

Material Auxiliar de Teoria

Capítulo 4 - Teste de Hipóteses

Definições, Conceitos e Teoremas

Curso de Inferência Estatística - PPGEST/UFPE

Material de Apoio para Estudo

Novembro 2025

AVISO IMPORTANTE: Este documento contém toda a teoria fundamental do Capítulo 4, com ênfase especial na demonstração COMPLETA e DETALHADA do Lema de Neyman-Pearson (LNP), que tem alta probabilidade de ser cobrado na prova. Estude com atenção cada passo da demonstração.

Sumário

1	Conceitos Fundamentais	3
1.1	Definições Básicas	3
1.2	Tipos de Erro	4
2	LEMA DE NEYMAN-PEARSON (LNP)	7
2.1	Contexto e Motivação	7
2.2	Enunciado do Teorema	7
2.3	Demonstração Completa do LNP	8
2.4	Análise Detalhada da Demonstração	12
2.5	Interpretação Geométrica do LNP	14
2.6	Observações Importantes sobre o LNP	15
3	Teste para Hipóteses Compostas Unilaterais	16
3.1	Razão de Verossimilhança Monótona (RVM)	16
3.2	RVM na Família Exponencial	16
4	Teorema de Karlin-Rubin	18
5	Todas as Definições Importantes	19
6	Resumo de Todos os Teoremas Principais	20
6.1	Quadro Comparativo dos Teoremas	20
7	Guia de Estudo para a Prova	21
7.1	Checklist de Conteúdos para Dominar	21
7.2	Estratégias para Demonstrações na Prova	21

8	Formulário de Referência Rápida	23
8.1	Estatísticas de Teste Principais	23
8.2	Fórmulas Importantes	23
9	Exemplos Trabalhados da Teoria	24
9.1	Exemplo 1: Verificando RVM para Normal	24
9.2	Exemplo 2: Aplicando LNP para Normal	24
10	Conexões Entre os Conceitos	25
11	Perguntas Frequentes para a Prova	26
11.1	Dúvidas Comuns sobre o LNP	26
12	Material de Revisão Final	27
12.1	Principais Equações para Memorizar	27
12.2	Simulado de Questões Teóricas	28
12.3	Gabarito Resumido	28
13	Conclusão e Recomendações	29
13.1	Prioridades de Estudo	29
13.2	Como Estudar para a Prova	29
13.3	Frases para Lembrar	29

1 Conceitos Fundamentais

1.1 Definições Básicas

Definição 4.1.1: Hipótese Estatística

Uma **hipótese estatística** é uma afirmação sobre o parâmetro desconhecido θ de uma distribuição populacional.

Exemplos:

- $H : \mu = \mu_0$ (hipótese sobre a média)
- $H : \sigma^2 > \sigma_0^2$ (hipótese sobre a variância)
- $H : \alpha \neq \alpha_0$ (hipótese de diferença)

Classificação de Hipóteses

Seja $\theta \in \Theta$ um parâmetro desconhecido. As hipóteses podem ser classificadas como:

1. Hipótese Simples: Especifica completamente o valor de θ .

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad (1)$$

2. Hipótese Composta Unilateral: Especifica um intervalo semi-infinito.

$$H_0 : \theta \leq \theta_0 \quad \text{ou} \quad H_0 : \theta \geq \theta_0 \quad (2)$$

$$H_1 : \theta > \theta_0 \quad \text{ou} \quad H_1 : \theta < \theta_0 \quad (3)$$

3. Hipótese Composta Bilateral: Especifica valores em ambos os lados.

$$H_0 : \theta \neq \theta_0 \quad \text{ou} \quad H_0 : |\theta - \theta_0| > c \quad (4)$$

Nomenclatura:

- H_0 é chamada de **hipótese nula**
- H_1 (ou H_a) é chamada de **hipótese alternativa**

Definição 4.2.1: Teste de Hipóteses

Um **teste** Υ para uma hipótese H é uma regra ou processo para decidir se H deve ser rejeitada.

Formalmente, um teste particiona o espaço amostral \mathcal{X}^n em dois conjuntos disjuntos:

- **Região Crítica** $R_c \subset \mathcal{X}^n$: região de rejeição de H_0
- **Região de Aceitação** $R_c^c = \mathcal{X}^n \setminus R_c$: região de não-rejeição de H_0

tal que:

$$R_c \cup R_c^c = \mathcal{X}^n \quad \text{e} \quad R_c \cap R_c^c = \emptyset \quad (5)$$

Regra de decisão: Se $X \in R_c$, rejeita-se H_0 .

1.2 Tipos de Erro

Erros Tipo I e Tipo II

Em um teste de hipóteses, podem ocorrer dois tipos de erro:

Decisão	H_0 verdadeira	H_1 verdadeira
Não rejeitar H_0	Decisão correta	Erro Tipo II (β)
Rejeitar H_0	Erro Tipo I (α)	Decisão correta (Poder)

Erro Tipo I: Probabilidade de rejeitar H_0 quando ela é verdadeira.

$$\alpha = P_{\theta \in \Theta_0} \{\text{Rejeitar } H_0\} = P_{H_0} \{X \in R_c\} \quad (6)$$

Erro Tipo II: Probabilidade de não rejeitar H_0 quando ela é falsa (i.e., H_1 verdadeira).

$$\beta = P_{\theta \in \Theta_1} \{\text{Não rejeitar } H_0\} = P_{H_1} \{X \in R_c^c\} \quad (7)$$

Poder do Teste: Probabilidade de rejeitar H_0 quando ela é falsa.

$$\text{Poder} = 1 - \beta = P_{H_1} \{X \in R_c\} \quad (8)$$

Definição 4.2.2: Função Poder

A **função poder** de um teste Υ , denotada por $Q_\Upsilon(\theta)$, é a probabilidade de rejeitar H_0 quando o verdadeiro valor do parâmetro é θ .

$$Q_\Upsilon(\theta) = P_\theta[X \in R_c], \quad \forall \theta \in \Theta \quad (9)$$

Propriedades:

- Para $\theta \in \Theta_0$: $Q_\Upsilon(\theta)$ representa a probabilidade de Erro Tipo I
- Para $\theta \in \Theta_1$: $Q_\Upsilon(\theta) = 1 - \beta(\theta)$ representa o poder
- $Q_\Upsilon(\theta) \in [0, 1]$ para todo θ

Definição 4.2.3: Função Crítica

A **função crítica** ou **função do teste** $\psi_\Upsilon : \mathcal{X}^n \rightarrow [0, 1]$ representa a probabilidade com a qual H_0 é rejeitada quando $X = x$ é observada.

$$\psi_\Upsilon(x) = P[\text{Rejeitar } H_0 \mid X = x] \quad (10)$$

Relação com a função poder:

$$Q_\Upsilon(\theta) = E_\theta[\psi_\Upsilon(X)] = \int_{\mathcal{X}^n} \psi_\Upsilon(x) f(x; \theta) dx \quad (11)$$

Definição 4.2.4: Tipos de Teste

Um teste Υ pode ser classificado como:

a) Teste Não Aleatorizado: A decisão é determinística. A função crítica é:

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in R_c \\ 0, & \text{se } x \in R_c^c \end{cases} \quad (12)$$

b) Teste Aleatorizado: A decisão pode envolver aleatorização. A função crítica é:

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in R_c \\ \delta, & \text{se } x \in R_\delta \quad (0 < \delta < 1) \\ 0, & \text{se } x \in (R_c \cup R_\delta)^c \end{cases} \quad (13)$$

onde δ é a probabilidade de rejeitar H_0 quando $x \in R_\delta$.

Interpretação prática: Quando $x \in R_\delta$, lança-se uma moeda com $P(\text{cara}) = \delta$ e rejeita-se H_0 se der cara.

Definição 4.2.5: Tamanho e Nível de um Teste

Seja $\alpha \in (0, 1)$ fixado e Υ um teste com função poder $Q_{\Upsilon}(\theta)$.

Tamanho do Teste:

$$\text{Tamanho} = \sup_{\theta \in \Theta_0} Q_{\Upsilon}(\theta) = \sup_{\theta \in \Theta_0} P_{\theta}[X \in R_c] \quad (14)$$

O teste tem **tamanho** α se:

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} Q_{\Upsilon}(\theta) = \alpha \quad (15)$$

Nível do Teste: O teste tem **nível** α se:

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} Q_{\Upsilon}(\theta) \leq \alpha \quad (16)$$

Interpretação:

- Tamanho α : a máxima probabilidade de Erro Tipo I é exatamente α
- Nível α : a máxima probabilidade de Erro Tipo I é no máximo α
- Todo teste de tamanho α é de nível α , mas a recíproca não é verdadeira

Definição 4.2.6: Teste Uniformemente Mais Poderoso (UMP)

Seja \mathcal{C} a classe de todos os testes de nível α para H_0 vs H_1 .

Um teste $\Upsilon \in \mathcal{C}$ com função poder $Q_{\Upsilon}(\theta)$ é chamado de **Teste Uniformemente Mais Poderoso (UMP) de nível α** se e somente se:

$$Q_{\Upsilon}(\theta) \geq Q_{\Upsilon^*}(\theta), \quad \forall \theta \in \Theta_1, \quad \forall \Upsilon^* \in \mathcal{C} \quad (17)$$

Caso Especial: Se H_1 é simples ($H_1 : \theta = \theta_1$), o melhor teste é chamado de **Teste Mais Poderoso (MP)**.

Interpretação: Um teste UMP tem o maior poder possível entre todos os testes de mesmo nível, para qualquer valor de θ em Θ_1 .

2 LEMA DE NEYMAN-PEARSON (LNP)

MUITO IMPORTANTE PARA A PROVA

ATENÇÃO: Este é um dos teoremas mais importantes do capítulo e tem ALTA PROBABILIDADE de ser cobrado na prova com demonstração completa. Estude cada detalhe da demonstração apresentada a seguir.

O Lema de Neyman-Pearson (LNP) fornece o teste MAIS PODEROSO para testar hipóteses simples vs simples. É a base fundamental da teoria de testes ótimos.

2.1 Contexto e Motivação

Queremos testar duas hipóteses **simples**:

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \theta = \theta_1 \quad (18)$$

onde $\theta_0, \theta_1 \in \Theta$ são valores conhecidos e $\theta_0 \neq \theta_1$.

Questão fundamental: Dado um nível de significância α fixado, qual é o teste que maximiza o poder (i.e., minimiza β)?

Resposta: O Lema de Neyman-Pearson!

2.2 Enunciado do Teorema

Teorema 4.3.1: Lema de Neyman-Pearson (LNP)

Sejam X_1, \dots, X_n uma amostra aleatória de X com fdp (ou fmp) $f(x; \theta)$ para $x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}$ e $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$.

Considere testar:

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \theta = \theta_1 \quad (4.3.1)$$

Seja $L(\theta; x) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta)$ a função de verossimilhança.

Considere um teste Υ com região crítica e região de não-rejeição dadas por:

$$R_c = \{x \in \mathcal{X}^n : L(\theta_1; x) > k \cdot L(\theta_0; x)\} \quad (19)$$

$$R_c^c = \{x \in \mathcal{X}^n : L(\theta_1; x) < k \cdot L(\theta_0; x)\} \quad (20)$$

ou, equivalentemente, usando a função crítica:

$$\psi_{\Upsilon}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } L(\theta_1; x) > k \cdot L(\theta_0; x) \\ \gamma, & \text{se } L(\theta_1; x) = k \cdot L(\theta_0; x) \\ 0, & \text{se } L(\theta_1; x) < k \cdot L(\theta_0; x) \end{cases} \quad (21)$$

onde $k \geq 0$ e $0 \leq \gamma \leq 1$ são escolhidos tal que:

$$E_{\theta_0}[\psi_{\Upsilon}(X)] = \alpha \quad (4.3.2)$$

Conclusão: Qualquer teste Υ satisfazendo (4.3.1) e (4.3.2) é um **teste Mais Poderoso (MP) de nível α** .

Em outras palavras: Entre todos os testes de nível α , o teste baseado na razão de verossimilhanças $\frac{L(\theta_1; x)}{L(\theta_0; x)}$ tem o maior poder.

2.3 Demonstração Completa do LNP

MUITO IMPORTANTE PARA A PROVA

ESTUDE COM MUITA ATENÇÃO!

Esta demonstração tem ALTA probabilidade de cair na prova. Você deve ser capaz de:

1. Reproduzir todos os passos
2. Justificar cada desigualdade
3. Explicar a lógica de cada etapa
4. Interpretar o significado matemático

Demonstração Detalhada

Demonstração do Lema de Neyman-Pearson

Apresentaremos a prova para o caso contínuo. O caso discreto é análogo, substituindo integrais por somas.

Objetivo: Mostrar que o teste Υ baseado na razão de verossimilhanças é MP, ou seja, tem poder máximo entre todos os testes de nível α .

Configuração:

- Υ é o teste proposto (baseado em $\frac{L_1}{L_0}$)
- Υ^* é qualquer outro teste de nível α
- $\psi_\Upsilon(x)$ é a função crítica de Υ
- $\psi_{\Upsilon^*}(x)$ é a função crítica de Υ^*
- $Q_\Upsilon(\theta)$ e $Q_{\Upsilon^*}(\theta)$ são as respectivas funções poder

O que queremos provar:

$$Q_\Upsilon(\theta_1) \geq Q_{\Upsilon^*}(\theta_1) \quad (22)$$

Isso significa que Υ tem poder maior (ou igual) que qualquer outro teste Υ^* de nível α .

Passo 1: Estabelecer uma Desigualdade Fundamental

Afirmção: Para todo $x \in \mathcal{X}^n$, vale:

$$[\psi_\Upsilon(x) - \psi_{\Upsilon^*}(x)] \cdot [L(\theta_1; x) - k \cdot L(\theta_0; x)] \geq 0 \quad (4.3.3)$$

Prova da desigualdade (4.3.3):

Vamos analisar os três casos possíveis para $\psi_\Upsilon(x)$:

Caso [i]: $\psi_{\Upsilon}(x) = 1$ Pela definição do teste Υ (equação da região crítica):

$$\psi_{\Upsilon}(x) = 1 \Rightarrow L(\theta_1; x) > k \cdot L(\theta_0; x) \quad (23)$$

Portanto:

$$L(\theta_1; x) - k \cdot L(\theta_0; x) > 0 \quad (\text{primeiro fator positivo}) \quad (24)$$

Além disso, como $\psi_{\Upsilon^*}(x) \in [0, 1]$ (por definição de função crítica):

$$\psi_{\Upsilon}(x) - \psi_{\Upsilon^*}(x) = 1 - \psi_{\Upsilon^*}(x) \geq 0 \quad (\text{segundo fator não-negativo}) \quad (25)$$

Conclusão: produto de não-negativo por positivo ≥ 0 . Logo (4.3.3) vale. ✓

Caso [ii]: $\psi_{\Upsilon}(x) = 0$ Pela definição do teste Υ :

$$\psi_{\Upsilon}(x) = 0 \Rightarrow L(\theta_1; x) < k \cdot L(\theta_0; x) \quad (26)$$

Portanto:

$$L(\theta_1; x) - k \cdot L(\theta_0; x) < 0 \quad (\text{primeiro fator negativo}) \quad (27)$$

Além disso:

$$\psi_{\Upsilon}(x) - \psi_{\Upsilon^*}(x) = 0 - \psi_{\Upsilon^*}(x) \leq 0 \quad (\text{segundo fator não-positivo}) \quad (28)$$

Conclusão: produto de não-positivo por negativo ≥ 0 . Logo (4.3.3) vale. ✓

Caso [iii]: $0 < \psi_{\Upsilon}(x) < 1$ (**teste aleatorizado**) Pela definição do teste Υ :

$$0 < \psi_{\Upsilon}(x) < 1 \Rightarrow L(\theta_1; x) = k \cdot L(\theta_0; x) \quad (29)$$

Portanto:

$$L(\theta_1; x) - k \cdot L(\theta_0; x) = 0 \quad (\text{primeiro fator zero}) \quad (30)$$

Conclusão: produto com zero é zero ≥ 0 . Logo (4.3.3) vale. ✓

Conclusão do Passo 1: A desigualdade (4.3.3) vale para todo $x \in \mathcal{X}^n$, independentemente do valor de $\psi_{\Upsilon}(x)$.

Passo 2: Integrar a Desigualdade

Como (4.3.3) vale para todo x , podemos integrar ambos os lados sobre todo o espaço amostral:

$$\int_{\mathcal{X}^n} [\psi_{\Upsilon}(x) - \psi_{\Upsilon^*}(x)] [L(\theta_1; x) - k \cdot L(\theta_0; x)] dx \geq 0 \quad (31)$$

Expandindo o produto dentro da integral:

$$\int_{\mathcal{X}^n} [\psi_{\Upsilon}(x) - \psi_{\Upsilon^*}(x)] [L(\theta_1; x) - k \cdot L(\theta_0; x)] dx \quad (32)$$

$$= \int_{\mathcal{X}^n} \psi_{\Upsilon}(x) \cdot L(\theta_1; x) dx - \int_{\mathcal{X}^n} \psi_{\Upsilon}(x) \cdot k \cdot L(\theta_0; x) dx \quad (33)$$

$$- \int_{\mathcal{X}^n} \psi_{\Upsilon^*}(x) \cdot L(\theta_1; x) dx + \int_{\mathcal{X}^n} \psi_{\Upsilon^*}(x) \cdot k \cdot L(\theta_0; x) dx \quad (34)$$

Reorganizando:

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathcal{X}^n} \psi_{\Upsilon}(x) \cdot L(\theta_1; x) dx - \int_{\mathcal{X}^n} \psi_{\Upsilon^*}(x) \cdot L(\theta_1; x) dx \\
&\quad - k \left[\int_{\mathcal{X}^n} \psi_{\Upsilon}(x) \cdot L(\theta_0; x) dx - \int_{\mathcal{X}^n} \psi_{\Upsilon^*}(x) \cdot L(\theta_0; x) dx \right]
\end{aligned} \tag{35}$$

Passo 3: Reconhecer as Funções Poder

Observação crucial: A integral $\int \psi(x) \cdot L(\theta; x) dx$ é exatamente a função poder! Lembre que $L(\theta; x)$ é a densidade conjunta sob θ . Portanto:

$$\int_{\mathcal{X}^n} \psi(x) \cdot L(\theta; x) dx = E_{\theta}[\psi(X)] \tag{36}$$

$$= Q(\theta) \quad (\text{função poder}) \tag{37}$$

Aplicando essa observação:

$$\begin{aligned}
\int \psi_{\Upsilon}(x) L(\theta_1; x) dx &= E_{\theta_1}[\psi_{\Upsilon}(X)] = Q_{\Upsilon}(\theta_1) \\
\int \psi_{\Upsilon^*}(x) L(\theta_1; x) dx &= E_{\theta_1}[\psi_{\Upsilon^*}(X)] = Q_{\Upsilon^*}(\theta_1) \\
\int \psi_{\Upsilon}(x) L(\theta_0; x) dx &= E_{\theta_0}[\psi_{\Upsilon}(X)] = Q_{\Upsilon}(\theta_0) \\
\int \psi_{\Upsilon^*}(x) L(\theta_0; x) dx &= E_{\theta_0}[\psi_{\Upsilon^*}(X)] = Q_{\Upsilon^*}(\theta_0)
\end{aligned} \tag{38}$$

Passo 4: Reescrever em Termos das Funções Poder

Substituindo na desigualdade do Passo 2:

$$\begin{aligned}
0 &\leq Q_{\Upsilon}(\theta_1) - Q_{\Upsilon^*}(\theta_1) \\
&\quad - k [Q_{\Upsilon}(\theta_0) - Q_{\Upsilon^*}(\theta_0)]
\end{aligned} \tag{4.3.4}$$

Rearranjando:

$$Q_{\Upsilon}(\theta_1) - Q_{\Upsilon^*}(\theta_1) \geq k [Q_{\Upsilon}(\theta_0) - Q_{\Upsilon^*}(\theta_0)] \tag{4.3.5}$$

Passo 5: Usar as Condições de Tamanho/Nível

Pela construção do teste Υ (condição 4.3.2):

$$Q_{\Upsilon}(\theta_0) = E_{\theta_0}[\psi_{\Upsilon}(X)] = \alpha \tag{39}$$

Como Υ^* é um teste de **nível** α :

$$Q_{\Upsilon^*}(\theta_0) \leq \alpha \tag{40}$$

Portanto:

$$Q_{\Upsilon}(\theta_0) - Q_{\Upsilon^*}(\theta_0) = \alpha - Q_{\Upsilon^*}(\theta_0) \geq 0 \tag{41}$$

Passo 6: Concluir a Demonstração

Da desigualdade (4.3.5):

$$Q_{\Upsilon}(\theta_1) - Q_{\Upsilon^*}(\theta_1) \geq k \underbrace{[Q_{\Upsilon}(\theta_0) - Q_{\Upsilon^*}(\theta_0)]}_{\geq 0} \quad (42)$$

Como $k \geq 0$ e o termo entre colchetes é ≥ 0 , temos:

$$k [Q_{\Upsilon}(\theta_0) - Q_{\Upsilon^*}(\theta_0)] \geq 0 \quad (43)$$

Logo:

$$Q_{\Upsilon}(\theta_1) - Q_{\Upsilon^*}(\theta_1) \geq 0 \quad (44)$$

Conclusão:

$$\boxed{Q_{\Upsilon}(\theta_1) \geq Q_{\Upsilon^*}(\theta_1)} \quad (45)$$

Isso prova que o teste Υ tem poder maior ou igual ao de qualquer outro teste Υ^* de nível α .

Como Υ^* foi escolhido arbitrariamente, isso vale para **todos** os testes de nível α .

Portanto, Υ é o **Teste Mais Poderoso (MP) de nível α** . \square

2.4 Análise Detalhada da Demonstração

Observações e Comentários

Pontos-Chave da Demonstração

1. A Desigualdade Fundamental (4.3.3) A demonstração começa provando que:

$$[\psi_{\mathcal{R}}(x) - \psi_{\mathcal{R}^*}(x)] \cdot [L(\theta_1; x) - k \cdot L(\theta_0; x)] \geq 0 \quad (46)$$

Por que isso é verdade?

A chave está em observar que os dois fatores do produto têm sinais correlacionados:

- Quando $\psi_{\mathcal{R}} = 1$: temos $L_1 > kL_0$, então ambos os fatores são $\geq 0 \Rightarrow$ produto ≥ 0
- Quando $\psi_{\mathcal{R}} = 0$: temos $L_1 < kL_0$, então ambos os fatores são $\leq 0 \Rightarrow$ produto ≥ 0
- Quando $0 < \psi_{\mathcal{R}} < 1$: temos $L_1 = kL_0$, então um fator é zero \Rightarrow produto $= 0$

2. A Técnica da Integração Integramos a desigualdade (4.3.3) sobre todo o espaço amostral. Como a desigualdade vale para cada x , ela também vale para a integral.

Truque importante: A integral de $\psi(x) \cdot L(\theta; x)$ é precisamente a função poder!

3. O Papel de k A constante k é determinada pela condição de tamanho:

$$E_{\theta_0}[\psi_{\mathcal{R}}(X)] = \alpha \quad (47)$$

Isso garante que o teste tem exatamente nível α .

4. A Comparação Final A desigualdade (4.3.5) compara os poderes dos dois testes:

$$Q_{\mathcal{R}}(\theta_1) - Q_{\mathcal{R}^*}(\theta_1) \geq k \underbrace{[Q_{\mathcal{R}}(\theta_0) - Q_{\mathcal{R}^*}(\theta_0)]}_{\geq 0} \quad (48)$$

O termo $[Q_{\mathcal{R}}(\theta_0) - Q_{\mathcal{R}^*}(\theta_0)]$ é a diferença entre os tamanhos:

- $Q_{\mathcal{R}}(\theta_0) = \alpha$ (tamanho exato)
- $Q_{\mathcal{R}^*}(\theta_0) \leq \alpha$ (no máximo α)

Portanto $Q_{\mathcal{R}}(\theta_0) - Q_{\mathcal{R}^*}(\theta_0) \geq 0$, e multiplicado por $k \geq 0$ permanece ≥ 0 .

MUITO IMPORTANTE PARA A PROVA

Resumo da Lógica da Demonstração (MEMORIZE)

A demonstração do LNP segue esta estrutura lógica:

1. **Estabelecer desigualdade fundamental:** Mostrar que

$$[\psi - \psi^*] \cdot [L_1 - kL_0] \geq 0$$

por análise de casos ($\psi = 0, 1$ ou entre 0 e 1)

2. **Integrar:** Como vale para todo x , integrar sobre \mathcal{X}^n
3. **Reconhecer funções poder:** $\int \psi L(\theta) = Q(\theta)$
4. **Simplificar:** Obter $Q(\theta_1) - Q^*(\theta_1) \geq k[Q(\theta_0) - Q^*(\theta_0)]$
5. **Usar condições de nível:** $Q(\theta_0) = \alpha$ e $Q^*(\theta_0) \leq \alpha$
6. **Concluir:** $Q(\theta_1) \geq Q^*(\theta_1)$ (teste Υ é MP)

Mensagem central: O teste baseado na razão de verossimilhanças $\frac{L_1}{L_0}$ é ótimo porque:

- Rejeita H_0 quando L_1 é muito maior que L_0 (evidência favorece H_1)
- Controla o erro Tipo I em exatamente α
- Maximiza o poder (minimiza o erro Tipo II)

2.5 Interpretação Geométrica do LNP

Observações e Comentários

Visualização da Razão de Verossimilhanças

A região crítica do LNP é definida por:

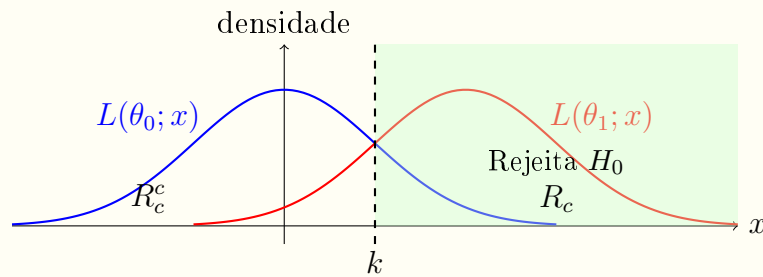
$$R_c = \left\{ x : \frac{L(\theta_1; x)}{L(\theta_0; x)} > k \right\} \quad (49)$$

Interpretação:

- Se $\frac{L_1}{L_0}$ é grande: os dados favorecem fortemente H_1 sobre $H_0 \Rightarrow$ rejeitamos H_0
- Se $\frac{L_1}{L_0}$ é pequeno: os dados favorecem H_0 sobre $H_1 \Rightarrow$ não rejeitamos H_0
- O limiar k é ajustado para que o teste tenha tamanho α

Exemplo Visual

Considere $X \sim N(\theta, 1)$ com $n = 1$, $\theta_0 = 0$, $\theta_1 = 2$.



Para valores de x na região verde (R_c), a verossimilhança sob H_1 domina significativamente a verossimilhança sob H_0 .

2.6 Observações Importantes sobre o LNP

Observação 1: Caso de Igualdade na Razão

No enunciado do LNP, nada é dito sobre o conjunto:

$$R^* = \{x \in \mathcal{X}^n : L(\theta_1; x) = k \cdot L(\theta_0; x)\} \quad (50)$$

Caso Contínuo: Quando X é contínua, $P(X \in R^*) = 0$ e esse detalhe não tem importância prática.

Caso Discreto: Quando X é discreta, deve-se aleatorizar o evento $X \in R^*$ (usando $\psi(x) = \gamma$ para $0 < \gamma < 1$) para que o teste tenha tamanho exato $\alpha \in (0, 1)$.

Exemplo: Para distribuições Bernoulli e Poisson, a aleatorização é necessária.

Observação 2: Unicidade do Teste MP

O teste MP proposto pelo LNP é **essencialmente único**.

Precisamente: Se dois testes Υ_1 e Υ_2 são ambos MP de nível α , então:

$$Q_{\Upsilon_1}(\theta_1) = Q_{\Upsilon_2}(\theta_1) \quad (51)$$

Ou seja, têm o mesmo poder. As regiões críticas podem diferir em conjuntos de probabilidade zero.

Observação 3: Relação com Estatísticas Suficientes

Seja $T(X)$ uma estatística suficiente para θ . Pelo Teorema da Fatoração:

$$L(\theta; x) = g(T(x); \theta) \cdot h(x) \quad (52)$$

onde $h(x)$ não depende de θ .

Então a razão de verossimilhanças é:

$$\frac{L(\theta_1; x)}{L(\theta_0; x)} = \frac{g(T(x); \theta_1) \cdot h(x)}{g(T(x); \theta_0) \cdot h(x)} = \frac{g(T(x); \theta_1)}{g(T(x); \theta_0)} \quad (53)$$

Conclusão: O teste MP depende apenas de $T(x)$, confirmando o princípio da suficiência: estatísticas suficientes contêm toda a informação relevante para testes.

3 Teste para Hipóteses Compostas Unilaterais

3.1 Razão de Verossimilhança Monótona (RVM)

Definição 4.4.2.1: Razão de Verossimilhança Monótona

Sejam X_1, \dots, X_n uma amostra de X com fdp (ou fmp) $f(x; \theta)$ para $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$ e $x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}$.

A família $\{f(x; \theta) : \theta \in \Theta\}$ possui **Razão de Verossimilhança Monótona (RVM)** em uma estatística $T(X) \in \mathbb{R}$ se:

Para todo $\theta^*, \theta \in \Theta$ com $\theta^* > \theta$ e todo $x \in \mathcal{X}^n$:

$$\frac{L(\theta^*; x)}{L(\theta; x)} \text{ é função não-decrescente de } T(x) \quad (54)$$

Em outras palavras: Se $T(x_1) < T(x_2)$, então:

$$\frac{L(\theta^*; x_1)}{L(\theta; x_1)} \leq \frac{L(\theta^*; x_2)}{L(\theta; x_2)} \quad (55)$$

Observações e Comentários

Intuição da RVM

A propriedade RVM significa que valores maiores de $T(x)$ tornam a razão $\frac{L(\theta^*)}{L(\theta)}$ maior, favorecendo mais θ^* sobre θ .

Importância: Quando uma família tem RVM, podemos construir testes UMP simples baseados apenas em $T(x)$.

3.2 RVM na Família Exponencial

Propriedade: Família Exponencial tem RVM

Seja X com densidade (ou fmp) na forma:

$$f(x; \theta) = a(\theta) \cdot c(x) \cdot e^{t(x) \cdot b(\theta)} \quad (56)$$

para $x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}$ e $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$.

Resultado: Se $b(\theta)$ é função não-decrescente de θ , então a família $\{f(x; \theta) : \theta \in \Theta\}$ possui RVM em $T(x) = \sum_{i=1}^n t(x_i)$.

Demonstração:

Para $\theta^* > \theta$:

$$\frac{L(\theta^*; x)}{L(\theta; x)} = \frac{\prod_{i=1}^n a(\theta^*) c(x_i) e^{t(x_i) b(\theta^*)}}{\prod_{i=1}^n a(\theta) c(x_i) e^{t(x_i) b(\theta)}} \quad (57)$$

$$= \frac{[a(\theta^*)]^n}{[a(\theta)]^n} \cdot \exp \left\{ \sum_{i=1}^n t(x_i) [b(\theta^*) - b(\theta)] \right\} \quad (58)$$

$$= \frac{[a(\theta^*)]^n}{[a(\theta)]^n} \cdot \exp \{ T(x) [b(\theta^*) - b(\theta)] \} \quad (59)$$

Como $\theta^* > \theta$ e $b(\cdot)$ é não-decrescente: $b(\theta^*) \geq b(\theta)$, logo $b(\theta^*) - b(\theta) \geq 0$.
Portanto, $\frac{L(\theta^*)}{L(\theta)}$ é função não-decrescente de $T(x)$. \square

Observações e Comentários

Distribuições com RVM

As seguintes distribuições importantes possuem RVM:

1. **Normal** $N(\mu, \sigma^2)$ com σ^2 conhecido: RVM em $\sum X_i$ (parâmetro μ)
2. **Normal** $N(\mu, \sigma^2)$ com μ conhecido: RVM em $\sum X_i^2$ (parâmetro σ^2)
3. **Bernoulli**(p): RVM em $\sum X_i$
4. **Poisson**(λ): RVM em $\sum X_i$
5. **Exponencial**(θ): RVM em $\sum X_i$
6. **Gamma**(α, β): RVM em $\sum X_i$ ou $\sum \log X_i$ (depende do parâmetro)

Contraexemplo: Uniforme($0, \theta$) NÃO possui RVM, mas ainda assim existe teste UMP (baseado em $\max X_i$).

4 Teorema de Karlin-Rubin

Teorema 4.4.2.1: Teorema de Karlin-Rubin

Assuma que se deseja testar:

$$H_0 : \theta \leq \theta_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \theta > \theta_0 \quad (60)$$

Sejam:

- $T = T(X) \in \mathbb{R}$ uma estatística suficiente para $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$
- $g(t; \theta)$ a densidade (ou fmp) induzida de T
- $\{g(t; \theta) : \theta \in \Theta\}$ possui RVM

Então o teste Υ com função crítica:

$$\psi_{\Upsilon}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } T(x) > c \\ \gamma, & \text{se } T(x) = c \\ 0, & \text{se } T(x) < c \end{cases} \quad (61)$$

onde c e $0 \leq \gamma \leq 1$ são escolhidos tal que:

$$E_{\theta_0}[\psi_{\Upsilon}(X)] = \alpha \quad (62)$$

é um **teste UMP de nível α** .

Em outras palavras: Quando há RVM, o teste UMP rejeita H_0 para valores grandes da estatística suficiente $T(x)$.

Observações e Comentários

Comparação: LNP vs Karlin-Rubin

Aspecto	LNP	Karlin-Rubin
Tipo de hipóteses	<p>Simple vs Simple</p> <p>$H_0 : \theta = \theta_0$ $H_1 : \theta = \theta_1$</p>	<p>Composta vs Composta</p> <p>$H_0 : \theta \leq \theta_0$ $H_1 : \theta > \theta_0$</p>
Requisito	Nenhum (sempre aplicável)	Requer RVM
Resultado	Teste MP	Teste UMP
Estatística	Razão $\frac{L_1}{L_0}$	Estatística suficiente $T(x)$
Aplicabilidade	Mais limitada	Mais ampla (hipóteses compostas)

Relação: O TKR generaliza o LNP para hipóteses compostas unilaterais.

5 Todas as Definições Importantes

Definição: p-valor

O **p-valor** (ou valor-p) é o menor nível de significância α para o qual os dados observados levariam à rejeição de H_0 .

Equivalentemente, para uma estatística de teste T com valor observado t_{obs} :

$$\text{p-valor} = P_{H_0}[T \geq t_{\text{obs}}] \quad (\text{teste unilateral à direita}) \quad (63)$$

Regra de decisão: Rejeita-se H_0 ao nível α se e somente se:

$$\text{p-valor} < \alpha \quad (64)$$

Interpretação:

- p-valor pequeno (< 0.01): evidência muito forte contra H_0
- p-valor moderado (0.01 a 0.05): evidência moderada contra H_0
- p-valor grande (> 0.10): evidência fraca ou nenhuma contra H_0

Definição: Teste UMPNV

Um teste é chamado de **Uniformemente Mais Poderoso Não-Viesado (UMPNV)** se:

1. É UMP entre todos os testes de nível α
2. É não-viesado: $Q(\theta) \geq \alpha$ para todo $\theta \in \Theta_1$

Aplicação: Testes UMPNV são úteis para hipóteses bilaterais onde não existe teste UMP.

6 Resumo de Todos os Teoremas Principais

6.1 Quadro Comparativo dos Teoremas

Tabela 1: Principais Teoremas do Capítulo 4

Teorema	Hipóteses	Resultado
LNP	Simples vs Simples: $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta = \theta_1$	Teste MP rejeita quando $\frac{L(\theta_1; x)}{L(\theta_0; x)} > k$
Karlin-Rubin	Composta unilateral: $H_0 : \theta \leq \theta_0$ vs $H_1 : \theta > \theta_0$ (com RVM)	Teste UMP rejeita quando $T(x) > c$ onde T é suficiente
Teste UMPNV	Bilateral: $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta \neq \theta_0$	Para famílias com RVM, teste baseado em $ T - c $ pode ser UMPNV

7 Guia de Estudo para a Prova

7.1 Checklist de Conteúdos para Dominar

Nível 1: Definições Fundamentais (ESSENCIAL)

- ☐ Definição de hipótese estatística
- ☐ Classificação: simples, composta unilateral, bilateral
- ☐ Região crítica e região de aceitação
- ☐ Erro Tipo I e Erro Tipo II
- ☐ Função poder $Q(\theta)$
- ☐ Função crítica $\psi(x)$
- ☐ Tamanho e nível de um teste
- ☐ Teste aleatorizado vs não-aleatorizado

Nível 2: Teoremas Principais (MUITO IMPORTANTE)

- ☐ **Lema de Neyman-Pearson** - enunciado
- ☐ **Lema de Neyman-Pearson** - demonstração completa
- ☐ Teorema de Karlin-Rubin - enunciado
- ☐ Definição de RVM
- ☐ RVM na família exponencial

Nível 3: Aplicações (IMPORTANTE)

- ☐ Teste Z para média (Normal com σ^2 conhecido)
- ☐ Teste para Exponencial (usando χ^2)
- ☐ Teste para Bernoulli (com aleatorização)
- ☐ Teste para Poisson (com aleatorização)
- ☐ Relação entre suficiência e testes ótimos

7.2 Estratégias para Demonstrações na Prova

MUITO IMPORTANTE PARA A PROVA

Se pedirem para demonstrar o LNP:

Estrutura da resposta (em ordem):

1. **Setup inicial** (2-3 linhas):

- Considere Υ o teste proposto e Υ^* qualquer outro teste de nível α
 - Objetivo: mostrar $Q_{\Upsilon}(\theta_1) \geq Q_{\Upsilon^*}(\theta_1)$
2. **Desigualdade fundamental** (5-10 linhas):
- Mostrar que $[\psi - \psi^*][L_1 - kL_0] \geq 0$
 - Análise de casos: $\psi = 1$, $\psi = 0$, $0 < \psi < 1$
3. **Integração** (3-5 linhas):
- Integrar a desigualdade sobre \mathcal{X}^n
 - Expandir o produto
4. **Reconhecer funções poder** (2-3 linhas):
- $\int \psi L(\theta) = Q(\theta)$
 - Reescrever em termos de Q_{Υ} e Q_{Υ^*}
5. **Usar condições de nível** (2-3 linhas):
- $Q_{\Upsilon}(\theta_0) = \alpha$
 - $Q_{\Upsilon^*}(\theta_0) \leq \alpha$
6. **Conclusão** (1-2 linhas):
- $Q_{\Upsilon}(\theta_1) \geq Q_{\Upsilon^*}(\theta_1) \quad \square$

Tempo estimado: 15-20 minutos para escrever completamente.

Pontos que não podem faltar:

- Análise dos três casos para ψ
- Justificativa de por que cada caso satisfaz a desigualdade
- Reconhecimento de que $\int \psi L = Q$
- Uso explícito de $Q(\theta_0) = \alpha$ e $Q^*(\theta_0) \leq \alpha$

8 Formulário de Referência Rápida

8.1 Estatísticas de Teste Principais

Tabela 2: Estatísticas Clássicas e Suas Distribuições

Situação	Estatística	Distribuição	Nome
$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 conhecido	$\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	$N(0, 1)$	Teste Z
$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 desconhecido	$\frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$	t_{n-1}	Teste t
$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, teste para σ^2	$\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$	χ_{n-1}^2	Teste χ^2
$X_i \sim \text{Exp}(\theta)$	$\frac{2}{\theta_0} \sum X_i$	χ_{2n}^2	Teste χ^2
$X_i \sim \text{Bernoulli}(p)$	$\sum X_i$	$\text{Binomial}(n, p_0)$	Teste Binomial
$X_i \sim \text{Poisson}(\lambda)$	$\sum X_i$	$\text{Poisson}(n\lambda_0)$	Teste Poisson

8.2 Fórmulas Importantes

Fórmulas para Memorizar

Razão de Verossimilhanças:

$$\Lambda(x) = \frac{L(\theta_1; x)}{L(\theta_0; x)} \quad (65)$$

Função Poder:

$$Q(\theta) = P_\theta[\text{Rejeitar } H_0] = E_\theta[\psi(X)] \quad (66)$$

Relação Poder-Erro Tipo II:

$$\text{Poder}(\theta) = 1 - \beta(\theta), \quad \theta \in \Theta_1 \quad (67)$$

Quantis Normais Comuns:

- $z_{0.10} = 1.282$ (90% de confiança)
- $z_{0.05} = 1.645$ (95% de confiança)
- $z_{0.025} = 1.960$ (97.5% de confiança)
- $z_{0.01} = 2.326$ (99% de confiança)

9 Exemplos Trabalhados da Teoria

9.1 Exemplo 1: Verificando RVM para Normal

Exemplo: RVM na Normal

Problema: Mostrar que $f(x; \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$ (com σ^2 fixo) tem RVM em $T(x) = \sum x_i$.

Solução:

Para $\mu^* > \mu$, calcule a razão:

$$\frac{L(\mu^*; x)}{L(\mu; x)} = \exp \left\{ \frac{1}{2\sigma^2} \left[\sum (x_i - \mu)^2 - \sum (x_i - \mu^*)^2 \right] \right\} \quad (68)$$

$$= \exp \left\{ \frac{1}{2\sigma^2} \left[2(\mu^* - \mu) \sum x_i - n(\mu^*)^2 + n\mu^2 \right] \right\} \quad (69)$$

$$= \exp \left\{ \frac{\mu^* - \mu}{\sigma^2} T(x) + \frac{n(\mu^2 - (\mu^*)^2)}{2\sigma^2} \right\} \quad (70)$$

Como $\mu^* > \mu$, o coeficiente $\frac{\mu^* - \mu}{\sigma^2} > 0$.

Logo, $\frac{L(\mu^*)}{L(\mu)}$ é função crescente de $T(x) = \sum x_i$. ✓

Conclusão: A família Normal tem RVM em $\sum X_i$ para o parâmetro μ .

9.2 Exemplo 2: Aplicando LNP para Normal

Exemplo: Teste MP via LNP

Problema: $X_1, \dots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ com σ^2 conhecido. Teste MP para $H_0 : \mu = \mu_0$ vs $H_1 : \mu = \mu_1$ ($\mu_1 > \mu_0$) ao nível α .

Solução via LNP:

Passo 1: Razão de verossimilhanças:

$$\frac{L_1}{L_0} = \exp \left\{ \frac{(\mu_1 - \mu_0)}{\sigma^2} \sum x_i - \frac{n(\mu_1^2 - \mu_0^2)}{2\sigma^2} \right\} \quad (71)$$

Passo 2: Região crítica ($\frac{L_1}{L_0} > k$):

$$\sum x_i > \text{constante} \Leftrightarrow \bar{x} > c \Leftrightarrow \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > z_\alpha \quad (72)$$

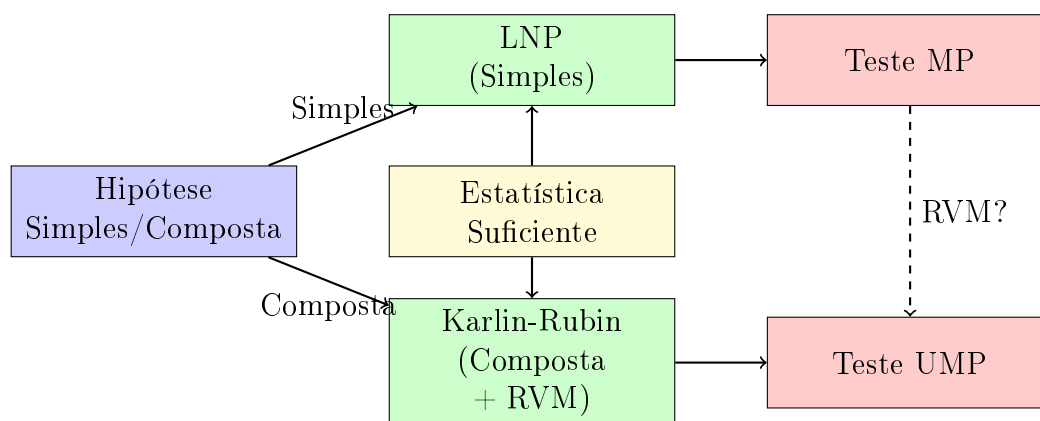
Passo 3: Teste final:

$$\text{Rejeita } H_0 \text{ se } Z = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{\sigma} > z_\alpha \quad (73)$$

onde z_α satisfaz $P(Z > z_\alpha) = \alpha$ para $Z \sim N(0, 1)$.

Resultado: Este é o teste Z clássico, e o LNP prova que ele é MP!

10 Conexões Entre os Conceitos



Fluxo lógico:

1. Identifique se as hipóteses são simples ou compostas
2. Determine a estatística suficiente
3. Se simples: use LNP \rightarrow obtém teste MP
4. Se composta unilateral: verifique RVM
5. Se tem RVM: use Karlin-Rubin \rightarrow obtém teste UMP
6. Se bilateral: considere teste UMPNV ou razão de verossimilhanças

11 Perguntas Frequentes para a Prova

11.1 Dúvidas Comuns sobre o LNP

FAQ 1: Por que a desigualdade (4.3.3) vale?

Pergunta: Como garantimos que $[\psi - \psi^*][L_1 - kL_0] \geq 0$?

Resposta: Pela análise de casos. O ponto crucial é que:

- $\psi = 1 \Rightarrow L_1 - kL_0 > 0$ (por construção)
- $\psi = 0 \Rightarrow L_1 - kL_0 < 0$ (por construção)
- $\psi \in (0, 1) \Rightarrow L_1 - kL_0 = 0$ (por construção)

Em cada caso, os sinais são compatíveis, resultando em produto ≥ 0 .

FAQ 2: Por que $Q(\theta_0) - Q^*(\theta_0) \geq 0$?

Pergunta: Como sabemos que $Q_{\Upsilon}(\theta_0) - Q_{\Upsilon^*}(\theta_0) \geq 0$?

Resposta: Por construção:

- $Q_{\Upsilon}(\theta_0) = \alpha$ (teste tem tamanho exato α)
- $Q_{\Upsilon^*}(\theta_0) \leq \alpha$ (Υ^* é de nível α)

Logo: $Q_{\Upsilon}(\theta_0) - Q_{\Upsilon^*}(\theta_0) = \alpha - Q_{\Upsilon^*}(\theta_0) \geq 0$.

FAQ 3: O que acontece se $k < 0$?

Pergunta: O LNP permite $k < 0$?

Resposta: NÃO. No enunciado, especificamos $k \geq 0$.

Justificativa: A razão de verossimilhanças $\frac{L_1}{L_0}$ é sempre não-negativa (é um produto de densidades/probabilidades). Portanto, comparar com $k < 0$ não faria sentido.

FAQ 4: LNP se aplica a hipóteses compostas?

Pergunta: Posso usar LNP para $H_0 : \theta \leq \theta_0$ vs $H_1 : \theta > \theta_0$?

Resposta: NÃO diretamente. O LNP é apenas para hipóteses simples.

Solução: Para hipóteses compostas unilaterais, use o Teorema de Karlin-Rubin (se houver RVM).

12 Material de Revisão Final

12.1 Principais Equações para Memorizar

MUITO IMPORTANTE PARA A PROVA

TOP 10 Equações Mais Importantes

1. Erro Tipo I:

$$\alpha = P_{H_0}[X \in R_c] \quad (74)$$

2. Erro Tipo II:

$$\beta = P_{H_1}[X \notin R_c] \quad (75)$$

3. Função Poder:

$$Q(\theta) = P_\theta[X \in R_c] = E_\theta[\psi(X)] \quad (76)$$

4. LNP - Região Crítica:

$$R_c = \left\{ x : \frac{L(\theta_1; x)}{L(\theta_0; x)} > k \right\} \quad (77)$$

5. LNP - Condição de Tamanho:

$$E_{\theta_0}[\psi(X)] = \alpha \quad (78)$$

6. RVM - Definição:

$$\frac{L(\theta^*; x)}{L(\theta; x)} \text{ não-decrescente em } T(x) \text{ quando } \theta^* > \theta \quad (79)$$

7. Karlin-Rubin - Região Crítica:

$$R_c = \{x : T(x) > c\} \text{ com } E_{\theta_0}[\psi(X)] = \alpha \quad (80)$$

8. Teste Z:

$$Z = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{\sigma} \sim N(0, 1) \text{ sob } H_0 \quad (81)$$

9. Qui-Quadrado (Exponencial):

$$Q = \frac{2}{\theta_0} \sum X_i \sim \chi_{2n}^2 \text{ sob } H_0 \quad (82)$$

10. p-valor:

$$p = P_{H_0}[T \geq t_{\text{obs}}] \quad (83)$$

12.2 Simulado de Questões Teóricas

Questões Tipo Prova

Questão 1 (Peso 3.0): Enuncie e demonstre completamente o Lema de Neyman-Pearson.

Questão 2 (Peso 1.5): Defina função poder e explique sua relação com os erros Tipo I e II.

Questão 3 (Peso 1.5): O que é RVM? Mostre que a distribuição Poisson possui RVM.

Questão 4 (Peso 2.0): Enuncie o Teorema de Karlin-Rubin e explique sua relação com o LNP.

Questão 5 (Peso 2.0): Derive o teste MP para $H_0 : p = p_0$ vs $H_1 : p = p_1$ ($p_1 > p_0$) quando $X_i \sim \text{Bernoulli}(p)$.

12.3 Gabarito Resumido

Respostas Esperadas

Q1: Seguir a estrutura da Seção 2 (demonstração em 6 passos).

Q2: $Q(\theta) = P_\theta[\text{Rej } H_0]$. Para $\theta \in \Theta_0$: $Q(\theta) = \alpha$. Para $\theta \in \Theta_1$: $Q(\theta) = 1 - \beta$.

Q3: RVM: $\frac{L(\theta^*)}{L(\theta)}$ não-dec em T para $\theta^* > \theta$. Para Poisson: $\frac{L(\lambda^*)}{L(\lambda)} = e^{-n(\lambda^* - \lambda)} \left(\frac{\lambda^*}{\lambda}\right)^{\sum x_i}$ é crescente em $\sum x_i$.

Q4: TKR fornece teste UMP para hipóteses compostas unilaterais quando há RVM. Generaliza LNP de simples para composta.

Q5: Aplicar LNP: $\frac{L_1}{L_0} > k \Rightarrow \sum X_i > k_1$ com $\sum X_i \sim \text{Binomial}(n, p_0)$ sob H_0 .

13 Conclusão e Recomendações

13.1 Prioridades de Estudo

1. PRIORIDADE MÁXIMA:

- Demonstração completa do LNP (saiba fazer de olhos fechados)
- Definições de erro Tipo I, II, função poder, tamanho, nível
- Enunciado do LNP e do TKR

2. PRIORIDADE ALTA:

- Definição de RVM e exemplos
- Aplicações do LNP (Normal, Exponencial, Bernoulli, Poisson)
- Relação entre suficiência e testes ótimos

3. PRIORIDADE MÉDIA:

- Testes bilaterais e UMPNV
- p-valor e interpretação
- Comparação de testes

13.2 Como Estudar para a Prova

1. **Dia 1-2:** Memorize todas as definições. Escreva-as sem consultar.
2. **Dia 3-4:** Pratique a demonstração do LNP 5-10 vezes até conseguir fazer fluentemente.
3. **Dia 5-6:** Resolva as questões Q(4.1) a Q(4.12) sem consultar.
4. **Dia 7:** Revise os teoremas (LNP, TKR) e faça o simulado.
5. **Dia da prova:** Releia apenas este material auxiliar (resume tudo).

13.3 Frases para Lembrar

- “O LNP é para hipóteses simples, Karlin-Rubin para compostas com RVM”
- “Teste MP maximiza poder mantendo tamanho α fixo”
- “RVM + suficiência \Rightarrow teste UMP simples”
- “Razão de verossimilhanças compara qual hipótese é mais plausível”
- “Testes ótimos dependem apenas de estatísticas suficientes”

BOA PROVA!

Lembre-se: a demonstração do LNP é fundamental.
Pratique até dominar completamente!