

# Questões Resolvidas do Capítulo 4

## Teste de Hipóteses - Soluções Detalhadas

Curso de Inferência Estatística - PPGEST/UFPE

Compilado e detalhado

Novembro 2025

### Sumário

<b>Introdução</b>	<b>2</b>
<b>1 Questão 4.1: Exemplos de Testes</b>	<b>3</b>
<b>2 Questão 4.3: Função Poder do Teste</b>	<b>6</b>
<b>3 Questão 4.4: Teste MP para Distribuição Normal</b>	<b>11</b>
<b>4 Questão 4.5: Teste MP para Distribuição Exponencial</b>	<b>18</b>
<b>5 Questão 4.6: Teste MP para Distribuição Bernoulli</b>	<b>24</b>
<b>6 Questão 4.7: Teste MP para Distribuição Poisson</b>	<b>30</b>
<b>7 Questão 4.8: Teste MP para Densidades Não-Paramétricas</b>	<b>36</b>
<b>8 Questão 4.9: Teste MP com Duas Variáveis Independentes</b>	<b>44</b>
<b>9 Questão 4.10: Teste UMP para Variância (Normal com Média Zero)</b>	<b>52</b>
<b>10 Questão 4.12: Teste UMP via Teorema de Karlin-Rubin</b>	<b>58</b>
<b>Conclusão</b>	<b>66</b>

# Introdução

Este documento apresenta todas as questões resolvidas em sala de aula do Capítulo 4 sobre Teste de Hipóteses. As soluções foram expandidas com explicações detalhadas, intuições e comentários didáticos para facilitar o entendimento completo dos conceitos.

## Organização do Documento

Cada questão está organizada da seguinte forma:

1. **Enunciado** - apresentação completa do problema
2. **Solução Detalhada** - desenvolvimento passo a passo
3. **Observações e Intuição** - comentários sobre o método e interpretações
4. **Resumo** - síntese dos principais resultados

## Questões Incluídas

- Q(4.1) - Exemplos de testes e regiões críticas
- Q(4.3) - Função poder de um teste
- Q(4.4) - Teste MP para distribuição Normal (variância conhecida)
- Q(4.5) - Teste MP para distribuição Exponencial
- Q(4.6) - Teste MP para distribuição Bernoulli
- Q(4.7) - Teste MP para distribuição Poisson
- Q(4.8) - Teste MP para densidades não-paramétricas
- Q(4.9) - Teste MP com duas variáveis independentes
- Q(4.10) - Teste UMP para variância (Normal com média zero)
- Q(4.12) - Teste UMP via Teorema de Karlin-Rubin

# 1 Questão 4.1: Exemplos de Testes

## Questão 4.1

Sejam  $X_1, \dots, X_9$  uma amostra aleatória de  $X \sim N(\theta, 1)$  para  $\theta \in \mathbb{R}$  desconhecido. Deseja-se testar:

$$H_0 : \theta = 5.5 \quad \text{vs} \quad H_1 : \theta = 8 \quad (1)$$

Seja  $\bar{X}_n = 9^{-1} \sum_{i=1}^9 X_i$  a média amostral.

Considere os seguintes testes:

- **Teste #1:** Rejeita-se  $H_0$  se e só se  $X_1 > 7$
- **Teste #2:** Rejeita-se  $H_0$  se e só se  $\frac{X_1 + X_2}{2} > 7$
- **Teste #3:** Rejeita-se  $H_0$  se e só se  $\bar{X}_n > 6$
- **Teste #4:** Rejeita-se  $H_0$  se e só se  $\bar{X}_n > 7.5$

Determine as regiões críticas de cada teste e calcule os erros Tipo I ( $\alpha$ ) e Tipo II ( $\beta$ ) para o Teste #1.

## Solução Detalhada

### Parte 1: Regiões Críticas

A região crítica  $R_c$  é o conjunto de valores amostrais para os quais rejeitamos  $H_0$ .

**Teste #1:** Como rejeitamos quando  $X_1 > 7$ , temos:

$$R_c^{(1)} = \{(x_1, \dots, x_9) \in \mathbb{R}^9 : x_1 > 7\} \quad (2)$$

**Interpretação:** Este teste usa apenas a primeira observação, ignorando as outras 8. Isso é claramente ineficiente!

**Teste #2:**

$$R_c^{(2)} = \{(x_1, \dots, x_9) \in \mathbb{R}^9 : \frac{x_1 + x_2}{2} > 7\} \quad (3)$$

**Interpretação:** Usa apenas duas observações. Melhor que o Teste #1, mas ainda desperdiça informação.

**Teste #3:**

$$R_c^{(3)} = \{(x_1, \dots, x_9) \in \mathbb{R}^9 : \bar{x}_n > 6\} \quad (4)$$

**Interpretação:** Usa todas as 9 observações através da média amostral, que é uma estatística suficiente para  $\theta$ .

**Teste #4:**

$$R_c^{(4)} = \{(x_1, \dots, x_9) \in \mathbb{R}^9 : \bar{x}_n > 7.5\} \quad (5)$$

**Interpretação:** Também usa todas as observações, mas com um limiar mais alto.

## Solução Detalhada

### Parte 2: Cálculo de $\alpha$ e $\beta$ para o Teste #1

**Erro Tipo I ( $\alpha$ ):** É a probabilidade de rejeitar  $H_0$  quando ela é verdadeira.

$$\alpha = P_{H_0:\theta=5.5}\{X_1 > 7\} \quad (6)$$

$$= P\left\{\frac{X_1 - 5.5}{\sigma} > \frac{7 - 5.5}{\sigma}\right\} \quad (X_1 \sim N(5.5, 1) \text{ sob } H_0) \quad (7)$$

$$= P\{Z > 1.5\} \quad \text{onde } Z \sim N(0, 1) \quad (8)$$

$$= 1 - \Phi(1.5) \quad (9)$$

$$= 1 - 0.93319 \quad (10)$$

$$= 0.06681 \approx 6.68\% \quad (11)$$

**Interpretação:** Há cerca de 6.68% de chance de rejeitarmos  $H_0$  incorretamente quando  $\theta = 5.5$ .

**Erro Tipo II ( $\beta$ ):** É a probabilidade de não rejeitar  $H_0$  quando ela é falsa (i.e., quando  $H_1$  é verdadeira).

$$\beta = P_{H_1:\theta=8}\{X_1 \leq 7\} \quad (12)$$

$$= P\left\{\frac{X_1 - 8}{\sigma} < \frac{7 - 8}{\sigma}\right\} \quad (X_1 \sim N(8, 1) \text{ sob } H_1) \quad (13)$$

$$= P\{Z < -1\} \quad \text{onde } Z \sim N(0, 1) \quad (14)$$

$$= \Phi(-1) \quad (15)$$

$$= 0.15866 \approx 15.87\% \quad (16)$$

**Interpretação:** Quando  $\theta = 8$  (hipótese alternativa verdadeira), há cerca de 15.87% de chance de não detectarmos isso e mantermos  $H_0$  incorretamente.

**Poder do Teste:** O poder é  $1 - \beta = 1 - 0.15866 = 0.84134 \approx 84.13\%$ . Isso significa que temos 84.13% de chance de detectar corretamente quando  $\theta = 8$ .

## Observações e Intuição

### Pontos Importantes

1. **Eficiência dos Testes:** Os testes que usam mais informação (média de todas as observações) tendem a ser mais eficientes.
2. **Trade-off:** Não podemos minimizar simultaneamente  $\alpha$  e  $\beta$  para um tamanho amostral fixo. Diminuir  $\alpha$  geralmente aumenta  $\beta$  e vice-versa.
3. **Estatística Suficiente:** A média amostral  $\bar{X}_n$  é suficiente para  $\theta$  quando  $X \sim N(\theta, \sigma^2)$ . Pelo princípio da suficiência, os melhores testes devem depender apenas de  $\bar{X}_n$ .
4. **Comparação dos Testes:**
  - Teste #1 usa 1 observação
  - Teste #2 usa 2 observações
  - Testes #3 e #4 usam todas as 9 observações

Esperamos que os testes #3 e #4 sejam mais poderosos.

## Resumo da Questão

### Principais Resultados:

- Para o Teste #1:  $\alpha \approx 6.68\%$  e  $\beta \approx 15.87\%$
- Poder do Teste #1: aproximadamente 84.13%
- As regiões críticas dependem da estatística de teste escolhida
- Testes baseados em estatísticas suficientes são preferíveis

## 2 Questão 4.3: Função Poder do Teste

### Questão 4.3

Para o Teste #4 da Questão 4.1, determine a função poder  $Q_{\Upsilon}(\theta)$ .

Recall: Teste #4 rejeita  $H_0 : \theta = 5.5$  vs  $H_1 : \theta = 8$  se e só se  $\bar{X}_n > 7.5$ , onde  $X_1, \dots, X_9 \sim N(\theta, 1)$  i.i.d.

### Solução Detalhada

#### Definição da Função Poder

A função poder de um teste  $\Upsilon$  é definida como:

$$Q_{\Upsilon}(\theta) = P_{\theta}[\text{Rejeitar } H_0] = P_{\theta}[X \in R_c] \quad (17)$$

Ela mede a probabilidade de rejeitar  $H_0$  para cada valor possível do parâmetro  $\theta$ .

## Solução Detalhada

### Cálculo para o Teste #4

Para o Teste #4, temos  $R_c = \{x \in \mathbb{R}^9 : \bar{x}_n > 7.5\}$ . Portanto:

$$Q_{\Upsilon}(\theta) = P_{\theta}[\bar{X}_n > 7.5] \quad (18)$$

$$= P_{\theta} \left[ \frac{\bar{X}_n - \theta}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{7.5 - \theta}{\sigma/\sqrt{n}} \right] \quad (19)$$

**Nota importante:** Sob qualquer valor de  $\theta$ , temos:

$$\bar{X}_n \sim N \left( \theta, \frac{\sigma^2}{n} \right) = N \left( \theta, \frac{1}{9} \right) \quad (20)$$

Portanto:

$$\frac{\bar{X}_n - \theta}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\bar{X}_n - \theta}{1/3} = 3(\bar{X}_n - \theta) \sim N(0, 1) \quad (21)$$

Continuando o cálculo:

$$Q_{\Upsilon}(\theta) = P \left[ Z > \frac{7.5 - \theta}{1/3} \right] \quad \text{onde } Z \sim N(0, 1) \quad (22)$$

$$= P [Z > 3(7.5 - \theta)] \quad (23)$$

$$= P[Z > 22.5 - 3\theta] \quad (24)$$

$$= 1 - \Phi(22.5 - 3\theta) \quad (25)$$

**Forma final da função poder:**

$$\boxed{Q_{\Upsilon}(\theta) = 1 - \Phi(\sqrt{n}(7.5 - \theta)) = 1 - \Phi(3(7.5 - \theta))} \quad (26)$$

## Solução Detalhada

### Interpretação para Valores Específicos

Para  $\theta = 5.5$  (sob  $H_0$ ):

$$Q_T(5.5) = 1 - \Phi(3(7.5 - 5.5)) \quad (27)$$

$$= 1 - \Phi(6) \quad (28)$$

$$\approx 1 - 0.999999999 \quad (29)$$

$$\approx 10^{-9} \text{ (praticamente zero)} \quad (30)$$

Isso significa que o Teste #4 tem probabilidade quase zero de rejeitar  $H_0$  quando  $\theta = 5.5$ . O teste é extremamente conservador!

Para  $\theta = 8$  (sob  $H_1$ ):

$$Q_T(8) = 1 - \Phi(3(7.5 - 8)) \quad (31)$$

$$= 1 - \Phi(-1.5) \quad (32)$$

$$= 1 - 0.06681 \quad (33)$$

$$= 0.93319 \approx 93.32\% \quad (34)$$

Quando  $\theta = 8$ , o teste tem 93.32% de chance de rejeitar  $H_0$  corretamente.

Para  $\theta = 7.5$ :

$$Q_T(7.5) = 1 - \Phi(0) \quad (35)$$

$$= 1 - 0.5 \quad (36)$$

$$= 0.5 \quad (37)$$

Quando  $\theta = 7.5$  (exatamente no limiar), há 50% de chance de rejeitar  $H_0$ .

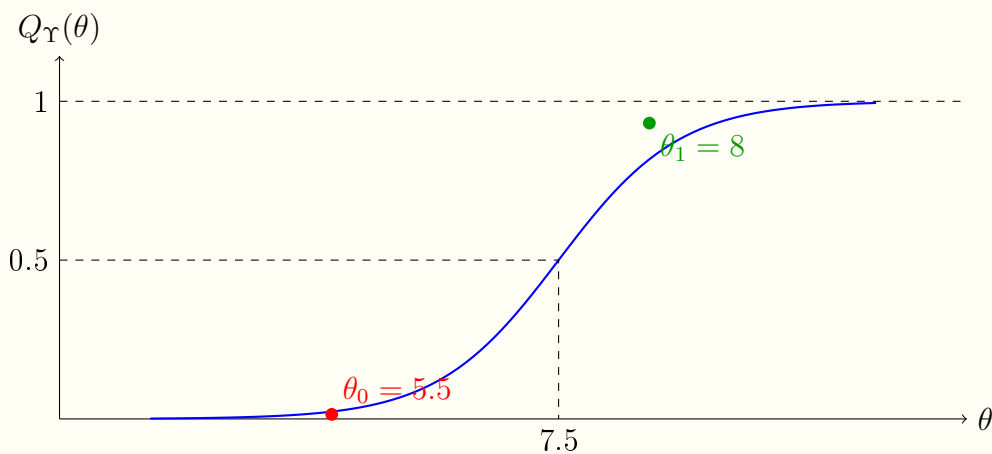


### Propriedades da Função Poder

1. **Monotonicidade:** Para este teste unilateral,  $Q_{\Upsilon}(\theta)$  é crescente em  $\theta$ . Quanto maior o verdadeiro valor de  $\theta$ , maior a probabilidade de rejeitarmos  $H_0 : \theta = 5.5$ .
2. **Tamanho do Teste:** O tamanho é  $\alpha = \sup_{\theta \in \Theta_0} Q_{\Upsilon}(\theta)$ . Para este teste,  $\alpha = Q_{\Upsilon}(5.5) \approx 0$  (muito pequeno).
3. **Poder do Teste:** Para  $\theta \in \Theta_1$ ,  $Q_{\Upsilon}(\theta)$  representa o poder. Quanto maior, melhor!
4. **Relação com Erros:**
  - $Q_{\Upsilon}(\theta_0) = \alpha$  (Erro Tipo I quando  $\theta = \theta_0$ )
  - $Q_{\Upsilon}(\theta_1) = 1 - \beta$  (Poder quando  $\theta = \theta_1$ )
5. **Comportamento Assintótico:**
  - $\lim_{\theta \rightarrow -\infty} Q_{\Upsilon}(\theta) = 0$
  - $\lim_{\theta \rightarrow +\infty} Q_{\Upsilon}(\theta) = 1$

### Visualização

A função poder tem forma de curva S (sigmoidal):



Função Poder do Teste #4

### Resumo da Questão

#### Principais Resultados:

$$Q_{\text{r}}(\theta) = 1 - \Phi(3(7.5 - \theta))$$

- Para  $\theta = 5.5$ :  $Q \approx 0$  (tamanho  $\alpha \approx 0$ )
- Para  $\theta = 7.5$ :  $Q = 0.5$
- Para  $\theta = 8.0$ :  $Q \approx 0.933$  (poder  $\approx 93.3\%$ )
- A função é crescente: testes detectam melhor valores maiores de  $\theta$

### 3 Questão 4.4: Teste MP para Distribuição Normal

#### Questão 4.4

Sejam  $X_1, \dots, X_n$  uma amostra aleatória de  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  com  $\mu$  desconhecido e  $\sigma^2 \in \mathbb{R}^+$  conhecido.

Encontre o teste Mais Poderoso (MP) de nível  $\alpha$  para:

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \mu = \mu_1 \quad (38)$$

onde  $\mu_0$  e  $\mu_1$  são conhecidos e  $\mu_1 > \mu_0$ .

#### Solução Detalhada

##### Passo 1: Identificar o Método Adequado

Como ambas as hipóteses são **simples** (especificam completamente o parâmetro), podemos aplicar o **Lema de Neyman-Pearson (LNP)**.

##### Passo 2: Escrever as Funções de Verossimilhança

Para uma amostra  $x = (x_1, \dots, x_n)$  de  $N(\mu, \sigma^2)$ , a função de verossimilhança é:

$$L(\mu; x) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left\{ -\frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\} \quad (39)$$

Simplificando:

$$L(\mu; x) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \right\} \quad (40)$$

Expandindo o termo  $(x_i - \mu)^2$ :

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 = \sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2\mu x_i + \mu^2) \quad (41)$$

$$= \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\mu \sum_{i=1}^n x_i + n\mu^2 \quad (42)$$

Logo:

$$L(\mu; x) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\mu \sum_{i=1}^n x_i + n\mu^2 \right) \right\} \quad (43)$$

### Solução Detalhada

#### Passo 3: Calcular a Razão de Verossimilhanças

Pelo LNP, o teste MP tem a forma: “Rejeita  $H_0$  se e só se  $\frac{L_1}{L_0} > k$ ”, onde  $L_i = L(\mu_i; x)$ .

Calculando a razão:

$$\frac{L_1}{L_0} = \frac{L(\mu_1; x)}{L(\mu_0; x)} \quad (44)$$

$$= \frac{\exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (\sum x_i^2 - 2\mu_1 \sum x_i + n\mu_1^2) \right\}}{\exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (\sum x_i^2 - 2\mu_0 \sum x_i + n\mu_0^2) \right\}} \quad (45)$$

$$= \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left[ \left( -2\mu_1 \sum x_i + n\mu_1^2 \right) - \left( -2\mu_0 \sum x_i + n\mu_0^2 \right) \right] \right\} \quad (46)$$

$$= \exp \left\{ \frac{1}{2\sigma^2} \left[ 2(\mu_1 - \mu_0) \sum x_i - n(\mu_1^2 - \mu_0^2) \right] \right\} \quad (47)$$

$$= \exp \left\{ \frac{(\mu_1 - \mu_0)}{\sigma^2} \sum x_i - \frac{n(\mu_1^2 - \mu_0^2)}{2\sigma^2} \right\} \quad (48)$$

## Solução Detalhada

### Passo 4: Simplificar a Região Crítica

A condição  $\frac{L_1}{L_0} > k$  torna-se:

$$\exp \left\{ \frac{(\mu_1 - \mu_0)}{\sigma^2} \sum x_i - \frac{n(\mu_1^2 - \mu_0^2)}{2\sigma^2} \right\} > k \quad (49)$$

Aplicando logaritmo (função crescente):

$$\frac{(\mu_1 - \mu_0)}{\sigma^2} \sum x_i - \frac{n(\mu_1^2 - \mu_0^2)}{2\sigma^2} > \log k \quad (50)$$

Como  $\mu_1 > \mu_0$ , temos  $\mu_1 - \mu_0 > 0$ , então podemos dividir por esse termo:

$$\sum x_i > \frac{\sigma^2}{\mu_1 - \mu_0} \left[ \log k + \frac{n(\mu_1^2 - \mu_0^2)}{2\sigma^2} \right] \quad (51)$$

Definindo  $k_2 = \frac{\sigma^2}{\mu_1 - \mu_0} \left[ \log k + \frac{n(\mu_1^2 - \mu_0^2)}{2\sigma^2} \right]$ :

$$\sum x_i > k_2 \quad (52)$$

Equivalentemente, dividindo por  $n$  e multiplicando:

$$\bar{x} > \frac{k_2}{n} \quad (53)$$

Ou ainda, padronizando:

$$\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{k_2/n - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \quad (54)$$

Definindo  $k_3 = \frac{k_2/n - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ , a região crítica é:

$$R_c = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sqrt{n} \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma} > k_3 \right\} \quad (55)$$

### Solução Detalhada

#### Passo 5: Estatística de Teste

Definimos a estatística de teste:

$$Z(x) = \sqrt{n} \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma} \quad (56)$$

**Distribuição sob  $H_0$ :**

Quando  $H_0 : \mu = \mu_0$  é verdadeira:

- $\bar{X} \sim N\left(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n}\right)$
- $\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$

Portanto:

$$Z(X) \stackrel{H_0}{\sim} N(0, 1) \quad (57)$$

## Solução Detalhada

### Passo 6: Determinar $k_3$ para Tamanho $\alpha$

Queremos que o teste tenha tamanho  $\alpha$ :

$$\alpha = P_{H_0}[X \in R_c] \quad (58)$$

$$= P_{H_0}[Z(X) > k_3] \quad (59)$$

$$= P[Z > k_3] \quad \text{onde } Z \sim N(0, 1) \quad (60)$$

Da distribuição normal padrão,  $k_3 = z_\alpha$ , onde  $z_\alpha$  satisfaz:

$$P(Z > z_\alpha) = \alpha \quad \Leftrightarrow \quad z_\alpha = \Phi^{-1}(1 - \alpha) \quad (61)$$

### Passo 7: Teste Final

Região Crítica:

$$R_c = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sqrt{n} \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma} > z_\alpha \right\} \quad (62)$$

Regra de Decisão:

$$\text{Rejeita } H_0 \text{ se } Z_{\text{cal}} = \sqrt{n} \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma} > z_\alpha \quad (63)$$

onde  $z_\alpha$  é o quantil  $(1 - \alpha)$  da distribuição  $N(0, 1)$ .

**Exemplos de valores de  $z_\alpha$ :**

- $\alpha = 0.05$ :  $z_{0.05} = 1.645$
- $\alpha = 0.01$ :  $z_{0.01} = 2.326$
- $\alpha = 0.10$ :  $z_{0.10} = 1.282$

## Observações e Intuição

### Pontos Importantes

1. **Lema de Neyman-Pearson:** O LNP garante que este teste é o mais poderoso entre todos os testes de nível  $\alpha$ . Nenhum outro teste de mesmo nível tem poder maior.
2. **Estatística Suficiente:** A média amostral  $\bar{X}$  é suficiente para  $\mu$ . O LNP confirma que o melhor teste depende apenas dela (não das observações individuais).
3. **Teste Z:** Este é o famoso “teste Z” usado extensivamente na prática quando  $\sigma^2$  é conhecido.
4. **Unilateralidade:** Como  $\mu_1 > \mu_0$ , rejeitamos  $H_0$  para valores grandes de  $\bar{X}$ . O teste é unilateral à direita.
5. **Normalização:** A estatística  $Z(x) = \sqrt{n} \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma}$  tem distribuição  $N(0, 1)$  sob  $H_0$ , independentemente de  $\sigma^2$  e  $n$ . Isso facilita o uso de tabelas.
6. **Efeito do tamanho amostral:** Para  $n$  fixo e  $\alpha$  fixo, o poder do teste aumenta à medida que  $|\mu_1 - \mu_0|$  aumenta. Para  $|\mu_1 - \mu_0|$  fixo e  $\alpha$  fixo, o poder aumenta com  $n$ .

### Conexão com Estimação

A estatística de teste pode ser reescrita como:

$$Z(x) = \frac{\hat{\mu} - \mu_0}{\text{SE}(\hat{\mu})} \quad (64)$$

onde  $\hat{\mu} = \bar{x}$  é o estimador de máxima verossimilhança de  $\mu$  e  $\text{SE}(\hat{\mu}) = \sigma/\sqrt{n}$  é seu erro padrão.

Essa forma mostra que estamos medindo quantos "erros padrão" o estimado está do valor sob  $H_0$ .



### Resumo da Questão

**Teste MP para  $H_0 : \mu = \mu_0$  vs  $H_1 : \mu = \mu_1$  ( $\mu_1 > \mu_0$ ):**

**Estatística de Teste:**

$$Z = \sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \stackrel{H_0}{\sim} N(0, 1)$$

**Regra de Decisão:**

Rejeita  $H_0$  se  $Z_{\text{cal}} > z_\alpha$

**Propriedades:**

- É o teste mais poderoso de nível  $\alpha$  (pelo LNP)
- Depende apenas da estatística suficiente  $\bar{X}$
- Distribuição sob  $H_0$  é conhecida e tabelada

## 4 Questão 4.5: Teste MP para Distribuição Exponencial

### Questão 4.5

Sejam  $X_1, \dots, X_n$  uma amostra aleatória de  $X \sim \text{Exp}(\theta)$  com densidade:

$$f(x; \theta) = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}, \quad x > 0 \quad (65)$$

onde  $\theta > 0$  é desconhecido.

Encontre o teste Mais Poderoso (MP) de nível  $\alpha$  para:

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \theta = \theta_1 \quad (\theta_1 > \theta_0) \quad (66)$$

### Solução Detalhada

#### Passo 1: Aplicação do LNP

Como temos hipóteses simples vs simples, aplicamos o Lema de Neyman-Pearson.

#### Passo 2: Função de Verossimilhança

Para uma amostra  $x = (x_1, \dots, x_n)$ :

$$L(\theta; x) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) \quad (67)$$

$$= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\theta} e^{-x_i/\theta} \quad (68)$$

$$= \theta^{-n} \exp \left\{ -\frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^n x_i \right\} \quad (69)$$

Portanto, para  $i = 0, 1$ :

$$L_i = L(\theta_i; x) = \theta_i^{-n} \exp \left\{ -\frac{\sum_{j=1}^n x_j}{\theta_i} \right\} \quad (70)$$

## Solução Detalhada

### Passo 3: Razão de Verossimilhanças

$$\frac{L_1}{L_0} = \frac{L(\theta_1; x)}{L(\theta_0; x)} \quad (71)$$

$$= \frac{\theta_1^{-n} \exp \left\{ -\frac{\sum x_j}{\theta_1} \right\}}{\theta_0^{-n} \exp \left\{ -\frac{\sum x_j}{\theta_0} \right\}} \quad (72)$$

$$= \left( \frac{\theta_0}{\theta_1} \right)^n \exp \left\{ \sum_{j=1}^n x_j \left( \frac{1}{\theta_0} - \frac{1}{\theta_1} \right) \right\} \quad (73)$$

### Passo 4: Região Crítica

Pelo LNP, rejeitamos  $H_0$  quando  $\frac{L_1}{L_0} > k$ :

$$\left( \frac{\theta_0}{\theta_1} \right)^n \exp \left\{ \sum x_j \left( \frac{1}{\theta_0} - \frac{1}{\theta_1} \right) \right\} > k \quad (74)$$

Aplicando logaritmo:

$$n \log \left( \frac{\theta_0}{\theta_1} \right) + \sum x_j \left( \frac{1}{\theta_0} - \frac{1}{\theta_1} \right) > \log k \quad (75)$$

Rearranjando:

$$\sum x_j \left( \frac{1}{\theta_0} - \frac{1}{\theta_1} \right) > \log k - n \log \left( \frac{\theta_0}{\theta_1} \right) \quad (76)$$

**Análise do sinal:** Como  $\theta_1 > \theta_0 > 0$ , temos:

$$\frac{1}{\theta_0} - \frac{1}{\theta_1} = \frac{\theta_1 - \theta_0}{\theta_0 \theta_1} > 0 \quad (77)$$

Portanto, podemos dividir a desigualdade por  $\left( \frac{1}{\theta_0} - \frac{1}{\theta_1} \right)$  sem inverter o sinal:

$$\sum_{i=1}^n x_i > \frac{\log k - n \log(\theta_0/\theta_1)}{\frac{1}{\theta_0} - \frac{1}{\theta_1}} = k_2 \quad (78)$$

Logo, a região crítica é:

$$R_c = \left\{ x \in \mathbb{R}_+^n : \sum_{i=1}^n x_i > k_2 \right\} \quad (79)$$

## Solução Detalhada

### Passo 5: Estatística de Teste com Distribuição Conhecida

Para termos uma estatística com distribuição livre de parâmetros sob  $H_0$ , precisamos transformar  $\sum X_i$ .

#### Propriedade da Exponencial:

Se  $X \sim \text{Exp}(\theta)$ , então  $Y = \frac{X}{\theta} \sim \text{Exp}(1)$  (exponencial padrão).

Mais ainda,  $Z = \frac{2X}{\theta} \sim \chi_2^2$  (qui-quadrado com 2 graus de liberdade).

**Demonstração:** A densidade de  $Z = \frac{2X}{\theta}$  é:

$$f_Z(z) = f_X\left(\frac{\theta z}{2}\right) \cdot \frac{\theta}{2} \quad (80)$$

$$= \frac{1}{\theta} e^{-\frac{\theta z}{2}} \cdot \frac{\theta}{2} \quad (81)$$

$$= \frac{1}{2} e^{-z/2}, \quad z > 0 \quad (82)$$

Comparando com a densidade de  $\chi_2^2$ :

$$f_{\chi_2^2}(z) = \frac{1}{2^1 \Gamma(1)} z^{1-1} e^{-z/2} = \frac{1}{2} e^{-z/2} \quad (83)$$

Portanto,  $\frac{2X_i}{\theta} \sim \chi_2^2$  para cada  $i$ .

**Soma de qui-quadrados:** Como as  $X_i$  são independentes:

$$\sum_{i=1}^n \frac{2X_i}{\theta} = \frac{2}{\theta} \sum_{i=1}^n X_i \sim \chi_{2n}^2 \quad (84)$$

## Solução Detalhada

### Passo 6: Estatística de Teste Final

Definimos:

$$Q(x) = \frac{2}{\theta_0} \sum_{i=1}^n x_i \quad (85)$$

Sob  $H_0 : \theta = \theta_0$ :

$$Q(X) \stackrel{H_0}{\sim} \chi_{2n}^2 \quad (86)$$

A região crítica se torna:

$$R_c = \{x \in \mathbb{R}_+^n : Q(x) > q_\alpha\} \quad (87)$$

onde  $q_\alpha$  é o quantil  $(1 - \alpha)$  da distribuição  $\chi_{2n}^2$ :

$$P(Q > q_\alpha) = \alpha \quad \text{quando } Q \sim \chi_{2n}^2 \quad (88)$$

### Passo 7: Teste Final

Estatística de Teste:

$$Q(x) = \frac{2}{\theta_0} \sum_{i=1}^n x_i \stackrel{H_0}{\sim} \chi_{2n}^2 \quad (89)$$

Regra de Decisão:

$$\text{Rejeita } H_0 \text{ se } Q_{\text{cal}} = \frac{2}{\theta_0} \sum_{i=1}^n x_i > q_\alpha \quad (90)$$

onde  $q_\alpha = \chi_{2n, 1-\alpha}^2$  é tal que  $P(\chi_{2n}^2 > q_\alpha) = \alpha$ .

**Método alternativo (p-valor):**

$$\text{Rejeita } H_0 \text{ se } p = P(\chi_{2n}^2 > Q_{\text{cal}}) < \alpha \quad (91)$$

## Observações e Intuição

### Pontos Importantes

1. **Estatística Suficiente:** A soma  $\sum X_i$  é suficiente para  $\theta$  na distribuição exponencial. O teste MP depende apenas dela.
2. **Transformação:** A transformação  $Q(x) = \frac{2}{\theta_0} \sum x_i$  é crucial porque:
  - Remove a dependência de  $\theta$  da distribuição sob  $H_0$
  - Fornece uma distribuição conhecida e tabelada ( $\chi^2_{2n}$ )
3. **Relação com Gamma:** Como  $\text{Exp}(\theta) = \text{Gamma}(1, \theta)$ , temos:

$$\sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Gamma}(n, \theta) \quad (92)$$

4. **Graus de Liberdade:** A estatística tem  $2n$  graus de liberdade (não  $n$ ) porque cada  $\frac{2X_i}{\theta}$  contribui com 2 graus de liberdade.
5. **Interpretação:** Valores grandes de  $\sum X_i$  fornecem evidência de que  $\theta$  é grande (pois  $E[X] = \theta$ ). Como  $\theta_1 > \theta_0$ , rejeitamos  $H_0$  para somas grandes.
6. **Cálculo Prático:** Na prática:
  - (a) Calcule  $Q_{\text{cal}} = \frac{2}{\theta_0} \sum x_i$
  - (b) Encontre  $q_\alpha$  em tabelas de  $\chi^2_{2n}$  ou use software
  - (c) Compare  $Q_{\text{cal}}$  com  $q_\alpha$

### Exemplo Numérico

Suponha  $n = 10$ ,  $\theta_0 = 2$ ,  $\alpha = 0.05$  e observamos  $\sum x_i = 25$ .

1. Calcular estatística:  $Q_{\text{cal}} = \frac{2}{2} \cdot 25 = 25$
2. Graus de liberdade:  $2n = 20$
3. Valor crítico:  $\chi^2_{20,0.95} = 31.41$  (da tabela)
4. Decisão: Como  $25 < 31.41$ , não rejeitamos  $H_0$

**Interpretação:** Não há evidência suficiente ao nível 5% para concluir que  $\theta > 2$ .

### Resumo da Questão

**Teste MP para  $H_0 : \theta = \theta_0$  vs  $H_1 : \theta = \theta_1$  ( $\theta_1 > \theta_0$ ):**

**Estatística de Teste:**

$$Q(x) = \frac{2}{\theta_0} \sum_{i=1}^n x_i \stackrel{H_0}{\sim} \chi_{2n}^2$$

**Regra de Decisão:**

Rejeita  $H_0$  se  $Q_{\text{cal}} > \chi_{2n, 1-\alpha}^2$

**Propriedades:**

- Teste MP de nível  $\alpha$  (pelo LNP)
- Depende da estatística suficiente  $\sum X_i$
- Distribuição sob  $H_0$  é  $\chi^2$  com  $2n$  graus de liberdade

## 5 Questão 4.6: Teste MP para Distribuição Bernoulli

### Questão 4.6

Sejam  $X_1, \dots, X_n$  uma amostra aleatória de  $X \sim \text{Bernoulli}(p)$  para  $p \in (0, 1)$  desconhecida.

Encontre o teste Mais Poderoso (MP) para:

$$H_0 : p = p_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : p = p_1 \quad (p_1 > p_0) \quad (93)$$

### Solução Detalhada

#### Passo 1: Aplicação do LNP

Como ambas as hipóteses são simples, aplicamos o Lema de Neyman-Pearson.

#### Passo 2: Função de Verossimilhança

Para  $X \sim \text{Bernoulli}(p)$ , a função de massa de probabilidade é:

$$P(X = x) = p^x (1 - p)^{1-x}, \quad x \in \{0, 1\} \quad (94)$$

Para uma amostra  $x = (x_1, \dots, x_n)$ :

$$L(p; x) = \prod_{k=1}^n p^{x_k} (1 - p)^{1-x_k} \quad (95)$$

$$= p^{\sum_{k=1}^n x_k} (1 - p)^{n - \sum_{k=1}^n x_k} \quad (96)$$

$$= p^{\sum x_k} (1 - p)^{n - \sum x_k} \quad (97)$$

Podemos reescrever como:

$$L(p; x) = \left( \frac{p}{1 - p} \right)^{\sum x_k} (1 - p)^n \quad (98)$$



## Solução Detalhada

### Passo 3: Razão de Verossimilhanças

$$\frac{L_1}{L_0} = \frac{L(p_1; x)}{L(p_0; x)} \quad (99)$$

$$= \frac{\left(\frac{p_1}{1-p_1}\right)^{\sum x_k} (1-p_1)^n}{\left(\frac{p_0}{1-p_0}\right)^{\sum x_k} (1-p_0)^n} \quad (100)$$

$$= \left[\frac{p_1(1-p_0)}{p_0(1-p_1)}\right]^{\sum x_k} \cdot \left[\frac{1-p_1}{1-p_0}\right]^n \quad (101)$$

Definindo:

$$A_1 = \frac{p_1(1-p_0)}{p_0(1-p_1)} \quad \text{e} \quad A_2 = \frac{1-p_1}{1-p_0} \quad (102)$$

**Análise dos sinais:**

- Como  $p_1 > p_0$ , temos  $\frac{p_1}{p_0} > 1$  e  $\frac{1-p_0}{1-p_1} > 1$ , portanto  $A_1 > 1$
- Como  $p_1 > p_0$ , temos  $1-p_1 < 1-p_0$ , portanto  $A_2 < 1$

### Passo 4: Região Crítica

Pelo LNP, rejeitamos  $H_0$  quando:

$$A_1^{\sum x_k} \cdot A_2^n > k \quad (103)$$

Aplicando logaritmo:

$$\sum x_k \log(A_1) + n \log(A_2) > \log k \quad (104)$$

Como  $A_1 > 1$ , temos  $\log(A_1) > 0$ , então:

$$\sum x_k > \frac{\log k - n \log(A_2)}{\log(A_1)} = k_1 \quad (105)$$

Portanto:

$$R_c = \left\{ x \in \{0, 1\}^n : \sum_{i=1}^n x_i > k_1 \right\} \quad (106)$$

## Solução Detalhada

### Passo 5: Teste Aleatorizado

Como  $\sum X_i$  é discreta, geralmente precisamos de um teste aleatorizado para atingir exatamente o nível  $\alpha$ .

A função crítica é:

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } \sum x_i > k_1 \\ \delta, & \text{se } \sum x_i = k_1 \\ 0, & \text{se } \sum x_i < k_1 \end{cases} \quad (107)$$

Distribuição sob  $H_0$ :

$$\sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Binomial}(n, p_0) \quad (108)$$

## Solução Detalhada

### Passo 6: Determinação de $k_1$ e $\delta$

**Passo 6.1:** Encontre o menor inteiro  $k_1$  tal que:

$$P_{p_0} \left[ \sum X_i > k_1 \right] < \alpha \quad (109)$$

**Passo 6.2:** Calcule  $\delta$  para que o teste tenha exatamente tamanho  $\alpha$ :

$$\delta = \frac{\alpha - P_{p_0} [\sum X_i > k_1]}{P_{p_0} [\sum X_i = k_1]} \quad (110)$$

onde:

$$P_{p_0} \left[ \sum X_i = k_1 \right] = \binom{n}{k_1} p_0^{k_1} (1 - p_0)^{n-k_1} \quad (111)$$

$$P_{p_0} \left[ \sum X_i > k_1 \right] = \sum_{j=k_1+1}^n \binom{n}{j} p_0^j (1 - p_0)^{n-j} \quad (112)$$

### Passo 7: Interpretação da Aleatorização

O parâmetro  $\delta$  representa a probabilidade com a qual rejeitamos  $H_0$  quando  $\sum x_i = k_1$ .

**Implementação prática:**

1. Observe  $\sum x_i$
2. Se  $\sum x_i > k_1$ : rejeite  $H_0$
3. Se  $\sum x_i < k_1$ : não rejeite  $H_0$
4. Se  $\sum x_i = k_1$ : lance uma moeda com  $P(\text{cara}) = \delta$  e rejeite  $H_0$  se der cara

## Observações e Intuição

### Pontos Importantes

1. **Estatística Suficiente:**  $\sum X_i$  é suficiente para  $p$ . O teste MP depende apenas desta soma.
2. **Necessidade de Aleatorização:** Para distribuições discretas, raramente conseguimos um teste não-aleatorizado com tamanho exato  $\alpha$ . A aleatorização resolve esse problema.
3. **Distribuição Binomial:** A soma de Bernoullis independentes segue distribuição Binomial.
4. **Razão de Chances:** A razão  $\frac{p}{1-p}$  é conhecida como "odds"(chances). O teste compara as chances sob  $H_1$  e  $H_0$ .
5. **Intuição:** Valores grandes de  $\sum X_i$  (muitos sucessos) fornecem evidência de que  $p$  é grande, levando à rejeição de  $H_0 : p = p_0$  em favor de  $H_1 : p = p_1 > p_0$ .

### Exemplo Numérico

Suponha  $n = 10$ ,  $p_0 = 0.3$ ,  $p_1 = 0.6$ ,  $\alpha = 0.05$ .

1. Sob  $H_0$ :  $\sum X_i \sim \text{Binomial}(10, 0.3)$
2. Calculamos (usando software ou tabelas):
  - $P(\sum X_i > 6) = 0.0473 < 0.05 \checkmark$
  - $P(\sum X_i > 5) = 0.1503 > 0.05 \times$
3. Portanto,  $k_1 = 6$
4.  $P(\sum X_i = 6) = \binom{10}{6}(0.3)^6(0.7)^4 = 0.0368$
5.  $\delta = \frac{0.05 - 0.0473}{0.0368} = 0.0734$

### Regra de decisão:

- Se observamos 7, 8, 9 ou 10 sucessos: rejeitamos  $H_0$
- Se observamos 0, 1, 2, 3, 4 ou 5 sucessos: não rejeitamos  $H_0$
- Se observamos exatamente 6 sucessos: rejeitamos com probabilidade 7.34%

### Resumo da Questão

**Teste MP para  $H_0 : p = p_0$  vs  $H_1 : p = p_1$  ( $p_1 > p_0$ ):**

**Estatística de Teste:**

$$T = \sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Binomial}(n, p_0) \text{ sob } H_0$$

**Função Crítica:**

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & \sum x_i > k_1 \\ \delta, & \sum x_i = k_1 \\ 0, & \sum x_i < k_1 \end{cases}$$

**Propriedades:**

- Teste MP de nível  $\alpha$  (pelo LNP)
- Geralmente requer aleatorização (distribuição discreta)
- Depende apenas da estatística suficiente  $\sum X_i$

## 6 Questão 4.7: Teste MP para Distribuição Poisson

### Questão 4.7

Sejam  $X_1, \dots, X_n$  uma amostra aleatória de  $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$  para  $\lambda > 0$  desconhecido.

Derive o teste Mais Poderoso (MP) para:

$$H_0 : \lambda = \lambda_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \lambda = \lambda_1 \quad (\lambda_1 > \lambda_0) \quad (113)$$

### Solução Detalhada

#### Passo 1: Aplicação do LNP

Como temos hipóteses simples vs simples, aplicamos o Lema de Neyman-Pearson.

#### Passo 2: Função de Verossimilhança

Para  $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ , a função de massa de probabilidade é:

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, \quad x \in \{0, 1, 2, \dots\} \quad (114)$$

Para uma amostra  $x = (x_1, \dots, x_n)$ :

$$L(\lambda; x) = \prod_{k=1}^n \frac{\lambda^{x_k} e^{-\lambda}}{x_k!} \quad (115)$$

$$= \frac{\lambda^{\sum_{k=1}^n x_k} e^{-n\lambda}}{\prod_{k=1}^n x_k!} \quad (116)$$

$$= e^{-n\lambda} \cdot \lambda^{\sum x_k} \cdot \prod_{k=1}^n \frac{1}{x_k!} \quad (117)$$

## Solução Detalhada

### Passo 3: Razão de Verossimilhanças

$$\frac{L_1}{L_0} = \frac{L(\lambda_1; x)}{L(\lambda_0; x)} \quad (118)$$

$$= \frac{e^{-n\lambda_1} \lambda_1^{\sum x_k}}{e^{-n\lambda_0} \lambda_0^{\sum x_k}} \quad (119)$$

$$= \left[ \frac{e^{-\lambda_1}}{e^{-\lambda_0}} \right]^n \cdot \left[ \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \right]^{\sum x_k} \quad (120)$$

$$= e^{-n(\lambda_1 - \lambda_0)} \cdot \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \right)^{\sum x_k} \quad (121)$$

### Passo 4: Região Crítica

Pelo LNP, rejeitamos  $H_0$  quando  $\frac{L_1}{L_0} > k$ :

$$e^{-n(\lambda_1 - \lambda_0)} \cdot \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \right)^{\sum x_k} > k \quad (122)$$

Aplicando logaritmo:

$$-n(\lambda_1 - \lambda_0) + \sum x_k \log \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \right) > \log k \quad (123)$$

Como  $\lambda_1 > \lambda_0$ , temos  $\frac{\lambda_1}{\lambda_0} > 1$ , logo  $\log \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \right) > 0$ .

Rearranjando:

$$\sum x_k \log \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \right) > \log k + n(\lambda_1 - \lambda_0) \quad (124)$$

$$\sum x_k > \frac{\log k + n(\lambda_1 - \lambda_0)}{\log(\lambda_1/\lambda_0)} = k_1 \quad (125)$$

Portanto:

$$R_c = \left\{ x \in \mathbb{Z}_+^n : \sum_{i=1}^n x_i > k_1 \right\} \quad (126)$$

## Solução Detalhada

### Passo 5: Teste Aleatorizado

A função crítica é:

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } \sum x_i > k_1 \\ \delta, & \text{se } \sum x_i = k_1 \\ 0, & \text{se } \sum x_i < k_1 \end{cases} \quad (127)$$

**Distribuição sob  $H_0$ :**

Se  $X_i \sim \text{Poisson}(\lambda)$  são independentes, então:

$$\sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Poisson}(n\lambda_0) \quad (128)$$

**Demonstração:** A função geradora de momentos de  $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$  é  $M_X(t) = e^{\lambda(e^t-1)}$ .

Para a soma:

$$M_{\sum X_i}(t) = \prod_{i=1}^n M_{X_i}(t) = [e^{\lambda(e^t-1)}]^n \quad (129)$$

$$= e^{n\lambda(e^t-1)} \quad (130)$$

que é a MGF de  $\text{Poisson}(n\lambda)$ .



### Solução Detalhada

#### Passo 6: Determinação de $k_1$ e $\delta$

**Passo 6.1:** Encontre o menor inteiro  $k_1$  tal que:

$$P_{n\lambda_0} \left[ \sum X_i > k_1 \right] < \alpha \quad (131)$$

**Passo 6.2:** Calcule  $\delta$ :

$$\delta = \frac{\alpha - P_{n\lambda_0} [\sum X_i > k_1]}{P_{n\lambda_0} [\sum X_i = k_1]} \quad (132)$$

onde:

$$P_{n\lambda_0} \left[ \sum X_i = k_1 \right] = \frac{(n\lambda_0)^{k_1} e^{-n\lambda_0}}{k_1!} \quad (133)$$

$$P_{n\lambda_0} \left[ \sum X_i > k_1 \right] = \sum_{j=k_1+1}^{\infty} \frac{(n\lambda_0)^j e^{-n\lambda_0}}{j!} \quad (134)$$

#### Passo 7: Relação com Estatísticas Suficientes

**Observação importante:**  $\sum X_i$  é uma estatística suficiente para  $\lambda$  (pelo Teorema da Fatoração de Neyman).

O teste MP depende apenas desta estatística suficiente, confirmando o princípio da suficiência.

## Observações e Intuição

### Pontos Importantes

1. **Propriedade Aditiva da Poisson:** A soma de Poissons independentes é Poisson. Esta propriedade é crucial para determinar a distribuição da estatística de teste.
2. **Estatística Suficiente:**  $T(X) = \sum X_i$  é suficiente para  $\lambda$ . O teste ótimo depende apenas dela.
3. **Família Exponencial:** A Poisson pertence à família exponencial de distribuições. Para essas distribuições, a estatística suficiente tem forma simples.
4. **Comparação com Binomial:** Ambas são distribuições discretas que somam para uma distribuição da mesma família. Ambas requerem aleatorização para tamanho exato  $\alpha$ .
5. **Aproximação Normal:** Para  $n\lambda_0$  grande,  $\sum X_i \approx N(n\lambda_0, n\lambda_0)$ , permitindo usar teste Z aproximado.

### Exemplo Numérico

Suponha  $n = 5$ ,  $\lambda_0 = 2$ ,  $\lambda_1 = 4$ ,  $\alpha = 0.05$ .

1. Sob  $H_0$ :  $\sum X_i \sim \text{Poisson}(10)$
2. Valor esperado e variância:  $E[\sum X_i] = 10$ ,  $\text{Var}(\sum X_i) = 10$
3. Usando tabelas ou software Poisson(10):
  - $P(\sum X_i > 16) = 0.0487 < 0.05 \checkmark$
  - $P(\sum X_i > 15) = 0.0835 > 0.05 \times$
4. Portanto,  $k_1 = 16$
5.  $P(\sum X_i = 16) = \frac{10^{16}e^{-10}}{16!} = 0.0348$
6.  $\delta = \frac{0.05 - 0.0487}{0.0348} = 0.0374$

### Regra de decisão:

- Se  $\sum x_i \geq 17$ : rejeitamos  $H_0$  sempre
- Se  $\sum x_i \leq 15$ : não rejeitamos  $H_0$
- Se  $\sum x_i = 16$ : rejeitamos com probabilidade 3.74%

### Resumo da Questão

**Teste MP para  $H_0 : \lambda = \lambda_0$  vs  $H_1 : \lambda = \lambda_1$  ( $\lambda_1 > \lambda_0$ ):**

**Estatística de Teste:**

$$T = \sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Poisson}(n\lambda_0) \text{ sob } H_0$$

**Função Crítica:**

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & \sum x_i > k_1 \\ \delta, & \sum x_i = k_1 \\ 0, & \sum x_i < k_1 \end{cases}$$

**Propriedades:**

- Teste MP de nível  $\alpha$  (pelo LNP)
- A soma de Poissons é Poisson
- Depende apenas da estatística suficiente  $\sum X_i$

## 7 Questão 4.8: Teste MP para Densidades Não-Paramétricas

### Questão 4.8

Seja  $X$  uma v.a. com densidade  $f(x)$  para  $x \in \mathbb{R}$ . Considere duas densidades:

$$f_0(x) = \begin{cases} \frac{3x^2}{64}, & 0 < x < 4 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \quad \text{e} \quad f_1(x) = \begin{cases} \frac{3}{16}\sqrt{x}, & 0 < x < 4 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \quad (135)$$

Determine o teste MP de nível  $\alpha$  para:

$$H_0 : f(x) = f_0(x) \quad \text{vs} \quad H_1 : f(x) = f_1(x) \quad (136)$$

### Solução Detalhada

#### Passo 1: Aplicação do LNP

Este é um exemplo de teste entre densidades completamente especificadas (hipóteses simples). Aplicamos o LNP.

**Observação:** Este não é um teste paramétrico tradicional, mas o LNP ainda se aplica!

## Solução Detalhada

### Passo 2: Razão de Densidades

Pelo LNP, rejeitamos  $H_0$  quando:

$$\frac{f_1(x)}{f_0(x)} > k \quad (137)$$

Calculando a razão para  $x \in (0, 4)$ :

$$\frac{f_1(x)}{f_0(x)} = \frac{\frac{3}{16}\sqrt{x}}{\frac{3x^2}{64}} \quad (138)$$

$$= \frac{3 \cdot 64 \cdot x^{1/2}}{16 \cdot 3 \cdot x^2} \quad (139)$$

$$= \frac{64 \cdot x^{1/2}}{16 \cdot x^2} \quad (140)$$

$$= \frac{4}{x^{3/2}} \quad (141)$$

$$= 4x^{-3/2} \quad (142)$$

### Solução Detalhada

#### Passo 3: Região Crítica

Rejeitamos  $H_0$  quando:

$$4x^{-3/2} > k \quad (143)$$

Rearranjando:

$$x^{-3/2} > \frac{k}{4} \quad (144)$$

$$x^{3/2} < \frac{4}{k} \quad (145)$$

$$x < \left(\frac{4}{k}\right)^{2/3} \quad (146)$$

Definindo  $k_1 = \left(\frac{4}{k}\right)^{2/3}$ :

$$R_c = \{x \in (0, 4) : x < k_1\} \quad (147)$$

**Interpretação importante:** Rejeitamos  $H_0$  para valores PEQUENOS de  $X$ ! Isso acontece porque  $f_1$  dá mais peso para valores pequenos que  $f_0$ .

### Solução Detalhada

#### Passo 4: Determinação de $k_1$ para Tamanho $\alpha$

Queremos que o teste tenha tamanho  $\alpha$ :

$$\alpha = P_{f_0}[X < k_1] = \int_0^{k_1} f_0(x) dx \quad (148)$$

Calculando:

$$\int_0^{k_1} \frac{3x^2}{64} dx = \frac{3}{64} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^{k_1} \quad (149)$$

$$= \frac{k_1^3}{64} \quad (150)$$

Portanto:

$$\alpha = \frac{k_1^3}{64} \quad (151)$$

Resolvendo para  $k_1$ :

$$\boxed{k_1 = (64\alpha)^{1/3} = 4\alpha^{1/3}} \quad (152)$$

## Solução Detalhada

### Passo 5: Poder do Teste

O poder é a probabilidade de rejeitar  $H_0$  quando  $H_1$  é verdadeira:

$$\text{Poder} = P_{f_1}[X < k_1] = \int_0^{k_1} f_1(x) dx \quad (153)$$

$$= \int_0^{k_1} \frac{3}{16} \sqrt{x} dx \quad (154)$$

$$= \frac{3}{16} \cdot \frac{2x^{3/2}}{3} \Big|_0^{k_1} \quad (155)$$

$$= \frac{x^{3/2}}{8} \Big|_0^{k_1} \quad (156)$$

$$= \frac{k_1^{3/2}}{8} \quad (157)$$

Substituindo  $k_1 = 4\alpha^{1/3}$ :

$$\text{Poder} = \frac{(4\alpha^{1/3})^{3/2}}{8} \quad (158)$$

$$= \frac{4^{3/2} \cdot \alpha^{1/2}}{8} \quad (159)$$

$$= \frac{8\alpha^{1/2}}{8} \quad (160)$$

$$= \boxed{\alpha^{1/2} = \sqrt{\alpha}} \quad (161)$$



### Solução Detalhada

#### Passo 6: Teste Final

Região Crítica:

$$R_c = \{x \in (0, 4) : x < 4\alpha^{1/3}\} \quad (162)$$

Regra de Decisão:

$$\text{Rejeita } H_0 \text{ se } x < 4\alpha^{1/3} \quad (163)$$

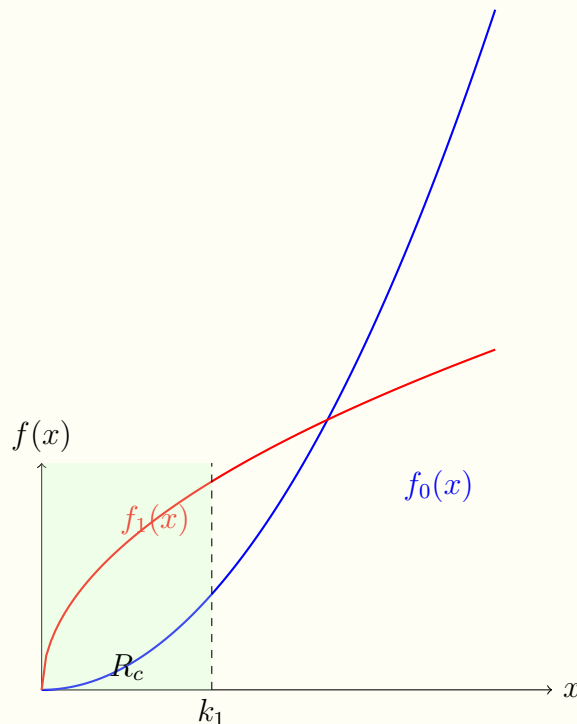
Poder:

$$\beta(f_1) = \sqrt{\alpha} \quad (164)$$

### Pontos Importantes

1. **Teste Não-Paramétrico:** Este é um exemplo onde não há parâmetro desconhecido. Estamos testando entre duas formas funcionais completamente especificadas.
2. **Região Crítica não-Intuitiva:** Rejeitamos para valores PEQUENOS de  $X$ . Isso ilustra que a região crítica depende de como as densidades se relacionam.
3. **Poder Crescente com  $\alpha$ :** Como o poder é  $\sqrt{\alpha}$ , ele aumenta com  $\alpha$ , mas de forma sub-linear.
4. **Exemplo Numérico:**
  - Para  $\alpha = 0.05$ :  $k_1 = 4(0.05)^{1/3} \approx 1.47$ , Poder =  $\sqrt{0.05} \approx 22.4\%$
  - Para  $\alpha = 0.01$ :  $k_1 = 4(0.01)^{1/3} \approx 0.86$ , Poder =  $\sqrt{0.01} = 10\%$
5. **Visualização:**  $f_1(x)$  é maior que  $f_0(x)$  para  $x$  pequenos e menor para  $x$  grandes. A razão  $\frac{f_1}{f_0}$  é grande para  $x$  pequenos.

### Comparação das Densidades



A região crítica  $R_c$  (em verde) corresponde a valores pequenos de  $X$  onde  $f_1$  domina  $f_0$ .

### Resumo da Questão

**Teste MP para  $H_0 : f = f_0$  vs  $H_1 : f = f_1$ :**

**Região Crítica:**

$$R_c = \{x \in (0, 4) : x < 4\alpha^{1/3}\}$$

**Regra de Decisão:**

$$\text{Rejeita } H_0 \text{ se } X_{\text{obs}} < 4\alpha^{1/3}$$

**Propriedades:**

- Tamanho exato  $\alpha$
- Poder =  $\sqrt{\alpha}$
- Exemplo de teste não-paramétrico MP
- Região crítica em valores pequenos de  $X$

## 8 Questão 4.9: Teste MP com Duas Variáveis Independentes

### Questão 4.9

Sejam  $X_1$  e  $X_2$  duas v.a.'s independentes com densidade  $f(x)$ .  
Determine o teste MP de nível  $\alpha$  para:

$$H_0 : f(x) = f_0(x) \quad \text{vs} \quad H_1 : f(x) = f_1(x) \quad (165)$$

onde  $f_0$  e  $f_1$  são as mesmas densidades da Questão 4.8.

### Solução Detalhada

#### Passo 1: Aplicação do LNP para Amostra Bivariada

Para duas observações independentes, a densidade conjunta é o produto das marginais.

Pelo LNP, rejeitamos  $H_0$  quando:

$$\frac{f_1(x_1)f_1(x_2)}{f_0(x_1)f_0(x_2)} > k \quad (166)$$

## Solução Detalhada

### Passo 2: Simplificação da Razão

Da Questão 4.8, sabemos que  $\frac{f_1(x)}{f_0(x)} = 4x^{-3/2}$  para  $x \in (0, 4)$ .  
Portanto:

$$\frac{f_1(x_1)f_1(x_2)}{f_0(x_1)f_0(x_2)} = \frac{f_1(x_1)}{f_0(x_1)} \cdot \frac{f_1(x_2)}{f_0(x_2)} \quad (167)$$

$$= 4x_1^{-3/2} \cdot 4x_2^{-3/2} \quad (168)$$

$$= 16(x_1x_2)^{-3/2} \quad (169)$$

### Passo 3: Região Crítica

Rejeitamos  $H_0$  quando:

$$16(x_1x_2)^{-3/2} > k \quad (170)$$

Rearranjando:

$$(x_1x_2)^{-3/2} > \frac{k}{16} \quad (171)$$

$$(x_1x_2)^{3/2} < \frac{16}{k} \quad (172)$$

$$x_1x_2 < \left(\frac{16}{k}\right)^{2/3} \quad (173)$$

Definindo  $K_1 = \left(\frac{16}{k}\right)^{2/3}$ :

$$R_c = \{(x_1, x_2) \in (0, 4) \times (0, 4) : x_1x_2 < K_1\} \quad (174)$$

### Solução Detalhada

#### Passo 4: Usando a Função de Distribuição

Para determinar  $K_1$ , usamos a função de distribuição acumulada de  $f_0$ .  
A fda correspondente a  $f_0$  é:

$$F_0(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{x^3}{64}, & 0 < x < 4 \\ 1, & x \geq 4 \end{cases} \quad (175)$$

**Verificação:**

$$F_0(x) = \int_0^x \frac{3t^2}{64} dt = \frac{3}{64} \cdot \frac{t^3}{3} \Big|_0^x = \frac{x^3}{64} \quad (176)$$

## Solução Detalhada

### Passo 5: Estatística qui-Quadrado

Uma propriedade útil: Se  $X \sim f_0$ , então:

$$-2 \log F_0(X) \sim \chi_2^2 \quad (177)$$

**Demonstração rápida:**

- $F_0(X) \sim \text{Uniforme}(0, 1)$  (transformação probabilidade integral)
- Se  $U \sim \text{Uniforme}(0, 1)$ , então  $-2 \log U \sim \chi_2^2$

### Passo 6: Reformulação da Região Crítica

A condição  $x_1 x_2 < K_1$  pode ser reescrita usando  $F_0$ :

$$x_1 x_2 < K_1 \Leftrightarrow \frac{x_1^3}{64} \cdot \frac{x_2^3}{64} < k_2 \quad (178)$$

$$\Leftrightarrow F_0(x_1) \cdot F_0(x_2) < k_2 \quad (179)$$

$$\Leftrightarrow -\log[F_0(x_1) \cdot F_0(x_2)] > -\log k_2 \quad (180)$$

$$\Leftrightarrow -\log F_0(x_1) - \log F_0(x_2) > -\log k_2 \quad (181)$$

$$\Leftrightarrow -2 \log F_0(x_1) - 2 \log F_0(x_2) > -2 \log k_2 \quad (182)$$

## Solução Detalhada

### Passo 7: Estatística de Teste Final

Definimos:

$$Q(x_1, x_2) = -2 \sum_{i=1}^2 \log F_0(x_i) = -2 \log F_0(x_1) - 2 \log F_0(x_2) \quad (183)$$

Sob  $H_0$ , como  $X_1$  e  $X_2$  são independentes:

$$Q(X_1, X_2) \stackrel{H_0}{\sim} \chi_4^2 \quad (184)$$

pois é a soma de duas variáveis  $\chi_2^2$  independentes.

A região crítica é:

$$R_c = \{(x_1, x_2) : Q(x_1, x_2) > q_\alpha\} \quad (185)$$

onde  $q_\alpha = \chi_{4,1-\alpha}^2$  satisfaz:

$$P_{\chi_4^2}[Q > q_\alpha] = \alpha \quad (186)$$



### Solução Detalhada

#### Passo 8: Teste Final

Estatística de Teste:

$$Q(x_1, x_2) = -2 \log F_0(x_1) - 2 \log F_0(x_2) \stackrel{H_0}{\sim} \chi_4^2 \quad (187)$$

Regra de Decisão:

$$\text{Rejeita } H_0 \text{ se } Q(x_1, x_2) > \chi_{4,1-\alpha}^2 \quad (188)$$

Para os dados, calculamos:

$$Q = -2 \log \left( \frac{x_1^3}{64} \right) - 2 \log \left( \frac{x_2^3}{64} \right) \quad (189)$$

## Pontos Importantes

1. **Extensão Natural:** Este problema estende a Questão 4.8 para duas observações. A lógica é similar, mas trabalhamos no espaço bidimensional.
2. **Estatística Qui-Quadrado:** A transformação via  $-2 \log F_0$  é uma técnica poderosa que aparece em muitos contextos (teste da razão de verossimilhanças, por exemplo).
3. **Independência:** A independência de  $X_1$  e  $X_2$  permite que a estatística seja a soma de duas  $\chi^2_2$ , resultando em  $\chi^2_4$ .
4. **Generalização:** Para  $n$  observações, teríamos:

$$Q = -2 \sum_{i=1}^n \log F_0(X_i) \sim \chi^2_{2n} \quad (190)$$

5. **Aplicação Prática:** Para  $\alpha = 0.05$ , usamos  $\chi^2_{4,0.95} = 9.488$ . Se  $Q_{\text{calc}} > 9.488$ , rejeitamos  $H_0$ .

## Exemplo Numérico

Suponha que observamos  $x_1 = 0.5$  e  $x_2 = 1.0$ .

1. Calcular  $F_0$ :

$$F_0(0.5) = \frac{(0.5)^3}{64} = \frac{0.125}{64} \approx 0.00195 \quad (191)$$

$$F_0(1.0) = \frac{1^3}{64} = \frac{1}{64} \approx 0.01563 \quad (192)$$

2. Calcular  $Q$ :

$$Q = -2 \log(0.00195) - 2 \log(0.01563) \quad (193)$$

$$= -2(-6.241) - 2(-4.158) \quad (194)$$

$$= 12.482 + 8.316 \quad (195)$$

$$= 20.798 \quad (196)$$

3. Decisão: Como  $20.798 > 9.488$ , rejeitamos  $H_0$  ao nível 5%.

**Interpretação:** Os valores observados (0.5, 1.0) são "muito pequenos" sob  $f_0$ , fornecendo evidência forte a favor de  $f_1$ .

### Resumo da Questão

**Teste MP para  $H_0 : f = f_0$  vs  $H_1 : f = f_1$  (2 observações):**  
**Estatística de Teste:**

$$Q = -2 \sum_{i=1}^2 \log F_0(X_i) \stackrel{H_0}{\sim} \chi_4^2$$

**Regra de Decisão:**

Rejeita  $H_0$  se  $Q_{\text{cal}} > \chi_{4,1-\alpha}^2$

**Propriedades:**

- Generalização da Q4.8 para 2 observações
- Usa transformação via função de distribuição
- Estatística de teste tem distribuição  $\chi^2$  conhecida

## 9 Questão 4.10: Teste UMP para Variância (Normal com Média Zero)

### Questão 4.10

Sejam  $X_1, \dots, X_n$  uma amostra aleatória de  $X \sim N(0, \sigma^2)$ , onde  $\sigma^2 > 0$  é desconhecido.

Fixando  $\alpha \in (0, 1)$ , obtenha o teste Uniformemente Mais Poderoso (UMP) de nível  $\alpha$  para:

$$H_0 : \sigma = \sigma_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \sigma < \sigma_0 \quad (197)$$

onde  $\sigma_0 > 0$  é conhecido.

### Solução Detalhada

#### Passo 1: Estratégia via LNP

Fixemos  $\sigma_1 < \sigma_0$  e consideremos inicialmente o problema:

$$H_0 : \sigma = \sigma_0 \quad \text{vs} \quad H'_1 : \sigma = \sigma_1 \quad (198)$$

Aplicamos o LNP e depois mostramos que o teste resultante não depende da escolha de  $\sigma_1$ , provando que é UMP.

## Solução Detalhada

### Passo 2: Função de Verossimilhança

Para  $X \sim N(0, \sigma^2)$ , a densidade é:

$$f(x; \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left\{ -\frac{x^2}{2\sigma^2} \right\} \quad (199)$$

Para uma amostra  $x = (x_1, \dots, x_n)$ :

$$L(\sigma; x) = \prod_{j=1}^n (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{x_j^2}{2\sigma^2} \right\} \quad (200)$$

$$= (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^n x_j^2 \right\} \quad (201)$$

Para  $k = 0, 1$ :

$$L_k = L(\sigma_k; x) = (2\pi\sigma_k^2)^{-n/2} \exp \left\{ -\frac{\sum x_j^2}{2\sigma_k^2} \right\} \quad (202)$$

### Passo 3: Razão de Verossimilhanças

$$\frac{L_1}{L_0} = \frac{(2\pi\sigma_1^2)^{-n/2}}{(2\pi\sigma_0^2)^{-n/2}} \exp \left\{ -\frac{\sum x_j^2}{2} \left( \frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_0^2} \right) \right\} \quad (203)$$

$$= \left( \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2} \right)^{n/2} \exp \left\{ -\frac{\sum x_j^2}{2} \left( \frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_0^2} \right) \right\} \quad (204)$$

## Solução Detalhada

### Passo 4: Região Crítica

Pelo LNP, rejeitamos  $H_0$  quando  $\frac{L_1}{L_0} > k$ :

$$\left(\frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2}\right)^{n/2} \exp \left\{ -\frac{\sum x_j^2}{2} \left( \frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_0^2} \right) \right\} > k \quad (205)$$

Aplicando logaritmo:

$$\frac{n}{2} \log \left( \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2} \right) - \frac{\sum x_j^2}{2} \left( \frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_0^2} \right) > \log k \quad (206)$$

Rearranjando:

$$-\frac{\sum x_j^2}{2} \left( \frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_0^2} \right) > \log k - \frac{n}{2} \log \left( \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2} \right) \quad (207)$$

Como  $\sigma_1 < \sigma_0$ , temos  $\frac{1}{\sigma_1^2} > \frac{1}{\sigma_0^2}$ , logo  $\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_0^2} > 0$ .

Multiplicando por  $-1$  (inverte desigualdade):

$$\frac{\sum x_j^2}{2} \left( \frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_0^2} \right) < -\log k + \frac{n}{2} \log \left( \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2} \right) \quad (208)$$

Dividindo por  $\left( \frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_0^2} \right) > 0$ :

$$\sum x_j^2 < \frac{2 \left[ -\log k + \frac{n}{2} \log \left( \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2} \right) \right]}{\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_0^2}} \quad (209)$$

Simplificando o lado direito:

$$\sum x_j^2 < \frac{\sigma_0^2 \cdot \text{constante}}{\sigma_0^2 - \sigma_1^2} \cdot \text{expressão em } k \text{ e } n \quad (210)$$

**Observação crucial:** Manipulando algebricamente, podemos escrever:

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{\sigma_0^2} < k_2 \quad (211)$$

onde  $k_2$  depende de  $k$ ,  $n$ ,  $\sigma_0$ ,  $\sigma_1$ , mas veremos que podemos determinar  $k_2$  apenas por  $\alpha$  e  $\sigma_0$ .

## Solução Detalhada

### Passo 5: Estatística de Teste

Definimos:

$$Q(x) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i}{\sigma_0} \right)^2 = \frac{1}{\sigma_0^2} \sum_{i=1}^n x_i^2 \quad (212)$$

**Distribuição sob  $H_0$ :**

Quando  $H_0 : \sigma = \sigma_0$  é verdadeira, temos  $X_i \sim N(0, \sigma_0^2)$ .

Portanto:

$$\frac{X_i}{\sigma_0} \sim N(0, 1) \quad (213)$$

Logo:

$$\left( \frac{X_i}{\sigma_0} \right)^2 \sim \chi_1^2 \quad (214)$$

Como as  $X_i$  são independentes:

$$Q(X) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{X_i}{\sigma_0} \right)^2 \stackrel{H_0}{\sim} \chi_n^2 \quad (215)$$

### Passo 6: Teste UMP

**Observação importante:** A estatística  $Q(x)$  e a forma da região crítica ( $Q < k_2$ ) NÃO dependem da escolha específica de  $\sigma_1$ !

Isso significa que o teste é o mesmo para qualquer  $\sigma_1 < \sigma_0$ . Portanto, o teste é UMP para  $H_0 : \sigma = \sigma_0$  vs  $H_1 : \sigma < \sigma_0$ .

A região crítica é:

$$R_c = \{x \in \mathbb{R}^n : Q(x) < \chi_{n,1-\alpha}^2\} \quad (216)$$

onde  $\chi_{n,1-\alpha}^2$  satisfaz:

$$P_{H_0}\{Q < \chi_{n,1-\alpha}^2\} = \alpha \quad (217)$$

### Passo 7: Teste Final

**Estatística de Teste:**

$$Q(x) = \frac{1}{\sigma_0^2} \sum_{i=1}^n x_i^2 \stackrel{H_0}{\sim} \chi_n^2 \quad (218)$$

**Regra de Decisão:**

$$\text{Rejeita } H_0 \text{ se } Q_{\text{cal}} < \chi_{n,1-\alpha}^2 \quad (219)$$

**Função Crítica:**

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } Q(x) < \chi_{n,1-\alpha}^2 \\ 0, & \text{se } Q(x) \geq \chi_{n,1-\alpha}^2 \end{cases} \quad (220)$$

**Nota importante:** Rejeitamos para valores PEQUENOS de  $Q$  (i.e., para  $\sum x_i^2$  pequeno), o que faz sentido porque valores pequenos de  $\sum x_i^2$  sugerem que  $\sigma$  é pequeno.

### Pontos Importantes

1. **Teste Unilateral à Esquerda:** Este é um exemplo raro onde rejeitamos na CAUDA ESQUERDA da distribuição qui-quadrado. Isso acontece porque  $H_1 : \sigma < \sigma_0$ .
2. **Propriedade UMP:** O teste não depende da escolha específica de  $\sigma_1$ , apenas de  $\sigma_0$ . Isso o torna UMP.
3. **Relação com Variância Amostral:** Como  $\mu = 0$  é conhecido, a variância amostral apropriada é:

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 \quad (221)$$

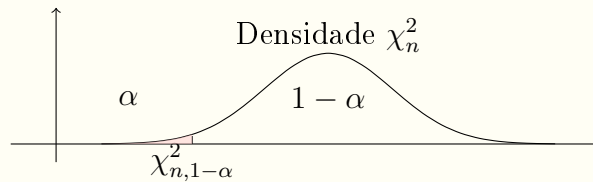
O teste pode ser reescrito como: rejeitar se  $nS^2/\sigma_0^2 < \chi_{n,1-\alpha}^2$ .

4. **Comparação com  $\sigma^2$  Desconhecida:** Se  $\mu$  fosse desconhecido, usaríamos:

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi_{n-1}^2 \quad (222)$$

onde  $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum (X_i - \bar{X})^2$ .

5. **Visualização da Região Crítica:**



Rejeitamos  $H_0$  na região vermelha (cauda esquerda).

### Exemplo Numérico

Suponha  $n = 10$ ,  $\sigma_0 = 2$ ,  $\alpha = 0.05$  e observamos  $\sum x_i^2 = 20$ .

1. Calcular estatística:  $Q_{\text{cal}} = \frac{20}{4} = 5$
2. Graus de liberdade:  $n = 10$
3. Valor crítico:  $\chi_{10,0.05}^2 = 3.94$  (da tabela)
4. Decisão: Como  $5 > 3.94$ , NÃO rejeitamos  $H_0$

**Interpretação:** Não há evidência suficiente ao nível 5% para concluir que  $\sigma < 2$ . Se tivéssemos observado  $\sum x_i^2 = 10$ , então  $Q = 2.5 < 3.94$  e rejeitaríamos  $H_0$ .



### Resumo da Questão

**Teste UMP para  $H_0 : \sigma = \sigma_0$  vs  $H_1 : \sigma < \sigma_0$ :**

**Estatística de Teste:**

$$Q = \frac{1}{\sigma_0^2} \sum_{i=1}^n X_i^2 \stackrel{H_0}{\sim} \chi_n^2$$

**Regra de Decisão:**

Rejeita  $H_0$  se  $Q_{\text{cal}} < \chi_{n,1-\alpha}^2$

**Propriedades:**

- Teste UMP de nível  $\alpha$
- Rejeição na cauda ESQUERDA
- Adequado quando média é zero (conhecida)
- Não depende da escolha de  $\sigma_1$

## 10 Questão 4.12: Teste UMP via Teorema de Karlin-Rubin

### Questão 4.12

Sejam  $X_1, \dots, X_n$  uma amostra aleatória de  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  com  $\mu \in \mathbb{R}$  desconhecida e  $\sigma^2 \in \mathbb{R}^+$  conhecida.

Encontre o teste UMP para:

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \mu > \mu_0, \quad \text{de nível } \alpha \quad (223)$$

### Solução Detalhada

#### Passo 1: Verificar Aplicabilidade do Teorema de Karlin-Rubin

O Teorema de Karlin-Rubin fornece testes UMP para hipóteses unilaterais quando a família de distribuições possui Razão de Verossimilhança Monótona (RVM).

Precisamos verificar:

1. Existe uma estatística suficiente  $T(X)$
2. A família de densidades induzidas por  $T$  tem RVM

#### Passo 2: Estatística Suficiente

Pelo Lema da Fatoração de Neyman, a verossimilhança pode ser escrita como:

$$L(\mu; x) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \right\} \quad (224)$$

$$= (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n x_i^2 \right\} \cdot \exp \left\{ \frac{\mu}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n x_i - \frac{n\mu^2}{2\sigma^2} \right\} \quad (225)$$

Portanto:

$$T(X) = \sum_{i=1}^n X_i \quad (226)$$

é suficiente para  $\mu$  (com  $\sigma^2$  conhecido).

### Solução Detalhada

#### Passo 3: Densidade Induzida de $T$

Como  $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$  são independentes:

$$T = \sum_{i=1}^n X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2) \quad (227)$$

A densidade de  $T$  é:

$$f(t; \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n\sigma^2}} \exp \left\{ -\frac{(t - n\mu)^2}{2n\sigma^2} \right\} \quad (228)$$

## Solução Detalhada

### Passo 4: Verificar RVM

Para  $\mu^* > \mu$ , calculamos:

$$\frac{f(t; \mu^*)}{f(t; \mu)} = \frac{\exp \left\{ -\frac{(t-n\mu^*)^2}{2n\sigma^2} \right\}}{\exp \left\{ -\frac{(t-n\mu)^2}{2n\sigma^2} \right\}} \quad (229)$$

$$= \exp \left\{ \frac{1}{2n\sigma^2} [(t-n\mu)^2 - (t-n\mu^*)^2] \right\} \quad (230)$$

$$= \exp \left\{ \frac{1}{2n\sigma^2} [t^2 - 2nt\mu + n^2\mu^2 - t^2 + 2nt\mu^* - n^2(\mu^*)^2] \right\} \quad (231)$$

$$= \exp \left\{ \frac{1}{2n\sigma^2} [2nt(\mu^* - \mu) + n^2(\mu^2 - (\mu^*)^2)] \right\} \quad (232)$$

$$= \exp \left\{ \frac{t(\mu^* - \mu)}{\sigma^2} + \frac{n(\mu^2 - (\mu^*)^2)}{2\sigma^2} \right\} \quad (233)$$

Como  $\mu^* > \mu$ , o coeficiente de  $t$  é  $\frac{\mu^* - \mu}{\sigma^2} > 0$ .

Portanto,  $\frac{f(t; \mu^*)}{f(t; \mu)}$  é CRESCENTE em  $t$ , provando que  $\{f(t; \mu) : \mu \in \mathbb{R}\}$  tem RVM.

### Solução Detalhada

#### Passo 5: Aplicação do Teorema de Karlin-Rubin

Pelo Teorema de Karlin-Rubin, o teste UMP de nível  $\alpha$  tem função crítica:

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } T(x) > k \\ 0, & \text{se } T(x) < k \end{cases} \quad (234)$$

onde  $k$  é determinado por:

$$E_{\mu_0}[\psi(X)] = \alpha \quad (235)$$

ou seja:

$$P_{\mu_0}[T(X) > k] = \alpha \quad (236)$$

### Solução Detalhada

#### Passo 6: Padronização

Como  $T = \sum X_i \sim N(n\mu_0, n\sigma^2)$  sob  $H_0 : \mu = \mu_0$ :

$$\frac{T - n\mu_0}{\sqrt{n\sigma^2}} = \frac{T - n\mu_0}{\sigma\sqrt{n}} \sim N(0, 1) \quad (237)$$

Equivalentemente, em termos da média amostral  $\bar{X} = T/n$ :

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{\sigma} \sim N(0, 1) \quad (238)$$

## Solução Detalhada

### Passo 7: Determinação de $k$

A condição  $P_{\mu_0}[T > k] = \alpha$  se traduz em:

$$P_{\mu_0} \left[ \frac{T - n\mu_0}{\sigma\sqrt{n}} > \frac{k - n\mu_0}{\sigma\sqrt{n}} \right] = \alpha \quad (239)$$

Para  $Z \sim N(0, 1)$ :

$$P[Z > z_\alpha] = \alpha \quad (240)$$

Portanto:

$$\frac{k - n\mu_0}{\sigma\sqrt{n}} = z_\alpha \quad \Rightarrow \quad k = n\mu_0 + z_\alpha\sigma\sqrt{n} \quad (241)$$

### Passo 8: Teste Final

Estatística de Teste:

$$Z = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{\sigma} \stackrel{H_0}{\sim} N(0, 1) \quad (242)$$

Regra de Decisão:

$$\text{Rejeita } H_0 \text{ se } Z_{\text{cal}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{x} - \mu_0)}{\sigma} > z_\alpha \quad (243)$$

Função Crítica:

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } \frac{\sqrt{n}(\bar{x} - \mu_0)}{\sigma} > z_\alpha \\ 0, & \text{se } \frac{\sqrt{n}(\bar{x} - \mu_0)}{\sigma} \leq z_\alpha \end{cases} \quad (244)$$

onde  $z_\alpha$  é o quantil  $(1 - \alpha)$  da  $N(0, 1)$ :

- $\alpha = 0.05$ :  $z_{0.05} = 1.645$
- $\alpha = 0.01$ :  $z_{0.01} = 2.326$
- $\alpha = 0.10$ :  $z_{0.10} = 1.282$

### Pontos Importantes

1. **Este é o Teste Z Clássico:** O teste UMP para esta situação é exatamente o teste  $Z$  que usamos rotineiramente!
2. **Teorema de Karlin-Rubin:** O TKR fornece uma maneira sistemática de construir testes UMP para hipóteses unilaterais quando há RVM.
3. **RVM na Normal:** A família Normal com média desconhecida e variância conhecida possui RVM em  $\sum X_i$  (ou equivalentemente, em  $\bar{X}$ ).
4. **Otimidade:** Este teste é UMP, significando que entre TODOS os testes de nível  $\alpha$ , este tem o maior poder para qualquer  $\mu > \mu_0$ .
5. **Comparação com Q4.4:**
  - Q4.4: Hipóteses simples ( $\mu = \mu_1$ )  $\Rightarrow$  Teste MP via LNP
  - Q4.12: Hipótese composta ( $\mu > \mu_0$ )  $\Rightarrow$  Teste UMP via TKR
  - Resultado: Mesmo teste  $Z$ !
6. **Extensões:**
  - Para  $H_1 : \mu < \mu_0$ : rejeitamos se  $Z < -z_\alpha$
  - Para  $H_1 : \mu \neq \mu_0$ : rejeitamos se  $|Z| > z_{\alpha/2}$  (teste bilateral)

### Exemplo Numérico Completo

Suponha  $n = 25$ ,  $\sigma = 5$ ,  $\mu_0 = 100$ ,  $\alpha = 0.05$ .  
Observamos  $\bar{x} = 103$ .

1. Calcular estatística:

$$Z_{\text{cal}} = \frac{\sqrt{25}(103 - 100)}{5} = \frac{5 \cdot 3}{5} = 3 \quad (245)$$

2. Valor crítico:  $z_{0.05} = 1.645$
3. Decisão: Como  $3 > 1.645$ , rejeitamos  $H_0$
4. p-valor:  $p = P(Z > 3) = 1 - \Phi(3) = 0.0013$

**Interpretação:** Há evidência muito forte ( $p = 0.13\%$ ) de que  $\mu > 100$ .

### Função Poder

A função poder deste teste é:

$$Q(\mu) = P_\mu[Z > z_\alpha] = P_\mu\left[\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{\sigma} > z_\alpha\right] \quad (246)$$

Para  $\mu \neq \mu_0$ :

$$Q(\mu) = 1 - \Phi\left(z_\alpha - \frac{\sqrt{n}(\mu - \mu_0)}{\sigma}\right) \quad (247)$$

Esta função é:



### Resumo da Questão

Teste UMP para  $H_0 : \mu \leq \mu_0$  vs  $H_1 : \mu > \mu_0$ :

Estatística de Teste:

$$Z = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{\sigma} \stackrel{H_0}{\sim} N(0, 1)$$

Regra de Decisão:

Rejeita  $H_0$  se  $Z_{\text{cal}} > z_\alpha$

Propriedades:

- Teste UMP de nível  $\alpha$  (pelo TKR)
- É o teste Z clássico
- Baseado em estatística suficiente com RVM
- Poder máximo entre todos os testes de nível  $\alpha$

## Conclusão

Este documento apresentou soluções detalhadas e didáticas para todas as questões do Capítulo 4 sobre Teste de Hipóteses resolvidas em sala de aula.

## Síntese dos Tópicos Abordados

1. **Q4.1 e Q4.3:** Exemplos introdutórios ilustrando regiões críticas, erros Tipo I e II, e função poder
2. **Q4.4, Q4.5, Q4.6, Q4.7:** Aplicações do Lema de Neyman-Pearson para distribuições paramétricas (Normal, Exponencial, Bernoulli, Poisson)
3. **Q4.8 e Q4.9:** Testes não-paramétricos e extensões multivariadas
4. **Q4.10 e Q4.12:** Testes UMP via Teorema de Karlin-Rubin para hipóteses compostas

## Conexões Entre as Questões

- Q4.1  $\rightarrow$  Q4.3: Conceitos básicos  $\rightarrow$  Função poder
- Q4.4  $\rightarrow$  Q4.12: MP (simples)  $\rightarrow$  UMP (composta) para Normal
- Q4.6  $\leftrightarrow$  Q4.7: Distribuições discretas (aleatorização)
- Q4.8  $\rightarrow$  Q4.9: Uma observação  $\rightarrow$  Duas observações

## Mensagens Principais

1. O **Lema de Neyman-Pearson** fornece testes MP para hipóteses simples
2. O **Teorema de Karlin-Rubin** estende para testes UMP quando há RVM
3. **Estatísticas suficientes** são fundamentais para testes ótimos
4. **Distribuições discretas** geralmente requerem aleatorização
5. **Testes clássicos** (Z, t,  $\chi^2$ , F) são casos especiais de princípios gerais

## Recomendações Finais

Para dominar o material:

- Pratique derivar os testes do zero, não apenas aplicar fórmulas
- Entenda a intuição por trás de cada região crítica
- Compare diferentes testes para o mesmo problema
- Simule dados e verifique as propriedades dos testes
- Conecte os conceitos com aplicações práticas

**Fim do Documento de Questões Resolvidas**