Unidade 2 - Compilação Completa

Convergência Estocástica e Resultados Limite

Curso de Inferência Estatística

Outubro 2025

Sumário

13♡10♡25

- Revisão: James Baxly.
3.7(a) Revisão de Convergência Estocástica
3.7.1(a) Alguns resultados limites

$$(R.1) \quad \lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1, \tag{1}$$

$$(R.2) \quad \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e, \tag{2}$$

$$(R.3) \quad \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x. \tag{3}$$

Exemplo: Uma ilustração do uso destes resultados é a aproximação da Binomial para Poisson: Seja $X \sim \text{Binomial}(n, p_n)$ tal que $p_n = \frac{\lambda}{n} \in (0,1)$, então

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k} \tag{4}$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!\,k!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \tag{5}$$

$$= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \tag{6}$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} \left(\frac{n-j}{n}\right) \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right) \tag{7}$$

e, portanto, ...

$$\lim_{n\to\infty} p(X = k) = \lim_{n\to\infty} \prod_{i=0}^{k-1} \left(1 - \frac{i}{n}\right) \tag{8}$$

(1(R2))

$$e \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \times \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \times \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k}$$

$$\frac{\lambda^k}{k!} \quad e^{-\lambda} \quad (1(\text{R3})) \quad (1(\text{R2}))$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad \text{isto é } X \overset{n\to\infty}{\sim} \text{Poisson}(\lambda)$$

3.7.2 (O) e (o) para sequências de números reais

Sejam $\{a_n, n \geq 1\}$ e $\{b_n, n \geq 1\}$ duas sequências de números reais. Os seguintes conceitos são importantes:

$$a_n = O(b_n) \quad \text{se e só se} \quad \exists k > 0,\, n_0 \in \mathbb{N}(k) : \frac{|a_n|}{|b_n|} \leq k, \quad \forall n \geq n_0$$

isto é, se $|a_n/b_n|$ é limitada para n suficientemente grande. Em particular:

$$a_n = O(1) \quad \text{implica} \quad \exists k > 0,\, n_0 : |a_n| \leq k, \quad \forall n \geq n_0$$

Ex: $10n^2 + n = O(n^2)$ pois

$$\frac{10n^2 + n}{n^2} = 10 + \frac{1}{n} \leq 11, \quad \forall n \geq 1$$

$$10 + \frac{1}{1} = 11, \quad 10 + \frac{1}{2} = 10.5, \quad 10 + \frac{1}{3} \approx 10.333$$

Ex: $n^2 = O(6n^2 + n)$ pois

$$\frac{n^2}{6n^2 + n} = \frac{1}{6 + n^{-1}} \leq \frac{1}{6}, \quad \forall n \geq 1 \tag{9}$$

$$\frac{n^2}{6n^2 + n} = \frac{1}{6 + n^{-1}} \leq \frac{1}{6 + (1)^{-1}} = \frac{1}{7}$$

$a_n = \theta(b_n)$ se, sse, $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\varepsilon) : \frac{a_n}{b_n} \leq \varepsilon$, $\forall n \geq n_0$, isto é, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$. Em particular, $a_n = \theta(1)$ implica que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \tag{10}$$

Ex: $n = \theta(n^2)$ pois

$$\frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \tag{11}$$

Ex: $n^{-1} = \theta(1)$ pois

$$\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \tag{12}$$

Teorema (Extra 1) [Propriedades de $O(\cdot)$ e $\theta(\cdot)$]
Sejam $\{a_n, n \geq 1\}$, $\{b_n, n \geq 1\}$, $\{c_n, n \geq 1\}$ e $\{d_n, n \geq 1\}$ sequências de números reais, valem-se:

(i) Se $a_n = O(b_n)$, então $a_n = o(b_n)$.

(ii) Se $a_n = O(b_n)$ e $c_n = O(d_n)$, então ...

$$O(b_n)O(d_n)$$

<iii.1> $\quad a_n \cdot c_n = O(b_n \cdot d_n)$
<iii.2> $\quad |a_n|^5 = O(|b_n|^5)$
<iii.3> $\quad a_n + c_n = O\left(\max\{|b_n|, |d_n|\}\right), \quad$ em que $r > 0$
(iii) Se $a_n = \Theta(b_n)$ e $c_n = \Theta(d_n)$, então
<iii.1> $\quad a_n \cdot c_n = \Theta(b_n \cdot d_n)$
<iii.2> $\quad |a_n|^5 = \Theta(|b_n|^5)$

<iii.3> $a_n + c_n = \Theta\left(\max\{|b_n|, |d_n|\}\right)$
(iv) Se $a_n = O(b_n)$ e $c_n = \Theta(d_n)$, então

$$a_n \cdot c_n = \Theta(b_n \cdot d_n)$$

(v) Se $a_n = O(b_n)$ e $b_n = \Theta(c_n)$, $O(\Theta(c_n)) = \Theta(c_n)$

$$a_n = \Theta(c_n)$$

Exemplo:

$$O(n^{-1/3}) + O(n^{-1/2}) \overset{\text{iii.3}}{=} O\left(\max\{n^{-1/3}, n^{-1/2}\}\right) = O(n^{-1/3})$$

Exemplo:

$$\begin{aligned} O(1) + O(n^{-1/3}) + O(n^{-1/2}) &= O(1) + O(n^{-1/3}) \\ &\overset{\text{iii.3}}{=} \Theta(1) + O(\Theta(1)) \overset{\text{v}}{=} \Theta(1) + \Theta(1) \\ &\overset{\text{iii}}{=} \Theta(1) \end{aligned}$$

3.7.3 (2) O(·) e o(·) para função reais de valor real

$$\Rightarrow f(x) = O(g(x)) \quad \text{quando} \quad x \to x_0 \quad \text{se, e só se}$$
$$\forall k > 0,\ \exists \varepsilon > 0 : \ \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leq k,\ \forall x,\ |x - x_0| < \varepsilon$$
$$x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$$

$$\Rightarrow f(x) = O(g(x)) \quad \text{quando} \quad x \to \infty\ (-\infty) \quad \text{se, e só se}$$
$$\forall k > 0,\ \exists M > 0\ (M > 0) : \ \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leq k,\ \forall x > M\ (\forall x < M)$$

Ex: $8x^2 = O(x^2)$ quando $x \to \infty$ pois

$$\frac{8x^2}{x^2} = 8$$

$$\Rightarrow f(x) = o(g(x)) \quad \text{quando} \quad x \to x_0 \quad \text{se, e só se}$$
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : \ \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < \varepsilon,\ \forall x,\ |x - x_0| < \delta$$
$$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

$$\Rightarrow f(x) = o(g(x)) \quad \text{quando} \quad x \to \infty\ (-\infty) \quad \text{se, e só se}$$
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists M > 0\ (M > 0) : \ \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < \varepsilon,\ \forall x > M\ (\forall x < M)$$

Ex: $8x^2 \neq o(x^2)$ pois

$$\frac{8x^2}{x^2} \xrightarrow{x \to \infty} 8$$

Ex: $8x^2 = o(x^3)$ pois

$$\frac{8x^2}{x^3} = \frac{8}{x} \xrightarrow{x\to\infty} 0$$

Pode-se mostrar que se $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função derivável até a ordem n em um ponto x_0, sua expansão em série de Taylor em torno de x_0 pode ser escrita como: Quando $x \to x_0$,

$$F(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{F^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o\left((x - x_0)^n\right) \qquad \text{(Extra 1)}$$

Em que $F^{(k)}$ é a derivada de ordem k de $F(\cdot)$.
Ex: Mostre que

$$\log(1 + x) \cdot e^x = x + O(x^2), \quad \text{quando } x \to 0 \tag{13}$$

Solução: Note que, de (Extra 1), valem-se

$$e^x = e^0 + x + o(x) = 1 + x + O(x^2) \tag{14}$$

e

$$\log(1 + x) = \log(1) + \frac{1}{1 + x}\left[x + o(x)\right]_{x\to 0} = x + O(x^2) \tag{15}$$

Logo,

$$e^x \log(1 + x) = \left[1 + x + O(x^2)\right]\left[x + O(x^2)\right] \tag{16}$$

$$= \left[1 + x + O(x^2)\right] x + \left[1 + x + O(x^2)\right] O(x^2) \tag{17}$$

$$= x + x^2 + x \cdot O(x^2) + O(x^2) + x \cdot O(x^2) + O(x^2) \cdot O(x^2) \tag{18}$$

$$= x + x^2 + O(x^3) + O(x^2) + O(x^3) + O(x^4) \tag{19}$$

$$= x + x^2 + O(x^2) + O(x^3) + O(x^4) \tag{20}$$

$$= x + x^2 + O(x^2) = x + O(x^2) + O(x^2) \tag{21}$$

$$= x + O(x^2) \tag{22}$$

3.7.4(a) Convergência em Probabilidade

Definições (3.7.4.1(a)) Considere uma sequência de v.a.'s de valores reais $\{U_n, n \geq 1\}$. U_n converge em probabilidade a um número u para $n \to \infty$ se, e só se:

$$P\left(|U_n - u| \geq \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \quad \forall \varepsilon > 0. \tag{23}$$

Este caso é denotado como:

$$U_n \xrightarrow{P} u \tag{24}$$

15/10/25

Definição 3.7.42(a)

Sejam $\{U_n, n \geq 1\}$ uma sequência de v.a.'s e U uma v.a.

$$U_n \xrightarrow{P} U \text{ se e só se } U_n - U \xrightarrow{P}_{n\to\infty} 0.$$

Resultado 1P: Versão simples da Lei fraca dos grandes números

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com $\mathbb{E}(X_i) = \mu < \infty$ e $\mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2 < \infty$. Então:

$$\overline{X}_n \xrightarrow{P}_{n\to\infty} \mu.$$

Prova

Para um $\varepsilon > 0$ qualquer, pela desigualdade de Tchebysheff:

$$\begin{aligned} P\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| \geq \varepsilon\right) &= P\left(\left(\overline{X}_n - \mu\right)^2 \geq \varepsilon^2\right) \\ &\leq \varepsilon^{-2}\,\mathbb{E}\left[\left(\overline{X}_n - \mu\right)^2\right] \\ &= \frac{\sigma^2}{n\,\varepsilon^2} \xrightarrow{P}_{n\to\infty} 0. \end{aligned} \tag{25}$$

Logo,

$$\overline{X}_n \xrightarrow{P}_{n\to\infty} \mu.$$

Questão (extra 1)

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.a.'s com $\mu < \infty$ e $\sigma^2 < \infty$. Mostre que:

$$S_n^2 \xrightarrow{P}_{n\to\infty} \sigma^2.$$

Solução Note que

$$S_n^2 = (n-1)^{-1} \sum_{i=2}^{n} Y_i^2 \quad \text{para} \quad Y_i \sim N(0, \sigma^2), \tag{26}$$

em que $Y_1, \ldots, Y_n$ são v.a.'s de Helmert.

Além disso,

$$\mathrm{Var}(Y_i^2) = \mathbb{E}[Y_i^4] - \mathbb{E}^2[Y_i^2] \tag{27}$$

$$= 3\sigma^4 - \sigma^4 = 2\sigma^4 < \infty, \quad \text{uma vez que:} \tag{28}$$

Como

$$M_{Y_i^2}(t) = e^{\frac{t^2\sigma^2}{2}} \tag{29}$$

$$\left.\frac{dM_{Y_i^2}(t)}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{d}{dt} e^{\frac{t^2\sigma^2}{2}}\right|_{t=0} = \left. t\sigma^2 e^{\frac{t^2\sigma^2}{2}}\right|_{t=0} = 0 = \mathbb{E}(Y_i) \tag{30}$$

$$\left.\frac{d^2 M_{Y_i^2}(t)}{dt^2}\right|_{t=0} = t^2\sigma^4 e^{\frac{t^2\sigma^2}{2}} + \sigma^2 e^{\frac{t^2\sigma^2}{2}}\Big|_{t=0} = \sigma^2 = \mathbb{E}(Y_i^2) \tag{31}$$

$$\left.\frac{d^3 M_{Y_i^2}(t)}{dt^3}\right|_{t=0} = t^3\sigma^6 e^{\frac{t^2\sigma^2}{2}} + 2t\sigma^4 e^{\frac{t^2\sigma^2}{2}} + t\sigma^4 e^{\frac{t^2\sigma^2}{2}}\Big|_{t=0} = 0 = \mathbb{E}(Y_i^3) \tag{32}$$

$$\begin{aligned}\left.\frac{d^4 M_{Y_i^2}(t)}{dt^4}\right|_{t=0} &= t^4\sigma^8 e^{\frac{t^2\sigma^2}{2}} + 3t^2\sigma^6 e^{\frac{t^2\sigma^2}{2}} \\ &\quad + 2t^2\sigma^6 e^{\frac{t^2\sigma^2}{2}} + 2\sigma^4 e^{\frac{t^2\sigma^2}{2}} + t^2\sigma^6 e^{\frac{t^2\sigma^2}{2}} + \sigma^4 e^{\frac{t^2\sigma^2}{2}}\Big|_{t=0} \\ &= 3\sigma^4 = \mathbb{E}(Y_i^4)\end{aligned} \tag{33}$$

Note que S_n^2 tem uma representação de média amostral, então pelo resultado 1P,

$$S_n^2 = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i^2}{n-1} \xrightarrow{P} \mathbb{E}[Y_i^2] = \sigma^2 \tag{34}$$

Resultado 2P: Sejam $\{T_n, n \geq 1\}$ uma sequência de variáveis reais tais que para algum $r \geq 0$ e $a \in \mathbb{R}$ vale-se que

$$\mathbb{E}_{g_n} = \mathbb{E}\left[|T_n - a|^r\right] \xrightarrow{n\to\infty} 0, \quad \text{então} \tag{35}$$

$$T_n \xrightarrow{P}_{n\to\infty} a \tag{36}$$

Prova: Para qualquer $\varepsilon > 0$, por usar a desigualdade de Markov:

$$P\{|T_n - a| \geq \varepsilon\} = P\{|T_n - a|^r \geq \varepsilon^r\} \tag{37}$$

$$\leq \frac{\mathbb{E}[|T_n - a|^r]}{\varepsilon^r} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \tag{38}$$

Logo,

$$T_n \xrightarrow{P}_{n\to\infty} a \tag{39}$$

Questão (Ex. 2)

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.a.'s para $\theta > 0$. Mostre que

$$T_n = X_{(n)} \xrightarrow{p} \theta. \tag{40}$$

Solução

Note que

$$F_{T_n}(t) = [F_{X_{(1)}}(t)]^n \quad \text{e} \quad F_{T_n}(t) = n[F_{X_{(1)}}(t)]^{n-1} f_{X_{(1)}}(t) \tag{41}$$

e como

$$F_{X_{(1)}}(t) = \frac{t}{\theta}\, I_{(0,\theta)}(t) + I_{(\theta,\infty)}(t) \tag{42}$$

e

$$f_{X_{(1)}}(t) = \frac{1}{\theta}\, I_{(0,\theta)}(t), \tag{43}$$

temos

$$F_{T_n}(t) = \frac{t}{\theta^n} t^{n-1} I_{(0,\theta)}(t) + I_{(\theta,\infty)}(t) \tag{44}$$

e

$$f_{T_n}(t) = \frac{n}{\theta^n} t^{n-1} I_{(0,\theta)}(t). \tag{45}$$

As seguintes expressões tipo momento podem ser derivadas:

$$E[T_n] = \int_0^\theta t \cdot \frac{n}{\theta^n} t^{n-1} \, dt \tag{46}$$

$$= \frac{n}{\theta^n} \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^\theta = \frac{n}{n+1} \theta. \tag{47}$$

$$E[T_n^2] = \int_0^\theta t^2 \cdot \frac{n \cdot t^{n-1}}{\theta^n} \, dt \tag{48}$$

$$= \frac{n}{\theta^n} \left[\frac{t^{n+2}}{n+2} \right]_0^\theta = \frac{n}{n+2} \theta^2 \tag{49}$$

$$E[(T_n - \theta)^2] = E[T_n^2] - 2\theta E[T_n] + \theta^2 \tag{50}$$

$$= \frac{n}{n+2}\theta^2 - \frac{2n}{n+1}\theta^2 + \theta^2 \tag{51}$$

$$= \theta^2 \left\{ \frac{n}{n+2} - \frac{2n}{n+1} + 1 \right\} \tag{52}$$

$$= \theta^2 \left\{ \frac{n^2 + n - 2n^2 - 4n + n^2 + 3n + 2}{(n+2)(n+1)} \right\} \tag{53}$$

$$= \frac{2\theta^2}{(n+2)(n+1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \tag{54}$$

Logo, pelo resultado 2p:

$$T_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} \theta \tag{55}$$

Resultado 3P (Lei fraca dos grandes números de Khinchine)

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.a.'s reais i.i.d. com

$$E[X_i] = \mu < \infty, \quad \text{Então} \quad \overline{X}_n \xrightarrow{P}_{n\to\infty} \mu \tag{56}$$

Prova

Sejam $M_{\overline{X}_n}(t)$ e $M_{X_i}(t)$ f.m.g. de $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ e X_i, respectivamente. Logo, para $t \in \mathbb{R}$, vale-se:

$$M_{\overline{X}_n}(t) = M_{\frac{S_n}{n}}(t) \overset{\text{p.v.}}{=} \prod_{i=1}^n M_{X_i}\left(\frac{t}{n}\right) \tag{57}$$

$$= \left[M_{X_1}\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n \tag{3P.1}$$

Expandindo em série de Taylor $M_{X_1}\left(\frac{t}{n}\right)$ em torno de zero (dado que $M_{X_1}(0) = 1$ e $M'_{X_1}(0) = \mu$) até a 1ª ordem, tem-se:

$$M_{X_1}\left(\frac{t}{n}\right) = M_{X_1}(0) + M'_{X_1}(0)\frac{t}{n} + o\left(\frac{t}{n}\right) \tag{58}$$

$$= 1 + \mu\frac{t}{n} + o\left(\frac{t}{n}\right) \tag{59}$$

Daí, usando resultado limite (R.3):

$$\left(1 + \frac{k}{n}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} e^k \tag{60}$$

$$M_{\overline{X}_n}(t) = \left[1 + \frac{\mu t}{n} + o\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n \xrightarrow{n\to\infty} e^{t\mu} = M_\mu(t) \tag{61}$$

Como a variável limite é degenerada em

$$\mu, \quad \overline{X}_n \xrightarrow{P}_{n\to\infty} \mu \tag{62}$$

Resultado 4P Sejam $\{U_n, n \geq 1\}$ e $\{V_n, n \geq 1\}$ duas sequências de v.a.'s tais que

$$U_n \xrightarrow{P}_{n\to\infty} u \quad \text{e} \quad V_n \xrightarrow{P}_{n\to\infty} v \tag{63}$$

então:

(i) $U_n + V_n \xrightarrow{P}_{n\to\infty} u + v$

(ii) $U_n \cdot V_n \xrightarrow{P}_{n\to\infty} u \cdot v$

(iii) $\frac{U_n}{V_n} \xrightarrow{P}_{n\to\infty} \frac{u}{v}$ se $P(V_n = 0) = 0$, $\forall n$, e $v \neq 0$

(Extra 3) Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. tais que $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ para $\mu, \sigma^2 < \infty$. Mostre que:

$$\frac{\overline{X}_n}{S_n^2} \xrightarrow{P}_{n\to\infty} \frac{\mu}{\sigma^2} \tag{64}$$

Solução: Pelo resultado 1P,

$$\overline{X}_n \xrightarrow{P}_{n\to\infty} \mu \quad \text{e} \quad S_n^2 \xrightarrow{P}_{n\to\infty} \sigma^2 \tag{65}$$

Pelo resultado 4P:

$$\frac{\overline{X}_n}{S_n^2} \xrightarrow{P}_{n\to\infty} \frac{\mu}{\sigma^2} \tag{66}$$

Resultado 5P
Sejam $\{U_n, n \geq 1\}$ uma sequência de v.a.'s tal que

$$U_n \xrightarrow{P} u \quad \text{e} \quad g(\cdot) \text{ uma função contínua.} \tag{67}$$

Então

$$g(U_n) \xrightarrow[n\to\infty]{P} g(u) \tag{68}$$

Prova: Note que se $g(x)$ é contínua, então: dado algum $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|g(x) - g(u)| \geq \varepsilon \;\Rightarrow\; |x - u| \geq \delta \tag{69}$$

Assim, para n suficientemente grande

$$0 \leq P\left(|g(U_n) - g(u)| \geq \varepsilon\right) \leq P\left(|U_n - u| \geq \delta\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0 \tag{70}$$

Então,

$$g(U_n) \xrightarrow[n\to\infty]{P} g(u) \quad \square \tag{71}$$

Q (extra 4) Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. tais que $X_i \sim U(0, \theta)$ para $\theta > 0$.
Mostre que

$$T_n^2 = X_{n:n}^2 \xrightarrow[n\to\infty]{P} \theta^2 \tag{72}$$

Solução:
Como $X_{n:n} \xrightarrow{P} \theta$ e $g(x) = x^2$ é contínua, então pelo resultado 5P

$$X_{n:n}^2 \xrightarrow[n\to\infty]{P} \theta^2 \tag{73}$$

3.15(a) Convergência em Distribuição

Definição (3.15.1(a)) Sejam $\{U_n, n \geq 1\}$ uma sequência de v.a.'s tal que $F_n(u)$ é a f.d.a de U_n e U uma v.a com f.d.a $F(u)$.

U_n converge em distribuições para U quando $n \to \infty$, denotado por

$$U_n \xrightarrow{D} U \quad \text{quando} \quad n \to \infty,$$

se e somente se

$$F_n(u) \xrightarrow[n\to\infty]{} F(u) \quad \text{em todos os pontos de continuidade de } F(\cdot).$$

Q (Extra 5) Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d tais que $X_i \sim U(0, \theta)$ para $\theta > 0$.
Encontre a distribuição limite da sequência

$$U_n = \frac{n}{\theta}(\theta - T_n) \quad \text{para} \quad T_n \triangleq X_{n:n}.$$

Solução Note que a f.d.a de T_n é

$$F_{T_n}(t) = \left(\frac{t}{\theta}\right)^n \mathbb{I}_{(0,\theta)}(t) + \mathbb{I}_{(\theta,\infty)}(t) \tag{74}$$

A f.d.a de U_n é dada por (para $u \in (0, \theta)$):

$$\begin{aligned} F_{U_n}(u) = \mathbb{P}(U_n \le u) &= \mathbb{P}\left(\frac{n}{\theta}(\theta - T_n) \le u\right) \\ &= \mathbb{P}\left(-T_n \le \frac{\theta}{n}u - \theta\right) \\ &= \mathbb{P}\left(T_n \ge \theta\left(1 - \frac{u}{n}\right)\right) \end{aligned} \tag{75}$$

$$\begin{aligned} &= 1 - F_{T_n}(\theta(1 - \frac{u}{n})) \\ &= 1 - \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n, \quad u > 0. \end{aligned}$$

Daí,

$$\lim_{n\to\infty} F_{U_n}(u) = 1 - e^{-u} = F_U(u), \quad \text{que é a fda de } E \in \text{EXP}(1).$$

Então,

$$U_n \xrightarrow[n\to\infty]{} E.$$

Resultado 1D: Sejam $\{U_n, n \ge 1\}$ uma sequência de v.a.'s tal que $M_{U_n}(t)$ é a fgm de U_n e U uma v.a. com fgm $M_U(t)$, então

$$\text{Se } M_{U_n}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} M_U(t), \text{ então } U_n \xrightarrow[n\to\infty]{} U.$$

Q (extra 6) Sejam $X_1, \dots, X_n$ v.a.'s i.i.d. tais que $X_i \sim \text{Bernoulli}(p)$ com $p = \frac{1}{2}$ e

$$U_n = 2\sqrt{n}\left(\bar{X}_n - \frac{1}{2}\right).$$

Estude a distribuição limite de U_n.

Solução: Note que

$$U_n = \frac{2\sum_{i=1}^n X_i - n}{\sqrt{n}}.$$

$$\begin{aligned} M_{U_n}(t) = E\left[e^{\frac{2t}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n X_i - t\sqrt{n}}\right] &= e^{-t\sqrt{n}} E\left[e^{\frac{2t}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n X_i}\right] \\ &= e^{-t\sqrt{n}}\left(E\left[e^{\frac{2t}{\sqrt{n}}X_1}\right]\right)^n \\ &= e^{-t\sqrt{n}}\left((1-p) + p \cdot e^{\frac{2t}{\sqrt{n}}}\right)^n \end{aligned}$$

$$\theta = \frac{1}{2}e^{-t\frac{\sqrt{n}}{n}}\left[1 + e^{\frac{2t}{\sqrt{n}}}\right] \tag{76}$$

$$= \frac{1}{2^n}\left[e^{-t\sqrt{n}} + e^{t\sqrt{n}}\right] \tag{77}$$

$$M_{Un}(t) = \frac{1}{2}\left(e^{-t\frac{\sqrt{n}}{n}} + e^{t\frac{\sqrt{n}}{n}}\right)^n \tag{78}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{t}{\sqrt{n}} + \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right)\left(1 + \frac{t}{\sqrt{n}} + \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right)\right]^n \tag{79}$$

$$= \frac{1}{2}\left[2 + \frac{t^2}{n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right]^n \tag{80}$$

$$R_n = o\left(\max\left[\frac{t^2}{n}, \frac{t^2}{n^2}\right]\right) \tag{81}$$

$$= \left\{\frac{1}{2} + \frac{t^2}{n} + R_n\right\} \tag{82}$$

Em que $R_n = O(n^{-2})$. Assim, de

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{t^2}{2n}\right)^n = e^{t^2/2} \tag{83}$$

$$M_{Un}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{t^2/2} = M_U(t) \tag{84}$$

que é a fgm de $Z \sim N(0,1)$, logo

$$U_n \xrightarrow[n\to\infty]{} Z \tag{85}$$

20-10-25

Questão 4 Sejam $X_n \sim \chi^2_n$ e $U_n = \frac{1}{\sqrt{2n}}(X_n - n)$. Para $n \to \infty$ encontre a distribuição limite de U_n.

Lembre: $\frac{X_n - E(X_n)}{\sqrt{Var(X_n)}} \xrightarrow{d} N(0,1)$.

Solução

$$M_{U_n}(t) = E\left[e^{tU_n}\right] = E\left[e^{\frac{t}{\sqrt{2n}}(X_n - n)}\right] \tag{86}$$

$$= e^{-\frac{tn}{\sqrt{2n}}} \cdot M_{X_n}\left(\frac{t}{\sqrt{2n}}\right) \tag{87}$$

A fmg de $G \sim \Gamma(\alpha, \beta)$ é $M_G(t) = (1 - \frac{t}{\beta})^{-\alpha}$.
Como $X_n \sim \chi^2_n$ é equivalente a $\Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$, então:

$$M_{U_n}(t) = e^{-\sqrt{\frac{n}{2}}t} \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{2}{n}}t\right)^{-n/2} \tag{88}$$

$$= \left(1 - \sqrt{\frac{2}{n}}t\right)^{-n/2} \cdot e^{-\sqrt{\frac{n}{2}}t} \tag{89}$$

Tomando o $\log(\cdot)$ em ambos os lados da última identidade:

$$\log M_{U_n}(t) = -\sqrt{\frac{n}{2}}t - \frac{n}{2}\log\left(1 - \sqrt{\frac{2}{n}}t\right) \tag{90}$$

Note que a seguinte expressão em série de Taylor em torno de zero se verifica:

$$\log(1-x) = 0 + \left[-\frac{1}{1-x}\right]_{x=0} x + \frac{\left[-\frac{1}{(1-x)^2}\right]_{x=0}}{2} x^2 + O(x^3) \tag{91}$$

$$\log M_{U_n}(t) = -\sqrt{\frac{n}{2}}t - \frac{n}{2}\left(-\sqrt{\frac{2}{n}}t - \frac{t^2}{n} + O\left(\frac{t^3}{n^{3/2}}\right)\right) \tag{92}$$

$$\begin{aligned}
\log M_{U_n}(t) &= \sqrt{\frac{n}{2}}\left[t + \frac{t^2}{2n} - \sqrt{1 + \frac{2t^2}{n}}\right] + O\left(\sqrt{\frac{2t^2}{n}} \cdot O\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right)\right) \\
&= \frac{t^2}{2} + O\left(\frac{t^2}{n} + \left(\sqrt{\frac{2}{n}} \cdot \frac{t^2}{n^{3/2}}\right)\right) \\
&= \frac{t^2}{2} + \frac{t^2}{n} + O\left(\sqrt{\frac{2}{n}} \cdot \frac{t^2}{n^{3/2}}\right) = O\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right) \\
&= \frac{t^2}{2} + O\left(\frac{t^2}{n}\right) \\
t \to 0 \quad & \frac{t^2}{2} + O\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

Então:

$$M_{U_n}(t) = \exp\left(\frac{t^2}{2} + O(n^{-1})\right)$$

e

$$\lim_{n\to\infty} M_{U_n}(t) = e^{t^2/2} = M_Z(t) \quad \text{tal que} \quad Z \sim N(0,1)$$

Logo:

$$U_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} Z$$

Resultado 2D: Seja $\{U_n, n \geq 1\}$ uma sequência de VAs. Se $U_n \xrightarrow[n\to\infty]{p} U$ então $U_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} U$. A recíproca não é verdadeira, exceto quando U é uma VA degenerada em um valor.

20♡10♡25

Resultado 39 (Teorema de Slutsky) Sejam $\{U_n, n \geq 1\}$ e $\{V_n, n \geq 1\}$ duas sequências de v.a.'s tais que

$$U_n \xrightarrow{d} U \quad \text{e} \quad V_n \xrightarrow{p} v,$$

então:

1. $U_n + V_n \xrightarrow{d} U + v$
2. $U_n V_n \xrightarrow{d} U \cdot v$
3. $U_n / V_n \xrightarrow{d} U/v$, assumindo que $P(V_n = 0) = 0$, $\forall n$ e $v \neq 0$.

Q (Extra 4) Sejam $\{X_n, n \geq 1\} \overset{i.i.d.}{\sim} U(0, \theta)$, $T_n = X_{n:n}$,

$$U_n = n \cdot (\theta - T_n)/\theta \quad \text{e} \quad Q_n = n \cdot (\theta - T_n)/T_n.$$

Encontre a distribuição limite de Q_n.

Solução: Como já discutido,

$$T_n \xrightarrow{p}_{n\to\infty} \theta \quad \text{e} \quad U_n \xrightarrow{d} E$$

tal que $E \overset{d}{\sim} \text{Exp}(1)$. Pelo resultado 4P,

$$\frac{\theta}{T_n} \xrightarrow{p}_{n\to\infty} 1.$$

Logo, do resultado 39:

$$Q_n = \frac{n \cdot (\theta - T_n)}{\theta} \cdot \frac{\theta}{T_n} \xrightarrow{d}_{n\to\infty} E.$$

3.7.6 (a) Teorema Central do Limite (TCL)

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ VAs iid tais que $\mu = \mathbb{E}\{X_i\} < \infty$ e $\sigma^2 = \text{Var}\{X_i\} < \infty$.

Considere estudar a distribuição limite de $\bar{X}_n$ e S_n^2. Na literatura,

$$Z_n = \sqrt{n}\left(\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma}\right) \tag{93}$$

Versão padronizada da média amostral para σ conhecido.

$$T_n = \sqrt{n}\left(\frac{\bar{X}_n - \mu}{S_n}\right) \tag{94}$$

Versão padronizada da média amostral para σ desconhecido.

No que segue, apresentam-se algumas versões do TCL.

Teorema 3.7.6.1(a) [TCL]

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma VA tal que $\mu = \mathbb{E}\{X_i\} < \infty$ e $\sigma^2 = \text{Var}\{X_i\} < \infty$.

Então

$$\sqrt{n}\left(\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma}\right) \xrightarrow{d} N(0, 1), \quad n \to \infty \tag{95}$$

Q (extra 9)

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma a.a de $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ tal que $\mu, \sigma^2 < \infty$. Encontre a distribuição assintótica de

$$H_n = \sqrt{n}\left(S_n^2 - \sigma^2\right) \tag{96}$$

Solução

Usando a transformação de Helmet:

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=2}^{n} Y_i^2, \quad \text{para } Y_i \sim N(0, \sigma^2) \tag{97}$$

Que caracteriza S_n^2 como uma média amostral de Y_i^2. Pelo Teo (3.7, 6.1(a)):

$$U_n = (n-1)^{-1/2} \left[S_n^2 - E(Y_i^2)\right] \xrightarrow{d} N\left(0, \text{Var}(Y_i^2)\right) \tag{98}$$

Como $E(Y_i^2) = \sigma^2$ e $\text{Var}(Y_i^2) = 2\sigma^4$:

$$U_n = (n-1)^{-1/2} \left[S_n^2 - \sigma^2\right] \xrightarrow{d} N\left(0, 2\sigma^4\right) \tag{99}$$

Defina

$$V_n = \frac{n}{n-1} \tag{100}$$

$$P\left(|V_n - 1| \geq \varepsilon\right) = P\left(|V_n - 1|^2 \geq \varepsilon^2\right) \quad \text{(Desigualdade de Tschebisheff)} \tag{101}$$

$$\Rightarrow \quad \leq \frac{E\left[|V_n - 1|^2\right]}{\varepsilon^2} = \frac{\left(\frac{n}{n-1} - 1\right)^2}{\varepsilon^2} \tag{102}$$

$$= \frac{1}{(n-1)^2\, \varepsilon^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \tag{103}$$

Logo $V_n \to 1$. Então $\sqrt{V_n} \xrightarrow{P} 1$, pelo resultado 5P.

Finalmente,

$$H_n = \sqrt{V_n} \cdot U_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} N(0, 2\theta^4) \tag{104}$$

Teorema (3.7.6.2(a)) [Teorema de Man Wald]

Seja $\{T_n, n \geq 1\}$ uma sequência de v.a.'s reais tais que

$$\sqrt{n}\,(T_n - \theta) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} N\left(0, \sigma^2(\theta)\right) \tag{105}$$

Seja $g(\cdot)$ uma função contínua de valor real tal que

$$g'(\theta) = \frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta} \tag{106}$$

é finita e não nula.

Então tem-se

$$\sqrt{n}\,[g(T_n) - g(\theta)] \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} N\left(0, \sigma^2(\theta)\, g'(\theta)^2\right) \tag{107}$$

Prova:

Considere

$$\sqrt{n}\,[g(T_n) - g(\theta)] = U_n \cdot V_n, \tag{108}$$

em que

$$U_n = \sqrt{n}(T_n - \theta) \quad \text{e} \quad V_n = \frac{g(T_n) - g(\theta)}{T_n - \theta}. \tag{109}$$

Note que
$$T_n - \theta = \frac{U_n}{\sqrt{n}}. \tag{110}$$

Como
$$U_n \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2) \quad \text{e} \quad \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{P}_{n\to\infty} 0, \quad \text{do Teo. Slutsky,} \tag{111}$$
temos
$$T_n - \theta \xrightarrow{P}_{n\to\infty} 0. \tag{112}$$

Daí,
$$V_n \xrightarrow{P}_{n\to\infty} g'(\theta), \quad \text{pela definição} \tag{113}$$
$$g'(x) = \lim_{g\to x} \frac{g(x) - g(z)}{g - x}. \tag{114}$$

Assim, pelo Teo. Slutsky,
$$\sqrt{n}\,[g(T_n) - g(\theta)] \xrightarrow{d}_{n\to\infty} N\left(0, [g'(\theta)]^2\,\sigma^2\right). \tag{115}$$

Q (extra 10)
Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. tais que $X_i \sim \text{Poisson}(\lambda)$. Encontre a distribuição assintótica de
$$\sqrt{n}\left(\overline{X_n^3} - \lambda^3\right). \tag{116}$$

Solução
Pode-se mostrar que
$$E\{X_i^3\} = \lambda < \infty \quad \text{e} \quad \text{Var}\{X_i^3\} = \lambda < \infty. \tag{117}$$
Pelo Teo. (3.7.6.1(a)).
$$\sqrt{n}\left(\bar{X}_n - \lambda\right)\sqrt{\lambda} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} N(0,1) \tag{118}$$

Tomando $g(\lambda) = \lambda^3$ e usando Teo (3.7.6.2(a)),
$$\sqrt{n}\left(\bar{X}_n^3 - \lambda^3\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} N\left(0, \left[3 \cdot \lambda^2 \cdot \sqrt{\lambda}\right]^2\right) \tag{119}$$

Teorema (3.7.6.3(a)) [TCL para variância amostral]

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com média μ, variância σ^2 e $\mu_4 = \mathbb{E}[(X_1 - \mu)^4]$. Assuma que $0 < \mu_4 < \infty$ e $\mu_4 > \sigma^4$ (curtose > 1). Então,
$$\sqrt{n}\left(S_n^2 - \sigma^2\right) \xrightarrow[n\to\infty]{d} N\left(0, \mu_4 - \sigma^4\right) \tag{120}$$

Prova:

Considere

$$W_n \triangleq (n-1)n^{-1}S_n^2, \quad Y_i \triangleq (X_i-\mu)^2 \quad \text{para } i=1,\ldots,n$$

e

$$\overline{Y}_n = n^{-1}\sum_{i=1}^{n} Y_i.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
W_n &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X}_n)^2 && (121)\\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\mu+\mu-\overline{X}_n\right)^2 && (122)\\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[(X_i-\mu)^2+2(X_i-\mu)(\mu-\overline{X}_n)+(\mu-\overline{X}_n)^2\right] && (123)\\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2-2(\overline{X}_n-\mu)^2+(\overline{X}_n-\mu)^2 && (124)\\
&= \overline{Y}_n-(\overline{X}_n-\mu)^2 && (125)
\end{aligned}$$

Ainda, vale-se

$$\begin{aligned}
\sqrt{n}\left(W_n-\sigma^2\right) &= \sqrt{n}\left(\overline{Y}_n-\sigma^2\right)-\sqrt{n}\left(\overline{X}_n-\mu\right)^2 && (126)\\
&= U_n+V_n && (127)
\end{aligned}$$

Note que $\{Y_i\} \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} [\mathbb{E}[Y_i]=\sigma^2,\ \mathrm{Var}(Y_i)=\mu_4-\sigma^4]$. Daí, pelo Teorema (3.7.6.1(a)) (TCL),

$$U_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0,\mu_4-\sigma^4) \quad \text{como já discutido,} \tag{128}$$

$$U_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0 \tag{129}$$

Daí, pelo Teorema de Slutsky,

$$\sqrt{n}\left(W_n-\sigma^2\right) \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0,\mu_4-\sigma^4) \tag{130}$$

Agora escrevemos

$$\sqrt{n}\left(S_n^2-\sigma^2\right) = \sqrt{n}\left(\frac{n}{n-1}W_n-\sigma^2\right) \tag{131}$$

$$= \sqrt{n}\left(\frac{n}{n+1}-1+1\right)\left(W_n-\sigma^2\right) \tag{132}$$

$$= \sqrt{n}\left(W_n-\sigma^2\right)+\frac{\sqrt{n}}{n-1}W_n \tag{133}$$

Como

$$\sqrt{n}\left(W_n-\sigma^2\right) \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0,\mu_4-\sigma^4), \tag{134}$$

$$W_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} \sigma^2, \quad \frac{\sqrt{n}}{n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \quad \text{e} \quad \frac{\sqrt{n}}{n-1} W_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0, \tag{135}$$

então, do Teorema de Slutsky,

$$\sqrt{n}\left(S_n^2 - \sigma^2\right) \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0, \mu_4 - \sigma^4) \tag{136}$$

Teorema (3.7.6.4(a))
Sejam $\{U_n, n \geq 1\}$ uma sequência de reais e U uma variável real. Seja $g(\cdot)$ uma função contínua de valor real.
Se $U_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} U$, então $g(U_n) \xrightarrow[n\to\infty]{d} g(U)$.

Exercício (11) Q
Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. reais tais que $\mu = \mathbb{E}\{X_i\} < \infty$ e $\sigma^2 = \text{Var}\{X_i\} < \infty$. Mostre que

$$n\left(\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma}\right)^2 \xrightarrow[n\to\infty]{d} Q, \tag{137}$$

tal que $Q \sim \chi_1^2$.

Solução
Pelo $Z_n \triangleq \sqrt{n}\left(\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma}\right)$, tem-se

$$Z_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} Z \sim N(0,1). \tag{138}$$

Pelo Teorema (3.7.6.4(a)), como $g(x) = x^2$ é uma função contínua,

$$g(Z_n) = n\left(\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma}\right)^2 \xrightarrow[n\to\infty]{d} Z^2, \tag{139}$$

isto é, converge para $Q \sim \chi_1^2$.

3.7 Estimadores Consistentes

Consistência é uma propriedade de grandes amostras introduzida por Fisher (1922).
Seja

$$\{T_n = T_n(X_1, \ldots, X_n); n \geq 1\}$$

uma sequência de estimadores para $\tau(\theta)$ tal que $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^p$.
Definição (3.7.1): T_n é consistente no sentido fraco para $\tau(\theta)$ se, e só se

$$T_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} \tau(\theta) \tag{140}$$

T_n é inconsistente para $\tau(\theta)$ se T_n não converge em probabilidade para $\tau(\theta)$.
Obs 1: Dados $\varepsilon > 0$ e $\delta \in (0,1)$, $n_0 = n_0(\varepsilon, \delta, \theta)$:

$$P_\theta\{|T_n - \theta| > \varepsilon\} \leq \delta \iff P_\theta\{|T_n - \theta| \leq \varepsilon\} \geq 1 - \delta, \quad \forall n \geq n_0 \tag{141}$$

Obs 2: T_n é consistente se, e só se

$$\lim_{n\to\infty} P_\theta\{|T_n - \theta| > \varepsilon\} = 0 \tag{142}$$

ou

$$\lim_{n\to\infty} P_\theta\{|T_n - \theta| \leq \varepsilon\} = 1 \tag{143}$$

(Q 3.23) Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra de $X \sim U(0, \theta)$. Mostre que o estimador de MV para θ, $T_n = X_{n:n}$, é consistente para θ.

Solução

Note que

$$F_{T_n}(t) = P_\theta(T_n \leq t) \tag{144}$$

$$= P_\theta\left\{\bigcap_{i=1}^{n} X_i \leq t\right\} \tag{145}$$

$$\overset{\text{iid}}{=} [F_{X_1}(t)]^n = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \left(\frac{t}{\theta}\right)^n, & 0 \leq t \leq \theta, \\ 1, & t > \theta \end{cases} \tag{146}$$

Para $\varepsilon > 0$:

$$P_\theta\left\{|X_{n:n} - \theta| < \varepsilon\right\} = P_\theta\left\{\theta - \varepsilon < X_{n:n} < \theta + \varepsilon\right\} \tag{147}$$

$$= P_\theta\left\{\theta - \varepsilon < X_{n:n} < \theta\right\} \tag{148}$$

$$= F_{X_{n:n}}(\theta) - F_{X_{n:n}}(\theta - \varepsilon) \tag{149}$$

$$= \begin{cases} 1, & \varepsilon \geq \theta, \\ 1 - \left(\frac{\theta-\varepsilon}{\theta}\right)^n, & \varepsilon < \theta \end{cases} \tag{150}$$

É, portanto:

$$\lim_{n\to\infty} P_\theta\left\{|X_{n:n} - \theta| < \varepsilon\right\} = 1 \tag{151}$$

Logo,

$$X_{n:n} \xrightarrow[n\to\infty]{P} \theta \tag{152}$$

Obs 3: Um fato interessante é que se pode obter o tamanho amostral mínimo, diga-se n_0, tal que

$$P\left(|X_{n:n} - \theta| < \varepsilon\right) \geq 1 - \delta, \tag{153}$$

em que $\varepsilon > 0$ e $\delta \in (0, 1)$ são constantes pré-especificadas para $\varepsilon < \theta$.

$$P\left(|X_{n:n} - \theta| < \varepsilon\right) \geq 1 - \delta \tag{154}$$

$$\therefore 1 - \left(\frac{\theta - \varepsilon}{\theta}\right)^n \geq 1 - \delta$$

$$\therefore \left(\frac{\theta - \varepsilon}{\theta}\right)^n \leq \delta$$

$$\therefore n \geq \frac{\log \delta}{\log\left(\frac{\theta-\varepsilon}{\theta}\right)}$$

Assim:

$$n_0 = \left\lceil \frac{\log \delta}{\log\left(\frac{\theta-\varepsilon}{\theta}\right)} \right\rceil + 1 \tag{155}$$

Para $\theta \leq \varepsilon$:

$$n_0 = 1$$

Obs: $T_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} \theta$ se $EQM_\theta[T_n] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Isto pode ser verificado pela desigualdade de Chebyschev. Para qualquer $\varepsilon > 0$ e $\theta \in \Theta$,

$$P_\theta\left(|T_n - \theta| > \varepsilon\right) \leq \frac{E_\theta\left[(T_n-\theta)^2\right]}{\varepsilon^2} \tag{156}$$

$$= \frac{EQM_\theta[T_n]}{\varepsilon^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \tag{157}$$

Deste último resultado, $T_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} \theta$ implica que

$$B_\theta[T_n],\ Var_\theta[T_n] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{se } T_n \text{ é centrado}$$

basta checar

$$Var_\theta[T_n] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

3.8 Propriedades assintóticas do EMV

Neste seção veremos a normalidade assintótica para os EMVs, propriedades que é também satisfeita por outros estimadores. Para isto, temos que definir o conceito de eficiência.

Definição (3.4.1) Se dois estimadores $T_n^{(1)}$ e $T_n^{(2)}$ para $g(\theta)$ são ambos assintoticamente normais,

$$\sqrt{n}\left(T_n^{(1)} - g(\theta)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{d} N\left(0, \sigma_1^2(\theta)\right) \tag{158}$$

e

$$\sqrt{n}\left[T_n^{(2)} - g(\theta)\right] \xrightarrow[n\to\infty]{d} N\left(0, \sigma_2^2(\theta)\right), \tag{159}$$

então a eficiência relativa assintótica de $T^{(2)}$ com respeito a $T^{(1)}$ é definida como

$$\frac{\sigma_1^2(\theta)}{\sigma_2^2(\theta)} \tag{160}$$

Os EMVs são assintoticamente eficientes pelo teorema abaixo.

Teorema (3.8.1) [TCL para os EMVs]

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra de X com fdp (ou fmp) $f(x;\theta)$ para $x \in \mathbb{X} \subset \mathbb{R}$ e $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$ tal que Θ é um intervalo aberto.

Assuma que:

(A1) $\theta \mapsto f(x;\theta)$ é três vezes diferenciável sobre Θ, $\forall x \in \mathbb{X}$.

(A2)

$$\int_{\mathbb{X}} \frac{\partial}{\partial\theta} f(x;\theta)\, dx = 0 \quad \left(= \frac{\partial}{\partial\theta}\int_{\mathbb{X}} f(x;\theta)\, dx\right) \tag{161}$$

e

$$\int_{\mathbb{X}} \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} f(x;\theta)\,dx = 0 \quad \left(= \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\int_{\mathbb{X}} f(x;\theta)\,dx\right) \tag{162}$$

(A3) $0 < I_X(\theta) \triangleq E_\theta\left[\left(\frac{\partial \log f(x;\theta)}{\partial\theta}\right)^2\right] < \infty, \quad \forall\theta \in \Theta$

(A4) Para cada $\theta_0 \in \Theta$, $\exists\ \varepsilon \in E(\theta_0) > 0$

$$\left|\frac{\partial^3 \log f(x;\theta)}{\partial\theta^3}\right| \le g(x), \quad \forall\theta \in [\theta_0 - \varepsilon, \theta_0 + \varepsilon],$$

em que

$$\int_X g(x) f(x;\theta)\,dx < \infty.$$

(A5) A equação de verossimilhança

$$\frac{\partial l(\theta)}{\partial\theta} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \log f(x_i;\theta)}{\partial\theta} = 0$$

tem uma solução consistente $\hat{\theta}_n$. Então

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0) \xrightarrow{D} N\left(0, I_X^{-1}(\theta_0)\right), \quad n \to \infty.$$

27/10/2025

Prova (3.8.1) Usando a expansão de Taylor de $\frac{\partial l(\theta)}{\partial\theta}$ em torno de θ_0, tem-se

$$0 = \left.\frac{\partial l(\theta)}{\partial\theta}\right|_{\theta=\hat{\theta}_n} = \left.\frac{\partial l(\theta)}{\partial\theta}\right|_{\theta=\theta_0} + \left.\frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial\theta^2}\right|_{\theta=\theta_0} (\hat{\theta}_n - \theta_0).$$

27/10/25

$$+\frac{2^3 l(\theta)}{2\theta^3}(\hat{\theta}_n - \theta)^2$$

Em que θ^* cai em segmento formado por θ e $\hat{\theta}_n$. Assim, colocando $(\hat{\theta}_n - \theta)$ em evidência. Por TCL:

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) - \frac{1}{\sqrt{n}}\frac{\partial l(\theta)}{\partial \theta} = 0 \tag{163}$$

$$\frac{1}{n}\frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial \theta^2}(\hat{\theta}_n - \theta) + \frac{1}{n}\frac{\partial^3 l(\theta)}{\partial \theta^3}\frac{(\hat{\theta}_n - \theta)^2}{2} = 0 \tag{164}$$

Note que

$$E_\theta \frac{\partial^2 \log f(X_i, \theta)}{\partial \theta^2} = -I_{X_i}(\theta)$$

que é (A_1).

Finito pela condição (A_2). Daí, pela Lei Forte (fraca) dos grandes números:

$$\frac{1}{n}\frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial \theta^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 \log f(X_i, \theta)}{\partial \theta^2} \xrightarrow{q.c.(P)} -I_X(\theta), \quad \theta = \theta_0,\ n \to \infty \tag{165}$$

De (A_4):

$$\frac{1}{n}\frac{\partial^3 l(\theta)}{\partial \theta^3} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(X_i), \quad \forall \theta \in [\theta_0 - \varepsilon, \theta_0 + \varepsilon] \tag{166}$$

Adicionalmente, de (A_5):

$$P_{\theta_0}\left(\left|\hat{\theta}_n - \theta^*\right| \leq \varepsilon\right) \leq P_{\theta_0}\left(\left|\hat{\theta}_n - \theta_0\right| \leq \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

Usando isso e o fato de

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(X_i) \xrightarrow{P} E\left[g(X_i)\right] \leq \infty,$$

tem-se

$$\frac{1}{n}g(\hat{\theta}_n) \quad \text{permanece limitada em probabilidade quando } n \to \infty.$$

Obs: Uma sequência de v.a.'s Y_n é limitada em probabilidade se $\forall \varepsilon > 0$, $\exists A(\varepsilon)$ tal que $P(|Y_n| > A) \leq \varepsilon$. Como consequência, se $E[Y_n]$ é uma sequência limitada, $\{Y_n, n \geq 1\}$ é limitada em probabilidade.

Como $\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta_0$, vale-se que

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial \theta}g(\theta) \xrightarrow{P} \frac{\partial}{\partial \theta}g(\theta_0).$$

Aplicando (3.4.1(b)) em (3.4.1(a)):

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0) \approx \frac{\sqrt{n}\frac{\partial l(\theta)}{\partial \theta}\Big|_{\theta=\theta_0}}{I_X(\theta_0)}.$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \log f(X_i;\theta)}{\partial \theta}\bigg|_{\theta=\theta_0} \xrightarrow{P} \frac{1}{I_X(\theta_0)}.$$

Note que

$$\frac{\partial \log f(X_i;\theta)}{\partial \theta}\bigg|_{\theta=\theta_0}$$

para $i = 1, \ldots, n$ são v.a.'s i.i.d.

Com média zero e variância $I_{X_i}(\theta_0)$. Portanto, pelo TCL clássico, para $Z \xrightarrow{d} N(0, I_{X_i}(\theta_0))$:

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0) \xrightarrow{d} Z \xrightarrow{d} N\left(0, \frac{I_{X_i}(\theta_0)}{I^2_{X_i}(\theta_0)}\right) = N\left(0, \frac{1}{I_{X_i}(\theta_0)}\right) \tag{167}$$

Teorema (3.9.2) Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra de X com fdp (ou fdm) $f(x;\theta)$ para $x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}$ e $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^p$.

Assuma os seguintes pressupostos:

(B1) $\mathcal{C} = \{x : F(x;\theta) > 0\}$ independe de θ.

(B2) $f(x;\theta)$ é três vezes diferenciável em θ para todo $x \in \mathcal{C}$.

(B3)

$$\frac{\partial}{\partial \theta_r} \int_{\mathcal{C}} F(x;\theta)dx = \int_{\mathcal{C}} \frac{\partial}{\partial \theta_r} F(x;\theta)dx = 0 \tag{168}$$

e

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{\partial^2}{\partial \theta_r \partial \theta_s} F(x;\theta)dx = \frac{\partial^2}{\partial \theta_r \partial \theta_s} \int_{\mathcal{C}} F(x;\theta)dx = 0, \tag{169}$$

para $r, s = 1, \ldots, p$ e para todo $\theta \in \Theta$.

(B4) A matriz

$$I_{X_i}(\theta) = \left[E\left(\frac{\partial \log f(X_i;\theta)}{\partial \theta_r} \frac{\partial \log f(X_i;\theta)}{\partial \theta_s}\right)\right] \tag{170}$$

é finita e não singular para todo $\theta \in \Theta$, $r, s = 1, \ldots, p$.

27/10/25
(65) Para cada $\theta_0 \in \Theta$, $\exists \varepsilon > 0$ e uma função integrável $g(x)$ tal que, $\forall x, y^1, y^2, \ldots, y^p$

$$\frac{\partial^3 \log f(x;\theta)}{\partial \theta^j \partial \theta^l \partial \theta^m} \leq g(x), \quad \text{se} \quad |\theta - \theta_0| < \varepsilon \tag{171}$$

Então para cada $\theta_0 \in \Theta$, existe uma sequência $\hat{\theta}_n$ que satisfaz:

1. $\hat{\theta}_n$ é solução da equação de verossimilhança

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \sum_{i=1}^{n} \log f(x_i;\theta) \bigg|_{\theta=\hat{\theta}_n} = 0 \quad (\text{para } x_1, \ldots, x_n) \tag{172}$$

2. $\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta_0 \quad \text{quando} \quad n \to \infty$

3. $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0) \xrightarrow{d} N_p\left(0, I^{-1}(\theta_0)\right)$

Capítulo 4

Teste de Hipótese

4.1 Introdução

Seja X uma v.a. populacional com fdp (ou fmp) $f(x;\theta)$ para $x \in \mathbb{R}$ e $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$.

Definição (4.1.1) Uma hipótese é uma afirmação sobre o parâmetro desconhecido θ. Por exemplo:

$$H : \mu = \mu_0, \quad H : \sigma^2 > \sigma_0^2, \quad H : \alpha \neq \alpha_0$$

Neyman e Pearson formularam o problema de testar hipótese como se segue.
Considere que se deseja escolher entre:

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \quad \times \quad H_1 : \theta \in \Theta_1 \tag{173}$$

tal que $\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$ e $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \varnothing$.

Então, baseado-se em uma amostra $X_1, \ldots, X_n \in X$, deve-se tomar a decisão de rejeitar H_0 ou não rejeitar.

As hipóteses costumam ser classificadas como:

1) Simples:

$$H_0 : \theta = \theta_0, \quad H_1 : \mu = \mu_1 \tag{174}$$

2) Composta unilateral:

$$H_0 : \theta \geq \theta_0, \quad H_1 : \mu < \mu_1 \tag{175}$$

3) Composta bilateral:

$$H_0 : \theta \neq \theta_0 \quad \text{ou} \quad [\theta \leq \theta_0 \text{ ou } \theta \geq \theta_1] \tag{176}$$

Obs: H_0 é chamada de hipótese nula.
H_1 é chamada de hipótese alternativa.

4.2 Probabilidade de erro e função poder

Considere testar:

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \quad \times \quad H_1 : \theta \in \Theta_1 \tag{177}$$

A partir de $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra de X com fdp $f(x; \theta)$, podem-se cometer dois tipos de erro:

Natureza da escolha	H_0 verdadeira	H_1 verdadeira
Não rejeitar	—	Erro tipo II
Rejeitar	Erro tipo I	—

Em termos objetivos, tendo observados

$$X = (X_1, \ldots, X_n),$$

um teste:

1. Encontraria evidências para (não) rejeitar H_0.
2. Isto é feito por particionar $\mathbb{R}^n$ em dois conjuntos: $R_c \subset \mathbb{R}^n$ chamado de região crítica e seu complementar R_c^c tal que

$$R_c \cup R_c^c = \mathbb{R}^n \quad \text{e} \quad R_c \cap R_c^c = \varnothing \tag{178}$$

3. Se $X \in R_c$, rejeita-se $H_0 : \theta \in \Theta_0$.

Q(4.1) Alguns exemplos de testes

Sejam $X_1, \dots, X_9$ uma amostra de $X \sim N(\theta, 1)$ para $\theta \in \mathbb{R}$ desconhecido.
No contexto, deseja-se testar:

$$H_0 : \theta = 5.5 \quad \text{vs} \quad H_1 : \theta = 8 \tag{179}$$

Seja

$$\bar{X}_n = 9^{-1} \sum_{i=1}^{9} X_i \tag{180}$$

Testes

- Teste #1: rejeitam-se H_0 se e só se $X_1 > 7$
- Teste #2: rejeitam-se H_0 se e só se $\frac{X_1 + X_2}{2} > 7$
- Teste #3: rejeitam-se H_0 se e só se $\bar{X}_n > 6$
- Teste #4: rejeitam-se H_0 se e só se $\bar{X}_n > 7.5$

Suas regiões críticas

Para teste #1:

$$R_c = \{(x_1, \dots, x_9) \in \mathbb{R}^9 : x_1 > 7\} \tag{181}$$

Para teste #2:

$$R_c = \{(x_1, \dots, x_9) \in \mathbb{R}^9 : \frac{x_1 + x_2}{2} > 7\} \tag{182}$$

Para teste #3:

$$R_c = \{(x_1, \dots, x_9) \in \mathbb{R}^9 : \bar{x} > 6\} \tag{183}$$

Para teste #4:

$$R_c = \{(x_1, \dots, x_9) \in \mathbb{R}^9 : \bar{x} > 7.5\} \tag{184}$$

Definição (4.2.1) Teste de hipóteses

Data: 27/10/25

Um teste T para uma hipótese H é uma regra ou processo para decidir se H deve ser rejeitada.

Um conceito importante é o de probabilidade dos erros dos Tipos I e II.

Erro Tipo I

$$\begin{aligned} H_0, \quad \alpha &= P\{\text{Erro do tipo I}\} \\ &= P\{\text{Rejeitar } H_0 \ \wedge \ H_0 \text{ é verdadeira}\} \\ &= P_{H_0}\{X \in R_c\} \end{aligned}$$

Erro Tipo II

$$\begin{aligned} H_1, \quad \beta &= P\{\text{Erro do tipo II}\} \\ &= P\{\text{Não rejeitar } H_0 \ \wedge \ H_0 \text{ é falsa}\} \\ &= P_{H_1}\{X \in R_c'\} \end{aligned}$$

Exemplo (4.2)

Para teste #1 em (4.1) tem-se:

$$\alpha = P_{H_0:\theta=5.5}\{X_1 > 7\}$$

$$\beta = P_{H_1:\theta=8}\{X_1 \leq 7\}$$

$$\begin{aligned} \alpha &= P\left\{\frac{X_1 - 5.5}{\sigma} > \frac{7 - 5.5}{\sigma}\right\}, \quad Z \sim N(0,1) \\ &= P\{Z > 1.5\} \\ &= 1 - \Phi(1.5) = 0.06691 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta &= P\left\{\frac{X_1 - 8}{\sigma} < \frac{7 - 8}{\sigma}\right\}, \quad Z \sim N(0,1) \\ &= P\{Z < -1\} \\ &= \Phi(-1) = 0.15866 \end{aligned}$$

29/10/25

Outra quantidade importante é Poder do teste.

Definição (4.22) O Poder ou função poder de um Υ, denotada como $Q_\Upsilon(\theta)$, é a probabilidade de rejeitar H_0 quando $\theta \in \Theta$ é verdadeira.

Essa função é dada por

$$Q_\Upsilon(\theta) = P_\theta[X \in R_c], \quad X \in \mathbb{R}^n, \quad \theta \in \Theta \tag{185}$$

Obs: Note que

$$\alpha = Q_\Upsilon(\theta_0) \tag{186}$$

e

$$1 - \beta = Q_\Upsilon(\theta_1) \tag{187}$$

Para $H_0 : \theta = \theta_0$ e $H_1 : \theta = \theta_1$.

Q(4.3) Para o teste #4 da questão Q(4.1) tem-se

$$Q_\Upsilon(\theta) = P_\theta[X \in R_c] \tag{188}$$

$$= P_\theta[\bar{X}_n > 7.5] \tag{189}$$

$$\Rightarrow Q_\Upsilon(\theta) = P_\theta\left[\frac{\bar{X}_n - \theta}{1/\sqrt{n}} > \frac{7.5 - \theta}{1/\sqrt{n}}\right], \quad Z \sim N(0,1) \tag{190}$$

29/10/25

$$P_\theta[Z > \sqrt{n}(7,5-\theta)] = 1 - \Phi\left(\sqrt{n}(7,5-\theta)\right), \tag{191}$$

em que

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\, dt \quad \text{é fda de } Z \text{ e} \tag{192}$$

$$\phi(t) \quad \text{é a fdp de } Z. \tag{193}$$

Outro conceito importante é o de função crítica ou função do teste.

Definição (4.2.3) A função $\psi_\Upsilon : \chi^n \to [0,1]$ é chamada de função crítica ou função de teste se, e só se, $\psi_\Upsilon(x)$ representa a probabilidade com a qual H_0 é rejeitada quando $[X = x]$é observada.

Obs:

$$Q_\Upsilon(\theta) = E_\theta\left[\psi_\Upsilon(X)\right], \quad \forall \theta \in \Theta \tag{194}$$

Os testes podem ser classificados como "aleatorizados" e "não aleatorizados".

Definição (4.2.4) Tipos de Teste Um teste Υ para a hipótese H_0 pode ser:
Seja $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ uma possível realização de $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^T$.

a) Υ não aleatorizados: Rejeita-se H_0 se e só se $x \in R_c$ ou tem função crítica

$$\Upsilon(x) = \begin{cases} 1, & x \in R_c \\ 0, & x \in R_c^c \end{cases}$$

b) Υ aleatorizado: O teste é definido por uma função crítica dada por:

$$\Upsilon(x) = \begin{cases} 1, & x \in R_c \\ \delta, & x \in R_\delta \\ 0, & x \in (R_c \cup R_\delta)^c \end{cases}$$

Exemplo: Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra de $X \sim N(\theta, 25)$.
Neste caso $\mathbb{X} = \mathbb{R}^n$ é o espaço amostral. Considere o teste "Rejeitar $H_0 : \theta \leq 17$ se e só se $\bar{X}_n > 17 + \frac{5}{\sqrt{n}}$".
Υ é não aleatorizado com função crítica dada por:

$$\Upsilon(x) = \begin{cases} 1, & x \in \{z \in \mathbb{R}^n : \bar{z}_n > 17 + \frac{5}{\sqrt{n}}\} \\ 0, & x \in \{z \in \mathbb{R}^n : \bar{z}_n \leq 17 + \frac{5}{\sqrt{n}}\} \end{cases}$$

Exemplo: Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra de $X \sim \text{Bernoulli}(\theta)$ para $\theta \in (0,1)$.
Neste caso $\mathbb{X} = \{0,1\}^n$ é o espaço amostral.

29/10/25

Considere Υ um teste para $H_0 : \theta \leq \frac{1}{2}$ tal que H_0 é rejeitada se só se $\sum x_i > 5$. Υ é um teste aleatorizado com função crítica

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & x \in \{z \in \{0,1\}^n : \sum_{i=1}^{n} z_i > 5\} \\ \delta, & x \in \{z \in \{0,1\}^n : \sum_{i=1}^{n} z_i = 5\} \\ 0, & x \in \{z \in \{0,1\}^n : \sum_{i=1}^{n} z_i < 5\} \end{cases} \tag{195}$$

Caso $\psi(x) = \delta \in (0,1)$ a decisão para rejeição de H_0 se dará por "obter cara" no lançamento de uma moeda com $P(\text{cara}) = \delta$.

4.2.1 O Conceito de Melhor Teste

Considere testar $H_0 : \theta \in \Theta_0$ x $H_1 : \theta \in \Theta_1$ tal que $\Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$, $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \varnothing$.

Definição (4.2.5) Seja $\alpha \in (0,1)$ um valor fixado. Um teste Υ para H_0 x H_1 com função poder $Q_\Upsilon(\theta)$ é chamado de um teste de tamanho α se

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} \{Q_\Upsilon(\theta)\} = \alpha \tag{196}$$

e é chamado de um teste de nível α se

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} \{Q_\Upsilon(\theta)\} \leq \alpha \tag{197}$$

Ou, equivalentemente, teste de tamanho α se

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} \{\psi_\Upsilon(x)\} = \alpha \tag{198}$$

e de nível se

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} \{\psi_\Upsilon(x)\} \leq \alpha \tag{199}$$

A escolha do melhor teste é dentro daqueles de nível α.

Definição (4.2.6). Considere uma classe C de todos os testes de nível α para H_0 contra H_1. Um teste $\Upsilon \in C$ com função poder $Q_\Upsilon(\theta)$ é o **Melhor teste de nível** α ou o **teste uniformemente mais poderoso (UMP)** de nível α se e só se

$$Q_\Upsilon(\theta) \geq Q_{\Upsilon^*}(\theta), \quad \forall \theta \in \Theta_1 \tag{200}$$

em que $\Upsilon^* \in C$ com função poder $Q_{\Upsilon^*}(\theta)$.

Se H_1 é do tipo simples, $H_1 : \theta = \theta_1$, então o melhor teste é chamado de **Mais Poderoso (MP)**.

4.3 Teste Simples x Simples

Considere derivar o teste MP para o tipo simples x simples via o Lema de Neyman e Pearson (1933).

Sejam $X = (X_1, \ldots, X_n)^T$ uma a.a. de X com fdp (ou fmp) $f(x;\theta)$ para $x \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}$ e $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}$ e $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ uma a.o. de X. Desejamos testar

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{x} \quad H_1 : \theta = \theta_1, \tag{201}$$

em que $\theta_0, \theta_1 \in \Theta$ e $\theta_0 \neq \theta_1$. Note que a função de verossimilhança do contexto é dada por

$$L(\theta_i; x) = \prod_{k=1}^{n} f(x_k; \theta_i), \quad \text{para } i = 0, 1. \tag{202}$$

Considere comparar os poderes de todos os testes de nível α, com α pré-fixado em $(0,1)$. Comumente, escolhe-se os valores $\alpha = 1\%,\ 5\%,\ 10\%$. Intuitivamente, um teste de H_0 x H_1 vem de comparar $L(\theta_1; x)$ com $L(\theta_0; x)$ e procurar qual quantidade é superior à outra. Como critério, a hipótese com verossimilhança significativamente maior é mais favorecida.

Teorema (4.3.1) [Lema de Neyman Pearson]

Considere um teste de $H_0 : \theta = \theta_0$ x $H_1 : \theta = \theta_1$ com região de rejeição e não rejeição de H_0 dados por:

$$R_c = \{x \in \mathbb{R}^n : L(\theta_1; x) > k\, L(\theta_0; x)\}$$

e

$$R_c^c = \{x \in \mathbb{R}^n : L(\theta_1; x) < k\, L(\theta_0; x)\}$$

ou equivalentemente, usando a função crítica

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } L(\theta_1; x) > k\, L(\theta_0; x) \\ 0, & \text{se } L(\theta_1; x) < k\, L(\theta_0; x) \end{cases}$$

em que $k \geq 0$ é determinado por

$$E_{\theta_0}\left[\psi(x)\right] = \alpha \tag{4.3.2}$$

Qualquer teste satisfazendo (4.3.1) e (4.3.2) é um teste MP de nível α.

Prova: Consideremos a prova para o caso contínuo. Note que qualquer teste Υ que satisfaça (4.3.2) tem tamanho α e portanto nível α.

Seja Υ^* um teste com função crítica $\psi_{\Upsilon^*}(x)$ e nível α. Sejam $Q_\Upsilon(\theta)$ e $Q_{\Upsilon^*}(\theta)$ as funções poder de Υ e Υ^*, respectivamente.

29/10/25

Vamos primeiro a verificar que

$$\psi_\Upsilon(x) - \psi_{\Upsilon^*}(x) \cdot L(\theta_1, x) - k \cdot L(\theta_1, x) \geq 0 \tag{4.3.3}$$

$$x \in \mathcal{X}^n$$

Note que:

[i] Se $\psi_\Upsilon(x) = 1$, então

$$L(\theta_1, x) - k \cdot L(\theta_0, x) \geq 0 \quad \text{de (4.3.1)} \tag{203}$$

e

$$\psi_\Upsilon(x) - \psi_{\Upsilon^*}(x) \geq 0 \quad \text{da definição da função crítica (4.3.3)} \tag{204}$$

se verifica.
[ii] Se $\psi_\Upsilon(x) = 0$, então

$$L(\theta_1, x) - k \cdot L(\theta_0, x) \leq 0 \quad \text{de (4.3.1)} \tag{205}$$

e

$$\psi_\Upsilon(x) - \psi_{\Upsilon^*}(x) \leq 0 \quad \text{da definição da função crítica (4.3.3)} \tag{206}$$

se verifica.
[iii] Se $0 < \psi_\Upsilon(x) < 1$, então

$$L(\theta_1, x) - k \cdot L(\theta_0, x) = 0 \quad \text{e (4.3.3) se verifica} \tag{207}$$

Daí, tem-se

$$\begin{aligned}
0 &\leq \int_{\mathcal{X}^n} \{\psi_\Upsilon(x) - \psi_{\Upsilon^*}(x)\} \, [L(\theta_1; x) - k \cdot L(\theta_0; x)] \, dx \\
&= \int_{\mathcal{X}^n} \psi_\Upsilon(x) \, [L(\theta_1; x) - k \, L(\theta_0; x)] \, dx \qquad (208) \\
&\quad - \int_{\mathcal{X}^n} \psi^*_\Upsilon(x) \, [L(\theta_1; x) - k \, L(\theta_0; x)] \, dx \\
&\quad = [E_{\theta_1} \, \psi_\Upsilon(x) - k \, E_{\theta_0} \, \psi_\Upsilon(x)] \\
&\quad\quad - [E_{\theta_1} \, \psi^*_\Upsilon(x) - k \, E_{\theta_0} \, \psi^*_\Upsilon(x)] \\
&\quad 0 \leq \{Q_\Upsilon(\theta_1) - k \, Q_\Upsilon(\theta_0)\} \qquad (4.3.4) \\
&\quad\quad - \{Q^*_\Upsilon(\theta_1) - k \, Q^*_\Upsilon(\theta_0)\} \\
&\quad = Q_\Upsilon(\theta_1) - Q^*_\Upsilon(\theta_1) - k \, [Q_\Upsilon(\theta_0) - Q^*_\Upsilon(\theta_0)]
\end{aligned}$$

Note que $Q_\Upsilon(\theta_0) = \alpha$ e $Q^*_\Upsilon(\theta_0) \leq \alpha$ e, portanto,

$$Q_\Upsilon(\theta_0) - Q^*_\Upsilon(\theta_0) \geq 0 \tag{209}$$

A (4.3.4) pode ser reescrita como

$$Q_\Upsilon(\theta_1) - Q^*_\Upsilon(\theta_1) \geq k \, [Q_\Upsilon(\theta_0) - Q^*_\Upsilon(\theta_0)] \geq 0 \tag{210}$$

$$Q_\Upsilon(\theta_1) \geq Q_{\Upsilon^*}(\theta_1)$$

O que mostra que Υ é no mínimo tão poderoso quanto Υ^*.
03/11/2025
Obs 1: (LNP) No Lema de Neyman Pearson nada é dito sobre o conjunto

$$R^* := \{x \in \mathbb{R}^n : L(\theta_1; x) - k \, L(\theta_0; x) = 0\}$$

Quando X é contínua, a probabilidade de X pertencer a R^* é zero e esse detalhe não tem importância na prática. Quando X é discreta, deve-se aleatorizar o evento $X \in R^*$ tal que o teste MP tenha tamanho $\alpha \in (0,1)$.

Obs 2: (LNP) O teste MP proposto a partir de LNP é início.

Q(4.4) Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ com μ desconhecido e $\sigma^2 \in \mathbb{R}^+$ conhecido. Encontre o teste MP de nível α para

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \mu = \mu_1$$

tal que μ_0 e μ_1 são conhecidos e $\mu_1 > \mu_0$.

Solução

Como as hipóteses são do tipo simples x simples, o LNP se aplica.
A verossimilhança em questão é

$$L(\mu; x) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2\right\} \tag{211}$$

Para $i = 0, 1$

O teste MP tem a seguinte forma:

$$\text{Rejeitar } H_0 \text{ se } \frac{L_1}{L_0} > k$$

Note que:

$$\frac{L_1}{L_0} = \frac{L(\mu_1; x)}{L(\mu_0; x)} = \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_1)^2 - \sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_0)^2\right]\right\} \tag{212}$$

$$= \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[-2\mu_1\sum_{i=1}^{n} x_i + n\mu_1^2 + 2\mu_0\sum_{i=1}^{n} x_i - n\mu_0^2\right]\right\} \tag{213}$$

$$= \exp\left\{\frac{(\mu_1 - \mu_0)}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{n(\mu_1^2 - \mu_0^2)}{2\sigma^2}\right\} \tag{214}$$

Daí, a região crítica deste teste é dada por:

Para $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$ como o espaço amostral.

03/11/25

$$R_c = \left\{x \in \mathcal{X} : \frac{L_1}{L_0} > k\right\} = \left\{x \in \mathcal{X} : \exp\left\{\frac{(\mu_1 - \mu_0)}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{n(\mu_1^2 - \mu_0^2)}{2\sigma^2}\right\} > k\right\} \tag{215}$$

$$= \left\{x \in \mathcal{X} : \exp\left\{\frac{(\mu_1 - \mu_0)}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} x_i\right\} > k \cdot e^{\frac{n(\mu_1^2 - \mu_0^2)}{2\sigma^2}}\right\} \tag{216}$$

onde $k_1 = k \cdot e^{\frac{n(\mu_1^2 - \mu_0^2)}{2\sigma^2}}$

$$= \left\{x \in \mathcal{X} : \sum_{i=1}^{n} x_i > \frac{\sigma^2}{\mu_1 - \mu_0}\log(k_1)\right\} \tag{217}$$

onde $k_2 = \frac{\sigma^2}{\mu_1 - \mu_0}\log(k_1)$
(uma versão mais manipulável)

$$R_c = \left\{x \in \mathcal{X} : \sqrt{n}\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma} > \sqrt{n}\frac{k_2 - n\mu_0}{n\sigma}\right\} \tag{218}$$

$$\therefore R_c = \left\{x \in \mathcal{X} : \sqrt{n}\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma} > k_3\right\} \quad (4.3.5), \tag{219}$$

Definamos a função Z: $\mathcal{X} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$Z(x) \triangleq \sqrt{n}\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma} \tag{220}$$

Quando $Z(x)$ é avaliada numa aa $X = (X_1, \ldots, X_n)^T$, a quantidade resultante $Z(x)$ é uma estatística de teste com distribuição conhecida sob H_0.

$$Z(X) \overset{H_0}{\sim} N(0, 1) \tag{221}$$

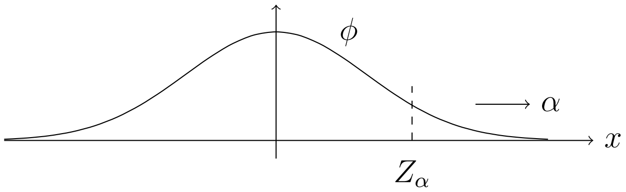
A região crítica (4.3.5) é então definida (trocando k_3 em (4.3.5)) por z_α como

$$R_c = \left\{x \in \mathcal{X} : \sqrt{n}\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma} > z_\alpha\right\} \tag{222}$$

$$= \{x \in \mathcal{X} : Z(X) > z_\alpha\} \tag{223}$$

em que z_α é tal que

$$P(Z > z_\alpha) = \alpha \tag{224}$$



Resumo Teste Z

Suposição

$X_1, \dots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$ e $\sigma^2 > 0$ conhecido.

Hipóteses

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu = \mu_1 \ (> \mu_0) \end{cases} \tag{225}$$

Estatística de Teste

$$Z(X) = \sqrt{n}\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma} \overset{H_0}{\sim} N(0,1) \tag{226}$$

03/11/25

Regra de decisão

(Método tradicional) Rejeita-se H_0 se $Z(x) > z_\alpha$.

(Método do valor P) Seja $Z_{cal} = Z(x)$, rejeita-se H_0 se

$$\hat{p} = P(Z \geq Z_{cal}) < \alpha \quad \text{(obs: } \hat{p} \text{ se chama de valor P)}$$

Q(4.5)

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra de $X \sim \exp(\theta)$ com densidade

$$f(x;\theta) = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}, \quad x > 0 \tag{227}$$

em que $\theta > 0$ é desconhecido. Encontre o teste MP de nível α para

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \theta = \theta_1 \quad (\theta_1 > \theta_0)$$

Solução

Como o contexto é do tipo simples vs simples, pode-se aplicar o LNP. A verossimilhança é dada por:

$$L_i \triangleq L(\theta_i; x) = \theta_i^{-n} \exp\left\{ -\frac{\sum_{j=1}^n X_j}{\theta_i} \right\}, \quad \text{para } i = 0, 1 \tag{228}$$

O teste MP é da forma:

$$\left\{ \text{Rejeita-se } H_0 \quad \text{se, e somente se} \quad \tfrac{L_1}{L_0} > k \right.$$

Note que:

$$\frac{L_1}{L_0} = \left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^n \exp\left[\sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{1}{\theta_0} - \frac{1}{\theta_1}\right)\right] \tag{229}$$

Daí, a região crítica de teste é dada por: Para $\mathcal{X} = \mathbb{R}_+^n$

$$R_c = \left\{ x \in \mathcal{X} : \left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^n \exp\left[\sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{1}{\theta_0} - \frac{1}{\theta_1}\right)\right] > k \right\} \tag{230}$$

$$= \left\{ x \in \mathcal{X} : \left(\frac{1}{\theta_0} - \frac{1}{\theta_1}\right) \sum_{i=1}^n x_i > \underbrace{\log\left[k \cdot \left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^n\right]}_{k_1} \right\} \tag{231}$$

$$= \left\{ x \in \mathcal{X} : \sum_{i=1}^n x_i > \underbrace{\left(\frac{\theta_1 - \theta_0}{\theta_0 \theta_1}\right)^{-1} k_1}_{k_2} \right\} \tag{232}$$

$$= \left\{ x \in \mathcal{X} : \sum_{i=1}^{n} x_i > k_2 \right\} \tag{233}$$

Para se ter uma estatística manipulável, requer-se que sua distribuição sob H_0 não dependa do parâmetro. Note que

$$\dot{X} \triangleq \theta^{-1} X \quad \text{tem densidade} \tag{234}$$

$$f_{\dot{X}}(x) = \theta f(\theta x; \theta) \tag{235}$$

$$= \theta \left[\frac{1}{\theta} e^{-\frac{\theta x}{\theta}} \right] = e^{-x} \tag{236}$$

03/11/25
Que é a densidade da exponencial padrão.
Ainda note que $\dot{X}_i \triangleq 2\frac{X_i}{\theta} = 2\theta^{-1}X_i$ tem densidade

$$f_{\dot{X}_i}(x) = \frac{1}{2}f_{X_i}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}e^{-x/2}, \quad x > 0 \tag{237}$$

que é a densidade de χ^2_2, pois $\frac{1}{2}e^{-x/2} = \frac{1}{2^1\Gamma(1)}e^{-x/2}x^{1-1}$.
Assim, $\sum_{i=1}^n \dot{X}_i \sim \chi^2_{2n}$, para $\dot{X}_i$ i.i.d.
Logo

$$R_c = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \frac{2}{\theta_0}\sum_{i=1}^n x_i > k_3\right\} \tag{238}$$

Definimos a função $Q : \mathcal{X} \to \mathbb{R}_+$

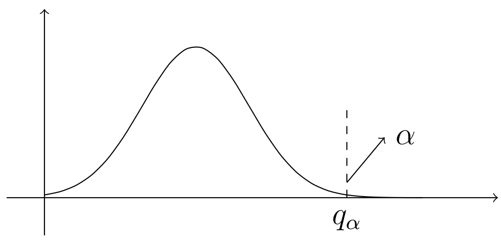
$$Q(x) = \frac{2}{\theta_0}\sum_{i=1}^n x_i \tag{239}$$

Note que para $X = (x_1, \ldots, x_n)^T$, $Q(X) \overset{H_0}{\sim} \chi^2_{2n}$.
A região crítica fica definida como:

$$R_c = \{x \in \mathcal{X} : Q(x) > q_\alpha\} \tag{240}$$

em que q_α é tal que

$$P(Q > q_\alpha) = \alpha, \quad Q \sim \chi^2_{2n} \tag{241}$$



Resumo Teste χ^2

Suposição

$$X_1, \ldots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} \exp(\theta)$$

Hipóteses

$$H_0 : \theta = \theta_0$$
$$H_1 : \theta = \theta_1 \quad (\theta_1 > \theta_0)$$

Estatística de Teste

$$Q(X) = \frac{2}{\theta_0} \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \chi^2_{2n} \quad \text{para } H_0 \tag{242}$$
$$Q_{\text{cal}} = Q(x)$$

Regra de decisão

Rejeita-se H_0 se $Q_{\text{cal}} > q_\alpha$
Rejeita-se H_0 se $P(Q > Q_{\text{cal}}) < \alpha$

Questão (4.6)

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra de $X \sim \text{Bernoulli}(p)$ para $p \in (0, 1)$ desconhecida. Encontre o teste MP para:

$$H_0 : p = p_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : p > p_0$$

Solução

Como o contexto é do tipo simples vs simples, aplica-se o LNP. A verossimilhança associada é dada por:

$$L_i \triangleq L(p_i; x) = \prod_{k=1}^{n} \left[p_i^{x_k} (1 - p_i)^{1 - x_k} \right] \tag{243}$$
$$= p_i^{\sum_{k=1}^{n} x_k} \cdot (1 - p_i)^{n - \sum_{k=1}^{n} x_k}$$
$$= \left(\frac{p_i}{1 - p_i} \right)^{\sum_{k=1}^{n} x_k} \cdot (1 - p_i)^n$$

O Teste MP é da forma:

$$\text{Rejeita-se } H_0 \quad \text{se e só se} \quad \left[\frac{L_1}{L_0} > k \right]$$

Note que:

$$\frac{L_1}{L_0} = \left[\frac{p_1(1 - p_0)}{p_0(1 - p_1)} \right]^{\sum_{i=1}^{n} x_i} \cdot \left[\frac{1 - p_1}{1 - p_0} \right]^n$$

$$A_1 > 1 \qquad A_2 < 1$$

Daí, a região crítica é dada por:

$$R_c = \left\{ x \in \mathcal{X} : A_1^{\sum_{i=1}^n x_i} \cdot A_2^n > k \right\}$$

$$= \left\{ x \in \mathcal{X} : \sum_{i=1}^n x_i > \frac{\log\left(A_2^{-n} k\right)}{\log(A_1)} \right\} = \left\{ x \in \mathcal{X} : \sum_{i=1}^n x_i > k_1 \right\}$$

A função correspondente é dada por

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } \sum_{i=1}^n x_i > k_1, \\ \delta, & \text{se } \sum_{i=1}^n x_i = k_1, \\ 0, & \text{se } \sum_{i=1}^n x_i < k_1. \end{cases} \tag{244}$$

Em que o inteiro positivo k_1 e $\delta \in (0,1)$ são escolhidos tais que o teste tem tamanho α.

Note que sob H_0, $\sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Binomial}(n, p_0)$.

Primeiramente, determine o menor inteiro k_1 tal que

$$P_{p_0}\left[\sum_{i=1}^n X_i > k_1\right] < \alpha, \tag{245}$$

então

$$\delta = \frac{\alpha - P_{p_0}\left[\sum_{i=1}^n X_i > k_1\right]}{P_{p_0}\left[\sum_{i=1}^n X_i = k_1\right]}, \tag{246}$$

em que

$$P_{p_0}\left[\sum_{i=1}^n X_i = k_1\right] = \binom{n}{k_1} p_0^{k_1}(1-p_0)^{n-k_1}, \tag{247}$$

e

$$P_{p_0}\left[\sum_{i=1}^n X_i > k_1\right] = \sum_{j=k_1+1}^n \binom{n}{j} p_0^j (1-p_0)^{n-j}. \tag{248}$$

Da discussão anterior, a probabilidade o erro do Tipo I é dada por:

$$\alpha = \delta \cdot P_{p_0}\left[\sum_{i=1}^n X_i = k_1\right] + P_{p_0}\left[\sum_{i=1}^n X_i > k_1\right] \tag{249}$$

05/11/25

Q(4.7) Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra de $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ para $\lambda > 0$ desconhecido. Derive teste MP para:

$$H_0 : \lambda = \lambda_0 \quad \text{vs} \quad H_i : \lambda = \lambda_1 \ (\lambda_1 > \lambda_0) \tag{250}$$

Solução: Como as hipóteses são simples, o LNP se aplica. A verossimilhança é dada por:

$$L_i \triangleq L(\lambda_i; x) = \prod_{k=1}^n \left[e^{-\lambda_i} \frac{\lambda_i^{x_k}}{x_k!} \right] \tag{251}$$

$$= e^{-n\lambda_i} \cdot \lambda_i^{\sum_{k=1}^{n} x_k} \cdot \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k!} \tag{252}$$

O teste MP é da forma:

$$\text{Rejeitar } H_0 \quad \text{se e somente se} \quad \frac{L_1}{L_0} > k$$

Note que:

$$\frac{L_1}{L_0} = \left[\frac{e^{-\lambda_1}}{e^{-\lambda_0}}\right]^n \cdot \left[\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right]^{\sum_{k=1}^{n} x_k} = e^{-n(\lambda_1-\lambda_0)} \cdot \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)^{\sum_{k=1}^{n} x_k} \tag{253}$$

Daí, a região crítica, é dada por:
Para $\mathcal{X} = \mathbb{Z}_+^n$:

$$R_c = \left\{x \in \mathcal{X} : \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)^{\sum x_i} e^{-n(\lambda_1-\lambda_0)} > k\right\} \tag{254}$$

$$= \left\{x \in \mathcal{X} : \sum x_i \log\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right) > n(\lambda_1 - \lambda_0) + \log k\right\} \tag{255}$$

$$= \left\{x \in \mathcal{X} : \sum x_i > \frac{n(\lambda_1 - \lambda_0) + \log k}{\log(\lambda_1/\lambda_0)}\right\} \tag{256}$$

$$R_c = \left\{x \in \mathcal{X} : \sum_{i=1}^{n} x_i > k_1\right\} \tag{257}$$

A função crítica corresponde a:

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & \sum_{i=1}^{n} x_i > k_1 \\ \delta, & \sum_{i=1}^{n} x_i = k_1 \\ 0, & \sum_{i=1}^{n} x_i < k_1 \end{cases} \tag{258}$$

Note que sob H_0,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \sim \text{Poisson}(n\lambda_0) \tag{259}$$

Primeiramente, determine o menor inteiro k_1 tal que:

$$P_{n\lambda_0}\left\{\sum_{i=1}^{n} x_i > k_1\right\} < \alpha \tag{260}$$

e

$$\delta = \frac{\alpha - P_{n\lambda_0}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i > k_1\right]}{P_{n\lambda_0}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = k_1\right]} \tag{261}$$

em que,

$$P_{n\lambda_0}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = k_1\right] = \frac{(n\lambda_0)^{k_1} e^{-n\lambda_0}}{k_1!} \tag{262}$$

e

$$P_{n\lambda_0}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i > k_1\right] = \sum_{l=k_1+1}^{\infty} \frac{(n\lambda_0)^l e^{-n\lambda_0}}{l!} \tag{263}$$

Note que um teste MP de nível α simples depende de uma estatística (conjuntamente) suficiente.

Considere uma discussão mais geral. Pelo LFN, seja $L(\cdot;x)$ a verossimilhança associada a $x \in \mathcal{X}^n$. Então:

$$L(\theta;x) = g(T(x);\theta)\cdot h(x), \quad \forall x \in \mathcal{X}^n, \text{ em que } h(x) \text{ independe de } \theta. \tag{264}$$

Mostramos que LNP o teste MP rejeita $H_0 : \theta = \theta_0$ em favor de $H_1 : \theta = \theta_1$ para valores grandes de $L(\theta_1;x)/L(\theta_0;x)$:

$$\frac{L(\theta_1;x)}{L(\theta_0;x)} = \frac{g(T(x);\theta_1)}{g(T(x);\theta_0)} \tag{265}$$

que implica que a rejeição de H_0 acontece também se $\frac{g(T(x);\theta_1)}{g(T(x);\theta_0)}$ é grande.

O LNP também pode ser utilizado para comparar distribuições com densidade distintas.

Q(4.8) Seja X uma v.a com densidade $f(x)$ para $x \in \mathbb{R}$. Considere duas outras densidades:

$$f_0(x) = \begin{cases} \frac{3x^2}{64}, & 0 < x < 4 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \quad \text{e} \quad f_1(x) = \begin{cases} \frac{3}{16}\sqrt{x}, & 0 < x < 4 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Determine o teste MP de nível α para

$$H_0 : f(x) = f_0(x), \quad H_1 : f(x) = f_1(x)$$

Solução:

Como as hipóteses são do tipo simples x simples, aplica-se LNP. Assim:

$$\text{Rejeita-se } H_0 \text{ se e só se } \left[\frac{f_1(x)}{f_0(x)} > k\right]$$

Note que:

$$\frac{f_1(x)}{f_0(x)} = \frac{\frac{3}{16}x^{1/2}}{\frac{3}{64}x^2} = \frac{3\cdot 64\cdot x^{1/2}}{3\cdot 16\cdot x^2} = 4\cdot x^{-3/2} \tag{266}$$

E o teste pode ser escrito como: rejeita-se H_0 se x pertence a

$$R_c = \{x \in (0,4) : 4x^{-3/2} > k\} \tag{267}$$

$$= \{x \in (0,4) : x < \left(\frac{4}{k}\right)^{2/3}\} \tag{268}$$

$$= \{x \in (0,4) : x < k_1\} \tag{269}$$

Este teste tem tamanho dado por

$$\alpha = P_{f_0}\{X < k_1\} = \int_0^{k_1} \frac{3}{64}x^2\,dx \tag{270}$$

$$\alpha = \frac{3}{64}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^{k_1} = \frac{k_1^3}{64} \tag{271}$$

$$\Rightarrow k_1 = (64\alpha)^{1/3} = 4\alpha^{1/3} \tag{272}$$

O poder associado é dado por

$$P_{f_1}\{X < k_1\} = \int_0^{k_1} \frac{3}{16}\sqrt{x}\,dx \tag{273}$$

$$= \frac{3}{16} \cdot \frac{x^{3/2}}{3/2}\Big|_0^{k_1} = \frac{k_1^{3/2}}{8} = \alpha^{1/2} \tag{274}$$

Q(4.9)

Sejam X_1 e X_2 duas v.a.'s independentes com densidade $f(x)$. Determine o teste MP de nível α para

$$H_0 : f(x) = f_0(x) \quad \text{vs} \quad H_1 : f(x) = f_1(x) \tag{275}$$

Solução

Do LNP, rejeita-se H_0 para (x_1, x_2) em

$$R_c = \left\{ (x_1, x_2) \in (0,4) \times (0,4) : \frac{f_1(x_1) f_1(x_2)}{f_0(x_1) f_0(x_2)} > k \right\} \tag{276}$$

$$= \left\{ (x_1, x_2) \in (0,4) \times (0,4) : 4x_1^{-3/2} \cdot 4x_2^{-3/2} > k \right\} \tag{277}$$

$$= \left\{ (x_1, x_2) \in (0,4) \times (0,4) : \left(\frac{16}{k}\right)^{2/3} > x_1 x_2 \right\} \tag{278}$$

$$= \{ (x_1, x_2) \in (0,4) \times (0,4) : x_1 x_2 < K_1 \} \tag{279}$$

Note que

$$F_0(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{x^3}{64}, & 0 < x < 4 \\ 1, & x \geq 4 \end{cases} \tag{280}$$

Uma vez que (para $x \in (0,4)$)

$$F_0(x) = \int_0^x \frac{3}{64} t^2 \, dt = \frac{3}{64} \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^x = \frac{x^3}{64} \tag{281}$$

Como discutido sob H_0

$$-2 \log F_0(x_i) \sim \chi^2_2, \quad \text{para } i = 1, 2 \tag{282}$$

Daí,

$$R_c = \{ (x_1, x_2) \in (0,4) \times (0,4);\ F_0(x_1) \cdot F_0(x_2) < k_2 \} \tag{283}$$

$$F_0(x) = \frac{x^3}{64} \quad \Rightarrow \quad \frac{x_1^3}{64} \cdot \frac{x_2^3}{64} < k_2 \tag{284}$$

$$\{ (x_1, x_2) \in (0,4) \times (0,4);\ \sum_{i=1}^{2} -2 \log F_0(x_i) > -2 \log k_2 \} \tag{285}$$

Note que

$$Q(x_1, x_2) \triangleq -2 \sum_{i=1}^{2} \log F_0(x_i) \sim \chi^2_4 \tag{286}$$

Daí, o teste MP de nível α é:

$$\text{Rejeita-se } H_0 \text{ se e só se } Q(x_1, x_2) > \chi^2_{4,\alpha} \tag{287}$$

tal que

$$P_2(Q > \chi^2_{4,\alpha}) = \alpha \quad \text{e} \quad Q \sim \chi^2_4 \tag{288}$$

4.4 Teste para H composta unilateral

Considere estudar hipóteses do tipo

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{vs} \quad \begin{cases} H_1 : \theta > \theta_0 \\ H_1 : \theta < \theta_0 \end{cases} \tag{4.4.1}$$

No que segue, apresentam-se abordagem para deduzir teste UMP para (4.4.1).

4.4.1 Teste UMP via Lema de Neyman Pearson

Inicialmente fixemos um valor arbitrário $\theta_1 \in \Theta$ tal que $\theta_1 > \theta_0$. A hipótese alternativa de (4.4.1) pode ser escrita como $H_1 : \theta = \theta_1$.

Agora tem-se um problema de duas hipóteses simples e, pelo LNP, existe um teste MP tal que para

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \theta = \theta_1 \tag{289}$$

Se esse teste particular não é afetado pela escolha de θ_1, então diz-se que tal teste é UMP.

07/11/25

Q(4.10)

Sejam $x_1, \ldots, x_n$ uma amostra de $X \sim N(0, \sigma^2)$, em que $\sigma^2 > 0$ e é desconhecido. Fixando $\alpha \in (0, 1)$, considere obter o teste **UMP** de nível α para

$$H_0 : \sigma = \sigma_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \sigma < \sigma_0, \quad \text{em que} \quad \sigma_0 > 0. \tag{290}$$

Solução

Fixemos $\sigma_1 \in \Theta = \mathbb{R}^+$ tal que $\sigma_1 < \sigma_0$ e reescrevemos a hipótese alternativa como

$$H_1' : \sigma = \sigma_1 \ (\sigma_1 < \sigma_0). \tag{291}$$

Assim, o LNP pode ser aplicado para $H_0 \times H_1'$.

A função de verossimilhança é dada por:

$$L_k \triangleq L(\sigma_k; x) = \prod_{j=1}^{n} f(x_j; \sigma_k) = \prod_{j=1}^{n} (2\pi\sigma_k^2)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_k^2}\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right\}, \quad k = 0, 1. \tag{292}$$

Portanto, H_0 é rejeitada quando o vetor $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ pertence a (para $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$):

$$\begin{aligned} R &= \left\{x \in \mathcal{X} : \frac{L_1}{L_0} > k\right\} \\ &= \left\{x \in \mathcal{X} : \left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2}\right)^{-n/2} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \left(\frac{1}{\sigma_0^2} - \frac{1}{\sigma_1^2}\right)} > k\right\} \\ &= \left\{x \in \mathcal{X} : -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \left(\frac{\sigma_0^2 - \sigma_1^2}{\sigma_0^2\sigma_1^2}\right) > \log\left[k\left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2}\right)^{n/2}\right]\right\}. \end{aligned} \tag{293}$$

$$= \left\{ x \in \mathcal{X} : \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \left(\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_0^2}\right) < \underbrace{-2\log\left[k\left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2}\right)^{n/2}\right]}_{k_1} \right\}$$

$$= \left\{ x \in \mathcal{X} : \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{\sigma_0^2} < \underbrace{\frac{\sigma_0^2}{\sigma_0^2 - \sigma_1^2} k_1}_{k_2} \right\}$$

Definamos a função $Q : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^*$ tal que

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i}{\sigma_0}\right)^2$$

Note que para $X = (x_1, \ldots, x_n)^T$, $Q(X) \overset{\text{sob } H_0}{\sim} \chi_n^2$. Assim o teste fica definido como: rejeita-se H_0 se

$$x \in \mathcal{R}_c := \{x \in \mathcal{X} : Q(x) < \chi^2_{n, 1-\alpha}\}$$

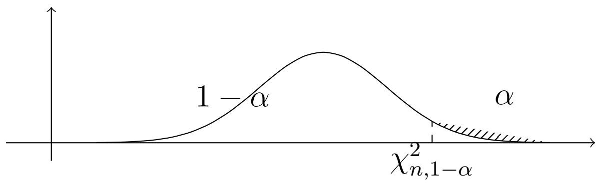
em que $\chi^2_{n,1-\alpha}$ é solução de

$$P_{H_0}\left\{Q < \chi^2_{n,1-\alpha}\right\} = \alpha$$

Finalmente

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & Q(x) < \chi^2_{n,1-\alpha} \\ 0, & Q(x) \geq \chi^2_{n,1-\alpha} \end{cases}$$

é a função crítica do teste UMP para $H_0 \times H_1$, também além de ser o teste MP para $H_0 \times H_1$.



07/11/25

4.4.2 Teste UMP via razão de verossimilhanças monótonas

Sejam $x_1, \ldots, x_n$ uma amostra de X tendo fdp (ou FMP) $f(x;\theta)$ para $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$ e $x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}$.

Definição (4.4.2.1) [Razão de verossimilhanças monótonas - RVM]

A família $\{f(x;\theta), \theta \in \Theta\}$ tem RVM em uma estatística $T(x) \in \mathbb{R}$ se pode ser verificado o seguinte resultado: para todo $\theta^*, \theta \in \Theta$ e $x \in \mathcal{X}^n$, vale-se

$$\frac{L(\theta^*;x)}{L(\theta;x)} \text{ é não decrescente em } T(x) \text{ sempre que } \theta^* > \theta \tag{294}$$

Seguem duas ilustrações para a Def. (4.4.2.1):

Exemplo: Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra de $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ com μ desconhecida e $\sigma \in \mathbb{R}^+$ conhecido. Suponha que $\mu^* \in \mathbb{R}$ tal que $\mu^* > \mu$ e seja

$$T(x) = \sum_{i=1}^n x_i \quad \text{como } x^t = (x_1, \ldots, x_n). \tag{295}$$

Assim:

$$\frac{L(\mu^*;x)}{L(\mu;x)} = \frac{\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\mu^* \sum_{i=1}^n x_i + n(\mu^*)^2\right)\right]}{\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\mu \sum_{i=1}^n x_i + n\mu^2\right)\right]} \tag{296}$$

$$= \exp\left[\frac{\mu^* - \mu}{\sigma^2}\sum_{i=1}^n x_i + \frac{n}{2\sigma^2}\left(\mu^2 - (\mu^*)^2\right)\right] = \exp\left[\frac{\mu^* - \mu}{\sigma^2}T(x) + \frac{n}{2\sigma^2}\left(\mu^2 - (\mu^*)^2\right)\right] \tag{297}$$

que é não decrescente em $T(x)$ para $\mu^* > \mu$. Logo $f(x;\mu)$ tem RVM.

Ex: Sejam $x_1, \ldots, x_n$ uma amostra de X tendo uma família de fdp (ou fmp)

$$g(x;\theta) = a(\theta) \cdot c(x) \cdot e^{t(x) \cdot b(\theta)}, \quad \text{para } t \in \mathbb{X} \subset \mathbb{R} \text{ e } \theta \in \Theta.$$

Para $\theta^*, \theta \in \Theta$ tal que $\theta^* \geq \theta$,

$$\frac{l(\theta^*;\mathbf{x})}{l(\theta;\mathbf{x})} = \frac{\prod_{i=1}^n g(x_i;\theta^*)}{\prod_{i=1}^n g(x_i;\theta)} = \frac{a^n(\theta^*)\prod_{i=1}^n c(x_i) \cdot \exp\left\{\sum_{i=1}^n t(x_i) b(\theta^*)\right\}}{a^n(\theta)\prod_{i=1}^n c(x_i) \cdot \exp\left\{\sum_{i=1}^n t(x_i) b(\theta)\right\}} \tag{298}$$

$$= \frac{a^n(\theta^*)}{a^n(\theta)} \cdot \exp\left\{\sum_{i=1}^n t(x_i)\left[b(\theta^*) - b(\theta)\right]\right\}.$$

Assim $\{g(x;\theta) : \theta \in \Theta\}$ tem RVM se $b(\theta)$ é não decrescente.
Exemplo (Poisson): Seja $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$, então

$$f(x;\lambda) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = e^{-\lambda} \cdot \frac{1}{x!} \cdot e^{x \log \lambda},$$

ou seja,

$$f(x;\lambda) = a(\lambda) \cdot c(x) \cdot e^{t(x) \cdot b(\lambda)},$$

onde $a(\lambda) = e^{-\lambda}$, $c(x) = \frac{1}{x!}$, $t(x) = x$ e $b(\lambda) = \log \lambda$.

Como $b(\lambda) = \log \lambda$ é uma função não decrescente em $\lambda > 0$, a família Poisson tem RVM.

Teorema (4.4.2.1) Teo. Karlin-Rubin

Assuma que se deseja testar:

$$H_0 : \theta \leq \theta_0, \quad H_1 : \theta > \theta_0 \tag{299}$$

Considere $T = T(X) \in \mathbb{R}$ (para $X^n : (x_1, \ldots, x_n)$ como uma v.a.) como uma estatística suficiente para $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$.

Assuma que $\{g(t;\theta) : \theta \in \Theta\}$ é uma família de f.d.p (ou fmp) induzida de T com RVM. Então o teste Υ com função crítica:

$$\psi_\Upsilon(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } T(x) > k \\ 0, & \text{se } T(x) < k \end{cases} \tag{300}$$

corresponde a um teste UMP de nível α se k é escolhido tal que:

$$E_{\theta_0}\left[\psi_\Upsilon(x)\right] = \alpha \tag{301}$$

Q (4.12)

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma a.a. de $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ com $\mu \in \mathbb{R}$ desconhecida e $\sigma^2 \in \mathbb{R}$ conhecida. Encontre o teste UMP para:

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \mu > \mu_0, \quad \text{de nível } \alpha \tag{302}$$

Solução

Pelo LFN:

$$L(\mu; x) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\mu\sum_{i=1}^n x_i + n\mu^2\right)\right] \tag{303}$$

$$= \underbrace{(2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n x_i^2}}_{h(x)} \cdot \underbrace{\exp\left[-\frac{n}{2\sigma^2}\mu^2 + \frac{2\mu}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n x_i\right]}_{g(t;\mu) \text{ para } T(x)=\sum_{i=1}^n x_i} \tag{304}$$

$T(X) = \sum x_i$ é suficiente para μ e tem densidade induzida:

$$f(t;\mu) = (2\pi n\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2n\sigma^2}(t - n\mu)^2\right\} \tag{305}$$

e para $\mu^* > \mu$:

$$\frac{f(t;\mu^*)}{f(t;\mu)} = \exp\left\{\frac{1}{2n\sigma^2}\left[t^2 - 2nt\mu^* + n^2(\mu^*)^2 - t^2 + 2nt\mu - n^2\mu^2\right]\right\} \tag{306}$$

$$= \exp\left\{\frac{1}{2n\sigma^2}\left[2nt(\mu - \mu^*) + n^2\left((\mu^*)^2 - \mu^2\right)\right]\right\} \tag{307}$$

que é não decrescente em termos de t, e portanto $\{f(t;\mu) : \mu \in \mathbb{R}\}$ tem RVM.
Pelo Teo K.R., o teste Υ com função crítica:

$$\psi_\Upsilon(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } T(x) > k, \\ 0, & \text{se } T(x) < k \end{cases} \quad \text{com} \quad E_{\theta_0}\left[\psi_\Upsilon(x)\right] = \alpha \tag{308}$$

ou equivalentemente:

$$\psi_\Upsilon(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } \sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sigma} > z_\alpha, \\ 0, & \text{se } \sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sigma} < z_\alpha \end{cases} \tag{309}$$

4.5 Teste para H_1 composta bilateral

Considere testar:

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \theta \neq \theta_0 \tag{310}$$

Para θ fixado. Existe teste UMP?
Sim em algumas situações e não em outras.
Vamos considerar dois exemplos.

Ex. Para $X_1, \ldots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} X \sim N(\mu, \sigma^2)$ com $\mu \in \mathbb{R}$ desconhecido e σ^2 conhecido. Para

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \mu \neq \mu_0 \tag{311}$$

não existe teste UMP.

Ex. Para $X_1, \ldots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} X \sim U(0, \theta)$. Há um teste UMP para

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \theta \neq \theta_0 \tag{312}$$

4.5.1 Exemplo de não existência do teste UMP

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra de $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ com $\mu \in \mathbb{R}$ desconhecido e $\sigma^2 > 0$ conhecido. Como discutido,

$$T(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \tag{313}$$

é suficiente para μ.

Considere testar:

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \mu \neq \mu_0 \tag{314}$$

Admita que existe o teste UMP se quiséssemos testar:

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \mu > \mu_0 \tag{315}$$

Prova-se que o seguinte teste é UMP para $\alpha \in (0, 1)$ nível nominal α tal que:

$$\psi_\Upsilon(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } \sqrt{n}\frac{(\bar{X}_n - \mu_0)}{\sigma} > z_\alpha \\ 0, & \text{o.c.} \end{cases}$$

Por outro lado, para testar $H_0 : \mu = \mu_0$ vs $H_1 : \mu < \mu_0$, vale-se o seguinte argumento, para $\mu^* < \mu$:

$$\frac{f(t; \mu^*)}{f(t; \mu)} = \exp\left\{ \frac{1}{2n\sigma^2} \left[2nt(\mu^* - \mu) + n^2(\mu^{*2} - \mu^2) \right] \right\}$$

Tem RVM não crescente, então o seguinte teste de nível α é UMP.

Pelo teorema KR, ψ_Υ tal que

$$\psi_\Upsilon(x) = \begin{cases} 1, & \sqrt{n}\frac{(\bar{X}_n - \mu_0)}{\sigma} < -z_\alpha \\ 0, & \sqrt{n}\frac{(\bar{X}_n - \mu_0)}{\sigma} \geq -z_\alpha \end{cases}$$

Suponha que x é uma amostra tal que a estatística calculada

$$z_{\text{cal}} = \sqrt{n}\frac{(\bar{X}_n - \mu_0)}{\sigma}$$

não excede $-z_\alpha$.

Então $\psi_\Upsilon(x) = 0$ e $\psi_\Upsilon(x) = 1$ e, portanto, $\psi_\Upsilon(x)$ fica indefinido.