Questões Resolvidas do Capítulo 4

Teste de Hipóteses - Soluções Detalhadas

Curso de Inferência Estatística - PPGEST/UFPE

Compilado e detalhado

Novembro 2025

Sumário

Introdução

Este documento apresenta todas as questões resolvidas em sala de aula do Capítulo 4 sobre Teste de Hipóteses. As soluções foram expandidas com explicações detalhadas, intuições e comentários didáticos para facilitar o entendimento completo dos conceitos.

Organização do Documento

Cada questão está organizada da seguinte forma:

1. **Enunciado** - apresentação completa do problema
2. **Solução Detalhada** - desenvolvimento passo a passo
3. **Observações e Intuição** - comentários sobre o método e interpretações
4. **Resumo** - síntese dos principais resultados

Questões Incluídas

- Q(4.1) - Exemplos de testes e regiões críticas
- Q(4.3) - Função poder de um teste
- Q(4.4) - Teste MP para distribuição Normal (variância conhecida)
- Q(4.5) - Teste MP para distribuição Exponencial
- Q(4.6) - Teste MP para distribuição Bernoulli
- Q(4.7) - Teste MP para distribuição Poisson
- Q(4.8) - Teste MP para densidades não-paramétricas
- Q(4.9) - Teste MP com duas variáveis independentes
- Q(4.10) - Teste UMP para variância (Normal com média zero)
- Q(4.12) - Teste UMP via Teorema de Karlin-Rubin

1 Questão 4.1: Exemplos de Testes

Questão 4.1

Sejam $X_1, \ldots, X_9$ uma amostra aleatória de $X \sim N(\theta, 1)$ para $\theta \in \mathbb{R}$ desconhecido. Deseja-se testar:

$$H_0 : \theta = 5.5 \quad \text{vs} \quad H_1 : \theta = 8 \tag{1}$$

Seja $\bar{X}_n = 9^{-1} \sum_{i=1}^{9} X_i$ a média amostral.
Considere os seguintes testes:

- **Teste #1:** Rejeita-se H_0 se e só se $X_1 > 7$
- **Teste #2:** Rejeita-se H_0 se e só se $\frac{X_1+X_2}{2} > 7$
- **Teste #3:** Rejeita-se H_0 se e só se $\bar{X}_n > 6$
- **Teste #4:** Rejeita-se H_0 se e só se $\bar{X}_n > 7.5$

Determine as regiões críticas de cada teste e calcule os erros Tipo I (α) e Tipo II (β) para o Teste #1.

Solução Detalhada

Parte 1: Regiões Críticas

A região crítica R_c é o conjunto de valores amostrais para os quais rejeitamos H_0.

Teste #1: Como rejeitamos quando $X_1 > 7$, temos:

$$R_c^{(1)} = \{(x_1, \ldots, x_9) \in \mathbb{R}^9 : x_1 > 7\} \tag{2}$$

Interpretação: Este teste usa apenas a primeira observação, ignorando as outras 8. Isso é claramente ineficiente!

Teste #2:

$$R_c^{(2)} = \{(x_1, \ldots, x_9) \in \mathbb{R}^9 : \frac{x_1 + x_2}{2} > 7\} \tag{3}$$

Interpretação: Usa apenas duas observações. Melhor que o Teste #1, mas ainda desperdiça informação.

Teste #3:

$$R_c^{(3)} = \{(x_1, \ldots, x_9) \in \mathbb{R}^9 : \bar{x}_n > 6\} \tag{4}$$

Interpretação: Usa todas as 9 observações através da média amostral, que é uma estatística suficiente para θ.

Teste #4:

$$R_c^{(4)} = \{(x_1, \ldots, x_9) \in \mathbb{R}^9 : \bar{x}_n > 7.5\} \tag{5}$$

Interpretação: Também usa todas as observações, mas com um limiar mais alto.

Solução Detalhada

Parte 2: Cálculo de α e β para o Teste #1

Erro Tipo I (α): É a probabilidade de rejeitar H_0 quando ela é verdadeira.

$$\begin{aligned}
\alpha &= P_{H_0:\theta=5.5}\{X_1 > 7\} && (6)\\
&= P\left\{\frac{X_1 - 5.5}{\sigma} > \frac{7 - 5.5}{\sigma}\right\} \quad (X_1 \sim N(5.5, 1) \text{ sob } H_0) && (7)\\
&= P\{Z > 1.5\} \quad \text{onde } Z \sim N(0,1) && (8)\\
&= 1 - \Phi(1.5) && (9)\\
&= 1 - 0.93319 && (10)\\
&= 0.06681 \approx 6.68\% && (11)
\end{aligned}$$

Interpretação: Há cerca de 6.68% de chance de rejeitarmos H_0 incorretamente quando $\theta = 5.5$.

Erro Tipo II (β): É a probabilidade de não rejeitar H_0 quando ela é falsa (i.e., quando H_1 é verdadeira).

$$\begin{aligned}
\beta &= P_{H_1:\theta=8}\{X_1 \leq 7\} && (12)\\
&= P\left\{\frac{X_1 - 8}{\sigma} < \frac{7 - 8}{\sigma}\right\} \quad (X_1 \sim N(8, 1) \text{ sob } H_1) && (13)\\
&= P\{Z < -1\} \quad \text{onde } Z \sim N(0,1) && (14)\\
&= \Phi(-1) && (15)\\
&= 0.15866 \approx 15.87\% && (16)
\end{aligned}$$

Interpretação: Quando $\theta = 8$ (hipótese alternativa verdadeira), há cerca de 15.87% de chance de não detectarmos isso e mantermos H_0 incorretamente.

Poder do Teste: O poder é $1 - \beta = 1 - 0.15866 = 0.84134 \approx 84.13\%$. Isso significa que temos 84.13% de chance de detectar corretamente quando $\theta = 8$.

Observações e Intuição

Pontos Importantes

1. **Eficiência dos Testes:** Os testes que usam mais informação (média de todas as observações) tendem a ser mais eficientes.
2. **Trade-off:** Não podemos minimizar simultaneamente α e β para um tamanho amostral fixo. Diminuir α geralmente aumenta β e vice-versa.
3. **Estatística Suficiente:** A média amostral $\bar{X}_n$ é suficiente para θ quando $X \sim N(\theta, \sigma^2)$. Pelo princípio da suficiência, os melhores testes devem depender apenas de $\bar{X}_n$.
4. **Comparação dos Testes:**
   - Teste #1 usa 1 observação
   - Teste #2 usa 2 observações
   - Testes #3 e #4 usam todas as 9 observações

   Esperamos que os testes #3 e #4 sejam mais poderosos.

Resumo da Questão

Principais Resultados:

- Para o Teste #1: $\alpha \approx 6.68\%$ e $\beta \approx 15.87\%$
- Poder do Teste #1: aproximadamente 84.13%
- As regiões críticas dependem da estatística de teste escolhida
- Testes baseados em estatísticas suficientes são preferíveis

2 Questão 4.3: Função Poder do Teste

Questão 4.3

Para o Teste #4 da Questão 4.1, determine a função poder $Q_\Upsilon(\theta)$.
Recall: Teste #4 rejeita $H_0 : \theta = 5.5$ vs $H_1 : \theta = 8$ se e só se $\bar{X}_n > 7.5$, onde $X_1, \ldots, X_9 \sim N(\theta, 1)$ i.i.d.

Solução Detalhada

Definição da Função Poder

A função poder de um teste Υ é definida como:

$$Q_\Upsilon(\theta) = P_\theta[\text{Rejeitar } H_0] = P_\theta[X \in R_c] \tag{17}$$

Ela mede a probabilidade de rejeitar H_0 para cada valor possível do parâmetro θ.

Solução Detalhada

Cálculo para o Teste #4

Para o Teste #4, temos $R_c = \{x \in \mathbb{R}^9 : \bar{x}_n > 7.5\}$. Portanto:

$$Q_\Upsilon(\theta) = P_\theta[\bar{X}_n > 7.5] \tag{18}$$
$$= P_\theta\left[\frac{\bar{X}_n - \theta}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{7.5 - \theta}{\sigma/\sqrt{n}}\right] \tag{19}$$

Nota importante: Sob qualquer valor de θ, temos:

$$\bar{X}_n \sim N\left(\theta, \frac{\sigma^2}{n}\right) = N\left(\theta, \frac{1}{9}\right) \tag{20}$$

Portanto:

$$\frac{\bar{X}_n - \theta}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\bar{X}_n - \theta}{1/3} = 3(\bar{X}_n - \theta) \sim N(0,1) \tag{21}$$

Continuando o cálculo:

$$Q_\Upsilon(\theta) = P\left[Z > \frac{7.5 - \theta}{1/3}\right] \quad \text{onde } Z \sim N(0,1) \tag{22}$$
$$= P\left[Z > 3(7.5 - \theta)\right] \tag{23}$$
$$= P[Z > 22.5 - 3\theta] \tag{24}$$
$$= 1 - \Phi(22.5 - 3\theta) \tag{25}$$

Forma final da função poder:

$$\boxed{Q_\Upsilon(\theta) = 1 - \Phi\left(\sqrt{n}(7.5 - \theta)\right) = 1 - \Phi(3(7.5 - \theta))} \tag{26}$$

Solução Detalhada

Interpretação para Valores Específicos

Para $\theta = 5.5$ (sob H_0):

$$\begin{aligned} Q_\Upsilon(5.5) &= 1 - \Phi(3(7.5 - 5.5)) && (27) \\ &= 1 - \Phi(6) && (28) \\ &\approx 1 - 0.999999999 && (29) \\ &\approx 10^{-9} \text{ (praticamente zero)} && (30) \end{aligned}$$

Isso significa que o Teste #4 tem probabilidade quase zero de rejeitar H_0 quando $\theta = 5.5$. O teste é extremamente conservador!

Para $\theta = 8$ (sob H_1):

$$\begin{aligned} Q_\Upsilon(8) &= 1 - \Phi(3(7.5 - 8)) && (31) \\ &= 1 - \Phi(-1.5) && (32) \\ &= 1 - 0.06681 && (33) \\ &= 0.93319 \approx 93.32\% && (34) \end{aligned}$$

Quando $\theta = 8$, o teste tem 93.32% de chance de rejeitar H_0 corretamente.

Para $\theta = 7.5$:

$$\begin{aligned} Q_\Upsilon(7.5) &= 1 - \Phi(0) && (35) \\ &= 1 - 0.5 && (36) \\ &= 0.5 && (37) \end{aligned}$$

Quando $\theta = 7.5$ (exatamente no limiar), há 50% de chance de rejeitar H_0.

Observações e Intuição

Propriedades da Função Poder

1. **Monotonicidade:** Para este teste unilateral, $Q_\Upsilon(\theta)$ é crescente em θ. Quanto maior o verdadeiro valor de θ, maior a probabilidade de rejeitarmos $H_0 : \theta = 5.5$.

2. **Tamanho do Teste:** O tamanho é $\alpha = \sup_{\theta \in \Theta_0} Q_\Upsilon(\theta)$. Para este teste, $\alpha = Q_\Upsilon(5.5) \approx 0$ (muito pequeno).

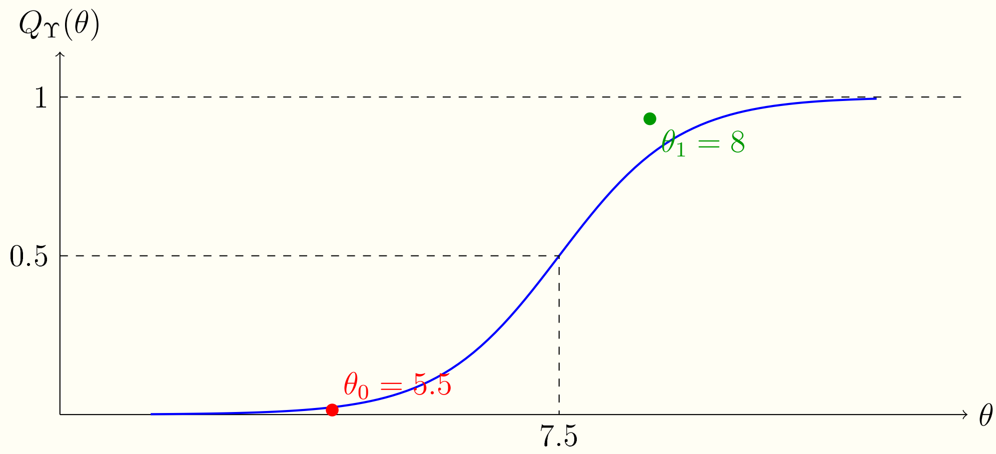
3. **Poder do Teste:** Para $\theta \in \Theta_1$, $Q_\Upsilon(\theta)$ representa o poder. Quanto maior, melhor!

4. **Relação com Erros:**
   - $Q_\Upsilon(\theta_0) = \alpha$ (Erro Tipo I quando $\theta = \theta_0$)
   - $Q_\Upsilon(\theta_1) = 1 - \beta$ (Poder quando $\theta = \theta_1$)

5. **Comportamento Assintótico:**
   - $\lim_{\theta \to -\infty} Q_\Upsilon(\theta) = 0$
   - $\lim_{\theta \to +\infty} Q_\Upsilon(\theta) = 1$

Visualização

A função poder tem forma de curva S (sigmoidal):



Função Poder do Teste #4

Resumo da Questão

Principais Resultados:

$$Q_\Upsilon(\theta) = 1 - \Phi(3(7.5 - \theta))$$

- Para $\theta = 5.5$: $Q \approx 0$ (tamanho $\alpha \approx 0$)
- Para $\theta = 7.5$: $Q = 0.5$
- Para $\theta = 8.0$: $Q \approx 0.933$ (poder $\approx 93.3\%$)
- A função é crescente: testes detectam melhor valores maiores de θ

3 Questão 4.4: Teste MP para Distribuição Normal

Questão 4.4

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ com μ desconhecido e $\sigma^2 \in \mathbb{R}^+$ conhecido.
Encontre o teste Mais Poderoso (MP) de nível α para:

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \mu = \mu_1 \tag{38}$$

onde μ_0 e μ_1 são conhecidos e $\mu_1 > \mu_0$.

Solução Detalhada

Passo 1: Identificar o Método Apropriado

Como ambas as hipóteses são **simples** (especificam completamente o parâmetro), podemos aplicar o **Lema de Neyman-Pearson (LNP)**.

Passo 2: Escrever as Funções de Verossimilhança

Para uma amostra $x = (x_1, \ldots, x_n)$ de $N(\mu, \sigma^2)$, a função de verossimilhança é:

$$L(\mu; x) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \tag{39}$$

Simplificando:

$$L(\mu; x) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2\right\} \tag{40}$$

Expandindo o termo $(x_i - \mu)^2$:

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 - 2\mu x_i + \mu^2) \tag{41}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\mu \sum_{i=1}^{n} x_i + n\mu^2 \tag{42}$$

Logo:

$$L(\mu; x) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\mu \sum_{i=1}^{n} x_i + n\mu^2\right)\right\} \tag{43}$$

Solução Detalhada

Passo 3: Calcular a Razão de Verossimilhanças

Pelo LNP, o teste MP tem a forma: "Rejeita H_0 se e só se $\frac{L_1}{L_0} > k$", onde $L_i = L(\mu_i; x)$.
Calculando a razão:

$$\begin{aligned}
\frac{L_1}{L_0} &= \frac{L(\mu_1; x)}{L(\mu_0; x)} && (44)\\
&= \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum x_i^2 - 2\mu_1 \sum x_i + n\mu_1^2\right)\right\}}{\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum x_i^2 - 2\mu_0 \sum x_i + n\mu_0^2\right)\right\}} && (45)\\
&= \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\left(-2\mu_1 \sum x_i + n\mu_1^2\right) - \left(-2\mu_0 \sum x_i + n\mu_0^2\right)\right]\right\} && (46)\\
&= \exp\left\{\frac{1}{2\sigma^2}\left[2(\mu_1 - \mu_0)\sum x_i - n(\mu_1^2 - \mu_0^2)\right]\right\} && (47)\\
&= \exp\left\{\frac{(\mu_1 - \mu_0)}{\sigma^2}\sum x_i - \frac{n(\mu_1^2 - \mu_0^2)}{2\sigma^2}\right\} && (48)
\end{aligned}$$

Solução Detalhada

Passo 4: Simplificar a Região Crítica

A condição $\frac{L_1}{L_0} > k$ torna-se:

$$\exp\left\{\frac{(\mu_1 - \mu_0)}{\sigma^2}\sum x_i - \frac{n(\mu_1^2 - \mu_0^2)}{2\sigma^2}\right\} > k \tag{49}$$

Aplicando logaritmo (função crescente):

$$\frac{(\mu_1 - \mu_0)}{\sigma^2}\sum x_i - \frac{n(\mu_1^2 - \mu_0^2)}{2\sigma^2} > \log k \tag{50}$$

Como $\mu_1 > \mu_0$, temos $\mu_1 - \mu_0 > 0$, então podemos dividir por esse termo:

$$\sum x_i > \frac{\sigma^2}{\mu_1 - \mu_0}\left[\log k + \frac{n(\mu_1^2 - \mu_0^2)}{2\sigma^2}\right] \tag{51}$$

Definindo $k_2 = \frac{\sigma^2}{\mu_1 - \mu_0}\left[\log k + \frac{n(\mu_1^2 - \mu_0^2)}{2\sigma^2}\right]$:

$$\sum x_i > k_2 \tag{52}$$

Equivalentemente, dividindo por n e multiplicando:

$$\bar{x} > \frac{k_2}{n} \tag{53}$$

Ou ainda, padronizando:

$$\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{k_2/n - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \tag{54}$$

Definindo $k_3 = \frac{k_2/n - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$, a região crítica é:

$$R_c = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \sqrt{n}\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma} > k_3\right\} \tag{55}$$

Solução Detalhada

Passo 5: Estatística de Teste

Definimos a estatística de teste:

$$Z(x) = \sqrt{n}\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma} \tag{56}$$

Distribuição sob H_0:
Quando $H_0 : \mu = \mu_0$ é verdadeira:

- $\bar{X} \sim N\left(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n}\right)$
- $\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

Portanto:

$$Z(X) \overset{H_0}{\sim} N(0,1) \tag{57}$$

Solução Detalhada

Passo 6: Determinar k_3 para Tamanho α

Queremos que o teste tenha tamanho α:

$$\begin{aligned} \alpha &= P_{H_0}[X \in R_c] && (58)\\ &= P_{H_0}[Z(X) > k_3] && (59)\\ &= P[Z > k_3] \quad \text{onde } Z \sim N(0,1) && (60) \end{aligned}$$

Da distribuição normal padrão, $k_3 = z_\alpha$, onde z_α satisfaz:

$$P(Z > z_\alpha) = \alpha \quad \Leftrightarrow \quad z_\alpha = \Phi^{-1}(1-\alpha) \tag{61}$$

Passo 7: Teste Final

Região Crítica:

$$\boxed{R_c = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sqrt{n}\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma} > z_\alpha \right\}} \tag{62}$$

Regra de Decisão:

$$\text{Rejeita } H_0 \text{ se } Z_{\text{cal}} = \sqrt{n}\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma} > z_\alpha \tag{63}$$

onde z_α é o quantil $(1-\alpha)$ da distribuição $N(0,1)$.
Exemplos de valores de z_α:

- $\alpha = 0.05$: $z_{0.05} = 1.645$
- $\alpha = 0.01$: $z_{0.01} = 2.326$
- $\alpha = 0.10$: $z_{0.10} = 1.282$

Observações e Intuição

Pontos Importantes

1. **Lema de Neyman-Pearson:** O LNP garante que este teste é o mais poderoso entre todos os testes de nível α. Nenhum outro teste de mesmo nível tem poder maior.

2. **Estatística Suficiente:** A média amostral $\bar{X}$ é suficiente para μ. O LNP confirma que o melhor teste depende apenas dela (não das observações individuais).

3. **Teste Z:** Este é o famoso "teste Z" usado extensivamente na prática quando σ^2 é conhecido.

4. **Unilateralidade:** Como $\mu_1 > \mu_0$, rejeitamos H_0 para valores grandes de $\bar{X}$. O teste é unilateral à direita.

5. **Normalização:** A estatística $Z(x) = \sqrt{n}\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma}$ tem distribuição $N(0, 1)$ sob H_0, independentemente de σ^2 e n. Isso facilita o uso de tabelas.

6. **Efeito do tamanho amostral:** Para n fixo e α fixo, o poder do teste aumenta à medida que $|\mu_1 - \mu_0|$ aumenta. Para $|\mu_1 - \mu_0|$ fixo e α fixo, o poder aumenta com n.

Conexão com Estimação

A estatística de teste pode ser reescrita como:

$$Z(x) = \frac{\hat{\mu} - \mu_0}{\mathrm{SE}(\hat{\mu})} \tag{64}$$

onde $\hat{\mu} = \bar{x}$ é o estimador de máxima verossimilhança de μ e $\mathrm{SE}(\hat{\mu}) = \sigma/\sqrt{n}$ é seu erro padrão.
Essa forma mostra que estamos medindo quantos "erros padrão"o estimado está do valor sob H_0.

Resumo da Questão

Teste MP para $H_0 : \mu = \mu_0$ vs $H_1 : \mu = \mu_1$ ($\mu_1 > \mu_0$):

Estatística de Teste:

$$Z = \sqrt{n}\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \overset{H_0}{\sim} N(0, 1)$$

Regra de Decisão:

$$\text{Rejeita } H_0 \text{ se } Z_{\text{cal}} > z_\alpha$$

Propriedades:

- É o teste mais poderoso de nível α (pelo LNP)
- Depende apenas da estatística suficiente $\bar{X}$
- Distribuição sob H_0 é conhecida e tabelada

4 Questão 4.5: Teste MP para Distribuição Exponencial

Questão 4.5

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de $X \sim \text{Exp}(\theta)$ com densidade:

$$f(x;\theta) = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}, \quad x > 0 \tag{65}$$

onde $\theta > 0$ é desconhecido.
Encontre o teste Mais Poderoso (MP) de nível α para:

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \theta = \theta_1 \quad (\theta_1 > \theta_0) \tag{66}$$

Solução Detalhada

Passo 1: Aplicação do LNP

Como temos hipóteses simples vs simples, aplicamos o Lema de Neyman-Pearson.

Passo 2: Função de Verossimilhança

Para uma amostra $x = (x_1, \ldots, x_n)$:

$$L(\theta; x) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \theta) \tag{67}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta} e^{-x_i/\theta} \tag{68}$$

$$= \theta^{-n} \exp\left\{ -\frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^{n} x_i \right\} \tag{69}$$

Portanto, para $i = 0, 1$:

$$L_i = L(\theta_i; x) = \theta_i^{-n} \exp\left\{ -\frac{\sum_{j=1}^{n} x_j}{\theta_i} \right\} \tag{70}$$

Solução Detalhada

Passo 3: Razão de Verossimilhanças

$$\frac{L_1}{L_0} = \frac{L(\theta_1; x)}{L(\theta_0; x)} \tag{71}$$

$$= \frac{\theta_1^{-n} \exp\left\{-\frac{\sum x_j}{\theta_1}\right\}}{\theta_0^{-n} \exp\left\{-\frac{\sum x_j}{\theta_0}\right\}} \tag{72}$$

$$= \left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^n \exp\left\{\sum_{j=1}^{n} x_j \left(\frac{1}{\theta_0} - \frac{1}{\theta_1}\right)\right\} \tag{73}$$

Passo 4: Região Crítica

Pelo LNP, rejeitamos H_0 quando $\frac{L_1}{L_0} > k$:

$$\left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^n \exp\left\{\sum x_j \left(\frac{1}{\theta_0} - \frac{1}{\theta_1}\right)\right\} > k \tag{74}$$

Aplicando logaritmo:

$$n \log\left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right) + \sum x_j \left(\frac{1}{\theta_0} - \frac{1}{\theta_1}\right) > \log k \tag{75}$$

Rearranjando:

$$\sum x_j \left(\frac{1}{\theta_0} - \frac{1}{\theta_1}\right) > \log k - n \log\left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right) \tag{76}$$

Análise do sinal: Como $\theta_1 > \theta_0 > 0$, temos:

$$\frac{1}{\theta_0} - \frac{1}{\theta_1} = \frac{\theta_1 - \theta_0}{\theta_0 \theta_1} > 0 \tag{77}$$

Portanto, podemos dividir a desigualdade por $\left(\frac{1}{\theta_0} - \frac{1}{\theta_1}\right)$ sem inverter o sinal:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i > \frac{\log k - n \log(\theta_0/\theta_1)}{\frac{1}{\theta_0} - \frac{1}{\theta_1}} = k_2 \tag{78}$$

Logo, a região crítica é:

$$R_c = \left\{x \in \mathbb{R}_+^n : \sum_{i=1}^{n} x_i > k_2\right\} \tag{79}$$

Solução Detalhada

Passo 5: Estatística de Teste com Distribuição Conhecida

Para termos uma estatística com distribuição livre de parâmetros sob H_0, precisamos transformar $\sum X_i$.

Propriedade da Exponencial:

Se $X \sim \text{Exp}(\theta)$, então $Y = \frac{X}{\theta} \sim \text{Exp}(1)$ (exponencial padrão).

Mais ainda, $Z = \frac{2X}{\theta} \sim \chi_2^2$ (qui-quadrado com 2 graus de liberdade).

Demonstração: A densidade de $Z = \frac{2X}{\theta}$ é:

$$
\begin{aligned}
f_Z(z) &= f_X\left(\frac{\theta z}{2}\right) \cdot \frac{\theta}{2} && (80)\\
&= \frac{1}{\theta} e^{-\frac{\theta z/2}{\theta}} \cdot \frac{\theta}{2} && (81)\\
&= \frac{1}{2} e^{-z/2}, \quad z > 0 && (82)
\end{aligned}
$$

Comparando com a densidade de χ_2^2:

$$f_{\chi_2^2}(z) = \frac{1}{2^1 \Gamma(1)} z^{1-1} e^{-z/2} = \frac{1}{2} e^{-z/2} \tag{83}$$

Portanto, $\frac{2X_i}{\theta} \sim \chi_2^2$ para cada i.

Soma de qui-quadrados: Como as X_i são independentes:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{2X_i}{\theta} = \frac{2}{\theta} \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \chi_{2n}^2 \tag{84}$$

Solução Detalhada

Passo 6: Estatística de Teste Final

Definimos:

$$Q(x) = \frac{2}{\theta_0} \sum_{i=1}^{n} x_i \tag{85}$$

Sob $H_0 : \theta = \theta_0$:

$$Q(X) \overset{H_0}{\sim} \chi^2_{2n} \tag{86}$$

A região crítica se torna:

$$R_c = \left\{ x \in \mathbb{R}^n_+ : Q(x) > q_\alpha \right\} \tag{87}$$

onde q_α é o quantil $(1 - \alpha)$ da distribuição χ^2_{2n}:

$$P(Q > q_\alpha) = \alpha \quad \text{quando } Q \sim \chi^2_{2n} \tag{88}$$

Passo 7: Teste Final

Estatística de Teste:

$$\boxed{Q(x) = \frac{2}{\theta_0} \sum_{i=1}^{n} x_i \overset{H_0}{\sim} \chi^2_{2n}} \tag{89}$$

Regra de Decisão:

$$\text{Rejeita } H_0 \text{ se } Q_{\text{cal}} = \frac{2}{\theta_0} \sum_{i=1}^{n} x_i > q_\alpha \tag{90}$$

onde $q_\alpha = \chi^2_{2n,1-\alpha}$ é tal que $P(\chi^2_{2n} > q_\alpha) = \alpha$.
Método alternativo (p-valor):

$$\text{Rejeita } H_0 \text{ se } p = P(\chi^2_{2n} > Q_{\text{cal}}) < \alpha \tag{91}$$

Observações e Intuição

Pontos Importantes

1. **Estatística Suficiente:** A soma $\sum X_i$ é suficiente para θ na distribuição exponencial. O teste MP depende apenas dela.

2. **Transformação:** A transformação $Q(x) = \frac{2}{\theta_0} \sum x_i$ é crucial porque:

   - Remove a dependência de θ da distribuição sob H_0
   - Fornece uma distribuição conhecida e tabelada (χ^2_{2n})

3. **Relação com Gamma:** Como $\text{Exp}(\theta) = \text{Gamma}(1, \theta)$, temos:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \text{Gamma}(n, \theta) \tag{92}$$

4. **Graus de Liberdade:** A estatística tem $2n$ graus de liberdade (não n) porque cada $\frac{2X_i}{\theta}$ contribui com 2 graus de liberdade.

5. **Interpretação:** Valores grandes de $\sum X_i$ fornecem evidência de que θ é grande (pois $E[X] = \theta$). Como $\theta_1 > \theta_0$, rejeitamos H_0 para somas grandes.

6. **Cálculo Prático:** Na prática:

   (a) Calcule $Q_{\text{cal}} = \frac{2}{\theta_0} \sum x_i$

   (b) Encontre q_α em tabelas de χ^2_{2n} ou use software

   (c) Compare Q_{cal} com q_α

Exemplo Numérico

Suponha $n = 10$, $\theta_0 = 2$, $\alpha = 0.05$ e observamos $\sum x_i = 25$.

1. Calcular estatística: $Q_{\text{cal}} = \frac{2}{2} \cdot 25 = 25$

2. Graus de liberdade: $2n = 20$

3. Valor crítico: $\chi^2_{20,0.95} = 31.41$ (da tabela)

4. Decisão: Como $25 < 31.41$, não rejeitamos H_0

Interpretação: Não há evidência suficiente ao nível 5% para concluir que $\theta > 2$.

Resumo da Questão

Teste MP para $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta = \theta_1$ ($\theta_1 > \theta_0$):

Estatística de Teste:

$$Q(x) = \frac{2}{\theta_0} \sum_{i=1}^{n} x_i \overset{H_0}{\sim} \chi^2_{2n}$$

Regra de Decisão:

$$\text{Rejeita } H_0 \text{ se } Q_{\text{cal}} > \chi^2_{2n,1-\alpha}$$

Propriedades:

- Teste MP de nível α (pelo LNP)
- Depende da estatística suficiente $\sum X_i$
- Distribuição sob H_0 é χ^2 com $2n$ graus de liberdade

5 Questão 4.6: Teste MP para Distribuição Bernoulli

Questão 4.6

Sejam $X_1, \dots, X_n$ uma amostra aleatória de $X \sim \text{Bernoulli}(p)$ para $p \in (0, 1)$ desconhecida.
Encontre o teste Mais Poderoso (MP) para:

$$H_0 : p = p_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : p = p_1 \quad (p_1 > p_0) \tag{93}$$

Solução Detalhada

Passo 1: Aplicação do LNP

Como ambas as hipóteses são simples, aplicamos o Lema de Neyman-Pearson.

Passo 2: Função de Verossimilhança

Para $X \sim \text{Bernoulli}(p)$, a função de massa de probabilidade é:

$$P(X = x) = p^x(1-p)^{1-x}, \quad x \in \{0, 1\} \tag{94}$$

Para uma amostra $x = (x_1, \dots, x_n)$:

$$\begin{aligned}
L(p; x) &= \prod_{k=1}^{n} p^{x_k}(1-p)^{1-x_k} && (95)\\
&= p^{\sum_{k=1}^{n} x_k}(1-p)^{n-\sum_{k=1}^{n} x_k} && (96)\\
&= p^{\sum x_k}(1-p)^{n-\sum x_k} && (97)
\end{aligned}$$

Podemos reescrever como:

$$L(p; x) = \left(\frac{p}{1-p}\right)^{\sum x_k}(1-p)^n \tag{98}$$

Solução Detalhada

Passo 3: Razão de Verossimilhanças

$$\frac{L_1}{L_0} = \frac{L(p_1; x)}{L(p_0; x)} \tag{99}$$

$$= \frac{\left(\frac{p_1}{1-p_1}\right)^{\sum x_k} (1-p_1)^n}{\left(\frac{p_0}{1-p_0}\right)^{\sum x_k} (1-p_0)^n} \tag{100}$$

$$= \left[\frac{p_1(1-p_0)}{p_0(1-p_1)}\right]^{\sum x_k} \cdot \left[\frac{1-p_1}{1-p_0}\right]^n \tag{101}$$

Definindo:

$$A_1 = \frac{p_1(1-p_0)}{p_0(1-p_1)} \quad \text{e} \quad A_2 = \frac{1-p_1}{1-p_0} \tag{102}$$

Análise dos sinais:

- Como $p_1 > p_0$, temos $\frac{p_1}{p_0} > 1$ e $\frac{1-p_0}{1-p_1} > 1$, portanto $A_1 > 1$
- Como $p_1 > p_0$, temos $1 - p_1 < 1 - p_0$, portanto $A_2 < 1$

Passo 4: Região Crítica

Pelo LNP, rejeitamos H_0 quando:

$$A_1^{\sum x_k} \cdot A_2^n > k \tag{103}$$

Aplicando logaritmo:

$$\sum x_k \log(A_1) + n \log(A_2) > \log k \tag{104}$$

Como $A_1 > 1$, temos $\log(A_1) > 0$, então:

$$\sum x_k > \frac{\log k - n\log(A_2)}{\log(A_1)} = k_1 \tag{105}$$

Portanto:

$$R_c = \left\{ x \in \{0,1\}^n : \sum_{i=1}^{n} x_i > k_1 \right\} \tag{106}$$

Solução Detalhada

Passo 5: Teste Aleatorizado

Como $\sum X_i$ é discreta, geralmente precisamos de um teste aleatorizado para atingir exatamente o nível α.
A função crítica é:

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } \sum x_i > k_1 \\ \delta, & \text{se } \sum x_i = k_1 \\ 0, & \text{se } \sum x_i < k_1 \end{cases} \tag{107}$$

Distribuição sob H_0:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \text{Binomial}(n, p_0) \tag{108}$$

Solução Detalhada

Passo 6: Determinação de k_1 e δ

Passo 6.1: Encontre o menor inteiro k_1 tal que:

$$P_{p_0}\left[\sum X_i > k_1\right] < \alpha \tag{109}$$

Passo 6.2: Calcule δ para que o teste tenha exatamente tamanho α:

$$\delta = \frac{\alpha - P_{p_0}\left[\sum X_i > k_1\right]}{P_{p_0}\left[\sum X_i = k_1\right]} \tag{110}$$

onde:

$$P_{p_0}\left[\sum X_i = k_1\right] = \binom{n}{k_1} p_0^{k_1}(1-p_0)^{n-k_1} \tag{111}$$

$$P_{p_0}\left[\sum X_i > k_1\right] = \sum_{j=k_1+1}^{n} \binom{n}{j} p_0^{j}(1-p_0)^{n-j} \tag{112}$$

Passo 7: Interpretação da Aleatorização

O parâmetro δ representa a probabilidade com a qual rejeitamos H_0 quando $\sum x_i = k_1$.

Implementação prática:

1. Observe $\sum x_i$
2. Se $\sum x_i > k_1$: rejeite H_0
3. Se $\sum x_i < k_1$: não rejeite H_0
4. Se $\sum x_i = k_1$: lance uma moeda com $P(\text{cara}) = \delta$ e rejeite H_0 se der cara

Observações e Intuição

Pontos Importantes

1. **Estatística Suficiente:** $\sum X_i$ é suficiente para p. O teste MP depende apenas desta soma.
2. **Necessidade de Aleatorização:** Para distribuições discretas, raramente conseguimos um teste não-aleatorizado com tamanho exato α. A aleatorização resolve esse problema.
3. **Distribuição Binomial:** A soma de Bernoullis independentes segue distribuição Binomial.
4. **Razão de Chances:** A razão $\frac{p}{1-p}$ é conhecida como "odds"(chances). O teste compara as chances sob H_1 e H_0.
5. **Intuição:** Valores grandes de $\sum X_i$ (muitos sucessos) fornecem evidência de que p é grande, levando à rejeição de $H_0 : p = p_0$ em favor de $H_1 : p = p_1 > p_0$.

Exemplo Numérico

Suponha $n = 10$, $p_0 = 0.3$, $p_1 = 0.6$, $\alpha = 0.05$.

1. Sob H_0: $\sum X_i \sim \text{Binomial}(10, 0.3)$
2. Calculamos (usando software ou tabelas):
   - $P(\sum X_i > 6) = 0.0473 < 0.05$ ✓
   - $P(\sum X_i > 5) = 0.1503 > 0.05$ X
3. Portanto, $k_1 = 6$
4. $P(\sum X_i = 6) = \binom{10}{6}(0.3)^6(0.7)^4 = 0.0368$
5. $\delta = \frac{0.05-0.0473}{0.0368} = 0.0734$

Regra de decisão:

- Se observamos 7, 8, 9 ou 10 sucessos: rejeitamos H_0
- Se observamos 0, 1, 2, 3, 4 ou 5 sucessos: não rejeitamos H_0
- Se observamos exatamente 6 sucessos: rejeitamos com probabilidade 7.34%

Resumo da Questão

Teste MP para $H_0 : p = p_0$ vs $H_1 : p = p_1$ ($p_1 > p_0$):
Estatística de Teste:

$$T = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \text{Binomial}(n, p_0) \text{ sob } H_0$$

Função Crítica:

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & \sum x_i > k_1 \\ \delta, & \sum x_i = k_1 \\ 0, & \sum x_i < k_1 \end{cases}$$

Propriedades:

- Teste MP de nível α (pelo LNP)
- Geralmente requer aleatorização (distribuição discreta)
- Depende apenas da estatística suficiente $\sum X_i$

6 Questão 4.7: Teste MP para Distribuição Poisson

Questão 4.7

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ para $\lambda > 0$ desconhecido.
Derive o teste Mais Poderoso (MP) para:

$$H_0 : \lambda = \lambda_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \lambda = \lambda_1 \quad (\lambda_1 > \lambda_0) \tag{113}$$

Solução Detalhada

Passo 1: Aplicação do LNP

Como temos hipóteses simples vs simples, aplicamos o Lema de Neyman-Pearson.

Passo 2: Função de Verossimilhança

Para $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$, a função de massa de probabilidade é:

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, \quad x \in \{0, 1, 2, \ldots\} \tag{114}$$

Para uma amostra $x = (x_1, \ldots, x_n)$:

$$L(\lambda; x) = \prod_{k=1}^{n} \frac{\lambda^{x_k} e^{-\lambda}}{x_k!} \tag{115}$$

$$= \frac{\lambda^{\sum_{k=1}^{n} x_k} e^{-n\lambda}}{\prod_{k=1}^{n} x_k!} \tag{116}$$

$$= e^{-n\lambda} \cdot \lambda^{\sum x_k} \cdot \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k!} \tag{117}$$

Solução Detalhada

Passo 3: Razão de Verossimilhanças

$$\frac{L_1}{L_0} = \frac{L(\lambda_1; x)}{L(\lambda_0; x)} \tag{118}$$

$$= \frac{e^{-n\lambda_1}\lambda_1^{\sum x_k}}{e^{-n\lambda_0}\lambda_0^{\sum x_k}} \tag{119}$$

$$= \left[\frac{e^{-\lambda_1}}{e^{-\lambda_0}}\right]^n \cdot \left[\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right]^{\sum x_k} \tag{120}$$

$$= e^{-n(\lambda_1-\lambda_0)} \cdot \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)^{\sum x_k} \tag{121}$$

Passo 4: Região Crítica

Pelo LNP, rejeitamos H_0 quando $\frac{L_1}{L_0} > k$:

$$e^{-n(\lambda_1-\lambda_0)} \cdot \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)^{\sum x_k} > k \tag{122}$$

Aplicando logaritmo:

$$-n(\lambda_1 - \lambda_0) + \sum x_k \log\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right) > \log k \tag{123}$$

Como $\lambda_1 > \lambda_0$, temos $\frac{\lambda_1}{\lambda_0} > 1$, logo $\log\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right) > 0$.
Rearranjando:

$$\sum x_k \log\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right) > \log k + n(\lambda_1 - \lambda_0) \tag{124}$$

$$\sum x_k > \frac{\log k + n(\lambda_1 - \lambda_0)}{\log(\lambda_1/\lambda_0)} = k_1 \tag{125}$$

Portanto:

$$R_c = \left\{x \in \mathbb{Z}_+^n : \sum_{i=1}^{n} x_i > k_1\right\} \tag{126}$$

Solução Detalhada

Passo 5: Teste Aleatorizado

A função crítica é:

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } \sum x_i > k_1 \\ \delta, & \text{se } \sum x_i = k_1 \\ 0, & \text{se } \sum x_i < k_1 \end{cases} \tag{127}$$

Distribuição sob H_0:
Se $X_i \sim \text{Poisson}(\lambda)$ são independentes, então:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \text{Poisson}(n\lambda_0) \tag{128}$$

Demonstração: A função geradora de momentos de $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ é $M_X(t) = e^{\lambda(e^t-1)}$.
Para a soma:

$$M_{\sum X_i}(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t) = [e^{\lambda(e^t-1)}]^n \tag{129}$$

$$= e^{n\lambda(e^t-1)} \tag{130}$$

que é a MGF de Poisson$(n\lambda)$.

Solução Detalhada

Passo 6: Determinação de k_1 e δ

Passo 6.1: Encontre o menor inteiro k_1 tal que:

$$P_{n\lambda_0}\left[\sum X_i > k_1\right] < \alpha \tag{131}$$

Passo 6.2: Calcule δ:

$$\delta = \frac{\alpha - P_{n\lambda_0}\left[\sum X_i > k_1\right]}{P_{n\lambda_0}\left[\sum X_i = k_1\right]} \tag{132}$$

onde:

$$P_{n\lambda_0}\left[\sum X_i = k_1\right] = \frac{(n\lambda_0)^{k_1} e^{-n\lambda_0}}{k_1!} \tag{133}$$

$$P_{n\lambda_0}\left[\sum X_i > k_1\right] = \sum_{j=k_1+1}^{\infty} \frac{(n\lambda_0)^j e^{-n\lambda_0}}{j!} \tag{134}$$

Passo 7: Relação com Estatísticas Suficientes

Observação importante: $\sum X_i$ é uma estatística suficiente para λ (pelo Teorema da Fatoração de Neyman).
O teste MP depende apenas desta estatística suficiente, confirmando o princípio da suficiência.

Observações e Intuição

Pontos Importantes

1. **Propriedade Aditiva da Poisson:** A soma de Poissons independentes é Poisson. Esta propriedade é crucial para determinar a distribuição da estatística de teste.
2. **Estatística Suficiente:** $T(X) = \sum X_i$ é suficiente para λ. O teste ótimo depende apenas dela.
3. **Família Exponencial:** A Poisson pertence à família exponencial de distribuições. Para essas distribuições, a estatística suficiente tem forma simples.
4. **Comparação com Binomial:** Ambas são distribuições discretas que somam para uma distribuição da mesma família. Ambas requerem aleatorização para tamanho exato α.
5. **Aproximação Normal:** Para $n\lambda_0$ grande, $\sum X_i \approx N(n\lambda_0, n\lambda_0)$, permitindo usar teste Z aproximado.

Exemplo Numérico

Suponha $n = 5$, $\lambda_0 = 2$, $\lambda_1 = 4$, $\alpha = 0.05$.

1. Sob H_0: $\sum X_i \sim \text{Poisson}(10)$
2. Valor esperado e variância: $E[\sum X_i] = 10$, $\text{Var}(\sum X_i) = 10$
3. Usando tabelas ou software Poisson(10):
   - $P(\sum X_i > 16) = 0.0487 < 0.05$ ✓
   - $P(\sum X_i > 15) = 0.0835 > 0.05$ ✗
4. Portanto, $k_1 = 16$
5. $P(\sum X_i = 16) = \frac{10^{16}e^{-10}}{16!} = 0.0348$
6. $\delta = \frac{0.05-0.0487}{0.0348} = 0.0374$

Regra de decisão:

- Se $\sum x_i \geq 17$: rejeitamos H_0 sempre
- Se $\sum x_i \leq 15$: não rejeitamos H_0
- Se $\sum x_i = 16$: rejeitamos com probabilidade 3.74%

Resumo da Questão

Teste MP para $H_0 : \lambda = \lambda_0$ vs $H_1 : \lambda = \lambda_1$ ($\lambda_1 > \lambda_0$):
Estatística de Teste:

$$T = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \text{Poisson}(n\lambda_0) \text{ sob } H_0$$

Função Crítica:

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & \sum x_i > k_1 \\ \delta, & \sum x_i = k_1 \\ 0, & \sum x_i < k_1 \end{cases}$$

Propriedades:

- Teste MP de nível α (pelo LNP)
- A soma de Poissons é Poisson
- Depende apenas da estatística suficiente $\sum X_i$

7 Questão 4.8: Teste MP para Densidades Não-Paramétricas

Questão 4.8

Seja X uma v.a. com densidade $f(x)$ para $x \in \mathbb{R}$. Considere duas densidades:

$$f_0(x) = \begin{cases} \frac{3x^2}{64}, & 0 < x < 4 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \quad \text{e} \quad f_1(x) = \begin{cases} \frac{3}{16}\sqrt{x}, & 0 < x < 4 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \tag{135}$$

Determine o teste MP de nível α para:

$$H_0 : f(x) = f_0(x) \quad \text{vs} \quad H_1 : f(x) = f_1(x) \tag{136}$$

Solução Detalhada

Passo 1: Aplicação do LNP

Este é um exemplo de teste entre densidades completamente especificadas (hipóteses simples). Aplicamos o LNP.
Observação: Este não é um teste paramétrico tradicional, mas o LNP ainda se aplica!

Solução Detalhada

Passo 2: Razão de Densidades

Pelo LNP, rejeitamos H_0 quando:

$$\frac{f_1(x)}{f_0(x)} > k \tag{137}$$

Calculando a razão para $x \in (0, 4)$:

$$\begin{aligned}
\frac{f_1(x)}{f_0(x)} &= \frac{\frac{3}{16}\sqrt{x}}{\frac{3x^2}{64}} && (138)\\
&= \frac{3 \cdot 64 \cdot x^{1/2}}{16 \cdot 3 \cdot x^2} && (139)\\
&= \frac{64 \cdot x^{1/2}}{16 \cdot x^2} && (140)\\
&= \frac{4}{x^{3/2}} && (141)\\
&= 4x^{-3/2} && (142)
\end{aligned}$$

Solução Detalhada

Passo 3: Região Crítica

Rejeitamos H_0 quando:

$$4x^{-3/2} > k \tag{143}$$

Rearranjando:

$$x^{-3/2} > \frac{k}{4} \tag{144}$$

$$x^{3/2} < \frac{4}{k} \tag{145}$$

$$x < \left(\frac{4}{k}\right)^{2/3} \tag{146}$$

Definindo $k_1 = \left(\frac{4}{k}\right)^{2/3}$:

$$R_c = \{x \in (0, 4) : x < k_1\} \tag{147}$$

Interpretação importante: Rejeitamos H_0 para valores PEQUENOS de X! Isso acontece porque f_1 dá mais peso para valores pequenos que f_0.

Solução Detalhada

Passo 4: Determinação de k_1 para Tamanho α

Queremos que o teste tenha tamanho α:

$$\alpha = P_{f_0}[X < k_1] = \int_0^{k_1} f_0(x)\,dx \tag{148}$$

Calculando:

$$\int_0^{k_1} \frac{3x^2}{64}\,dx = \frac{3}{64} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^{k_1} \tag{149}$$

$$= \frac{k_1^3}{64} \tag{150}$$

Portanto:

$$\alpha = \frac{k_1^3}{64} \tag{151}$$

Resolvendo para k_1:

$$\boxed{k_1 = (64\alpha)^{1/3} = 4\alpha^{1/3}} \tag{152}$$

Solução Detalhada

Passo 5: Poder do Teste

O poder é a probabilidade de rejeitar H_0 quando H_1 é verdadeira:

$$\begin{aligned}
\text{Poder} = P_{f_1}[X < k_1] &= \int_0^{k_1} f_1(x)\,dx && (153)\\
&= \int_0^{k_1} \frac{3}{16}\sqrt{x}\,dx && (154)\\
&= \frac{3}{16}\cdot\frac{2x^{3/2}}{3}\bigg|_0^{k_1} && (155)\\
&= \frac{x^{3/2}}{8}\bigg|_0^{k_1} && (156)\\
&= \frac{k_1^{3/2}}{8} && (157)
\end{aligned}$$

Substituindo $k_1 = 4\alpha^{1/3}$:

$$\begin{aligned}
\text{Poder} &= \frac{(4\alpha^{1/3})^{3/2}}{8} && (158)\\
&= \frac{4^{3/2}\cdot\alpha^{1/2}}{8} && (159)\\
&= \frac{8\alpha^{1/2}}{8} && (160)\\
&= \boxed{\alpha^{1/2} = \sqrt{\alpha}} && (161)
\end{aligned}$$

Solução Detalhada

Passo 6: Teste Final

Região Crítica:

$$R_c = \left\{x \in (0,4) : x < 4\alpha^{1/3}\right\} \tag{162}$$

Regra de Decisão:

$$\text{Rejeita } H_0 \text{ se } x < 4\alpha^{1/3} \tag{163}$$

Poder:

$$\beta(f_1) = \sqrt{\alpha} \tag{164}$$

Observações e Intuição

Pontos Importantes

1. **Teste Não-Paramétrico:** Este é um exemplo onde não há parâmetro desconhecido. Estamos testando entre duas formas funcionais completamente especificadas.

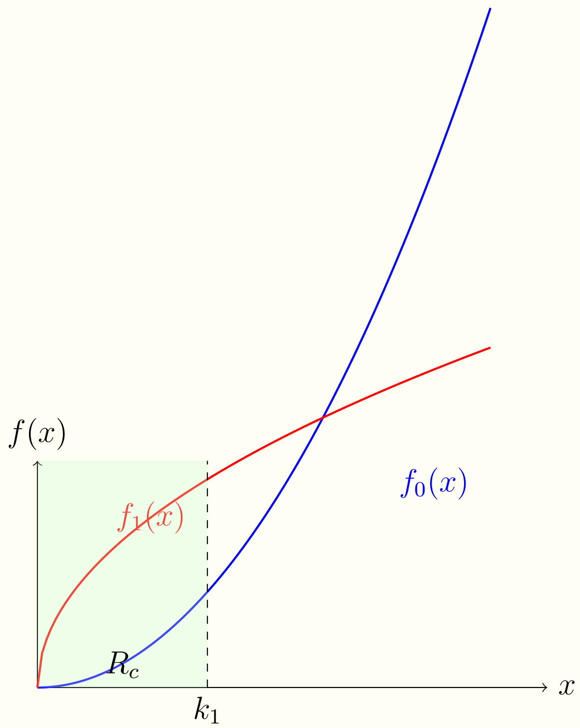
2. **Região Crítica não-Intuitiva:** Rejeitamos para valores PEQUENOS de X. Isso ilustra que a região crítica depende de como as densidades se relacionam.

3. **Poder Crescente com α:** Como o poder é $\sqrt{\alpha}$, ele aumenta com α, mas de forma sub-linear.

4. **Exemplo Numérico:**
   - Para $\alpha = 0.05$: $k_1 = 4(0.05)^{1/3} \approx 1.47$, Poder $= \sqrt{0.05} \approx 22.4\%$
   - Para $\alpha = 0.01$: $k_1 = 4(0.01)^{1/3} \approx 0.86$, Poder $= \sqrt{0.01} = 10\%$

5. **Visualização:** $f_1(x)$ é maior que $f_0(x)$ para x pequenos e menor para x grandes. A razão $\frac{f_1}{f_0}$ é grande para x pequenos.

Comparação das Densidades



A região crítica R_c (em verde) corresponde a valores pequenos de X onde f_1 domina f_0.

Resumo da Questão

Teste MP para $H_0 : f = f_0$ vs $H_1 : f = f_1$:
Região Crítica:

$$R_c = \{x \in (0, 4) : x < 4\alpha^{1/3}\}$$

Regra de Decisão:

$$\text{Rejeita } H_0 \text{ se } X_{\text{obs}} < 4\alpha^{1/3}$$

Propriedades:

- Tamanho exato α
- Poder $= \sqrt{\alpha}$
- Exemplo de teste não-paramétrico MP
- Região crítica em valores pequenos de X

8 Questão 4.9: Teste MP com Duas Variáveis Independentes

Questão 4.9

Sejam X_1 e X_2 duas v.a.'s independentes com densidade $f(x)$.
Determine o teste MP de nível α para:

$$H_0 : f(x) = f_0(x) \quad \text{vs} \quad H_1 : f(x) = f_1(x) \tag{165}$$

onde f_0 e f_1 são as mesmas densidades da Questão 4.8.

Solução Detalhada

Passo 1: Aplicação do LNP para Amostra Bivariada

Para duas observações independentes, a densidade conjunta é o produto das marginais.
Pelo LNP, rejeitamos H_0 quando:

$$\frac{f_1(x_1)f_1(x_2)}{f_0(x_1)f_0(x_2)} > k \tag{166}$$

Solução Detalhada

Passo 2: Simplificação da Razão

Da Questão 4.8, sabemos que $\frac{f_1(x)}{f_0(x)} = 4x^{-3/2}$ para $x \in (0, 4)$.
Portanto:

$$\frac{f_1(x_1)f_1(x_2)}{f_0(x_1)f_0(x_2)} = \frac{f_1(x_1)}{f_0(x_1)} \cdot \frac{f_1(x_2)}{f_0(x_2)} \tag{167}$$

$$= 4x_1^{-3/2} \cdot 4x_2^{-3/2} \tag{168}$$

$$= 16(x_1x_2)^{-3/2} \tag{169}$$

Passo 3: Região Crítica

Rejeitamos H_0 quando:

$$16(x_1x_2)^{-3/2} > k \tag{170}$$

Rearranjando:

$$(x_1x_2)^{-3/2} > \frac{k}{16} \tag{171}$$

$$(x_1x_2)^{3/2} < \frac{16}{k} \tag{172}$$

$$x_1x_2 < \left(\frac{16}{k}\right)^{2/3} \tag{173}$$

Definindo $K_1 = \left(\frac{16}{k}\right)^{2/3}$:

$$R_c = \{(x_1, x_2) \in (0, 4) \times (0, 4) : x_1x_2 < K_1\} \tag{174}$$

Solução Detalhada

Passo 4: Usando a Função de Distribuição

Para determinar K_1, usamos a função de distribuição acumulada de f_0.
A fda correspondente a f_0 é:

$$F_0(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{x^3}{64}, & 0 < x < 4 \\ 1, & x \geq 4 \end{cases} \tag{175}$$

Verificação:

$$F_0(x) = \int_0^x \frac{3t^2}{64}\, dt = \frac{3}{64} \cdot \frac{t^3}{3}\Big|_0^x = \frac{x^3}{64} \tag{176}$$

Solução Detalhada

Passo 5: Estatística qui-Quadrado

Uma propriedade útil: Se $X \sim f_0$, então:

$$-2 \log F_0(X) \sim \chi^2_2 \tag{177}$$

Demonstração rápida:

- $F_0(X) \sim \text{Uniforme}(0, 1)$ (transformação probabilidade integral)
- Se $U \sim \text{Uniforme}(0, 1)$, então $-2 \log U \sim \chi^2_2$

Passo 6: Reformulação da Região Crítica

A condição $x_1 x_2 < K_1$ pode ser reescrita usando F_0:

$$\begin{aligned}
x_1 x_2 < K_1 &\Leftrightarrow \frac{x_1^3}{64} \cdot \frac{x_2^3}{64} < k_2 && (178)\\
&\Leftrightarrow F_0(x_1) \cdot F_0(x_2) < k_2 && (179)\\
&\Leftrightarrow -\log[F_0(x_1) \cdot F_0(x_2)] > -\log k_2 && (180)\\
&\Leftrightarrow -\log F_0(x_1) - \log F_0(x_2) > -\log k_2 && (181)\\
&\Leftrightarrow -2\log F_0(x_1) - 2\log F_0(x_2) > -2\log k_2 && (182)
\end{aligned}$$

Solução Detalhada

Passo 7: Estatística de Teste Final

Definimos:

$$Q(x_1, x_2) = -2\sum_{i=1}^{2} \log F_0(x_i) = -2\log F_0(x_1) - 2\log F_0(x_2) \tag{183}$$

Sob H_0, como X_1 e X_2 são independentes:

$$Q(X_1, X_2) \overset{H_0}{\sim} \chi^2_4 \tag{184}$$

pois é a soma de duas variáveis χ^2_2 independentes.
A região crítica é:

$$R_c = \{(x_1, x_2) : Q(x_1, x_2) > q_\alpha\} \tag{185}$$

onde $q_\alpha = \chi^2_{4,1-\alpha}$ satisfaz:

$$P_{\chi^2_4}[Q > q_\alpha] = \alpha \tag{186}$$

Solução Detalhada

Passo 8: Teste Final

Estatística de Teste:

$$\boxed{Q(x_1, x_2) = -2\log F_0(x_1) - 2\log F_0(x_2) \overset{H_0}{\sim} \chi^2_4} \tag{187}$$

Regra de Decisão:

$$\text{Rejeita } H_0 \text{ se } Q(x_1, x_2) > \chi^2_{4,1-\alpha} \tag{188}$$

Para os dados, calculamos:

$$Q = -2\log\left(\frac{x_1^3}{64}\right) - 2\log\left(\frac{x_2^3}{64}\right) \tag{189}$$

Observações e Intuição

Pontos Importantes

1. **Extensão Natural:** Este problema estende a Questão 4.8 para duas observações. A lógica é similar, mas trabalhamos no espaço bidimensional.

2. **Estatística Qui-Quadrado:** A transformação via $-2\log F_0$ é uma técnica poderosa que aparece em muitos contextos (teste da razão de verossimilhanças, por exemplo).

3. **Independência:** A independência de X_1 e X_2 permite que a estatística seja a soma de duas χ^2_2, resultando em χ^2_4.

4. **Generalização:** Para n observações, teríamos:

$$Q = -2\sum_{i=1}^{n} \log F_0(X_i) \sim \chi^2_{2n} \tag{190}$$

5. **Aplicação Prática:** Para $\alpha = 0.05$, usamos $\chi^2_{4,0.95} = 9.488$. Se $Q_{\text{calc}} > 9.488$, rejeitamos H_0.

Exemplo Numérico

Suponha que observamos $x_1 = 0.5$ e $x_2 = 1.0$.

1. Calcular F_0:

$$F_0(0.5) = \frac{(0.5)^3}{64} = \frac{0.125}{64} \approx 0.00195 \tag{191}$$

$$F_0(1.0) = \frac{1^3}{64} = \frac{1}{64} \approx 0.01563 \tag{192}$$

2. Calcular Q:

$$\begin{aligned} Q &= -2\log(0.00195) - 2\log(0.01563) && (193)\\ &= -2(-6.241) - 2(-4.158) && (194)\\ &= 12.482 + 8.316 && (195)\\ &= 20.798 && (196) \end{aligned}$$

3. Decisão: Como $20.798 > 9.488$, rejeitamos H_0 ao nível 5%.

Interpretação: Os valores observados $(0.5, 1.0)$ são "muito pequenos"sob f_0, fornecendo evidência forte a favor de f_1.

Resumo da Questão

Teste MP para $H_0 : f = f_0$ vs $H_1 : f = f_1$ (2 observações):
Estatística de Teste:

$$Q = -2\sum_{i=1}^{2} \log F_0(X_i) \overset{H_0}{\sim} \chi^2_4$$

Regra de Decisão:

$$\text{Rejeita } H_0 \text{ se } Q_{\text{cal}} > \chi^2_{4,1-\alpha}$$

Propriedades:

- Generalização da Q4.8 para 2 observações
- Usa transformação via função de distribuição
- Estatística de teste tem distribuição χ^2 conhecida

9 Questão 4.10: Teste UMP para Variância (Normal com Média Zero)

Questão 4.10

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de $X \sim N(0, \sigma^2)$, onde $\sigma^2 > 0$ é desconhecido.
Fixando $\alpha \in (0, 1)$, obtenha o teste Uniformemente Mais Poderoso (UMP) de nível α para:

$$H_0 : \sigma = \sigma_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \sigma < \sigma_0 \tag{197}$$

onde $\sigma_0 > 0$ é conhecido.

Solução Detalhada

Passo 1: Estratégia via LNP

Fixemos $\sigma_1 < \sigma_0$ e consideremos inicialmente o problema:

$$H_0 : \sigma = \sigma_0 \quad \text{vs} \quad H_1' : \sigma = \sigma_1 \tag{198}$$

Aplicamos o LNP e depois mostramos que o teste resultante não depende da escolha de σ_1, provando que é UMP.

Solução Detalhada

Passo 2: Função de Verossimilhança

Para $X \sim N(0, \sigma^2)$, a densidade é:

$$f(x; \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\} \tag{199}$$

Para uma amostra $x = (x_1, \ldots, x_n)$:

$$L(\sigma; x) = \prod_{j=1}^{n} (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{x_j^2}{2\sigma^2}\right\} \tag{200}$$

$$= (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^{n} x_j^2\right\} \tag{201}$$

Para $k = 0, 1$:

$$L_k = L(\sigma_k; x) = (2\pi\sigma_k^2)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{\sum x_j^2}{2\sigma_k^2}\right\} \tag{202}$$

Passo 3: Razão de Verossimilhanças

$$\frac{L_1}{L_0} = \frac{(2\pi\sigma_1^2)^{-n/2}}{(2\pi\sigma_0^2)^{-n/2}} \exp\left\{-\frac{\sum x_j^2}{2} \left(\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_0^2}\right)\right\} \tag{203}$$

$$= \left(\frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2}\right)^{n/2} \exp\left\{-\frac{\sum x_j^2}{2} \left(\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_0^2}\right)\right\} \tag{204}$$

Solução Detalhada

Passo 4: Região Crítica

Pelo LNP, rejeitamos H_0 quando $\frac{L_1}{L_0} > k$:

$$\left(\frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2}\right)^{n/2} \exp\left\{-\frac{\sum x_j^2}{2}\left(\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_0^2}\right)\right\} > k \tag{205}$$

Aplicando logaritmo:

$$\frac{n}{2}\log\left(\frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2}\right) - \frac{\sum x_j^2}{2}\left(\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_0^2}\right) > \log k \tag{206}$$

Rearranjando:

$$-\frac{\sum x_j^2}{2}\left(\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_0^2}\right) > \log k - \frac{n}{2}\log\left(\frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2}\right) \tag{207}$$

Como $\sigma_1 < \sigma_0$, temos $\frac{1}{\sigma_1^2} > \frac{1}{\sigma_0^2}$, logo $\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_0^2} > 0$.
Multiplicando por -1 (inverte desigualdade):

$$\frac{\sum x_j^2}{2}\left(\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_0^2}\right) < -\log k + \frac{n}{2}\log\left(\frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2}\right) \tag{208}$$

Dividindo por $\left(\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_0^2}\right) > 0$:

$$\sum x_j^2 < \frac{2\left[-\log k + \frac{n}{2}\log\left(\frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2}\right)\right]}{\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_0^2}} \tag{209}$$

Simplificando o lado direito:

$$\sum x_j^2 < \frac{\sigma_0^2 \cdot \text{constante}}{\sigma_0^2 - \sigma_1^2} \cdot \text{expressão em } k \text{ e } n \tag{210}$$

Observação crucial: Manipulando algebricamente, podemos escrever:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{\sigma_0^2} < k_2 \tag{211}$$

onde k_2 depende de k, n, σ_0, σ_1, mas veremos que podemos determinar k_2 apenas por α e σ_0.

Solução Detalhada

Passo 5: Estatística de Teste

Definimos:

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i}{\sigma_0}\right)^2 = \frac{1}{\sigma_0^2} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \tag{212}$$

Distribuição sob H_0:
Quando $H_0 : \sigma = \sigma_0$ é verdadeira, temos $X_i \sim N(0, \sigma_0^2)$.
Portanto:

$$\frac{X_i}{\sigma_0} \sim N(0,1) \tag{213}$$

Logo:

$$\left(\frac{X_i}{\sigma_0}\right)^2 \sim \chi_1^2 \tag{214}$$

Como as X_i são independentes:

$$Q(X) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i}{\sigma_0}\right)^2 \overset{H_0}{\sim} \chi_n^2 \tag{215}$$

Passo 6: Teste UMP

Observação importante: A estatística $Q(x)$ e a forma da região crítica ($Q < k_2$) NÃO dependem da escolha específica de σ_1!
Isso significa que o teste é o mesmo para qualquer $\sigma_1 < \sigma_0$. Portanto, o teste é UMP para $H_0 : \sigma = \sigma_0$ vs $H_1 : \sigma < \sigma_0$.
A região crítica é:

$$R_c = \left\{x \in \mathbb{R}^n : Q(x) < \chi^2_{n,1-\alpha}\right\} \tag{216}$$

onde $\chi^2_{n,1-\alpha}$ satisfaz:

$$P_{H_0}\{Q < \chi^2_{n,1-\alpha}\} = \alpha \tag{217}$$

Passo 7: Teste Final

Estatística de Teste:

$$\boxed{Q(x) = \frac{1}{\sigma_0^2} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \overset{H_0}{\sim} \chi_n^2} \tag{218}$$

Regra de Decisão:

$$\text{Rejeita } H_0 \text{ se } Q_{\text{cal}} < \chi^2_{n,1-\alpha} \tag{219}$$

Função Crítica:

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } Q(x) < \chi^2_{n,1-\alpha} \\ 0, & \text{se } Q(x) \geq \chi^2_{n,1-\alpha} \end{cases} \tag{220}$$

Nota importante: Rejeitamos para valores PEQUENOS de Q (i.e., para $\sum x_i^2$ pequeno), o que faz sentido porque valores pequenos de $\sum x_i^2$ sugerem que σ é pequeno.

Observações e Intuição

Pontos Importantes

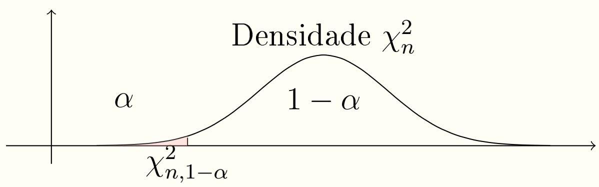
1. **Teste Unilateral à Esquerda:** Este é um exemplo raro onde rejeitamos na CAUDA ESQUERDA da distribuição qui-quadrado. Isso acontece porque $H_1 : \sigma < \sigma_0$.

2. **Propriedade UMP:** O teste não depende da escolha específica de σ_1, apenas de σ_0. Isso o torna UMP.

3. **Relação com Variância Amostral:** Como $\mu = 0$ é conhecido, a variância amostral apropriada é:
$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \tag{221}$$
O teste pode ser reescrito como: rejeitar se $nS^2/\sigma_0^2 < \chi^2_{n,1-\alpha}$.

4. **Comparação com σ^2 Desconhecida:** Se μ fosse desconhecido, usaríamos:
$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2_{n-1} \tag{222}$$
onde $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum(X_i - \bar{X})^2$.

5. **Visualização da Região Crítica:**



Rejeitamos H_0 na região vermelha (cauda esquerda).

Exemplo Numérico

Suponha $n = 10$, $\sigma_0 = 2$, $\alpha = 0.05$ e observamos $\sum x_i^2 = 20$.

1. Calcular estatística: $Q_{\text{cal}} = \frac{20}{4} = 5$
2. Graus de liberdade: $n = 10$
3. Valor crítico: $\chi^2_{10,0.05} = 3.94$ (da tabela)
4. Decisão: Como $5 > 3.94$, NÃO rejeitamos H_0

Interpretação: Não há evidência suficiente ao nível 5% para concluir que $\sigma < 2$. Se tivéssemos observado $\sum x_i^2 = 10$, então $Q = 2.5 < 3.94$ e rejeitaríamos H_0.

Resumo da Questão

Teste UMP para $H_0 : \sigma = \sigma_0$ **vs** $H_1 : \sigma < \sigma_0$**:**
Estatística de Teste:

$$Q = \frac{1}{\sigma_0^2} \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \overset{H_0}{\sim} \chi_n^2$$

Regra de Decisão:

$$\text{Rejeita } H_0 \text{ se } Q_{\text{cal}} < \chi^2_{n,1-\alpha}$$

Propriedades:

- Teste UMP de nível α
- Rejeição na cauda ESQUERDA
- Apropriado quando média é zero (conhecida)
- Não depende da escolha de σ_1

10 Questão 4.12: Teste UMP via Teorema de Karlin-Rubin

Questão 4.12

Sejam $X_1, \dots, X_n$ uma amostra aleatória de $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ com $\mu \in \mathbb{R}$ desconhecida e $\sigma^2 \in \mathbb{R}^+$ conhecida.
Encontre o teste UMP para:

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \mu > \mu_0, \quad \text{de nível } \alpha \tag{223}$$

Solução Detalhada

Passo 1: Verificar Aplicabilidade do Teorema de Karlin-Rubin

O Teorema de Karlin-Rubin fornece testes UMP para hipóteses unilaterais quando a família de distribuições possui Razão de Verossimilhança Monótona (RVM).
Precisamos verificar:

1. Existe uma estatística suficiente $T(X)$
2. A família de densidades induzidas por T tem RVM

Passo 2: Estatística Suficiente

Pelo Lema da Fatoração de Neyman, a verossimilhança pode ser escrita como:

$$L(\mu; x) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2\right\} \tag{224}$$

$$= (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum x_i^2\right\} \cdot \exp\left\{\frac{\mu}{\sigma^2}\sum x_i - \frac{n\mu^2}{2\sigma^2}\right\} \tag{225}$$

Portanto:

$$T(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i \tag{226}$$

é suficiente para μ (com σ^2 conhecido).

Solução Detalhada

Passo 3: Densidade Induzida de T

Como $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ são independentes:

$$T = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2) \tag{227}$$

A densidade de T é:

$$f(t; \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(t - n\mu)^2}{2n\sigma^2}\right\} \tag{228}$$

Solução Detalhada

Passo 4: Verificar RVM

Para $\mu^* > \mu$, calculamos:

$$\frac{f(t;\mu^*)}{f(t;\mu)} = \frac{\exp\left\{-\frac{(t-n\mu^*)^2}{2n\sigma^2}\right\}}{\exp\left\{-\frac{(t-n\mu)^2}{2n\sigma^2}\right\}} \tag{229}$$

$$= \exp\left\{\frac{1}{2n\sigma^2}\left[(t-n\mu)^2-(t-n\mu^*)^2\right]\right\} \tag{230}$$

$$= \exp\left\{\frac{1}{2n\sigma^2}\left[t^2-2nt\mu+n^2\mu^2-t^2+2nt\mu^*-n^2(\mu^*)^2\right]\right\} \tag{231}$$

$$= \exp\left\{\frac{1}{2n\sigma^2}\left[2nt(\mu^*-\mu)+n^2(\mu^2-(\mu^*)^2)\right]\right\} \tag{232}$$

$$= \exp\left\{\frac{t(\mu^*-\mu)}{\sigma^2}+\frac{n(\mu^2-(\mu^*)^2)}{2\sigma^2}\right\} \tag{233}$$

Como $\mu^* > \mu$, o coeficiente de t é $\frac{\mu^*-\mu}{\sigma^2} > 0$.
Portanto, $\frac{f(t;\mu^*)}{f(t;\mu)}$ é CRESCENTE em t, provando que $\{f(t;\mu) : \mu \in \mathbb{R}\}$ tem RVM.

Solução Detalhada

Passo 5: Aplicação do Teorema de Karlin-Rubin

Pelo Teorema de Karlin-Rubin, o teste UMP de nível α tem função crítica:

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } T(x) > k \\ 0, & \text{se } T(x) < k \end{cases} \tag{234}$$

onde k é determinado por:

$$E_{\mu_0}[\psi(X)] = \alpha \tag{235}$$

ou seja:

$$P_{\mu_0}[T(X) > k] = \alpha \tag{236}$$

Solução Detalhada

Passo 6: Padronização

Como $T = \sum X_i \sim N(n\mu_0, n\sigma^2)$ sob $H_0 : \mu = \mu_0$:

$$\frac{T - n\mu_0}{\sqrt{n\sigma^2}} = \frac{T - n\mu_0}{\sigma\sqrt{n}} \sim N(0,1) \tag{237}$$

Equivalentemente, em termos da média amostral $\bar{X} = T/n$:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{\sigma} \sim N(0,1) \tag{238}$$

Solução Detalhada

Passo 7: Determinação de k

A condição $P_{\mu_0}[T > k] = \alpha$ se traduz em:

$$P_{\mu_0}\left[\frac{T - n\mu_0}{\sigma\sqrt{n}} > \frac{k - n\mu_0}{\sigma\sqrt{n}}\right] = \alpha \tag{239}$$

Para $Z \sim N(0, 1)$:

$$P[Z > z_\alpha] = \alpha \tag{240}$$

Portanto:

$$\frac{k - n\mu_0}{\sigma\sqrt{n}} = z_\alpha \quad \Rightarrow \quad k = n\mu_0 + z_\alpha \sigma\sqrt{n} \tag{241}$$

Passo 8: Teste Final

Estatística de Teste:

$$\boxed{Z = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{\sigma} \overset{H_0}{\sim} N(0, 1)} \tag{242}$$

Regra de Decisão:

$$\text{Rejeita } H_0 \text{ se } Z_{\text{cal}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{x} - \mu_0)}{\sigma} > z_\alpha \tag{243}$$

Função Crítica:

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } \frac{\sqrt{n}(\bar{x} - \mu_0)}{\sigma} > z_\alpha \\ 0, & \text{se } \frac{\sqrt{n}(\bar{x} - \mu_0)}{\sigma} \leq z_\alpha \end{cases} \tag{244}$$

onde z_α é o quantil $(1 - \alpha)$ da $N(0, 1)$:

- $\alpha = 0.05$: $z_{0.05} = 1.645$
- $\alpha = 0.01$: $z_{0.01} = 2.326$
- $\alpha = 0.10$: $z_{0.10} = 1.282$

Observações e Intuição

Pontos Importantes

1. **Este é o Teste Z Clássico:** O teste UMP para esta situação é exatamente o teste Z que usamos rotineiramente!
2. **Teorema de Karlin-Rubin:** O TKR fornece uma maneira sistemática de construir testes UMP para hipóteses unilaterais quando há RVM.
3. **RVM na Normal:** A família Normal com média desconhecida e variância conhecida possui RVM em $\sum X_i$ (ou equivalentemente, em $\bar{X}$).
4. **Otimalidade:** Este teste é UMP, significando que entre TODOS os testes de nível α, este tem o maior poder para qualquer $\mu > \mu_0$.
5. **Comparação com Q4.4:**
   - Q4.4: Hipóteses simples ($\mu = \mu_1$) $\Rightarrow$ Teste MP via LNP
   - Q4.12: Hipótese composta ($\mu > \mu_0$) $\Rightarrow$ Teste UMP via TKR
   - Resultado: Mesmo teste Z!
6. **Extensões:**
   - Para $H_1 : \mu < \mu_0$: rejeitamos se $Z < -z_\alpha$
   - Para $H_1 : \mu \neq \mu_0$: rejeitamos se $|Z| > z_{\alpha/2}$ (teste bilateral)

Exemplo Numérico Completo

Suponha $n = 25$, $\sigma = 5$, $\mu_0 = 100$, $\alpha = 0.05$.
Observamos $\bar{x} = 103$.

1. Calcular estatística:

$$Z_{\text{cal}} = \frac{\sqrt{25}(103 - 100)}{5} = \frac{5 \cdot 3}{5} = 3 \tag{245}$$

2. Valor crítico: $z_{0.05} = 1.645$
3. Decisão: Como $3 > 1.645$, rejeitamos H_0
4. p-valor: $p = P(Z > 3) = 1 - \Phi(3) = 0.0013$

Interpretação: Há evidência muito forte (p = 0.13%) de que $\mu > 100$.

Função Poder

A função poder deste teste é:

$$Q(\mu) = P_\mu[Z > z_\alpha] = P_\mu\left[\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{\sigma} > z_\alpha\right] \tag{246}$$

Para $\mu \neq \mu_0$:

$$Q(\mu) = 1 - \Phi\left(z_\alpha - \frac{\sqrt{n}(\mu - \mu_0)}{\sigma}\right) \tag{247}$$

Esta função é:

Resumo da Questão

Teste UMP para $H_0 : \mu \leq \mu_0$ vs $H_1 : \mu > \mu_0$:
Estatística de Teste:

$$Z = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{\sigma} \overset{H_0}{\sim} N(0, 1)$$

Regra de Decisão:

$$\text{Rejeita } H_0 \text{ se } Z_{\text{cal}} > z_\alpha$$

Propriedades:

- Teste UMP de nível α (pelo TKR)
- É o teste Z clássico
- Baseado em estatística suficiente com RVM
- Poder máximo entre todos os testes de nível α

Conclusão

Este documento apresentou soluções detalhadas e didáticas para todas as questões do Capítulo 4 sobre Teste de Hipóteses resolvidas em sala de aula.

Síntese dos Tópicos Abordados

1. **Q4.1 e Q4.3:** Exemplos introdutórios ilustrando regiões críticas, erros Tipo I e II, e função poder
2. **Q4.4, Q4.5, Q4.6, Q4.7:** Aplicações do Lema de Neyman-Pearson para distribuições paramétricas (Normal, Exponencial, Bernoulli, Poisson)
3. **Q4.8 e Q4.9:** Testes não-paramétricos e extensões multivariadas
4. **Q4.10 e Q4.12:** Testes UMP via Teorema de Karlin-Rubin para hipóteses compostas

Conexões Entre as Questões

- Q4.1 $\rightarrow$ Q4.3: Conceitos básicos $\rightarrow$ Função poder
- Q4.4 $\rightarrow$ Q4.12: MP (simples) $\rightarrow$ UMP (composta) para Normal
- Q4.6 $\leftrightarrow$ Q4.7: Distribuições discretas (aleatorização)
- Q4.8 $\rightarrow$ Q4.9: Uma observação $\rightarrow$ Duas observações

Mensagens Principais

1. O **Lema de Neyman-Pearson** fornece testes MP para hipóteses simples
2. O **Teorema de Karlin-Rubin** estende para testes UMP quando há RVM
3. **Estatísticas suficientes** são fundamentais para testes ótimos
4. **Distribuições discretas** geralmente requerem aleatorização
5. **Testes clássicos** (Z, t, χ^2, F) são casos especiais de princípios gerais

Recomendações Finais

Para dominar o material:

- Pratique derivar os testes do zero, não apenas aplicar fórmulas
- Entenda a intuição por trás de cada região crítica
- Compare diferentes testes para o mesmo problema
- Simule dados e verifique as propriedades dos testes
- Conecte os conceitos com aplicações práticas

Fim do Documento de Questões Resolvidas