$H_0 : \theta \neq \theta_0$ ou $H_0 :  \theta - \theta_0  > c$

## 3. Teoremas Fundamentais e Suas Aplicações

## 4. Estatísticas de Teste Clássicas

## 5. Estratégias para Resolução de Problemas

### Etapas 1: Formulação do Problema

- Identifique o parâmetro de interesse  $\theta$
- Formule claramente  $H_0$  e  $H_1$
- Determine o nível de significância  $\alpha$  (geralmente 0.05, 0.01 ou 0.10)
- Classifique as hipóteses (simples, composta unilateral ou bilateral)

Tabela 3: Principais Resultados Teóricos

Teorema/Lema	Quando Aplicar	Resultado Principal
Lema de Neyman-Pearson (LNP)	$H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta = \theta_1$ (simples vs simples)	O teste MP rejeita $H_0$ quando $\frac{L(\theta_1; x)}{L(\theta_0; x)} > k$ , onde $k$ é determinado por $\alpha$
Teorema de Karlin-Rubin	$H_0 : \theta \leq \theta_0$ vs $H_1 : \theta > \theta_0$ com RVM	Se $T(X)$ é suficiente com RVM, o teste UMP rejeita quando $T(X) > k$
Testes UMPNV	$H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta \neq \theta_0$ (bilateral)	Para famílias com RVM, testes baseados em $ T(X) - c $ podem ser UMPNV

Tabela 4: Principais Estatísticas de Teste e Suas Condições de Uso

Teste	Suposições	Estatística	Distribuição sob $H_0$
Teste Z	$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ , $\sigma^2$ conhecida	$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	$N(0, 1)$
Teste t	$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ , $\sigma^2$ desconhecida	$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$	$t_{n-1}$
Teste $\chi^2$	$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ , teste para $\sigma^2$	$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$	$\chi_{n-1}^2$
Teste F	$X_i \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ , $Y_j \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$	$F = \frac{S_X^2}{S_Y^2}$	$F_{n_1-1, n_2-1}$

**Etapla 2: Escolha do Método de Teste**

- Para hipóteses simples vs simples  $\rightarrow$  Use o LNP
- Para hipóteses compostas unilaterais com RVM  $\rightarrow$  Use Karlin-Rubin
- Para hipóteses bilaterais  $\rightarrow$  Considere testes UMPNV ou teste da razão de verossimilhança
- Para modelos específicos (Normal, Bernoulli, Poisson, etc.)  $\rightarrow$  Use testes clássicos conhecidos

**Etapla 3: Cálculo da Estatística de Teste**

- Identifique ou construa uma estatística suficiente
- Determine sua distribuição sob  $H_0$
- Calcule o valor observado da estatística (valor calculado)

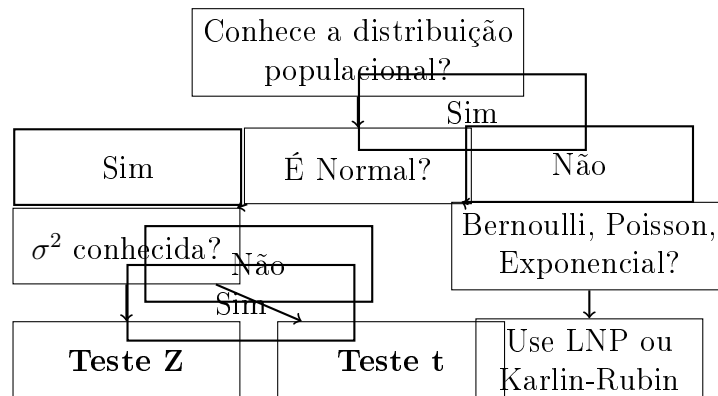
#### Etapa 4: Tomada de Decisão

- **Método do Valor Crítico:** Compare a estatística calculada com o valor crítico tabelado
- **Método do p-valor:** Calcule  $p = P_{H_0}(T \geq T_{\text{obs}})$  e rejeite se  $p < \alpha$

#### Etapa 5: Interpretação

- Se rejeitamos  $H_0$ : Há evidência estatística significativa contra  $H_0$  ao nível  $\alpha$
- Se não rejeitamos  $H_0$ : Não há evidência suficiente para rejeitar  $H_0$  (não significa que  $H_0$  é verdadeira!)
- Considere sempre o poder do teste e o tamanho da amostra

### 6. Fluxograma de Decisão para Escolha do Teste



### 7. Conexões Entre os Conceitos

#### Relação entre Estatísticas Suficientes e Testes Ótimos

- O LNP garante que testes MP dependem apenas de estatísticas suficientes
- A suficiência reduz a dimensionalidade do problema sem perda de informação
- Para família exponencial: estatística suficiente  $\Rightarrow$  RVM  $\Rightarrow$  teste UMP via Karlin-Rubin

#### Função Poder e Comparação de Testes

- $Q_T(\theta) = 1 - \beta(\theta)$  para  $\theta \in \Theta_1$
- Teste A é melhor que teste B se  $Q_A(\theta) \geq Q_B(\theta)$  para todo  $\theta \in \Theta_1$
- MP  $\Rightarrow$  UMP  $\Rightarrow$  UMPNV (ordem decrescente de otimalidade)

#### Trade-off entre Erros Tipo I e II

- Fixado  $n$ : diminuir  $\alpha$  aumenta  $\beta$ , e vice-versa
- Para reduzir ambos simultaneamente: aumentar  $n$  (tamanho amostral)
- O poder aumenta com: maior  $n$ , maior  $\alpha$ , maior distância entre  $\theta_0$  e  $\theta_1$

## 8. Tabela de Referência Rápida: Distribuições e RVM

Tabela 5: Distribuições Comuns e Propriedade RVM

Distribuição	Parâmetro	Possui RVM?
Normal $N(\mu, \sigma^2)$	$\mu$ ( $\sigma^2$ conhecida)	Sim
Normal $N(\mu, \sigma^2)$	$\sigma^2$ ( $\mu$ conhecida)	Sim
Bernoulli( $p$ )	$p$	Sim
Poisson( $\lambda$ )	$\lambda$	Sim
Exponencial( $\theta$ )	$\theta$	Sim
Gamma( $\alpha, \beta$ )	$\alpha$ ou $\beta$ (outro fixo)	Sim
Uniforme( $0, \theta$ )	$\theta$	Não (mas tem teste UMP)

## 9. Checklist de Verificação

Ao resolver um problema de teste de hipóteses, verifique:

- ☐ As hipóteses  $H_0$  e  $H_1$  são mutuamente exclusivas e exaustivas?
- ☐ O nível de significância  $\alpha$  foi especificado?
- ☐ As suposições do modelo foram verificadas (normalidade, independência, etc.)?
- ☐ A estatística de teste tem distribuição conhecida sob  $H_0$ ?
- ☐ A região crítica foi determinada corretamente (unilateral ou bilateral)?
- ☐ O valor calculado da estatística foi comparado corretamente com o valor crítico?
- ☐ A conclusão foi expressa no contexto do problema?
- ☐ Considerou-se o poder do teste e o tamanho amostral?

## 10. Conclusão

O Capítulo 4 apresentou um arcabouço completo e rigoroso para testes de hipóteses, desde os conceitos fundamentais até os métodos mais sofisticados. Os principais aprendizados são:

- A teoria de Neyman-Pearson fornece critérios objetivos para construir testes ótimos
- O conceito de poder é fundamental para avaliar a qualidade de um teste
- Propriedades da distribuição (RVM, suficiência) levam a testes ótimos
- Testes clássicos ( $Z$ ,  $t$ ,  $\chi^2$ ,  $F$ ) são casos especiais de princípios gerais
- A interpretação correta requer compreensão tanto dos aspectos técnicos quanto filosóficos

**Recomendação de Estudo:** Para dominar este capítulo, é essencial:

1. Resolver muitos exercícios, começando pelos exemplos do texto
2. Entender as provas dos teoremas principais (LNP e Karlin-Rubin)
3. Praticar a interpretação de resultados no contexto de problemas reais
4. Comparar diferentes testes para o mesmo problema
5. Usar simulações para visualizar funções poder e distribuições das estatísticas de teste