Capítulo 4 - Compilação Completa

Teste de Hipótese

Curso de Inferência Estatística - PPGEST/UFPE

Novembro 2025

Introdução ao Capítulo 4: Teste de Hipóteses

O Capítulo 4 apresenta uma das ferramentas mais fundamentais e amplamente utilizadas na inferência estatística: os **Testes de Hipóteses**. Esta metodologia permite que tomemos decisões informadas sobre parâmetros populacionais desconhecidos com base em evidências amostrais, fornecendo um arcabouço rigoroso para validar ou refutar afirmações científicas.

Contexto e Motivação

A teoria de testes de hipóteses, desenvolvida principalmente por Neyman e Pearson, responde à seguinte questão fundamental: *"Dada uma afirmação sobre um parâmetro populacional desconhecido θ, como podemos usar uma amostra aleatória para decidir se devemos aceitar ou rejeitar tal afirmação?"*

Esta questão permeia praticamente todas as áreas da ciência onde dados empíricos são coletados: desde estudos clínicos que avaliam a eficácia de novos tratamentos, passando por controle de qualidade industrial, até pesquisas sociais e econômicas.

Estrutura do Capítulo

O capítulo está organizado de forma a construir progressivamente os conceitos fundamentais e suas aplicações:

4.1 Introdução e Conceitos Fundamentais Apresenta a formulação básica do problema de teste de hipóteses, incluindo:

- Definição de hipótese estatística (nula H_0 e alternativa H_1)
- Classificação das hipóteses: simples, compostas unilaterais e bilaterais
- Região crítica e regra de decisão
- Conceito de erro Tipo I (α) e Tipo II (β)

4.2 Probabilidade de Erro e Função Poder Desenvolve a teoria quantitativa dos testes, introduzindo:

- Função poder $Q_\Upsilon(\theta)$ e sua interpretação
- Conceitos de tamanho e nível de significância
- Testes aleatorizados versus não aleatorizados
- Função crítica ou função do teste $\psi_\Upsilon(x)$

4.3 Lema de Neyman-Pearson (LNP) Este é um dos resultados mais importantes da teoria, que estabelece:

- O teste mais poderoso (MP) para hipóteses simples
- A razão de verossimilhança como estatística de teste
- Relação entre testes MP e estatísticas suficientes

4.4 Testes para Hipóteses Compostas Unilaterais Estende a teoria para o caso mais geral de hipóteses compostas:

- Conceito de Teste Uniformemente Mais Poderoso (UMP)
- Razão de Verossimilhança Monótona (RVM)
- Teorema de Karlin-Rubin
- Aplicações para distribuições da família exponencial

4.5 Testes para Hipóteses Bilaterais Aborda testes do tipo $H_0 : \theta = \theta_0$ versus $H_1 : \theta \neq \theta_0$:

- Testes Uniformemente Mais Poderosos Não Viesados (UMPNV)
- Aplicações para parâmetros de locação e escala

4.6 Estatísticas de Teste Clássicas Apresenta as principais estatísticas de teste utilizadas na prática:

- Teste Z (distribuição normal com variância conhecida)
- Teste t de Student (variância desconhecida)
- Teste Qui-quadrado (χ^2) para variância
- Teste F para comparação de variâncias

Objetivos de Aprendizagem

Ao final deste capítulo, espera-se que o estudante seja capaz de:

1. Formular corretamente hipóteses estatísticas para problemas práticos
2. Compreender e interpretar os erros Tipo I e II e suas implicações
3. Calcular a função poder de um teste e utilizá-la para comparar testes
4. Aplicar o Lema de Neyman-Pearson para construir testes MP
5. Utilizar o Teorema de Karlin-Rubin para obter testes UMP
6. Selecionar e aplicar apropriadamente as estatísticas de teste clássicas
7. Interpretar p-valores e tomar decisões estatísticas fundamentadas

Filosofia do Teste de Hipóteses

É importante destacar a filosofia subjacente ao teste de hipóteses:

- **Princípio da Falsificabilidade:** Procuramos evidências contra H_0 (não provamos que H_0 é verdadeira)
- **Controle de Erro:** Fixamos um nível máximo aceitável para o erro Tipo I (α)
- **Maximização do Poder:** Buscamos testes que maximizem a probabilidade de detectar quando H_0 é falsa
- **Decisão com Incerteza:** Reconhecemos que toda decisão estatística está sujeita a erro

Este capítulo fornece não apenas as ferramentas técnicas necessárias para realizar testes de hipóteses, mas também desenvolve a intuição estatística fundamental para aplicar essas ferramentas de forma apropriada em contextos reais.

Capítulo 4

Teste de Hipótese

4.1 Introdução

Seja X uma v.a. populacional com fdp (ou fmp) $f(x;\theta)$ para $x \in \mathbb{R}$ e $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$.

Definição (4.1.1) Uma hipótese é uma afirmação sobre o parâmetro desconhecido θ. Por exemplo:

$$H : \mu = \mu_0, \quad H : \sigma^2 > \sigma_0^2, \quad H : \alpha \neq \alpha_0$$

Neyman e Pearson formularam o problema de testar hipótese como se segue.

Considere que se deseja escolher entre:

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \quad \times \quad H_1 : \theta \in \Theta_1 \tag{1}$$

tal que $\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$ e $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \varnothing$.

Então, baseado-se em uma amostra $X_1, \ldots, X_n \in X$, deve-se tomar a decisão de rejeitar H_0 ou não rejeitar.

As hipóteses costumam ser classificadas como:

1) Simples:

$$H_0 : \theta = \theta_0, \quad H_1 : \mu = \mu_1 \tag{2}$$

2) Composta unilateral:

$$H_0 : \theta \geq \theta_0, \quad H_1 : \mu < \mu_1 \tag{3}$$

3) Composta bilateral:

$$H_0 : \theta \neq \theta_0 \quad \text{ou} \quad [\theta \leq \theta_0 \text{ ou } \theta \geq \theta_1] \tag{4}$$

Obs: H_0 é chamada de hipótese nula.
H_1 é chamada de hipótese alternativa.

4.2 Probabilidade de erro e função poder

Considere testar:

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \quad \times \quad H_1 : \theta \in \Theta_1 \tag{5}$$

A partir de $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra de X com fdp $f(x;\theta)$, podem-se cometer dois tipos de erro:

Natureza da escolha	H_0 verdadeira	H_1 verdadeira
Não rejeitar	—	Erro tipo II
Rejeitar	Erro tipo I	—

Em termos objetivos, tendo observados

$$X = (X_1, \ldots, X_n),$$

um teste:

1. Encontraria evidências para (não) rejeitar H_0.
2. Isto é feito por particionar $\mathbb{R}^n$ em dois conjuntos: $R_c \subset \mathbb{R}^n$ chamado de região crítica e seu complementar R_c^c tal que

$$R_c \cup R_c^c = \mathbb{R}^n \quad \text{e} \quad R_c \cap R_c^c = \varnothing \tag{6}$$

3. Se $X \in R_c$, rejeita-se $H_0 : \theta \in \Theta_0$.

Q(4.1) Alguns exemplos de testes

Sejam $X_1, \ldots, X_9$ uma amostra de $X \sim N(\theta, 1)$ para $\theta \in \mathbb{R}$ desconhecido.
No contexto, deseja-se testar:

$$H_0 : \theta = 5.5 \quad \text{vs} \quad H_1 : \theta = 8 \tag{7}$$

Seja

$$\bar{X}_n = 9^{-1} \sum_{i=1}^{9} X_i \tag{8}$$

Testes

- Teste #1: rejeitam-se H_0 se e só se $X_1 > 7$
- Teste #2: rejeitam-se H_0 se e só se $\frac{X_1+X_2}{2} > 7$
- Teste #3: rejeitam-se H_0 se e só se $\bar{X}_n > 6$
- Teste #4: rejeitam-se H_0 se e só se $\bar{X}_n > 7.5$

Suas regiões críticas

Para teste #1:

$$R_c = \{(x_1, \ldots, x_9) \in \mathbb{R}^9 : x_1 > 7\} \tag{9}$$

Para teste #2:

$$R_c = \{(x_1, \ldots, x_9) \in \mathbb{R}^9 : \frac{x_1 + x_2}{2} > 7\} \tag{10}$$

Para teste #3:

$$R_c = \{(x_1, \ldots, x_9) \in \mathbb{R}^9 : \bar{x} > 6\} \tag{11}$$

Para teste #4:

$$R_c = \{(x_1, \ldots, x_9) \in \mathbb{R}^9 : \bar{x} > 7.5\} \tag{12}$$

Definição (4.2.1) Teste de hipóteses

Data: 27/10/25

Um teste T para uma hipótese H é uma regra ou processo para decidir se H deve ser rejeitada.

Um conceito importante é o de probabilidade dos erros dos Tipos I e II.

Erro Tipo I

$$\begin{aligned} H_0, \quad \alpha &= P\{\text{Erro do tipo I}\} \\ &= P\{\text{Rejeitar } H_0 \ \wedge \ H_0 \text{ é verdadeira}\} \\ &= P_{H_0}\{X \in R_c\} \end{aligned}$$

Erro Tipo II

$$\begin{aligned} H_1, \quad \beta &= P\{\text{Erro do tipo II}\} \\ &= P\{\text{Não rejeitar } H_0 \ \wedge \ H_0 \text{ é falsa}\} \\ &= P_{H_1}\{X \in R_c'\} \end{aligned}$$

Exemplo (4.2)

Para teste #1 em (4.1) tem-se:

$$\alpha = P_{H_0:\theta=5.5}\{X_1 > 7\}$$

$$\beta = P_{H_1:\theta=8}\{X_1 \leq 7\}$$

$$\begin{aligned} \alpha &= P\left\{\frac{X_1 - 5.5}{\sigma} > \frac{7-5.5}{\sigma}\right\}, \quad Z \sim N(0,1) \\ &= P\{Z > 1.5\} \\ &= 1 - \Phi(1.5) = 0.06691 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta &= P\left\{\frac{X_1 - 8}{\sigma} < \frac{7-8}{\sigma}\right\}, \quad Z \sim N(0,1) \\ &= P\{Z < -1\} \\ &= \Phi(-1) = 0.15866 \end{aligned}$$

29/10/25

Outra quantidade importante é Poder do teste.

Definição (4.22) O Poder ou função poder de um Υ, denotada como $Q_\Upsilon(\theta)$, é a probabilidade de rejeitar H_0 quando $\theta \in \Theta$ é verdadeira.

Essa função é dada por

$$Q_\Upsilon(\theta) = P_\theta[X \in R_c], \quad X \in \mathbb{R}^n, \quad \theta \in \Theta \tag{13}$$

Obs: Note que

$$\alpha = Q_\Upsilon(\theta_0) \tag{14}$$

e

$$1 - \beta = Q_\Upsilon(\theta_1) \tag{15}$$

Para $H_0 : \theta = \theta_0$ e $H_1 : \theta = \theta_1$.

Q(4.3) Para o teste #4 da questão Q(4.1) tem-se

$$Q_\Upsilon(\theta) = P_\theta[X \in R_c] \tag{16}$$

$$= P_\theta[\bar{X}_n > 7.5] \tag{17}$$

$$\Rightarrow Q_\Upsilon(\theta) = P_\theta\left[\frac{\bar{X}_n - \theta}{1/\sqrt{n}} > \frac{7.5 - \theta}{1/\sqrt{n}}\right], \quad Z \sim N(0,1) \tag{18}$$

29/10/25

$$P_\theta[Z > \sqrt{n}(7,5-\theta)] = 1 - \Phi\left(\sqrt{n}(7,5-\theta)\right), \tag{19}$$

em que

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\, dt \quad \text{é fda de } Z \text{ e} \tag{20}$$

$$\phi(t) \quad \text{é a fdp de } Z. \tag{21}$$

Outro conceito importante é o de função crítica ou função do teste.

Definição (4.2.3) A função $\psi_\Upsilon : \chi^n \to [0,1]$ é chamada de função crítica ou função de teste se, e só se, $\psi_\Upsilon(x)$ representa a probabilidade com a qual H_0 é rejeitada quando $[X = x]$é observada.

Obs:

$$Q_\Upsilon(\theta) = E_\theta\left[\psi_\Upsilon(X)\right], \quad \forall \theta \in \Theta \tag{22}$$

Os testes podem ser classificados como "aleatorizados" e "não aleatorizados".

Definição (4.2.4) Tipos de Teste Um teste Υ para a hipótese H_0 pode ser:
Seja $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ uma possível realização de $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^T$.

a) Υ não aleatorizados: Rejeita-se H_0 se e só se $x \in R_c$ ou tem função crítica

$$\Upsilon(x) = \begin{cases} 1, & x \in R_c \\ 0, & x \in R_c^c \end{cases}$$

b) Υ aleatorizado: O teste é definido por uma função crítica dada por:

$$\Upsilon(x) = \begin{cases} 1, & x \in R_c \\ \delta, & x \in R_\delta \\ 0, & x \in (R_c \cup R_\delta)^c \end{cases}$$

Exemplo: Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra de $X \sim N(\theta, 25)$.
Neste caso $\mathbb{X} = \mathbb{R}^n$ é o espaço amostral. Considere o teste "Rejeitar $H_0 : \theta \leq 17$ se e só se $\bar{X}_n > 17 + \frac{5}{\sqrt{n}}$".
Υ é não aleatorizado com função crítica dada por:

$$\Upsilon(x) = \begin{cases} 1, & x \in \{z \in \mathbb{R}^n : \bar{z}_n > 17 + \frac{5}{\sqrt{n}}\} \\ 0, & x \in \{z \in \mathbb{R}^n : \bar{z}_n \leq 17 + \frac{5}{\sqrt{n}}\} \end{cases}$$

Exemplo: Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra de $X \sim \text{Bernoulli}(\theta)$ para $\theta \in (0,1)$.
Neste caso $\mathbb{X} = \{0,1\}^n$ é o espaço amostral.

29/10/25

Considere Υ um teste para $H_0 : \theta \leq \frac{1}{2}$ tal que H_0 é rejeitada se só se $\sum x_i > 5$. Υ é um teste aleatorizado com função crítica

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & x \in \{z \in \{0,1\}^n : \sum_{i=1}^n z_i > 5\} \\ \delta, & x \in \{z \in \{0,1\}^n : \sum_{i=1}^n z_i = 5\} \\ 0, & x \in \{z \in \{0,1\}^n : \sum_{i=1}^n z_i < 5\} \end{cases} \tag{23}$$

Caso $\psi(x) = \delta \in (0,1)$ a decisão para rejeição de H_0 se dará por "obter cara" no lançamento de uma moeda com $P(\text{cara}) = \delta$.

4.2.1 O Conceito de Melhor Teste

Considere testar $H_0 : \theta \in \Theta_0$ x $H_1 : \theta \in \Theta_1$ tal que $\Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$, $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \varnothing$.

Definição (4.2.5) Seja $\alpha \in (0,1)$ um valor fixado. Um teste Υ para H_0 x H_1 com função poder $Q_\Upsilon(\theta)$ é chamado de um teste de tamanho α se

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} \{Q_\Upsilon(\theta)\} = \alpha \tag{24}$$

e é chamado de um teste de nível α se

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} \{Q_\Upsilon(\theta)\} \leq \alpha \tag{25}$$

Ou, equivalentemente, teste de tamanho α se

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} \{\psi_\Upsilon(x)\} = \alpha \tag{26}$$

e de nível se

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} \{\psi_\Upsilon(x)\} \leq \alpha \tag{27}$$

A escolha do melhor teste é dentro daqueles de nível α.

Definição (4.2.6). Considere uma classe C de todos os testes de nível α para H_0 contra H_1. Um teste $\Upsilon \in C$ com função poder $Q_\Upsilon(\theta)$ é o **Melhor teste de nível** α ou o **teste uniformemente mais poderoso (UMP)** de nível α se e só se

$$Q_\Upsilon(\theta) \geq Q_{\Upsilon^*}(\theta), \quad \forall \theta \in \Theta_1 \tag{28}$$

em que $\Upsilon^* \in C$ com função poder $Q_{\Upsilon^*}(\theta)$.

Se H_1 é do tipo simples, $H_1 : \theta = \theta_1$, então o melhor teste é chamado de **Mais Poderoso (MP)**.

4.3 Teste Simples x Simples

Considere derivar o teste MP para o tipo simples x simples via o Lema de Neyman e Pearson (1933).

Sejam $X = (X_1, \ldots, X_n)^T$ uma a.a. de X com fdp (ou fmp) $f(x;\theta)$ para $x \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}$ e $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}$ e $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ uma a.o. de X. Desejamos testar

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{x} \quad H_1 : \theta = \theta_1, \tag{29}$$

em que $\theta_0, \theta_1 \in \Theta$ e $\theta_0 \neq \theta_1$. Note que a função de verossimilhança do contexto é dada por

$$L(\theta_i; x) = \prod_{k=1}^{n} f(x_k; \theta_i), \quad \text{para } i = 0, 1. \tag{30}$$

Considere comparar os poderes de todos os testes de nível α, com α pré-fixado em $(0, 1)$. Comumente, escolhe-se os valores $\alpha = 1\%$, 5%, 10%. Intuitivamente, um teste de H_0 x H_1 vem de comparar $L(\theta_1; x)$ com $L(\theta_0; x)$ e procurar qual quantidade é superior à outra. Como critério, a hipótese com verossimilhança significativamente maior é mais favorecida.

Teorema (4.3.1) [Lema de Neyman Pearson]

Considere um teste de $H_0 : \theta = \theta_0$ x $H_1 : \theta = \theta_1$ com região de rejeição e não rejeição de H_0 dados por:

$$R_c = \{x \in \mathbb{R}^n : L(\theta_1; x) > k\, L(\theta_0; x)\}$$

e

$$R_c^c = \{x \in \mathbb{R}^n : L(\theta_1; x) < k\, L(\theta_0; x)\}$$

ou equivalentemente, usando a função crítica

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } L(\theta_1; x) > k\, L(\theta_0; x) \\ 0, & \text{se } L(\theta_1; x) < k\, L(\theta_0; x) \end{cases}$$

em que $k \geq 0$ é determinado por

$$E_{\theta_0}\left[\psi(x)\right] = \alpha \tag{4.3.2}$$

Qualquer teste satisfazendo (4.3.1) e (4.3.2) é um teste MP de nível α.

Prova: Consideremos a prova para o caso contínuo. Note que qualquer teste Υ que satisfaça (4.3.2) tem tamanho α e portanto nível α.

Seja Υ^* um teste com função crítica $\psi_{\Upsilon^*}(x)$ e nível α. Sejam $Q_{\Upsilon}(\theta)$ e $Q_{\Upsilon^*}(\theta)$ as funções poder de Υ e Υ^*, respectivamente.

29/10/25

Vamos primeiro a verificar que

$$\psi_{\Upsilon}(x) - \psi_{\Upsilon^*}(x) \cdot L(\theta_1, x) - k \cdot L(\theta_1, x) \geq 0 \tag{4.3.3}$$

$$x \in \mathcal{X}^n$$

Note que:

[i] Se $\psi_\Upsilon(x) = 1$, então

$$L(\theta_1, x) - k \cdot L(\theta_0, x) \geq 0 \quad \text{de (4.3.1)} \tag{31}$$

e

$$\psi_\Upsilon(x) - \psi_{\Upsilon^*}(x) \geq 0 \quad \text{da definição da função crítica (4.3.3)} \tag{32}$$

se verifica.
[ii] Se $\psi_\Upsilon(x) = 0$, então

$$L(\theta_1, x) - k \cdot L(\theta_0, x) \leq 0 \quad \text{de (4.3.1)} \tag{33}$$

e

$$\psi_\Upsilon(x) - \psi_{\Upsilon^*}(x) \leq 0 \quad \text{da definição da função crítica (4.3.3)} \tag{34}$$

se verifica.
[iii] Se $0 < \psi_\Upsilon(x) < 1$, então

$$L(\theta_1, x) - k \cdot L(\theta_0, x) = 0 \quad \text{e (4.3.3) se verifica} \tag{35}$$

Daí, tem-se

$$\begin{aligned}
0 &\leq \int_{\mathcal{X}^n} \{\psi_\Upsilon(x) - \psi_{\Upsilon^*}(x)\} \left[L(\theta_1; x) - k \cdot L(\theta_0; x)\right] dx \\
&= \int_{\mathcal{X}^n} \psi_\Upsilon(x) \left[L(\theta_1; x) - k\, L(\theta_0; x)\right] dx \qquad (36)\\
&\quad - \int_{\mathcal{X}^n} \psi^*_\Upsilon(x) \left[L(\theta_1; x) - k\, L(\theta_0; x)\right] dx \\
&\quad = \left[E_{\theta_1} \psi_\Upsilon(x) - k\, E_{\theta_0} \psi_\Upsilon(x)\right] \\
&\quad\quad - \left[E_{\theta_1} \psi^*_\Upsilon(x) - k\, E_{\theta_0} \psi^*_\Upsilon(x)\right] \\
&\quad 0 \leq \{Q_\Upsilon(\theta_1) - k\, Q_\Upsilon(\theta_0)\} \qquad (4.3.4)\\
&\quad\quad - \{Q^*_\Upsilon(\theta_1) - k\, Q^*_\Upsilon(\theta_0)\} \\
&\quad = Q_\Upsilon(\theta_1) - Q^*_\Upsilon(\theta_1) - k\left[Q_\Upsilon(\theta_0) - Q^*_\Upsilon(\theta_0)\right]
\end{aligned}$$

Note que $Q_\Upsilon(\theta_0) = \alpha$ e $Q^*_\Upsilon(\theta_0) \leq \alpha$ e, portanto,

$$Q_\Upsilon(\theta_0) - Q^*_\Upsilon(\theta_0) \geq 0 \tag{37}$$

A (4.3.4) pode ser reescrita como

$$Q_\Upsilon(\theta_1) - Q^*_\Upsilon(\theta_1) \geq k\left[Q_\Upsilon(\theta_0) - Q^*_\Upsilon(\theta_0)\right] \geq 0 \tag{38}$$

$$Q_\Upsilon(\theta_1) \geq Q_{\Upsilon^*}(\theta_1)$$

O que mostra que Υ é no mínimo tão poderoso quanto Υ^*.
03/11/2025
Obs 1: (LNP) No Lema de Neyman Pearson nada é dito sobre o conjunto

$$R^* := \{x \in \mathbb{R}^n : L(\theta_1; x) - k\, L(\theta_0; x) = 0\}$$

Quando X é contínua, a probabilidade de X pertencer a R^* é zero e esse detalhe não tem importância na prática. Quando X é discreta, deve-se aleatorizar o evento $X \in R^*$ tal que o teste MP tenha tamanho $\alpha \in (0,1)$.

Obs 2: (LNP) O teste MP proposto a partir de LNP é início.

Q(4.4) Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ com μ desconhecido e $\sigma^2 \in \mathbb{R}^+$ conhecido. Encontre o teste MP de nível α para

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \mu = \mu_1$$

tal que μ_0 e μ_1 são conhecidos e $\mu_1 > \mu_0$.

Solução

Como as hipóteses são do tipo simples x simples, o LNP se aplica.
A verossimilhança em questão é

$$L(\mu; x) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2\right\} \tag{39}$$

Para $i = 0, 1$

O teste MP tem a seguinte forma:

$$\text{Rejeitar } H_0 \text{ se } \frac{L_1}{L_0} > k$$

Note que:

$$\frac{L_1}{L_0} = \frac{L(\mu_1; x)}{L(\mu_0; x)} = \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_1)^2 - \sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_0)^2\right]\right\} \tag{40}$$

$$= \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[-2\mu_1\sum_{i=1}^{n}x_i + n\mu_1^2 + 2\mu_0\sum_{i=1}^{n}x_i - n\mu_0^2\right]\right\} \tag{41}$$

$$= \exp\left\{\frac{(\mu_1 - \mu_0)}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}x_i - \frac{n(\mu_1^2 - \mu_0^2)}{2\sigma^2}\right\} \tag{42}$$

Daí, a região crítica deste teste é dada por:

Para $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$ como o espaço amostral.

03/11/25

$$R_c = \left\{x \in \mathcal{X} : \frac{L_1}{L_0} > k\right\} = \left\{x \in \mathcal{X} : \exp\left\{\frac{(\mu_1 - \mu_0)}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{n(\mu_1^2 - \mu_0^2)}{2\sigma^2}\right\} > k\right\} \quad (43)$$

$$= \left\{x \in \mathcal{X} : \exp\left\{\frac{(\mu_1 - \mu_0)}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} x_i\right\} > k \cdot e^{\frac{n(\mu_1^2 - \mu_0^2)}{2\sigma^2}}\right\} \quad (44)$$

onde $k_1 = k \cdot e^{\frac{n(\mu_1^2 - \mu_0^2)}{2\sigma^2}}$

$$= \left\{x \in \mathcal{X} : \sum_{i=1}^{n} x_i > \frac{\sigma^2}{\mu_1 - \mu_0}\log(k_1)\right\} \quad (45)$$

onde $k_2 = \frac{\sigma^2}{\mu_1 - \mu_0}\log(k_1)$
(uma versão mais manipulável)

$$R_c = \left\{x \in \mathcal{X} : \sqrt{n}\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma} > \sqrt{n}\frac{k_2 - n\mu_0}{n\sigma}\right\} \quad (46)$$

$$\therefore R_c = \left\{x \in \mathcal{X} : \sqrt{n}\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma} > k_3\right\} \quad (4.3.5), \quad (47)$$

Definamos a função Z: $\mathcal{X} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$Z(x) \triangleq \sqrt{n}\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma} \quad (48)$$

Quando $Z(x)$ é avaliada numa aa $X = (X_1, \ldots, X_n)^T$, a quantidade resultante $Z(x)$ é uma estatística de teste com distribuição conhecida sob H_0.

$$Z(X) \overset{H_0}{\sim} N(0,1) \quad (49)$$

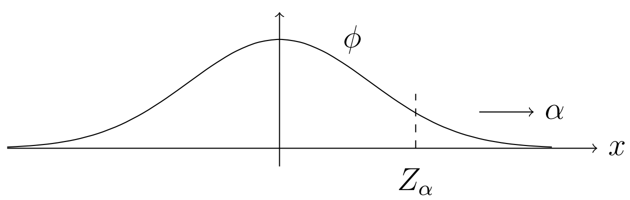
A região crítica (4.3.5) é então definida (trocando k_3 em (4.3.5)) por z_α como

$$R_c = \left\{x \in \mathcal{X} : \sqrt{n}\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma} > z_\alpha\right\} \quad (50)$$

$$= \{x \in \mathcal{X} : Z(X) > z_\alpha\} \quad (51)$$

em que z_α é tal que

$$P(Z > z_\alpha) = \alpha \quad (52)$$



Resumo Teste Z

Suposição

$X_1, \ldots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$ e $\sigma^2 > 0$ conhecido.

Hipóteses

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu = \mu_1 \ (> \mu_0) \end{cases} \tag{53}$$

Estatística de Teste

$$Z(X) = \sqrt{n}\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma} \overset{H_0}{\sim} N(0, 1) \tag{54}$$

03/11/25

Regra de decisão

(Método tradicional) Rejeita-se H_0 se $Z(x) > z_\alpha$.

(Método do valor P) Seja $Z_{cal} = Z(x)$, rejeita-se H_0 se

$$\hat{p} = P(Z \geq Z_{cal}) < \alpha \quad \text{(obs: } \hat{p} \text{ se chama de valor P)}$$

Q(4.5)

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra de $X \sim \exp(\theta)$ com densidade

$$f(x;\theta) = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}, \quad x > 0 \tag{55}$$

em que $\theta > 0$ é desconhecido. Encontre o teste MP de nível α para

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \theta = \theta_1 \quad (\theta_1 > \theta_0)$$

Solução

Como o contexto é do tipo simples vs simples, pode-se aplicar o LNP. A verossimilhança é dada por:

$$L_i \triangleq L(\theta_i; x) = \theta_i^{-n} \exp\left\{-\frac{\sum_{j=1}^n X_j}{\theta_i}\right\}, \quad \text{para } i = 0, 1 \tag{56}$$

O teste MP é da forma:

$$\left\{ \text{Rejeita-se } H_0 \quad \text{se, e somente se} \quad \tfrac{L_1}{L_0} > k \right.$$

Note que:

$$\frac{L_1}{L_0} = \left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^n \exp\left[\sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{1}{\theta_0} - \frac{1}{\theta_1}\right)\right] \tag{57}$$

Daí, a região crítica de teste é dada por: Para $\mathcal{X} = \mathbb{R}_+^n$

$$R_c = \left\{x \in \mathcal{X} : \left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^n \exp\left[\sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{1}{\theta_0} - \frac{1}{\theta_1}\right)\right] > k\right\} \tag{58}$$

$$= \left\{x \in \mathcal{X} : \left(\frac{1}{\theta_0} - \frac{1}{\theta_1}\right) \sum_{i=1}^n x_i > \underbrace{\log\left[k \cdot \left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^n\right]}_{k_1}\right\} \tag{59}$$

$$= \left\{x \in \mathcal{X} : \sum_{i=1}^n x_i > \underbrace{\left(\frac{\theta_1 - \theta_0}{\theta_0 \theta_1}\right)^{-1} k_1}_{k_2}\right\} \tag{60}$$

$$= \left\{ x \in \mathcal{X} : \sum_{i=1}^{n} x_i > k_2 \right\} \tag{61}$$

Para se ter uma estatística manipulável, requer-se que sua distribuição sob H_0 não dependa do parâmetro. Note que

$$\dot{X} \triangleq \theta^{-1} X \quad \text{tem densidade} \tag{62}$$

$$f_{\dot{X}}(x) = \theta f(\theta x; \theta) \tag{63}$$

$$= \theta \left[\frac{1}{\theta} e^{-\frac{\theta x}{\theta}} \right] = e^{-x} \tag{64}$$

03/11/25
Que é a densidade da exponencial padrão.
Ainda note que $\dot{X}_i \triangleq 2\frac{X_i}{\theta} = 2\theta^{-1}X_i$ tem densidade

$$f_{\dot{X}_i}(x) = \frac{1}{2}f_{X_i}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}e^{-x/2}, \quad x > 0 \tag{65}$$

que é a densidade de χ^2_2, pois $\frac{1}{2}e^{-x/2} = \frac{1}{2^1\Gamma(1)}e^{-x/2}x^{1-1}$.
Assim, $\sum_{i=1}^n \dot{X}_i \sim \chi^2_{2n}$, para $\dot{X}_i$ i.i.d.
Logo

$$R_c = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \frac{2}{\theta_0}\sum_{i=1}^n x_i > k_3\right\} \tag{66}$$

Definimos a função $Q : \mathcal{X} \to \mathbb{R}_+$

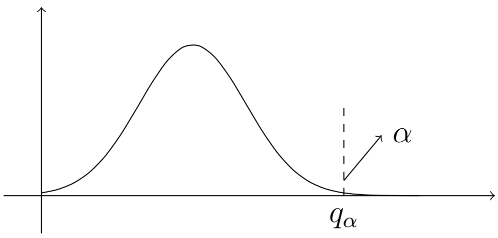
$$Q(x) = \frac{2}{\theta_0}\sum_{i=1}^n x_i \tag{67}$$

Note que para $X = (x_1, \ldots, x_n)^T$, $Q(X) \overset{H_0}{\sim} \chi^2_{2n}$.
A região crítica fica definida como:

$$R_c = \{x \in \mathcal{X} : Q(x) > q_\alpha\} \tag{68}$$

em que q_α é tal que

$$P(Q > q_\alpha) = \alpha, \quad Q \sim \chi^2_{2n} \tag{69}$$



Resumo Teste χ^2

Suposição

$$X_1, \ldots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} \exp(\theta)$$

Hipóteses

$$H_0 : \theta = \theta_0$$
$$H_1 : \theta = \theta_1 \quad (\theta_1 > \theta_0)$$

Estatística de Teste

$$Q(X) = \frac{2}{\theta_0} \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \chi^2_{2n} \quad \text{para } H_0 \tag{70}$$
$$Q_{\text{cal}} = Q(x)$$

Regra de decisão

Rejeita-se H_0 se $Q_{\text{cal}} > q_\alpha$
Rejeita-se H_0 se $P(Q > Q_{\text{cal}}) < \alpha$

Questão (4.6)

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra de $X \sim \text{Bernoulli}(p)$ para $p \in (0, 1)$ desconhecida. Encontre o teste MP para:

$$H_0 : p = p_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : p > p_0$$

Solução

Como o contexto é do tipo simples vs simples, aplica-se o LNP. A verossimilhança associada é dada por:

$$L_i \triangleq L(p_i; x) = \prod_{k=1}^{n} \left[p_i^{x_k} (1 - p_i)^{1 - x_k} \right] \tag{71}$$
$$= p_i^{\sum_{k=1}^{n} x_k} \cdot (1 - p_i)^{n - \sum_{k=1}^{n} x_k}$$
$$= \left(\frac{p_i}{1 - p_i} \right)^{\sum_{k=1}^{n} x_k} \cdot (1 - p_i)^n$$

O Teste MP é da forma:

$$\text{Rejeita-se } H_0 \quad \text{se e só se} \quad \left[\frac{L_1}{L_0} > k \right]$$

Note que:

$$\frac{L_1}{L_0} = \left[\frac{p_1(1 - p_0)}{p_0(1 - p_1)} \right]^{\sum_{i=1}^{n} x_i} \cdot \left[\frac{1 - p_1}{1 - p_0} \right]^n$$

$$A_1 > 1 \qquad A_2 < 1$$

Daí, a região crítica é dada por:

$$R_c = \left\{ x \in \mathcal{X} : A_1^{\sum_{i=1}^n x_i} \cdot A_2^n > k \right\}$$

$$= \left\{ x \in \mathcal{X} : \sum_{i=1}^n x_i > \frac{\log\left(A_2^{-n}k\right)}{\log(A_1)} \right\} = \left\{ x \in \mathcal{X} : \sum_{i=1}^n x_i > k_1 \right\}$$

A função correspondente é dada por

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } \sum_{i=1}^n x_i > k_1, \\ \delta, & \text{se } \sum_{i=1}^n x_i = k_1, \\ 0, & \text{se } \sum_{i=1}^n x_i < k_1. \end{cases} \tag{72}$$

Em que o inteiro positivo k_1 e $\delta \in (0, 1)$ são escolhidos tais que o teste tem tamanho α.

Note que sob H_0, $\sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Binomial}(n, p_0)$.

Primeiramente, determine o menor inteiro k_1 tal que

$$P_{p_0}\left[\sum_{i=1}^n X_i > k_1\right] < \alpha, \tag{73}$$

então

$$\delta = \frac{\alpha - P_{p_0}\left[\sum_{i=1}^n X_i > k_1\right]}{P_{p_0}\left[\sum_{i=1}^n X_i = k_1\right]}, \tag{74}$$

em que

$$P_{p_0}\left[\sum_{i=1}^n X_i = k_1\right] = \binom{n}{k_1} p_0^{k_1}(1-p_0)^{n-k_1}, \tag{75}$$

e

$$P_{p_0}\left[\sum_{i=1}^n X_i > k_1\right] = \sum_{j=k_1+1}^n \binom{n}{j} p_0^j (1-p_0)^{n-j}. \tag{76}$$

Da discussão anterior, a probabilidade o erro do Tipo I é dada por:

$$\alpha = \delta \cdot P_{p_0}\left[\sum_{i=1}^n X_i = k_1\right] + P_{p_0}\left[\sum_{i=1}^n X_i > k_1\right] \tag{77}$$

05/11/25

Q(4.7) Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra de $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ para $\lambda > 0$ desconhecido. Derive teste MP para:

$$H_0 : \lambda = \lambda_0 \quad \text{vs} \quad H_i : \lambda = \lambda_1 \ (\lambda_1 > \lambda_0) \tag{78}$$

Solução: Como as hipóteses são simples, o LNP se aplica. A verossimilhança é dada por:

$$L_i \triangleq L(\lambda_i; x) = \prod_{k=1}^n \left[e^{-\lambda_i} \frac{\lambda_i^{x_k}}{x_k!} \right] \tag{79}$$

$$= e^{-n\lambda_i} \cdot \lambda_i^{\sum_{k=1}^n x_k} \cdot \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k!} \tag{80}$$

O teste MP é da forma:

$$\text{Rejeitar } H_0 \quad \text{se e somente se} \quad \frac{L_1}{L_0} > k$$

Note que:

$$\frac{L_1}{L_0} = \left[\frac{e^{-\lambda_1}}{e^{-\lambda_0}}\right]^n \cdot \left[\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right]^{\sum_{k=1}^n x_k} = e^{-n(\lambda_1-\lambda_0)} \cdot \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)^{\sum_{k=1}^n x_k} \tag{81}$$

Daí, a região crítica, é dada por:
Para $\mathcal{X} = \mathbb{Z}_+^n$:

$$R_c = \left\{x \in \mathcal{X} : \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)^{\sum x_i} e^{-n(\lambda_1-\lambda_0)} > k\right\} \tag{82}$$

$$= \left\{x \in \mathcal{X} : \sum x_i \log\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right) > n(\lambda_1 - \lambda_0) + \log k\right\} \tag{83}$$

$$= \left\{x \in \mathcal{X} : \sum x_i > \frac{n(\lambda_1 - \lambda_0) + \log k}{\log(\lambda_1/\lambda_0)}\right\} \tag{84}$$

$$R_c = \left\{x \in \mathcal{X} : \sum_{i=1}^{n} x_i > k_1\right\} \tag{85}$$

A função crítica corresponde a:

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & \sum_{i=1}^n x_i > k_1 \\ \delta, & \sum_{i=1}^n x_i = k_1 \\ 0, & \sum_{i=1}^n x_i < k_1 \end{cases} \tag{86}$$

Note que sob H_0,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \sim \text{Poisson}(n\lambda_0) \tag{87}$$

Primeiramente, determine o menor inteiro k_1 tal que:

$$P_{n\lambda_0}\left\{\sum_{i=1}^{n} x_i > k_1\right\} < \alpha \tag{88}$$

e

$$\delta = \frac{\alpha - P_{n\lambda_0}\left[\sum_{i=1}^n X_i > k_1\right]}{P_{n\lambda_0}\left[\sum_{i=1}^n X_i = k_1\right]} \tag{89}$$

em que,

$$P_{n\lambda_0}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = k_1\right] = \frac{(n\lambda_0)^{k_1} e^{-n\lambda_0}}{k_1!} \tag{90}$$

e

$$P_{n\lambda_0}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i > k_1\right] = \sum_{l=k_1+1}^{\infty} \frac{(n\lambda_0)^l e^{-n\lambda_0}}{l!} \tag{91}$$

Note que um teste MP de nível α simples depende de uma estatística (conjuntamente) suficiente.

Considere uma discussão mais geral. Pelo LFN, seja $L(\cdot; x)$ a verossimilhança associada a $x \in \mathcal{X}^n$. Então:

$$L(\theta; x) = g(T(x); \theta) \cdot h(x), \quad \forall x \in \mathcal{X}^n, \text{ em que } h(x) \text{ independe de } \theta. \tag{92}$$

Mostramos que LNP o teste MP rejeita $H_0 : \theta = \theta_0$ em favor de $H_1 : \theta = \theta_1$ para valores grandes de $L(\theta_1; x)/L(\theta_0; x)$:

$$\frac{L(\theta_1; x)}{L(\theta_0; x)} = \frac{g(T(x); \theta_1)}{g(T(x); \theta_0)} \tag{93}$$

que implica que a rejeição de H_0 acontece também se $\frac{g(T(x);\theta_1)}{g(T(x);\theta_0)}$ é grande.

O LNP também pode ser utilizado para comparar distribuições com densidade distintas.

Q(4.8) Seja X uma v.a com densidade $f(x)$ para $x \in \mathbb{R}$. Considere duas outras densidades:

$$f_0(x) = \begin{cases} \frac{3x^2}{64}, & 0 < x < 4 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \quad \text{e} \quad f_1(x) = \begin{cases} \frac{3}{16}\sqrt{x}, & 0 < x < 4 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Determine o teste MP de nível α para

$$H_0 : f(x) = f_0(x), \quad H_1 : f(x) = f_1(x)$$

Solução:

Como as hipóteses são do tipo simples x simples, aplica-se LNP. Assim:

$$\text{Rejeita-se } H_0 \text{ se e só se } \left[\frac{f_1(x)}{f_0(x)} > k\right]$$

Note que:

$$\frac{f_1(x)}{f_0(x)} = \frac{\frac{3}{16}x^{1/2}}{\frac{3}{64}x^2} = \frac{3 \cdot 64 \cdot x^{1/2}}{3 \cdot 16 \cdot x^2} = 4 \cdot x^{-3/2} \tag{94}$$

E o teste pode ser escrito como: rejeita-se H_0 se x pertence a

$$R_c = \{x \in (0, 4) : 4x^{-3/2} > k\} \tag{95}$$

$$= \{x \in (0, 4) : x < \left(\frac{4}{k}\right)^{2/3}\} \tag{96}$$

$$= \{x \in (0, 4) : x < k_1\} \tag{97}$$

Este teste tem tamanho dado por

$$\alpha = P_{f_0}\{X < k_1\} = \int_0^{k_1} \frac{3}{64}x^2\, dx \tag{98}$$

$$\alpha = \frac{3}{64} \cdot \frac{x^3}{3}\bigg|_0^{k_1} = \frac{k_1^3}{64} \tag{99}$$

$$\Rightarrow k_1 = (64\alpha)^{1/3} = 4\alpha^{1/3} \tag{100}$$

O poder associado é dado por

$$P_{f_1}\{X < k_1\} = \int_0^{k_1} \frac{3}{16}\sqrt{x}\, dx \tag{101}$$

$$= \frac{3}{16} \cdot \frac{x^{3/2}}{3/2}\Big|_0^{k_1} = \frac{k_1^{3/2}}{8} = \alpha^{1/2} \tag{102}$$

Q(4.9)

Sejam X_1 e X_2 duas v.a.'s independentes com densidade $f(x)$. Determine o teste MP de nível α para

$$H_0 : f(x) = f_0(x) \quad \text{vs} \quad H_1 : f(x) = f_1(x) \tag{103}$$

Solução

Do LNP, rejeita-se H_0 para (x_1, x_2) em

$$R_c = \left\{(x_1, x_2) \in (0,4) \times (0,4) : \frac{f_1(x_1)f_1(x_2)}{f_0(x_1)f_0(x_2)} > k\right\} \tag{104}$$

$$= \left\{(x_1, x_2) \in (0,4) \times (0,4) : 4x_1^{-3/2} \cdot 4x_2^{-3/2} > k\right\} \tag{105}$$

$$= \left\{(x_1, x_2) \in (0,4) \times (0,4) : \left(\frac{16}{k}\right)^{2/3} > x_1x_2\right\} \tag{106}$$

$$= \{(x_1, x_2) \in (0,4) \times (0,4) : x_1x_2 < K_1\} \tag{107}$$

Note que

$$F_0(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{x^3}{64}, & 0 < x < 4 \\ 1, & x \geq 4 \end{cases} \tag{108}$$

Uma vez que (para $x \in (0,4)$)

$$F_0(x) = \int_0^x \frac{3}{64} t^2 \, dt = \frac{3}{64}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^x = \frac{x^3}{64} \tag{109}$$

Como discutido sob H_0

$$-2 \log F_0(x_i) \sim \chi_2^2, \quad \text{para } i = 1, 2 \tag{110}$$

Daí,

$$R_c = \{(x_1, x_2) \in (0,4) \times (0,4);\ F_0(x_1) \cdot F_0(x_2) < k_2\} \tag{111}$$

$$F_0(x) = \frac{x^3}{64} \quad \Rightarrow \quad \frac{x_1^3}{64} \cdot \frac{x_2^3}{64} < k_2 \tag{112}$$

$$\{(x_1, x_2) \in (0,4) \times (0,4);\ \sum_{i=1}^{2} -2\log F_0(x_i) > -2\log k_2\} \tag{113}$$

Note que

$$Q(x_1, x_2) \triangleq -2\sum_{i=1}^{2} \log F_0(x_i) \sim \chi_4^2 \tag{114}$$

Daí, o teste MP de nível α é:

$$\text{Rejeita-se } H_0 \text{ se e só se } Q(x_1, x_2) > \chi_{4,\alpha}^2 \tag{115}$$

tal que

$$P_2(Q > \chi^2_{4,\alpha}) = \alpha \quad \text{e} \quad Q \sim \chi^2_4 \tag{116}$$

4.4 Teste para H composta unilateral

Considere estudar hipóteses do tipo

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{vs} \quad \begin{cases} H_1 : \theta > \theta_0 \\ H_1 : \theta < \theta_0 \end{cases} \tag{4.4.1}$$

No que segue, apresentam-se abordagem para deduzir teste UMP para (4.4.1).

4.4.1 Teste UMP via Lema de Neyman Pearson

Inicialmente fixemos um valor arbitrário $\theta_1 \in \Theta$ tal que $\theta_1 > \theta_0$. A hipótese alternativa de (4.4.1) pode ser escrita como $H_1 : \theta = \theta_1$.

Agora tem-se um problema de duas hipóteses simples e, pelo LNP, existe um teste MP tal que para

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \theta = \theta_1 \tag{117}$$

Se esse teste particular não é afetado pela escolha de θ_1, então diz-se que tal teste é UMP.

07/11/25

Q(4.10)

Sejam $x_1, \ldots, x_n$ uma amostra de $X \sim N(0, \sigma^2)$, em que $\sigma^2 > 0$ e é desconhecido. Fixando $\alpha \in (0,1)$, considere obter o teste **UMP** de nível α para

$$H_0 : \sigma = \sigma_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \sigma < \sigma_0, \quad \text{em que} \quad \sigma_0 > 0. \tag{118}$$

Solução

Fixemos $\sigma_1 \in \Theta = \mathbb{R}^+$ tal que $\sigma_1 < \sigma_0$ e reescrevemos a hipótese alternativa como

$$H_1' : \sigma = \sigma_1 \ (\sigma_1 < \sigma_0). \tag{119}$$

Assim, o LNP pode ser aplicado para $H_0 \times H_1'$.

A função de verossimilhança é dada por:

$$L_k \triangleq L(\sigma_k; x) = \prod_{j=1}^{n} f(x_j; \sigma_k) = \prod_{j=1}^{n} (2\pi\sigma_k^2)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_k^2}\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right\}, \quad k = 0, 1. \tag{120}$$

Portanto, H_0 é rejeitada quando o vetor $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ pertence a (para $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$):

$$\begin{aligned} R &= \left\{x \in \mathcal{X} : \frac{L_1}{L_0} > k\right\} \\ &= \left\{x \in \mathcal{X} : \left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2}\right)^{-n/2} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \left(\frac{1}{\sigma_0^2} - \frac{1}{\sigma_1^2}\right)} > k\right\} \\ &= \left\{x \in \mathcal{X} : -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \left(\frac{\sigma_0^2 - \sigma_1^2}{\sigma_0^2\sigma_1^2}\right) > \log\left[k\left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2}\right)^{n/2}\right]\right\}. \end{aligned} \tag{121}$$

$$= \left\{x \in \mathcal{X} : \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \left(\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_0^2}\right) < \underbrace{-2\log\left[k\left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2}\right)^{n/2}\right]}_{k_1}\right\}$$

$$= \left\{x \in \mathcal{X} : \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{\sigma_0^2} < \underbrace{\frac{\sigma_0^2}{\sigma_0^2 - \sigma_1^2} k_1}_{k_2}\right\}$$

Definamos a função $Q : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^*$ tal que

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i}{\sigma_0}\right)^2$$

Note que para $X = (x_1, \ldots, x_n)^T$, $Q(X) \overset{\text{sob } H_0}{\sim} \chi_n^2$. Assim o teste fica definido como: rejeita-se H_0 se

$$x \in \mathcal{R}_c := \{x \in \mathcal{X} : Q(x) < \chi^2_{n,1-\alpha}\}$$

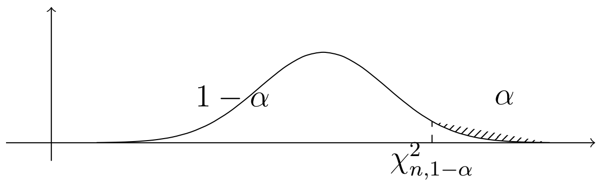
em que $\chi^2_{n,1-\alpha}$ é solução de

$$P_{H_0}\left\{Q < \chi^2_{n,1-\alpha}\right\} = \alpha$$

Finalmente

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & Q(x) < \chi^2_{n,1-\alpha} \\ 0, & Q(x) \geq \chi^2_{n,1-\alpha} \end{cases}$$

é a função crítica do teste UMP para $H_0 \times H_1$, também além de ser o teste MP para $H_0 \times H_1$.



07/11/25

4.4.2 Teste UMP via razão de verossimilhanças monótonas

Sejam $x_1, \ldots, x_n$ uma amostra de X tendo fdp (ou FMP) $f(x;\theta)$ para $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$ e $x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}$.

Definição (4.4.2.1) [Razão de verossimilhanças monótonas - RVM]

A família $\{f(x;\theta), \theta \in \Theta\}$ tem RVM em uma estatística $T(x) \in \mathbb{R}$ se pode ser verificado o seguinte resultado: para todo $\theta^*, \theta \in \Theta$ e $x \in \mathcal{X}^n$, vale-se

$$\frac{L(\theta^*;x)}{L(\theta;x)} \text{ é não decrescente em } T(x) \text{ sempre que } \theta^* > \theta \tag{122}$$

Seguem duas ilustrações para a Def. (4.4.2.1):

Exemplo: Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra de $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ com μ desconhecida e $\sigma \in \mathbb{R}^+$ conhecido. Suponha que $\mu^* \in \mathbb{R}$ tal que $\mu^* > \mu$ e seja

$$T(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \quad \text{como } x^t = (x_1, \ldots, x_n). \tag{123}$$

Assim:

$$\frac{L(\mu^*;x)}{L(\mu;x)} = \frac{\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\mu^*\sum_{i=1}^n x_i + n(\mu^*)^2\right)\right]}{\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\mu\sum_{i=1}^n x_i + n\mu^2\right)\right]} \tag{124}$$

$$= \exp\left[\frac{\mu^*-\mu}{\sigma^2}\sum_{i=1}^n x_i + \frac{n}{2\sigma^2}\left(\mu^2 - (\mu^*)^2\right)\right] = \exp\left[\frac{\mu^*-\mu}{\sigma^2}T(x) + \frac{n}{2\sigma^2}\left(\mu^2 - (\mu^*)^2\right)\right] \tag{125}$$

que é não decrescente em $T(x)$ para $\mu^* > \mu$. Logo $f(x;\mu)$ tem RVM.

Ex: Sejam $x_1, \ldots, x_n$ uma amostra de X tendo uma família de fdp (ou fmp)

$$g(x;\theta) = a(\theta) \cdot c(x) \cdot e^{t(x)\cdot b(\theta)}, \quad \text{para } t \in \mathbb{X} \subset \mathbb{R} \text{ e } \theta \in \Theta.$$

Para $\theta^*, \theta \in \Theta$ tal que $\theta^* \geq \theta$,

$$\frac{l(\theta^*;\mathbf{x})}{l(\theta;\mathbf{x})} = \frac{\prod_{i=1}^n g(x_i;\theta^*)}{\prod_{i=1}^n g(x_i;\theta)} = \frac{a^n(\theta^*)\prod_{i=1}^n c(x_i)\cdot\exp\left\{\sum_{i=1}^n t(x_i)b(\theta^*)\right\}}{a^n(\theta)\prod_{i=1}^n c(x_i)\cdot\exp\left\{\sum_{i=1}^n t(x_i)b(\theta)\right\}} \tag{126}$$

$$= \frac{a^n(\theta^*)}{a^n(\theta)} \cdot \exp\left\{\sum_{i=1}^n t(x_i)\left[b(\theta^*) - b(\theta)\right]\right\}.$$

Assim $\{g(x;\theta) : \theta \in \Theta\}$ tem RVM se $b(\theta)$ é não decrescente.
Exemplo (Poisson): Seja $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$, então

$$f(x;\lambda) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = e^{-\lambda} \cdot \frac{1}{x!} \cdot e^{x\log\lambda},$$

ou seja,

$$f(x;\lambda) = a(\lambda) \cdot c(x) \cdot e^{t(x)\cdot b(\lambda)},$$

onde $a(\lambda) = e^{-\lambda}$, $c(x) = \frac{1}{x!}$, $t(x) = x$ e $b(\lambda) = \log \lambda$.

Como $b(\lambda) = \log \lambda$ é uma função não decrescente em $\lambda > 0$, a família Poisson tem RVM.

Teorema (4.4.2.1) Teo. Karlin-Rubin

Assuma que se deseja testar:

$$H_0 : \theta \leq \theta_0, \quad H_1 : \theta > \theta_0 \tag{127}$$

Considere $T = T(X) \in \mathbb{R}$ (para $X^n : (x_1, \dots, x_n)$ como uma v.a.) como uma estatística suficiente para $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$.

Assuma que $\{g(t;\theta) : \theta \in \Theta\}$ é uma família de f.d.p (ou fmp) induzida de T com RVM. Então o teste Υ com função crítica:

$$\psi_\Upsilon(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } T(x) > k \\ 0, & \text{se } T(x) < k \end{cases} \tag{128}$$

corresponde a um teste UMP de nível α se k é escolhido tal que:

$$E_{\theta_0}[\psi_\Upsilon(x)] = \alpha \tag{129}$$

Q (4.12)

Sejam $X_1, \dots, X_n$ uma a.a. de $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ com $\mu \in \mathbb{R}$ desconhecida e $\sigma^2 \in \mathbb{R}$ conhecida. Encontre o teste UMP para:

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \mu > \mu_0, \quad \text{de nível } \alpha \tag{130}$$

Solução

Pelo LFN:

$$L(\mu; x) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\mu\sum_{i=1}^n x_i + n\mu^2\right)\right] \tag{131}$$

$$= \underbrace{(2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n x_i^2}}_{h(x)} \cdot \underbrace{\exp\left[-\frac{n}{2\sigma^2}\mu^2 + \frac{2\mu}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n x_i\right]}_{g(t;\mu) \text{ para } T(x)=\sum_{i=1}^n x_i} \tag{132}$$

$T(X) = \sum x_i$ é suficiente para μ e tem densidade induzida:

$$f(t;\mu) = (2\pi n\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2n\sigma^2}(t - n\mu)^2\right\} \tag{133}$$

e para $\mu^* > \mu$:

$$\frac{f(t;\mu^*)}{f(t;\mu)} = \exp\left\{\frac{1}{2n\sigma^2}\left[t^2 - 2nt\mu^* + n^2(\mu^*)^2 - t^2 + 2nt\mu - n^2\mu^2\right]\right\} \tag{134}$$

$$= \exp\left\{\frac{1}{2n\sigma^2}\left[2nt(\mu - \mu^*) + n^2\left((\mu^*)^2 - \mu^2\right)\right]\right\} \tag{135}$$

que é não decrescente em termos de t, e portanto $\{f(t;\mu) : \mu \in \mathbb{R}\}$ tem RVM.

Pelo Teo K.R., o teste Υ com função crítica:

$$\psi_{\Upsilon}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } T(x) > k, \\ 0, & \text{se } T(x) < k \end{cases} \quad \text{com} \quad E_{\theta_0}\left[\psi_{\Upsilon}(x)\right] = \alpha \tag{136}$$

ou equivalentemente:

$$\psi_{\Upsilon}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } \sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sigma} > z_{\alpha}, \\ 0, & \text{se } \sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sigma} < z_{\alpha} \end{cases} \tag{137}$$

4.5 Teste para H_1 composta bilateral

Considere testar:

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \theta \neq \theta_0 \tag{138}$$

Para θ fixado. Existe teste UMP?
Sim em algumas situações e não em outras.
Vamos considerar dois exemplos.

Ex. Para $X_1, \ldots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} X \sim N(\mu, \sigma^2)$ com $\mu \in \mathbb{R}$ desconhecido e σ^2 conhecido. Para

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \mu \neq \mu_0 \tag{139}$$

não existe teste UMP.

Ex. Para $X_1, \ldots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} X \sim U(0, \theta)$. Há um teste UMP para

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \theta \neq \theta_0 \tag{140}$$

4.5.1 Exemplo de não existência do teste UMP

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra de $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ com $\mu \in \mathbb{R}$ desconhecido e $\sigma^2 > 0$ conhecido. Como discutido,

$$T(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \tag{141}$$

é suficiente para μ.

Considere testar:

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \mu \neq \mu_0 \tag{142}$$

Admita que existe o teste UMP se quiséssemos testar:

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \mu > \mu_0 \tag{143}$$

Prova-se que o seguinte teste é UMP para $\alpha \in (0,1)$ nível nominal α tal que:

$$\psi_\Upsilon(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } \sqrt{n}\frac{(\bar{X}_n - \mu_0)}{\sigma} > z_\alpha \\ 0, & \text{o.c.} \end{cases}$$

Por outro lado, para testar $H_0 : \mu = \mu_0$ vs $H_1 : \mu < \mu_0$, vale-se o seguinte argumento, para $\mu^* < \mu$:

$$\frac{f(t; \mu^*)}{f(t; \mu)} = \exp\left\{ \frac{1}{2n\sigma^2} \left[2nt(\mu^* - \mu) + n^2(\mu^{*2} - \mu^2) \right] \right\}$$

Tem RVM não crescente, então o seguinte teste de nível α é UMP.

Pelo teorema KR, ψ_Υ tal que

$$\psi_\Upsilon(x) = \begin{cases} 1, & \sqrt{n}\frac{(\bar{X}_n - \mu_0)}{\sigma} < -z_\alpha \\ 0, & \sqrt{n}\frac{(\bar{X}_n - \mu_0)}{\sigma} \geq -z_\alpha \end{cases}$$

Suponha que x é uma amostra tal que a estatística calculada

$$z_{\text{cal}} = \sqrt{n}\frac{(\bar{X}_n - \mu_0)}{\sigma}$$

não excede $-z_\alpha$.

Então $\psi_\Upsilon(x) = 0$ e $\psi_\Upsilon(x) = 1$ e, portanto, $\psi_\Upsilon(x)$ fica indefinido.

4.5.2 Exemplo de existência do teste UMP

Sejam $x_1, \ldots, x_n$ uma amostra de $X \sim U(0, \theta)$, com $\theta > 0$ desconhecido. Note que $T(x) = X_{(n)}$ para $x = (x_1, \ldots, x_n)$ é suficiente para θ e tem densidade dada por

$$f(t; \theta) = n\, t^{n-1}\, \theta^{-n}\, I_{(0,\theta)}(t) \tag{144}$$

e para $\theta^*, \theta^* > 0$ tal que $\theta^* > \theta$:

$$\frac{f(t;\theta^*)}{f(t;\theta)} = \left(\frac{\theta}{\theta^*}\right)^n \frac{I_{(0,\theta^*)}}{I_{(0,\theta)}} \tag{145}$$

tem razão de verossimilhança monotônica não decrescente.
Assim, do TKR, o seguinte teste é UMP para:

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \theta > \theta_0$$

Tal que (para x) como uma amostra:

$$\psi_k(x) = \begin{cases} 1, & T(x) > k \\ 0, & T(x) \leq k \end{cases}$$

em que k é tal que:

$$\alpha = \mathbb{E}_{\theta_0}\left[\psi_k(x)\right] = P_{\theta_0}\left(T(x) > k\right) \tag{146}$$

$$\alpha = \int_k^{\theta_0} n\, t^{n-1}\, \theta_0^{-n}\, dt = \left[\frac{t^n}{\theta_0^n}\right]_k^{\theta_0} \tag{147}$$

$$= \frac{\theta_0^n - k^n}{\theta_0^n} = 1 - \frac{k^n}{\theta_0^n} \tag{148}$$

Portanto:

$$\frac{k}{\theta_0} = (1-\alpha)^{1/n} \quad \Rightarrow \quad k = \theta_0(1-\alpha)^{1/n} \tag{149}$$

Considere o problema de derivar o teste UMP de nível α para $H_0 : \theta = \theta_0$ e $H_1 : \theta \neq \theta_0$.
Primeiramente, mostremos que algum teste ψ^* com $\psi^*(x)$ tal que

i) $E_{\theta_0}\{\psi^*(x)\} = \alpha$

ii) $E_{\theta}\{\psi^*(x)\} \leq \alpha \quad$ para $\quad \theta \leq \theta_0$

iii) $\psi^*(x) = 1 \quad$ se $\quad T(x) > \theta \quad$ são satisfeitas

é um teste UMP de nível α para $H_0 : \theta \leq \theta_0$ e $H_1 : \theta \geq \theta_0$.
Pelo teorema K-R, ψ^* para H_0 e H_1 tem função crítica

$$\psi^*(x) = \begin{cases} 1, & T(x) > \theta_0(1-\alpha)^{1/n} \\ 0, & T(x) < \theta_0(1-\alpha)^{1/n} \end{cases} \tag{150}$$

Daí, a função poder associada é

$$\beta_{\psi^*}(\theta) = E_\theta\{\psi^*(x)\} = P_\theta\left(T(x) > \theta_0(1-\alpha)^{1/n}\right) \tag{151}$$

$$= \int_{\theta_0(1-\alpha)^{1/n}}^{\theta} n \cdot t^{n-1}\theta^{-n}\, dt \tag{152}$$

$$= \frac{n}{\theta^n}\left[\frac{t^n}{n}\right]_{\theta_0(1-\alpha)^{1/n}}^{\theta} \tag{153}$$

$$-\frac{1}{\theta^n}\left[\theta^n - \theta_0^n(1-\alpha)\right] = 1-(1-\alpha)\left(\frac{\theta_0}{\theta}\right)^n \quad (4.5.2.1) \tag{154}$$

Vamos a completar a função poder de ψ^* e mostrar que coincide com (4.5.2.1).
Defina

$$g(t) = \mathbb{E}\left[\psi^*(x) \mid T(x) = t\right]$$

que não depende de θ pois $t(x)$ é suficiente para θ. Assim,

$$\alpha = \mathbb{E}_{\theta_0}\left\{\psi^*(x)\right\} = \mathbb{E}_{\theta_0}\left\{\mathbb{E}\left[\psi^*(x) \mid T\right]\right\} = \mathbb{E}_{\theta_0}\left\{g(T)\right\}.$$

Note que $\psi^*(x) = 1$ para $t > \theta_0$ implica em $g(t) = 1$ se $t > \theta_0$.
Assim, para $\theta > \theta_0$,

$$\mathbb{E}_\theta\left\{\psi^*(x)\right\} = \int_0^{\theta_0} g(t)\, n\, t^{n-1}\theta^{-n}\, dt + \int_{\theta_0}^{\theta} g(t)\, n\, t^{n-1}\theta^{-n}\, dt \tag{155}$$

$$= \left(\frac{\theta_0}{\theta}\right)^n \int_0^{\theta_0} g(t)\, n\, t^{n-1}\theta_0^{-n}\, dt + \int_{\theta_0}^{\theta} n\, t^{n-1}\theta^{-n}\, dt \tag{156}$$

Uma vez que $g(t) = 1$ para $t \geq \theta_0$:

$$\left(\frac{\theta_0}{\theta}\right)^n \alpha + \left[\left(\frac{\theta}{\theta}\right)^n - \left(\frac{\theta_0}{\theta}\right)^n\right] = \left(\frac{\theta_0}{\theta}\right)^n \alpha + 1 - \left(\frac{\theta_0}{\theta}\right)^n = 1-(1-\alpha)\left(\frac{\theta_0}{\theta}\right)^n \tag{157}$$

Pois, $\varphi_n^*(.)$ e $\varphi_n^*(-)$ são de teste UMP para $H_0 \times H_1$.
Agora estamos em posição de provar o seguinte resultado.
Teorema (4.5.1)
Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra de $X \sim U(0,\theta)$. Considere testar $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta \neq \theta_0$, tal que $\theta_0 > 0$ é fixado.
O teste φ com FC

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } T(x) > \theta_0 \text{ ou } T(x) \leq \theta_0\alpha^{1/n} \\ 0, & \text{o.c.} \end{cases} \tag{158}$$

é UMP.
Prova:
Como

$$P_{\theta_0}[T(x) \geq \theta_0] = 0 \tag{159}$$

$$E_{\theta_0}[\varphi_n(x)] = P_{\theta_0}[T(x) \leq \theta_0\alpha^{1/n}] \tag{160}$$

$$= \int_0^{\theta_0 \alpha^{1/n}} n \cdot t^{n-1} \cdot \theta_0^{-n} \, dt \tag{161}$$

$$= \frac{\theta_0 \alpha^{1/n \cdot n}}{\theta_0^n} - \alpha \tag{162}$$

10/11/25

Pelo teorema K.R., um teste UMP para $H_0 : \theta = \theta_0$ x $H_1 : \theta < \theta_0$ tem região crítica dada por

$$\psi_{\gamma^{**}}(x) = \begin{cases} 1, & T(x) < \theta_0 \, \alpha^{1/n} \\ 0, & T(x) > \theta_0 \, \alpha^{1/n} \end{cases} \tag{163}$$

Ambos testes γ e γ^{**} coincidem e portanto γ é UMP de nível α para testar H_0 x H_1.

Resumo e Consolidação: Capítulo 4 - Teste de Hipóteses

Visão Geral

Este capítulo apresentou a teoria fundamental de testes de hipóteses, uma das principais ferramentas da inferência estatística. A seguir, consolidamos os principais conceitos, resultados teóricos e suas conexões.

1. Conceitos Fundamentais e Terminologia

Tabela 1: Terminologia Básica em Testes de Hipóteses

Conceito	**Definição/Interpretação**
Hipótese nula (H_0)	Afirmação a ser testada (status quo)
Hipótese alternativa (H_1)	Afirmação rival a H_0
Região crítica (R_c)	Conjunto de valores amostrais que levam à rejeição de H_0
Estatística de teste	Função dos dados usada para decidir sobre H_0
Erro Tipo I	Rejeitar H_0 quando é verdadeira
Erro Tipo II	Não rejeitar H_0 quando é falsa
Nível de significância (α)	Probabilidade máxima do Erro Tipo I
Tamanho do teste	Probabilidade do Erro Tipo I: $\sup_{\theta \in \Theta_0} P_\theta(X \in R_c)$
Função poder $Q_\Upsilon(\theta)$	$P_\theta(\text{Rejeitar } H_0) = P_\theta(X \in R_c)$
p-valor	Menor nível α para o qual H_0 seria rejeitada

2. Classificação de Hipóteses

Tabela 2: Tipos de Hipóteses Estatísticas

Tipo	**Forma**	**Exemplo**
Simples	Especifica completamente θ	$H_0 : \theta = \theta_0$
Composta unilateral	Um intervalo semi-infinito	$H_0 : \theta \leq \theta_0$ ou $H_0 : \theta \geq \theta_0$
Composta bilateral	Dois intervalos ou um intervalo	$H_0 : \theta \neq \theta_0$ ou $H_0 : \|\theta - \theta_0\| > c$

3. Teoremas Fundamentais e Suas Aplicações

4. Estatísticas de Teste Clássicas

5. Estratégias para Resolução de Problemas

Etapa 1: Formulação do Problema

- Identifique o parâmetro de interesse θ
- Formule claramente H_0 e H_1
- Determine o nível de significância α (geralmente 0.05, 0.01 ou 0.10)
- Classifique as hipóteses (simples, composta unilateral ou bilateral)

Tabela 3: Principais Resultados Teóricos

Teorema/Lema	**Quando Aplicar**	**Resultado Principal**
Lema de Neyman-Pearson (LNP)	$H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta = \theta_1$ (simples vs simples)	O teste MP rejeita H_0 quando $\frac{L(\theta_1;x)}{L(\theta_0;x)} > k$, onde k é determinado por α
Teorema de Karlin-Rubin	$H_0 : \theta \leq \theta_0$ vs $H_1 : \theta > \theta_0$ com RVM	Se $T(X)$ é suficiente com RVM, o teste UMP rejeita quando $T(X) > k$
Testes UMPNV	$H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta \neq \theta_0$ (bilateral)	Para famílias com RVM, testes baseados em $\lvert T(X)-c \rvert$ podem ser UMPNV

Tabela 4: Principais Estatísticas de Teste e Suas Condições de Uso

Teste	**Suposições**	**Estatística**	**Distribuição sob** H_0
Teste Z	$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 conhecida	$Z = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	$N(0, 1)$
Teste t	$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 desconhecida	$T = \frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$	t_{n-1}
Teste χ^2	$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, teste para σ^2	$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$	χ^2_{n-1}
Teste F	$X_i \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$, $Y_j \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$	$F = \frac{S_X^2}{S_Y^2}$	F_{n_1-1,n_2-1}

Etapa 2: Escolha do Método de Teste

- Para hipóteses simples vs simples $\rightarrow$ Use o LNP
- Para hipóteses compostas unilaterais com RVM $\rightarrow$ Use Karlin-Rubin
- Para hipóteses bilaterais $\rightarrow$ Considere testes UMPNV ou teste da razão de verossimilhança
- Para modelos específicos (Normal, Bernoulli, Poisson, etc.) $\rightarrow$ Use testes clássicos conhecidos

Etapa 3: Cálculo da Estatística de Teste

- Identifique ou construa uma estatística suficiente
- Determine sua distribuição sob H_0
- Calcule o valor observado da estatística (valor calculado)

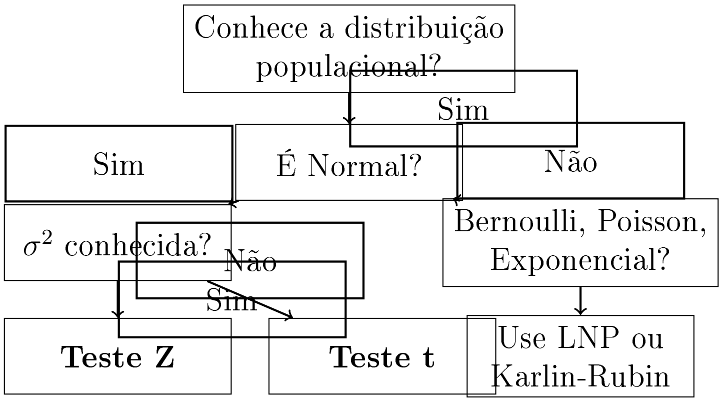
Etapa 4: Tomada de Decisão

- **Método do Valor Crítico:** Compare a estatística calculada com o valor crítico tabelado
- **Método do p-valor:** Calcule $p = P_{H_0}(T \geq T_{\text{obs}})$ e rejeite se $p < \alpha$

Etapa 5: Interpretação

- Se rejeitamos H_0: Há evidência estatística significativa contra H_0 ao nível α
- Se não rejeitamos H_0: Não há evidência suficiente para rejeitar H_0 (não significa que H_0 é verdadeira!)
- Considere sempre o poder do teste e o tamanho da amostra

6. Fluxograma de Decisão para Escolha do Teste



7. Conexões Entre os Conceitos

Relação entre Estatísticas Suficientes e Testes Ótimos

- O LNP garante que testes MP dependem apenas de estatísticas suficientes
- A suficiência reduz a dimensionalidade do problema sem perda de informação
- Para família exponencial: estatística suficiente $\Rightarrow$ RVM $\Rightarrow$ teste UMP via Karlin-Rubin

Função Poder e Comparação de Testes

- $Q_\Upsilon(\theta) = 1 - \beta(\theta)$ para $\theta \in \Theta_1$
- Teste A é melhor que teste B se $Q_A(\theta) \geq Q_B(\theta)$ para todo $\theta \in \Theta_1$
- MP $\Rightarrow$ UMP $\Rightarrow$ UMPNV (ordem decrescente de otimalidade)

Trade-off entre Erros Tipo I e II

- Fixado n: diminuir α aumenta β, e vice-versa
- Para reduzir ambos simultaneamente: aumentar n (tamanho amostral)
- O poder aumenta com: maior n, maior α, maior distância entre θ_0 e θ_1

8. Tabela de Referência Rápida: Distribuições e RVM

Tabela 5: Distribuições Comuns e Propriedade RVM

Distribuição	Parâmetro	Possui RVM?
Normal $N(\mu, \sigma^2)$	μ (σ^2 conhecida)	Sim
Normal $N(\mu, \sigma^2)$	σ^2 (μ conhecida)	Sim
Bernoulli(p)	p	Sim
Poisson(λ)	λ	Sim
Exponencial(θ)	θ	Sim
Gamma(α, β)	α ou β (outro fixo)	Sim
Uniforme($0, \theta$)	θ	Não (mas tem teste UMP)

9. Checklist de Verificação

Ao resolver um problema de teste de hipóteses, verifique:

- ☐ As hipóteses H_0 e H_1 são mutuamente exclusivas e exaustivas?
- ☐ O nível de significância α foi especificado?
- ☐ As suposições do modelo foram verificadas (normalidade, independência, etc.)?
- ☐ A estatística de teste tem distribuição conhecida sob H_0?
- ☐ A região crítica foi determinada corretamente (unilateral ou bilateral)?
- ☐ O valor calculado da estatística foi comparado corretamente com o valor crítico?
- ☐ A conclusão foi expressa no contexto do problema?
- ☐ Considerou-se o poder do teste e o tamanho amostral?

10. Conclusão

O Capítulo 4 apresentou um arcabouço completo e rigoroso para testes de hipóteses, desde os conceitos fundamentais até os métodos mais sofisticados. Os principais aprendizados são:

- A teoria de Neyman-Pearson fornece critérios objetivos para construir testes ótimos
- O conceito de poder é fundamental para avaliar a qualidade de um teste
- Propriedades da distribuição (RVM, suficiência) levam a testes ótimos
- Testes clássicos (Z, t, χ^2, F) são casos especiais de princípios gerais
- A interpretação correta requer compreensão tanto dos aspectos técnicos quanto filosóficos

Recomendação de Estudo: Para dominar este capítulo, é essencial:

1. Resolver muitos exercícios, começando pelos exemplos do texto
2. Entender as provas dos teoremas principais (LNP e Karlin-Rubin)
3. Praticar a interpretação de resultados no contexto de problemas reais
4. Comparar diferentes testes para o mesmo problema
5. Usar simulações para visualizar funções poder e distribuições das estatísticas de teste