Entendendo a Desigualdade Fundamental do LNP

Por Que Multiplicamos pela Função Crítica?

Material Explicativo Detalhado

Novembro 2025

Sumário

1 Introdução: A Dúvida Principal

Ponto Crucial para Entender

Sua Pergunta

Você entendeu a razão de verossimilhanças:

$$\frac{L(\theta_1; x)}{L(\theta_0; x)} \quad \text{ou} \quad L(\theta_1; x) - k \cdot L(\theta_0; x)$$

Mas não entendeu por que precisamos multiplicar isso pela diferença das funções críticas:

$$[\psi_\Upsilon(x) - \psi_{\Upsilon^*}(x)]$$

Por que essa multiplicação é necessária para provar a otimalidade?

O Que Vamos Explicar

Este documento vai responder essa dúvida em 4 etapas:

1. **O que é a função crítica $\psi(x)$?** (e por que ela é importante)
2. **Por que comparar dois testes?** (ψ_Υ vs ψ_{Υ^*})
3. **A mágica da multiplicação:** Como ela conecta "decisão"com "evidência"
4. **Visualização completa:** Exemplos gráficos passo a passo

2 Parte 1: O Que É a Função Crítica $\psi(x)$?

2.1 Definição Intuitiva

Definição: Função Crítica

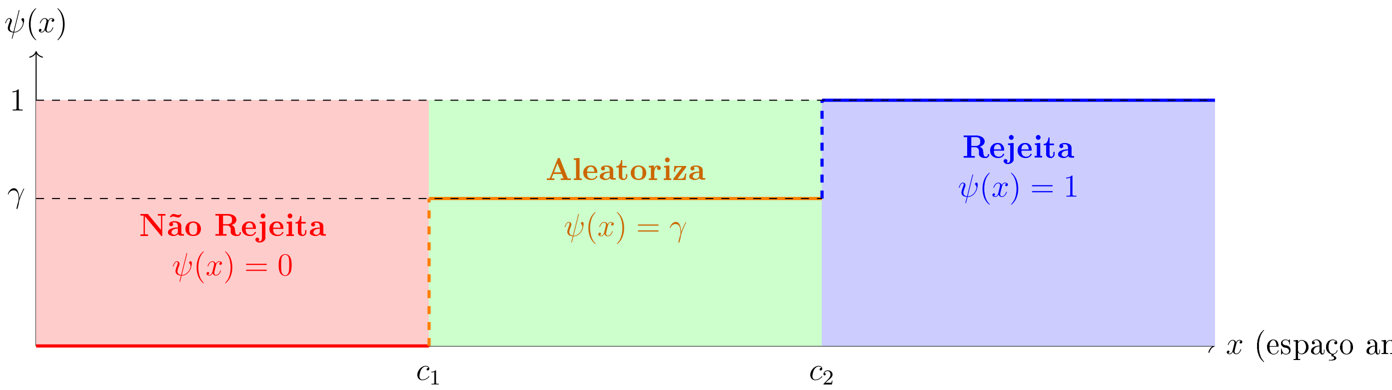
A **função crítica** (ou função do teste) $\psi(x)$ é simplesmente:

$$\psi(x) = P[\text{Rejeitar } H_0 \mid \text{Observamos } X = x]$$

Interpretação:

- $\psi(x) = 1$: Se observarmos x, rejeitamos H_0 com certeza (100%)
- $\psi(x) = 0$: Se observarmos x, NÃO rejeitamos H_0 (0%)
- $0 < \psi(x) < 1$: Rejeitamos com probabilidade $\psi(x)$ (teste aleatorizado)

2.2 Visualização: Função Crítica no Espaço Amostral



Intuição Visual

O que esse gráfico mostra:
A função crítica $\psi(x)$ é como um "sinal de trânsito"para cada valor possível de x:

- **Zona Vermelha** ($x < c_1$): Pare! Não rejeite H_0
- **Zona Amarela** ($c_1 \leq x < c_2$): Atenção! Aleatorize
- **Zona Azul** ($x \geq c_2$): Prossiga! Rejeite H_0

Analogia: Se o espaço amostral fosse uma estrada, $\psi(x)$ indica "quão fortemente devemos rejeitar H_0"em cada ponto da estrada.

3 Parte 2: Por Que Comparar Dois Testes?

3.1 O Objetivo do LNP

O Que o LNP Quer Provar

O Lema de Neyman-Pearson quer provar que:

$$\boxed{\text{O teste } \Upsilon \text{ tem MAIS PODER que qualquer outro teste } \Upsilon^* \text{ de mesmo nível}}$$

Matematicamente:

$$Q_{\Upsilon}(\theta_1) \geq Q_{\Upsilon^*}(\theta_1)$$

onde $Q(\theta)$ é a função poder (probabilidade de rejeitar H_0 quando o verdadeiro parâmetro é θ).

3.2 Por Que Precisamos de Dois Testes?

Resposta à Sua Dúvida

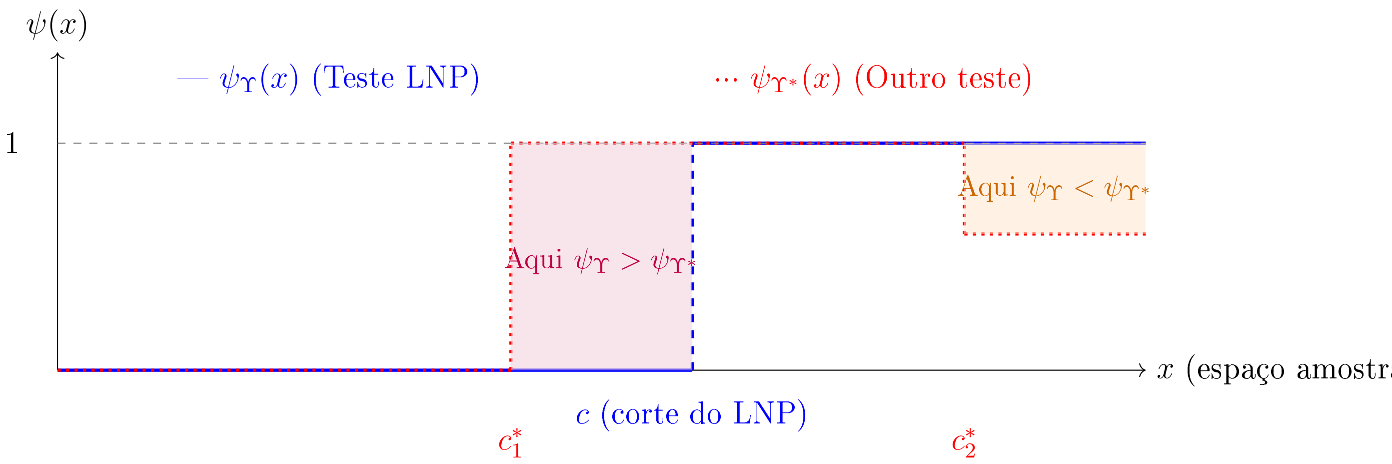
Resposta Curta: Para provar que algo é "o melhor", precisamos compará-lo com todos os outros!
Analogia:

- Para provar que Usain Bolt é o mais rápido, não basta dizer "ele é rápido"
- Precisamos compará-lo com TODOS os outros corredores
- Se ele for mais rápido que qualquer outro corredor, então é o campeão

No LNP:

- Υ é nosso "candidato a campeão"(teste proposto pelo LNP)
- Υ^* é *qualquer outro* teste de nível α
- Se Υ tiver mais poder que qualquer Υ^*, então é o Teste Mais Poderoso!

3.3 Visualizando Dois Testes Diferentes



Intuição Visual

O que vemos:

- Na região roxa: $\psi_\Upsilon(x) > \psi_{\Upsilon^*}(x)$
  O teste LNP rejeita mais que o teste rival
- Na região laranja: $\psi_\Upsilon(x) < \psi_{\Upsilon^*}(x)$
  O teste LNP rejeita menos que o teste rival

Pergunta natural: Se os dois testes rejeitam em lugares diferentes, como sabemos qual é melhor?
Resposta: É aí que entra a *razão de verossimilhanças*! Ela nos diz *onde* cada teste deveria estar rejeitando!

4 Parte 3: A Mágica da Multiplicação

4.1 Por Que Multiplicar?

Ponto Crucial para Entender

A Questão Central (Sua Dúvida):
Por que a desigualdade fundamental é:

$$[\psi_\Upsilon(x) - \psi_{\Upsilon^*}(x)] \cdot [L(\theta_1; x) - k \cdot L(\theta_0; x)] \geq 0$$

Por que não basta analisar apenas $L(\theta_1; x) - k \cdot L(\theta_0; x)$?

Resposta à Sua Dúvida

A Resposta em Três Níveis

Nível 1: O Que Cada Fator Representa

- **Fator 1:** $[\psi_\Upsilon(x) - \psi_{\Upsilon^*}(x)]$
  = "DECISÃO: onde o teste LNP difere do teste rival"
- **Fator 2:** $[L(\theta_1; x) - k \cdot L(\theta_0; x)]$
  = "EVIDÊNCIA: quão forte é a evidência a favor de H_1 neste ponto"

Nível 2: Por Que Multiplicar Conecta Decisão com Evidência A multiplicação cria uma "compatibilidade":

Se há EVIDÊNCIA FORTE para H_1	$[L_1 - kL_0 > 0]$
então o teste LNP REJEITA MAIS	$[\psi_\Upsilon > \psi_{\Upsilon^*}]$
$\Rightarrow$ Produto POSITIVO	[ambos > 0]

Se há EVIDÊNCIA FORTE para H_0	$[L_1 - kL_0 < 0]$
então o teste LNP REJEITA MENOS	$[\psi_\Upsilon < \psi_{\Upsilon^*}]$
$\Rightarrow$ Produto POSITIVO	[ambos < 0]

Nível 3: O Truque Matemático Ao multiplicar e integrar, transformamos a comparação "ponto a ponto"em uma comparação "global"(o poder total):

$$\int [\psi_\Upsilon - \psi_{\Upsilon^*}] \cdot [L_1 - kL_0] dx \geq 0$$

Essa integral, quando expandida, se torna:

$$\underbrace{\int \psi_\Upsilon L_1 dx}_{Q_\Upsilon(\theta_1)} - \underbrace{\int \psi_{\Upsilon^*} L_1 dx}_{Q_{\Upsilon^*}(\theta_1)} \geq (\text{termos com } L_0)$$

Ou seja, a multiplicação é o "truque algébrico"que transforma a comparação pontual em comparação de poderes!

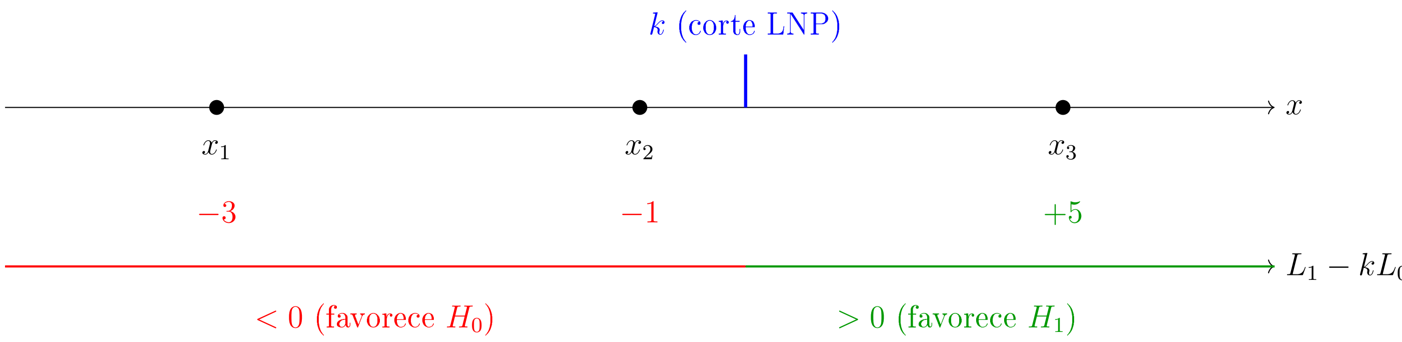
4.2 Exemplo Visual Detalhado

Vamos visualizar ponto por ponto como a multiplicação funciona.

Exemplo: Três Pontos Amostrais

Considere três pontos no espaço amostral: x_1, x_2, x_3.

4.2.1 Configuração do Exemplo



4.2.2 Decisão dos Testes

Ponto	$\psi_\Upsilon(x)$ (LNP)	$\psi_{\Upsilon^*}(x)$ (Rival)	$\psi_\Upsilon - \psi_{\Upsilon^*}$
$x_1 = 2$	0 (não rejeita)	0.3 (rejeita um pouco)	-0.3
$x_2 = 6$	0 (não rejeita)	0.8 (rejeita bastante)	-0.8
$x_3 = 10$	1 (rejeita totalmente)	0.5 (rejeita parcial)	$+0.5$

4.2.3 A Multiplicação em Ação

Ponto	$\psi_\Upsilon - \psi_{\Upsilon^*}$	$L_1 - kL_0$	Produto
x_1	-0.3 (negativo)	-3 (negativo)	$(-0.3) \times (-3) = +0.9$ ✓
x_2	-0.8 (negativo)	-1 (negativo)	$(-0.8) \times (-1) = +0.8$ ✓
x_3	$+0.5$ (positivo)	$+5$ (positivo)	$(+0.5) \times (+5) = +2.5$ ✓

Intuição Visual

O Que Está Acontecendo?

Em x_1 e x_2: (pontos onde evidência favorece H_0)

- Evidência: $L_1 - kL_0 < 0$ (dados favorecem H_0)
- Teste LNP: $\psi_\Upsilon = 0$ (NÃO rejeita — correto!)
- Teste rival: $\psi_{\Upsilon^*} > 0$ (rejeita um pouco — errado!)
- Diferença: $\psi_\Upsilon - \psi_{\Upsilon^*} < 0$ (LNP rejeita MENOS)
- **Produto:** (negativo) · (negativo) = **POSITIVO** ✓

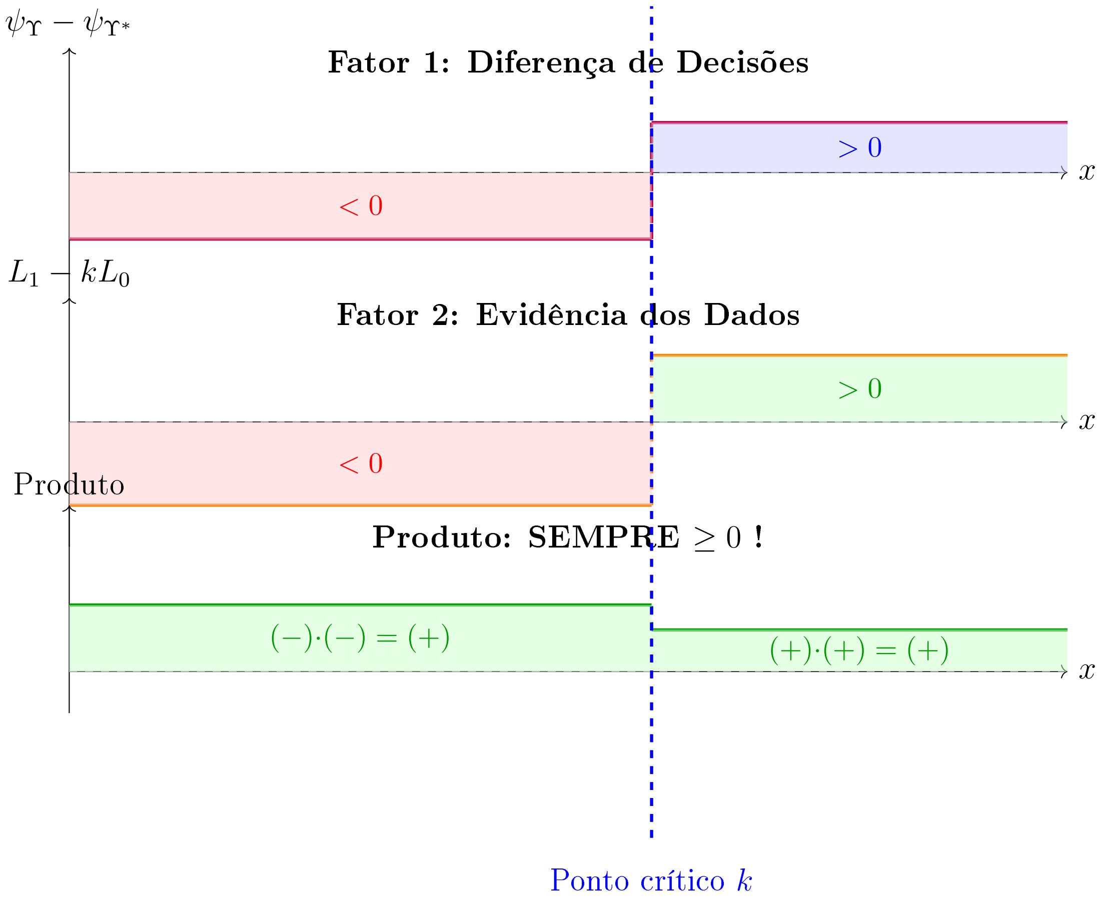
Interpretação: O teste LNP está sendo "recompensado"por NÃO rejeitar quando a evidência favorece H_0.

Em x_3: (ponto onde evidência favorece H_1)

- Evidência: $L_1 - kL_0 > 0$ (dados favorecem H_1)
- Teste LNP: $\psi_\Upsilon = 1$ (REJEITA totalmente — correto!)
- Teste rival: $\psi_{\Upsilon^*} = 0.5$ (rejeita parcialmente — subótimo!)
- Diferença: $\psi_\Upsilon - \psi_{\Upsilon^*} > 0$ (LNP rejeita MAIS)
- **Produto:** (positivo) $\cdot$ (positivo) = **POSITIVO** ✓

Interpretação: O teste LNP está sendo "recompensado"por REJEITAR mais quando a evidência favorece H_1.

4.3 Visualização Completa do Produto



Resposta à Sua Dúvida

A Resposta Final à Sua Dúvida

Por que multiplicamos pela função crítica?

1. **Conexão Lógica:** A multiplicação garante que o teste LNP está tomando as decisões certas nos lugares certos:
   - Onde a evidência favorece H_0 ($L_1 - kL_0 < 0$), o LNP rejeita MENOS ($\psi_\Upsilon - \psi_{\Upsilon^*} < 0$)
   - Onde a evidência favorece H_1 ($L_1 - kL_0 > 0$), o LNP rejeita MAIS ($\psi_\Upsilon - \psi_{\Upsilon^*} > 0$)
2. **Truque Matemático:** Quando integramos o produto sobre todo o espaço amostral:
   $$\int [\psi_\Upsilon - \psi_{\Upsilon^*}][L_1 - kL_0]dx \geq 0$$
   essa desigualdade "ponto a ponto"se transforma na desigualdade de poderes:
   $$Q_\Upsilon(\theta_1) \geq Q_{\Upsilon^*}(\theta_1)$$
3. **Prova de Otimalidade:** Sem a função crítica, teríamos apenas a evidência $L_1 - kL_0$, mas não conseguiríamos *comparar* o desempenho do teste LNP com outros testes!

Resumo em uma frase: A multiplicação é a ponte matemática que conecta "onde os testes decidem diferente"com "onde a evidência dos dados está"para provar que o LNP é ótimo.

5 Parte 4: Da Desigualdade Pontual ao Poder Global

5.1 O Passo da Integração

Por Que Integrar?

Até agora, provamos que a desigualdade vale para cada ponto x:

$$[\psi_\Upsilon(x) - \psi_{\Upsilon^*}(x)] \cdot [L(\theta_1; x) - k \cdot L(\theta_0; x)] \geq 0 \quad \forall x$$

Mas queremos comparar os *poderes totais* dos testes, não apenas pontos individuais!
Solução: Integrar sobre todo o espaço amostral.

5.2 Expandindo a Integral

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{X}^n} [\psi_\Upsilon(x) - \psi_{\Upsilon^*}(x)][L(\theta_1; x) - kL(\theta_0; x)]dx \\
&= \int \psi_\Upsilon(x)L(\theta_1; x)dx - \int \psi_{\Upsilon^*}(x)L(\theta_1; x)dx \\
&\quad - k\int \psi_\Upsilon(x)L(\theta_0; x)dx + k\int \psi_{\Upsilon^*}(x)L(\theta_0; x)dx
\end{aligned}$$

5.3 Reconhecendo as Funções Poder

Ponto Crucial para Entender

O Insight Crucial:
A integral $\int \psi(x)L(\theta; x)dx$ é exatamente a **função poder**!
Por quê? Porque $L(\theta; x)$ é a densidade conjunta sob θ, então:

$$\int \psi(x)L(\theta; x)dx = E_\theta[\psi(X)] = P_\theta[\text{Rejeitar } H_0] = Q(\theta)$$

Portanto:

$$\int \psi_\Upsilon(x)L(\theta_1; x)dx = Q_\Upsilon(\theta_1)$$

$$\int \psi_{\Upsilon^*}(x)L(\theta_1; x)dx = Q_{\Upsilon^*}(\theta_1)$$

$$\int \psi_\Upsilon(x)L(\theta_0; x)dx = Q_\Upsilon(\theta_0) = \alpha$$

$$\int \psi_{\Upsilon^*}(x)L(\theta_0; x)dx = Q_{\Upsilon^*}(\theta_0) \leq \alpha$$

5.4 O Resultado Final

Substituindo na integral expandida:

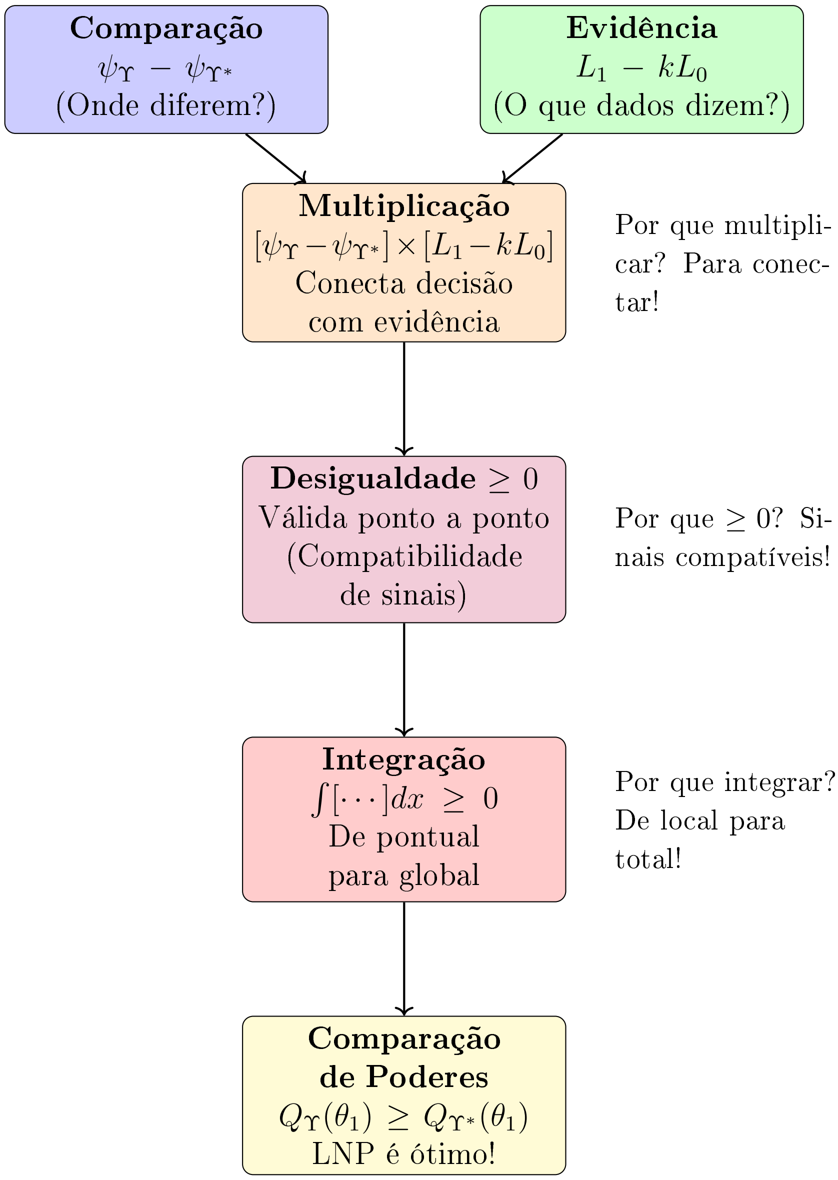
$$Q_\Upsilon(\theta_1) - Q_{\Upsilon^*}(\theta_1) - k[\alpha - Q_{\Upsilon^*}(\theta_0)] \geq 0$$

Como $Q_{\Upsilon^*}(\theta_0) \leq \alpha$, temos $\alpha - Q_{\Upsilon^*}(\theta_0) \geq 0$.
Multiplicando por $k \geq 0$: $k[\alpha - Q_{\Upsilon^*}(\theta_0)] \geq 0$.
Portanto:

$$Q_{\Upsilon}(\theta_1) - Q_{\Upsilon^*}(\theta_1) \geq k \underbrace{[\alpha - Q_{\Upsilon^*}(\theta_0)]}_{\geq 0} \geq 0$$

$$\boxed{Q_{\Upsilon}(\theta_1) \geq Q_{\Upsilon^*}(\theta_1)} \quad \square$$

6 Visualização Completa: Unindo Tudo



7 Recapitulação e Conclusão

Resposta à Sua Dúvida

Respondendo Sua Dúvida Original

Pergunta: Por que multiplicamos pela função crítica?
Resposta em Níveis de Compreensão:

Nível Intuitivo: Para provar que o teste LNP é ótimo, precisamos mostrar que ele toma as decisões certas nos lugares certos. A multiplicação garante que:

- Onde há evidência para H_0, o LNP rejeita menos (correto!)
- Onde há evidência para H_1, o LNP rejeita mais (correto!)

Nível Visual: O produto $[\psi_\Upsilon - \psi_{\Upsilon^*}] \times [L_1 - kL_0]$ é sempre ≥ 0 porque os dois fatores têm sinais compatíveis em cada ponto do espaço amostral.

Nível Matemático: A multiplicação é a ferramenta algébrica que, quando integrada, transforma a comparação pontual das decisões em uma comparação global dos poderes:

$$\int [\psi_\Upsilon - \psi_{\Upsilon^*}][L_1 - kL_0]dx \geq 0 \implies Q_\Upsilon(\theta_1) \geq Q_{\Upsilon^*}(\theta_1)$$

Nível Conceitual: Sem multiplicar pela função crítica, teríamos apenas informação sobre a evidência dos dados ($L_1 - kL_0$), mas não conseguiríamos *comparar* como diferentes testes usam essa evidência. A função crítica representa a "estratégia de decisão"de cada teste, e a multiplicação mede se essa estratégia está alinhada com a evidência.

Três Maneiras de Ver a Desigualdade Fundamental

1. **Como compatibilidade de sinais:**
   $(-)(-) = (+)$ e $(+)(+) = (+)$ sempre!
2. **Como teste de alinhamento:**
   O teste LNP está "alinhado"com a evidência dos dados
3. **Como ferramenta de otimalidade:**
   Transforma comparação local em prova global de superioridade

Mensagem Final

A desigualdade fundamental não é apenas uma manipulação algébrica — ela é uma *garantia matemática* de que o teste baseado na razão de verossimilhanças toma as decisões ótimas em cada ponto do espaço amostral, levando ao maior poder possível!