

# Questões Resolvidas do Capítulo 5

## Intervalos de Confiança - Soluções Detalhadas

Curso de Inferência Estatística - PPGEST/UFPE

Compilado e detalhado

Novembro 2025

### Sumário

<b>Introdução</b>	<b>2</b>
<b>1 Conceitos Fundamentais</b>	<b>3</b>
1.1 Definições Básicas . . . . .	3
1.2 Métodos de Construção . . . . .	3
1.2.1 Inversão de um Procedimento de Teste . . . . .	3
1.2.2 Método da Estatística Pivotal . . . . .	3
<b>2 Questão 5.1: Comparação de Intervalos de Confiança</b>	<b>5</b>
<b>3 Métodos de Construção de Intervalos de Confiança</b>	<b>8</b>
3.1 Data: 12/11/2025 - Abordagens Principais . . . . .	8
<b>4 Questão 5.2: IC para Normal via Inversão de Teste</b>	<b>9</b>
<b>5 Questão 5.3: IC para Exponencial via Inversão</b>	<b>12</b>
<b>6 Questão 5.4: IC para Exponencial usando Método Pivotal</b>	<b>15</b>
6.1 Data: 12/11/25 . . . . .	15
<b>7 Questão 5.5: IC para Uniforme usando Método Pivotal</b>	<b>19</b>
<b>8 Questão 5.6: IC Bilateral para Normal (Variância Conhecida)</b>	<b>23</b>
<b>9 Questão 5.7: IC Bilateral para Normal (Variância Desconhecida)</b>	<b>27</b>
<b>10 Exercício: IC para a Variância</b>	<b>31</b>
<b>Conclusão</b>	<b>34</b>

# Introdução

Este documento apresenta todas as questões resolvidas em sala de aula do Capítulo 5 sobre Intervalos de Confiança. As soluções foram expandidas com explicações detalhadas, intuições e comentários didáticos para facilitar o entendimento completo dos conceitos.

## Organização do Documento

Cada questão está organizada da seguinte forma:

1. **Enunciado** - apresentação completa do problema
2. **Solução Detalhada** - desenvolvimento passo a passo
3. **Observações e Intuição** - comentários sobre o método e interpretações
4. **Resumo** - síntese dos principais resultados

## Questões Incluídas

- Q(5.1) - Comparação de intervalos de confiança para Normal
- Q(5.2) - IC para Normal via inversão de teste (variância conhecida)
- Q(5.3) - IC para Exponencial via inversão de teste
- Q(5.4) - IC para Exponencial usando método pivotal
- Q(5.5) - IC para Uniforme( $0, \theta$ ) usando método pivotal
- Q(5.6) - IC bilateral para Normal (variância conhecida)
- Q(5.7) - IC bilateral para Normal (variância desconhecida) - Intervalo t
- Exercício - IC para variância de população Normal
- Q(5.10) - IC para diferença de médias (duas amostras, variâncias iguais)
- Q(5.11) - IC para razão de variâncias (duas amostras)

## Métodos Abordados

1. **Inversão de Testes de Hipóteses** - aproveitando a dualidade entre testes e IC
2. **Método Pivotal** - usando estatísticas com distribuição conhecida

# 1 Conceitos Fundamentais

## 1.1 Definições Básicas

### Definição 5.1 - Probabilidade de Cobertura

Sejam  $T_l(x)$  e  $T_u(x)$  duas estatísticas baseadas em uma amostra  $X = (x_1, \dots, x_n)^T$ . A **probabilidade de cobertura** do intervalo aleatório  $J = [T_l(x), T_u(x)]$  para o parâmetro desconhecido  $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$  é dada por:

$$P_\theta [\theta \in [T_l(x), T_u(x)]] \quad (1)$$

### Coefficiente de Confiança

O **coeficiente de confiança** de  $J$  é dado por:

$$\inf_{\theta \in \Theta} \{\mathbb{P}_\theta [\theta \in [T_L(x), T_U(x)]]\} \quad (2)$$

Na maioria das aplicações, a probabilidade de cobertura não dependerá do parâmetro e será equivalente ao coeficiente de cobertura.

## 1.2 Métodos de Construção

### Observações e Intuição

Para construir intervalos de confiança, podem ser utilizadas duas abordagens principais:

1. Inversão de Procedimento de Teste de Hipótese
2. Via Estatística Pivotal

### 1.2.1 Inversão de um Procedimento de Teste

Em teste de hipóteses, a região de não rejeição de  $H_0$  foi denotada como:

$$R^c = \begin{cases} \{x \in \mathcal{X}^n : T(x) > k\}^c & \text{para } H_1 : \theta \geq \theta_0, \\ \{x \in \mathcal{X}^n : T(x) < k\}^c & \text{para } H_1 : \theta \leq \theta_0, \\ \{x \in \mathcal{X}^n : |T(x)| > k\}^c & \text{para } H_1 : \theta \neq \theta_0. \end{cases}$$

A construção de intervalos de confiança é intimamente relacionada a  $R^c$ .

### 1.2.2 Método da Estatística Pivotal

#### Definição 5.3.1 - Pivô

Seja  $T(x)$  (para  $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ ) uma estatística suficiente (mínima) para  $\theta$ . Um **pivô** é uma variável aleatória  $U$  que depende de  $T$  e  $\theta$  cuja distribuição **não** depende de  $\theta$ .

## Observações e Intuição

### Casos Especiais de Pivôs:

1. **Família Locação** em  $a(\theta)$ : A distribuição de  $\{T - a(\theta)\}$  não depende de  $\theta$ .
2. **Família Escala** em  $b(\theta)$ : A distribuição de  $T/b(\theta)$  não depende de  $\theta$ .
3. **Família Locação-Escala** em  $a(\theta)$  e  $b(\theta)$ : A distribuição de  $\{T - a(\theta)\}/b(\theta)$  não depende de  $\theta$ .

## 2 Questão 5.1: Comparação de Intervalos de Confiança

### Questão 5.1

Sejam

$$J_1 = (X_1 - 1,96; X_1 + 1,96)$$

e

$$J_2 = \left( \bar{X} - \frac{1,96}{\sqrt{2}}, \bar{X} + \frac{1,96}{\sqrt{2}} \right)$$

dois intervalos aleatórios para  $\mu$ , tais que  $X_1, X_2 \sim N(\mu, 1)$  i.i.d. e

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2}{2}.$$

Encontre as probabilidades de cobertura de  $J_1$  e  $J_2$ .

### Solução Detalhada

#### Parte 1: Probabilidade de Cobertura de $J_1$

O intervalo  $J_1$  é baseado apenas na primeira observação  $X_1$ .

$$\mathbb{P}_\mu\{\mu \in J_1\} = \mathbb{P}_\mu\{\mu \in (X_1 - 1,96; X_1 + 1,96)\} \quad (3)$$

$$= \mathbb{P}_\mu\{X_1 - 1,96 < \mu < X_1 + 1,96\} \quad (4)$$

$$= \mathbb{P}_\mu\{-1,96 < X_1 - \mu < 1,96\} \quad (5)$$

$$= \mathbb{P}_\mu\{|X_1 - \mu| < 1,96\} \quad (6)$$

Como  $X_1 \sim N(\mu, 1)$ , temos que  $X_1 - \mu \sim N(0, 1)$ . Portanto:

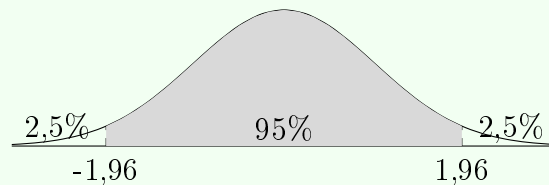
$$\mathbb{P}_\mu\{|X_1 - \mu| < 1,96\} = \mathbb{P}_\mu\{|Z| < 1,96\} \quad \text{onde } Z \sim N(0, 1) \quad (7)$$

$$= \Phi(1,96) - \Phi(-1,96) \quad (8)$$

$$= 2\Phi(1,96) - 1 \quad (9)$$

$$= 2(0,975) - 1 \quad (10)$$

$$= 0,95 = 95\% \quad (11)$$



## Solução Detalhada

### Parte 2: Probabilidade de Cobertura de $J_2$

O intervalo  $J_2$  é baseado na média das duas observações.

$$P_\mu\{\mu \in J_2\} = P_\mu\left\{\mu \in \left(\bar{X} - \frac{1,96}{\sqrt{2}}, \bar{X} + \frac{1,96}{\sqrt{2}}\right)\right\} \quad (12)$$

$$= P_\mu\left\{\bar{X} - \frac{1,96}{\sqrt{2}} < \mu < \bar{X} + \frac{1,96}{\sqrt{2}}\right\} \quad (13)$$

$$= P_\mu\left\{-\frac{1,96}{\sqrt{2}} < \bar{X} - \mu < \frac{1,96}{\sqrt{2}}\right\} \quad (14)$$

$$= P_\mu\left\{|\bar{X} - \mu| < \frac{1,96}{\sqrt{2}}\right\} \quad (15)$$

Multiplicando por  $\sqrt{2}$ :

$$= P_\mu\left\{\left|(\bar{X} - \mu)\sqrt{2}\right| \leq 1,96\right\} \quad (16)$$

Como  $\bar{X} = \frac{X_1+X_2}{2}$  e  $X_i \sim N(\mu, 1)$  i.i.d., temos:

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{1}{2}\right) \quad (17)$$

Portanto:

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{1/2}} = (\bar{X} - \mu)\sqrt{2} \sim N(0, 1) \quad (18)$$

Logo:

$$P_\mu\{|Z| \leq 1,96\} = \Phi(1,96) - \Phi(-1,96) = 0,95 = 95\% \quad (19)$$

## Observações e Intuição

### Comparação dos Intervalos

#### Principais Observações:

1. **Mesma Cobertura:** Ambos  $J_1$  e  $J_2$  têm probabilidade de cobertura de 95%.
2. **Eficiência:** Apesar da mesma cobertura,  $J_2$  é **mais eficiente** porque:
  - $J_1$  usa apenas  $X_1$  (ignora  $X_2$ )
  - $J_2$  usa toda a informação disponível ( $X_1$  e  $X_2$ ) através de  $\bar{X}$
3. **Comprimento dos Intervalos:**
  - Comprimento de  $J_1$ :  $2 \times 1,96 = 3,92$
  - Comprimento de  $J_2$ :  $2 \times \frac{1,96}{\sqrt{2}} \approx 2,77$

O intervalo  $J_2$  é mais estreito (aproximadamente 29% menor), fornecendo estimativa mais precisa!

4. **Estatística Suficiente:**  $\bar{X}$  é suficiente para  $\mu$ . O princípio da suficiência sugere que intervalos baseados em estatísticas suficientes são superiores.

## Resumo da Questão

#### Principais Resultados:

- Probabilidade de cobertura de  $J_1$  e  $J_2$ : ambos 95%
- $J_2$  é mais eficiente: intervalo 29% mais estreito
- Usar estatísticas suficientes leva a intervalos mais precisos
- $\bar{X}$  utiliza toda a informação amostral

### 3 Métodos de Construção de Intervalos de Confiança

#### 3.1 Data: 12/11/2025 - Abordagens Principais

##### Observações e Intuição

Existem duas abordagens principais para construir intervalos de confiança:

1. **Inversão de Procedimento de Teste de Hipótese**
2. **Via Estatística Pivotal**

Veremos aplicações de ambos os métodos nas questões a seguir.

## 4 Questão 5.2: IC para Normal via Inversão de Teste

### Questão 5.2 (Questão 52 das Notas)

Sejam  $X_1, \dots, X_n$  uma amostra de  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  para  $\mu \in \mathbb{R}$  desconhecida e  $\sigma^2 > 0$  conhecida.

Deseja-se testar:

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \mu > \mu_0 \quad (20)$$

Encontre o estimador intervalar para  $\mu$  com nível de confiança de  $1 - \alpha$  para  $\alpha \in (0, 1)$ .

### Solução Detalhada

#### Passo 1: Recordar o Teste UMP

Do Capítulo 4, sabemos que o teste UMP para  $H_0$  vs  $H_1$  de nível  $\alpha$  tem função crítica dada por:

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sigma} \geq z_\alpha, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (21)$$

A região de **rejeição** é:

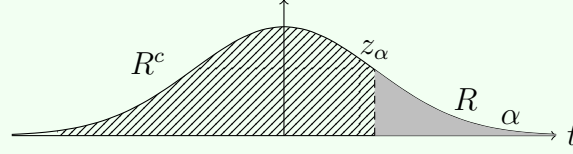
$$R = \left\{ x \in \mathcal{X} : \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sigma} \geq z_\alpha \right\} \quad (22)$$

A região de **não rejeição** é:

$$R^c = \left\{ x \in \mathcal{X} : \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sigma} \leq z_\alpha \right\} \quad (23)$$

## Solução Detalhada

### Passo 2: Visualização da Região de Não Rejeição



### Passo 3: Probabilidade da Região de Não Rejeição

Note que, sob  $H_0 : \mu = \mu_0$ , a estatística  $Z = \sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu_0)/\sigma \sim N(0, 1)$ .

Portanto:

$$P_{\mu_0} \left\{ \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sigma} \leq z_\alpha \right\} = 1 - \alpha$$

### Passo 4: Inversão para Obter o IC

Rearranjando a desigualdade para isolar  $\mu_0$ :

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sigma} \leq z_\alpha \quad (24)$$

$$\bar{X}_n - \mu_0 \leq z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (25)$$

$$-\mu_0 \leq z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \bar{X}_n \quad (26)$$

$$\mu_0 \geq \bar{X}_n - z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (27)$$

Logo:

$$P_\mu \left\{ \mu_0 \geq \bar{X}_n - z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right\} = 1 - \alpha$$

Como esta relação vale para qualquer  $\mu_0$  (substituindo  $\mu_0$  por  $\mu$ ):

$$P_\mu \left\{ \mu \geq \bar{X}_n - z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right\} = 1 - \alpha, \quad \forall \mu \in \mathbb{R}$$

## Solução Detalhada

### Passo 5: Intervalo de Confiança Final

#### Intervalo de Confiança Unilateral Inferior:

$$IC_{1-\alpha}(\mu) = \left[ \bar{X}_n - z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, +\infty \right) \quad (28)$$

Este é um intervalo de confiança **unilateral inferior** para  $\mu$  com coeficiente de confiança  $1 - \alpha$ .

**Interpretação:** Com confiança  $1 - \alpha$ , podemos afirmar que  $\mu$  é pelo menos  $\bar{X}_n - z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ .

## Observações e Intuição

### Pontos Importantes

1. **Método de Inversão:** Este método conecta diretamente testes de hipóteses com intervalos de confiança.
2. **Teste Unilateral  $\Rightarrow$  IC Unilateral:** Como testamos  $H_1 : \mu > \mu_0$ , obtemos um IC unilateral inferior.
3. **Dualidade:** Se  $\mu_0 \in IC_{1-\alpha}$ , então NÃO rejeitamos  $H_0 : \mu = \mu_0$  ao nível  $\alpha$ .
4. **IC Unilateral Superior:** Para  $H_1 : \mu < \mu_0$ , obteríamos:

$$IC_{1-\alpha}(\mu) = \left( -\infty, \bar{X}_n + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

## Resumo da Questão

### IC Unilateral Inferior para $\mu$ (variância conhecida):

#### Fórmula:

$$IC_{1-\alpha}(\mu) = \left[ \bar{X}_n - z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, +\infty \right)$$

#### Interpretação:

- Obtido via inversão do teste UMP
- Adequado quando interessam valores grandes de  $\mu$
- Coeficiente de confiança:  $1 - \alpha$

## 5 Questão 5.3: IC para Exponencial via Inversão

### Questão 5.3

Sejam  $X_1, \dots, X_n$  uma amostra de  $X \sim \text{Exp}(\theta)$  para  $\theta > 0$  desconhecido.

Deseja-se testar:

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \theta > \theta_0$$

Encontre o estimador intervalar para  $\theta$  com nível de confiança  $1 - \alpha$ .

### Solução Detalhada

#### Passo 1: Recordar o Teste UMP para Exponencial

Do Capítulo 4 (Questão 4.5), o teste UMP para  $H_0$  vs  $H_1$  de nível  $\alpha$  tem função crítica:

$$\psi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & 2 \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\theta_0} > \chi_{2n, \alpha}^2 \\ 0, & 2 \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\theta_0} \leq \chi_{2n, \alpha}^2 \end{cases}$$

onde  $\chi_{2n, \alpha}^2$  é o quantil tal que  $P(\chi_{2n}^2 > \chi_{2n, \alpha}^2) = \alpha$ .

A região de não rejeição é:

$$R^c = \left\{ \mathbf{x} \in \mathcal{X} : 2 \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\theta_0} \leq \chi_{2n, \alpha}^2 \right\}$$

#### Passo 2: Probabilidade da Região de Não Rejeição

Sob  $H_0$ , sabemos que  $\frac{2 \sum_{i=1}^n X_i}{\theta_0} \sim \chi_{2n}^2$ .

Portanto:

$$P_{\theta_0} \left\{ 2 \sum_{i=1}^n X_i / \theta_0 \leq \chi_{2n, \alpha}^2 \right\} = 1 - P_{\theta_0} \left\{ 2 \sum_{i=1}^n X_i / \theta_0 > \chi_{2n, \alpha}^2 \right\} \quad (29)$$

$$= 1 - \alpha \quad (30)$$

## Solução Detalhada

### Passo 3: Inversão para Obter o IC

Rearranjando a desigualdade:

$$2 \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{\theta_0} \leq \chi_{2n,\alpha}^2 \quad (31)$$

$$2 \sum_{i=1}^n X_i \leq \theta_0 \cdot \chi_{2n,\alpha}^2 \quad (32)$$

$$\theta_0 \geq \frac{2 \sum_{i=1}^n X_i}{\chi_{2n,\alpha}^2} \quad (33)$$

Logo:

$$P_{\theta_0} \left\{ \theta_0 \geq \frac{2 \sum_{i=1}^n X_i}{\chi_{2n,\alpha}^2} \right\} = 1 - \alpha \quad (34)$$

Como esta relação vale para qualquer valor de  $\theta$  (não apenas  $\theta_0$ ):

$$P_{\theta} \left\{ \theta \geq \frac{2 \sum_{i=1}^n X_i}{\chi_{2n,\alpha}^2} \right\} = 1 - \alpha, \quad \forall \theta \in \mathbb{R}_+ \quad (35)$$

### Passo 4: Intervalo de Confiança Final

Intervalo de Confiança Unilateral Inferior:

$$IC_{1-\alpha}(\theta) = \left[ \frac{2 \sum_{i=1}^n X_i}{\chi_{2n,\alpha}^2}, +\infty \right) \quad (36)$$

## Observações e Intuição

### Pontos Importantes

1. **Estatística Suficiente:**  $\sum X_i$  é suficiente para  $\theta$  na Exponencial.
2. **Distribuição Qui-Quadrado:** A transformação  $\frac{2 \sum X_i}{\theta}$  tem distribuição  $\chi_{2n}^2$  livre de parâmetros.
3. **Graus de Liberdade:** São  $2n$  (não  $n$ ) porque cada  $\frac{2X_i}{\theta} \sim \chi_2^2$ .
4. **Interpretação Prática:** Valores grandes de  $\sum X_i$  sugerem  $\theta$  grande (pois  $E[X] = \theta$ ).
5. **Exemplo Numérico:** Suponha  $n = 10$ ,  $\alpha = 0.05$ ,  $\sum x_i = 25$ .
  - Graus de liberdade:  $2n = 20$
  - $\chi_{20,0.05}^2 = 31.41$
  - $IC_{0.95}(\theta) = [25 \times 2/31.41, +\infty) = [1.59, +\infty)$

### Resumo da Questão

**IC para Exponencial via Inversão:**

**Estatística:**

$$Q = \frac{2 \sum_{i=1}^n X_i}{\theta_0} \sim \chi_{2n}^2$$

**IC Unilateral Inferior:**

$$IC_{1-\alpha}(\theta) = \left[ \frac{2 \sum_{i=1}^n X_i}{\chi_{2n,\alpha}^2}, +\infty \right)$$

**Propriedades:**

- Obtido via inversão do teste UMP
- Depende da estatística suficiente  $\sum X_i$
- Usa distribuição qui-quadrado com  $2n$  graus de liberdade

## 6 Questão 5.4: IC para Exponencial usando Método Pivotal

6.1 Data: 12/11/25

### Questão 5.4

Seja  $X \sim \text{Exp}(\theta)$  com densidade:

$$f(x; \theta) = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta} \mathbb{I}_{(0, \infty)}(x) \quad (37)$$

Construa um intervalo de confiança **bilateral** para  $\theta$  usando a abordagem pivotal.

### Solução Detalhada

#### Passo 1: Encontrar o Pivô

Considere a transformação  $U = X/\theta$ . Vamos calcular sua densidade.

Usando a técnica da transformação:

$$f_U(u) = \frac{dF_X(u\theta)}{du} = \theta f_X(u\theta; \theta) \quad (38)$$

$$= \theta \cdot \frac{1}{\theta} e^{-(u\theta)/\theta} \mathbb{I}_{(0, \infty)}(u\theta) \quad (39)$$

$$= e^{-u} \mathbb{I}_{(0, \infty)}(u) \quad (40)$$

**Conclusão:**  $U = X/\theta \sim \text{Exp}(1)$  (Exponencial padrão).

Portanto,  $U$  é um **pivô** pela Definição 5.3.1, pois sua distribuição não depende de  $\theta$ !

#### Passo 2: Determinar os Quantis

Para um IC bilateral com confiança  $1 - \alpha$ , precisamos encontrar  $a, b > 0$  com  $a < b$  tais que:

$$P(U \leq a) = P(U > b) = \frac{\alpha}{2} \quad (41)$$

Equivalentemente:

$$P(a < U < b) = 1 - \alpha \quad (42)$$

### Solução Detalhada

#### Passo 3: Cálculo de $a$ (quantil inferior)

Para a Exponencial padrão, a função de distribuição é  $F_U(u) = 1 - e^{-u}$ .

$$P(U \leq a) = \frac{\alpha}{2} \quad (43)$$

$$F_U(a) = \frac{\alpha}{2} \quad (44)$$

$$1 - e^{-a} = \frac{\alpha}{2} \quad (45)$$

$$e^{-a} = 1 - \frac{\alpha}{2} \quad (46)$$

$$-a = \log\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \quad (47)$$

$$a = -\log\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \quad (48)$$

#### Passo 4: Cálculo de $b$ (quantil superior)

$$P(U > b) = \frac{\alpha}{2} \quad (49)$$

$$1 - F_U(b) = \frac{\alpha}{2} \quad (50)$$

$$1 - (1 - e^{-b}) = \frac{\alpha}{2} \quad (51)$$

$$e^{-b} = \frac{\alpha}{2} \quad (52)$$

$$-b = \log\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad (53)$$

$$b = -\log\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad (54)$$

## Solução Detalhada

### Passo 5: Inversão do Pivô

Temos que:

$$P_{\theta} \left\{ a < \frac{X}{\theta} < b \right\} = 1 - \alpha$$

Invertendo as desigualdades (dividindo por  $X > 0$ ):

$$P_{\theta} \left\{ \frac{1}{b} < \frac{\theta}{X} < \frac{1}{a} \right\} = 1 - \alpha$$

Multiplicando por  $X$ :

$$P_{\theta} \left\{ \frac{X}{b} < \theta < \frac{X}{a} \right\} = 1 - \alpha$$

Ou seja:

$$P_{\theta} \left\{ \theta \in \left( \frac{X}{b}, \frac{X}{a} \right) \right\} = 1 - \alpha$$

### Passo 6: Intervalo de Confiança Final

Substituindo os valores de  $a$  e  $b$ :

**Intervalo de Confiança Bilateral:**

$$IC_{1-\alpha}(\theta) = \left( \frac{X}{-\log(\alpha/2)}, \frac{X}{-\log(1 - \alpha/2)} \right) \quad (55)$$

Este é o intervalo bilateral para  $\theta$  com confiança  $1 - \alpha$ .

## Observações e Intuição

### Pontos Importantes

1. **Método Pivotal:** Mais direto que inversão de testes quando conhecemos a família de distribuições.
2. **Família Escala:** A Exponencial é família escala, logo  $X/\theta$  tem distribuição livre de  $\theta$ .
3. **Valores Numéricos Comuns:**

- Para  $\alpha = 0.05$ :

$$a = -\log(0.975) \approx 0.0253$$

$$b = -\log(0.025) \approx 3.689$$

- Para  $\alpha = 0.01$ :

$$a = -\log(0.995) \approx 0.00501$$

$$b = -\log(0.005) \approx 5.298$$

4. **Exemplo Numérico:** Suponha  $\alpha = 0.05$  e observamos  $X = 5$ .

$$IC_{0.95}(\theta) = \left( \frac{5}{3.689}, \frac{5}{0.0253} \right) \approx (1.36, 197.6)$$

5. **Assimetria:** O intervalo é assimétrico em relação a  $X$  devido à natureza da distribuição Exponencial.

## Resumo da Questão

**IC Bilateral para Exponencial (método pivotal):**

**Pivô:**

$$U = \frac{X}{\theta} \sim \text{Exp}(1)$$

**IC Bilateral:**

$$IC_{1-\alpha}(\theta) = \left( \frac{X}{-\log(\alpha/2)}, \frac{X}{-\log(1-\alpha/2)} \right)$$

**Propriedades:**

- Baseado em distribuição livre de parâmetros
- Intervalo assimétrico
- Para 1 observação apenas

## 7 Questão 5.5: IC para Uniforme usando Método Pivotal

### Questão 5.5 (Questão 55 das Notas)

Sejam  $X_1, \dots, X_n$  uma amostra de  $X \sim U(0, \theta)$  para  $\theta > 0$  desconhecido. Encontre o estimador intervalar bilateral para  $\theta$  com confiança de  $1 - \alpha$ .

### Solução Detalhada

#### Passo 1: Estatística Suficiente

A estatística  $T(X) = X_{(n)} = \max\{X_1, \dots, X_n\}$  é suficiente mínima para  $\theta$ . Para uma amostra de  $U(0, \theta)$ , a densidade da estatística de ordem máxima é:

$$f_T(t; \theta) = \frac{n}{\theta^n} t^{n-1} \mathbb{I}_{(0, \theta)}(t)$$

**Derivação:** Como  $F_X(x) = x/\theta$  para  $x \in (0, \theta)$ :

$$F_T(t) = [F_X(t)]^n = \left(\frac{t}{\theta}\right)^n \quad (56)$$

$$f_T(t) = \frac{d}{dt} F_T(t) = \frac{n}{\theta^n} t^{n-1} \quad (57)$$

#### Passo 2: Construir o Pivô

Considere  $U = T/\theta$ . Calculemos sua densidade:

$$f_U(u) = \frac{dF_T(u\theta)}{du} = \theta f_T(u\theta; \theta) \quad (58)$$

$$= \theta \cdot \frac{n}{\theta^n} (u \cdot \theta)^{n-1} \quad (59)$$

$$= \theta \cdot \frac{n}{\theta^n} \cdot u^{n-1} \cdot \theta^{n-1} \quad (60)$$

$$= nu^{n-1}, \quad \text{para } u \in (0, 1) \quad (61)$$

**Conclusão:**  $U = T/\theta \sim \text{Beta}(n, 1)$  é um pivô!

### Solução Detalhada

#### Passo 3: Determinar os Quantis

Para um IC bilateral, precisamos de  $a, b \in (0, 1)$  com  $a < b$  tais que:

$$P(U < a) = P(U > b) = \frac{\alpha}{2} \quad (62)$$

Equivalentemente:

$$P(a < U < b) = 1 - \alpha \quad (63)$$

**Cálculo de  $a$ :**

$$P(U < a) = \int_0^a n \cdot u^{n-1} du = [u^n]_0^a = a^n \quad (64)$$

$$a^n = \frac{\alpha}{2} \quad (65)$$

$$a = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{1/n} \quad (66)$$

**Cálculo de  $b$ :**

$$P(U > b) = \int_b^1 n \cdot u^{n-1} du = [u^n]_b^1 = 1 - b^n \quad (67)$$

$$1 - b^n = \frac{\alpha}{2} \quad (68)$$

$$b^n = 1 - \frac{\alpha}{2} \quad (69)$$

$$b = \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)^{1/n} \quad (70)$$

## Solução Detalhada

### Passo 4: Inversão do Pivô

Temos:

$$P\left(a < \frac{T}{\theta} < b\right) = 1 - \alpha$$

Invertendo (note que  $T, \theta > 0$ ):

$$P\left(\frac{1}{b} < \frac{\theta}{T} < \frac{1}{a}\right) = 1 - \alpha$$

Multiplicando por  $T$ :

$$P\left(\frac{T}{b} < \theta < \frac{T}{a}\right) = 1 - \alpha$$

Ou seja:

$$P\left(\theta \in \left(\frac{T}{b}, \frac{T}{a}\right)\right) = 1 - \alpha$$

### Passo 5: Intervalo de Confiança Final

Como  $T = X_{(n)} = X_{n:n}$  (notação de estatística de ordem):

**Intervalo de Confiança Bilateral:**

$$IC_{1-\alpha}(\theta) = \left( \frac{X_{(n)}}{\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)^{1/n}}, \frac{X_{(n)}}{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{1/n}} \right) \quad (71)$$

ou, usando a notação  $X_{n:n}$ :

$$IC_{1-\alpha}(\theta) = (b^{-1}X_{n:n}, a^{-1}X_{n:n}) \quad (72)$$

onde  $a = (\alpha/2)^{1/n}$  e  $b = (1 - \alpha/2)^{1/n}$ .

## Observações e Intuição

### Pontos Importantes

1. **Estatística Suficiente:**  $X_{(n)}$  é suficiente mínima para  $\theta$  na Uniforme.
2. **Distribuição Beta:** O pivô tem distribuição Beta( $n, 1$ ), que concentra massa perto de 1.
3. **Comportamento Assintótico:** Quando  $n \rightarrow \infty$ :
  - $a = (\alpha/2)^{1/n} \rightarrow 1$
  - $b = (1 - \alpha/2)^{1/n} \rightarrow 1$
  - O intervalo se concentra em torno de  $X_{(n)}$
4. **Valores Numéricos:** Para  $\alpha = 0.05$  e  $n = 10$ :

$$a = (0.025)^{0.1} \approx 0.635$$

$$b = (0.975)^{0.1} \approx 0.997$$

Se  $X_{(n)} = 8$ :

$$IC_{0.95}(\theta) = \left( \frac{8}{0.997}, \frac{8}{0.635} \right) \approx (8.02, 12.60)$$

5. **Intuição:** Como  $X_{(n)} \leq \theta$  sempre, o limite inferior do IC é próximo de  $X_{(n)}$ , e o superior é maior para compensar a incerteza.

## Resumo da Questão

**IC Bilateral para Uniforme( $0, \theta$ ):**

**Pivô:**

$$U = \frac{X_{(n)}}{\theta} \sim \text{Beta}(n, 1)$$

**IC Bilateral:**

$$IC_{1-\alpha}(\theta) = \left( \frac{X_{(n)}}{(1 - \alpha/2)^{1/n}}, \frac{X_{(n)}}{(\alpha/2)^{1/n}} \right)$$

**Propriedades:**

- Baseado na estatística de ordem máxima
- Usa distribuição Beta
- Assimétrico: limite inferior próximo de  $X_{(n)}$

## 8 Questão 5.6: IC Bilateral para Normal (Variância Conhecida)

### Questão 5.6 (Questão 56 das Notas)

Sejam  $X_1, \dots, X_n$  uma amostra de  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  com  $\mu \in \mathbb{R}$  desconhecido e  $\sigma^2 > 0$  conhecido.

Encontre o IC bilateral com  $1 - \alpha$  de confiança para  $\mu$ .

### Solução Detalhada

#### Passo 1: Estatística Suficiente

De discussões anteriores (Capítulo 3),  $T = \bar{X}_n$  é uma estatística suficiente mínima para  $\mu$ .

A distribuição de  $T$  é:

$$\bar{X}_n \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

#### Passo 2: Identificar a Família

Os  $X_i$ 's (e consequentemente  $\bar{X}_n$ ) pertencem a uma **família locação** parametrizada por  $\mu$ .

#### Passo 3: Construir o Pivô

Padronizando  $\bar{X}_n$ :

$$U = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1) \quad (73)$$

Esta é uma variável aleatória cuja distribuição **não depende** de  $\mu$  (nem de  $\sigma$ , que é conhecido).

Portanto,  $U$  é um **pivô**.

## Solução Detalhada

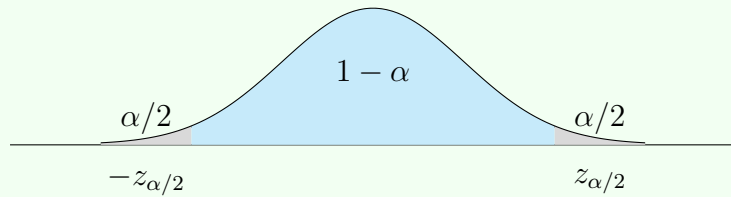
### Passo 4: Determinar os Quantis

Para um IC bilateral com confiança  $1 - \alpha$ , usamos o quantil  $z_{\alpha/2}$  da Normal padrão tal que:

$$P(Z > z_{\alpha/2}) = \frac{\alpha}{2} \quad (74)$$

Por simetria da Normal:

$$P(-z_{\alpha/2} < U < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha \quad (75)$$



### Passo 5: Inversão do Pivô

Substituindo o pivô:

$$P\left(-z_{\alpha/2} < \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < z_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

Multiplicando por  $\sigma/\sqrt{n}$ :

$$P\left(-z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{X}_n - \mu < z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

Isolando  $\mu$  (multiplicando por  $-1$  e adicionando  $\bar{X}_n$ ):

$$P\left(\bar{X}_n - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X}_n + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

## Solução Detalhada

### Passo 6: Intervalo de Confiança Final

#### Intervalo de Confiança Bilateral:

$$IC_{1-\alpha}(\mu) = \left( \bar{X}_n - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) \quad (76)$$

Ou, de forma mais compacta:

$$IC_{1-\alpha}(\mu) = \bar{X}_n \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (77)$$

#### Valores Comuns de $z_{\alpha/2}$ :

- Para  $\alpha = 0.05$  (95% de confiança):  $z_{0.025} = 1.96$
- Para  $\alpha = 0.01$  (99% de confiança):  $z_{0.005} = 2.576$
- Para  $\alpha = 0.10$  (90% de confiança):  $z_{0.05} = 1.645$

## Observações e Intuição

### Pontos Importantes

1. **Este é o IC Z Clássico:** Amplamente usado quando  $\sigma^2$  é conhecido.
2. **Margem de Erro:** A quantidade  $ME = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$  é chamada margem de erro.
3. **Tamanho Amostral:** Para obter margem de erro  $E$  desejada:

$$n = \left( \frac{z_{\alpha/2} \sigma}{E} \right)^2$$

4. **Interpretação Correta:** “Em 95% das amostras, o intervalo construído conterá o verdadeiro valor de  $\mu$ ” (não “ $\mu$  tem 95% de chance de estar no intervalo”).
5. **Exemplo Numérico:** Suponha  $n = 25$ ,  $\sigma = 5$ ,  $\bar{x} = 103$ ,  $\alpha = 0.05$ .

$$ME = 1.96 \times \frac{5}{\sqrt{25}} = 1.96 \times 1 = 1.96$$
$$IC_{0.95}(\mu) = (103 - 1.96, 103 + 1.96) = (101.04, 104.96)$$

### Resumo da Questão

IC Bilateral para  $\mu$  (variância conhecida):

Pivô:

$$Z = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

IC Bilateral:

$$IC_{1-\alpha}(\mu) = \bar{X}_n \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Propriedades:

- Simétrico em torno de  $\bar{X}_n$
- Comprimento:  $2z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}$
- Diminui com  $\sqrt{n}$

## 9 Questão 5.7: IC Bilateral para Normal (Variância Desconhecida)

### Questão 5.7

Sejam  $X_1, \dots, X_n$  i.i.d. de  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  com  $\mu \in \mathbb{R}$  e  $\sigma^2 > 0$  ambos desconhecidos. Encontre estimador bilateral intervalar com  $1 - \alpha$  de confiança para  $\mu$ .

### Solução Detalhada

#### Passo 1: Estatística Suficiente

De discussões anteriores,  $(\bar{X}_n, S_n)$  é uma estatística suficiente mínima para  $(\mu, \sigma)$ , onde:

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$$

Os  $X_i$ 's pertencem a uma **família de locação-escala**.

#### Passo 2: Construir o Pivô

Como  $\sigma$  é desconhecido, não podemos usar  $\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ . Em vez disso, substituímos  $\sigma$  por seu estimador  $S_n$ :

$$U = \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{S_n} \sim t_{n-1} \quad (78)$$

Esta estatística segue a **distribuição t de Student** com  $n - 1$  graus de liberdade, que não depende de  $\mu$  nem de  $\sigma^2$ .

Portanto,  $U$  é um **pivô**.

**Justificativa:** Pelo Teorema de Cochran,

$$\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2 \quad \text{e é independente de } \bar{X}_n.$$

Logo:

$$U = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)/\sigma}{\sqrt{(n-1)S_n^2/[(n-1)\sigma^2]}} = \frac{Z}{\sqrt{\chi_{n-1}^2/(n-1)}} \sim t_{n-1}$$

## Solução Detalhada

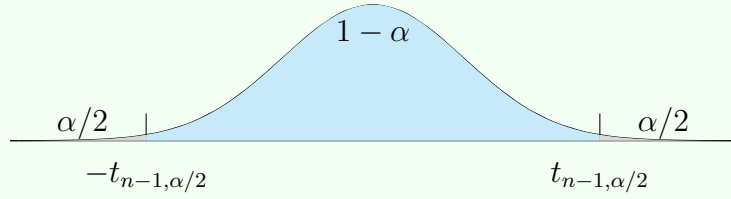
### Passo 3: Determinar os Quantis

Para  $t_{n-1,\alpha/2} > 0$  tal que:

$$P(|T| > t_{n-1,\alpha/2}) = \alpha \quad \text{onde } T \sim t_{n-1} \quad (79)$$

temos (por simetria da distribuição t):

$$P\{-t_{n-1,\alpha/2} < U < t_{n-1,\alpha/2}\} = 1 - \alpha \quad (80)$$



### Passo 4: Inversão do Pivô

Substituindo a definição de  $U$ :

$$P\left\{-t_{n-1,\alpha/2} < \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{S_n} < t_{n-1,\alpha/2}\right\} = 1 - \alpha$$

Multiplicando por  $S_n/\sqrt{n}$ :

$$P\left\{-t_{n-1,\alpha/2} \frac{S_n}{\sqrt{n}} < \bar{X}_n - \mu < t_{n-1,\alpha/2} \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right\} = 1 - \alpha$$

Isolando  $\mu$ :

$$P\left\{\bar{X}_n - t_{n-1,\alpha/2} \frac{S_n}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X}_n + t_{n-1,\alpha/2} \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right\} = 1 - \alpha$$

## Solução Detalhada

### Passo 5: Intervalo de Confiança Final

Intervalo de Confiança Bilateral (Intervalo t):

$$IC_{1-\alpha}(\mu) = \bar{X}_n \pm t_{n-1, \alpha/2} \frac{S_n}{\sqrt{n}} \quad (81)$$

Ou explicitamente:

$$IC_{1-\alpha}(\mu) = \left[ \bar{X}_n - t_{n-1, \alpha/2} \frac{S_n}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + t_{n-1, \alpha/2} \frac{S_n}{\sqrt{n}} \right] \quad (82)$$

Este é o famoso **intervalo t de Student**, utilizado quando a variância populacional é desconhecida.

## Observações e Intuição

### Pontos Importantes

1. **Diferença Fundamental em relação a Q5.6:**
  - **Q5.6:**  $\sigma^2$  conhecido  $\Rightarrow$  usa  $N(0, 1) \Rightarrow$  quantis  $z_{\alpha/2}$
  - **Q5.7:**  $\sigma^2$  desconhecido  $\Rightarrow$  usa  $t_{n-1} \Rightarrow$  quantis  $t_{n-1, \alpha/2}$
2. **Cauda Mais Pesada:** A distribuição  $t$  tem caudas mais pesadas que a Normal, refletindo a incerteza adicional de estimar  $\sigma$ .
3. **Convergência Assintótica:** Quando  $n \rightarrow \infty$ ,  $t_{n-1} \rightarrow N(0, 1)$ , logo os intervalos  $t$  e  $Z$  convergem.
4. **Valores de  $t_{n-1, \alpha/2}$  para  $\alpha = 0.05$ :**
  - $n = 10$ :  $t_{9, 0.025} = 2.262$  (compare com  $z_{0.025} = 1.96$ )
  - $n = 30$ :  $t_{29, 0.025} = 2.045$
  - $n = 100$ :  $t_{99, 0.025} = 1.984$
  - $n \rightarrow \infty$ :  $t_{\infty, 0.025} = 1.96 = z_{0.025}$
5. **Exemplo Numérico:** Suponha  $n = 16$ ,  $\bar{x} = 50$ ,  $s = 10$ ,  $\alpha = 0.05$ .

$$t_{15, 0.025} = 2.131$$

$$ME = 2.131 \times \frac{10}{\sqrt{16}} = 2.131 \times 2.5 = 5.33$$

$$IC_{0.95}(\mu) = (50 - 5.33, 50 + 5.33) = (44.67, 55.33)$$

### Resumo da Questão

**IC Bilateral para  $\mu$  (variância desconhecida):**

**Pivô:**

$$T = \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{S_n} \sim t_{n-1}$$

**IC Bilateral (Intervalo t):**

$$IC_{1-\alpha}(\mu) = \bar{X}_n \pm t_{n-1, \alpha/2} \frac{S_n}{\sqrt{n}}$$

**Propriedades:**

- Usa distribuição t de Student
- Mais largo que IC Z (reflete incerteza adicional)
- Converge para IC Z quando  $n \rightarrow \infty$
- Mais usado na prática (raramente  $\sigma$  é conhecido)

## 10 Exercício: IC para a Variância

### Exercício Proposto

Sejam  $X_1, \dots, X_n$  uma amostra aleatória de  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  com  $\mu \in \mathbb{R}$  e  $\sigma^2 > 0$  ambos desconhecidos.

Mostre que:

$$IC_{1-\alpha}(\sigma^2) = \left[ \frac{(n-1)S_n^2}{\chi_{n-1;\alpha/2}^2}, \frac{(n-1)S_n^2}{\chi_{n-1;1-\alpha/2}^2} \right] \quad (83)$$

é o IC bilateral para  $\sigma^2$  com confiança de  $1 - \alpha$ .

### Solução Detalhada

#### Passo 1: Identificar o Pivô

Pelo Teorema de Cochran, sabemos que:

$$\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2 \quad (84)$$

Esta estatística:

- Depende de  $S_n^2$  (dados) e  $\sigma^2$  (parâmetro)
- Tem distribuição qui-quadrado com  $n - 1$  graus de liberdade
- A distribuição **não depende** de  $\mu$  nem de  $\sigma^2$

Portanto,  $Q = \frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2}$  é um **pivô**.

#### Passo 2: Determinar os Quantis

Seja  $\chi_{n-1;\alpha/2}^2$  o quantil superior (cauda direita):

$$P(\chi_{n-1}^2 > \chi_{n-1;\alpha/2}^2) = \frac{\alpha}{2}$$

Seja  $\chi_{n-1;1-\alpha/2}^2$  o quantil inferior (cauda esquerda):

$$P(\chi_{n-1}^2 < \chi_{n-1;1-\alpha/2}^2) = \frac{\alpha}{2}$$

Logo:

$$P(\chi_{n-1;1-\alpha/2}^2 < \chi_{n-1}^2 < \chi_{n-1;\alpha/2}^2) = 1 - \alpha$$

### Solução Detalhada

#### Passo 3: Inversão do Pivô

Substituindo o pivô  $Q = \frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2}$ :

$$P\left(\chi_{n-1;1-\alpha/2}^2 < \frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} < \chi_{n-1;\alpha/2}^2\right) = 1 - \alpha$$

Invertendo as desigualdades (note que dividir por  $\sigma^2$  inverte):

$$P\left(\frac{1}{\chi_{n-1;\alpha/2}^2} < \frac{\sigma^2}{(n-1)S_n^2} < \frac{1}{\chi_{n-1;1-\alpha/2}^2}\right) = 1 - \alpha$$

Multiplicando por  $(n-1)S_n^2$ :

$$P\left(\frac{(n-1)S_n^2}{\chi_{n-1;\alpha/2}^2} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S_n^2}{\chi_{n-1;1-\alpha/2}^2}\right) = 1 - \alpha$$

#### Passo 4: Intervalo de Confiança Final

Intervalo de Confiança Bilateral para  $\sigma^2$ :

$$IC_{1-\alpha}(\sigma^2) = \left[ \frac{(n-1)S_n^2}{\chi_{n-1;\alpha/2}^2}, \frac{(n-1)S_n^2}{\chi_{n-1;1-\alpha/2}^2} \right] \quad (85)$$

Para o desvio padrão  $\sigma$ :

$$IC_{1-\alpha}(\sigma) = \left[ \sqrt{\frac{(n-1)S_n^2}{\chi_{n-1;\alpha/2}^2}}, \sqrt{\frac{(n-1)S_n^2}{\chi_{n-1;1-\alpha/2}^2}} \right] \quad (86)$$

## Observações e Intuição

### Pontos Importantes

1. **Assimetria:** Ao contrário do IC para  $\mu$ , este intervalo é **assimétrico** devido à assimetria da distribuição qui-quadrado.
2. **Atenção aos Quantis:** Note que:
  - **Limite inferior:** usa  $\chi_{n-1;\alpha/2}^2$  (maior quantil) no denominador
  - **Limite superior:** usa  $\chi_{n-1;1-\alpha/2}^2$  (menor quantil) no denominador

Esta inversão é crucial!

3. **Independência:**  $\bar{X}_n$  e  $S_n^2$  são independentes (Teorema de Cochran), permitindo construir IC's simultâneos.
4. **Sensibilidade à Não Normalidade:** Este IC é mais sensível a desvios da normalidade que o IC para  $\mu$ .
5. **Exemplo Numérico:** Suponha  $n = 20$ ,  $s^2 = 16$ ,  $\alpha = 0.05$ .

$$\begin{aligned}\chi_{19;0.025}^2 &= 32.85 \quad (\text{cauda superior}) \\ \chi_{19;0.975}^2 &= 8.91 \quad (\text{cauda inferior}) \\ IC_{0.95}(\sigma^2) &= \left[ \frac{19 \times 16}{32.85}, \frac{19 \times 16}{8.91} \right] \\ &= [9.25, 34.12]\end{aligned}$$

$$\text{Para } \sigma: IC_{0.95}(\sigma) = [\sqrt{9.25}, \sqrt{34.12}] \approx [3.04, 5.84]$$

## Resumo da Questão

IC Bilateral para  $\sigma^2$  (média desconhecida):

Pivô:

$$Q = \frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$$

IC Bilateral:

$$IC_{1-\alpha}(\sigma^2) = \left[ \frac{(n-1)S_n^2}{\chi_{n-1;\alpha/2}^2}, \frac{(n-1)S_n^2}{\chi_{n-1;1-\alpha/2}^2} \right]$$

Propriedades:

- Assimétrico (distribuição qui-quadrado)
- Cuidado com a inversão dos quantis!
- Baseado no Teorema de Cochran

## 11 Questão 5.10: IC para Diferença de Médias (Duas Amostras)

### Questão 5.10

Sejam  $X_{i1}, \dots, X_{in_i}$  para  $i = 1, 2$  duas amostras aleatórias independentes de  $X_i \sim N(\mu_i, \sigma^2)$ ,  $X_1 \perp X_2$ .

Vamos assumir que  $\theta = (\mu_1, \mu_2, \sigma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$  é desconhecido.

Encontre o intervalo bilateral com confiança  $1 - \alpha$  para  $K(\theta) = \mu_1 - \mu_2$ .

### Solução Detalhada

#### Passo 1: Estatísticas Suficientes

Note que, pela independência de  $X_1$  e  $X_2$ :

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) \stackrel{X_1 \perp X_2}{=} f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) \quad (87)$$

Pelo teorema (2.2), temos que

$$T_1 = \left[ \sum_{i=1}^{n_1} X_{1i}, \sum_{i=1}^{n_2} X_{2i}, \sum_{i=1}^{n_1} X_{1i}^2 + \sum_{i=1}^{n_2} X_{2i}^2 \right] \quad (88)$$

é conjuntamente suficiente para  $\theta = (\mu_1, \mu_2, \sigma)^T$ .

Pelo Teorema (2.4),

$$T_3 = \left[ \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} X_{1i}, \frac{1}{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} X_{2i}, \frac{1}{n_1 + n_2 - 2} \left[ \sum_{i=1}^{n_1} (X_{1i} - \bar{X}_1)^2 + \sum_{i=1}^{n_2} (X_{2i} - \bar{X}_2)^2 \right] \right] \quad (89)$$

é também suficiente para  $\theta$ . O termo  $\hat{S}_p^2$  é chamado de variância amostral conjunta e pode ser descrito como:

Para

$$S_1^2 = (n_1 - 1)^{-1} \sum_{i=1}^{n_1} (X_{1i} - \bar{X}_1)^2$$

e

$$S_2^2 = (n_2 - 1)^{-1} \sum_{i=1}^{n_2} (X_{2i} - \bar{X}_2)^2$$

$$S_p^2 = (n_1 + n_2 - 2)^{-1} [(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2] \quad (90)$$

#### Passo 2: Construção do Pivô

Note que como  $(n_1 - 1) \cdot \frac{S_1^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n_1-1}^2$  e  $(n_2 - 1) \cdot \frac{S_2^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n_2-1}^2$ , então

$$(n_1 + n_2 - 2) \cdot \frac{S_p^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n_1+n_2-2}^2 \quad (91)$$

Daí note que

$$U = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \cdot \sqrt{\frac{n_1 + n_2 - 2}{n_1 + n_2 - 2} \cdot \frac{S_p^2}{\sigma^2}} \sim t_{n_1 + n_2 - 2} \quad (92)$$

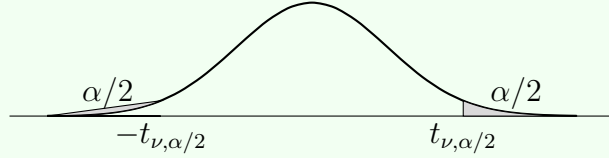
**Justificativa:** O numerador  $\frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim N(0, 1)$  porque  $\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \sim N(\mu_1 - \mu_2, \sigma^2(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}))$ . O denominador é a raiz quadrada de uma qui-quadrado dividida por seus graus de liberdade, resultando em uma distribuição  $t$ .

## Solução Detalhada

### Passo 3: Determinar os Quantis

Para  $\nu = n_1 + n_2 - 2$  e  $t_{\nu, \alpha/2}$  tal que

$$P(U > t_{\nu, \alpha/2}) = \frac{\alpha}{2} \quad (93)$$



$$P\{-t_{\nu, \alpha/2} < U < t_{\nu, \alpha/2}\} = 1 - \alpha \quad (94)$$

### Passo 4: Inversão do Pivô

Substituindo a definição de  $U$ :

$$P\left\{-t_{\nu, \alpha/2} < \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} < t_{\nu, \alpha/2}\right\} = 1 - \alpha \quad (95)$$

Isolando  $\mu_1 - \mu_2$ :

$$\therefore P\left\{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - t_{\nu, \alpha/2} \cdot S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < \bar{X}_1 - \bar{X}_2 + t_{\nu, \alpha/2} \cdot S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\right\} = 1 - \alpha \quad (96)$$

### Passo 5: Intervalo de Confiança Final

Isto é

$$IC_{1-\alpha}(\mu_1 - \mu_2) = \left[ \bar{X}_1 - \bar{X}_2 \pm t_{\nu, \alpha/2} \cdot S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \right] \quad (97)$$

onde  $\nu = n_1 + n_2 - 2$  e  $S_p^2$  é a variância amostral conjunta (pooled variance).

## Observações e Intuição

### Pontos Importantes

1. **Variância Conjunta:** Como assumimos que  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ , combinamos as informações de ambas as amostras para estimar a variância comum através de  $S_p^2$ .
2. **Graus de Liberdade:** São  $n_1 + n_2 - 2$  porque estimamos duas médias ( $\mu_1$  e  $\mu_2$ ), perdendo 2 graus de liberdade.
3. **Distribuição t:** A estatística segue distribuição  $t$  de Student, não Normal, porque a variância comum é estimada.
4. **Independência:** As amostras devem ser independentes entre si.
5. **Exemplo Numérico:** Suponha  $n_1 = 15$ ,  $n_2 = 20$ ,  $\bar{x}_1 = 50$ ,  $\bar{x}_2 = 45$ ,  $s_1^2 = 16$ ,  $s_2^2 = 20$ ,  $\alpha = 0.05$ .

$$s_p^2 = \frac{(15 - 1) \times 16 + (20 - 1) \times 20}{15 + 20 - 2} = \frac{14 \times 16 + 19 \times 20}{33} = \frac{604}{33} \approx 18.33$$

$$s_p \approx 4.28$$

$$\nu = 33$$

$$t_{33,0.025} \approx 2.035$$

$$\begin{aligned} IC_{0.95}(\mu_1 - \mu_2) &= (50 - 45) \pm 2.035 \times 4.28 \times \sqrt{\frac{1}{15} + \frac{1}{20}} \\ &= 5 \pm 2.035 \times 4.28 \times 0.3416 \\ &= 5 \pm 2.98 \\ &= (2.02, 7.98) \end{aligned}$$

### Resumo da Questão

**IC para Diferença de Médias (variâncias iguais):**

**Pivô:**

$$T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t_{n_1+n_2-2}$$

**IC Bilateral:**

$$IC_{1-\alpha}(\mu_1 - \mu_2) = \left[ \bar{X}_1 - \bar{X}_2 \pm t_{\nu, \alpha/2} \cdot S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \right]$$

**Propriedades:**

- Requer suposição de variâncias iguais
- Usa variância amostral conjunta  $S_p^2$
- Distribuição t com  $n_1 + n_2 - 2$  graus de liberdade
- Adequado para comparação de dois grupos

## 12 Questão 5.11: IC para Razão de Variâncias (Duas Amostras)

### Questão 5.11

Sejam  $X_{i1}, \dots, X_{in_i}$  uma amostra de  $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$  para  $n_i \geq 2$  e  $i = 1, 2$ . Assuma que  $X_1 \perp X_2$  e

$$\theta = (\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$$

é desconhecido.

Encontre o intervalo bilateral com confiança  $1 - \alpha$  para

$$K(\theta) = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}.$$

### Solução Detalhada

#### Passo 1: Estatísticas Suficientes

Pode-se mostrar (fica como exercício) que

$$\bar{X}_1 = n_1^{-1} \sum_{i=1}^{n_1} X_{1i}, \quad \bar{X}_2 = n_2^{-1} \sum_{i=1}^{n_2} X_{2i}, \quad S_1^2 = \frac{1}{n_1 - 1} \sum_{i=1}^{n_1} (X_{1i} - \bar{X}_1)^2 \quad (98)$$

e

$$S_2^2 = \frac{1}{n_2 - 1} \sum_{i=1}^{n_2} (X_{2i} - \bar{X}_2)^2 \quad (99)$$

são suficientes para  $\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2$ .

#### Passo 2: Construção do Pivô

Note que (por definição da distribuição  $F$  - cenário i.c.):

$$U = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F_{n_1-1, n_2-1}. \quad (100)$$

Uma vez que

$$(n_1 - 1) \frac{S_1^2}{\sigma_1^2} \sim \chi_{n_1-1}^2 \quad \text{e} \quad (n_2 - 1) \frac{S_2^2}{\sigma_2^2} \sim \chi_{n_2-1}^2 \quad (101)$$

são independentes.

**Justificativa:** A razão entre duas variáveis qui-quadrado independentes, cada uma dividida por seus graus de liberdade, segue distribuição  $F$ . Como as variâncias amostrais são independentes (amostras independentes) e cada uma segue uma qui-quadrado quando padronizada, sua razão segue  $F$ .

Logo  $U$  é uma quantidade pivotal.

## Solução Detalhada

### Passo 3: Determinar os Quantis

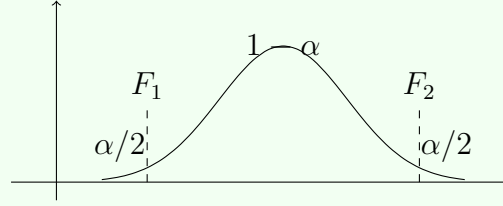
Sejam

$$F_1 = F_{n_1-1, n_2-1, 1-\alpha/2} > 0 \quad \text{e} \quad F_2 = F_{n_1-1, n_2-1, \alpha/2}$$

tais que

$$P(U < F_1) = \frac{\alpha}{2} \quad (102)$$

$$P(U > F_2) = \frac{\alpha}{2} \quad (103)$$



### Passo 4: Inversão do Pivô

Daí:

$$P_\theta\{F_1 < U < F_2\} = 1 - \alpha \quad (104)$$

Substituindo  $U = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}$ :

$$P_\theta\left\{F_1 < \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} < F_2\right\} = 1 - \alpha \quad (105)$$

Reescrevendo:

$$P_\theta\left\{F_1 \frac{S_2^2}{S_1^2} < \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} < F_2 \frac{S_2^2}{S_1^2}\right\} = 1 - \alpha \quad (106)$$

Invertendo para obter  $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ :

$$P_\theta\left\{F_2^{-1} \frac{S_1^2}{S_2^2} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < F_1^{-1} \frac{S_1^2}{S_2^2}\right\} = 1 - \alpha \quad (107)$$

### Passo 5: Intervalo de Confiança Final

Usando a propriedade  $F_{1-\alpha/2, \nu_1, \nu_2} = \frac{1}{F_{\alpha/2, \nu_2, \nu_1}}$ :

$$IC_{1-\alpha}\left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\right) = \left(F_{n_1-1, n_2-1, 1-\alpha/2}^{-1} \frac{S_1^2}{S_2^2}, F_{n_1-1, n_2-1, \alpha/2}^{-1} \frac{S_1^2}{S_2^2}\right) \quad (108)$$

ou, usando a notação mais comum:

$$IC_{1-\alpha}\left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\right) = \left(\frac{S_1^2}{S_2^2} \cdot \frac{1}{F_{n_1-1, n_2-1, \alpha/2}}, \frac{S_1^2}{S_2^2} \cdot F_{n_2-1, n_1-1, \alpha/2}\right) \quad (109)$$

## Observações e Intuição

### Pontos Importantes

1. **Distribuição F:** A distribuição  $F$  não é simétrica, então os quantis não são simétricos.
2. **Relação entre Quantis:** Há uma relação importante:  $F_{1-\alpha/2, \nu_1, \nu_2} = \frac{1}{F_{\alpha/2, \nu_2, \nu_1}}$ . Isso é usado na construção do intervalo.
3. **Independência:** As amostras devem ser independentes para que as variâncias amostrais sejam independentes.
4. **Graus de Liberdade:** São  $(n_1 - 1, n_2 - 1)$  porque estimamos as médias  $\mu_1$  e  $\mu_2$ .
5. **Exemplo Numérico:** Suponha  $n_1 = 10, n_2 = 15, s_1^2 = 25, s_2^2 = 16, \alpha = 0.05$ .

$$F_{9,14,0.025} \approx 3.21$$

$$F_{14,9,0.025} \approx 3.80$$

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{25}{16} = 1.5625$$

$$IC_{0.95} \left( \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \right) = \left( \frac{1.5625}{3.21}, 1.5625 \times 3.80 \right) \\ = (0.487, 5.938)$$

6. **Interpretação:** Se o IC contém 1, não há evidência de que as variâncias sejam diferentes.

## Resumo da Questão

**IC para Razão de Variâncias:**

**Pivô:**

$$F = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F_{n_1-1, n_2-1}$$

**IC Bilateral:**

$$IC_{1-\alpha} \left( \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \right) = \left( \frac{S_1^2}{S_2^2} \cdot \frac{1}{F_{n_1-1, n_2-1, \alpha/2}}, \frac{S_1^2}{S_2^2} \cdot F_{n_2-1, n_1-1, \alpha/2} \right)$$

**Propriedades:**

- Usa distribuição  $F$  de Fisher
- Intervalo assimétrico
- Requer amostras independentes
- Útil para verificar suposição de variâncias iguais

## Conclusão

Este documento apresentou soluções detalhadas e didáticas para todas as questões do Capítulo 5 sobre Intervalos de Confiança resolvidas em sala de aula.

## Síntese dos Tópicos Abordados

1. **Q5.1:** Comparação de intervalos - conceito de eficiência
2. **Q5.2:** IC via inversão de teste (Normal, variância conhecida)
3. **Q5.3:** IC via inversão de teste (Exponencial)
4. **Q5.4:** IC via método pivotal (Exponencial)
5. **Q5.5:** IC via método pivotal (Uniforme)
6. **Q5.6:** IC bilateral Z (Normal, variância conhecida)
7. **Q5.7:** IC bilateral t (Normal, variância desconhecida)
8. **Exercício:** IC para variância (qui-quadrado)
9. **Q5.10:** IC para diferença de médias (duas amostras, variâncias iguais)
10. **Q5.11:** IC para razão de variâncias (duas amostras)

## Conexões Entre os Métodos

- Q5.2 e Q5.3 → Método de inversão de testes
- Q5.4, Q5.5, Q5.6, Q5.7, Q5.10, Q5.11 → Método pivotal
- Q5.6 vs Q5.7 → Impacto de  $\sigma$  desconhecido
- Q5.10 → Extensão para duas amostras (diferença de médias)
- Q5.11 → Extensão para duas amostras (razão de variâncias)

## Tabela Comparativa Rápida

Questão	Distribuição	Método	Tipo IC
Q5.2	$N(\mu, \sigma^2)$	Inversão	Unilateral inferior
Q5.3	$\text{Exp}(\theta)$	Inversão	Unilateral inferior
Q5.4	$\text{Exp}(\theta)$	Pivotal	Bilateral
Q5.5	$U(0, \theta)$	Pivotal	Bilateral
Q5.6	$N(\mu, \sigma^2)$	Pivotal	Bilateral
Q5.7	$N(\mu, \sigma^2)$	Pivotal	Bilateral (t)
Exercício	$N(\mu, \sigma^2)$	Pivotal	Bilateral ( $\chi^2$ )
Q5.10	$N(\mu_1, \sigma^2), N(\mu_2, \sigma^2)$	Pivotal	Bilateral (t)
Q5.11	$N(\mu_1, \sigma_1^2), N(\mu_2, \sigma_2^2)$	Pivotal	Bilateral (F)

## Mensagens Principais

1. **Dois Métodos Principais:** Inversão de testes e método pivotal
2. **Estatísticas Suficientes:** IC ótimos dependem de estatísticas suficientes
3. **Dualidade:** Correspondência exata entre testes e IC
4. **Família de Distribuições:** Determina o tipo de pivô (locação, escala, locação-escala)
5. **Interpretação Cuidadosa:** O intervalo é aleatório, não o parâmetro!

## Recomendações Finais

Para dominar o material:

- Pratique derivar IC's do zero usando ambos os métodos
- Entenda a intuição por trás de cada pivô
- Compare IC unilaterais vs bilaterais
- Calcule IC's para dados reais e interprete corretamente
- Conecte com testes de hipóteses (dualidade)

**Fim do Documento de Questões Resolvidas**