Material Auxiliar - Final do Capítulo 4

Testes UMP para Hipóteses Bilaterais

Seção 4.5: Exemplos de Existência e Não-Existência

Curso de Inferência Estatística – PPGEST/UFPE

Material Didático Complementar

Novembro 2025

OBJETIVO DESTE MATERIAL: Explicar detalhadamente os passos finais do Capítulo 4, especialmente a construção de testes UMP para hipóteses bilaterais, contrastando dois casos fundamentais: (1) quando NÃO existe teste UMP (Normal) e (2) quando EXISTE teste UMP (Uniforme). Este material cobre as notas n76–n83.

Sumário

1 Contexto: O Problema de Hipóteses Bilaterais

Seção 4.5: Teste para H_1 Composta Bilateral

Até agora estudamos testes para hipóteses **unilaterais**:

- $H_0 : \theta \leq \theta_0$ vs $H_1 : \theta > \theta_0$ (unilateral à direita)
- $H_0 : \theta \geq \theta_0$ vs $H_1 : \theta < \theta_0$ (unilateral à esquerda)

Agora consideramos o caso **bilateral**:

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \theta \neq \theta_0$$

Pergunta Fundamental: Existe teste UMP (Uniformemente Mais Poderoso) para este problema bilateral?

Intuição e Interpretação

Por que a Questão é Importante?

No caso unilateral, o Teorema de Karlin-Rubin (TKR) nos deu uma resposta clara: se a família tem RVM (Razão de Verossimilhança Monótona), então existe teste UMP e sabemos como construí-lo.
Para o caso bilateral, a situação é mais delicada:

- **Problema:** Queremos um teste que seja simultaneamente bom para detectar $\theta > \theta_0$ E para detectar $\theta < \theta_0$
- **Conflito:** O teste UMP para $H_1 : \theta > \theta_0$ rejeita valores grandes, mas o teste UMP para $H_1 : \theta < \theta_0$ rejeita valores pequenos
- **Resultado:** Em alguns casos é impossível conciliar essas duas direções (ex: Normal). Em outros casos especiais, existe uma solução (ex: Uniforme)

Comparação e Contexto

Os Dois Exemplos que Veremos

Distribuição	**Normal** $N(\mu, \sigma^2)$	**Uniforme** $U(0, \theta)$
Parâmetro	$\mu \in \mathbb{R}$	$\theta > 0$
Estatística Suficiente	$T(X) = \sum X_i$ ou $\bar{X}_n$	$T(X) = X_{(n)} = \max\{X_1, \dots, X_n\}$
Possui RVM?	Sim (RVM crescente em T)	Sim (mas com particularidade)
Existe UMP bilateral?	NÃO	SIM
Razão	Testes para $\mu > \mu_0$ e $\mu < \mu_0$ são incompatíveis	Geometria especial permite conciliar

2 Exemplo 4.5.1: NÃO Existência de Teste UMP (Normal)

Exemplo 4.5.1 – Normal: Notas n76–n78

Modelo: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. com $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, onde $\mu \in \mathbb{R}$ desconhecido e $\sigma^2 > 0$ conhecido.
Hipóteses:

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

2.1 Passo 1: Recordar os Testes UMP Unilaterais

Passo a Passo Detalhado

Para $H_1 : \mu > \mu_0$ (unilateral à direita):
A estatística suficiente é $T(X) = \sum X_i$ (ou equivalentemente $\bar{X}_n$).
Vimos que a razão de verossimilhança para $\mu^* > \mu$ é:

$$\frac{f(t;\mu^*)}{f(t;\mu)} = \exp\left\{\frac{1}{2n\sigma^2}[2nt(\mu^* - \mu) + n^2(\mu^{*2} - \mu^2)]\right\}$$

Como $\mu^* > \mu$, temos $\mu^* - \mu > 0$, logo a razão é **crescente em** t (RVM crescente).
Pelo TKR, o teste UMP de nível α tem região crítica:

$$\psi_+(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } T(x) > k_+ \\ 0, & \text{se } T(x) < k_+ \end{cases} \quad \text{ou equivalentemente} \quad \psi_+(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu_0)}{\sigma} > z_\alpha \\ 0, & \text{o.c.} \end{cases}$$

Interpretação: Rejeitamos H_0 quando a média amostral está **muito acima** de μ_0.

Passo a Passo Detalhado

Para $H_1 : \mu < \mu_0$ (unilateral à esquerda):
Agora consideramos $\mu^* < \mu$. A razão de verossimilhança:

$$\frac{f(t;\mu^*)}{f(t;\mu)} = \exp\left\{\frac{1}{2n\sigma^2}[2nt(\mu^* - \mu) + n^2(\mu^{*2} - \mu^2)]\right\}$$

Como $\mu^* < \mu$, temos $\mu^* - \mu < 0$, logo a razão é **decrescente em** t (RVM decrescente).
Pelo TKR, o teste UMP de nível α tem região crítica:

$$\psi_-(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } T(x) < k_- \\ 0, & \text{se } T(x) > k_- \end{cases} \quad \text{ou equivalentemente} \quad \psi_-(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu_0)}{\sigma} < -z_\alpha \\ 0, & \text{o.c.} \end{cases}$$

Interpretação: Rejeitamos H_0 quando a média amostral está **muito abaixo** de μ_0.

2.2 Passo 2: O Conflito Fundamental

ATENÇÃO - Ponto Crucial

O Problema da Incompatibilidade:
Suponha que observamos uma amostra tal que a estatística calculada satisfaz:

$$-z_\alpha < \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu_0)}{\sigma} < z_\alpha$$

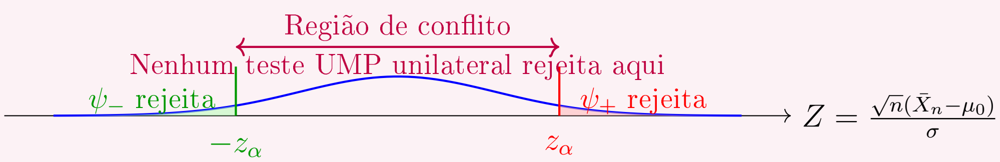
Isto é, a estatística está na região "intermediária".
Segundo ψ_+ (teste para $\mu > \mu_0$): Como $\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu_0)}{\sigma} < z_\alpha$, temos $\psi_+(x) = 0$ (não rejeita).
Segundo ψ_- (teste para $\mu < \mu_0$): Como $\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu_0)}{\sigma} > -z_\alpha$, temos $\psi_-(x) = 0$ (não rejeita).
Para o teste bilateral: Queremos rejeitar quando $\mu \neq \mu_0$ (tanto para $\mu > \mu_0$ quanto para $\mu < \mu_0$).
Conclusão: Não conseguimos construir um teste UMP bilateral porque:

- Se usássemos ψ_+, seríamos ótimos apenas para detectar $\mu > \mu_0$
- Se usássemos ψ_-, seríamos ótimos apenas para detectar $\mu < \mu_0$
- Qualquer teste bilateral teria que comprometer em ambas as direções

Intuição e Interpretação

Visualização do Problema

Por que NÃO existe UMP para Normal bilateral?



Explicação:

- Para ser UMP bilateral, o teste deveria ser simultaneamente ótimo contra $\mu > \mu_0$ E contra $\mu < \mu_0$
- Mas o teste ótimo para $\mu > \mu_0$ rejeita apenas à direita
- E o teste ótimo para $\mu < \mu_0$ rejeita apenas à esquerda
- Qualquer teste bilateral precisa comprometer, rejeitando em ambas as caudas
- Esse compromisso impede que ele seja uniformemente mais poderoso

3 Exemplo 4.5.2: EXISTÊNCIA de Teste UMP (Uniforme)

Exemplo 4.5.2 – Uniforme: Notas n79–n83

Modelo: $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. com $X_i \sim U(0, \theta)$, onde $\theta > 0$ desconhecido.
Hipóteses:

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \theta \neq \theta_0$$

Resultado Surpreendente: EXISTE teste UMP para este problema bilateral!

3.1 Por que a Uniforme é Diferente?

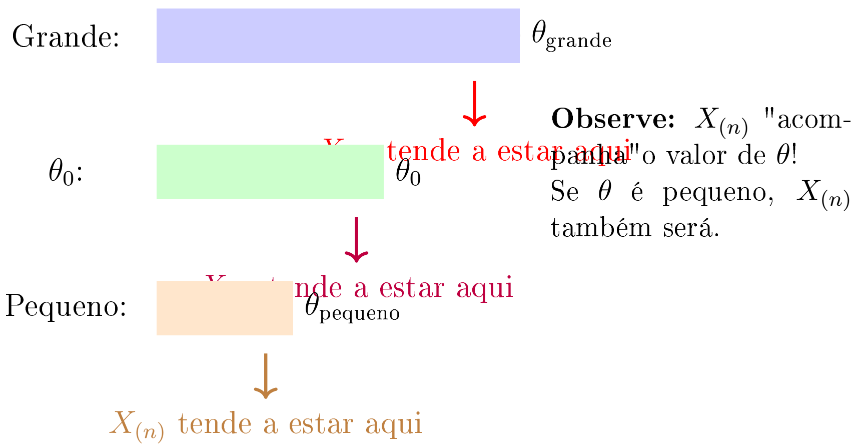
Intuição e Interpretação

Diferença Crucial da Uniforme:
Para a Uniforme, a estatística suficiente é $T(X) = X_{(n)} = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$.
Propriedade Geométrica Especial:

- $X_{(n)}$ está sempre entre 0 e θ (nunca excede θ!)
- Se θ é pequeno, $X_{(n)}$ tende a ser pequeno (limitado por θ)
- Se θ é grande, $X_{(n)}$ pode ser grande (mas ainda $\leq \theta$)

Consequência:

- Para detectar $\theta > \theta_0$: procuramos $X_{(n)} > k$ (valores grandes)
- Para detectar $\theta < \theta_0$: procuramos $X_{(n)} < k'$ (valores pequenos)
- MAS ambos os testes podem ser *consistentes* porque $X_{(n)} \leq \theta$!



3.2 Passo 1: Distribuição de $T(X) = X_{(n)}$ (Revisão)

Passo a Passo Detalhado

Distribuição da Estatística Suficiente:
Para o máximo de n uniformes $U(0, \theta)$:

Função de Distribuição:

$$F_{X_{(n)}}(t) = P(X_{(n)} \leq t) = P(\max\{X_1, \ldots, X_n\} \leq t) = [F_X(t)]^n = \left(\frac{t}{\theta}\right)^n \mathbf{1}_{(0,\theta)}(t)$$

Densidade:

$$f_{X_{(n)}}(t; \theta) = \frac{d}{dt} F_{X_{(n)}}(t) = n \cdot t^{n-1} \cdot \theta^{-n} \cdot \mathbf{1}_{(0,\theta)}(t)$$

Usando a notação $I_{(0,\theta)}(t)$ (função indicadora):

$$f(t; \theta) = n\, t^{n-1}\, \theta^{-n}\, I_{(0,\theta)}(t)$$

3.3 Passo 2: Verificar a Razão de Verossimilhança Monótona

Passo a Passo Detalhado

Para $\theta^* > \theta$ (valores maiores do parâmetro):
Calculemos a razão de verossimilhanças:

$$\begin{aligned} \frac{f(t; \theta^*)}{f(t; \theta)} &= \frac{n\, t^{n-1}\, (\theta^*)^{-n}\, I_{(0,\theta^*)}(t)}{n\, t^{n-1}\, \theta^{-n}\, I_{(0,\theta)}(t)} \\ &= \left(\frac{\theta}{\theta^*}\right)^n \cdot \frac{I_{(0,\theta^*)}(t)}{I_{(0,\theta)}(t)} \end{aligned}$$

Análise da Função Indicadora:
O termo $\frac{I_{(0,\theta^*)}(t)}{I_{(0,\theta)}(t)}$ precisa de cuidado:

- Se $0 < t < \theta$: ambos indicadores são 1, logo $\frac{I_{(0,\theta^*)}(t)}{I_{(0,\theta)}(t)} = 1$
- Se $\theta \leq t < \theta^*$: $I_{(0,\theta)}(t) = 0$ mas $I_{(0,\theta^*)}(t) = 1$, logo a razão não está bem definida (ou é ∞)
- Se $t \geq \theta^*$: ambos são 0

Interpretação da RVM:

$$\frac{f(t; \theta^*)}{f(t; \theta)} = \begin{cases} \left(\frac{\theta}{\theta^*}\right)^n, & 0 < t < \theta \\ \text{não definida}, & \theta \leq t < \theta^* \\ 0/0, & t \geq \theta^* \end{cases}$$

Ponto Crucial: Como $\theta^* > \theta$, temos $\frac{\theta}{\theta^*} < 1$, logo $\left(\frac{\theta}{\theta^*}\right)^n$ é constante (não depende de t) na região onde está definida.

Isso significa que a razão é *constante* (não crescente nem decrescente) em t para $t \in (0, \theta)$, mas a estrutura especial das funções indicadoras cria um comportamento especial.

3.4 Passo 3: Teste UMP para $H_1 : \theta > \theta_0$ (Unilateral)

Passo a Passo Detalhado

Aplicando o TKR:
Mesmo com a peculiaridade da RVM, podemos aplicar o Teorema de Karlin-Rubin. Para $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta > \theta_0$, o teste UMP de nível α tem região crítica:

$$\psi_{\text{UMP}}(x) = \begin{cases} 1, & T(x) > k \\ 0, & T(x) \leq k \end{cases}$$

Determinação de k:
Precisamos que $E_{\theta_0}[\psi(x)] = \alpha$, isto é:

$$\begin{aligned} \alpha &= P_{\theta_0}(T(x) > k) \\ &= P_{\theta_0}(X_{(n)} > k) \\ &= \int_k^{\theta_0} n\, t^{n-1}\, \theta_0^{-n}\, dt \\ &= \frac{n}{\theta_0^n} \left[\frac{t^n}{n} \right]_k^{\theta_0} \\ &= \frac{1}{\theta_0^n} [\theta_0^n - k^n] \\ &= 1 - \frac{k^n}{\theta_0^n} \end{aligned}$$

Resolvendo para k:

$$\frac{k^n}{\theta_0^n} = 1 - \alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{k}{\theta_0} = (1-\alpha)^{1/n} \quad \Rightarrow \quad \boxed{k = \theta_0 (1-\alpha)^{1/n}}$$

Interpretação:

- Rejeitamos H_0 se $X_{(n)} > \theta_0(1-\alpha)^{1/n}$
- Como $(1-\alpha)^{1/n} < 1$ (por exemplo, para $\alpha = 0.05$ e $n = 10$: $(0.95)^{0.1} \approx 0.9949$)
- Então rejeitamos se $X_{(n)}$ está "próximo"de θ_0 pelo lado inferior

Intuição e Interpretação

Por que isso faz sentido?
Se o verdadeiro θ fosse maior que θ_0, esperaríamos observar valores de $X_{(n)}$ maiores, possivelmente excedendo $\theta_0(1-\alpha)^{1/n}$.
Exemplo Numérico:

- $\theta_0 = 10$, $n = 20$, $\alpha = 0.05$
- $k = 10 \cdot (0.95)^{1/20} = 10 \cdot 0.9974 = 9.974$
- Rejeitamos se $X_{(20)} > 9.974$

Se observarmos $X_{(20)} = 9.98$, isto sugere que $\theta > 10$ porque o máximo ultrapassou quase todo o intervalo $(0, 10)$.

3.5 Passo 4: A Ideia Chave para o Teste Bilateral

ATENÇÃO - Ponto Crucial

Insight Fundamental (Notas n80–n81):
Para a Uniforme, existe uma **simetria especial** que permite construir teste UMP bilateral:

1. **Detectar $\theta > \theta_0$:** Rejeitamos se $X_{(n)} > \theta_0(1-\alpha/2)^{1/n}$ (valores grandes de $X_{(n)}$)
2. **Detectar $\theta < \theta_0$:** Rejeitamos se $X_{(n)} < \theta_0(\alpha/2)^{1/n}$ (valores pequenos de $X_{(n)}$)
3. **Combinação:** Como $X_{(n)} \leq \theta$ sempre, as duas condições NÃO entram em conflito!

Por que isso funciona para Uniforme mas não para Normal?

- **Normal:** $\bar{X}_n$ pode assumir *qualquer valor real*, então valores intermediários criam ambiguidade
- **Uniforme:** $X_{(n)} \in (0, \theta)$ sempre, então valores pequenos indicam inequivocamente θ pequeno, e valores próximos de θ_0 (ou maiores que θ_0) indicam θ grande

3.6 Passo 5: Construção da Função Poder (Notas n80–n81)

Passo a Passo Detalhado

Objetivo: Mostrar que a função poder do teste UMP para $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta > \theta_0$ pode ser escrita como:

$$\beta_{\psi^*}(\theta) = 1 - (1-\alpha)\left(\frac{\theta_0}{\theta}\right)^n \quad \text{para } \theta > \theta_0$$

Passo 5.1 - Definir $g(t)$:
Definimos:

$$g(t) = E[\psi^*(x) \mid T(x) = t]$$

Esta é a *esperança condicional* da função de teste dado o valor da estatística suficiente.
Propriedade Importante: Como $T(x)$ é suficiente para θ, $g(t)$ **não depende de θ!**
Passo 5.2 - Relacionar com α:
Por definição do nível do teste:

$$\begin{aligned}
\alpha &= E_{\theta_0}[\psi^*(x)] \\
&= E_{\theta_0}[E[\psi^*(x) \mid T]] \quad \text{(lei da esperança total)} \\
&= E_{\theta_0}[g(T)]
\end{aligned}$$

Passo 5.3 - Usar a propriedade $\psi^*(x) = 1$ para $t > \theta_0$:

Se o teste tem $\psi^*(x) = 1$ sempre que $T(x) > \theta_0$, então:

$$g(t) = 1 \quad \text{para todo } t > \theta_0$$

Passo a Passo Detalhado

Passo 5.4 - Calcular $E_\theta[\psi^*(x)]$ para $\theta > \theta_0$:
Dividimos a integral em duas partes:

$$\begin{aligned} E_\theta[\psi^*(x)] &= \int_0^\infty g(t) \cdot f(t;\theta)\,dt \\ &= \int_0^{\theta_0} g(t) \cdot nt^{n-1}\theta^{-n}\,dt + \int_{\theta_0}^{\theta} g(t) \cdot nt^{n-1}\theta^{-n}\,dt \end{aligned}$$

Truque Algébrico: Multiplicar e dividir o primeiro termo por θ_0^n:

$$= \left(\frac{\theta_0}{\theta}\right)^n \int_0^{\theta_0} g(t) \cdot nt^{n-1}\theta_0^{-n}\,dt + \int_{\theta_0}^{\theta} g(t) \cdot nt^{n-1}\theta^{-n}\,dt$$

Reconhecer a primeira integral: A primeira integral é $E_{\theta_0}[g(T)] = \alpha$ (do Passo 5.2)!
Simplificar a segunda integral: Como $g(t) = 1$ para $t \geq \theta_0$:

$$\begin{aligned} \int_{\theta_0}^{\theta} 1 \cdot nt^{n-1}\theta^{-n}\,dt &= \frac{n}{\theta^n}\left[\frac{t^n}{n}\right]_{\theta_0}^{\theta} \\ &= \frac{1}{\theta^n}[\theta^n - \theta_0^n] \\ &= 1 - \left(\frac{\theta_0}{\theta}\right)^n \end{aligned}$$

Passo 5.5 - Combinar:

$$\begin{aligned} \beta_{\psi^*}(\theta) &= \left(\frac{\theta_0}{\theta}\right)^n \cdot \alpha + \left[1 - \left(\frac{\theta_0}{\theta}\right)^n\right] \\ &= \left(\frac{\theta_0}{\theta}\right)^n \alpha + 1 - \left(\frac{\theta_0}{\theta}\right)^n \\ &= 1 - (1-\alpha)\left(\frac{\theta_0}{\theta}\right)^n \quad \checkmark \end{aligned}$$

Esta é exatamente a expressão (4.5.2.1) das notas!

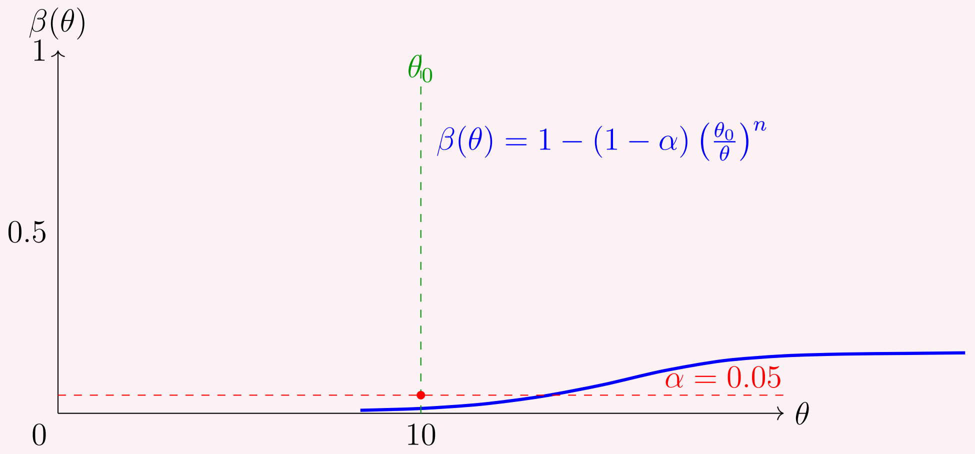
Intuição e Interpretação

Interpretação da Função Poder

A função poder $\beta(\theta) = 1 - (1-\alpha)\left(\frac{\theta_0}{\theta}\right)^n$ tem propriedades interessantes:

- **Para $\theta = \theta_0$:** $\beta(\theta_0) = 1 - (1-\alpha) \cdot 1 = \alpha$ ✓(tamanho correto)
- **Para $\theta \to \infty$:** $\left(\frac{\theta_0}{\theta}\right)^n \to 0$, logo $\beta(\theta) \to 1$ (poder perfeito)
- **Para $\theta > \theta_0$:** $\beta(\theta) > \alpha$ (poder maior que o nível)
- **Crescente:** Como θ aumenta, $\left(\frac{\theta_0}{\theta}\right)^n$ diminui, logo $\beta(\theta)$ aumenta

Gráfico Conceitual:



4 Teorema 4.5.1: Teste UMP Bilateral para Uniforme

Teorema 4.5.1 (Nota n82)

Sejam $X_1, \dots, X_n$ uma amostra de $X \sim U(0, \theta)$.
Considere testar:

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \theta \neq \theta_0$$

onde $\theta_0 > 0$ é fixado.
O teste φ com função crítica:

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } T(x) > \theta_0 \text{ ou } T(x) \leq \theta_0 \alpha^{1/n} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

é UMP de nível α.

4.1 Entendendo a Região Crítica

Intuição e Interpretação

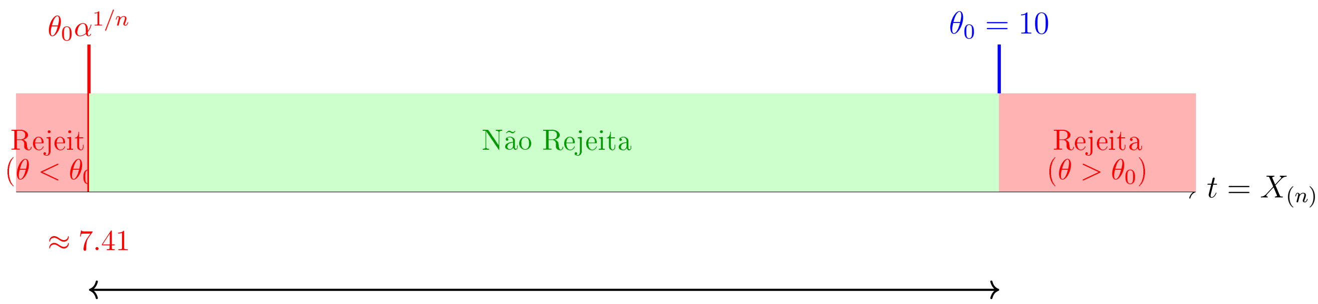
A região crítica tem DUAS partes:

Parte 1: $T(x) > \theta_0$ Rejeitamos se o máximo da amostra **excede** θ_0.
Interpretação: Se observamos algum $X_i > \theta_0$, então CERTAMENTE $\theta > \theta_0$ (pois todos os dados devem estar em $(0, \theta)$).
Exemplo: Se $\theta_0 = 10$ e observamos $X_{(n)} = 10.5$, sabemos que $\theta \geq 10.5 > 10$.

Parte 2: $T(x) \leq \theta_0 \alpha^{1/n}$ Rejeitamos se o máximo da amostra está **muito pequeno**.
Interpretação: Se $X_{(n)}$ é muito menor que θ_0, isto sugere que o verdadeiro θ é menor que θ_0.
Exemplo: Se $\theta_0 = 10$, $\alpha = 0.05$, $n = 10$, então:

$$\theta_0 \alpha^{1/n} = 10 \cdot (0.05)^{0.1} = 10 \cdot 0.7408 \approx 7.41$$

Se observamos $X_{(10)} = 7.0 < 7.41$, rejeitamos H_0, sugerindo que $\theta < 10$.



Região de não rejeição: $[\theta_0 \alpha^{1/n}, \theta_0]$

4.2 Passo 6: Prova do Teorema 4.5.1 (Nota n82)

Passo a Passo Detalhado

Precisamos mostrar que o teste tem nível α:
Calculamos:

$$E_{\theta_0}[\varphi_n(x)] = P_{\theta_0}[T(x) > \theta_0] + P_{\theta_0}[T(x) \leq \theta_0 \alpha^{1/n}]$$

Primeiro termo:

$$\begin{aligned} P_{\theta_0}[T(x) > \theta_0] &= P_{\theta_0}[X_{(n)} > \theta_0] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por quê? Porque sob H_0, todos os $X_i \sim U(0, \theta_0)$, logo $X_i \leq \theta_0$ sempre, portanto $X_{(n)} \leq \theta_0$.
Segundo termo:

$$\begin{aligned} P_{\theta_0}[T(x) \leq \theta_0 \alpha^{1/n}] &= P_{\theta_0}[X_{(n)} \leq \theta_0 \alpha^{1/n}] \\ &= F_{X_{(n)}}(\theta_0 \alpha^{1/n}; \theta_0) \\ &= \left(\frac{\theta_0 \alpha^{1/n}}{\theta_0}\right)^n \\ &= (\alpha^{1/n})^n \\ &= \alpha \end{aligned}$$

Conclusão:

$$E_{\theta_0}[\varphi_n(x)] = 0 + \alpha = \alpha \quad \checkmark$$

O teste tem tamanho exatamente α! ✓

ATENÇÃO - Ponto Crucial

Ponto Crucial:
Note que $P_{\theta_0}[X_{(n)} > \theta_0] = 0$ é específico da Uniforme!
Para a Normal, $\bar{X}_n$ pode assumir qualquer valor (incluindo valores muito maiores que μ_0), então não existe essa restrição natural.
Esta é a **diferença fundamental** que permite a construção do teste UMP bilateral para Uniforme mas não para Normal.

4.3 Passo 7: Teste para $H_1 : \theta < \theta_0$ (Nota n83)

Passo a Passo Detalhado

Aplicando TKR para a outra direção:
Para testar $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta < \theta_0$, precisamos de RVM decrescente.
Análise da RVM: Para $\theta^* < \theta$:

$$\frac{f(t;\theta^*)}{f(t;\theta)} = \left(\frac{\theta}{\theta^*}\right)^n \cdot \frac{I_{(0,\theta^*)}(t)}{I_{(0,\theta)}(t)}$$

Como $\theta^* < \theta$, temos $\frac{\theta}{\theta^*} > 1$.
Para $t \in (0, \theta^*)$, a razão é constante (não depende de t), mas a estrutura dos suportes implica que valores pequenos de t são mais prováveis sob θ^* (menor).
Pelo TKR, o teste UMP tem região crítica:

$$\psi_{\gamma^{**}}(x) = \begin{cases} 1, & T(x) < \theta_0 \alpha^{1/n} \\ 0, & T(x) > \theta_0 \alpha^{1/n} \end{cases}$$

Observação Fundamental (Nota n83): Os testes φ (bilateral) e $\psi_{\gamma^{**}}$ (unilateral esquerdo) **coincidem** na parte inferior da região crítica!
Ambos rejeitam quando $T(x) \leq \theta_0 \alpha^{1/n}$.
Consequência: Isso ajuda a provar que φ é UMP para o problema bilateral, pois ele incorpora corretamente ambas as direções.

5 Síntese e Comparação Final

Comparação e Contexto

Quadro Comparativo: Normal vs Uniforme

Aspecto	**Normal** $N(\mu, \sigma^2)$	**Uniforme** $U(0, \theta)$
Estatística Suficiente	$T = \sum X_i$ ou $\bar{X}_n$	$T = X_{(n)} = \max\{X_i\}$
Suporte de T	$T \in \mathbb{R}$ (ilimitado)	$T \in (0, \theta)$ (limitado por θ)
UMP para $H_1 : \theta > \theta_0$	Sim: rejeita se $T > k_+$	Sim: rejeita se $T > k_+$
UMP para $H_1 : \theta < \theta_0$	Sim: rejeita se $T < k_-$	Sim: rejeita se $T < k_-$
UMP para $H_1 : \theta \neq \theta_0$	NÃO	SIM
Região Crítica Bilateral	$\|T - \mu_0\| > k$ (duas caudas independentes)	$T > \theta_0$ OU $T < \theta_0 \alpha^{1/n}$
Por que funciona/não funciona?	Valores intermediários criam ambiguidade	$T \leq \theta$ sempre elimina ambiguidade
Teste Prático Usado	Teste bilateral clássico (não UMP)	Teste UMP do Teorema 4.5.1

ATENÇÃO - Ponto Crucial

A Grande Lição

Para hipóteses bilaterais:

1. **Regra Geral:** Na maioria dos casos (Normal, Exponencial, Poisson, etc.) NÃO existe teste UMP bilateral
2. **Exceção Especial:** Para distribuições com suporte limitado pelo parâmetro (como Uniforme), pode existir teste UMP bilateral
3. **Alternativas quando não existe UMP:**
   - Teste da Razão de Verossimilhança (TRV)
   - Testes UMPNV (Uniformemente Mais Poderosos Não Viesados)
   - Testes baseados em outros critérios de otimalidade

6 Resumo Passo a Passo dos Cálculos Principais

Passo a Passo Detalhado

Resumo do Exemplo 4.5.2 (Uniforme)

Passo 1: Identificar estatística suficiente $T(X) = X_{(n)}$ com densidade $f(t;\theta) = nt^{n-1}\theta^{-n}I_{(0,\theta)}(t)$

Passo 2: Calcular razão de verossimilhança Para $\theta^* > \theta$:

$$\frac{f(t;\theta^*)}{f(t;\theta)} = \left(\frac{\theta}{\theta^*}\right)^n \frac{I_{(0,\theta^*)}(t)}{I_{(0,\theta)}(t)}$$

Passo 3: Verificar RVM A razão tem comportamento monótono (com cuidado nas funções indicadoras)

Passo 4: Aplicar TKR para $H_1 : \theta > \theta_0$ Teste UMP rejeita se $T(x) > k$ onde $k = \theta_0(1-\alpha)^{1/n}$

Passo 5: Calcular função poder Usando esperança condicional e suficiência:

$$\beta(\theta) = 1 - (1-\alpha)\left(\frac{\theta_0}{\theta}\right)^n$$

Passo 6: Construir teste bilateral Região crítica: $T(x) > \theta_0$ OU $T(x) \leq \theta_0\alpha^{1/n}$

Passo 7: Verificar nível

$$\begin{aligned} E_{\theta_0}[\varphi_n(x)] &= P_{\theta_0}[T > \theta_0] + P_{\theta_0}[T \leq \theta_0\alpha^{1/n}] \\ &= 0 + \alpha = \alpha \quad \checkmark \end{aligned}$$

Passo 8: Concluir que é UMP Usando argumentos das notas n80–n83, mostra-se que este teste bilateral é de fato UMP.

7 Exemplo Numérico Completo

Aplicação Prática do Teorema 4.5.1

Problema: Um pesquisador quer testar se o diâmetro máximo de partículas em suspensão é igual a 10 micrômetros. Ele coleta $n = 15$ partículas e mede seus diâmetros, assumindo que seguem $U(0, \theta)$.
Dados: $n = 15$, $\theta_0 = 10$, $\alpha = 0.05$
Hipóteses:

$$H_0 : \theta = 10 \quad \text{vs} \quad H_1 : \theta \neq 10$$

Passo a Passo Detalhado

Solução Passo a Passo

Passo 1: Calcular os limites da região de não rejeição **Limite inferior:**

$$k_{\text{inf}} = \theta_0 \alpha^{1/n} = 10 \cdot (0.05)^{1/15} = 10 \cdot (0.05)^{0.0667} \approx 10 \cdot 0.8025 = 8.025$$

Limite superior:

$$k_{\text{sup}} = \theta_0 = 10$$

Passo 2: Determinar a regra de decisão **Região crítica:**

$$R_c = \{x : X_{(15)} > 10 \text{ ou } X_{(15)} \leq 8.025\}$$

Região de não rejeição:

$$R_{nc} = \{x : 8.025 < X_{(15)} \leq 10\}$$

Passo 3: Aplicar aos dados **Cenário A:** Observamos $X_{(15)} = 9.5$

- Como $8.025 < 9.5 < 10$, está na região de não rejeição
- **Decisão:** Não rejeitamos H_0
- **Interpretação:** Não há evidência suficiente contra $\theta = 10$

Cenário B: Observamos $X_{(15)} = 10.3$

- Como $10.3 > 10 = \theta_0$, está na região crítica
- **Decisão:** Rejeitamos H_0
- **Interpretação:** Há evidência forte de que $\theta > 10$ (certeza, pois observamos valor $> \theta_0$!)

Cenário C: Observamos $X_{(15)} = 7.8$

- Como $7.8 < 8.025 = \theta_0 \alpha^{1/n}$, está na região crítica
- **Decisão:** Rejeitamos H_0
- **Interpretação:** Há evidência de que $\theta < 10$ (máximo muito pequeno)

Passo 4: Calcular a função poder Para $\theta = 12$ (alternativa):

$$\begin{aligned}\beta(12) &= P_{12}[\text{Rejeitar } H_0] \\ &= P_{12}[X_{(15)} > 10] + P_{12}[X_{(15)} \leq 8.025]\end{aligned}$$

Primeiro termo:

$$\begin{aligned}P_{12}[X_{(15)} > 10] &= 1 - F_{X_{(15)}}(10; \theta = 12) \\ &= 1 - \left(\frac{10}{12}\right)^{15} \\ &= 1 - (0.833)^{15} \\ &\approx 1 - 0.0649 = 0.9351\end{aligned}$$

Segundo termo:

$$\begin{aligned}P_{12}[X_{(15)} \leq 8.025] &= \left(\frac{8.025}{12}\right)^{15} \\ &= (0.669)^{15} \\ &\approx 0.0003\end{aligned}$$

Poder total:

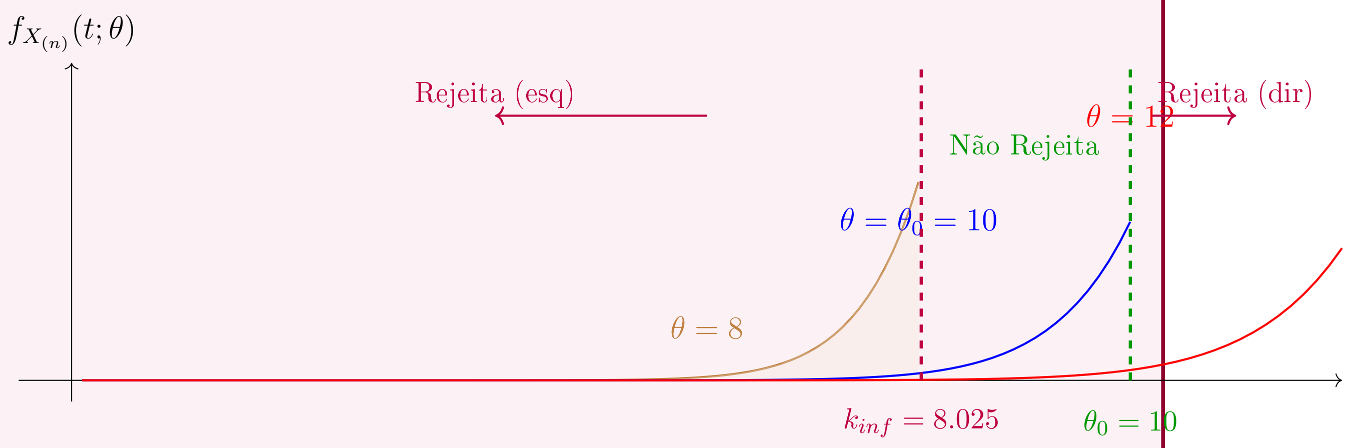
$$\beta(12) \approx 0.9351 + 0.0003 = 0.9354$$

O teste tem poder de aproximadamente 93.5

8 Interpretação Geométrica e Visual

Intuição e Interpretação

Visualização da Densidade de $X_{(n)}$ sob Diferentes θ



Observações Importantes:

1. Quando $\theta < \theta_0$ (curva marrom), a densidade se concentra em valores pequenos, com alta probabilidade de $X_{(n)} < 8.025$ (região crítica esquerda)

2. Quando $\theta = \theta_0$ (curva azul), há apenas $\alpha = 0.05$ de probabilidade de cair nas regiões críticas

3. Quando $\theta > \theta_0$ (curva vermelha), há alta probabilidade de $X_{(n)} > 10$ (região crítica direita), e também possibilidade de valores entre 10 e 12

Estrutura Lógica da Demonstração (Notas n79–n83)

Fluxo da Argumentação

n79: Apresenta o Exemplo 4.5.2 da Uniforme

- Define o modelo e estatística suficiente
- Calcula a densidade de $T = X_{(n)}$
- Mostra a razão de verossimilhança
- Aplica TKR para obter teste UMP unilateral ($H_1 : \theta > \theta_0$)
- Calcula $k = \theta_0(1-\alpha)^{1/n}$

n80: Introduz o problema bilateral

- Quer teste UMP para $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta \neq \theta_0$
- Define função $g(t) = E[\psi^*(x) \mid T = t]$ (esperança condicional)
- Mostra que $g(t)$ não depende de θ (por suficiência)
- Inicia cálculo da função poder

n81: Completa o cálculo da função poder

- Usa $g(t) = 1$ para $t > \theta_0$ (propriedade do teste)
- Divide integral em duas partes: $(0, \theta_0)$ e (θ_0, θ)
- Usa truque de multiplicar por $\left(\frac{\theta_0}{\theta}\right)^n$ no primeiro termo
- Obtém $\beta(\theta) = 1 - (1-\alpha)\left(\frac{\theta_0}{\theta}\right)^n$

n82: Enuncia e inicia prova do Teorema 4.5.1

- Apresenta a função crítica do teste bilateral
- Mostra que $P_{\theta_0}[T > \theta_0] = 0$ (crucial!)
- Calcula $P_{\theta_0}[T \leq \theta_0 \alpha^{1/n}] = \alpha$
- Conclui que o teste tem nível α

n83: Finaliza a argumentação

- Mostra teste UMP para $H_1 : \theta < \theta_0$
- Observa que ambos os testes coincidem na parte inferior
- Conclui que φ é UMP para o problema bilateral

9 Exercícios para Fixação

Exercício 1: Cálculo de Região Crítica

Para $X_i \sim U(0, \theta)$, $n = 20$, $\theta_0 = 5$, $\alpha = 0.10$:
(a) Calcule os limites da região crítica para o teste bilateral UMP.
(b) Se observarmos $X_{(20)} = 4.8$, qual a decisão?
(c) Se observarmos $X_{(20)} = 4.2$, qual a decisão?
(d) Calcule o poder do teste para $\theta = 6$.

Passo a Passo Detalhado

Solução do Exercício 1

(a) Limites da região crítica:
Limite inferior:

$$k_{\text{inf}} = \theta_0 \alpha^{1/n} = 5 \cdot (0.10)^{1/20} = 5 \cdot 0.8913 = 4.456$$

Limite superior:

$$k_{\text{sup}} = \theta_0 = 5$$

Região crítica: $X_{(20)} > 5$ OU $X_{(20)} \leq 4.456$
(b) Decisão para $X_{(20)} = 4.8$:
Como $4.456 < 4.8 < 5$, o valor está na região de não rejeição.
Decisão: Não rejeitamos H_0 ao nível 10%.
(c) Decisão para $X_{(20)} = 4.2$:
Como $4.2 < 4.456$, o valor está na região crítica (esquerda).
Decisão: Rejeitamos H_0 ao nível 10%, com evidência de que $\theta < 5$.
(d) Poder para $\theta = 6$:

$$\begin{aligned}
\beta(6) &= P_6[X_{(20)} > 5] + P_6[X_{(20)} \leq 4.456] \\
&= \left[1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{20}\right] + \left(\frac{4.456}{6}\right)^{20} \\
&= [1 - (0.833)^{20}] + (0.743)^{20} \\
&\approx [1 - 0.0261] + 0.00004 \\
&\approx 0.974
\end{aligned}$$

O teste tem poder de aproximadamente 97.4

10 Perguntas e Respostas Frequentes

FAQ sobre o Material Final do Cap 4

Q1: Por que $P_{\theta_0}[X_{(n)} > \theta_0] = 0$ para a Uniforme? **R:** Porque sob H_0, todos os $X_i \sim U(0, \theta_0)$, então $X_i \in (0, \theta_0)$ com probabilidade 1. Logo, o máximo também satisfaz $X_{(n)} \in (0, \theta_0)$, e $P[X_{(n)} > \theta_0] = 0$.
Para a Normal, X_i pode assumir qualquer valor real, então $\bar{X}_n > \mu_0$ tem probabilidade positiva.
Q2: Por que usamos $\alpha^{1/n}$ e não simplesmente α? **R:** Queremos que $P_{\theta_0}[X_{(n)} \leq k] = \alpha$. Como:

$$P_{\theta_0}[X_{(n)} \leq k] = \left(\frac{k}{\theta_0}\right)^n$$

Precisamos resolver $\left(\frac{k}{\theta_0}\right)^n = \alpha$, que dá $k = \theta_0 \alpha^{1/n}$.
Q3: O que significa "os testes coincidem"(nota n83)? **R:** Significa que o teste bilateral φ e o teste unilateral esquerdo $\psi_{\gamma^{**}}$ têm exatamente a mesma região crítica na parte inferior: ambos rejeitam quando $T(x) \leq \theta_0 \alpha^{1/n}$.
Isso é importante para a prova de que φ é UMP bilateral.
Q4: Por que a função poder para Uniforme tem essa forma específica? **R:** A forma $\beta(\theta) = 1 - (1 - \alpha)\left(\frac{\theta_0}{\theta}\right)^n$ vem da distribuição de $X_{(n)}$. O termo $\left(\frac{\theta_0}{\theta}\right)^n$ representa a probabilidade de que TODOS os X_i estejam abaixo de θ_0 quando o verdadeiro parâmetro é θ.
Q5: Este teste UMP bilateral existe para outras distribuições com suporte limitado? **R:** Sim, em alguns casos. Por exemplo:

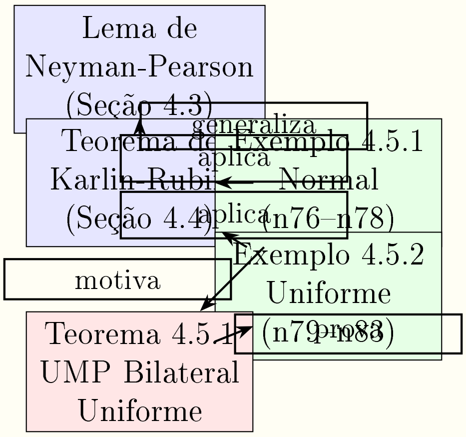
- $U(a, b)$ com ambos parâmetros desconhecidos (mais complexo)
- Algumas distribuições Beta com parâmetros especiais

Mas é uma propriedade rara! A maioria das distribuições (Normal, Exponencial, Poisson, etc.) NÃO tem teste UMP bilateral.

11 Conexões com o Resto do Capítulo 4

Comparação e Contexto

Como as Notas n79–n83 se Conectam com o Capítulo



Progressão Lógica:

1. **LNP (4.3):** Testes MP para hipóteses simples ($H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta = \theta_1$)
2. **Karlin-Rubin (4.4):** Testes UMP para hipóteses compostas *unilaterais* ($H_0 : \theta \leq \theta_0$ vs $H_1 : \theta > \theta_0$)
3. **Seção 4.5:** Testes para hipóteses compostas *bilaterais* ($H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta \neq \theta_0$)
   - Normal (4.5.1): Mostra que NEM SEMPRE existe UMP bilateral
   - Uniforme (4.5.2): Mostra um caso especial onde EXISTE UMP bilateral

12 Checklist de Estudo

ATENÇÃO - Ponto Crucial

Para Dominar o Final do Capítulo 4

Conceitos a Dominar:

- ☐ Entender por que hipóteses bilaterais são mais difíceis que unilaterais
- ☐ Saber explicar por que NÃO existe UMP bilateral para Normal
- ☐ Compreender a propriedade especial da Uniforme ($X_{(n)} \leq \theta$)
- ☐ Saber calcular $k = \theta_0(1-\alpha)^{1/n}$ e $k = \theta_0\alpha^{1/n}$
- ☐ Entender o papel da esperança condicional $g(t) = E[\psi(x)|T = t]$
- ☐ Saber derivar a função poder para a Uniforme

Cálculos a Praticar:

- ☐ Calcular densidade de estatísticas de ordem
- ☐ Determinar região crítica bilateral para Uniforme
- ☐ Calcular $P[X_{(n)} > k]$ e $P[X_{(n)} \leq k]$ para Uniforme
- ☐ Calcular função poder $\beta(\theta)$ para valores específicos
- ☐ Aplicar o Teorema 4.5.1 em exemplos numéricos

Conexões a Fazer:

- ☐ Relacionar com consistência de $X_{(n)}$ (Capítulo 3)
- ☐ Comparar com teste bilateral clássico para Normal
- ☐ Entender trade-off entre poder nas duas direções
- ☐ Reconhecer quando usar teste UMP vs outros critérios

13 Conclusão

Mensagens Principais

1. **Hipóteses bilaterais são fundamentalmente diferentes:** O teste ótimo para uma direção pode não ser ótimo para a outra.
2. **A Normal NÃO tem teste UMP bilateral:** Os testes ótimos para $\mu > \mu_0$ e $\mu < \mu_0$ são incompatíveis. Usamos testes UMPNV ou outros critérios.
3. **A Uniforme tem teste UMP bilateral:** A propriedade $X_{(n)} \leq \theta$ cria uma estrutura especial que permite conciliar ambas as direções.
4. **Região crítica bilateral para Uniforme:** Rejeita se $X_{(n)} > \theta_0$ (certeza de $\theta > \theta_0$) OU se $X_{(n)} \leq \theta_0 \alpha^{1/n}$ (evidência de $\theta < \theta_0$).
5. **A técnica de esperança condicional:** Usar $g(t) = E[\psi(x)|T = t]$ é fundamental para provas envolvendo estatísticas suficientes.
6. **Importância prática:** Embora seja um caso especial, o exemplo da Uniforme ilustra princípios importantes sobre quando e como testes ótimos podem existir.

Material de Apoio Complementar

Para revisão completa do Capítulo 4:

- `teoria_cap4_completo.tex` – Todos os teoremas e demonstrações
- `questoes_cap4_completo.tex` – Questões resolvidas em sala
- `caderno_exercicios_cap4.tex` – Exercícios para prática
- `cap4_completo.tex` – Material original completo (agora com n79–n83)

"O conhecimento profundo vem não apenas de memorizar resultados, mas de compreender por que certos teoremas funcionam em alguns casos e falham em outros."

Bom estudo!