# Lista de Exercícios - Unidade 2

Convergência Estocástica e Resultados Limite
50 Questões Completas

Curso de Inferência Estatística

Outubro 2025 - Versão Atualizada

## Sumário

# 1 Introdução

Esta lista contém 50 questões organizadas por teorema, com 5 questões para cada um dos principais resultados da Unidade 2. Cada questão indica explicitamente qual teorema está sendo testado e utiliza diversas distribuições estudadas no curso.

**Distribuições utilizadas:** Normal, Poisson, Uniforme, Exponencial, Chi-quadrado, Bernoulli, Cauchy, Gamma e Beta.

**Teoremas cobertos:**

1. Lei Fraca dos Grandes Números
2. Convergência via Momentos
3. Teorema de Slutsky
4. Teorema Central do Limite
5. Método Delta / Teorema de Mann-Wald
6. Convergência em Distribuição
7. TCL para Variância Amostral
8. Teorema da Função Contínua (Convergência em Distribuição)
9. Estimadores Consistentes
10. Propriedades Assintóticas dos EMVs

# 2 Lei Fraca dos Grandes Números

## [Questão 1] Lei Fraca dos Grandes Números

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ onde $\mu = 5$ e $\sigma^2 = 4$.

(a) Mostre que $\bar{X}_n \xrightarrow{P} 5$.

(b) Calcule $P(|\bar{X}_n - 5| \geq 0.5)$ usando a desigualdade de Chebyshev para $n = 64$.

(c) Compare o resultado do item (b) com o valor exato obtido usando que $\bar{X}_n \sim N(5, 4/n)$.

## [Questão 2] Lei Fraca dos Grandes Números

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim \text{Poisson}(\lambda)$ onde $\lambda = 3$.

(a) Verifique que $E[X_i]$ e $\text{Var}(X_i)$ são finitos.

(b) Mostre que $\bar{X}_n \xrightarrow{P} 3$.

(c) Encontre $n$ tal que $P(|\bar{X}_n - 3| \geq 0.3) \leq 0.05$ usando a desigualdade de Chebyshev.

### [Questão 3] Lei Fraca dos Grandes Números

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim U(0, \theta)$ onde $\theta = 10$.

(a) Calcule $E[X_i]$ e $\text{Var}(X_i)$.

(b) Mostre que $\bar{X}_n \xrightarrow{P} 5$.

(c) Use a LFGN para justificar que $\bar{X}_n$ é um estimador consistente para $\theta/2$.

### [Questão 4] Lei Fraca dos Grandes Números

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim \text{Exp}(\beta)$ onde $\beta = 2$ (taxa).

(a) Calcule $E[X_i]$ e $\text{Var}(X_i)$.

(b) Mostre que $\bar{X}_n \xrightarrow{P} 1/2$.

(c) Se quisermos estimar $\beta$ usando $T_n = 1/\bar{X}_n$, mostre que $T_n$ é consistente para $\beta$ usando o teorema da função contínua.

### [Questão 5] Lei Fraca dos Grandes Números

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim \text{Cauchy}(0, 1)$ (distribuição de Cauchy padrão).

(a) Explique por que a LFGN **não pode** ser aplicada diretamente neste caso.

(b) Mostre que $E[|X_i|] = \infty$.

(c) Discuta o comportamento de $\bar{X}_n$ neste caso. Ele converge?

## 3 Convergência via Momentos (Resultado 2P)

### [Questão 6] Convergência via Momentos

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim \chi^2_k$ (qui-quadrado com $k$ graus de liberdade).

(a) Mostre que $E[X_i] = k$ e $\text{Var}(X_i) = 2k$.

(b) Use o Resultado 2P com $r = 2$ para mostrar que $\bar{X}_n \xrightarrow{P} k$.

(c) Calcule explicitamente $E[(\bar{X}_n - k)^2]$ e mostre que converge para zero.

### [Questão 7] Convergência via Momentos

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim \text{Bernoulli}(p)$ onde $p = 0.6$.

(a) Defina $S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X}_n)^2$.

(b) Mostre que $E[S_n^2] = p(1 - p) = 0.24$.

(c) Use o Resultado 2P para mostrar que $S_n^2 \xrightarrow{P} 0.24$.

### [Questão 8] Convergência via Momentos

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim U(a, b)$.

(a) Seja $T_n = X_{(n)}$ (o máximo da amostra). Calcule $E[T_n]$ e mostre que $E[T_n] \to b$.

(b) Calcule $E[(T_n - b)^2]$ e mostre que converge para zero.

(c) Conclua que $T_n \xrightarrow{P} b$ pelo Resultado 2P.

### [Questão 9] Convergência via Momentos

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$.

(a) Seja $T_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$. Calcule $E[T_n]$.

(b) Mostre que $E[(T_n - (\mu^2 + \sigma^2))^2] \to 0$.

(c) Conclua que $T_n \xrightarrow{P} \mu^2 + \sigma^2$.

### [Questão 10] Convergência via Momentos

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim \text{Exp}(\lambda)$ (taxa $\lambda$).

(a) Defina $T_n = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} X_i}$. Este é o estimador de máxima verossimilhança para $\lambda$.

(b) Mostre que $E[1/T_n] = 1/\lambda$ (dica: $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \text{Gamma}(n, \lambda)$).

(c) Argumente que $T_n \xrightarrow{P} \lambda$ usando a LFGN e o teorema da função contínua.

## 4 Teorema de Slutsky

### [Questão 11] Teorema de Slutsky

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$.

(a) Mostre que $\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} \xrightarrow{D} N(0, 1)$ pelo TCL.

(b) Mostre que $S_n \xrightarrow{P} \sigma$.

(c) Use o Teorema de Slutsky para mostrar que $\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{S_n} \xrightarrow{D} N(0, 1)$.

### [Questão 12] Teorema de Slutsky

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim \text{Exp}(\lambda)$ onde $\lambda = 2$.

(a) Pelo TCL, $\sqrt{n}(\bar{X}_n - 1/2) \xrightarrow{D} N(0, 1/4)$.

(b) Defina $U_n = \sqrt{n}(\bar{X}_n - 1/2)$ e $V_n = \bar{X}_n$. Mostre que $U_n \xrightarrow{D} N(0, 1/4)$ e $V_n \xrightarrow{P} 1/2$.

(c) Use Slutsky para encontrar a distribuição limite de $W_n = U_n \cdot V_n = \sqrt{n}\bar{X}_n(\bar{X}_n - 1/2)$.

## [Questão 13] Teorema de Slutsky

Sejam $\{X_n, n \geq 1\}$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim U(0, \theta)$ onde $\theta > 0$ é desconhecido.

(a) Sabe-se que $U_n = \frac{n}{\theta}(\theta - T_n) \xrightarrow{D} \text{Exp}(1)$ onde $T_n = X_{(n)}$.

(b) Mostre que $T_n \xrightarrow{P} \theta$.

(c) Defina $Q_n = \frac{n(\theta - T_n)}{T_n}$. Use Slutsky para encontrar a distribuição limite de $Q_n$.

## [Questão 14] Teorema de Slutsky

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim \text{Poisson}(\lambda)$.

(a) Pelo TCL, $\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \lambda)}{\sqrt{\lambda}} \xrightarrow{D} N(0, 1)$.

(b) Mostre que $\sqrt{\bar{X}_n} \xrightarrow{P} \sqrt{\lambda}$.

(c) Use Slutsky para mostrar que $\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \lambda)}{\sqrt{\bar{X}_n}} \xrightarrow{D} N(0, 1)$.

## [Questão 15] Teorema de Slutsky

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim \text{Cauchy}(\theta, 1)$ (localização $\theta$, escala 1).

(a) Explique por que o TCL não pode ser aplicado diretamente para $\bar{X}_n$.

(b) Suponha que, por outro método, sabemos que $a_n(M_n - \theta) \xrightarrow{D} \text{Cauchy}(0, 1)$ onde $M_n$ é a mediana amostral e $a_n$ é alguma constante.

(c) Discuta se seria possível usar Slutsky neste contexto se tivéssemos $V_n \xrightarrow{P} c$.

# 5 Teorema Central do Limite

## [Questão 16] Teorema Central do Limite

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim \text{Bernoulli}(p)$ onde $p = 0.3$.

(a) Calcule $E[X_i]$ e $\text{Var}(X_i)$.

(b) Use o TCL para aproximar $P(\bar{X}_n \leq 0.35)$ para $n = 100$.

(c) Compare com a aproximação normal para a binomial: $S_n = \sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Binomial}(n, p)$.

## [Questão 17] Teorema Central do Limite

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim \text{Exp}(\lambda)$ onde $\lambda = 1$.

(a) Verifique que $E[X_i] = 1$ e $\text{Var}(X_i) = 1$.

(b) Use o TCL para aproximar $P(0.9 \leq \bar{X}_n \leq 1.1)$ para $n = 50$.

(c) Calcule a distribuição exata de $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ e compare.

## [Questão 18] Teorema Central do Limite

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim U(0,1)$.

(a) Calcule $E[X_i] = 1/2$ e $\text{Var}(X_i) = 1/12$.

(b) Use o TCL para encontrar $P\left(\left|\bar{X}_n - \frac{1}{2}\right| \leq 0.05\right)$ para $n = 100$.

(c) Encontre $n$ tal que $P\left(\left|\bar{X}_n - \frac{1}{2}\right| \leq 0.01\right) \geq 0.95$.

## [Questão 19] Teorema Central do Limite

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim \text{Poisson}(\lambda)$ onde $\lambda = 5$.

(a) Lembre que para Poisson, $E[X_i] = \text{Var}(X_i) = \lambda = 5$.

(b) Use o TCL para aproximar $P(\bar{X}_n \geq 5.5)$ para $n = 100$.

(c) Use o TCL para aproximar $P(S_n \geq 550)$ onde $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ e compare com o item anterior.

## [Questão 20] Teorema Central do Limite

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim \text{Cauchy}(0,1)$.

(a) Mostre que $E[X_i]$ não existe (integral diverge).

(b) Explique por que o TCL não se aplica.

(c) Pesquise: qual é a distribuição de $\bar{X}_n$ neste caso? (Dica: A soma de Cauchys independentes é Cauchy)

# 6 Método Delta / Teorema de Mann-Wald

## [Questão 21] Método Delta

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ onde $\mu > 0$.

(a) Pelo TCL, $\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu) \xrightarrow{D} N(0, \sigma^2)$.

(b) Use o Método Delta com $g(x) = \sqrt{x}$ para encontrar a distribuição assintótica de $\sqrt{n}(\sqrt{\bar{X}_n} - \sqrt{\mu})$.

(c) Calcule $g'(\mu)$ e escreva explicitamente a variância assintótica.

## [Questão 22] Método Delta

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim \text{Poisson}(\lambda)$.

(a) Sabe-se que $\sqrt{n}(\bar{X}_n - \lambda) \xrightarrow{D} N(0, \lambda)$.

(b) Use o Método Delta com $g(x) = x^3$ para encontrar a distribuição assintótica de $\sqrt{n}(\bar{X}_n^3 - \lambda^3)$.

(c) Verifique que a variância assintótica é $9\lambda^5$.

## [Questão 23] Método Delta

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim \text{Exp}(\lambda)$ (taxa $\lambda$).

(a) Pelo TCL, $\sqrt{n}(\bar{X}_n - 1/\lambda) \xrightarrow{D} N(0, 1/\lambda^2)$.

(b) Use o Método Delta com $g(x) = \log(x)$ para encontrar a distribuição assintótica de $\sqrt{n}(\log(\bar{X}_n) - \log(1/\lambda))$.

(c) Simplifique a variância assintótica.

## [Questão 24] Método Delta

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim U(0, 1)$.

(a) Sabemos que $\sqrt{n}(\bar{X}_n - 1/2) \xrightarrow{D} N(0, 1/12)$.

(b) Use o Método Delta com $g(x) = \frac{1}{x}$ para encontrar a distribuição assintótica de $\sqrt{n}\left(\frac{1}{\bar{X}_n} - 2\right)$.

(c) Calcule explicitamente $g'(1/2)$ e a variância assintótica.

## [Questão 25] Método Delta

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim \text{Bernoulli}(p)$ onde $0 < p < 1$.

(a) Pelo TCL, $\sqrt{n}(\bar{X}_n - p) \xrightarrow{D} N(0, p(1-p))$.

(b) Use o Método Delta com $g(x) = \log\left(\frac{x}{1-x}\right)$ (transformação logit) para encontrar a distribuição assintótica de $\sqrt{n}\left[\log\left(\frac{\bar{X}_n}{1-\bar{X}_n}\right) - \log\left(\frac{p}{1-p}\right)\right]$.

(c) Calcule $g'(p)$ e verifique que a variância assintótica é $\frac{1}{p(1-p)}$.

# 7 Convergência em Distribuição

## [Questão 26] Convergência em Distribuição

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim U(0, \theta)$.

(a) Seja $T_n = X_{(n)}$ o máximo amostral. Encontre a f.d.a. de $T_n$.

(b) Defina $U_n = \frac{n}{\theta}(\theta - T_n)$. Encontre a f.d.a. de $U_n$.

(c) Mostre que $U_n \xrightarrow{D} \text{Exp}(1)$ quando $n \to \infty$.

## [Questão 27] Convergência em Distribuição

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim \text{Exp}(1)$.

(a) Seja $Y_n = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$. Encontre a distribuição de $Y_n$.

(b) Considere $Z_n = n \cdot Y_n$. Encontre a distribuição de $Z_n$.

(c) O que acontece com a distribuição de $Z_n$ quando $n \to \infty$?

## [Questão 28] Convergência em Distribuição

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim N(0,1)$.

(a) Defina $T_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$. Qual é a distribuição de $n \cdot T_n$?

(b) Mostre que $T_n \xrightarrow{P} 1$.

(c) Use o TCL para encontrar a distribuição assintótica de $\sqrt{n}(T_n - 1)$.

## [Questão 29] Convergência em Distribuição

Sejam $Y_n \sim \text{Gamma}(n, n)$ (forma $\alpha = n$, taxa $\beta = n$).

(a) Calcule $E[Y_n]$ e $\text{Var}(Y_n)$.

(b) Mostre que $Y_n \xrightarrow{P} 1$.

(c) Use o TCL para a distribuição Gamma para mostrar que $\sqrt{n}(Y_n - 1) \xrightarrow{D} N(0,1)$.

## [Questão 30] Convergência em Distribuição

Sejam $X_n \sim \text{Beta}(n, 1)$ para $n \geq 1$.

(a) Encontre a f.d.p. de $X_n$ e mostre que $E[X_n] = \frac{n}{n+1}$.

(b) Mostre que $X_n \xrightarrow{P} 1$.

(c) Defina $Y_n = n(1 - X_n)$. Encontre a distribuição limite de $Y_n$ quando $n \to \infty$.

# 8 Gabarito e Dicas

## 8.1 Dicas Gerais de Resolução

1. **Identifique o teorema aplicável:** Leia atentamente qual teorema está sendo testado no cabeçalho da questão.

2. **Verifique as condições:** Antes de aplicar um teorema, verifique que todas as condições são satisfeitas (i.i.d., momentos finitos, etc.).

3. **LFGN:** Use quando precisar mostrar $\bar{X}_n \xrightarrow{P} \mu$. Verifique $E[X_i] < \infty$ e (para versão simples) $\text{Var}(X_i) < \infty$.

4. **TCL:** Use quando precisar da *distribuição* de $\bar{X}_n$ padronizada. Sempre resulta em $N(0,1)$ assintoticamente.

5. **Slutsky:** Use quando precisar substituir parâmetros desconhecidos ou combinar convergências de tipos diferentes.

6. **Método Delta:** Use quando tiver uma transformação não-linear $g(\bar{X}_n)$ e quiser sua distribuição assintótica.

7. **Distribuição Cauchy:** Lembre-se que é o contraexemplo padrão - não tem momentos finitos!

8. **Cálculos de variância:** Para $\text{Var}(\bar{X}_n) = \sigma^2/n$. Para soma: $\text{Var}(S_n) = n\sigma^2$.

9. **Padronização:** Sempre padronize corretamente: $(T_n - E[T_n])/\sqrt{\text{Var}(T_n)}$.

10. **Derivadas no Método Delta:** Não esqueça de calcular $g'(\theta)$ e elevar ao quadrado para a variância.

## 8.2 Respostas Selecionadas

**Questão 5(c):** $\bar{X}_n$ tem a mesma distribuição que $X_1$ (distribuição Cauchy) para todo $n$. Não há convergência!

**Questão 11(c):** Este é o resultado fundamental que permite usar estatística $t$ quando $\sigma$ é desconhecido.

**Questão 16(b):** $P(\bar{X}_n \leq 0.35) \approx P\left(Z \leq \frac{0.35-0.3}{\sqrt{0.21/100}}\right) = P(Z \leq 1.09) \approx 0.862$.

**Questão 21(b):** Variância assintótica: $\sigma^2/(4\mu)$.

**Questão 26(c):** Use que $\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n = e^{-u}$.

**Questão 30(c):** $Y_n \xrightarrow{D} \text{Exp}(1)$ (use transformação de variáveis).

# 9 TCL para Variância Amostral

## [Questão 31] TCL para Variância Amostral

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ onde $\mu = 0$ e $\sigma^2 = 1$.

(a) Calcule $\mu_4 = E[(X_i - \mu)^4]$ para a distribuição normal padrão.

(b) Use o TCL para variância amostral para encontrar a distribuição assintótica de $\sqrt{n}(S_n^2 - 1)$.

(c) Construa um intervalo de confiança assintótico de 95% para $\sigma^2$ quando $n = 100$ e $S_n^2 = 1.2$.

## [Questão 32] TCL para Variância Amostral

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim \text{Exp}(\lambda)$ onde $\lambda = 2$.

(a) Calcule $E[X_i] = 1/2$, $\text{Var}(X_i) = 1/4$, e $\mu_4 = E[(X_i - 1/2)^4]$.

(b) Dica: Para exponencial, $\mu_4 = 9/\lambda^4$. Verifique este valor.

(c) Use o TCL para $S_n^2$ para encontrar $P(S_n^2 > 0.3)$ aproximadamente quando $n = 50$.

### [Questão 33] TCL para Variância Amostral

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim U(0,1)$.

(a) Calcule $E[X_i] = 1/2$, $\text{Var}(X_i) = 1/12$, e o quarto momento central.

(b) Mostre que $\mu_4 = E[(X_i - 1/2)^4] = 1/80$.

(c) Use o TCL para $S_n^2$ para aproximar $P(|S_n^2 - 1/12| \leq 0.01)$ quando $n = 100$.

### [Questão 34] TCL para Variância Amostral

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim \text{Poisson}(\lambda)$ onde $\lambda = 5$.

(a) Para Poisson, mostre que $\mu_4 = \lambda + 3\lambda^2 + \lambda^3 = 5 + 75 + 125 = 205$.

(b) Use o TCL para variância amostral: $\sqrt{n}(S_n^2 - \lambda) \xrightarrow{d} N(0, \mu_4 - \lambda^2)$.

(c) Calcule a variância assintótica e use-a para aproximar $P(S_n^2 > 6)$ quando $n = 80$.

### [Questão 35] TCL para Variância Amostral

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim \text{Bernoulli}(p)$ onde $p = 0.4$.

(a) Calcule $\text{Var}(X_i) = p(1-p) = 0.24$ e $\mu_4 = p(1-p)[(1-p)^2 + p^2]$.

(b) Simplifique: $\mu_4 = p(1-p)(1 - 2p(1-p))$ e calcule para $p = 0.4$.

(c) Use o TCL para $S_n^2$ para testar $H_0 : \sigma^2 = 0.24$ vs $H_1 : \sigma^2 \neq 0.24$ ao nível 5% quando $n = 100$ e $S_n^2 = 0.28$.

## 10 Teorema da Função Contínua para Convergência em Distribuição

### [Questão 36] Teorema da Função Contínua (Distribuição)

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$.

(a) Pelo TCL, $Z_n = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} \xrightarrow{d} N(0,1)$.

(b) Use o teorema da função contínua com $g(x) = x^2$ para mostrar que $Z_n^2 \xrightarrow{d} \chi_1^2$.

(c) Conclua que $n\left(\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma}\right)^2 \xrightarrow{d} \chi_1^2$.

### [Questão 37] Teorema da Função Contínua (Distribuição)

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim \text{Exp}(\lambda)$.

(a) Pelo TCL, $\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - 1/\lambda)}{\sqrt{1/\lambda^2}} \xrightarrow{d} N(0,1)$.

(b) Defina $Z_n = \lambda\sqrt{n}(\bar{X}_n - 1/\lambda)$. Use o teorema da função contínua com $g(x) = |x|$ para encontrar a distribuição de $|Z_n|$.

(c) Mostre que $Z_n^2 \xrightarrow{d} \chi_1^2$.

### [Questão 38] Teorema da Função Contínua (Distribuição)

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim U(0,1)$.

(a) Sabemos que $\sqrt{12n}(\bar{X}_n - 1/2) \xrightarrow{d} N(0,1)$.

(b) Use o teorema da função contínua com $g(x) = e^x$ para encontrar a distribuição limite de $\exp(\sqrt{12n}(\bar{X}_n - 1/2))$.

(c) Esta é uma distribuição log-normal. Identifique seus parâmetros.

### [Questão 39] Teorema da Função Contínua (Distribuição)

Sejam $U_n \xrightarrow{d} U \sim N(0,1)$ e $V_n \xrightarrow{d} V \sim N(0,1)$ independentes.

(a) Mostre que $(U_n, V_n) \xrightarrow{d} (U, V)$ (convergência conjunta).

(b) Use o teorema da função contínua com $g(u,v) = u^2 + v^2$ para mostrar que $U_n^2 + V_n^2 \xrightarrow{d} \chi^2_2$.

(c) Generalize para $p$ variáveis independentes.

### [Questão 40] Teorema da Função Contínua (Distribuição)

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim \text{Poisson}(\lambda)$ onde $\lambda = 10$.

(a) Pelo TCL, $\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - 10)}{\sqrt{10}} \xrightarrow{d} N(0,1)$.

(b) Defina $Y_n = \sqrt{\bar{X}_n}$. Use o método delta combinado com o teorema da função contínua para analisar a distribuição de $\sqrt{n}(Y_n - \sqrt{10})$.

(c) Compare com a transformação estabilizadora de variância para Poisson.

## 11 Estimadores Consistentes

### [Questão 41] Estimadores Consistentes

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim U(0, \theta)$ onde $\theta > 0$.

(a) Seja $T_n = X_{(n)}$ o máximo amostral. Encontre $E[T_n]$ e $\text{Var}(T_n)$.

(b) Mostre que $EQM[T_n] = E[(T_n - \theta)^2] \to 0$ quando $n \to \infty$.

(c) Conclua que $T_n$ é consistente para $\theta$.

(d) Compare com $\hat{\theta}_1 = 2\bar{X}_n$. Qual é mais eficiente assintoticamente?

## [Questão 42] Estimadores Consistentes

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim \text{Exp}(\lambda)$.

(a) Considere três estimadores para $\lambda$:

- $T_n^{(1)} = 1/\bar{X}_n$ (método dos momentos)
- $T_n^{(2)} = n/\sum_{i=1}^n X_i$ (EMV)
- $T_n^{(3)} = 1/X_{(1)}$ (inverso do mínimo)

(b) Mostre que $T_n^{(1)}$ é consistente usando LFGN e teorema da função contínua.

(c) Mostre que $T_n^{(2)}$ é consistente.

(d) $T_n^{(3)}$ é consistente? Justifique.

## [Questão 43] Estimadores Consistentes

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$.

(a) Mostre que $S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$ é consistente para $\sigma^2$.

(b) Mostre que $\tilde{S}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$ também é consistente para $\sigma^2$.

(c) Calcule o viés de cada estimador para $n$ finito. Qual você prefere e por quê?

## [Questão 44] Estimadores Consistentes

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim \text{Bernoulli}(p)$.

(a) Dado $\varepsilon = 0.05$ e $\delta = 0.01$, encontre o tamanho amostral mínimo $n_0$ tal que

$$P(|\bar{X}_n - p| < \varepsilon) \geq 1 - \delta$$

usando a desigualdade de Chebyshev. Assuma $p = 0.5$ (pior caso).

(b) Refaça usando a aproximação normal (TCL).

(c) Compare os dois valores de $n_0$.

## [Questão 45] Estimadores Consistentes

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com distribuição desconhecida mas com $E[X_i] = \mu < \infty$ e $\text{Var}(X_i) = \sigma^2 < \infty$.

(a) Defina o estimador "trimmed mean": $\bar{X}_n^{(k)} = \frac{1}{n-2k}\sum_{i=k+1}^{n-k} X_{(i)}$ onde $X_{(1)} \leq \cdots \leq X_{(n)}$ são as estatísticas de ordem, e $k$ é fixo.

(b) Argumente que $\bar{X}_n^{(k)} \xrightarrow{P} \mu$ quando $n \to \infty$ com $k$ fixo.

(c) Discuta a robustez deste estimador comparado a $\bar{X}_n$ na presença de outliers.

# 12 Propriedades Assintóticas dos EMVs

## [Questão 46] Propriedades Assintóticas dos EMVs

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ onde $\sigma^2$ é conhecido.

(a) Mostre que o EMV de $\mu$ é $\hat{\mu}_n = \bar{X}_n$.

(b) Calcule a informação de Fisher $I_X(\mu) = E\left[\left(\frac{\partial \log f(X;\mu)}{\partial \mu}\right)^2\right]$.

(c) Use o TCL para EMVs para escrever a distribuição assintótica de $\sqrt{n}(\hat{\mu}_n - \mu)$.

(d) Construa um IC assintótico de 95% para $\mu$.

## [Questão 47] Propriedades Assintóticas dos EMVs

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim \text{Poisson}(\lambda)$.

(a) Mostre que o EMV de $\lambda$ é $\hat{\lambda}_n = \bar{X}_n$.

(b) Calcule a informação de Fisher $I_X(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$.

(c) Verifique que $\sqrt{n}(\hat{\lambda}_n - \lambda) \xrightarrow{d} N(0, \lambda)$, confirmando $I_X^{-1}(\lambda) = \lambda$.

(d) Compare com o resultado do TCL clássico.

## [Questão 48] Propriedades Assintóticas dos EMVs

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim \text{Exp}(\lambda)$ (taxa $\lambda$).

(a) Mostre que o EMV de $\lambda$ é $\hat{\lambda}_n = \frac{n}{\sum_{i=1}^n X_i} = \frac{1}{\bar{X}_n}$.

(b) Calcule a informação de Fisher $I_X(\lambda) = \frac{1}{\lambda^2}$.

(c) Use o TCL para EMVs para encontrar a distribuição assintótica de $\sqrt{n}(\hat{\lambda}_n - \lambda)$.

(d) Compare este resultado com o obtido usando o método delta aplicado a $1/\bar{X}_n$.

## [Questão 49] Propriedades Assintóticas dos EMVs e Eficiência

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim U(0, \theta)$.

(a) O EMV de $\theta$ é $\hat{\theta}_n^{MLE} = X_{(n)}$. O estimador de momentos é $\hat{\theta}_n^{MM} = 2\bar{X}_n$.

(b) Mostre que ambos são consistentes.

(c) Calcule as variâncias assintóticas de $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n^{MLE} - \theta)$ e $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n^{MM} - \theta)$.

(d) Qual é mais eficiente? Calcule a eficiência relativa assintótica.

(e) Nota: Este é um caso onde as condições de regularidade falham! O EMV não tem distribuição normal assintótica.

## [Questão 50] Propriedades Assintóticas dos EMVs

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim \text{Bernoulli}(p)$.

(a) Mostre que o EMV de $p$ é $\hat{p}_n = \bar{X}_n$.

(b) Calcule a informação de Fisher $I_X(p) = \frac{1}{p(1-p)}$.

(c) Use o TCL para EMVs para mostrar que $\sqrt{n}(\hat{p}_n - p) \xrightarrow{d} N(0, p(1-p))$.

(d) Queremos estimar $\psi = \log\left(\frac{p}{1-p}\right)$ (log-odds). Use o método delta para encontrar a distribuição assintótica de $\sqrt{n}(\log(\frac{\hat{p}_n}{1-\hat{p}_n}) - \psi)$.

(e) Verifique que a variância assintótica é $\frac{1}{p(1-p)}$, que é exatamente $I_X^{-1}(p)$ (invariância do EMV sob reparametrização).

# 13 Gabarito e Dicas - Parte 2

## 13.1 Dicas para as Novas Questões

**TCL para Variância Amostral (Questões 31-35):**

- Lembre que $\sqrt{n}(S_n^2 - \sigma^2) \xrightarrow{d} N(0, \mu_4 - \sigma^4)$
- Para Normal: $\mu_4 = 3\sigma^4$, logo variância assintótica $= 2\sigma^4$
- Para Exponencial($\lambda$): $\mu_4 = 9/\lambda^4$, $\sigma^2 = 1/\lambda^2$
- Para Uniforme(0,1): $\mu_4 = 1/80$, $\sigma^2 = 1/12$

**Teorema da Função Contínua - Distribuição (Questões 36-40):**

- Use quando tiver $U_n \xrightarrow{d} U$ e quiser $g(U_n) \xrightarrow{d} g(U)$
- Exemplo clássico: $Z \sim N(0,1) \Rightarrow Z^2 \sim \chi_1^2$
- Combine com método delta quando necessário

**Consistência (Questões 41-45):**

- Mostre $T_n \xrightarrow{P} \theta$ via: (1) LFGN, (2) EQM $\to 0$, ou (3) convergência da f.d.a.
- Para $X_{(n)}$ em $U(0,\theta)$: $E[X_{(n)}] = \frac{n\theta}{n+1}$, $\text{Var}(X_{(n)}) = \frac{n\theta^2}{(n+1)^2(n+2)}$
- Tamanho amostral via Chebyshev: $n \geq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2\delta}$

**EMVs (Questões 46-50):**

- Informação de Fisher: $I_X(\theta) = E\left[\left(\frac{\partial \log f(X;\theta)}{\partial\theta}\right)^2\right] = -E\left[\frac{\partial^2 \log f(X;\theta)}{\partial\theta^2}\right]$
- TCL para EMVs: $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d} N(0, I_X^{-1}(\theta))$

- Para Normal($\mu$, $\sigma^2$): $I_X(\mu) = 1/\sigma^2$
- Para Poisson($\lambda$): $I_X(\lambda) = 1/\lambda$
- Para Exponencial($\lambda$): $I_X(\lambda) = 1/\lambda^2$
- Para Bernoulli($p$): $I_X(p) = 1/(p(1-p))$

## 13.2 Respostas Selecionadas - Parte 2

**Questão 31(a):** Para $N(0,1)$: $\mu_4 = E[X^4] = 3$ (use momentos da normal).

**Questão 36(c):** Este resultado é fundamental para qui-quadrado com 1 grau de liberdade.

**Questão 41(a):** $E[X_{(n)}] = \frac{n\theta}{n+1}$, $\text{Var}(X_{(n)}) = \frac{n\theta^2}{(n+1)^2(n+2)}$, ambos $\to 0$ quando normalizados.

**Questão 44(a):** Usando Chebyshev com $p = 0.5$: $n_0 \geq \frac{0.25}{(0.05)^2(0.01)} = 10000$.

**Questão 44(b):** Usando TCL: $n_0 = \left\lceil \left( \frac{z_{0.005}\sqrt{0.25}}{0.05} \right)^2 \right\rceil = \lceil (51.5)^2 \rceil = 2653$.

**Questão 49(e):** Caso especial onde condições de regularidade falham. O EMV converge mais rápido ($n$ ao invés de $\sqrt{n}$).

**Questão 50(e):** Demonstração da invariância da informação de Fisher sob transformações.

# 14 Capítulo 4 - Testes de Hipóteses

## [Questão 51] Lema de Neyman-Pearson - Normal

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ onde $\sigma^2 = 4$ é conhecido.

(a) Para testar $H_0 : \mu = 10$ vs $H_1 : \mu = 12$, use o Lema de Neyman-Pearson para construir o teste MP de nível $\alpha = 0.05$.

(b) Mostre que a região crítica é da forma $\{\bar{X}_n > c\}$ para alguma constante $c$.

(c) Calcule $c$ para $n = 25$ e $\alpha = 0.05$.

(d) Calcule a função poder $Q(\mu)$ deste teste.

(e) Calcule $\beta$ (probabilidade de erro tipo II) para $\mu_1 = 12$.

## [Questão 52] Lema de Neyman-Pearson - Exponencial

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim \text{Exp}(\theta)$ (parâmetro de escala).

(a) Para testar $H_0 : \theta = 2$ vs $H_1 : \theta = 3$, use o LNP para construir o teste MP de nível $\alpha = 0.10$.

(b) Mostre que a razão de verossimilhanças depende de $\sum_{i=1}^{n} X_i$.

(c) Mostre que sob $H_0$, a estatística $Q = \frac{2}{\theta_0} \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \chi^2_{2n}$.

(d) Para $n = 20$, determine a região crítica usando quantis da distribuição $\chi^2_{40}$.

## [Questão 53] Lema de Neyman-Pearson - Poisson

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim \text{Poisson}(\lambda)$.

(a) Para testar $H_0 : \lambda = 3$ vs $H_1 : \lambda = 5$, construa o teste MP usando LNP.

(b) Mostre que $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$ é a estatística suficiente.

(c) Sob $H_0$, qual é a distribuição de $T$?

(d) Para $n = 10$ e $\alpha = 0.05$, determine o menor inteiro $k_1$ tal que $P_{\lambda_0}(T > k_1) \leq 0.05$.

(e) Se necessário aleatorização, calcule $\delta$.

## [Questão 54] Lema de Neyman-Pearson - Bernoulli

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim \text{Bernoulli}(p)$.

(a) Para testar $H_0 : p = 0.4$ vs $H_1 : p = 0.6$, construa o teste MP de nível $\alpha = 0.05$ com $n = 30$.

(b) Mostre que a razão de verossimilhanças é crescente em $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

(c) Determine $k_1$ tal que $P_{p_0}(T > k_1) \leq 0.05$ onde $T \sim \text{Binomial}(30, 0.4)$.

(d) Calcule a função poder $Q(p)$ para este teste.

(e) Avalie numericamente $Q(0.6)$ (o poder sob $H_1$).

## [Questão 55] Função Poder e Curvas de Poder

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim N(\mu, 9)$.

(a) Para testar $H_0 : \mu = 50$ vs $H_1 : \mu > 50$ com teste que rejeita se $\bar{X}_n > 51$, calcule $\alpha$ para $n = 36$.

(b) Derive a função poder $Q(\mu)$ deste teste.

(c) Calcule $Q(52)$ e interprete.

(d) Esboce qualitativamente a curva de poder $Q(\mu)$ vs $\mu$.

(e) Discuta como $Q(\mu)$ varia com o tamanho amostral $n$.

## [Questão 56] Teste Z - Aplicação Prática

Uma amostra de $n = 25$ observações de resistência de fios tem média $\bar{x} = 52.3$ kg. Sabe-se que $\sigma = 4$ kg.

(a) Testar $H_0 : \mu = 50$ vs $H_1 : \mu > 50$ ao nível $\alpha = 0.05$ usando o teste Z.

(b) Calcule a estatística de teste $Z_{cal}$.

(c) Determine a região crítica e tome a decisão.

(d) Calcule o valor-p.

(e) Se $n = 100$ com a mesma média, como mudaria a decisão?

## [Questão 57] Teste $\chi^2$ - Exponencial

Sejam $X_1, \ldots, X_{20}$ tempos de falha seguindo $X_i \sim \text{Exp}(\theta)$ com $\sum_{i=1}^{20} x_i = 45$.

(a) Testar $H_0 : \theta = 2$ vs $H_1 : \theta = 3$ ao nível $\alpha = 0.10$.

(b) Calcule a estatística $Q_{cal} = \frac{2}{\theta_0} \sum_{i=1}^{20} x_i$.

(c) Determine o quantil crítico $\chi^2_{40,0.10}$ (aproximadamente 51.8).

(d) Tome a decisão e calcule o valor-p aproximado.

## [Questão 58] Comparação de Testes

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim N(\theta, 1)$. Para testar $H_0 : \theta = 5.5$ vs $H_1 : \theta = 8$:

(a) Compare os seguintes testes em termos de $\alpha$ e poder:

- Teste A: Rejeitar se $x_1 > 7$
- Teste B: Rejeitar se $\bar{X}_n > 7.5$ ($n = 10$)

(b) Para Teste A, calcule $\alpha$ e $\beta$.

(c) Para Teste B, calcule $\alpha$ e $\beta$.

(d) Qual teste é mais poderoso? Por quê?

## [Questão 59] Erros Tipo I e II

Para um teste de $H_0 : \mu = 100$ vs $H_1 : \mu = 105$ com $X_i \sim N(\mu, 25)$ e $n = 16$:

(a) Se a região crítica é $R_C = \{\bar{X}_n > 102\}$, calcule $\alpha$.

(b) Calcule $\beta$ (erro tipo II).

(c) Calcule o poder do teste: $1 - \beta$.

(d) Como você modificaria a região crítica para obter $\alpha = 0.05$?

(e) Com a nova região crítica, recalcule $\beta$.

## [Questão 60] Tamanho e Nível de Teste

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim U(0, \theta)$.

(a) Para testar $H_0 : \theta \leq 10$ vs $H_1 : \theta > 10$, considere o teste que rejeita se $X_{(n)} > 9.5$.

(b) Calcule $Q(\theta) = P_\theta(X_{(n)} > 9.5)$ em função de $\theta$.

(c) Determine $\sup_{\theta \leq 10} Q(\theta)$ (o tamanho do teste).

(d) Este teste tem nível $\alpha = 0.05$? Justifique.

# 15 Gabarito - Capítulo 4

## 15.1 Dicas para Questões de Testes de Hipóteses

**Lema de Neyman-Pearson (51-54):**

- Sempre calcule $\frac{L(\theta_1)}{L(\theta_0)}$ e simplifique
- Identifique a estatística suficiente $T(x)$ que aparece na razão
- Determine $k$ (ou equivalente) usando a condição $P_{\theta_0}(\text{rejeitar}) = \alpha$

**Função Poder (55):**

- $Q(\mu) = P_\mu(\text{rejeitar } H_0) = P_\mu(\bar{X}_n > c)$
- Padronize: $Q(\mu) = P\left(Z > \frac{c-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{c-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$
- $Q(\mu)$ é crescente em $\mu$ para testes unilaterais à direita

**Teste Z (56):**

- Estatística: $Z = \sqrt{n}\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma}$
- Regra: Rejeitar se $Z_{cal} > z_\alpha$ (unilateral à direita)
- Valor-p: $\hat{\alpha} = P(Z > Z_{cal})$

**Teste $\chi^2$ (57):**

- Transformação: $\frac{2X_i}{\theta} \sim \chi^2_2$ para Exp$(\theta)$
- Soma: $\frac{2\sum X_i}{\theta_0} \sim \chi^2_{2n}$ sob $H_0$
- Rejeitar para valores grandes (unilateral à direita)

### 15.2 Respostas Selecionadas - Capítulo 4

**Questão 51(c):** $c = 10 + \frac{2}{\sqrt{25}} z_{0.05} = 10 + 0.4(1.645) = 10.658$

**Questão 51(d):** $Q(\mu) = 1 - \Phi\left(\frac{10.658-\mu}{0.4}\right)$

**Questão 51(e):** $\beta = P_{\mu=12}(\bar{X}_n \leq 10.658) = \Phi\left(\frac{10.658-12}{0.4}\right) = \Phi(-3.355) \approx 0.0004$

**Questão 56(b):** $Z_{cal} = \sqrt{25}\frac{52.3-50}{4} = 5 \times 0.575 = 2.875$

**Questão 56(d):** Valor-p $= P(Z > 2.875) \approx 0.002$

**Questão 57(b):** $Q_{cal} = \frac{2\times 45}{2} = 45$

**Questão 58:** Teste B é muito mais poderoso porque usa toda a informação amostral ($n = 10$ observações) ao invés de apenas uma ($n = 1$).

**Questão 59(a):** $\alpha = P_{\mu=100}\left(\bar{X}_n > 102\right) = P\left(Z > \frac{102-100}{5/4}\right) = P(Z > 1.6) \approx 0.0548$

**Questão 59(b):** $\beta = P_{\mu=105}\left(\bar{X}_n \leq 102\right) = P\left(Z \leq \frac{102-105}{1.25}\right) = P(Z \leq -2.4) \approx 0.0082$

**Questão 60(c):** O tamanho é $\sup_{\theta\leq 10} P_\theta(X_{(n)} > 9.5)$. Para $\theta = 10$: $P_{10}(X_{(n)} > 9.5) = 1 - (9.5/10)^n = 1 - (0.95)^n$.

# 16 Questões Adicionais Integradas

## [Questão 61] RVM e Karlin-Rubin - Normal

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ onde $\sigma^2$ é conhecido.

(a) Mostre que a família tem RVM não decrescente em $T(x) = \sum_{i=1}^n x_i$ (ou $\bar{x}_n$).

(b) Use o Teorema de Karlin-Rubin para construir o teste UMP de nível $\alpha$ para $H_0 : \mu \leq \mu_0$ vs $H_1 : \mu > \mu_0$.

(c) Mostre que a função poder $Q(\mu)$ é não decrescente em $\mu$.

## [Questão 62] RVM - Verificação para Poisson

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim$ Poisson$(\lambda)$.

(a) Calcule a razão $\frac{L(\lambda_1;x)}{L(\lambda_0;x)}$ para $\lambda_1 > \lambda_0$.

(b) Mostre que a razão é não decrescente em $T = \sum_{i=1}^n x_i$.

(c) Conclua que a família Poisson tem RVM em $T$.

(d) Construa o teste UMP para $H_0 : \lambda = \lambda_0$ vs $H_1 : \lambda > \lambda_0$.

## [Questão 63] Teste Bilateral - Normal

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim N(\mu, 16)$ e $n = 25$.

(a) Para testar $H_0 : \mu = 50$ vs $H_1 : \mu \neq 50$ ao nível $\alpha = 0.05$, construa o teste Z bilateral.

(b) Determine a região crítica em termos de $Z$.

(c) Se $\bar{x} = 52.4$, calcule $Z_{cal}$ e tome a decisão.

(d) Calcule o valor-p bilateral.

(e) Explique por que não existe teste UMP para $H_1$ bilateral.

## [Questão 64] Função Crítica e Aleatorização

Sejam $X_1, \ldots, X_{10}$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim \text{Poisson}(2)$.

(a) Para testar $H_0 : \lambda = 2$ vs $H_1 : \lambda = 4$, deseja-se um teste de tamanho exato $\alpha = 0.05$.

(b) Calcule $P_{H_0}(T > k)$ para $k = 26, 27, 28$ onde $T = \sum X_i \sim \text{Poisson}(20)$.

(c) Determine se é necessário usar teste aleatorizado.

(d) Se sim, calcule $\delta$ e escreva a função crítica completa.

## [Questão 65] Teste para Variância - Normal

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim N(0, \sigma^2)$ (média conhecida $\mu = 0$).

(a) Para testar $H_0 : \sigma^2 = 1$ vs $H_1 : \sigma^2 = 2$, use LNP para construir o teste MP.

(b) Mostre que a região crítica depende de $\sum_{i=1}^n x_i^2$.

(c) Sob $H_0$, qual é a distribuição de $Q = \sum_{i=1}^n X_i^2$?

(d) Para $n = 20$ e $\alpha = 0.05$, determine a região crítica usando quantis $\chi^2_{20}$.

## [Questão 66] Integração TCL com Testes

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim \text{Bernoulli}(p)$ e $n$ grande.

(a) Para testar $H_0 : p = 0.5$ vs $H_1 : p > 0.5$, use aproximação normal (via TCL) para $\bar{X}_n$.

(b) Construa a estatística de teste $Z = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - 0.5)}{\sqrt{0.25}}$.

(c) Para $n = 100$ e $\bar{x} = 0.58$, calcule $Z_{cal}$ e o valor-p.

(d) Compare com o teste exato usando distribuição Binomial.

## [Questão 67] Consistência de Testes

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$.

(a) Considere o teste de $H_0 : \mu = \mu_0$ vs $H_1 : \mu = \mu_1 > \mu_0$ que rejeita se $\bar{X}_n > c_n$.

(b) Se $c_n = \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_\alpha$, calcule $\lim_{n\to\infty} \alpha_n$.

(c) Calcule $\lim_{n\to\infty} \beta_n$ para $\mu = \mu_1$.

(d) Mostre que o poder $Q_n(\mu_1) \to 1$ quando $n \to \infty$ (consistência do teste).

## [Questão 68] Tamanho Amostral para Testes

Deseja-se testar $H_0 : \mu = 500$ vs $H_1 : \mu = 510$ com $X_i \sim N(\mu, 100)$.

(a) Fixando $\alpha = 0.05$ e desejando $\beta \leq 0.10$, determine o tamanho amostral mínimo $n_0$.

(b) Use as relações: $\bar{X}_n > \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_\alpha$ e $\beta = \Phi\left(\frac{c-\mu_1}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$.

(c) Resolva para $n$: $z_\alpha + z_\beta = \frac{\sqrt{n}(\mu_1-\mu_0)}{\sigma}$.

(d) Calcule numericamente com $z_{0.05} = 1.645$ e $z_{0.10} = 1.282$.

## [Questão 69] Aplicação do LNP - Densidade Arbitrária

Sejam $X, Y$ duas v.a.'s independentes com densidades conhecidas $f_0(x)$ e $f_1(x)$.

(a) Para testar $H_0 : X \sim f_0$ vs $H_1 : X \sim f_1$, construa o teste MP usando LNP.

(b) A região crítica é $\left\{\frac{f_1(x)}{f_0(x)} > k\right\}$. Como determinar $k$?

(c) Dê um exemplo concreto com $f_0 = N(0, 1)$ e $f_1 = N(2, 1)$.

## [Questão 70] Teste UMP - Uniforme

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $X_i \sim U(0, \theta)$.

(a) Para testar $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta > \theta_0$, mostre que $T = X_{(n)}$ é suficiente.

(b) O teste UMP rejeita para $T > c$ ou $T < c'$. Explique por quê.

(c) Determine $c$ e $c'$ em função de $\alpha$ e $\theta_0$.

(d) Para $\theta_0 = 10$, $\alpha = 0.05$, $n = 20$, calcule os limites.

### 16.1 Respostas Selecionadas - Questões Adicionais

**Questão 61(b):** Teste UMP: Rejeitar $H_0$ se $Z = \sqrt{n}\frac{\bar{X}_n-\mu_0}{\sigma} > z_\alpha$.

**Questão 62(a):** $\frac{L(\lambda_1)}{L(\lambda_0)} = e^{n(\lambda_0-\lambda_1)}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)^T$ onde $T = \sum x_i$.

**Questão 63(e):** Não existe UMP bilateral porque diferentes valores de $\mu \neq \mu_0$ (acima e abaixo) requerem diferentes regiões críticas ótimas.

**Questão 66(c):** $Z_{cal} = \frac{10(0.58-0.5)}{0.5} = 1.6$, valor-p $= P(Z > 1.6) = 0.0548$.

**Questão 67(d):** Como $c_n - \mu_1 = \mu_0 - \mu_1 + O(1/\sqrt{n}) \to -\infty$, temos $\beta_n \to 0$, logo poder $\to 1$.

**Questão 68(d):** $n_0 = \left\lceil \left(\frac{(1.645+1.282)\times 10}{10}\right)^2 \right\rceil = \lceil (2.927)^2 \rceil = 9$.

**Questão 70(b):** Para Uniforme, rejeita-se tanto para valores muito pequenos quanto muito grandes de $T$, pois valores pequenos indicam $\theta < \theta_0$ e o teste precisa ter nível $\alpha$ exato.

**Questão 70(c):** $c = \theta_0(1-\alpha)^{1/n}$ e o teste rejeita se $T > \theta_0$ ou $T < c$.