Caderno de Exercícios - Capítulo 4

Teste de Hipóteses

Curso de Inferência Estatística - PPGEST/UFPE

Novembro 2025

Sumário

Introdução **2**

1 Conceitos Fundamentais **3**

2 Lema de Neyman-Pearson **3**

3 Testes UMP e Teorema de Karlin-Rubin **4**

4 Testes Clássicos **4**

4.1 Teste Z 4

4.2 Teste t de Student 4

4.3 Teste Qui-Quadrado 5

4.4 Teste F 5

5 Exercícios Integrados **6**

6 Respostas Detalhadas **8**

Tabelas de Referência **17**

Introdução

Este caderno contém exercícios práticos sobre Teste de Hipóteses, abordando desde conceitos fundamentais até aplicações dos testes clássicos. Os exercícios estão organizados por nível de dificuldade e tópico.

Organização

- **Seção 1:** Conceitos Fundamentais
- **Seção 2:** Lema de Neyman-Pearson
- **Seção 3:** Testes UMP e Karlin-Rubin
- **Seção 4:** Testes Clássicos (Z, t, χ^2, F)
- **Seção 5:** Exercícios Integrados
- **Seção 6:** Respostas Detalhadas (com visualizações)

1 Conceitos Fundamentais

Exercício 1.1

Seja $X \sim N(\mu, 9)$ e uma amostra de tamanho $n = 16$. Considere o teste:

$$H_0 : \mu = 10 \quad \text{vs} \quad H_1 : \mu = 13$$

com região crítica $R_c = \{\bar{x} > 11\}$.
(a) Calcule o erro Tipo I (α).
(b) Calcule o erro Tipo II (β).
(c) Qual é o poder do teste?

Exercício 1.2

Para o mesmo contexto do Exercício 1.1, determine a função poder $Q(\mu)$ e esboce seu gráfico para $\mu \in [8, 15]$.

Exercício 1.3

Um teste tem $\alpha = 0.05$ e poder de 0.80 para detectar $\mu = \mu_1$.
(a) O que acontece com α e o poder se aumentarmos o tamanho amostral de $n = 20$ para $n = 50$?
(b) Se fixarmos $n = 20$ e reduzirmos α para 0.01, o que acontece com o poder?

2 Lema de Neyman-Pearson

Exercício 2.1

Sejam $X_1, \ldots, X_{10}$ uma amostra de $X \sim N(\theta, 4)$. Use o Lema de Neyman-Pearson para derivar o teste MP de nível $\alpha = 0.05$ para:

$$H_0 : \theta = 2 \quad \text{vs} \quad H_1 : \theta = 5$$

Exercício 2.2

Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra de $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ com densidade $f(x; \lambda) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x > 0$.
Encontre o teste MP de nível α para:

$$H_0 : \lambda = 1 \quad \text{vs} \quad H_1 : \lambda = 2$$

Exercício 2.3

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra de $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$.
Derive o teste MP para $H_0 : \lambda = 3$ vs $H_1 : \lambda = 5$ com $n = 20$ e $\alpha = 0.05$.
Determine k e δ para o teste aleatorizado.

3 Testes UMP e Teorema de Karlin-Rubin

Exercício 3.1

Sejam $X_1, \ldots, X_{25}$ uma amostra de $X \sim N(\mu, 16)$ com μ desconhecido.
Use o Teorema de Karlin-Rubin para obter o teste UMP de nível $\alpha = 0.05$ para:

$$H_0 : \mu \leq 50 \quad \text{vs} \quad H_1 : \mu > 50$$

Exercício 3.2

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra de $X \sim \text{Bernoulli}(p)$.
(a) Mostre que a família possui RVM em $T = \sum X_i$.
(b) Derive o teste UMP para $H_0 : p \leq 0.3$ vs $H_1 : p > 0.3$ com $n = 30$ e $\alpha = 0.05$.

Exercício 3.3

Para $X_1, \ldots, X_n \sim N(0, \sigma^2)$, derive o teste UMP de nível α para:

$$H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2 \quad \text{vs} \quad H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$$

4 Testes Clássicos

4.1 Teste Z

Exercício 4.1

Uma máquina produz peças com diâmetro médio especificado de 10 cm e desvio padrão conhecido de 0.5 cm. Uma amostra de 36 peças apresentou diâmetro médio de 10.15 cm.
Ao nível de significância de 5%, teste se o diâmetro médio real difere de 10 cm.

Exercício 4.2

Um pesquisador afirma que o tempo médio de reação a um estímulo é menor que 250 ms. Uma amostra de 50 indivíduos apresentou tempo médio de 245 ms, com desvio padrão populacional conhecido de 20 ms.
Teste a afirmação ao nível de 1%.

4.2 Teste t de Student

Exercício 4.3

As notas de 16 alunos em uma prova têm média amostral 7.2 e desvio padrão amostral 1.5. Assuma normalidade.
Teste se a média populacional é diferente de 7.5 ao nível de 5%.

Exercício 4.4

Um novo método de ensino foi aplicado a 25 alunos. As notas tiveram média 78 e desvio padrão 12. O método anterior tinha média histórica de 75.
Há evidência de que o novo método é melhor? Use $\alpha = 0.05$.

4.3 Teste Qui-Quadrado

Exercício 4.5

Uma máquina deve produzir peças com variância de diâmetro não superior a 0.04 cm². Uma amostra de 20 peças apresentou variância amostral de 0.055 cm². Assuma normalidade.
Teste se a variância populacional excede o especificado ao nível de 5%.

Exercício 4.6

O desvio padrão das alturas de uma população é alegado ser 10 cm. Uma amostra de 30 indivíduos apresentou $s = 12$ cm.
Teste se o desvio padrão populacional difere de 10 cm ao nível de 10%.

4.4 Teste F

Exercício 4.7

Duas máquinas produzem o mesmo produto. Amostras independentes forneceram:

- Máquina 1: $n_1 = 15$, $s_1^2 = 2.8$
- Máquina 2: $n_2 = 12$, $s_2^2 = 1.6$

Teste se as variâncias são diferentes ao nível de 5%. Assuma normalidade.

Exercício 4.8

Dois métodos de treinamento foram comparados. O primeiro método foi aplicado a 20 pessoas e o segundo a 25 pessoas. As variâncias amostrais foram 16 e 9, respectivamente.
Há evidência de que o primeiro método produz mais variabilidade? Use $\alpha = 0.05$.

5 Exercícios Integrados

Exercício 5.1

Um laboratório recebeu um lote de chips. Para aceitação, a proporção de defeituosos deve ser no máximo 5%. Uma amostra de 200 chips revelou 15 defeituosos.
(a) Formule as hipóteses apropriadas.
(b) Qual teste você usaria? Justifique.
(c) Realize o teste ao nível de 5%.
(d) Calcule e interprete o p-valor.

Exercício 5.2

Uma empresa afirma que seu produto tem vida útil média de pelo menos 1000 horas com desvio padrão de 100 horas. Um teste com 50 unidades revelou vida média de 980 horas.
(a) Teste a afirmação da empresa ao nível de 5%.
(b) Qual seria a decisão ao nível de 1%?
(c) Calcule a função poder para $\mu = 950, 975, 1000, 1025, 1050$.
(d) Qual tamanho amostral seria necessário para detectar $\mu = 980$ com poder de 90%?

Exercício 5.3

Duas variedades de trigo (A e B) foram testadas:

- Variedade A: $n_A = 20$, $\bar{x}_A = 45$ kg/ha, $s_A = 8$ kg/ha
- Variedade B: $n_B = 25$, $\bar{x}_B = 48$ kg/ha, $s_B = 6$ kg/ha

(a) Teste se as variâncias são iguais ($\alpha = 0.10$).
(b) Dependendo do resultado em (a), teste se as médias diferem ($\alpha = 0.05$).

6 Respostas Detalhadas

Solução do Exercício 1.1

Dados

$X \sim N(\mu, 9)$, $n = 16$, $\sigma^2 = 9 \Rightarrow \sigma = 3$.
$H_0 : \mu = 10$ vs $H_1 : \mu = 13$, $R_c = \{\bar{x} > 11\}$.

(a) Erro Tipo I

Sob H_0: $\bar{X} \sim N(10, 9/16) = N(10, 0.5625)$, logo $\sigma_{\bar{X}} = 0.75$.

$$\begin{aligned}
\alpha &= P_{H_0}[\bar{X} > 11] \\
&= P\left[\frac{\bar{X} - 10}{0.75} > \frac{11 - 10}{0.75}\right] \\
&= P[Z > 1.333] \\
&= 1 - \Phi(1.333) \\
&= 1 - 0.9088 = 0.0912
\end{aligned}$$

$\boxed{\alpha \approx 9.12\%}$

(b) Erro Tipo II

Sob H_1: $\bar{X} \sim N(13, 0.5625)$, $\sigma_{\bar{X}} = 0.75$.

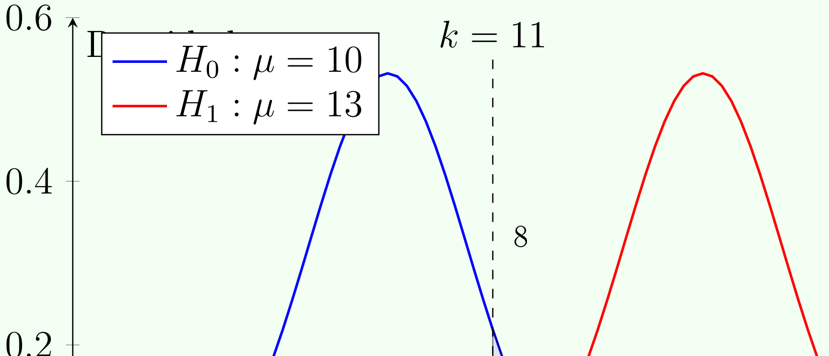
$$\begin{aligned}
\beta &= P_{H_1}[\bar{X} \leq 11] \\
&= P\left[\frac{\bar{X} - 13}{0.75} \leq \frac{11 - 13}{0.75}\right] \\
&= P[Z \leq -2.667] \\
&= \Phi(-2.667) \\
&= 0.0038
\end{aligned}$$

$\boxed{\beta \approx 0.38\%}$

(c) Poder

Poder $= 1 - \beta = 1 - 0.0038 = \boxed{0.9962 \approx 99.62\%}$

Visualização



Solução do Exercício 1.2

Função Poder

A função poder é:

$$Q(\mu) = P_\mu[\bar{X} > 11] = P\left[\frac{\bar{X}-\mu}{0.75} > \frac{11-\mu}{0.75}\right]$$

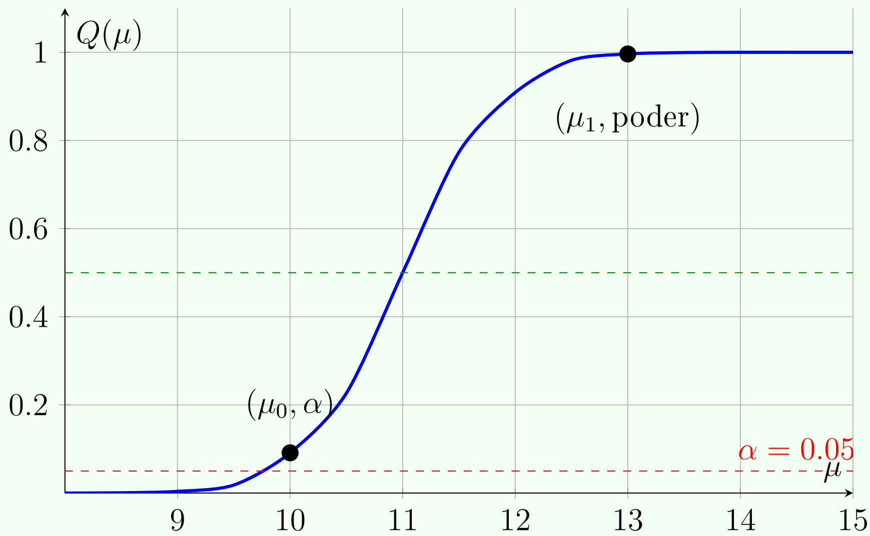
Padronizando:

$$Q(\mu) = 1 - \Phi\left(\frac{11-\mu}{0.75}\right) = 1 - \Phi(14.667 - 1.333\mu)$$

Valores Específicos

μ	$(11-\mu)/0.75$	$Q(\mu)$
8	4.00	0.00003
9	2.67	0.0038
10	1.33	0.0912
11	0	0.5000
12	-1.33	0.9088
13	-2.67	0.9962
14	-4.00	0.99997
15	-5.33	1.0000

Gráfico da Função Poder



Observações:

- A função é crescente em μ (teste unilateral à direita)
- $Q(10) = \alpha \approx 0.0912$
- $Q(11) = 0.5$ (ponto de inflexão)
- $Q(13) \approx 0.9962$ (poder contra H_1)

Solução do Exercício 1.3

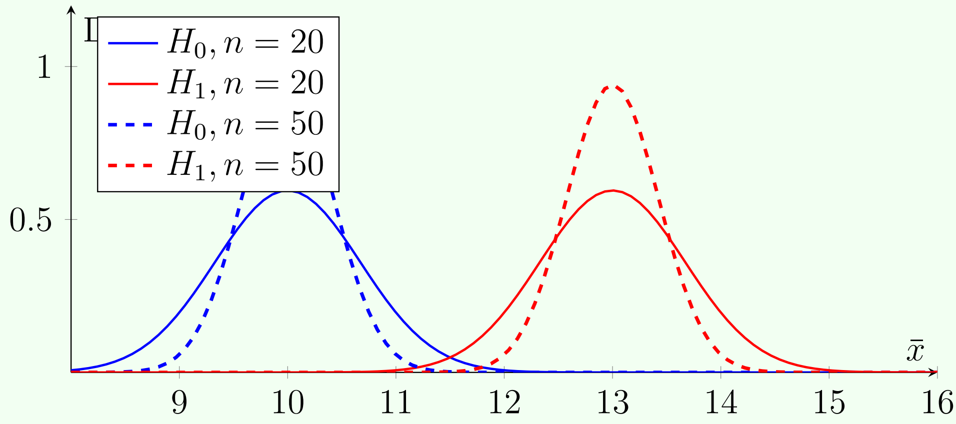
(a) Efeito do Aumento de n

Quando n aumenta de 20 para 50:

- α permanece fixo (por construção do teste)
- O poder AUMENTA significativamente

Explicação: Com mais dados, a distribuição de $\bar{X}$ fica mais concentrada, tornando mais fácil distinguir entre H_0 e H_1.

Visualização



Com n maior, há menos sobreposição entre as distribuições sob H_0 e H_1, aumentando o poder.

(b) Efeito da Redução de α

Quando α reduz de 0.05 para 0.01:

- O valor crítico aumenta (região crítica fica menor)
- O poder DIMINUI

Trade-off: Reduzir α (erro Tipo I) inevitavelmente aumenta β (erro Tipo II) para n fixo.
Conclusão: Para melhorar ambos, devemos aumentar n.

Solução do Exercício 2.1

Aplicação do LNP

$X \sim N(\theta, 4)$, $n = 10$, $H_0 : \theta = 2$ vs $H_1 : \theta = 5$, $\alpha = 0.05$.

Passo 1: Razão de Verossimilhanças

$$\begin{aligned} \frac{L_1}{L_0} &= \exp\left\{\frac{5-2}{4}\sum x_i - \frac{n(5^2-2^2)}{8}\right\} \\ &= \exp\left\{\frac{3}{4}\sum x_i - \frac{10 \cdot 21}{8}\right\} \end{aligned}$$

Passo 2: Região Crítica

Rejeitamos quando $\frac{L_1}{L_0} > k$:

$$\begin{aligned} \frac{3}{4}\sum x_i - 26.25 &> \log k \\ \sum x_i &> \frac{4(\log k + 26.25)}{3} = k_1 \\ \bar{x} &> \frac{k_1}{10} \end{aligned}$$

Passo 3: Determinar o Ponto de Corte

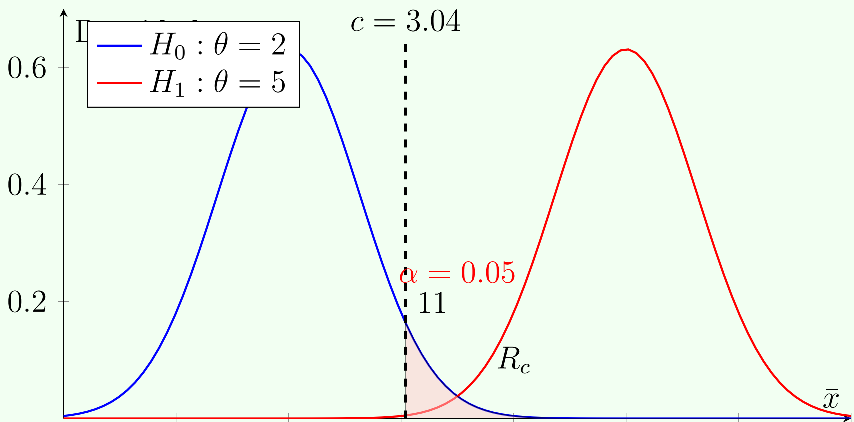
Sob H_0: $\bar{X} \sim N(2, 4/10) = N(2, 0.4)$, $\sigma_{\bar{X}} = \sqrt{0.4} \approx 0.632$.
Para $\alpha = 0.05$:

$$\begin{aligned} P_{H_0}[\bar{X} > c] &= 0.05 \\ P\left[\frac{\bar{X}-2}{0.632} > \frac{c-2}{0.632}\right] &= 0.05 \\ \frac{c-2}{0.632} &= 1.645 \\ c &= 2 + 1.645 \times 0.632 = 3.04 \end{aligned}$$

Teste Final

Estatística: $Z = \frac{\bar{X}-2}{0.632} \overset{H_0}{\sim} N(0,1)$
Regra: Rejeita H_0 se $\bar{x} > 3.04$ ou equivalentemente se $Z > 1.645$

Visualização



Solução do Exercício 4.1 (Teste Z - Bilateral)

Dados

$\mu_0 = 10$ cm, $\sigma = 0.5$ cm (conhecido), $n = 36$, $\bar{x} = 10.15$ cm, $\alpha = 0.05$.

Hipóteses

$$H_0 : \mu = 10 \quad \text{vs} \quad H_1 : \mu \neq 10 \quad \text{(bilateral)}$$

Estatística de Teste

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{10.15 - 10}{0.5/\sqrt{36}} = \frac{0.15}{0.0833} = 1.80$$

Valor Crítico

Para teste bilateral com $\alpha = 0.05$: $z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96$
Região crítica: $|Z| > 1.96$

Decisão

Como $|1.80| = 1.80 < 1.96$, **não rejeitamos** H_0.

p-valor

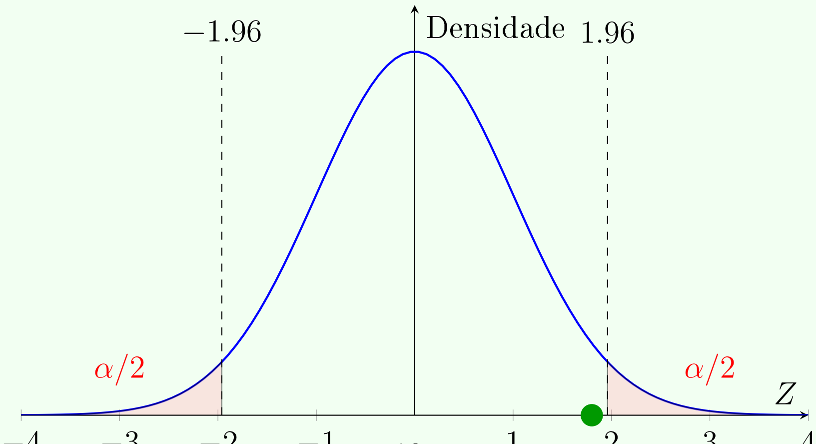
$$\begin{aligned} p &= 2 \times P(Z > 1.80) \\ &= 2 \times (1 - \Phi(1.80)) \\ &= 2 \times 0.0359 = 0.0718 \end{aligned}$$

Como $p = 0.0718 > 0.05$, não rejeitamos H_0.

Conclusão

Ao nível de 5%, não há evidência suficiente para afirmar que o diâmetro médio difere de 10 cm.

Visualização



O valor observado (verde) está dentro da região de não rejeição.

Solução do Exercício 4.3 (Teste t - Bilateral)

Dados

$n = 16$, $\bar{x} = 7.2$, $s = 1.5$, $\mu_0 = 7.5$, $\alpha = 0.05$.

Hipóteses

$$H_0 : \mu = 7.5 \quad \text{vs} \quad H_1 : \mu \neq 7.5$$

Estatística de Teste

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{7.2 - 7.5}{1.5/\sqrt{16}} = \frac{-0.3}{0.375} = -0.80$$

Distribuição e Valor Crítico

Sob H_0: $t \sim t_{15}$ (distribuição t de Student com 15 g.l.)
Para teste bilateral: $t_{15;0.025} = 2.131$
Região crítica: $|t| > 2.131$

Decisão

Como $|-0.80| = 0.80 < 2.131$, **não rejeitamos** H_0.

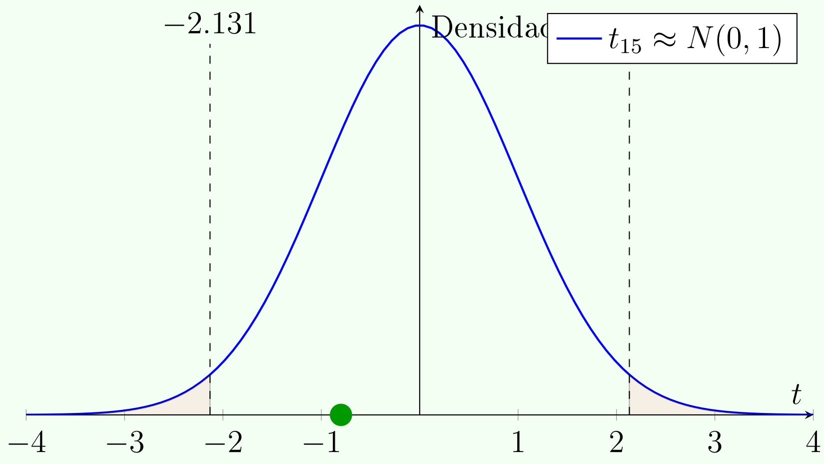
p-valor

$p = 2 \times P(t_{15} > 0.80) \approx 2 \times 0.218 = 0.436$

Conclusão

Não há evidência significativa de que a média difere de 7.5 pontos.

Visualização



Nota: Para 15 graus de liberdade, a distribuição t é muito próxima da Normal padrão, por isso usamos a aproximação $t_{15} \approx N(0, 1)$ no gráfico.

Solução do Exercício 4.5 (Teste χ^2 - Unilateral)

Dados

$\sigma_0^2 = 0.04$ cm² (valor especificado), $n = 20$, $s^2 = 0.055$ cm², $\alpha = 0.05$.

Hipóteses

$$H_0 : \sigma^2 \leq 0.04 \quad \text{vs} \quad H_1 : \sigma^2 > 0.04$$

Estatística de Teste

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{19 \times 0.055}{0.04} = \frac{1.045}{0.04} = 26.125$$

Distribuição e Valor Crítico

Sob H_0: $\chi^2 \sim \chi^2_{19}$
Para teste unilateral à direita: $\chi^2_{19;0.95} = 30.14$
Região crítica: $\chi^2 > 30.14$

Decisão

Como $26.125 < 30.14$, **não rejeitamos** H_0.

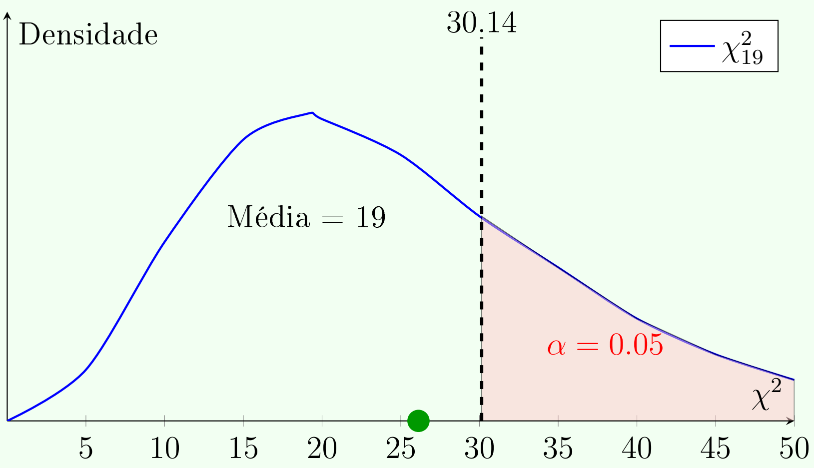
p-valor

$p = P(\chi^2_{19} > 26.125) \approx 0.125$

Conclusão

Ao nível de 5%, não há evidência suficiente para afirmar que a variância excede 0.04 cm².

Visualização



A distribuição χ^2 é assimétrica à direita. O valor observado está na região de não rejeição.

Solução do Exercício 4.7 (Teste F - Bilateral)

Dados

Máquina 1: $n_1 = 15$, $s_1^2 = 2.8$
Máquina 2: $n_2 = 12$, $s_2^2 = 1.6$
$\alpha = 0.05$

Hipóteses

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \quad \text{vs} \quad H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

Estatística de Teste

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{2.8}{1.6} = 1.75$$

Distribuição e Valores Críticos

Sob H_0: $F \sim F_{14,11}$ (distribuição F com 14 e 11 graus de liberdade)
Para teste bilateral com $\alpha = 0.05$:

- Limite inferior: $F_{14,11;0.025} = \frac{1}{F_{11,14;0.975}} \approx \frac{1}{3.21} \approx 0.311$
- Limite superior: $F_{14,11;0.975} \approx 3.09$

Região crítica: $F < 0.311$ ou $F > 3.09$

Decisão

Como $0.311 < 1.75 < 3.09$, **não rejeitamos** H_0.

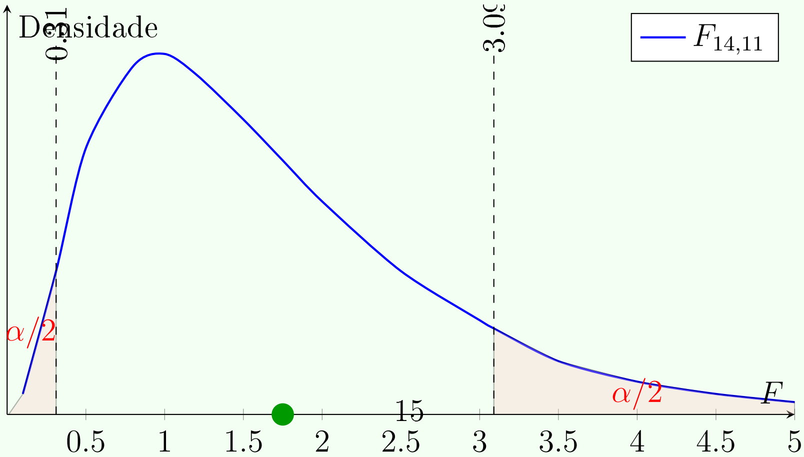
p-valor

$p = 2 \times \min\{P(F > 1.75), P(F < 1.75)\} \approx 2 \times 0.189 = 0.378$

Conclusão

Não há evidência significativa de que as variâncias sejam diferentes ao nível de 5%.

Visualização



A distribuição F é assimétrica, com cauda longa à direita. O valor observado está

Solução do Exercício 5.2 (Análise Completa)

Dados

$\mu_0 = 1000$ h, $\sigma = 100$ h (conhecido), $n = 50$, $\bar{x} = 980$ h

(a) Teste ao Nível 5%

Hipóteses: $H_0 : \mu \geq 1000$ vs $H_1 : \mu < 1000$ (unilateral à esquerda)
Estatística:

$$Z = \frac{980 - 1000}{100/\sqrt{50}} = \frac{-20}{14.142} = -1.414$$

Valor crítico: $-z_{0.05} = -1.645$
Decisão: Como $-1.414 > -1.645$, não rejeitamos H_0 ao nível 5%.

(b) Teste ao Nível 1%

Valor crítico: $-z_{0.01} = -2.326$
Decisão: Como $-1.414 > -2.326$, não rejeitamos H_0 ao nível 1%.
Conclusão: Em ambos os níveis, não há evidência suficiente contra a afirmação da empresa.

(c) Função Poder

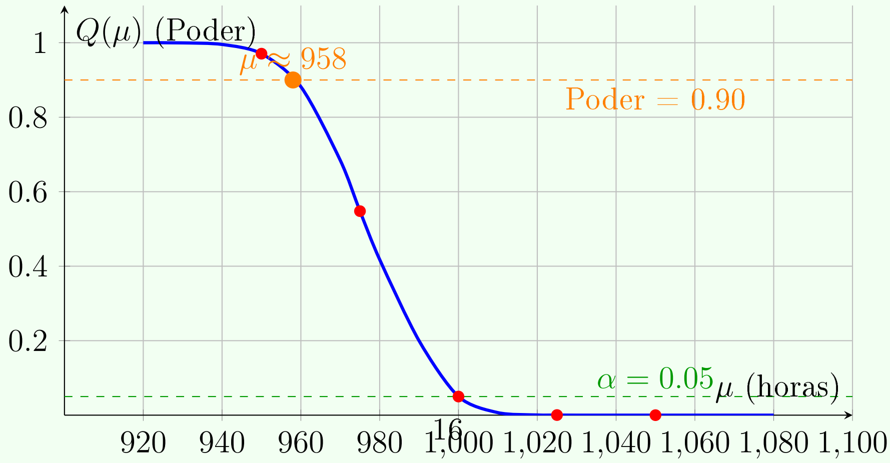
$$Q(\mu) = P_\mu [Z < -1.645] = \Phi\left(\frac{1000 - \mu - 1.645 \times 14.142}{14.142}\right)$$

Simplificando:

$$Q(\mu) = \Phi\left(\frac{1000 - \mu - 23.26}{14.142}\right) = \Phi\left(\frac{976.74 - \mu}{14.142}\right)$$

μ	$(976.74 - \mu)/14.142$	$Q(\mu)$
950	1.89	0.9706
975	0.12	0.5478
1000	-1.65	0.0500
1025	-3.41	0.0003
1050	-5.18	≈ 0

Gráfico da Função Poder



(d) Tamanho Amostral para Poder = 0.90

Tabelas de Referência

Resumo dos Testes Clássicos

Teste	Condições	Estatística	Distribuição sob H_0
Z	Normal, σ conhecido	$Z = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	$N(0,1)$
t	Normal, σ desconhecido	$t = \frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}$	t_{n-1}
χ^2	Normal, teste para σ^2	$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$	χ^2_{n-1}
F	Normais, comparar variâncias	$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$	F_{n_1-1,n_2-1}

Valores Críticos Comuns

Distribuição Normal Padrão

α (unilateral)	z_α	α (bilateral)	$z_{\alpha/2}$
0.10	1.282	0.10	1.645
0.05	1.645	0.05	1.960
0.01	2.326	0.01	2.576
0.001	3.090	0.001	3.291

Distribuição t de Student (seleção)

g.l.	$t_{0.10}$	$t_{0.05}$	$t_{0.025}$	$t_{0.01}$
10	1.372	1.812	2.228	2.764
15	1.341	1.753	2.131	2.602
20	1.325	1.725	2.086	2.528
30	1.310	1.697	2.042	2.457
∞	1.282	1.645	1.960	2.326

Checklist para Escolha do Teste

1. **População é Normal?**
   - Sim $\rightarrow$ Prossiga
   - Não, mas n grande $\rightarrow$ Use TCL (aproximação normal)
   - Não e n pequeno $\rightarrow$ Use testes não-paramétricos
2. **O que está sendo testado?**
   - Média (μ) com σ conhecido $\rightarrow$ Teste Z
   - Média (μ) com σ desconhecido $\rightarrow$ Teste t
   - Variância (σ^2) $\rightarrow$ Teste χ^2
   - Comparar duas variâncias $\rightarrow$ Teste F
3. **Hipótese alternativa**

- $H_1 : \theta > \theta_0 \rightarrow$ Unilateral à direita
- $H_1 : \theta < \theta_0 \rightarrow$ Unilateral à esquerda
- $H_1 : \theta \neq \theta_0 \rightarrow$ Bilateral

— Fim do Caderno de Exercícios —