

Questões Resolvidas do Capítulo 5

Intervalos de Confiança - Soluções Detalhadas

Curso de Inferência Estatística - PPGEST/UFPE

Compilado e detalhado

Novembro 2025

Sumário

Introdução	2
1 Conceitos Fundamentais	3
1.1 Definições Básicas	3
1.2 Métodos de Construção	3
1.2.1 Inversão de um Procedimento de Teste	3
1.2.2 Método da Estatística Pivotal	3
2 Questão 5.1: Comparaçāo de Intervalos de Confiança	5
3 Métodos de Construção de Intervalos de Confiança	8
3.1 Data: 12/11/2025 - Abordagens Principais	8
4 Questão 5.2: IC para Normal via Inversão de Teste	9
5 Questão 5.3: IC para Exponencial via Inversão	12
6 Questão 5.4: IC para Exponencial usando Método Pivotal	15
6.1 Data: 12/11/25	15
7 Questão 5.5: IC para Uniforme usando Método Pivotal	19
8 Questão 5.6: IC Bilateral para Normal (Variância Conhecida)	23
9 Questão 5.7: IC Bilateral para Normal (Variância Desconhecida)	27
10 Exercício: IC para a Variância	31
Conclusão	34

Introdução

Este documento apresenta todas as questões resolvidas em sala de aula do Capítulo 5 sobre Intervalos de Confiança. As soluções foram expandidas com explicações detalhadas, intuições e comentários didáticos para facilitar o entendimento completo dos conceitos.

Organização do Documento

Cada questão está organizada da seguinte forma:

1. **Enunciado** - apresentação completa do problema
2. **Solução Detalhada** - desenvolvimento passo a passo
3. **Observações e Intuição** - comentários sobre o método e interpretações
4. **Resumo** - síntese dos principais resultados

Questões Incluídas

- Q(5.1) - Comparação de intervalos de confiança para Normal
- Q(5.2) - IC para Normal via inversão de teste (variância conhecida)
- Q(5.3) - IC para Exponencial via inversão de teste
- Q(5.4) - IC para Exponencial usando método pivotal
- Q(5.5) - IC para Uniforme($0, \theta$) usando método pivotal
- Q(5.6) - IC bilateral para Normal (variância conhecida)
- Q(5.7) - IC bilateral para Normal (variância desconhecida) - Intervalo t
- Exercício - IC para variância de população Normal
- Q(5.10) - IC para diferença de médias (duas amostras, variâncias iguais)
- Q(5.11) - IC para razão de variâncias (duas amostras)

Métodos Abordados

1. **Inversão de Testes de Hipóteses** - aproveitando a dualidade entre testes e IC
2. **Método Pivotal** - usando estatísticas com distribuição conhecida

1 Conceitos Fundamentais

1.1 Definições Básicas

Definição 5.1 - Probabilidade de Cobertura

Sejam $T_l(x)$ e $T_u(x)$ duas estatísticas baseadas em uma amostra $X = (x_1, \dots, x_n)^T$. A **probabilidade de cobertura** do intervalo aleatório $J = [T_l(x), T_u(x)]$ para o parâmetro desconhecido $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$ é dada por:

$$P_\theta [\theta \in [T_l(x), T_u(x)]] \quad (1)$$

Coeficiente de Confiança

O **coeficiente de confiança** de J é dado por:

$$\inf_{\theta \in \Theta} \{\mathbb{P}_\theta [\theta \in [T_L(x), T_U(x)]]\} \quad (2)$$

Na maioria das aplicações, a probabilidade de cobertura não dependerá do parâmetro e será equivalente ao coeficiente de cobertura.

1.2 Métodos de Construção

Observações e Intuição

Para construir intervalos de confiança, podem ser utilizadas duas abordagens principais:

1. Inversão de Procedimento de Teste de Hipótese
2. Via Estatística Pivotal

1.2.1 Inversão de um Procedimento de Teste

Em teste de hipóteses, a região de não rejeição de H_0 foi denotada como:

$$R^c = \begin{cases} \{x \in \mathcal{X}^n : T(x) > k\}^c & \text{para } H_1 : \theta \geq \theta_0, \\ \{x \in \mathcal{X}^n : T(x) < k\}^c & \text{para } H_1 : \theta \leq \theta_0, \\ \{x \in \mathcal{X}^n : |T(x)| > k\}^c & \text{para } H_1 : \theta \neq \theta_0. \end{cases}$$

A construção de intervalos de confiança é intimamente relacionada a R^c .

1.2.2 Método da Estatística Pivotal

Definição 5.3.1 - Pivô

Seja $T(x)$ (para $x = (x_1, \dots, x_n)^T$) uma estatística suficiente (mínima) para θ . Um **pivô** é uma variável aleatória U que depende de T e θ cuja distribuição **não depende** de θ .

Observações e Intuição

Casos Especiais de Pivôs:

1. **Família Locação** em $a(\theta)$: A distribuição de $\{T - a(\theta)\}$ não depende de θ .
2. **Família Escala** em $b(\theta)$: A distribuição de $T/b(\theta)$ não depende de θ .
3. **Família Locação-Escala** em $a(\theta)$ e $b(\theta)$: A distribuição de $\{T - a(\theta)\}/b(\theta)$ não depende de θ .

2 Questão 5.1: Comparação de Intervalos de Confiança

Questão 5.1

Sejam

$$J_1 = (X_1 - 1,96; X_1 + 1,96)$$

e

$$J_2 = \left(\bar{X} - \frac{1,96}{\sqrt{2}}, \bar{X} + \frac{1,96}{\sqrt{2}} \right)$$

dois intervalos aleatórios para μ , tais que $X_1, X_2 \sim N(\mu, 1)$ i.i.d. e

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2}{2}.$$

Encontre as probabilidades de cobertura de J_1 e J_2 .

Solução Detalhada

Parte 1: Probabilidade de Cobertura de J_1

O intervalo J_1 é baseado apenas na primeira observação X_1 .

$$\mathbb{P}_\mu\{\mu \in J_1\} = \mathbb{P}_\mu\{\mu \in (X_1 - 1,96; X_1 + 1,96)\} \quad (3)$$

$$= \mathbb{P}_\mu\{X_1 - 1,96 < \mu < X_1 + 1,96\} \quad (4)$$

$$= \mathbb{P}_\mu\{-1,96 < X_1 - \mu < 1,96\} \quad (5)$$

$$= \mathbb{P}_\mu\{|X_1 - \mu| < 1,96\} \quad (6)$$

Como $X_1 \sim N(\mu, 1)$, temos que $X_1 - \mu \sim N(0, 1)$. Portanto:

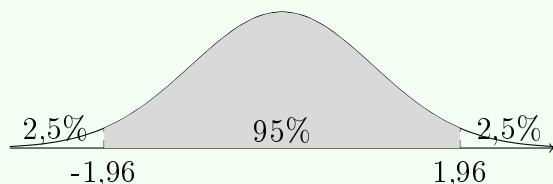
$$\mathbb{P}_\mu\{|X_1 - \mu| < 1,96\} = \mathbb{P}_\mu\{|Z| < 1,96\} \quad \text{onde } Z \sim N(0, 1) \quad (7)$$

$$= \Phi(1,96) - \Phi(-1,96) \quad (8)$$

$$= 2\Phi(1,96) - 1 \quad (9)$$

$$= 2(0,975) - 1 \quad (10)$$

$$= 0,95 = 95\% \quad (11)$$



Solução Detalhada

Parte 2: Probabilidade de Cobertura de J_2

O intervalo J_2 é baseado na média das duas observações.

$$P_\mu\{\mu \in J_2\} = P_\mu \left\{ \mu \in \left(\bar{X} - \frac{1,96}{\sqrt{2}}, \bar{X} + \frac{1,96}{\sqrt{2}} \right) \right\} \quad (12)$$

$$= P_\mu \left\{ \bar{X} - \frac{1,96}{\sqrt{2}} < \mu < \bar{X} + \frac{1,96}{\sqrt{2}} \right\} \quad (13)$$

$$= P_\mu \left\{ -\frac{1,96}{\sqrt{2}} < \bar{X} - \mu < \frac{1,96}{\sqrt{2}} \right\} \quad (14)$$

$$= P_\mu \left\{ |\bar{X} - \mu| < \frac{1,96}{\sqrt{2}} \right\} \quad (15)$$

Multiplicando por $\sqrt{2}$:

$$= P_\mu \left\{ |(\bar{X} - \mu)\sqrt{2}| \leq 1,96 \right\} \quad (16)$$

Como $\bar{X} = \frac{X_1+X_2}{2}$ e $X_i \sim N(\mu, 1)$ i.i.d., temos:

$$\bar{X} \sim N \left(\mu, \frac{1}{2} \right) \quad (17)$$

Portanto:

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{1/2}} = (\bar{X} - \mu)\sqrt{2} \sim N(0, 1) \quad (18)$$

Logo:

$$P_\mu \{|Z| \leq 1,96\} = \Phi(1,96) - \Phi(-1,96) = 0,95 = 95\% \quad (19)$$

Observações e Intuição

Comparação dos Intervalos

Principais Observações:

1. **Mesma Cobertura:** Ambos J_1 e J_2 têm probabilidade de cobertura de 95%.
2. **Eficiência:** Apesar da mesma cobertura, J_2 é **mais eficiente** porque:
 - J_1 usa apenas X_1 (ignora X_2)
 - J_2 usa toda a informação disponível (X_1 e X_2) através de \bar{X}
3. **Comprimento dos Intervalos:**
 - Comprimento de J_1 : $2 \times 1,96 = 3,92$
 - Comprimento de J_2 : $2 \times \frac{1,96}{\sqrt{2}} \approx 2,77$O intervalo J_2 é mais estreito (aproximadamente 29% menor), fornecendo estimativa mais precisa!
4. **Estatística Suficiente:** \bar{X} é suficiente para μ . O princípio da suficiência sugere que intervalos baseados em estatísticas suficientes são superiores.

Resumo da Questão

Principais Resultados:

- Probabilidade de cobertura de J_1 e J_2 : ambos 95%
- J_2 é mais eficiente: intervalo 29% mais estreito
- Usar estatísticas suficientes leva a intervalos mais precisos
- \bar{X} utiliza toda a informação amostral

3 Métodos de Construção de Intervalos de Confiança

3.1 Data: 12/11/2025 - Abordagens Principais

Observações e Intuição

Existem duas abordagens principais para construir intervalos de confiança:

1. Inversão de Procedimento de Teste de Hipótese
2. Via Estatística Pivotal

Veremos aplicações de ambos os métodos nas questões a seguir.

4 Questão 5.2: IC para Normal via Inversão de Teste

Questão 5.2 (Questão 52 das Notas)

Sejam X_1, \dots, X_n uma amostra de $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ para $\mu \in \mathbb{R}$ desconhecida e $\sigma^2 > 0$ conhecida.

Deseja-se testar:

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \mu > \mu_0 \quad (20)$$

Encontre o estimador intervalar para μ com nível de confiança de $1 - \alpha$ para $\alpha \in (0, 1)$.

Solução Detalhada

Passo 1: Recordar o Teste UMP

Do Capítulo 4, sabemos que o teste UMP para H_0 vs H_1 de nível α tem função crítica dada por:

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sigma} \geq z_\alpha, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (21)$$

A região de **rejeição** é:

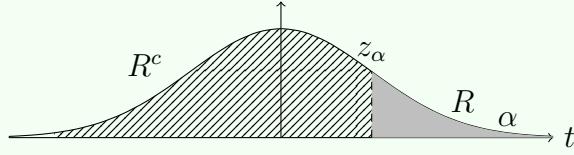
$$R = \left\{ x \in \mathcal{X} : \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sigma} \geq z_\alpha \right\} \quad (22)$$

A região de **não rejeição** é:

$$R^c = \left\{ x \in \mathcal{X} : \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sigma} \leq z_\alpha \right\} \quad (23)$$

Solução Detalhada

Passo 2: Visualização da Região de Não Rejeição



Passo 3: Probabilidade da Região de Não Rejeição

Note que, sob $H_0 : \mu = \mu_0$, a estatística $Z = \sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu_0)/\sigma \sim N(0, 1)$.

Portanto:

$$P_{\mu_0} \left\{ \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sigma} \leq z_\alpha \right\} = 1 - \alpha$$

Passo 4: Inversão para Obter o IC

Rearranjando a desigualdade para isolar μ_0 :

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sigma} \leq z_\alpha \quad (24)$$

$$\bar{X}_n - \mu_0 \leq z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (25)$$

$$-\mu_0 \leq z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \bar{X}_n \quad (26)$$

$$\mu_0 \geq \bar{X}_n - z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (27)$$

Logo:

$$P_\mu \left\{ \mu_0 \geq \bar{X}_n - z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right\} = 1 - \alpha$$

Como esta relação vale para qualquer μ_0 (substituindo μ_0 por μ):

$$P_\mu \left\{ \mu \geq \bar{X}_n - z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right\} = 1 - \alpha, \quad \forall \mu \in \mathbb{R}$$

Solução Detalhada

Passo 5: Intervalo de Confiança Final

Intervalo de Confiança Unilateral Inferior:

$$IC_{1-\alpha}(\mu) = \left[\bar{X}_n - z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, +\infty \right) \quad (28)$$

Este é um intervalo de confiança **unilateral inferior** para μ com coeficiente de confiança $1 - \alpha$.

Interpretação: Com confiança $1 - \alpha$, podemos afirmar que μ é pelo menos $\bar{X}_n - z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Observações e Intuição

Pontos Importantes

- Método de Inversão:** Este método conecta diretamente testes de hipóteses com intervalos de confiança.
- Teste Unilateral \Rightarrow IC Unilateral:** Como testamos $H_1 : \mu > \mu_0$, obtemos um IC unilateral inferior.
- Dualidade:** Se $\mu_0 \in IC_{1-\alpha}$, então NÃO rejeitamos $H_0 : \mu = \mu_0$ ao nível α .
- IC Unilateral Superior:** Para $H_1 : \mu < \mu_0$, obteríamos:

$$IC_{1-\alpha}(\mu) = \left(-\infty, \bar{X}_n + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

Resumo da Questão

IC Unilateral Inferior para μ (variância conhecida):

Fórmula:

$$IC_{1-\alpha}(\mu) = \left[\bar{X}_n - z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, +\infty \right)$$

Interpretação:

- Obtido via inversão do teste UMP
- Apropriado quando interessam valores grandes de μ
- Coeficiente de confiança: $1 - \alpha$

5 Questão 5.3: IC para Exponencial via Inversão

Questão 5.3

Sejam X_1, \dots, X_n uma amostra de $X \sim \text{Exp}(\theta)$ para $\theta > 0$ desconhecido. Deseja-se testar:

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \theta > \theta_0$$

Encontre o estimador intervalar para θ com nível de confiança $1 - \alpha$.

Solução Detalhada

Passo 1: Recordar o Teste UMP para Exponencial

Do Capítulo 4 (Questão 4.5), o teste UMP para H_0 vs H_1 de nível α tem função crítica:

$$\psi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & 2 \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\theta_0} > \chi_{2n,\alpha}^2 \\ 0, & 2 \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\theta_0} \leq \chi_{2n,\alpha}^2 \end{cases}$$

onde $\chi_{2n,\alpha}^2$ é o quantil tal que $P(\chi_{2n}^2 > \chi_{2n,\alpha}^2) = \alpha$.

A região de não rejeição é:

$$R^c = \left\{ \mathbf{x} \in \mathcal{X} : 2 \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\theta_0} \leq \chi_{2n,\alpha}^2 \right\}$$

Passo 2: Probabilidade da Região de Não Rejeição

Sob H_0 , sabemos que $\frac{2 \sum_{i=1}^n X_i}{\theta_0} \sim \chi_{2n}^2$.

Portanto:

$$P_{\theta_0} \left\{ 2 \sum_{i=1}^n X_i / \theta_0 \leq \chi_{2n,\alpha}^2 \right\} = 1 - P_{\theta_0} \left\{ 2 \sum_{i=1}^n X_i / \theta_0 > \chi_{2n,\alpha}^2 \right\} \quad (29)$$

$$= 1 - \alpha \quad (30)$$

Solução Detalhada

Passo 3: Inversão para Obter o IC

Rearranjando a desigualdade:

$$2 \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{\theta_0} \leq \chi_{2n,\alpha}^2 \quad (31)$$

$$2 \sum_{i=1}^n X_i \leq \theta_0 \cdot \chi_{2n,\alpha}^2 \quad (32)$$

$$\theta_0 \geq \frac{2 \sum_{i=1}^n X_i}{\chi_{2n,\alpha}^2} \quad (33)$$

Logo:

$$P_{\theta_0} \left\{ \theta_0 \geq \frac{2 \sum_{i=1}^n X_i}{\chi_{2n,\alpha}^2} \right\} = 1 - \alpha \quad (34)$$

Como esta relação vale para qualquer valor de θ (não apenas θ_0):

$$P_{\theta} \left\{ \theta \geq \frac{2 \sum_{i=1}^n X_i}{\chi_{2n,\alpha}^2} \right\} = 1 - \alpha, \quad \forall \theta \in \mathbb{R}_+ \quad (35)$$

Passo 4: Intervalo de Confiança Final

Intervalo de Confiança Unilateral Inferior:

$$IC_{1-\alpha}(\theta) = \left[\frac{2 \sum_{i=1}^n X_i}{\chi_{2n,\alpha}^2}, +\infty \right) \quad (36)$$

Observações e Intuição

Pontos Importantes

1. **Estatística Suficiente:** $\sum X_i$ é suficiente para θ na Exponencial.
2. **Distribuição Qui-Quadrado:** A transformação $\frac{2 \sum X_i}{\theta}$ tem distribuição χ_{2n}^2 livre de parâmetros.
3. **Graus de Liberdade:** São $2n$ (não n) porque cada $\frac{2X_i}{\theta} \sim \chi_2^2$.
4. **Interpretação Prática:** Valores grandes de $\sum X_i$ sugerem θ grande (pois $E[X] = \theta$).
5. **Exemplo Numérico:** Suponha $n = 10$, $\alpha = 0.05$, $\sum x_i = 25$.
 - Graus de liberdade: $2n = 20$
 - $\chi_{20,0.05}^2 = 31.41$
 - $IC_{0.95}(\theta) = [25 \times 2/31.41, +\infty) = [1.59, +\infty)$

Resumo da Questão

IC para Exponencial via Inversão:
Estatística:

$$Q = \frac{2 \sum_{i=1}^n X_i}{\theta_0} \sim \chi_{2n}^2$$

IC Unilateral Inferior:

$$IC_{1-\alpha}(\theta) = \left[\frac{2 \sum_{i=1}^n X_i}{\chi_{2n,\alpha}^2}, +\infty \right)$$

Propriedades:

- Obtido via inversão do teste UMP
- Depende da estatística suficiente $\sum X_i$
- Usa distribuição qui-quadrado com $2n$ graus de liberdade

6 Questão 5.4: IC para Exponencial usando Método Pivotal

6.1 Data: 12/11/25

Questão 5.4

Seja $X \sim \text{Exp}(\theta)$ com densidade:

$$f(x; \theta) = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta} \mathbb{I}_{(0, \infty)}(x) \quad (37)$$

Construa um intervalo de confiança **bilateral** para θ usando a abordagem pivotal.

Solução Detalhada

Passo 1: Encontrar o Pivô

Considere a transformação $U = X/\theta$. Vamos calcular sua densidade.

Usando a técnica da transformação:

$$f_U(u) = \frac{dF_X(u\theta)}{du} = \theta f_X(u\theta; \theta) \quad (38)$$

$$= \theta \cdot \frac{1}{\theta} e^{-(u\theta)/\theta} \mathbb{I}_{(0, \infty)}(u\theta) \quad (39)$$

$$= e^{-u} \mathbb{I}_{(0, \infty)}(u) \quad (40)$$

Conclusão: $U = X/\theta \sim \text{Exp}(1)$ (Exponencial padrão).

Portanto, U é um **pivô** pela Definição 5.3.1, pois sua distribuição não depende de θ !

Passo 2: Determinar os Quantis

Para um IC bilateral com confiança $1 - \alpha$, precisamos encontrar $a, b > 0$ com $a < b$ tais que:

$$P(U \leq a) = P(U > b) = \frac{\alpha}{2} \quad (41)$$

Equivalentemente:

$$P(a < U < b) = 1 - \alpha \quad (42)$$

Solução Detalhada

Passo 3: Cálculo de a (quantil inferior)

Para a Exponencial padrão, a função de distribuição é $F_U(u) = 1 - e^{-u}$.

$$P(U \leq a) = \frac{\alpha}{2} \quad (43)$$

$$F_U(a) = \frac{\alpha}{2} \quad (44)$$

$$1 - e^{-a} = \frac{\alpha}{2} \quad (45)$$

$$e^{-a} = 1 - \frac{\alpha}{2} \quad (46)$$

$$-a = \log\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \quad (47)$$

$$a = -\log\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \quad (48)$$

Passo 4: Cálculo de b (quantil superior)

$$P(U > b) = \frac{\alpha}{2} \quad (49)$$

$$1 - F_U(b) = \frac{\alpha}{2} \quad (50)$$

$$1 - (1 - e^{-b}) = \frac{\alpha}{2} \quad (51)$$

$$e^{-b} = \frac{\alpha}{2} \quad (52)$$

$$-b = \log\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad (53)$$

$$b = -\log\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad (54)$$

Solução Detalhada

Passo 5: Inversão do Pivô

Temos que:

$$P_\theta \left\{ a < \frac{X}{\theta} < b \right\} = 1 - \alpha$$

Invertendo as desigualdades (dividindo por $X > 0$):

$$P_\theta \left\{ \frac{1}{b} < \frac{\theta}{X} < \frac{1}{a} \right\} = 1 - \alpha$$

Multiplicando por X :

$$P_\theta \left\{ \frac{X}{b} < \theta < \frac{X}{a} \right\} = 1 - \alpha$$

Ou seja:

$$P_\theta \left\{ \theta \in \left(\frac{X}{b}, \frac{X}{a} \right) \right\} = 1 - \alpha$$

Passo 6: Intervalo de Confiança Final

Substituindo os valores de a e b :

Intervalo de Confiança Bilateral:

$$\boxed{IC_{1-\alpha}(\theta) = \left(\frac{X}{-\log(\alpha/2)}, \frac{X}{-\log(1-\alpha/2)} \right)} \quad (55)$$

Este é o intervalo bilateral para θ com confiança $1 - \alpha$.

Observações e Intuição

Pontos Importantes

1. **Método Pivotal:** Mais direto que inversão de testes quando conhecemos a família de distribuições.
2. **Família Escala:** A Exponencial é família escala, logo X/θ tem distribuição livre de θ .
3. **Valores Numéricos Comuns:**
 - Para $\alpha = 0.05$:
$$a = -\log(0.975) \approx 0.0253$$
$$b = -\log(0.025) \approx 3.689$$
 - Para $\alpha = 0.01$:
$$a = -\log(0.995) \approx 0.00501$$
$$b = -\log(0.005) \approx 5.298$$

4. **Exemplo Numérico:** Suponha $\alpha = 0.05$ e observamos $X = 5$.

$$IC_{0.95}(\theta) = \left(\frac{5}{3.689}, \frac{5}{0.0253} \right) \approx (1.36, 197.6)$$

5. **Assimetria:** O intervalo é assimétrico em relação a X devido à natureza da distribuição Exponencial.

Resumo da Questão

IC Bilateral para Exponencial (método pivotal):
Pivô:

$$U = \frac{X}{\theta} \sim \text{Exp}(1)$$

IC Bilateral:

$$IC_{1-\alpha}(\theta) = \left(\frac{X}{-\log(\alpha/2)}, \frac{X}{-\log(1-\alpha/2)} \right)$$

Propriedades:

- Baseado em distribuição livre de parâmetros
- Intervalo assimétrico
- Para 1 observação apenas

7 Questão 5.5: IC para Uniforme usando Método Pivotal

Questão 5.5 (Questão 55 das Notas)

Sejam X_1, \dots, X_n uma amostra de $X \sim U(0, \theta)$ para $\theta > 0$ desconhecido. Encontre o estimador intervalar bilateral para θ com confiança de $1 - \alpha$.

Solução Detalhada

Passo 1: Estatística Suficiente

A estatística $T(X) = X_{(n)} = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ é suficiente mínima para θ . Para uma amostra de $U(0, \theta)$, a densidade da estatística de ordem máxima é:

$$f_T(t; \theta) = \frac{n}{\theta^n} t^{n-1} \mathbb{I}_{(0,\theta)}(t)$$

Derivação: Como $F_X(x) = x/\theta$ para $x \in (0, \theta)$:

$$F_T(t) = [F_X(t)]^n = \left(\frac{t}{\theta}\right)^n \quad (56)$$

$$f_T(t) = \frac{d}{dt} F_T(t) = \frac{n}{\theta^n} t^{n-1} \quad (57)$$

Passo 2: Construir o Pivô

Considere $U = T/\theta$. Calculemos sua densidade:

$$f_U(u) = \frac{dF_T(u\theta)}{du} = \theta f_T(u\theta; \theta) \quad (58)$$

$$= \theta \cdot \frac{n}{\theta^n} (u\theta)^{n-1} \quad (59)$$

$$= \theta \cdot \frac{n}{\theta^n} \cdot u^{n-1} \cdot \theta^{n-1} \quad (60)$$

$$= nu^{n-1}, \quad \text{para } u \in (0, 1) \quad (61)$$

Conclusão: $U = T/\theta \sim \text{Beta}(n, 1)$ é um pivô!

Solução Detalhada

Passo 3: Determinar os Quantis

Para um IC bilateral, precisamos de $a, b \in (0, 1)$ com $a < b$ tais que:

$$P(U < a) = P(U > b) = \frac{\alpha}{2} \quad (62)$$

Equivalentemente:

$$P(a < U < b) = 1 - \alpha \quad (63)$$

Cálculo de a :

$$P(U < a) = \int_0^a n \cdot u^{n-1} du = [u^n]_0^a = a^n \quad (64)$$

$$a^n = \frac{\alpha}{2} \quad (65)$$

$$a = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{1/n} \quad (66)$$

Cálculo de b :

$$P(U > b) = \int_b^1 n \cdot u^{n-1} du = [u^n]_b^1 = 1 - b^n \quad (67)$$

$$1 - b^n = \frac{\alpha}{2} \quad (68)$$

$$b^n = 1 - \frac{\alpha}{2} \quad (69)$$

$$b = \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)^{1/n} \quad (70)$$

Solução Detalhada

Passo 4: Inversão do Pivô

Temos:

$$P\left(a < \frac{T}{\theta} < b\right) = 1 - \alpha$$

Invertendo (note que $T, \theta > 0$):

$$P\left(\frac{1}{b} < \frac{\theta}{T} < \frac{1}{a}\right) = 1 - \alpha$$

Multiplicando por T :

$$P\left(\frac{T}{b} < \theta < \frac{T}{a}\right) = 1 - \alpha$$

Ou seja:

$$P\left(\theta \in \left(\frac{T}{b}, \frac{T}{a}\right)\right) = 1 - \alpha$$

Passo 5: Intervalo de Confiança Final

Como $T = X_{(n)} = X_{n:n}$ (notação de estatística de ordem):

Intervalo de Confiança Bilateral:

$$\boxed{IC_{1-\alpha}(\theta) = \left(\frac{X_{(n)}}{\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)^{1/n}}, \frac{X_{(n)}}{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{1/n}}\right)} \quad (71)$$

ou, usando a notação $X_{n:n}$:

$$IC_{1-\alpha}(\theta) = (b^{-1}X_{n:n}, a^{-1}X_{n:n}) \quad (72)$$

onde $a = (\alpha/2)^{1/n}$ e $b = (1 - \alpha/2)^{1/n}$.

Observações e Intuição

Pontos Importantes

1. **Estatística Suficiente:** $X_{(n)}$ é suficiente mínima para θ na Uniforme.
2. **Distribuição Beta:** O pivô tem distribuição Beta($n, 1$), que concentra massa perto de 1.
3. **Comportamento Assintótico:** Quando $n \rightarrow \infty$:
 - $a = (\alpha/2)^{1/n} \rightarrow 1$
 - $b = (1 - \alpha/2)^{1/n} \rightarrow 1$
 - O intervalo se concentra em torno de $X_{(n)}$
4. **Valores Numéricos:** Para $\alpha = 0.05$ e $n = 10$:

$$a = (0.025)^{0.1} \approx 0.635$$
$$b = (0.975)^{0.1} \approx 0.997$$

Se $X_{(n)} = 8$:

$$IC_{0.95}(\theta) = \left(\frac{8}{0.997}, \frac{8}{0.635} \right) \approx (8.02, 12.60)$$

5. **Intuição:** Como $X_{(n)} \leq \theta$ sempre, o limite inferior do IC é próximo de $X_{(n)}$, e o superior é maior para compensar a incerteza.

Resumo da Questão

IC Bilateral para Uniforme($0, \theta$):

Pivô:

$$U = \frac{X_{(n)}}{\theta} \sim \text{Beta}(n, 1)$$

IC Bilateral:

$$IC_{1-\alpha}(\theta) = \left(\frac{X_{(n)}}{(1 - \alpha/2)^{1/n}}, \frac{X_{(n)}}{(\alpha/2)^{1/n}} \right)$$

Propriedades:

- Baseado na estatística de ordem máxima
- Usa distribuição Beta
- Assimétrico: limite inferior próximo de $X_{(n)}$

8 Questão 5.6: IC Bilateral para Normal (Variância Conhecida)

Questão 5.6 (Questão 56 das Notas)

Sejam X_1, \dots, X_n uma amostra de $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ com $\mu \in \mathbb{R}$ desconhecido e $\sigma^2 > 0$ conhecido.

Encontre o IC bilateral com $1 - \alpha$ de confiança para μ .

Solução Detalhada

Passo 1: Estatística Suficiente

De discussões anteriores (Capítulo 3), $T = \bar{X}_n$ é uma estatística suficiente mínima para μ .

A distribuição de T é:

$$\bar{X}_n \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

Passo 2: Identificar a Família

Os X_i 's (e consequentemente \bar{X}_n) pertencem a uma **família locação** parametrizada por μ .

Passo 3: Construir o Pivô

Padronizando \bar{X}_n :

$$U = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1) \quad (73)$$

Esta é uma variável aleatória cuja distribuição **não depende** de μ (nem de σ , que é conhecido).

Portanto, U é um **pivô**.

Solução Detalhada

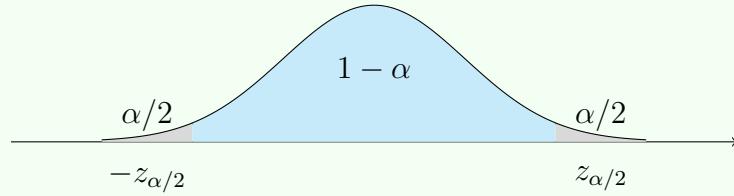
Passo 4: Determinar os Quantis

Para um IC bilateral com confiança $1 - \alpha$, usamos o quantil $z_{\alpha/2}$ da Normal padrão tal que:

$$P(Z > z_{\alpha/2}) = \frac{\alpha}{2} \quad (74)$$

Por simetria da Normal:

$$P(-z_{\alpha/2} < U < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha \quad (75)$$



Passo 5: Inversão do Pivô

Substituindo o pivô:

$$P\left(-z_{\alpha/2} < \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < z_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

Multiplicando por σ/\sqrt{n} :

$$P\left(-z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{X}_n - \mu < z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

Isolando μ (multiplicando por -1 e adicionando \bar{X}_n):

$$P\left(\bar{X}_n - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X}_n + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

Solução Detalhada

Passo 6: Intervalo de Confiança Final

Intervalo de Confiança Bilateral:

$$IC_{1-\alpha}(\mu) = \left(\bar{X}_n - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) \quad (76)$$

Ou, de forma mais compacta:

$$IC_{1-\alpha}(\mu) = \bar{X}_n \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (77)$$

Valores Comuns de $z_{\alpha/2}$:

- Para $\alpha = 0.05$ (95% de confiança): $z_{0.025} = 1.96$
- Para $\alpha = 0.01$ (99% de confiança): $z_{0.005} = 2.576$
- Para $\alpha = 0.10$ (90% de confiança): $z_{0.05} = 1.645$

Observações e Intuição

Pontos Importantes

1. **Este é o IC Z Clássico:** Amplamente usado quando σ^2 é conhecido.
2. **Margem de Erro:** A quantidade $ME = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ é chamada margem de erro.
3. **Tamanho Amostral:** Para obter margem de erro E desejada:
$$n = \left(\frac{z_{\alpha/2} \sigma}{E} \right)^2$$
4. **Interpretação Correta:** “Em 95% das amostras, o intervalo construído conterá o verdadeiro valor de μ ” (não “ μ tem 95% de chance de estar no intervalo”).
5. **Exemplo Numérico:** Suponha $n = 25$, $\sigma = 5$, $\bar{x} = 103$, $\alpha = 0.05$.

$$ME = 1.96 \times \frac{5}{\sqrt{25}} = 1.96 \times 1 = 1.96$$

$$IC_{0.95}(\mu) = (103 - 1.96, 103 + 1.96) = (101.04, 104.96)$$

Resumo da Questão

IC Bilateral para μ (variância conhecida):

Pivô:

$$Z = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

IC Bilateral:

$$IC_{1-\alpha}(\mu) = \bar{X}_n \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Propriedades:

- Simétrico em torno de \bar{X}_n
- Comprimento: $2z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}$
- Diminui com \sqrt{n}

9 Questão 5.7: IC Bilateral para Normal (Variância Desconhecida)

Questão 5.7

Sejam X_1, \dots, X_n i.i.d. de $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ com $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma^2 > 0$ ambos desconhecidos. Encontre estimador bilateral intervalar com $1 - \alpha$ de confiança para μ .

Solução Detalhada

Passo 1: Estatística Suficiente

De discussões anteriores, (\bar{X}_n, S_n) é uma estatística suficiente mínima para (μ, σ) , onde:

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$$

Os X_i 's pertencem a uma **família de locação-escala**.

Passo 2: Construir o Pivô

Como σ é desconhecido, não podemos usar $\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$.

Em vez disso, substituímos σ por seu estimador S_n :

$$U = \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{S_n} \sim t_{n-1} \quad (78)$$

Esta estatística segue a **distribuição t de Student** com $n - 1$ graus de liberdade, que não depende de μ nem de σ^2 .

Portanto, U é um **pivô**.

Justificativa: Pelo Teorema de Cochran,

$$\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2 \quad \text{e é independente de } \bar{X}_n.$$

Logo:

$$U = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)/\sigma}{\sqrt{(n-1)S_n^2/[(n-1)\sigma^2]}} = \frac{Z}{\sqrt{\chi_{n-1}^2/(n-1)}} \sim t_{n-1}$$

Solução Detalhada

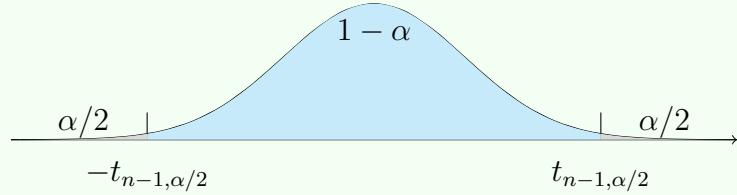
Passo 3: Determinar os Quantis

Para $t_{n-1,\alpha/2} > 0$ tal que:

$$P(|T| > t_{n-1,\alpha/2}) = \alpha \quad \text{onde } T \sim t_{n-1} \quad (79)$$

temos (por simetria da distribuição t):

$$P\{-t_{n-1,\alpha/2} < U < t_{n-1,\alpha/2}\} = 1 - \alpha \quad (80)$$



Passo 4: Inversão do Pivô

Substituindo a definição de U :

$$P\left\{-t_{n-1,\alpha/2} < \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{S_n} < t_{n-1,\alpha/2}\right\} = 1 - \alpha$$

Multiplicando por S_n/\sqrt{n} :

$$P\left\{-t_{n-1,\alpha/2} \frac{S_n}{\sqrt{n}} < \bar{X}_n - \mu < t_{n-1,\alpha/2} \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right\} = 1 - \alpha$$

Isolando μ :

$$P\left\{\bar{X}_n - t_{n-1,\alpha/2} \frac{S_n}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X}_n + t_{n-1,\alpha/2} \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right\} = 1 - \alpha$$

Solução Detalhada

Passo 5: Intervalo de Confiança Final

Intervalo de Confiança Bilateral (Intervalo t):

$$IC_{1-\alpha}(\mu) = \bar{X}_n \pm t_{n-1,\alpha/2} \frac{S_n}{\sqrt{n}} \quad (81)$$

Ou explicitamente:

$$IC_{1-\alpha}(\mu) = \left[\bar{X}_n - t_{n-1,\alpha/2} \frac{S_n}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + t_{n-1,\alpha/2} \frac{S_n}{\sqrt{n}} \right] \quad (82)$$

Este é o famoso **intervalo t de Student**, utilizado quando a variância populacional é desconhecida.

Observações e Intuição

Pontos Importantes

1. Diferença Fundamental em relação a Q5.6:

- **Q5.6:** σ^2 conhecido \Rightarrow usa $N(0, 1) \Rightarrow$ quantis $z_{\alpha/2}$
- **Q5.7:** σ^2 desconhecido \Rightarrow usa $t_{n-1} \Rightarrow$ quantis $t_{n-1,\alpha/2}$

2. Cauda Mais Pesada:

A distribuição t tem caudas mais pesadas que a Normal, refletindo a incerteza adicional de estimar σ .

3. Convergência Assintótica:

Quando $n \rightarrow \infty$, $t_{n-1} \rightarrow N(0, 1)$, logo os intervalos t e Z convergem.

4. Valores de $t_{n-1,\alpha/2}$ para $\alpha = 0.05$:

- $n = 10$: $t_{9,0.025} = 2.262$ (compare com $z_{0.025} = 1.96$)
- $n = 30$: $t_{29,0.025} = 2.045$
- $n = 100$: $t_{99,0.025} = 1.984$
- $n \rightarrow \infty$: $t_{\infty,0.025} = 1.96 = z_{0.025}$

5. Exemplo Numérico:

Suponha $n = 16$, $\bar{x} = 50$, $s = 10$, $\alpha = 0.05$.

$$t_{15,0.025} = 2.131$$

$$ME = 2.131 \times \frac{10}{\sqrt{16}} = 2.131 \times 2.5 = 5.33$$

$$IC_{0.95}(\mu) = (50 - 5.33, 50 + 5.33) = (44.67, 55.33)$$

Resumo da Questão

IC Bilateral para μ (variância desconhecida):

Pivô:

$$T = \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{S_n} \sim t_{n-1}$$

IC Bilateral (Intervalo t):

$$IC_{1-\alpha}(\mu) = \bar{X}_n \pm t_{n-1, \alpha/2} \frac{S_n}{\sqrt{n}}$$

Propriedades:

- Usa distribuição t de Student
- Mais largo que IC Z (reflete incerteza adicional)
- Converge para IC Z quando $n \rightarrow \infty$
- Mais usado na prática (raramente σ é conhecido)

10 Exercício: IC para a Variância

Exercício Proposto

Sejam X_1, \dots, X_n uma amostra aleatória de $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ com $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma^2 > 0$ ambos desconhecidos.

Mostre que:

$$IC_{1-\alpha}(\sigma^2) = \left[\frac{(n-1)S_n^2}{\chi_{n-1;\alpha/2}^2}, \frac{(n-1)S_n^2}{\chi_{n-1;1-\alpha/2}^2} \right] \quad (83)$$

é o IC bilateral para σ^2 com confiança de $1 - \alpha$.

Solução Detalhada

Passo 1: Identificar o Pivô

Pelo Teorema de Cochran, sabemos que:

$$\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2 \quad (84)$$

Esta estatística:

- Depende de S_n^2 (dados) e σ^2 (parâmetro)
- Tem distribuição qui-quadrado com $n - 1$ graus de liberdade
- A distribuição **não depende** de μ nem de σ^2

Portanto, $Q = \frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2}$ é um **pivô**.

Passo 2: Determinar os Quantis

Seja $\chi_{n-1;\alpha/2}^2$ o quantil superior (cauda direita):

$$P(\chi_{n-1}^2 > \chi_{n-1;\alpha/2}^2) = \frac{\alpha}{2}$$

Seja $\chi_{n-1;1-\alpha/2}^2$ o quantil inferior (cauda esquerda):

$$P(\chi_{n-1}^2 < \chi_{n-1;1-\alpha/2}^2) = \frac{\alpha}{2}$$

Logo:

$$P(\chi_{n-1;1-\alpha/2}^2 < \chi_{n-1}^2 < \chi_{n-1;\alpha/2}^2) = 1 - \alpha$$

Solução Detalhada

Passo 3: Inversão do Pivô

Substituindo o pivô $Q = \frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2}$:

$$P \left(\chi_{n-1;1-\alpha/2}^2 < \frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} < \chi_{n-1;\alpha/2}^2 \right) = 1 - \alpha$$

Invertendo as desigualdades (note que dividir por σ^2 inverte):

$$P \left(\frac{1}{\chi_{n-1;\alpha/2}^2} < \frac{\sigma^2}{(n-1)S_n^2} < \frac{1}{\chi_{n-1;1-\alpha/2}^2} \right) = 1 - \alpha$$

Multiplicando por $(n-1)S_n^2$:

$$P \left(\frac{(n-1)S_n^2}{\chi_{n-1;\alpha/2}^2} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S_n^2}{\chi_{n-1;1-\alpha/2}^2} \right) = 1 - \alpha$$

Passo 4: Intervalo de Confiança Final

Intervalo de Confiança Bilateral para σ^2 :

$$IC_{1-\alpha}(\sigma^2) = \left[\frac{(n-1)S_n^2}{\chi_{n-1;\alpha/2}^2}, \frac{(n-1)S_n^2}{\chi_{n-1;1-\alpha/2}^2} \right] \quad (85)$$

Para o desvio padrão σ :

$$IC_{1-\alpha}(\sigma) = \left[\sqrt{\frac{(n-1)S_n^2}{\chi_{n-1;\alpha/2}^2}}, \sqrt{\frac{(n-1)S_n^2}{\chi_{n-1;1-\alpha/2}^2}} \right] \quad (86)$$

Observações e Intuição

Pontos Importantes

1. **Assimetria:** Ao contrário do IC para μ , este intervalo é **assimétrico** devido à assimetria da distribuição qui-quadrado.
2. **Atenção aos Quantis:** Note que:
 - **Limite inferior:** usa $\chi_{n-1;\alpha/2}^2$ (maior quantil) no denominador
 - **Limite superior:** usa $\chi_{n-1;1-\alpha/2}^2$ (menor quantil) no denominador
3. **Independência:** \bar{X}_n e S_n^2 são independentes (Teorema de Cochran), permitindo construir IC's simultâneos.
4. **Sensibilidade à Não Normalidade:** Este IC é mais sensível a desvios da normalidade que o IC para μ .
5. **Exemplo Numérico:** Suponha $n = 20$, $s^2 = 16$, $\alpha = 0.05$.

$$\begin{aligned}\chi_{19;0.025}^2 &= 32.85 \quad (\text{cauda superior}) \\ \chi_{19;0.975}^2 &= 8.91 \quad (\text{cauda inferior}) \\ IC_{0.95}(\sigma^2) &= \left[\frac{19 \times 16}{32.85}, \frac{19 \times 16}{8.91} \right] \\ &= [9.25, 34.12]\end{aligned}$$

Para σ : $IC_{0.95}(\sigma) = [\sqrt{9.25}, \sqrt{34.12}] \approx [3.04, 5.84]$

Resumo da Questão

IC Bilateral para σ^2 (média desconhecida):

Pivô:

$$Q = \frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$$

IC Bilateral:

$$IC_{1-\alpha}(\sigma^2) = \left[\frac{(n-1)S_n^2}{\chi_{n-1;\alpha/2}^2}, \frac{(n-1)S_n^2}{\chi_{n-1;1-\alpha/2}^2} \right]$$

Propriedades:

- Assimétrico (distribuição qui-quadrado)
- Cuidado com a inversão dos quantis!
- Baseado no Teorema de Cochran

11 Questão 5.10: IC para Diferença de Médias (Duas Amostras)

Questão 5.10

Sejam X_{i1}, \dots, X_{in_i} para $i = 1, 2$ duas amostras aleatórias independentes de $X_i \sim N(\mu_i, \sigma^2)$, $X_1 \perp X_2$.

Vamos assumir que $\theta = (\mu_1, \mu_2, \sigma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ é desconhecido.

Encontre o intervalo bilateral com confiança $1 - \alpha$ para $K(\theta) = \mu_1 - \mu_2$.

Solução Detalhada

Passo 1: Estatísticas Suficientes

Note que, pela independência de X_1 e X_2 :

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) \stackrel{X_1 \perp X_2}{=} f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2) \quad (87)$$

Pelo teorema (2.2), temos que

$$T_1 = \left[\sum_{i=1}^{n_1} X_{1i}, \sum_{i=1}^{n_2} X_{2i}, \sum_{i=1}^{n_1} X_{1i}^2 + \sum_{i=1}^{n_2} X_{2i}^2 \right] \quad (88)$$

é conjuntamente suficiente para $\theta = (\mu_1, \mu_2, \sigma)^T$.

Pelo Teorema (2.4),

$$T_3 = \left[\frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} X_{1i}, \frac{1}{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} X_{2i}, \frac{1}{n_1 + n_2 - 2} \left[\sum_{i=1}^{n_1} (X_{1i} - \bar{X}_1)^2 + \sum_{i=1}^{n_2} (X_{2i} - \bar{X}_2)^2 \right] \right] \quad (89)$$

é também suficiente para θ . O termo \hat{S}_p^2 é chamado de variância amostral conjunta e pode ser descrito como:

Para

$$S_1^2 = (n_1 - 1)^{-1} \sum_{i=1}^{n_1} (X_{1i} - \bar{X}_1)^2$$

e

$$S_2^2 = (n_2 - 1)^{-1} \sum_{i=1}^{n_2} (X_{2i} - \bar{X}_2)^2$$

$$S_p^2 = (n_1 + n_2 - 2)^{-1} [(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2] \quad (90)$$

Passo 2: Construção do Pivô

Note que como $(n_1 - 1) \cdot \frac{S_1^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n_1-1}^2$ e $(n_2 - 1) \cdot \frac{S_2^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n_2-1}^2$, então

$$(n_1 + n_2 - 2) \cdot \frac{S_p^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n_1+n_2-2}^2 \quad (91)$$

Daí note que

$$U = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \cdot \sqrt{\frac{n_1 + n_2 - 2}{n_1 + n_2 - 2}} \cdot \frac{S_p^2}{\sigma^2} \sim t_{n_1+n_2-2} \quad (92)$$

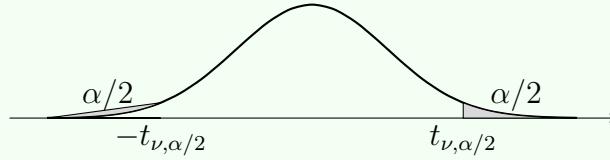
Justificativa: O numerador $\frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim N(0, 1)$ porque $\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \sim N(\mu_1 - \mu_2, \sigma^2(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}))$. O denominador é a raiz quadrada de uma qui-quadrado dividida por seus graus de liberdade, resultando em uma distribuição t .

Solução Detalhada

Passo 3: Determinar os Quantis

Para $\nu = n_1 + n_2 - 2$ e $t_{\nu, \alpha/2}$ tal que

$$P(U > t_{\nu, \alpha/2}) = \frac{\alpha}{2} \quad (93)$$



$$P\{-t_{\nu, \alpha/2} < U < t_{\nu, \alpha/2}\} = 1 - \alpha \quad (94)$$

Passo 4: Inversão do Pivô

Substituindo a definição de U :

$$P\left\{-t_{\nu, \alpha/2} < \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} < t_{\nu, \alpha/2}\right\} = 1 - \alpha \quad (95)$$

Isolando $\mu_1 - \mu_2$:

$$\therefore P\left\{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - t_{\nu, \alpha/2} \cdot S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < \bar{X}_1 - \bar{X}_2 + t_{\nu, \alpha/2} \cdot S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\right\} = 1 - \alpha \quad (96)$$

Passo 5: Intervalo de Confiança Final

Isto é

$$IC_{1-\alpha}(\mu_1 - \mu_2) = \left[\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \pm t_{\nu, \alpha/2} \cdot S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \right] \quad (97)$$

onde $\nu = n_1 + n_2 - 2$ e S_p^2 é a variância amostral conjunta (pooled variance).

Observações e Intuição

Pontos Importantes

1. **Variância Conjunta:** Como assumimos que $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$, combinamos as informações de ambas as amostras para estimar a variância comum através de S_p^2 .
2. **Graus de Liberdade:** São $n_1 + n_2 - 2$ porque estimamos duas médias (μ_1 e μ_2), perdendo 2 graus de liberdade.
3. **Distribuição t:** A estatística segue distribuição t de Student, não Normal, porque a variância comum é estimada.
4. **Independência:** As amostras devem ser independentes entre si.
5. **Exemplo Numérico:** Suponha $n_1 = 15$, $n_2 = 20$, $\bar{x}_1 = 50$, $\bar{x}_2 = 45$, $s_1^2 = 16$, $s_2^2 = 20$, $\alpha = 0.05$.

$$S_p^2 = \frac{(15-1) \times 16 + (20-1) \times 20}{15+20-2} = \frac{14 \times 16 + 19 \times 20}{33} = \frac{604}{33} \approx 18.33$$

$$s_p \approx 4.28$$

$$\nu = 33$$

$$t_{33,0.025} \approx 2.035$$

$$\begin{aligned} IC_{0.95}(\mu_1 - \mu_2) &= (50 - 45) \pm 2.035 \times 4.28 \times \sqrt{\frac{1}{15} + \frac{1}{20}} \\ &= 5 \pm 2.035 \times 4.28 \times 0.3416 \\ &= 5 \pm 2.98 \\ &= (2.02, 7.98) \end{aligned}$$

Resumo da Questão

IC para Diferença de Médias (variâncias iguais):

Pivô:

$$T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t_{n_1+n_2-2}$$

IC Bilateral:

$$IC_{1-\alpha}(\mu_1 - \mu_2) = \left[\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \pm t_{\nu, \alpha/2} \cdot S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \right]$$

Propriedades:

- Requer suposição de variâncias iguais
- Usa variância amostral conjunta S_p^2
- Distribuição t com $n_1 + n_2 - 2$ graus de liberdade
- Apropriado para comparação de dois grupos

12 Questão 5.11: IC para Razão de Variâncias (Duas Amostras)

Questão 5.11

Sejam X_{i1}, \dots, X_{in_i} uma amostra de $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ para $n_i \geq 2$ e $i = 1, 2$. Assuma que $X_1 \perp X_2$ e

$$\theta = (\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$$

é desconhecido.

Encontre o intervalo bilateral com confiança $1 - \alpha$ para

$$K(\theta) = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}.$$

Solução Detalhada

Passo 1: Estatísticas Suficientes

Pode-se mostrar (fica como exercício) que

$$\bar{X}_1 = n_1^{-1} \sum_{i=1}^{n_1} X_{1i}, \quad \bar{X}_2 = n_2^{-1} \sum_{i=1}^{n_2} X_{2i}, \quad S_1^2 = \frac{1}{n_1 - 1} \sum_{i=1}^{n_1} (X_{1i} - \bar{X}_1)^2 \quad (98)$$

e

$$S_2^2 = \frac{1}{n_2 - 1} \sum_{i=1}^{n_2} (X_{2i} - \bar{X}_2)^2 \quad (99)$$

são suficientes para $\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2$.

Passo 2: Construção do Pivô

Note que (por definição da distribuição F - cenário i.c.):

$$U = \frac{S_1^2 / \sigma_1^2}{S_2^2 / \sigma_2^2} \sim F_{n_1-1, n_2-1}. \quad (100)$$

Uma vez que

$$(n_1 - 1) \frac{S_1^2}{\sigma_1^2} \sim \chi_{n_1-1}^2 \quad \text{e} \quad (n_2 - 1) \frac{S_2^2}{\sigma_2^2} \sim \chi_{n_2-1}^2 \quad (101)$$

são independentes.

Justificativa: A razão entre duas variáveis qui-quadrado independentes, cada uma dividida por seus graus de liberdade, segue distribuição F . Como as variâncias amostrais são independentes (amostras independentes) e cada uma segue uma qui-quadrado quando padronizada, sua razão segue F .

Logo U é uma quantidade pivotal.

Solução Detalhada

Passo 3: Determinar os Quantis

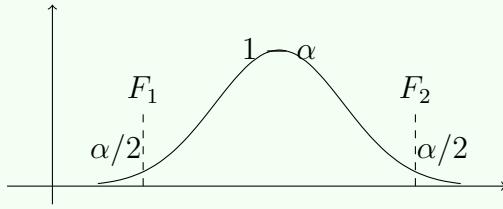
Sejam

$$F_1 = F_{n_1-1, n_2-1, 1-\alpha/2} > 0 \quad \text{e} \quad F_2 = F_{n_1-1, n_2-1, \alpha/2}$$

tais que

$$P(U < F_1) = \frac{\alpha}{2} \quad (102)$$

$$P(U > F_2) = \frac{\alpha}{2} \quad (103)$$



Passo 4: Inversão do Pivô

Daí:

$$P_\theta\{F_1 < U < F_2\} = 1 - \alpha \quad (104)$$

Substituindo $U = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}$:

$$P_\theta\left\{F_1 < \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} < F_2\right\} = 1 - \alpha \quad (105)$$

Reescrevendo:

$$P_\theta\left\{F_1 \frac{S_2^2}{S_1^2} < \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} < F_2 \frac{S_2^2}{S_1^2}\right\} = 1 - \alpha \quad (106)$$

Invertendo para obter $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$:

$$P_\theta\left\{F_2^{-1} \frac{S_1^2}{S_2^2} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < F_1^{-1} \frac{S_1^2}{S_2^2}\right\} = 1 - \alpha \quad (107)$$

Passo 5: Intervalo de Confiança Final

Usando a propriedade $F_{1-\alpha/2, \nu_1, \nu_2} = \frac{1}{F_{\alpha/2, \nu_2, \nu_1}}$:

$$\boxed{IC_{1-\alpha}\left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\right) = \left(F_{n_1-1, n_2-1, 1-\alpha/2}^{-1} \frac{S_1^2}{S_2^2}, F_{n_1-1, n_2-1, \alpha/2}^{-1} \frac{S_1^2}{S_2^2}\right)} \quad (108)$$

ou, usando a notação mais comum:

$$IC_{1-\alpha}\left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\right) = \left(\frac{S_1^2}{S_2^2} \cdot \frac{1}{F_{n_1-1, n_2-1, \alpha/2}}, \frac{S_1^2}{S_2^2} \cdot F_{n_2-1, n_1-1, \alpha/2}\right) \quad (109)$$

Observações e Intuição

Pontos Importantes

1. **Distribuição F:** A distribuição F não é simétrica, então os quantis não são simétricos.
2. **Relação entre Quantis:** Há uma relação importante: $F_{1-\alpha/2, \nu_1, \nu_2} = \frac{1}{F_{\alpha/2, \nu_2, \nu_1}}$. Isso é usado na construção do intervalo.
3. **Independência:** As amostras devem ser independentes para que as variâncias amostrais sejam independentes.
4. **Graus de Liberdade:** São $(n_1 - 1, n_2 - 1)$ porque estimamos as médias μ_1 e μ_2 .
5. **Exemplo Numérico:** Suponha $n_1 = 10$, $n_2 = 15$, $s_1^2 = 25$, $s_2^2 = 16$, $\alpha = 0.05$.

$$F_{9,14,0.025} \approx 3.21$$

$$F_{14,9,0.025} \approx 3.80$$

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{25}{16} = 1.5625$$

$$\begin{aligned} IC_{0.95} \left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \right) &= \left(\frac{1.5625}{3.21}, 1.5625 \times 3.80 \right) \\ &= (0.487, 5.938) \end{aligned}$$

6. **Interpretação:** Se o IC contém 1, não há evidência de que as variâncias sejam diferentes.

Resumo da Questão

IC para Razão de Variâncias:

Pivô:

$$F = \frac{S_1^2 / \sigma_1^2}{S_2^2 / \sigma_2^2} \sim F_{n_1-1, n_2-1}$$

IC Bilateral:

$$IC_{1-\alpha} \left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \right) = \left(\frac{S_1^2}{S_2^2} \cdot \frac{1}{F_{n_1-1, n_2-1, \alpha/2}}, \frac{S_1^2}{S_2^2} \cdot F_{n_2-1, n_1-1, \alpha/2} \right)$$

Propriedades:

- Usa distribuição F de Fisher
- Intervalo assimétrico
- Requer amostras independentes
- Útil para verificar suposição de variâncias iguais

Conclusão

Este documento apresentou soluções detalhadas e didáticas para todas as questões do Capítulo 5 sobre Intervalos de Confiança resolvidas em sala de aula.

Síntese dos Tópicos Abordados

1. **Q5.1:** Comparaçāo de intervalos - conceito de eficiēcia
2. **Q5.2:** IC via inversāo de teste (Normal, variāncia conhecida)
3. **Q5.3:** IC via inversāo de teste (Exponencial)
4. **Q5.4:** IC via mētodo pivotal (Exponencial)
5. **Q5.5:** IC via mētodo pivotal (Uniforme)
6. **Q5.6:** IC bilateral Z (Normal, variāncia conhecida)
7. **Q5.7:** IC bilateral t (Normal, variāncia desconhecida)
8. **Exercício:** IC para variāncia (qui-quadrado)
9. **Q5.10:** IC para diferenāa de mēdias (duas amostras, variāncias iguais)
10. **Q5.11:** IC para razāo de variāncias (duas amostras)

Conexões Entre os Mētodos

- Q5.2 e Q5.3 → Mētodo de inversāo de testes
- Q5.4, Q5.5, Q5.6, Q5.7, Q5.10, Q5.11 → Mētodo pivotal
- Q5.6 vs Q5.7 → Impacto de σ desconhecido
- Q5.10 → Extensāo para duas amostras (diferenāa de mēdias)
- Q5.11 → Extensāo para duas amostras (razāo de variāncias)

Tabela Comparativa Rápida

Questāo	Distribuiāo	Mētodo	Tipos IC
Q5.2	$N(\mu, \sigma^2)$	Inversāo	Unilateral inferior
Q5.3	$Exp(\theta)$	Inversāo	Unilateral inferior
Q5.4	$Exp(\theta)$	Pivotal	Bilateral
Q5.5	$U(0, \theta)$	Pivotal	Bilateral
Q5.6	$N(\mu, \sigma^2)$	Pivotal	Bilateral
Q5.7	$N(\mu, \sigma^2)$	Pivotal	Bilateral (t)
Exercício	$N(\mu, \sigma^2)$	Pivotal	Bilateral (χ^2)
Q5.10	$N(\mu_1, \sigma^2), N(\mu_2, \sigma^2)$	Pivotal	Bilateral (t)
Q5.11	$N(\mu_1, \sigma_1^2), N(\mu_2, \sigma_2^2)$	Pivotal	Bilateral (F)

Mensagens Principais

1. **Dois Métodos Principais:** Inversão de testes e método pivotal
2. **Estatísticas Suficientes:** IC ótimos dependem de estatísticas suficientes
3. **Dualidade:** Correspondência exata entre testes e IC
4. **Família de Distribuições:** Determina o tipo de pivô (locação, escala, locação-escala)
5. **Interpretação Cuidadosa:** O intervalo é aleatório, não o parâmetro!

Recomendações Finais

Para dominar o material:

- Pratique derivar IC's do zero usando ambos os métodos
- Entenda a intuição por trás de cada pivô
- Compare IC unilaterais vs bilaterais
- Calcule IC's para dados reais e interprete corretamente
- Conecte com testes de hipóteses (dualidade)

Fim do Documento de Questões Resolvidas