Unidade 5 - Compilação Completa

Intervalos de Confiança e Tópicos Relacionados

Curso de Inferência Estatística

Outubro 2025

Sumário

Aula 26 (27/06/2025)
Unidade 5 - Intervalo de Confiança

Vamos começar com o importante conceito de *probabilidade de cobertura*.

Def. 1

Sejam $T_L(\hat{X})$ e $T_U(\hat{X})$ duas estatísticas baseadas numa a.a. $\hat{X} = (X_1, \ldots, X_n)$, a probabilidade de cobertura do intervalo aleatório

$$J = \left[T_L(\hat{X}), T_U(\hat{X})\right] \tag{1}$$

para o parâmetro desconhecido $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$ é dada por:

$$P_\theta\left(\theta \in \left[T_L(\hat{X}), T_U(\hat{X})\right]\right) \tag{2}$$

Na verdade, o *coeficiente de confiança* de J é dado por:

$$\inf_{\theta \in \Theta}\left\{P_\theta\left(\theta \in \left[T_L(\hat{X}), T_U(\hat{X})\right]\right)\right\} \tag{3}$$

Na maioria das aplicações, a probabilidade de cobertura não depende do parâmetro e será equivalente ao coeficiente de confiança. **Exemplo 1:** Sejam

$$J_1 = (x_1 - 1,96;\ x_1 + 1,96) \quad \text{e} \quad J_2 = \left(\bar{x} - \frac{1,96}{\sqrt{2}},\ \bar{x} + \frac{1,96}{\sqrt{2}}\right)$$

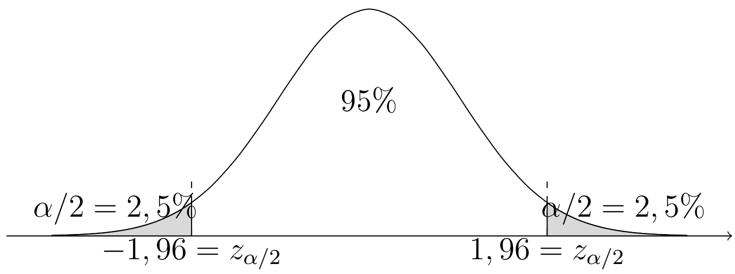
dois intervalos aleatórios tais que $x_1, x_2 \sim N(\mu, 1)$ e

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Encontre as probabilidades de cobertura de J_1 e J_2.

Solução: Temos que

$$\begin{aligned}
P_\mu(\mu \in J_1) &= P_\mu\left(\mu \in (x_1 - 1,96;\ x_1 + 1,96)\right)\\
&= P_\mu\left(x_1 - 1,96 < \mu < x_1 + 1,96\right)\\
&= P_\mu\left([\ (x_1 - \mu) < 1,96\ ]\ \cap\ [\ (x_1 - \mu) > -1,96\ ]\right)\\
&= P_\mu\left(|x_1 - \mu| < 1,96\right)\\
&= P_\mu\left(|Z| < 1,96\right), \quad Z = x_1 - \mu \sim N(0,1)\\
&= 95\%.
\end{aligned}$$



Da mesma forma,

$$P_\mu(\mu \in J_2) = P_\mu\left(\mu \in \left(\bar{x} - \frac{1,96}{\sqrt{2}},\ \bar{x} + \frac{1,96}{\sqrt{2}}\right)\right) \Rightarrow$$

$$P_\alpha(\mu \in I_\alpha) = P_\mu\left(\bar{X} - \frac{1.96}{\sqrt{\nu}} < \mu < \bar{X} + \frac{1.96}{\sqrt{\nu}}\right) \tag{4}$$

$$= P_\mu\left[\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\nu}} < 1.96\right] \cap \left[\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\nu}} > -1.96\right] \tag{5}$$

$$= P_\mu\left(\left|\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\nu}}\right| < 1.96\right) \tag{6}$$

$$= P_\mu\left(|Z| < 1.96\right) = 95\% \tag{7}$$

Aula 21 (25/06/2025)

Para construção de intervalos de confiança, podem-se utilizar duas abordagens: (i) inversão do procedimento de teste de hipótese e (ii) usando quantidade pivotal.

Inversão de um procedimento de teste

Em teste de hipótese, a região de não rejeição de H_0 foi denotada como

$$R_C^C = \begin{cases} \{x \in \mathcal{X}^n;\ T(x|\theta) \leq k\}^C & \text{para } H_1 : \theta > \theta_0, \\ \{x \in \mathcal{X}^n;\ T(x|\theta) \geq k\}^C & \text{para } H_1 : \theta < \theta_0, \\ \text{(como uma solução plausível)} & \\ \{x \in \mathcal{X}^n;\ |T(x|\theta)| \leq k\}^C & \text{para } H_1 : \theta \neq \theta_0. \end{cases} \tag{8}$$

O intervalo de confiança é bastante relacionado com R_C.

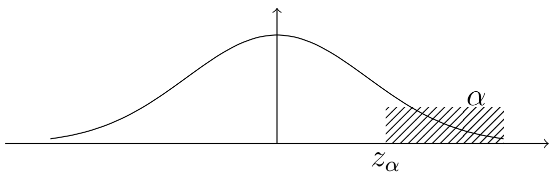
Exemplo 2: Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma a.a. de $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ para média desconhecida e $\sigma > 0$ conhecida. Considere que X obedece tanto $H_0 : \mu = \mu_0$ quanto $H_1 : \mu > \mu_0$. Encontre o estimador intervalar para μ de confiança $1 - \alpha$ para $\alpha \in (0, 1)$ pré-fixado.

Solução: Já foi discutido que o teste UMP para $H_0 < H_1$ de nível α tem função crítica:

$$\Psi(x) = \begin{cases} 1, & \sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sigma} > z_\alpha, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \tag{9}$$

em que $\bar{X}_n = n^{-1}\sum_{i=1}^n x_i$ e $x = (x_1, \ldots, x_n)$ é uma a.a. A região de não rejeição é dada por:

$$R_c = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sigma} \leq z_\alpha \right\} \tag{10}$$



Note que:

$$P_{\mu_0}\left(\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sigma} \leq z_\alpha \right) = 1 - \alpha \implies \tag{11}$$

$$P_{\mu_0}\left(\bar{X}_n - \delta_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu_0 \right) = 1 - \alpha \tag{12}$$

Daí,

$$P_\mu\left(\mu \geq \bar{X}_n - \delta_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = 1 - \alpha, \quad \forall \mu \in \mathbb{R}. \tag{13}$$

Isto é,

$$\text{i.c.}_{1-\alpha}(\mu) = \left(\bar{X}_n - \delta_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \infty \right). \tag{14}$$

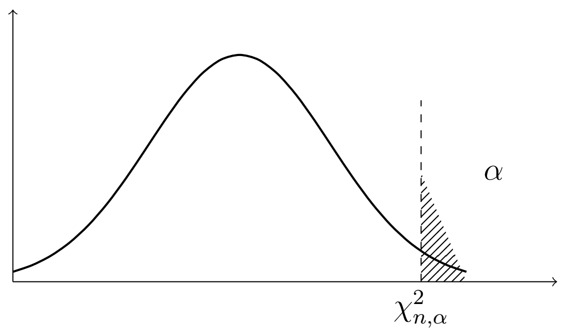
Exemplo 3: Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma a.c. de $X \sim \text{Exp}(\theta)$, para $\theta > 0$ desconhecido. Considera que se deseja testar $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta > \theta_0$. Encontrar o estimador relacionado para o intervalo de confiança de $1 - \alpha$.

Jd1: já foi discutido que o teste UMP para H_0 e H_1 de nível α tem função crítica

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & \frac{2}{\theta_0}\sum_{i=1}^n x_i > \chi^2_{2n,\alpha} \\ 0, & \frac{2}{\theta_0}\sum_{i=1}^n x_i < \chi^2_{2n,\alpha} \end{cases} \tag{15}$$

A região de não rejeição é dada por: para $\alpha \in \mathbb{R}^n$,

$$R_c = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \frac{2}{\theta_0}\sum_{i=1}^n x_i < \chi^2_{2n,\alpha} \right\} \tag{16}$$



Note que:

$$P_\theta\left(\frac{\alpha}{\theta}\sum_{i=1}^{n}X_i < \chi^2_{n,\alpha}\right) = 1-\alpha \Rightarrow \tag{17}$$

$$P_\theta\left(\frac{\alpha}{\theta}\sum_{i=1}^{n}X_i < \chi^2_{n,\alpha}\right) = 1-\alpha \Rightarrow \tag{18}$$

$$P_\theta\left(\theta > \frac{\alpha\sum_{i=1}^{n}X_i}{\chi^2_{n,\alpha}}\right) = 1-\alpha, \quad \forall\theta\in\mathbb{R}^+. \tag{19}$$

Isto é:

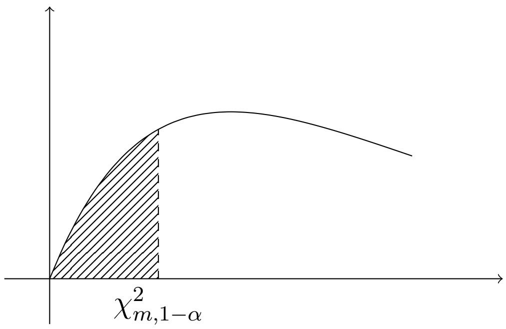
$$IC_{1-\alpha}(\theta) = \left(\frac{\alpha\sum_{i=1}^{n}X_i}{\chi^2_{n,\alpha}}, \infty\right). \tag{20}$$

Obs.: Se o contraste fosse $H_0 : \theta = \theta_0$ e $H_1 : \theta < \theta_0$, teríamos como região de não rejeição:

$$\mathcal{R} = \left\{x\in\mathbb{R}^n : \frac{\alpha}{\theta_0}\sum_{i=1}^{n}x_i > \chi^2_{n,1-\alpha}\right\} \tag{21}$$

$$P_\theta\left(\theta < \frac{\alpha\sum_{i=1}^{n}X_i}{\chi^2_{n,1-\alpha}}\right) = 1-\alpha \tag{22}$$

$$IC_{1-\alpha}(\theta) = \left(0, \frac{\alpha\sum_{i=1}^{n}X_i}{\chi^2_{n,1-\alpha}}\right). \tag{23}$$



Abordagem pela quantidade pivotal

Definição 1: (Pivô) Seja $T(X)$ uma estatística suficiente (mínimal) para θ. Um pivô é uma v.a. U que dependa de T e θ cuja distribuição não dependa de θ.

Aula: 30/06/2023

Obs: No caso da família de locação em $a(\theta)$, a distribuição $\{T - a(\theta)\}$ não depende de θ. No caso de família de escala em $b(\theta)$, a distribuição $\left\{\frac{T}{b(\theta)}\right\}$ não depende de θ. No caso de família de locação e escala em $[a(\theta), b(\theta)]$, a distribuição de $\left\{\frac{T-a(\theta)}{b(\theta)}\right\}$ não depende de θ.

Consideremos um exemplo simples dessa abordagem.

Exemplo 4: Seja $X \sim \text{Exp}(\theta)$ com densidade

$$f(x \mid \theta) = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta} I_{(0,\infty)}(x). \tag{24}$$

Encontrar um intervalo de confiança $1-\alpha$ bilateral para θ.
Solução: Note que $U := \frac{X}{\theta}$ tem densidade

$$f_U(u) = \frac{dF_U(u)}{du} = \frac{d\mathbb{P}(X \leq u\theta)}{du} = \theta \cdot \frac{1}{\theta} e^{-u} I_{(0,\infty)}(u). \tag{25}$$

Logo:

$$f_U(u) = e^{-u} I_{(0,\infty)}(u). \tag{26}$$

Portanto U pode ser entendido como um pivô. Note que é possível definir $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$ tais que

$$\mathbb{P}(U < a) = \mathbb{P}(U > b) = \frac{\alpha}{2}. \tag{27}$$

E, portanto:

$$\mathbb{P}(a < U < b) = 1 - \alpha. \tag{28}$$

Com $\alpha \in (0,1)$ fixado:

$$\int_0^a e^{-u}\, du = 1 - e^{-a} = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad e^{-a} = 1 - \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad a = -\log\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right). \tag{29}$$

$$\int_b^\infty e^{-u}\, du = e^{-b} = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad b = -\log\left(\frac{\alpha}{2}\right). \tag{30}$$

Dado:

$$P_\theta(a < U < b) = P_\theta\left(a < \frac{X}{\theta} < b\right) = P_\theta\left(\frac{1}{b} < \theta < \frac{1}{a}\right) = P_\theta\left(\frac{X}{b} < \theta < \frac{X}{a}\right) = 1 - \alpha \tag{31}$$

Isto é:

$$ic_{1-\alpha}(\theta) = \left(\frac{X}{b}, \frac{X}{a}\right) \tag{32}$$

IC é o intervalo bilateral para θ com confiança $1-\alpha$.
Exemplo 5: Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma a.g. de $X \sim U(0,\theta)$ para θ desconhecido. Encontre o estimador intervalo bilateral para θ com confiança de $1-\alpha$.
Solução: A estatística $T(X) = X_{\min}$ é suficiente mínima para θ com densidade

$$f_T(t) = \frac{dF_T(t)}{dt} = \frac{d\left(F_X(t)\right)^n}{dt} = n\left(\frac{t}{\theta}\right)^{n-1} \frac{1}{\theta} \tag{33}$$

Logo:

$$f_T(t) = \frac{n}{\theta^n} t^{n-1} \quad , \quad t \in (0,\theta) \tag{34}$$

Note que $U = \frac{T}{\theta}$ tem densidade

$$f_U(u) = \frac{dF_U(u)}{du} = \frac{dP\left(\frac{T}{\theta} \leq u\right)}{du} = \theta \cdot f_T(u\theta) = nu^{n-1} \tag{35}$$

$$f_U(u) = nu^{n-1}\mathbb{I}_{(0,1)}(u)$$

que independe de θ, portanto U é um pivô. Pode-se determinar a e b com $0 < a < b < 1$ tais que

$$P(U < a) = P(U > a) = \frac{\alpha}{2}$$

e, portanto,

$$P(a < U < b) = 1 - \alpha$$

Temos que:

$$P(U < a) = \int_0^a nu^{n-1}\,du = u^n\Big|_0^a = a^n = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad a = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{1/n}$$

e

$$P(U > b) = \int_b^1 nu^{n-1}\,du = u^n\Big|_b^1 = 1 - b^n = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad b = \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)^{1/n}$$

Note que

$$P(a < U < b) = 1 - \alpha \quad \Rightarrow \quad P\left(a < \frac{T}{\theta} < b\right) = 1 - \alpha$$

$$\Rightarrow \quad P\left(\frac{1}{b} < \frac{\theta}{T} < \frac{1}{a}\right) = 1 - \alpha$$

$$\Rightarrow \quad P\left(\frac{T}{b} < \theta < \frac{T}{a}\right) = 1 - \alpha$$

e, portanto,

$$IC_{1-\alpha}(\theta) = \left(b^{-1}x_{\min},\ a^{-1}x_{\min}\right)$$

Exemplo 6: Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra de $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ com média desconhecida e σ^2 conhecido. Encontrar o intervalo de confiança $1-\alpha$ bilateral para μ.

Solução: De discussão anterior $T = \overline{X}$ é uma estatística suficiente mínima para μ e

$$T \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right). \tag{36}$$

Aqui, X's pertencem à família de locação. Note que

$$U = \sqrt{n}\frac{T-\mu}{\sigma} \sim N(0,1) \tag{37}$$

é um pivô. Para $z_{\alpha/2} > 0$ tal que $P(U > z_{\alpha/2}) = \frac{\alpha}{2}$, temos que:

$$P(-z_{\alpha/2} < U < z_{\alpha/2}) = 1-\alpha \quad \Rightarrow \quad P\left(-z_{\alpha/2} < \sqrt{n}\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma} < z_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha \tag{38}$$

ou seja,

$$P\left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha. \tag{39}$$

Portanto,

$$IC_{1-\alpha}(\mu) = \left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right). \tag{40}$$

Exemplo 7: Sejam $x_1, \ldots, x_n$ uma a.a. de X $\sim$ $N(\mu, \sigma^2)$ com μ desconhecido e $\sigma \in \mathbb{R}^+$ desconhecido. Encontre o intervalo bilateral de confiança $1-\alpha$ para μ.

Sol: De discussão anterior, $(\overline{X}_n, S_n)$ é uma estatística conjuntamente suficiente mínima para (μ, σ). Aqui, X's pertencem à família de locação e escala.

Considere

$$U = \sqrt{n}\left(\frac{\overline{X}_n - \mu}{S_n}\right) = \frac{\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{n-1}{n-1} \cdot \frac{S_n^2}{\sigma^2}}} \sim t_{n-1}, \tag{41}$$

que é um pivô. Para $t_{n-1,\alpha/2} > 0$ tal que

$$P\left(U > t_{n-1,\alpha/2}\right) = \frac{\alpha}{2}, \tag{42}$$

temos que

$$P\left(-t_{n-1,\alpha/2} < U < t_{n-1,\alpha/2}\right) = 1 - \alpha \Rightarrow \tag{43}$$

$$P\left(-t_{n-1,\alpha/2} < \sqrt{n}\frac{\overline{X}_n - \mu}{S_n} < t_{n-1,\alpha/2}\right) = 1 - \alpha \Rightarrow \tag{44}$$

$$P\left(\overline{X}_n - t_{n-1,\alpha/2}\frac{S_n}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X}_n + t_{n-1,\alpha/2}\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha \tag{45}$$

$$\therefore IC_{1-\alpha}(\mu) = \left\{\overline{X}_n \pm t_{n-1,\alpha/2}\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right\}$$

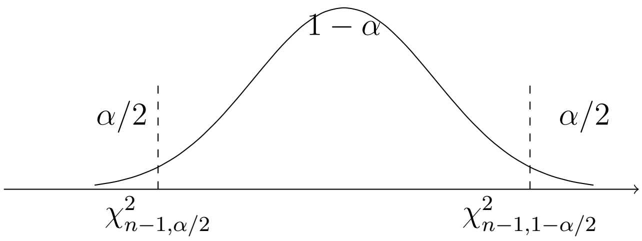
Exemplo 8: Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra de $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ com $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma \in \mathbb{R}_+$ desconhecidos. Encontre o intervalo de confiança $1 - \alpha$ para σ.

Solução: Note que

$$U = \frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}. \tag{46}$$

Sejam $\chi^2_{n-1,\alpha/2}$ e $\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}$ tais que

$$P\left(U < \chi^2_{n-1,\alpha/2}\right) = \frac{\alpha}{2} \quad \text{e} \quad P\left(U > \chi^2_{n-1,1-\alpha/2}\right) = \frac{\alpha}{2}. \tag{47}$$



Então,

$$P\left(\chi^2_{n-1,\alpha/2} < U < \chi^2_{n-1,1-\alpha/2}\right) = 1 - \alpha \tag{48}$$

$$P\left(\chi^2_{n-1,\alpha/2} < \frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} < \chi^2_{n-1,1-\alpha/2}\right) = 1 - \alpha \tag{49}$$

$$P\left(\frac{(n-1)S_n^2}{\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S_n^2}{\chi^2_{n-1,\alpha/2}}\right) = 1 - \alpha \tag{50}$$

Portanto,

$$IC_{1-\alpha}(\sigma) = \left[\sqrt{\frac{(n-1)S_n^2}{\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}}}, \sqrt{\frac{(n-1)S_n^2}{\chi^2_{n-1,\alpha/2}}}\right]. \tag{51}$$

Problema para duas amostras

Focaremos na abordagem da quantidade pivotal. Para uma função paramétrica diferenciável $K(\theta)$ para $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^p$, assuma que temos um estimador $\hat{K}(\hat{\theta})$ que é função de uma estatística suficiente (mínima) para θ.

Frequentemente, a distribuição de

$$U = \frac{\hat{K}(\theta) - K(\theta)}{\hat{\gamma}} \tag{52}$$

não dependerá de θ, $\forall \theta \in \Theta$, para algum $\gamma > 0$.

Aula 29 (02/07/2023)

Se σ é conhecido, podemos obter a, b tais que

$$P_\theta\left(a < \frac{\hat{\kappa}(\theta) - \kappa(\theta)}{\sigma} < b\right) = 1 - \alpha \tag{53}$$

Desta última identidade, obtém-se o intervalo de confiança $1 - \alpha$ para $\kappa(\theta)$.

Para σ desconhecido:

$$P_\theta\left(a < \frac{\hat{\kappa}(\theta) - \kappa(\theta)}{\hat{\sigma}} < b\right) = 1 - \alpha \tag{54}$$

Desta identidade, obtém-se o intervalo de confiança.

Os resultados anteriores são locação. Quando a inferência é sobre o parâmetro de escala, costuma-se utilizar o pivô

$$U = \frac{\hat{\kappa}(\theta)}{\kappa(\theta)} \tag{55}$$

cuja distribuição geralmente independe de θ. Para este caso, usa-se

$$P_\theta\left(a < \frac{\hat{\kappa}(\theta)}{\kappa(\theta)} < b\right) = 1 - \alpha \tag{56}$$

Desta última identidade, obtemos o intervalo de confiança para $u(\theta)$.

Comparando parâmetros de locação

Vamos analisar diferença de médias entre duas populações normais.

Exemplo 10: Suponha $x_{i1}, \ldots, x_{in_i}$ para $i = 1, 2$ duas amostras aleatórias de $X_i \sim N(\mu_i, \sigma^2)$ e independentes entre elas $X_1 \perp X_2$. Vamos assumir que $\theta = (\mu_1, \mu_2, \sigma) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+$ é desconhecido, encontrar o intervalo bilateral com confiança $1-\alpha$ para $u(\theta) = \mu_1 - \mu_2$.

Solução: Note que:

$$\begin{aligned}
f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) &= f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(x_2) \\
&= (2\pi\sigma^2)^{-1} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1 - \mu_1}{\sigma}\right)^2\right\} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_2 - \mu_2}{\sigma}\right)^2\right\} \\
&= (2\pi\sigma^2)^{-1} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1^2 - 2x_1\mu_1 + \mu_1^2}{\sigma^2} + \frac{x_2^2 - 2x_2\mu_2 + \mu_2^2}{\sigma^2}\right)\right\} \\
&= (2\pi\sigma^2)^{-1} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1^2}{\sigma^2} - \frac{2x_1\mu_1}{\sigma^2} + \frac{\mu_1^2}{\sigma^2} + \frac{x_2^2}{\sigma^2} - \frac{2x_2\mu_2}{\sigma^2} + \frac{\mu_2^2}{\sigma^2}\right)\right\}
\end{aligned} \tag{57}$$

$$\Rightarrow f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = (2\pi\sigma^2)^{-1} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[(x_1 - x_2) - (\mu_1 - \mu_2)\right]^2\right\} \cdot \exp\left\{-\frac{\mu_1^2 + \mu_2^2}{2\sigma^2}\right\} \tag{58}$$

Pelo teo. 22,

$$T_1 = \left[\sum_{i=1}^{n_1} R_1(x_{1i}), \sum_{i=1}^{n_2} R_2(x_{2i}), \sum_{i=1}^{n_1} x_{1i}, \sum_{i=1}^{n_2} x_{2i}, \sum_{i=1}^{n_1} x_{1i}^2, \sum_{i=1}^{n_2} x_{2i}^2 \right] \tag{59}$$

é conjuntamente suficiente para $\theta = (\mu_1, \mu_2, \sigma^2)$. Pelo teo. 24,

$$T_2 = \left\{ \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} x_{1i}, \frac{1}{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} x_{2i}, \frac{\sum_{i=1}^{n_1}(x_{1i} - \bar{x}_1)^2 + \sum_{i=1}^{n_2}(x_{2i} - \bar{x}_2)^2}{n_1 + n_2 - 2} \right\} \tag{60}$$

é também conjuntamente suficiente para $\theta = (\mu_1, \mu_2, \sigma^2)$.
O termo S_p^2 é chamado de variância amostral conjunta e pode ser reescrito como:

$$S_1^2 = (n_1 - 1)^{-1} \sum_{i=1}^{n_1}(x_{1i} - \bar{x}_1)^2, \quad S_2^2 = (n_2 - 1)^{-1} \sum_{i=1}^{n_2}(x_{2i} - \bar{x}_2)^2 \tag{61}$$

$$S_p^2 = (n_1 + n_2 - 2)^{-1} \left[(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2\right] \tag{62}$$

Note que como $(n_1 - 1)S_1^2/\sigma^2 \sim \chi^2_{n_1-1}$ e $(n_2 - 1)S_2^2/\sigma^2 \sim \chi^2_{n_2-1}$, então

$$(n_1 + n_2 - 2)S_p^2/\sigma^2 \sim \chi^2_{n_1+n_2-2} \tag{63}$$

Dai, vale-se:

$$U = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \cdot \sqrt{\frac{n_1 + n_2 - 2}{S_p^2/\sigma^2}} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t_{n_1+n_2-2} \tag{64}$$

Para $\nu = n_1 + n_2 - 2$ e $t_{\nu,\alpha} > 0$ tal que

$$P(U > t_{\nu,\alpha}) = \frac{\alpha}{2}, \tag{65}$$

então

$$P(-t_{\nu,\alpha} < U < t_{\nu,\alpha}) = 1 - \alpha \Rightarrow \tag{66}$$

$$P\left(-t_{\nu,\alpha} < \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} < t_{\nu,\alpha}\right) = 1 - \alpha \Rightarrow \tag{67}$$

$$P\left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - t_{\nu,\alpha}S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq \bar{X}_1 - \bar{X}_2 + t_{\nu,\alpha}S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\right) = 1-\alpha \tag{68}$$

Dai,

$$IC_{1-\alpha}(\mu_1 - \mu_2) = \left\{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \pm t_{\nu,\alpha}S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\right\}. \tag{69}$$

Comparando escala entre duas populações
Vamos considerar problemas sobre escala entre duas populações normais.
Exemplo 11. Sejam $X_{i1}, \ldots, X_{in_i}$ para $i = 1, 2$ duas amostras aleatórias de $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ e independentes entre elas, $i = 1, 2$. Vamos assumir que $\theta_i = (\mu_i, \sigma_i, \sigma_i^2)$ e $H_0 : R_1 = R_2$ e $H_1 \neq R_2$ é desconhecido. Encontre o intervalo.

Bilateral com confiança $1-\alpha$ para $\mu(\theta)=\sigma_1^2/\sigma_2^2$

Idéia: Pode-se mostrar (fica como exercício) que

$$\bar{X}_1=\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}X_{1i},\quad \bar{X}_2=\frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2}X_{2i},\quad S_1^2=\frac{1}{n_1-1}\sum_{i=1}^{n_1}(X_{1i}-\bar{X}_1)^2,\quad S_2^2=\frac{1}{n_2-1}\sum_{i=1}^{n_2}(X_{2i}-\bar{X}_2)^2 \tag{70}$$

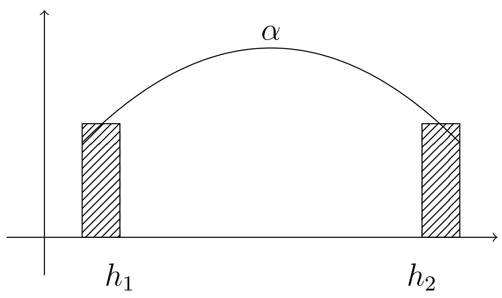
são estatísticas suficientes para μ_1,μ_2,σ_1^2 e σ_2^2 respectivamente. Note que (por definição da distribuição F)

$$U=\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}\sim F_{n_1-1,\,n_2-1} \tag{71}$$

uma vez que $(n_1-1)S_1^2/\sigma_1^2\sim\chi^2_{n_1-1}$ e $(n_2-1)S_2^2/\sigma_2^2\sim\chi^2_{n_2-1}$ são independentes. Logo, U é uma quantidade pivotal.

Sejam $h_1=F_{n_1-1,\,n_2-1;\,\alpha/2}$ e $h_2=F_{n_1-1,\,n_2-1;\,1-\alpha/2}$ quantidades tais que

$$P(U<h_1)=\frac{\alpha}{2}\quad \text{e}\quad P(U>h_2)=\frac{\alpha}{2}.$$



Daí,

$$P_\theta(h_1<U<h_2)=1-\alpha\quad\Rightarrow\quad P_\theta\left(h_1<\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\cdot\frac{S_1^2}{S_2^2}<h_2\right)=1-\alpha \tag{72}$$

$$P_\theta\left(t^{-1}_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S_1^2}{S_2^2}<\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}<F^{-1}_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S_1^2}{S_2^2}\right)=1-\alpha \tag{73}$$

isto é,

$$IC_{1-\alpha}\left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\right)=\left(t^{-1}_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S_1^2}{S_2^2},\ F^{-1}_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S_1^2}{S_2^2}\right) \tag{74}$$

Teste de Hipóteses: Baseado na Razão entre Verossimilhanças

Discutimos que pode não existir teste UMP para o caso simples bilateral. O teste da razão entre verossimilhanças proposto por Neyman e Pearson (1928, 1933) é um método útil para lidar com este caso.

Construção

Sejam $x_1, \ldots, x_n$ uma amostra de X com fdp (ou fmpt) dada por $f(x_i; \theta)$, em que $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_p)^T \in \Theta \subset \mathbb{R}^p$ é o vetor de parâmetros desconhecidos.

Desejamos testar

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \quad \text{e} \quad H_1 : \theta \in \Theta_1$$

tal que $\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$ e $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \varnothing$ com nível de significância α.

A função de verossimilhança associada é dada por:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta), \quad \theta \in \Theta \tag{75}$$

Fixamos nossa atenção em

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} \{L(\theta)\}$$

interpretada como a melhor evidência em favor de H_0. Adicionalmente,

$$\sup_{\theta \in \Theta} \{L(\theta)\}$$

representa a melhor evidência em favor de Θ, sem considerar restrição.

A estatística da razão entre verossimilhanças (RV) é dada por:

$$\Lambda = \frac{\sup_{\theta \in \Theta_0} \{L(\theta)\}}{\sup_{\theta \in \Theta} \{L(\theta)\}} \tag{76}$$

A regra de decisão do teste RV (TRV) é dada por:

"Rejeitamos H_0 se, e só se, Λ é pequena ($< k$).

Valores pequenos de Λ implicam valores pequenos de Sup $2L(\hat{\theta})$ em comparação com valores de $2L(\theta)$.

Note que o $c_{1\alpha}$ e c deve ser definido em $(0, 1)$ tal que o TSU tenha nível α.

Seguem duas notas importantes:

(1) No entanto, com frequência se objetiva testar parte dos parâmetros de θ, digamos $\theta_0 = (\theta_1, \ldots, \theta_q)^T$ tal que $q < p$, conhecidos como parâmetros de interesse:

$$H_0 : (\theta_1, \ldots, \theta_q) = (\theta_{1,0}, \ldots, \theta_{q,0})$$

Os demais parâmetros $(\theta_{q+1}, \ldots, \theta_p)$ são chamados de parâmetros de perturbação ou incógnitos.

(2) Sobre a derivação de Λ:

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} \{L(\theta)\} = L(\hat{\theta}), \tag{77}$$

em que $\hat{\theta}$ representa o estimador de máxima verossimilhança (EMV) restrito (assumindo o parâmetro de interesse conhecido):

$$\hat{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_q, \hat{\theta}_{q+1}, \ldots, \hat{\theta}_p)$$

Se $(\hat{\theta}_{\text{restr}}, \hat{\theta}_{\text{livre}})$ é o EMV sob H_0,

$$\sup_{\theta \in \Theta} L(\theta) = L(\hat{\theta}), \tag{78}$$

em que $\hat{\theta}$ é o EMV irrestrito (considerando todo o espaço paramétrico).

Problemas para 1 amostra

Focaremos nossa atenção sobre a população normal em alguns TRV's. Seguem os casos:

Caso 1:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{para } \sigma^2 \text{ conhecido} \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{cases} \tag{79}$$

(Teste Z)

Caso 2:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{para } \sigma^2 \text{ desconhecido} \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{cases} \tag{80}$$

(Teste t)

Caso 3:

$$\begin{cases} H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \quad \text{para } \mu \text{ conhecido} \\ H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \end{cases} \tag{81}$$

(Teste χ^2_n) **Caso 4:**

$$\begin{cases} H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \quad \text{para } \mu \text{ desconhecido,} \\ H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \end{cases}$$

(Teste χ^2_{n-1})

Caso 1

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma a.a. de $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ com μ desconhecido e σ_0 conhecido. Aqui, temos

$$\Theta = \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \Theta_0 = \mathbb{R} - \{\mu_0\}.$$

A função de verossimilhança é

$$L(\mu) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} \right)^2 \right\}. \tag{82}$$

Desta última identidade, tem-se

$$\sup_{\mu \in \Theta_0} \{L(\mu)\} = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \sup_{\mu \in \Theta_0} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} \right)^2 \right\} \tag{83}$$

$$\sup_{\mu \in \Theta} \{L(\mu)\} = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \sup_{\mu \in \Theta} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i - \bar{x}}{\sigma} \right)^2 \right\} \tag{84}$$

em que $\bar{x} = \hat{\mu}$ é a estimativa de MV para μ. Note que, para algum certo valor, vale-se.

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - c)^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x} + \bar{x} - c)^2 \tag{85}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left\{(x_i - \bar{x})^2 + 2(x_i - \bar{x})(\bar{x} - c) + (\bar{x} - c)^2\right\} \tag{86}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 + n(\bar{x} - c)^2 \tag{87}$$

Assim,

$$\Lambda = \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[n(\bar{x} - \mu_0)^2\right]\right\} \tag{88}$$

O TRU fica definido por
"Rejeitar H_0 se, e só se, $\Lambda < k'$"

$$\Leftrightarrow \left\{n\left(\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma}\right)^2 > -2\log k'\right\} \tag{89}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\sqrt{n}\left|\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma}\right| > \sqrt{-2\log k'}\right\} \tag{90}$$

$$\Leftrightarrow \{|Z(x_1)| > k''\} \tag{91}$$

em que

$$Z(x_1) = \sqrt{n}\left(\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma}\right) \tag{92}$$

Note como $k'' = z_{\alpha/2}$ e satisfaz

$$P_{H_0}\left(|Z| > z_{\alpha/2}\right) = \alpha \tag{93}$$

Aula 30 (04/07/2018)

Considere testar $H_0 : \mu = \mu_0$ e $H_1 : \mu \neq \mu_0$ baseado em $x_1, \ldots, x_n$ como uma a.a. de $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Neste caso

$$\Theta_0 = \{(\mu_0, \sigma^2);\ \mu_0 \text{ é fixado e } \sigma \in \mathbb{R}_+\}.$$

Aqui a função de verossimilhança é

$$L(\mu, \sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)^2\right\}. \tag{94}$$

Desta expressão,

$$\sup_{(\mu_0,\sigma^2)\in\Theta_0} L(\mu, \sigma^2) = L(\mu_0, \hat{\sigma}^2) = (2\pi\hat{\sigma}^2)^{-n/2} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2\hat{\sigma}^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_0)^2\right\}, \tag{95}$$

em que

$$\hat{\sigma}^2 = n^{-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_0)^2$$

é a estimativa de MV para σ^2. Simplificando a última expressão temos:

$$\sup_{(\mu_0,\sigma^2)\in\Theta_0} L(\mu,\sigma^2) = (2\pi\hat{\sigma}^2)^{-n/2}e^{-n/2}. \tag{96}$$

Por outro lado, tem-se:

$$\sup_{(\mu,\sigma^2)\in\Theta} L(\mu,\sigma^2) = L(\bar{x},\hat{\sigma}^2) = (2\pi\hat{\sigma}^2)^{-n/2}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2\hat{\sigma}^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right\}. \tag{97}$$

em que $\hat{\mu} = \bar{x}$ e $\hat{\sigma}^2 = n^{-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$ são os estimadores de MV irrestritos para μ e σ. Simplificando,

$$\sup_{(\mu,\sigma\in\Theta)} L(\mu,\sigma) = (2\pi\hat{\sigma}^2)^{-n/2}. \tag{98}$$

Finalmente,

$$\Lambda = \frac{\sup_{(\mu,\sigma)\in\Theta_0} L(\mu,\sigma)}{\sup_{(\mu,\sigma)\in\Theta} L(\mu,\sigma)} \tag{99}$$

$$= \left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\right\}^{-n/2} \tag{100}$$

$$= \left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 + n(\bar{x}-\mu_0)^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\right\}^{-n/2} \tag{101}$$

$$= \left\{1 + \frac{n(\bar{x}-\mu_0)^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\right\}^{-n/2} \tag{102}$$

O TRVU fica definido por: dado um nível α, rejeitamos $H_0 \iff \Lambda < k \quad (0 < k < 1)$. Logo, como $f(x) = x^{-n/2}$ é estritamente decrescente,

$$R_c = \left\{1 + \frac{n(\bar{x}-\mu_0)^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2},\ n^{-2/n}\right\} = \left\{\frac{n(\bar{x}-\mu_0)^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2} > k^{-2/n} - 1\right\} \tag{103}$$

Daí, como $g(x)$ é estritamente crescente, temos que...

$$R_c = \left\{\frac{\sqrt{n}\ |\bar{x}-\mu_0|}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}} > \sqrt{k'}\right\} \tag{104}$$

como $\quad A$:

$$A = \frac{\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\bar{x}}{\sigma}\right)^2}} = \frac{\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{n}{n-1}}} = \frac{\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{s^2}{\sigma^2}}} \tag{105}$$

para $\quad \delta_c = (n-1)^{-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$,

$$R_c = \left\{ (n-1)^{-1/2} \ |T(x)| > \sqrt{k'} \right\} \tag{106}$$

para $\quad T(x) = \frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} \quad$ e $\quad x = (x_1, \dots, x_n)^T. \quad$ Logo:

$$R_c = \left\{ |T(x)| > \sqrt{\frac{(n-1)k'}{n''}} \right\} \quad \Rightarrow \quad R_c = \{|T(x)| > k''\} \tag{107}$$

Note que:

$$T(X) \text{ sob } H_0 \ \sim \ t_{n-1}. \tag{108}$$

Seja $t_{n-1,\alpha/2}$ tal que:

$$P_{H_0}\left(T > t_{n-1,\alpha/2}\right) = \frac{\alpha}{2}. \tag{109}$$

Então o TRV tem fronteira crítica.

$$\psi(X^1) = \begin{cases} 1, & |T(X^1)| > t_{n-1,\alpha/2} \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

TRV para σ^2 com μ conhecido

Sejam $X_1, \dots, X_n$ v.a. de $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ com média conhecida e $\sigma^2 \in \mathbb{R}^+$ desconhecido. Dado um nível $\alpha \in (0,1)$, considere a derivação do TRV para

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \quad \text{vs} \quad H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2.$$

A função de verossimilhança é dada por:

$$l(\sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \right\} \tag{110}$$

Daí, temos:

$$\sup_{(\mu,\sigma^2)\in\Theta} l(\sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \right\} \tag{111}$$

em que

$$\Theta_0 = \{(\mu, \sigma^2) \mid \mu \text{ é fixado e } \sigma^2 = \sigma_0^2 \text{ é fixado}\}$$

$$\sup_{(\mu,\sigma^2)\in\Theta_0} l(\sigma^2) = (2\pi\sigma_0^2)^{-n/2} \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma_0^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \right\} \tag{112}$$

em que

$$\Theta = \{\mu, \sigma\} : \mu \text{ fixado e } \sigma \in \mathbb{R}_+$$

e

$$\hat{\sigma}^2 = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2.$$

Finalmente,

$$\Lambda = \left\{\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2}\right\}^{n/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{\sigma_0^2} + \frac{n}{2}\right\} \tag{113}$$
$$= \left[\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2}\right]^{n/2} \exp\left(1 - \frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2}\right)^{n/2}.$$

Deste modo, o TRV fica definido como

$$\text{rejeita-se } H_0 \iff \Lambda < k \quad (\alpha \in (0,1)).$$

Como $x^{1/x}$ para $x > 0$ é inicialmente crescente, da relação acima, temos:

$$R_c = \left\{\left(\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2}\right) \exp\left\{1 - \frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2}\right\} < k^{2/n}\right\} \tag{114}$$

A fim de apresentar o RV em uma forma implementável, vamos proceder como segue. Considere que

$$g(u) = ue^{1-u}, \quad u > 0$$

Note que

$$\lim_{u\to 0} g(u) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{u\to\infty} g(u) = 0.$$

Logo, para

$$T(X) = \sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{\sigma_0} \sim \chi_n^2, \tag{115}$$

rejeita-se H_0 se, e só se, (para $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$)

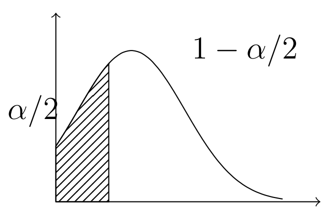
$$[T(X) < a] \quad \text{ou} \quad [T(X) > b]$$

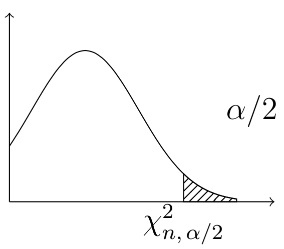
tal que

$$P_{H_0}(T < a) = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad a = \chi^2_{n,1-\alpha/2} \tag{116}$$

e

$$P_{H_0}(T > b) = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad b = \chi^2_{n,\alpha/2} \tag{117}$$





A função crítica é dada por:

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & T < \chi^2_{n,1-\alpha/2} \text{ ou } T > \chi^2_{n,\alpha/2}, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{118}$$

TRV para duas amostras

Nesta seção vamos discutir problemas relacionados ao TRV para duas amostras em dois contextos:

para $X \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$ e $Y \sim N(\mu_y, \sigma_y^2)$

Caso 1:

$$\begin{cases} H_0 : \mu_x = \mu_y \\ H_1 : \mu_x \neq \mu_y \end{cases} \quad \text{para} \quad \sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma^2 \tag{119}$$

Caso 2:

$$\begin{cases} H_0 : \sigma_x^2 = \sigma_y^2 \\ H_1 : \sigma_x^2 \neq \sigma_y^2 \end{cases} \quad \text{para} \quad \mu_x \neq \mu_y \tag{120}$$

TRV para comparar médias

Sejam $x_1, \ldots, x_n$ e $y_1, \ldots, y_m$ a.a.s independentes de $X \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$ e $Y \sim N(\mu_y, \sigma_y^2)$, respectivamente.

Assuma que $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma^2 \in \mathbb{R}_+$ e $\theta = (\mu_x, \mu_y, \sigma^2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ é desconhecido.

Dado $\alpha \in (0, 1)$ como o nível, vamos derivar o TRV para

$$H_0 : \mu_x = \mu_y \quad \text{vs} \quad H_1 : \mu_x \neq \mu_y \tag{121}$$

Inicialmente, lembramos que:

$$\bar{X} = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} x_i, \quad \bar{Y} = m^{-1} \sum_{i=1}^{m} y_i, \quad S_X^2 = (n-1)^{-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{X})^2,$$

$$S_Y^2 = (m-1)^{-1} \sum_{i=1}^{m} (y_i - \bar{Y})^2,$$

$$S^2 = \frac{(n-1)S_X^2 + (m-1)S_Y^2}{n+m-2}$$

São estimadores para μ_X/μ_Y, σ_X^2, σ_Y^2 e σ^2, respectivamente. Neste caso,

$$\Theta_0 = \{(\mu_X, \mu_Y, \sigma^2) : \mu_X = \mu_Y = \mu \in \mathbb{R} \text{ e } \sigma^2 \in \mathbb{R}_+\}$$

$$\Theta = \{(\mu_X, \mu_Y, \sigma^2) : \mu_X, \mu_Y \in \mathbb{R} \text{ e } \sigma^2 > 0\}$$

A verossimilhança é dada por:

$$L(\mu_X, \mu_Y, \sigma^2) \triangleq L(\mu_X, \mu_Y, \sigma^2; x^n, y^m) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n+m}{2}} \cdot \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left[\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu_X)^2 + \sum_{j=1}^{m} (y_j - \mu_Y)^2 \right] \right\} \tag{122}$$

para $(\mu_X, \mu_Y, \sigma^2) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+$, em que x^n é uma amostra de X e y^m é uma amostra de Y. Assim,

$$\sup_{\{L(\mu_X,\mu_Y,\sigma^2)\}} = \sup\left\{(2\pi\sigma^2)^{-\frac{n+m}{2}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 + \sum_{j=1}^{m}(y_j-\mu)^2\right)\right]\right\} \quad (123)$$

$$\text{para} \quad (\mu_X, \mu_Y, \sigma^2) \in \Theta_0$$

Pode-se obter (fica como exercício!) que os estimadores... De MV restrito para μ e σ^2 são dados por:

$$\hat{\mu} = \frac{n\bar{x} + m\bar{y}}{n+m}, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{(n-1)\Delta^2_{x;\mu} + (m-1)\Delta^2_{y;\mu}}{n+m} \quad (124)$$

em que

$$\Delta^2_{x;\mu} = (n-1)^{-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2, \quad \Delta^2_{y;\mu} = (m-1)^{-1}\sum_{i=1}^{m}(y_i-\mu)^2 \quad (125)$$

Aplicando (2) em (1), temos que:

$$\sup\{L(\mu_x,\mu_y,\sigma^2)\} = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{mn}{2}} \cdot e^{-\frac{mn}{2}}, \quad (\mu_x,\mu_y,\sigma^2) \in \Theta \quad (126)$$

Por outro lado, temos que:

$$\sup\{L(\mu_x,\mu_y,\sigma^2)\} = (2\pi\hat{\sigma}^2)^{-\frac{n+m}{2}} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2\hat{\sigma}^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\hat{\mu}_x)^2 + \sum_{i=1}^{m}(y_i-\hat{\mu}_y)^2\right\} \quad (127)$$

$$= (2\pi\hat{\sigma}^2)^{-\frac{n+m}{2}} \cdot e^{-\frac{n+m}{2}},$$

uma vez que $\hat{\mu}_x = \bar{x}$, $\hat{\mu}_y = \bar{y}$ e

$$\hat{\sigma}^2_{x,y} = \frac{(n-1)\Delta^2_x + (m-1)\Delta^2_y}{n+m}, \quad (128)$$

para s^2_x como uma observação de S^2_x e s^2_y como uma observação de S^2_y, são estimativas de MV irrestritas para μ_x, μ_y e σ^2.

Finalmente,

$$\Lambda = \left\{\frac{\hat{\sigma}^2_c}{\hat{\sigma}^2}\right\}^{\frac{n+m}{2}} = \left\{\frac{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 + \sum_{i=1}^{m}(y_i-\bar{y})^2}{n+m}}{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\hat{\mu})^2 + \sum_{i=1}^{m}(y_i-\hat{\mu})^2}{n+m}}\right\}^{\frac{n+m}{2}}. \quad (129)$$

Note que

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\hat{\mu}_x)^2 + \sum_{i=1}^{m}(y_i-\hat{\mu}_y)^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 + n(\bar{x}-\hat{\mu})^2 + \sum_{i=1}^{m}(y_i-\bar{y})^2 + m(\bar{y}-\hat{\mu})^2 \quad (130)$$

$$\underbrace{(n-1)s^2_x}_{\text{variância amostral de } x} \qquad \underbrace{(m-1)s^2_y}_{\text{variância amostral de } y}$$

E, para

$$R(\bar{x},\bar{y}) = \frac{n(\bar{x}-\hat{\mu})^2 + m(\bar{y}-\hat{\mu})^2}{(n-1)s^2_x + (m-1)s^2_y}, \quad (131)$$

temos

$$\Lambda = \left\{ \frac{1}{1+R(\bar{x},\bar{y})} \right\}^{\frac{n+m}{2}} = \{1 + R(\bar{x},\bar{y})\}^{-\frac{n+m}{2}}\,. \tag{132}$$

Ainda,

$$n(\bar{x}-\hat{\mu})^2 + m(\bar{y}-\hat{\mu})^2 = n\left[\bar{x} - \frac{n\bar{x}+m\bar{y}}{n+m}\right]^2 + m\left[\bar{y} - \frac{n\bar{x}+m\bar{y}}{n+m}\right]^2 \tag{133}$$

$$= n\left[\frac{m\bar{x}-m\bar{y}}{n+m}\right]^2 + m\left[\frac{n\bar{y}-n\bar{x}}{n+m}\right]^2 \tag{134}$$

$$= \frac{nm^2}{(n+m)^2}(\bar{x}-\bar{y})^2 + \frac{mn^2}{(n+m)^2}(\bar{x}-\bar{y})^2 = \frac{nm}{n+m}(\bar{x}-\bar{y})^2. \tag{135}$$

Então

$$R(\bar{x},\bar{y}) = \frac{nm}{nm}\left[\frac{(\bar{x}-\bar{y})^2}{(n-1)s_x^2 + (m-1)s_y^2}\right]. \tag{136}$$

A região crítica do TRV é dada por: para

$$z = (\bar{x}^T, \bar{y}^T)^T \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \text{ o qual}$$

$$R_c = \{z \in \alpha;\ \Lambda(z) < k\} = \left\{[1 + R(\bar{x},\bar{y})]^{-\frac{nm}{2}} < k\right\} \Rightarrow \tag{137}$$

$$R_c = \left\{[1 + R(\bar{x},\bar{y})] > k^{-\frac{2}{nm}}\right\} \Rightarrow \tag{138}$$

$$R_c = \left\{R(\bar{x},\bar{y}) > k^{-\frac{2}{nm}} - 1\right\} \Rightarrow \tag{139}$$

$$R_c = \left\{\sqrt{\frac{nm}{nm} \cdot \frac{(\bar{x}-\bar{y})^2}{(n-1)s_x^2 + (m-1)s_y^2}} > \sqrt{k^{-\frac{2}{nm}} - 1}\right\} \Rightarrow \tag{140}$$

$$T_1(\bar{x},\bar{y})$$

$$R_c = \{|T(\bar{x},\bar{y})| > k'\}\,.$$

Note que, para as a.o.s $\bar{x}$ e $\bar{y}$,

$$T_1(\bar{x},\bar{y}) = \sqrt{\frac{nm}{nm}} \cdot \frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{(n-1)s_x^2 + (m-1)s_y^2}} = \frac{1}{\sqrt{nm-2}} \cdot \frac{\frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}}}{\sqrt{\frac{(n-1)s_x^2+(m-1)s_y^2}{(nm-2)s^2}}} \tag{141}$$

$$T(\bar{x},\bar{y})$$

Ainda, a R_c do TRV pode ser dada por:

$$R_c = \left\{ z \in \mathcal{X} \;\middle|\; \sqrt{mn-2}\, T(\bar{x},\bar{y}) > k''\sqrt{\frac{mn-2}{k''}} \right\} \tag{142}$$

$$\therefore R_c = \{\ |T(\bar{x},\bar{y})| > k''\ \}$$

Podemos ver que

$$T(\bar{x}, \bar{y}) \overset{H_0}{\sim} t_{nm-2} \tag{143}$$

Tomando $k'' = t_{nm-2, \frac{\alpha}{2}}$ tal que

$$\psi_{H_0}\left(T(\bar{x}, \bar{y}) > t_{nm-2, \frac{\alpha}{2}}\right) = \frac{\alpha}{2}, \tag{144}$$

temos que a função crítica do TRV é dada por:

$$\psi(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{cases} 1, & |T(\bar{x}, \bar{y})| > t_{nm-2, \frac{\alpha}{2}}, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{145}$$

em que

$$T(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{\sqrt{\frac{nm}{nm}}\,(\bar{x} - \bar{y})}{\Lambda} \tag{146}$$

e

$$\Lambda = \sqrt{\frac{(n-1)s_x^2 + (m-1)s_y^2}{nm - 2}} \tag{147}$$

é uma observação de S.

Aula 31 (02/07/2020)

TRV para $H_0 : \sigma_x = \sigma_y$

Sejam $x_1, \ldots, x_n$ e $y_1, \ldots, y_m$ a.a.s. de $X \sim N(\mu_x, \sigma_x)$ e $Y \sim N(\mu_y, \sigma_y)$. Assuma que

$$\theta = (\mu_x, \mu_y, \sigma_x, \sigma_y)^T \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+^2$$

é desconhecido. Dado que $\alpha \in (0, 1)$ como nível de significância, vamos derivar o TRV para

$$H_0 : \sigma_x^2 = \sigma_y^2 \quad \text{e} \quad H_1 : \sigma_x^2 \neq \sigma_y^2.$$

A verossimilhança é dada por:

$$\begin{aligned} L(\theta) &= L(\theta; \vec{x}, \vec{y}) \\ &= (2\pi)^{-\frac{n+m}{2}} \cdot (\sigma_x^n \sigma_y^m)^{-1} \cdot \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i - \mu_x}{\sigma_x} \right)^2 + \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{y_i - \mu_y}{\sigma_y} \right)^2 \right] \right\}. \end{aligned} \tag{148}$$

Em que $\vec{x}$ é uma a.o. de X e $\vec{y}$ uma a.o. de Y. Note que o estimador de máxima verossimilhança restrito para μ_x, μ_y e σ é dado por:

$$\hat{\mu}_x = \bar{X}, \quad \hat{\mu}_y = \bar{Y}, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{(n-1)S_X^2 + (m-1)S_Y^2}{n+m}$$

tal que

$$S_X^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{X})^2, \quad S_Y^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^{m} (y_i - \bar{Y})^2$$

respectivamente.

Usualmente, os estimadores invariantes de MV para μ_x, μ_y, σ_x^2, σ_y^2 são dados por:

$$\hat{\mu}_x = \bar{X}, \quad \hat{\mu}_y = \bar{Y}, \quad \hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2, \quad \hat{\sigma}_y^2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(Y_i - \bar{Y})^2 \tag{149}$$

respectivamente. Aqui,

$$\Theta_0 = \{(\mu_x, \mu_y, \sigma_x, \sigma_y) : \mu_x, \mu_y \in \mathbb{R} \text{ e } \sigma_x = \sigma_y \in \mathbb{R}_+\} \tag{150}$$

$$\Theta = \{(\mu_x, \mu_y, \sigma_x, \sigma_y) : \mu_x, \mu_y \in \mathbb{R} \text{ e } \sigma_x^2, \sigma_y^2 \in \mathbb{R}_+\} \tag{151}$$

Dado,

$$\sup_{\Theta_0}\{L(\Theta)\} = (2\pi)^{-\frac{n+m}{2}}(\tilde{\sigma}^2)^{-\frac{n+m}{2}} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2\tilde{\sigma}^2}\left[(n-1)s_x^2 + (m-1)s_y^2\right]\right\} \tag{152}$$

em que s_x^2 é uma observação de S_x^2 e s_y^2 é uma observação de S_y^2. Logo,

$$\sup_{\Theta_0}\{L(\Theta)\} = (2\pi\tilde{\sigma}^2)^{-\frac{n+m}{2}} e^{-\frac{n+m}{2}} \tag{153}$$

$$\sup_{\Theta}\{L(\Theta)\} = (2\pi)^{-\frac{n+m}{2}}\left(\hat{\sigma}_x^n \hat{\sigma}_y^m\right)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{n+m}{2}} \tag{154}$$

Dado, temos que

$$\Lambda = \frac{(\hat{\sigma}_x^2)^{\frac{n}{2}}(\hat{\sigma}_y^2)^{\frac{m}{2}}}{(\tilde{\sigma}^2)^{\frac{n+m}{2}}} = \frac{(\hat{\sigma}_x^2)^{\frac{n}{2}}(\hat{\sigma}_y^2)^{\frac{m}{2}}}{\left[(mn)^{-1}(n\hat{\sigma}_x^2 + m\hat{\sigma}_y^2)\right]^{\frac{n+m}{2}}} \tag{155}$$

Definindo $\lambda = \frac{u}{n+m}$, tem-se:

$$\Lambda = \left[\frac{\hat{\sigma}_x^2}{\lambda\hat{\sigma}_x^2 + (1-\lambda)\hat{\sigma}_y^2}\right]^{\frac{n}{2}}\left[\frac{\hat{\sigma}_y^2}{\lambda\hat{\sigma}_x^2 + (1-\lambda)\hat{\sigma}_y^2}\right]^{\frac{m}{2}} \tag{156}$$

$$(\xi) = \hat{\sigma}_y^2\left[\frac{\hat{\sigma}_x^2/\hat{\sigma}_y^2}{\lambda(\hat{\sigma}_x^2/\hat{\sigma}_y^2) + (1-\lambda)}\right]^{\frac{n}{2}}\left[\frac{1}{\lambda(\hat{\sigma}_x^2/\hat{\sigma}_y^2) + (1-\lambda)}\right]^{\frac{m}{2}} \tag{157}$$

$$\Lambda = \lambda^{-\frac{n+m}{2}}\left(\frac{\hat{\sigma}_x^2/\hat{\sigma}_y^2}{\hat{\sigma}_x^2/\hat{\sigma}_y^2 + b}\right)^{\frac{n+m}{2}}, \quad b \triangleq \frac{1-\lambda}{\lambda} \tag{158}$$

A RC de TRV é dada por: para $z = (\hat{\sigma}_x^2, \hat{\sigma}_y^2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$

$$\{z \in \mathbb{R}^n,\ \Lambda(z) < c'\}, \quad u \text{ escalar} \tag{159}$$

$$\left\{\frac{(\hat{\sigma}_x^2/\hat{\sigma}_y^2)^{n/2}}{\left[(\hat{\sigma}_x^2/\hat{\sigma}_y^2) + b\right]^{\frac{n+m}{2}}} < \frac{k \cdot \lambda^{-\frac{n+m}{2}}}{c'}\right\} \tag{160}$$

A fim de representar a RV de modo implementável, vamos proceder como segue: considere a função

$$g(u) = u^{n/2}(u+b)^{-\frac{n+m}{2}}, \quad u > 0 \tag{161}$$

Vamos investigar o comportamento de Λ. Note que:

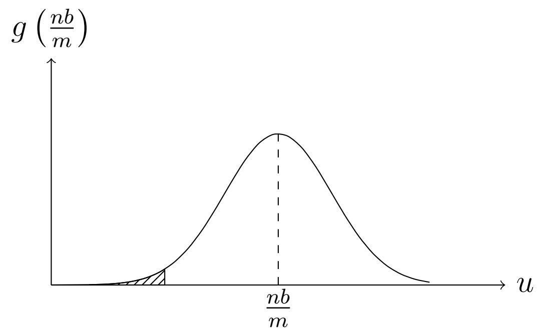
$$g'(u) = \frac{2g(u)}{2u} = \frac{\frac{n}{2}u^{\frac{n}{2}-1}(u+b)^{-\frac{n+m}{2}} - u^{\frac{n}{2}}\frac{n+m}{2}(u+b)^{-\frac{n+m}{2}-1}}{(u+b)^{-n+m}} \tag{162}$$

$$\begin{aligned} g'(u) &= \frac{n}{2}u^{\frac{n}{2}-1}(nub)^{-\frac{nm}{2}} - u^{\frac{n}{2}}\left(\frac{nm}{2}\right)(nub)^{-\frac{nm}{2}-1} \\ &= (nub)^{-\frac{nm}{2}} \cdot u^{\frac{n}{2}-1}\left[(nb)\frac{n}{2} - u\left(\frac{nm}{2}\right)\right] \\ &= \frac{1}{a^2}(nub)^{-\frac{nm}{2}} \cdot u^{\frac{n}{2}-1}\left[nb - mnu\right] \end{aligned} \tag{163}$$

Dai, $g(u) \geq 0$ e

$$g'(u) = 0 \quad \Rightarrow \quad u = \frac{nb}{m}.$$

(ii) $\lim_{u\to 0} g(u) = 0$ e $\lim_{u\to\infty} g(u) = 0$
Logo, $g(u)$ é muito pequena quando $u = \frac{\hat{\sigma}_x^2}{\hat{\sigma}_y^2}$ é muito pequena ou muito grande.



Tomar:

$$\begin{aligned} F_n(\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2) &= \frac{\frac{\hat{\sigma}_x}{\sigma_x}}{\frac{\hat{\sigma}_y}{\sigma_y}} = \frac{\frac{n-1}{n}\frac{S_x^2}{\sigma_x^2}}{\frac{m-1}{m}\frac{S_y^2}{\sigma_y^2}} = \frac{\frac{n-1}{n}S_x^2/\sigma_x^2}{\frac{m-1}{m}S_y^2/\sigma_y^2} \\ &= \frac{S_x^2/\sigma_x^2}{S_y^2/\sigma_y^2} \cdot \frac{m(n-1)}{n(m-1)} \end{aligned} \tag{164}$$