Sugestões para Melhorias do Relatório

Elevando o Nível Teórico para Doutorado

Análise do documento report.tex

17 de novembro de 2025

1 Introdução

Este documento apresenta sugestões detalhadas para elevar o relatório `report.tex` ao nível teórico esperado em uma dissertação de doutorado. As recomendações focam em rigor matemático, desenvolvimento teórico completo e apresentação adequada dos resultados fundamentais da inferência estatística em regressão linear múltipla.

2 Sugestões por Seção

2.1 Seção: "Justificativa para o Uso da Estatística F"

Problemas identificados:

- Título inadequado para nível de doutorado: "Justificativa" é muito informal
- Estrutura em tópicos numerados é superficial para dissertação
- Falta derivação matemática rigorosa, especialmente sobre eliminação de σ^2
- Ausência de teoremas e proposições que fundamentem os resultados

Sugestão de reformulação:

Renomear para: **"Fundamentação Teórica da Estatística F"** ou **"Construção e Propriedades da Estatística F"**

Transformar em texto corrido teórico com as seguintes subseções:

1. **Derivação da Estatística via Teste de Razão de Verossimilhança** - Mostrar que o teste F pode ser derivado como um teste de razão de verossimilhança, conectando com teoria geral de testes de hipótese

2. **Propriedade de Invariância ao Parâmetro de Nuisance** - Derivação detalhada mostrando como σ^2 é eliminado:

   Partindo de $\frac{SSR}{\sigma^2} \sim \chi^2_p$ e $\frac{SSE}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-p-1}$ independentes, podemos escrever:

$$F = \frac{SSR/p}{SSE/(n-p-1)} = \frac{(SSR/\sigma^2)/p}{(SSE/\sigma^2)/(n-p-1)}$$

Como σ^2 aparece de forma idêntica no numerador e denominador (ambos divididos por σ^2), ao formarmos a razão, obtemos uma quantidade que não depende de σ^2. Mais precisamente, se $U \sim \chi^2_{\nu_1}$ e $V \sim \chi^2_{\nu_2}$ são independentes, então $\frac{U/\nu_1}{V/\nu_2}$ segue uma distribuição F_{ν_1,ν_2} que depende apenas dos graus de liberdade, não dos parâmetros de escala. No contexto do teste, SSR/σ^2 e SSE/σ^2 têm ambos σ^2 como fator comum, resultando em uma estatística pivotal.

3. **Teorema Fundamental da Distribuição F** - Formalizar como teorema

4. **Propriedade de Suficiência e Otimalidade** - Discutir se o teste F possui propriedades ótimas (UMP, invariante, etc.)

2.2 Derivação Matemática Detalhada da Eliminação de σ^2

Adicionar após o item sobre eliminação de σ^2:

Proposição: Sejam $Q_1 \sim \sigma^2\chi^2_{\nu_1}$ e $Q_2 \sim \sigma^2\chi^2_{\nu_2}$ variáveis aleatórias independentes com parâmetro de escala comum σ^2. Então a razão

$$R = \frac{Q_1/\nu_1}{Q_2/\nu_2}$$

segue uma distribuição F_{ν_1,ν_2} que não depende de σ^2.

Demonstração: Como $Q_1 = \sigma^2 U$ e $Q_2 = \sigma^2 V$ onde $U \sim \chi^2_{\nu_1}$ e $V \sim \chi^2_{\nu_2}$ são independentes, temos:

$$R = \frac{(\sigma^2 U)/\nu_1}{(\sigma^2 V)/\nu_2} = \frac{U/\nu_1}{V/\nu_2}$$

que segue F_{ν_1,ν_2} independentemente do valor de σ^2. □

2.3 Outras Melhorias Essenciais

2.3.1 Seção 1: Modelo e Fundamentos Teóricos

Sugestões:

1. **Adicionar subseção sobre distribuições assintóticas:** Incluir resultados sobre consistência e distribuição assintótica dos estimadores

2. **Teorema de Gauss-Markov com demonstração:** O teorema é mencionado mas não demonstrado. Adicionar demonstração completa ou referência detalhada

3. **Propriedade de independência entre $\hat{\beta}$ e $\hat{\sigma}^2$:** A proposição menciona mas não demonstra. Adicionar demonstração usando propriedades de projeção ortogonal

4. **Forma matricial completa:** Expandir a especificação do modelo incluindo partição da matriz $\mathbf{X}$:

$$\mathbf{X} = [\mathbf{1}_n \,|\, \mathbf{X}_1]$$

onde $\mathbf{1}_n$ é o vetor de uns e $\mathbf{X}_1$ é a matriz $n \times p$ das variáveis explicativas

2.3.2 Seção 2: Teste de Hipótese

Sugestões:

1. **Teste de Razão de Verossimilhança:** Derivar o teste F como teste de razão de verossimilhança:

   A função de verossimilhança sob o modelo completo é:

   $$L(\beta, \sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\mathbf{y} - \mathbf{X}\beta)^T(\mathbf{y} - \mathbf{X}\beta)\right\}$$

   Sob $H_0 : \beta_1 = \mathbf{0}_p$, o estimador de máxima verossimilhança é $\hat{\beta}_0^{(0)} = \bar{y}$. A estatística de razão de verossimilhança é:

   $$\Lambda = \frac{\sup_{H_0} L(\beta, \sigma^2)}{\sup L(\beta, \sigma^2)} = \left(\frac{SSE}{SSE_0}\right)^{n/2}$$

   A relação com o teste F é: $-2\log\Lambda = n\log(1 + \frac{p}{n-p-1}F)$.

2. **Derivação via Teoria de Modelos Aninhados:** Conectar com teoria geral de modelos lineares aninhados e teste de significância de blocos de parâmetros

3. **Distribuição Não-Central:** Sob H_1, a estatística F segue distribuição F não-central. Discutir o poder do teste e distribuição não-central

4. **Derivação da Independência entre SSR e SSE:** Usar propriedades de projeção ortogonal. Seja $\mathbf{P} = \mathbf{X}(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T$ a matriz de projeção no espaço coluna de $\mathbf{X}$ e $\mathbf{P}_0 = \frac{1}{n}\mathbf{1}_n\mathbf{1}_n^T$ a projeção no espaço gerado por $\mathbf{1}_n$. Então:

   $$SSR = \mathbf{y}^T(\mathbf{P} - \mathbf{P}_0)\mathbf{y}, \quad SSE = \mathbf{y}^T(\mathbf{I}_n - \mathbf{P})\mathbf{y}$$

   A independência decorre de que $(\mathbf{P} - \mathbf{P}_0)$ e $(\mathbf{I}_n - \mathbf{P})$ são projeções ortogonais em subespaços ortogonais.

2.3.3 Seção 3: Análise de Variância

Sugestões:

1. **Decomposição Ortogonal:** Mostrar que a decomposição $SST = SSR + SSE$ é uma decomposição ortogonal usando teoria de projeção:

   $$\mathbf{y} - \bar{y}\mathbf{1}_n = (\hat{\mathbf{y}} - \bar{y}\mathbf{1}_n) + (\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}})$$

   onde os vetores são ortogonais

2. **Teorema de Cochran:** Conectar com o Teorema de Cochran sobre distribuição qui-quadrado de formas quadráticas

3. **R^2 Ajustado e outras medidas:** Incluir discussão sobre R^2 ajustado, critérios de informação (AIC, BIC), e suas relações com o teste F

4. **Interpretação Geométrica:** Adicionar interpretação geométrica usando espaços vetoriais e projeções ortogonais

3 Melhorias Estruturais e de Apresentação

3.1 Formatação e Rigor

1. **Ambientes de Teoremas:** Todos os resultados principais devem estar em ambientes de teorema/proposição/lema com demonstrações completas ou referências explícitas
2. **Notação Consistente:** Garantir que toda notação seja definida explicitamente antes do uso
3. **Referências Teóricas:** Cada teorema/proposição deve ter referência bibliográfica explícita (ex: "Teorema 3.2.1 de Casella & Berger, 2002")
4. **Índice de Símbolos:** Considerar adicionar uma tabela de notação para facilitar leitura
5. **Lema Preparatórios:** Adicionar lemas auxiliares quando necessário (ex: lema sobre distribuição de formas quadráticas)

3.2 Conteúdo Teórico Adicional

1. **Propriedades do Teste:**
   - Consistência do teste F
   - Poder do teste e distribuição não-central
   - Invariância do teste
   - Relação com teste de Wald e teste de escore
2. **Conexões com Outras Teorias:**
   - Relação com teoria geral de testes de hipótese
   - Conexão com análise de variância (ANOVA)
   - Relação com teoria de modelos lineares generalizados
   - Conexão com inferência bayesiana (opcional, mas enriquecedor)
3. **Condições de Regularidade:**
   - Discutir quando os pressupostos podem ser relaxados
   - Resultados assintóticos quando normalidade não vale
   - Efeitos de violação de pressupostos

4 Exemplo de Reformulação: Seção sobre Estatística F

Texto atual (inadequado para doutorado):

4.1 Justificativa para o Uso da Estatística F

A estatística F é utilizada por razões teóricas fundamentais:

1. Natureza multivariada do teste...
2. Estrutura distribucional...
3. Eliminação de σ^2 desconhecido...
4. Interpretação como comparação de variâncias...

Texto sugerido (nível doutorado):

4.2 Fundamentação Teórica da Estatística F

A escolha da estatística F para o teste $H_0 : \beta_1 = \mathbf{0}_p$ decorre de propriedades teóricas fundamentais que conectam a teoria de modelos lineares com a teoria geral de testes de hipótese. Nesta seção, desenvolvemos a fundamentação completa, mostrando como a estrutura distribucional do modelo normal linear conduz naturalmente à estatística F como uma estatística pivotal apropriada.

4.2.1 Construção como Estatística Pivotal

Sob os pressupostos do modelo normal linear, temos que $\frac{SSR}{\sigma^2} \sim \chi^2_p$ e $\frac{SSE}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-p-1}$ são independentes, conforme estabelecido no Teorema 2.3. Segue imediatamente que a razão dessas quantidades, quando adequadamente normalizadas por seus graus de liberdade, elimina o parâmetro de nuisance σ^2.

[Eliminação do Parâmetro de Nuisance] Sejam $Q_1 \sim \sigma^2\chi^2_{\nu_1}$ e $Q_2 \sim \sigma^2\chi^2_{\nu_2}$ variáveis aleatórias independentes com parâmetro de escala comum $\sigma^2 > 0$. Então a estatística

$$R = \frac{Q_1/\nu_1}{Q_2/\nu_2}$$

segue uma distribuição F_{ν_1,ν_2} que não depende de σ^2.

Demonstração. Como $Q_1 = \sigma^2 U$ e $Q_2 = \sigma^2 V$ onde $U \sim \chi^2_{\nu_1}$ e $V \sim \chi^2_{\nu_2}$ são independentes, temos:

$$R = \frac{(\sigma^2 U)/\nu_1}{(\sigma^2 V)/\nu_2} = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} \cdot \frac{U/\nu_1}{V/\nu_2} = \frac{U/\nu_1}{V/\nu_2}$$

A última quantidade segue uma distribuição F_{ν_1,ν_2} por definição da distribuição F, e não depende de σ^2. $\square$

Aplicando este resultado ao contexto do teste, obtemos que $F = \frac{MSR}{MSE}$ é uma estatística pivotal, cuja distribuição sob H_0 é completamente especificada e não depende de parâmetros desconhecidos.

4.2.2 Derivação via Teste de Razão de Verossimilhança

O teste F pode ser derivado como uma transformação monotônica da estatística de razão de verossimilhança. Sob $H_0 : \beta_1 = \mathbf{0}_p$, o modelo reduzido possui estimadores de máxima verossimilhança $\hat{\beta}_0^{(0)} = \bar{y}$ e $\hat{\sigma}_0^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2$. Sob o modelo completo, temos $\hat{\beta} = (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{y}$ e $\hat{\sigma}^2 = \frac{SSE}{n}$.

A estatística de razão de verossimilhança é:

$$\Lambda = \frac{\sup_{H_0} L(\beta, \sigma^2)}{\sup L(\beta, \sigma^2)} = \left(\frac{SSE}{SSE_0}\right)^{n/2} = \left(\frac{n-p-1}{n-p-1+pF}\right)^{n/2}$$

onde utilizamos a relação $SSE_0 = SSE + SSR$ e $SSR = p \cdot MSR = p \cdot F \cdot MSE = \frac{p(n-p-1)}{n-p-1} F \cdot MSE$. Esta conexão estabelece o teste F como parte da teoria geral de testes de hipótese...

4.2.3 Propriedades de Otimalidade

[Desenvolver discussão sobre propriedades do teste, relação com teoria de testes UMP, etc.]

5 Resumo das Prioridades

Prioridade Alta:

1. Reformular seção "Justificativa para o Uso da Estatística F" em texto teórico corrido com derivações
2. Adicionar demonstração completa da eliminação de σ^2
3. Incluir derivação via teste de razão de verossimilhança
4. Adicionar demonstração da independência entre $\hat{\beta}$ e $\hat{\sigma}^2$

Prioridade Média:

1. Conectar com Teorema de Cochran
2. Adicionar discussão sobre distribuição não-central e poder
3. Incluir interpretação geométrica
4. Expandir referências bibliográficas

Prioridade Baixa (mas enriquecedor):

1. Resultados assintóticos
2. Conexões com outros testes (Wald, escore)
3. Tabela de notação
4. Apêndices com demonstrações auxiliares