Material Auxiliar - Unidade 4

Testes de Hipóteses (Neyman–Pearson, MP/UMP, Karlin–Rubin)

Explicações Detalhadas e Didáticas

Curso de Inferência Estatística

Outubro 2025

Sumário

1 Introdução

Este material complementa as notas de aula da Unidade 4. Sistematizamos: (i) a formulação de testes, (ii) o Lema de Neyman–Pearson (LNP), (iii) função poder, (iv) Razão de Verossimilhança Monótona (RVM) e o teorema de Karlin–Rubin, (v) construção de testes MP/UMP em famílias clássicas (Normal, Poisson, Exponencial, Bernoulli), e (vi) procedimentos operacionais (Z, χ^2) com exemplos e exercícios.

2 Conceitos Fundamentais

2.1 Hipóteses, Erros e Poder

Definição 2.1. Dados $H_0 : \theta \in \Theta_0$ e $H_1 : \theta \in \Theta_1$, define-se região crítica R_c e seu complemento R_c^c. O **nível** é $\alpha = \sup_{\theta \in \Theta_0} P_\theta(R_c)$ e o **poder** é $Q(\theta) = P_\theta(R_c)$.

Observação 2.1 (Valor-p)**.** *Para estatística T e observação t_{cal}, o valor-p é a probabilidade, sob H_0, de obter evidência tão extrema quanto t_{cal} na direção de H_1.*

2.2 Função crítica e testes aleatorizados

Definição 2.2 (Função crítica)**.** Uma função $\psi : \mathcal{X} \to [0, 1]$ dá a probabilidade de rejeitar H_0 ao observar x. Testes determinísticos têm $\psi \in \{0, 1\}$; testes aleatorizados admitem $\psi = \delta \in (0, 1)$ numa fronteira.

3 Lema de Neyman–Pearson

Observação 3.1 (Enunciado)**.** *Para hipóteses simples $H_0 : \theta = \theta_0$ vs. $H_1 : \theta = \theta_1$, o teste de razão de verossimilhanças*

$$R_c = \{x : L(\theta_1, x) > k\, L(\theta_0, x)\}$$

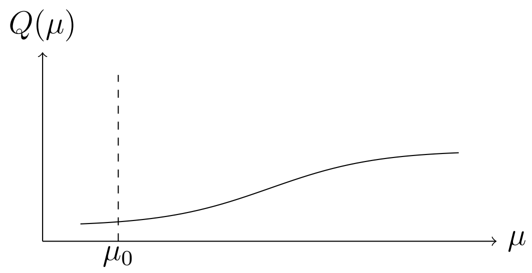
é MP entre os de nível α.

Exemplo 3.1 (Teste Z)**.** Se $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ com σ conhecido, $H_0 : \mu = \mu_0$ vs. $H_1 : \mu > \mu_0$. Estatística $Z = \sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)/\sigma \sim N(0, 1)$ sob H_0. Regra: rejeitar se $Z > z_\alpha$. Valor-p $= P(Z \geq z_{cal})$.

4 Função Poder e Curvas de Poder

Definição 4.1. Para teste ψ, o poder $Q(\theta) = E_\theta[\psi(X)]$. Em exemplos gaussianos, pode-se obter $Q(\mu) = 1 - \Phi(\cdot)$ explicitamente.

Exemplo 4.1 (Curva de poder, caso Normal)**.** Considere a regra $\bar{X}_n > c$. Então $Q(\mu) = P_\mu(\bar{X}_n > c) = 1 - \Phi\big(\sqrt{n}(c - \mu)/\sigma\big)$.



5 RVM e Teorema de Karlin–Rubin

Definição 5.1 (RVM)**.** Uma família $\{f(x;\theta)\}$ tem RVM em $T(x)$ se $\log L(\theta_1, x) - \log L(\theta_0, x)$ é não decrescente em $T(x)$ para $\theta_1 > \theta_0$.

Observação 5.1 (Karlin–Rubin)**.** *Se há RVM não decrescente em $T(x)$, o teste de nível α que rejeita para $T(x)$ grande é UMP para $H_1 : \theta > \theta_0$.*

6 Famílias Clássicas

6.1 Poisson(λ)

Com $T = \sum X_i \sim \text{Poisson}(n\lambda)$, rejeitar $H_0 : \lambda = \lambda_0$ para $T > u_1$ com $P_{\lambda_0}(T > u_1) \leq \alpha$. Valor-p $= P_{\lambda_0}(T \geq T_{cal})$.

6.2 Exponencial(θ)

Razão $L(\theta_1, x)/L(\theta_0, x)$ é função crescente de $\sum X_i$. Sob H_0, $\frac{2}{\theta_0} \sum X_i \sim \chi^2_{2n}$; decide-se por quantis χ^2.

6.3 Bernoulli(p)

Com $T = \sum X_i \sim \text{Binomial}(n, p)$, rejeitar para $T > k_1$ (unilateral). Em simples vs. simples, aplicar LNP diretamente.

7 Procedimentos Operacionais

7.1 Teste Z (Completo)

7.1.1 Resumo do Teste Z

Suposição: $X_1, \ldots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$ e $\sigma^2 > 0$ é conhecido.

Hipóteses:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu = \mu_1 \quad (> \mu_0) \quad \text{[unilateral à direita]} \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \quad \text{[bilateral]} \end{cases}$$

Estatística de Teste:

$$Z(X) = \sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sigma} \overset{H_0}{\sim} N(0,1)$$

Regra de Decisão:
Método tradicional:

- Unilateral (à direita): Rejeitar H_0 se $Z(x) > z_\alpha$
- Unilateral (à esquerda): Rejeitar H_0 se $Z(x) < -z_\alpha$
- Bilateral: Rejeitar H_0 se $|Z(x)| > z_{\alpha/2}$

Método do valor-p: Seja $z_{cal} = Z(x)$ o valor calculado. Rejeitar H_0 se:

- Unilateral (à direita): $\hat{\alpha} = P(Z > z_{cal}) < \alpha$
- Unilateral (à esquerda): $\hat{\alpha} = P(Z < z_{cal}) < \alpha$
- Bilateral: $\hat{\alpha} = 2 \cdot P(|Z| > |z_{cal}|) < \alpha$

7.2 Teste χ^2 (Completo)

7.2.1 Resumo do Teste χ^2 para Exponencial

Suposição:

$$X_1, \ldots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} \text{Exp}(\theta)$$

Hipóteses:

$$H_0 : \theta = \theta_0$$
$$H_1 : \theta = \theta_1 \quad (\theta_1 > \theta_0)$$

Estatística de Teste:

$$Q(X) = \frac{2}{\theta_0}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \chi^2_{2n} \quad \text{sob } H_0$$

Regra de decisão:

- *Método tradicional:* Rejeitar H_0 se $Q_{cal} > \chi^2_{2n,\alpha}$ (quantil α superior)
- *Método do valor-p:* Rejeitar H_0 se $\hat{\alpha} = P(Q > Q_{cal}) < \alpha$

onde $Q_{cal} = Q(x)$ é o valor calculado da estatística na amostra observada.

8 Construção de Regiões Críticas

1. Identificar $T(x)$ e/ou a razão de verossimilhanças
2. Usar LNP ou RVM+Karlin–Rubin
3. Determinar limiar por nível α (quantis)
4. Calcular valor-p correspondente

9 Exemplos Guias

9.1 Normal (Z)

Demonstrar derivação da regra e cálculo de valor-p.

9.2 Poisson

Determinar u_1 por $P_{\lambda_0}(T > u_1) \leq \alpha$.

9.3 Exponencial

Transformar soma para χ^2 e decidir.

10 Exercícios

Ex. 1 (Normal)

Para σ conhecido, derive a curva de poder do teste $H_0 : \mu = \mu_0$ vs. $H_1 : \mu > \mu_0$.

Ex. 2 (Poisson)

Para $n = 20$, $\lambda_0 = 2$, encontre u_1 tal que $P_{\lambda_0}(T > u_1) \leq 0{,}05$.

Ex. 3 (Exponencial)

Mostre que $\frac{2}{\theta_0} \sum X_i \sim \chi^2_{2n}$ sob H_0.

Soluções Resumidas

- Ex. 1: $Q(\mu) = 1 - \Phi\big(z_\alpha - \sqrt{n}(\mu - \mu_0)/\sigma\big)$.
- Ex. 2: Usar quantis de Poisson para Poisson$(n\lambda_0)$ e achar o menor u_1 que satisfaz a cauda.
- Ex. 3: Se $Y_i = 2X_i/\theta_0 \sim \chi^2_2$ i.i.d., então $\sum Y_i \sim \chi^2_{2n}$.

11 Apêndice

11.1 Figuras de Cauda (Z)