Unidade 5 - Compilação Completa

Intervalos de Confiança e Tópicos Relacionados

Curso de Inferência Estatística

Outubro 2025

Sumário

Aula 26 (27/06/2025)
Unidade 5 - Intervalo de Confiança

Vamos começar com o importante conceito de *probabilidade de cobertura.*

Def. 1

Sejam $T_L(\hat{X})$ e $T_U(\hat{X})$ duas estatísticas baseadas numa a.a. $\hat{X} = (X_1, \ldots, X_n)$, a probabilidade de cobertura do intervalo aleatório

$$J = \left[T_L(\hat{X}), T_U(\hat{X})\right] \tag{1}$$

para o parâmetro desconhecido $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$ é dada por:

$$P_\theta\left(\theta \in \left[T_L(\hat{X}), T_U(\hat{X})\right]\right) \tag{2}$$

Na verdade, o *coeficiente de confiança* de J é dado por:

$$\inf_{\theta \in \Theta}\left\{P_\theta\left(\theta \in \left[T_L(\hat{X}), T_U(\hat{X})\right]\right)\right\} \tag{3}$$

Na maioria das aplicações, a probabilidade de cobertura não depende do parâmetro e será equivalente ao coeficiente de confiança. **Exemplo 1:** Sejam

$$J_1 = (x_1 - 1,96;\ x_1 + 1,96) \quad \text{e} \quad J_2 = \left(\bar{x} - \frac{1,96}{\sqrt{2}},\ \bar{x} + \frac{1,96}{\sqrt{2}}\right)$$

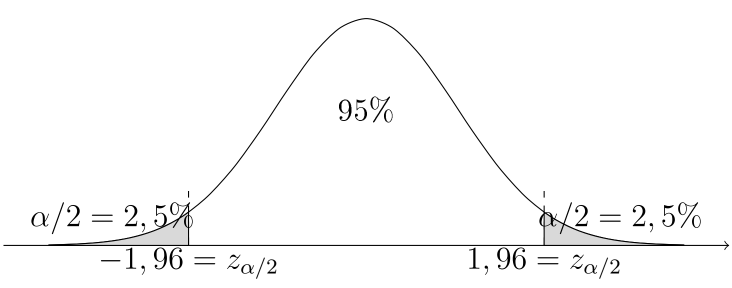
dois intervalos aleatórios tais que $x_1, x_2 \sim N(\mu, 1)$ e

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Encontre as probabilidades de cobertura de J_1 e J_2.

Solução: Temos que

$$\begin{aligned}
P_\mu(\mu \in J_1) &= P_\mu\left(\mu \in (x_1 - 1,96;\ x_1 + 1,96)\right) \\
&= P_\mu\left(x_1 - 1,96 < \mu < x_1 + 1,96\right) \\
&= P_\mu\left([\ (x_1 - \mu) < 1,96\ ]\ \cap\ [\ (x_1 - \mu) > -1,96\ ]\right) \\
&= P_\mu\left(|x_1 - \mu| < 1,96\right) \\
&= P_\mu\left(|Z| < 1,96\right), \quad Z = x_1 - \mu \sim N(0,1) \\
&= 95\%.
\end{aligned}$$



Da mesma forma,

$$P_\mu(\mu \in J_2) = P_\mu\left(\mu \in \left(\bar{x} - \frac{1,96}{\sqrt{2}},\ \bar{x} + \frac{1,96}{\sqrt{2}}\right)\right) \Rightarrow$$

$$P_\alpha(\mu \in I_\alpha) = P_\mu\left(\bar{X} - \frac{1.96}{\sqrt{\nu}} < \mu < \bar{X} + \frac{1.96}{\sqrt{\nu}}\right) \tag{4}$$

$$= P_\mu\left[\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\nu}} < 1.96\right] \cap \left[\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\nu}} > -1.96\right] \tag{5}$$

$$= P_\mu\left(\left|\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\nu}}\right| < 1.96\right) \tag{6}$$

$$= P_\mu\left(|Z| < 1.96\right) = 95\% \tag{7}$$

Aula 21 (25/06/2025)

Para construção de intervalos de confiança, podem-se utilizar duas abordagens: (i) inversão do procedimento de teste de hipótese e (ii) usando quantidade pivotal.

Inversão de um procedimento de teste

Em teste de hipótese, a região de não rejeição de H_0 foi denotada como

$$R_C^C = \begin{cases} \{x \in \mathcal{X}^n;\ T(x|\theta) \leq k\}^C & \text{para } H_1 : \theta > \theta_0, \\ \{x \in \mathcal{X}^n;\ T(x|\theta) \geq k\}^C & \text{para } H_1 : \theta < \theta_0, \\ \text{(como uma solução plausível)} & \\ \{x \in \mathcal{X}^n;\ |T(x|\theta)| \leq k\}^C & \text{para } H_1 : \theta \neq \theta_0. \end{cases} \tag{8}$$

O intervalo de confiança é bastante relacionado com R_C.

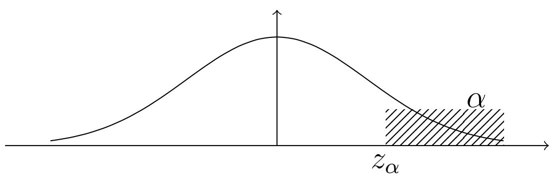
Exemplo 2: Seja $X_1, \dots, X_n$ uma a.a. de $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ para média desconhecida e $\sigma > 0$ conhecida. Considere que X obedece tanto $H_0 : \mu = \mu_0$ quanto $H_1 : \mu > \mu_0$. Encontre o estimador intervalar para μ de confiança $1-\alpha$ para $\alpha \in (0,1)$ pré-fixado.

Solução: Já foi discutido que o teste UMP para $H_0 < H_1$ de nível α tem função crítica:

$$\Psi(x) = \begin{cases} 1, & \sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sigma} > z_\alpha, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \tag{9}$$

em que $\bar{X}_n = n^{-1}\sum_{i=1}^n x_i$ e $x = (x_1, \dots, x_n)$ é uma a.a. A região de não rejeição é dada por:

$$R_c = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sigma} \leq z_\alpha \right\} \tag{10}$$



Note que:

$$P_{\mu_0}\left(\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sigma} \leq z_\alpha \right) = 1 - \alpha \implies \tag{11}$$

$$P_{\mu_0}\left(\bar{X}_n - \delta_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu_0 \right) = 1 - \alpha \tag{12}$$

Daí,

$$P_\mu\left(\mu \geq \bar{X}_n - \delta_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = 1 - \alpha, \quad \forall \mu \in \mathbb{R}. \tag{13}$$

Isto é,

$$\text{i.c.}_{1-\alpha}(\mu) = \left(\bar{X}_n - \delta_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \infty \right). \tag{14}$$

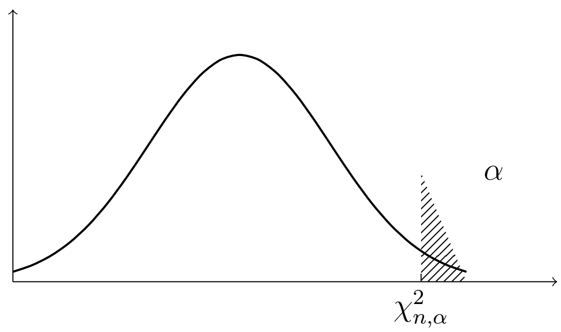
Exemplo 3: Sejam $X_1, \dots, X_n$ uma a.c. de $X \sim \text{Exp}(\theta)$, para $\theta > 0$ desconhecido. Considera que se deseja testar $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta > \theta_0$. Encontrar o estimador relacionado para o intervalo de confiança de $1 - \alpha$.

Jd1: já foi discutido que o teste UMP para H_0 e H_1 de nível α tem função crítica

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & \frac{2}{\theta_0}\sum_{i=1}^n x_i > \chi^2_{2n,\alpha} \\ 0, & \frac{2}{\theta_0}\sum_{i=1}^n x_i < \chi^2_{2n,\alpha} \end{cases} \tag{15}$$

A região de não rejeição é dada por: para $\alpha \in \mathbb{R}^n$,

$$R_c = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \frac{2}{\theta_0}\sum_{i=1}^n x_i < \chi^2_{2n,\alpha} \right\} \tag{16}$$



Note que:

$$P_\theta\left(\frac{\alpha}{\theta}\sum_{i=1}^{n} X_i < \chi^2_{n,\alpha}\right) = 1-\alpha \Rightarrow \tag{17}$$

$$P_\theta\left(\frac{\alpha}{\theta}\sum_{i=1}^{n} X_i < \chi^2_{n,\alpha}\right) = 1-\alpha \Rightarrow \tag{18}$$

$$P_\theta\left(\theta > \frac{\alpha\sum_{i=1}^{n} X_i}{\chi^2_{n,\alpha}}\right) = 1-\alpha, \quad \forall\theta \in \mathbb{R}^+. \tag{19}$$

Isto é:

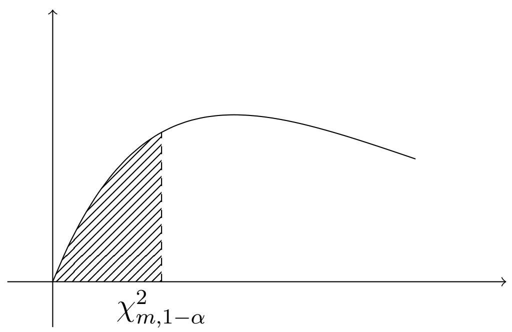
$$IC_{1-\alpha}(\theta) = \left(\frac{\alpha\sum_{i=1}^{n} X_i}{\chi^2_{n,\alpha}}, \infty\right). \tag{20}$$

Obs.: Se o contraste fosse $H_0 : \theta = \theta_0$ e $H_1 : \theta < \theta_0$, teríamos como região de não rejeição:

$$\mathcal{R} = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \frac{\alpha}{\theta_0}\sum_{i=1}^{n} x_i > \chi^2_{n,1-\alpha}\right\} \tag{21}$$

$$P_\theta\left(\theta < \frac{\alpha\sum_{i=1}^{n} X_i}{\chi^2_{n,1-\alpha}}\right) = 1-\alpha \tag{22}$$

$$IC_{1-\alpha}(\theta) = \left(0, \frac{\alpha\sum_{i=1}^{n} X_i}{\chi^2_{n,1-\alpha}}\right). \tag{23}$$



Abordagem pela quantidade pivotal

Definição 1: (Pivô) Seja $T(X)$ uma estatística suficiente (mínimal) para θ. Um pivô é uma v.a. U que dependa de T e θ cuja distribuição não dependa de θ.

Aula: 30/06/2023

Obs: No caso da família de locação em $a(\theta)$, a distribuição $\{T - a(\theta)\}$ não depende de θ. No caso de família de escala em $b(\theta)$, a distribuição $\left\{\frac{T}{b(\theta)}\right\}$ não depende de θ. No caso de família de locação e escala em $[a(\theta), b(\theta)]$, a distribuição de $\left\{\frac{T-a(\theta)}{b(\theta)}\right\}$ não depende de θ.

Consideremos um exemplo simples dessa abordagem.

Exemplo 4: Seja $X \sim \text{Exp}(\theta)$ com densidade

$$f(x \mid \theta) = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta} I_{(0,\infty)}(x). \tag{24}$$

Encontrar um intervalo de confiança $1-\alpha$ bilateral para θ.
Solução: Note que $U := \frac{X}{\theta}$ tem densidade

$$f_U(u) = \frac{dF_U(u)}{du} = \frac{d\mathbb{P}(X \leq u\theta)}{du} = \theta \cdot \frac{1}{\theta} e^{-u} I_{(0,\infty)}(u). \tag{25}$$

Logo:

$$f_U(u) = e^{-u} I_{(0,\infty)}(u). \tag{26}$$

Portanto U pode ser entendido como um pivô. Note que é possível definir $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$ tais que

$$\mathbb{P}(U < a) = \mathbb{P}(U > b) = \frac{\alpha}{2}. \tag{27}$$

E, portanto:

$$\mathbb{P}(a < U < b) = 1 - \alpha. \tag{28}$$

Com $\alpha \in (0,1)$ fixado:

$$\int_0^a e^{-u}\, du = 1 - e^{-a} = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad e^{-a} = 1 - \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad a = -\log\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right). \tag{29}$$

$$\int_b^\infty e^{-u}\, du = e^{-b} = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad b = -\log\left(\frac{\alpha}{2}\right). \tag{30}$$

Dado:

$$P_\theta(a < U < b) = P_\theta\left(a < \frac{X}{\theta} < b\right) = P_\theta\left(\frac{1}{b} < \theta < \frac{1}{a}\right) = P_\theta\left(\frac{X}{b} < \theta < \frac{X}{a}\right) = 1 - \alpha \tag{31}$$

Isto é:

$$ic_{1-\alpha}(\theta) = \left(\frac{X}{b}, \frac{X}{a}\right) \tag{32}$$

IC é o intervalo bilateral para θ com confiança $1-\alpha$.
Exemplo 5: Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma a.g. de $X \sim U(0,\theta)$ para θ desconhecido. Encontre o estimador intervalo bilateral para θ com confiança de $1-\alpha$.
Solução: A estatística $T(X) = X_{\min}$ é suficiente mínima para θ com densidade

$$f_T(t) = \frac{dF_T(t)}{dt} = \frac{d\left(F_X(t)\right)^n}{dt} = n\left(\frac{t}{\theta}\right)^{n-1} \frac{1}{\theta} \tag{33}$$

Logo:

$$f_T(t) = \frac{n}{\theta^n} t^{n-1} \quad , \quad t \in (0,\theta) \tag{34}$$

Note que $U = \frac{T}{\theta}$ tem densidade

$$f_U(u) = \frac{dF_U(u)}{du} = \frac{dP\left(\frac{T}{\theta} \leq u\right)}{du} = \theta \cdot f_T(u\theta) = nu^{n-1} \tag{35}$$

$$f_U(u) = nu^{n-1}\mathbb{I}_{(0,1)}(u)$$

que independe de θ, portanto U é um pivô. Pode-se determinar a e b com $0 < a < b < 1$ tais que

$$P(U < a) = P(U > a) = \frac{\alpha}{2}$$

e, portanto,

$$P(a < U < b) = 1 - \alpha$$

Temos que:

$$P(U < a) = \int_0^a nu^{n-1}\,du = u^n\Big|_0^a = a^n = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad a = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{1/n}$$

e

$$P(U > b) = \int_b^1 nu^{n-1}\,du = u^n\Big|_b^1 = 1 - b^n = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad b = \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)^{1/n}$$

Note que

$$P(a < U < b) = 1 - \alpha \quad \Rightarrow \quad P\left(a < \frac{T}{\theta} < b\right) = 1 - \alpha$$

$$\Rightarrow \quad P\left(\frac{1}{b} < \frac{\theta}{T} < \frac{1}{a}\right) = 1 - \alpha$$

$$\Rightarrow \quad P\left(\frac{T}{b} < \theta < \frac{T}{a}\right) = 1 - \alpha$$

e, portanto,

$$IC_{1-\alpha}(\theta) = \left(b^{-1}x_{\min},\ a^{-1}x_{\min}\right)$$

Exemplo 6: Sejam $X_1, \dots, X_n$ uma amostra de $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ com média desconhecida e σ^2 conhecido. Encontrar o intervalo de confiança $1-\alpha$ bilateral para μ.

Solução: De discussão anterior $T = \overline{X}$ é uma estatística suficiente mínima para μ e

$$T \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right). \tag{36}$$

Aqui, X's pertencem à família de locação. Note que

$$U = \sqrt{n}\frac{T-\mu}{\sigma} \sim N(0,1) \tag{37}$$

é um pivô. Para $z_{\alpha/2} > 0$ tal que $P(U > z_{\alpha/2}) = \frac{\alpha}{2}$, temos que:

$$P(-z_{\alpha/2} < U < z_{\alpha/2}) = 1-\alpha \quad \Rightarrow \quad P\left(-z_{\alpha/2} < \sqrt{n}\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma} < z_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha \tag{38}$$

ou seja,

$$P\left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha. \tag{39}$$

Portanto,

$$IC_{1-\alpha}(\mu) = \left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right). \tag{40}$$

Exemplo 7: Sejam $x_1, \ldots, x_n$ uma a.a. de X $\sim N(\mu, \sigma^2)$ com μ desconhecido e $\sigma \in \mathbb{R}^+$ desconhecido. Encontre o intervalo bilateral de confiança $1-\alpha$ para μ.

Sol: De discussão anterior, $(\overline{X}_n, S_n)$ é uma estatística conjuntamente suficiente mínima para (μ, σ). Aqui, X's pertencem à família de locação e escala.

Considere

$$U = \sqrt{n}\left(\frac{\overline{X}_n - \mu}{S_n}\right) = \frac{\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{n-1}{n-1} \cdot \frac{S_n^2}{\sigma^2}}} \sim t_{n-1}, \tag{41}$$

que é um pivô. Para $t_{n-1,\alpha/2} > 0$ tal que

$$P\left(U > t_{n-1,\alpha/2}\right) = \frac{\alpha}{2}, \tag{42}$$

temos que

$$P\left(-t_{n-1,\alpha/2} < U < t_{n-1,\alpha/2}\right) = 1 - \alpha \Rightarrow \tag{43}$$

$$P\left(-t_{n-1,\alpha/2} < \sqrt{n}\frac{\overline{X}_n - \mu}{S_n} < t_{n-1,\alpha/2}\right) = 1 - \alpha \Rightarrow \tag{44}$$

$$P\left(\overline{X}_n - t_{n-1,\alpha/2}\frac{S_n}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X}_n + t_{n-1,\alpha/2}\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha \tag{45}$$

$$\therefore IC_{1-\alpha}(\mu) = \left\{\overline{X}_n \pm t_{n-1,\alpha/2}\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right\}$$

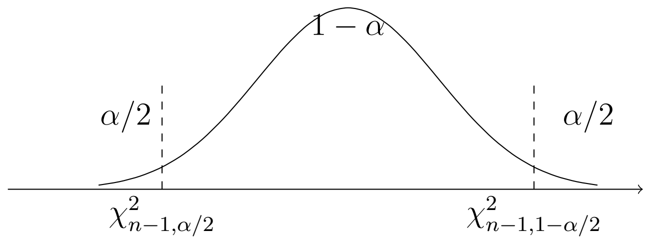
Exemplo 8: Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra de $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ com $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma \in \mathbb{R}_+$ desconhecidos. Encontre o intervalo de confiança $1-\alpha$ para σ.

Solução: Note que

$$U = \frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}. \tag{46}$$

Sejam $\chi^2_{n-1,\alpha/2}$ e $\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}$ tais que

$$P\left(U < \chi^2_{n-1,\alpha/2}\right) = \frac{\alpha}{2} \quad \text{e} \quad P\left(U > \chi^2_{n-1,1-\alpha/2}\right) = \frac{\alpha}{2}. \tag{47}$$



Então,

$$P\left(\chi^2_{n-1,\alpha/2} < U < \chi^2_{n-1,1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha \tag{48}$$

$$P\left(\chi^2_{n-1,\alpha/2} < \frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} < \chi^2_{n-1,1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha \tag{49}$$

$$P\left(\frac{(n-1)S_n^2}{\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S_n^2}{\chi^2_{n-1,\alpha/2}}\right) = 1-\alpha \tag{50}$$

Portanto,

$$IC_{1-\alpha}(\sigma) = \left[\sqrt{\frac{(n-1)S_n^2}{\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}}}, \sqrt{\frac{(n-1)S_n^2}{\chi^2_{n-1,\alpha/2}}}\right]. \tag{51}$$

Problema para duas amostras

Focaremos na abordagem da quantidade pivotal. Para uma função paramétrica diferenciável $K(\theta)$ para $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^p$, assuma que temos um estimador $\hat{K}(\hat{\theta})$ que é função de uma estatística suficiente (mínima) para θ.

Frequentemente, a distribuição de

$$U = \frac{\hat{K}(\theta) - K(\theta)}{\hat{\gamma}} \tag{52}$$

não dependerá de θ, $\forall \theta \in \Theta$, para algum $\gamma > 0$.

Aula 29 (02/07/2023)

Se σ é conhecido, podemos obter a, b tais que

$$P_\theta\left(a < \frac{\hat{\kappa}(\theta) - \kappa(\theta)}{\sigma} < b\right) = 1 - \alpha \tag{53}$$

Desta última identidade, obtém-se o intervalo de confiança $1 - \alpha$ para $\kappa(\theta)$.

Para σ desconhecido:

$$P_\theta\left(a < \frac{\hat{\kappa}(\theta) - \kappa(\theta)}{\hat{\sigma}} < b\right) = 1 - \alpha \tag{54}$$

Desta identidade, obtém-se o intervalo de confiança.

Os resultados anteriores são locação. Quando a inferência é sobre o parâmetro de escala, costuma-se utilizar o pivô

$$U = \frac{\hat{\kappa}(\theta)}{\kappa(\theta)} \tag{55}$$

cuja distribuição geralmente independe de θ. Para este caso, usa-se

$$P_\theta\left(a < \frac{\hat{\kappa}(\theta)}{\kappa(\theta)} < b\right) = 1 - \alpha \tag{56}$$

article [utf8]inputenc amsmath amssymb

Desta última identidade, obtemos o intervalo de confiança para $u(\theta)$.

<u>**Comparando parâmetros de locação**</u>

Vamos analisar diferença de médias entre duas populações normais.

Exemplo 10: Suponha $x_{i1}, \ldots, x_{in_i}$ para $i = 1, 2$ duas amostras aleatórias de $X_i \sim N(\mu_i, \sigma^2)$ e independentes entre elas $X_1 \perp X_2$. Vamos assumir que $\theta = (\mu_1, \mu_2, \sigma) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+$ é desconhecido, encontrar o intervalo bilateral com confiança $1-\alpha$ para $u(\theta) = \mu_1 - \mu_2$.

Solução: Note que:

$$\begin{aligned}
f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) &= f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(x_2) \\
&= (2\pi\sigma^2)^{-1} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1 - \mu_1}{\sigma}\right)^2\right\} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_2 - \mu_2}{\sigma}\right)^2\right\} \\
&= (2\pi\sigma^2)^{-1} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1^2 - 2x_1\mu_1 + \mu_1^2}{\sigma^2} + \frac{x_2^2 - 2x_2\mu_2 + \mu_2^2}{\sigma^2}\right)\right\} \\
&= (2\pi\sigma^2)^{-1} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1^2}{\sigma^2} - \frac{2x_1\mu_1}{\sigma^2} + \frac{\mu_1^2}{\sigma^2} + \frac{x_2^2}{\sigma^2} - \frac{2x_2\mu_2}{\sigma^2} + \frac{\mu_2^2}{\sigma^2}\right)\right\}
\end{aligned} \tag{57}$$

$$\Rightarrow f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = (2\pi\sigma^2)^{-1} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[(x_1 - x_2) - (\mu_1 - \mu_2)\right]^2\right\} \cdot \exp\left\{-\frac{\mu_1^2 + \mu_2^2}{2\sigma^2}\right\} \tag{58}$$