Capítulo 5 - Compilação Completa

Intervalos de Confiança

Curso de Inferência Estatística - PPGEST/UFPE

Novembro 2025

Introdução ao Capítulo 5: Intervalos de Confiança

O Capítulo 5 introduz uma das ferramentas mais práticas e amplamente utilizadas da inferência estatística: os **Intervalos de Confiança** (IC). Enquanto a estimação pontual fornece um único valor como estimativa para um parâmetro desconhecido, os intervalos de confiança quantificam a incerteza inerente a essa estimativa, fornecendo um intervalo plausível de valores para o parâmetro.

Contexto e Motivação

A teoria de intervalos de confiança responde à seguinte questão fundamental: *"Dado um parâmetro populacional desconhecido θ e uma amostra aleatória, como podemos construir um intervalo que contenha o verdadeiro valor de θ com uma probabilidade pré-especificada?"*

Esta questão é central em praticamente todas as aplicações estatísticas: desde estudos científicos que precisam reportar margens de erro, passando por controle de qualidade que estabelece limites de especificação, até pesquisas de opinião pública que apresentam intervalos de confiança para proporções populacionais.

Estrutura do Capítulo

O capítulo está organizado de forma a construir progressivamente os conceitos fundamentais e métodos de construção:

5.1 Conceitos Fundamentais Apresenta a formulação básica dos intervalos de confiança, incluindo:

- Definição de intervalo aleatório e intervalo de confiança
- Probabilidade de cobertura e coeficiente de confiança
- Interpretação frequentista correta de intervalos de confiança
- Distinção entre intervalos bilaterais e unilaterais

5.2 Métodos de Construção Desenvolve duas abordagens principais para construir intervalos de confiança:

- **Inversão de Testes de Hipóteses:** Conexão entre testes e intervalos
- **Método Pivotal:** Uso de quantidades com distribuição conhecida
- Comparação entre os métodos e suas vantagens

5.3 Intervalos para Parâmetros Específicos Aplica os métodos para construir intervalos para:

- Média de população Normal (variância conhecida e desconhecida)
- Variância de população Normal
- Parâmetros de distribuições Exponencial, Uniforme e outras
- Diferenças entre médias e razões de variâncias

5.4 Propriedades e Otimalidade Discute critérios para avaliar e comparar intervalos:

- Intervalos de confiança de comprimento mínimo
- Intervalos não viesados
- Relação com estatísticas suficientes

Objetivos de Aprendizagem

Ao final deste capítulo, espera-se que o estudante seja capaz de:

1. Compreender o conceito de intervalo de confiança e interpretar corretamente seu significado
2. Construir intervalos de confiança usando o método de inversão de testes
3. Aplicar o método pivotal para obter intervalos de confiança
4. Derivar intervalos de confiança para parâmetros de distribuições comuns
5. Determinar o tamanho amostral necessário para atingir uma margem de erro desejada
6. Interpretar e comunicar resultados de intervalos de confiança apropriadamente

Conexão com Capítulos Anteriores

Este capítulo está intimamente relacionado com conceitos desenvolvidos anteriormente:

- **Capítulo 3 (Estimação):** Intervalos de confiança complementam estimadores pontuais, fornecendo medidas de precisão
- **Capítulo 4 (Testes de Hipóteses):** Existe uma dualidade profunda entre testes e intervalos de confiança
- **Estatísticas Suficientes:** Intervalos ótimos geralmente dependem de estatísticas suficientes
- **Distribuições Amostrais:** Fundamental conhecer as distribuições das estatísticas usadas

Filosofia dos Intervalos de Confiança

É importante compreender a filosofia subjacente aos intervalos de confiança:

- **Interpretação Frequentista:** Em repetidas amostragens, $(1-\alpha) \times 100\%$ dos intervalos construídos conterão o verdadeiro valor de θ
- **Não é Probabilidade sobre θ:** O parâmetro θ é fixo (embora desconhecido); o intervalo é aleatório
- **Nível de Confiança vs Probabilidade:** $(1-\alpha)$ é o coeficiente de confiança, não a probabilidade de que um intervalo específico contenha θ
- **Trade-off:** Maior confiança $(1-\alpha)$ resulta em intervalos mais amplos

Aplicações Práticas

Os intervalos de confiança são amplamente utilizados em:

- **Medicina:** Intervalos para eficácia de tratamentos, taxas de sobrevivência
- **Engenharia:** Limites de tolerância para características de produtos
- **Economia:** Intervalos para indicadores econômicos (PIB, inflação, desemprego)
- **Ciências Sociais:** Margens de erro em pesquisas de opinião
- **Controle de Qualidade:** Intervalos de especificação para processos industriais

Este capítulo fornece não apenas as técnicas para construir intervalos de confiança, mas também desenvolve a compreensão conceitual necessária para interpretar e comunicar corretamente a incerteza estatística em contextos aplicados.

10/11/25

Capítulo 5: Intervalo de Confiança

5.1 Introdução

Vamos começar com o conceito importante de probabilidade de cobertura.

Definição (5.1) Sejam $T_l(x)$ e $T_u(x)$ duas estatísticas baseadas em uma amostra $X = (x_1, \ldots, x_n)^T$. A probabilidade de cobertura do intervalo aleatório $J = [T_l(x), T_u(x)]$ para o parâmetro desconhecido $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$

é dada por

$$P_\theta \left[\theta \in [T_l(x), T_u(x)]\right] \tag{1}$$

Na verdade, o coeficiente de confiança de J é dada por

$$\inf_{\theta \in \Theta} \{\mathbb{P}_\theta \left[\theta \in [T_L(x), T_U(x)]\right]\} \tag{2}$$

Na maioria das aplicações, a probabilidade de cobertura não dependerá do parâmetro e será equivalente ao coeficiente de cobertura.

Q (5.1) Sejam

$$J_1 = (X_1 - 1,96; X_1 + 1,96)$$

e

$$J_2 = \left(\bar{X} - \frac{1,96}{\sqrt{2}}, \bar{X} + \frac{1,96}{\sqrt{2}}\right)$$

para μ, dois intervalos aleatórios tais que $X_1, X_2 \sim N(\mu, 1)$ e

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2}{2}.$$

Encontre as probabilidades de cobertura de J_1 e J_2.

Solução

$$\mathbb{P}_\mu\{\mu \in J_1\} = \mathbb{P}_\mu\{\mu \in (X_1 - 1,96; X_1 + 1,96)\} \tag{3}$$

$$= \mathbb{P}_\mu\{X_1 - 1,96 < \mu < X_1 + 1,96\} \tag{4}$$

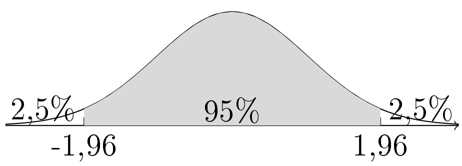
$$= \mathbb{P}_\mu\{(X_1 - \mu) \leq 1,96 \ \cap \ (X_1 - \mu) \geq -1,96\} \tag{5}$$

$$\mathbb{P}_\mu\{\mu \in J_2\} = \mathbb{P}_\mu\{|X_1 - \mu| < 1,96\} \tag{6}$$

$$= \mathbb{P}_\mu\{|Z| < 1,96\} \tag{7}$$

$$= \Phi(1,96) - \Phi(-1,96) \tag{8}$$

$$= 95\%$$



$$
\begin{aligned}
P_\mu\{\mu \in J_x\} &= P_\mu \left\{ \mu \in \left(\bar{X} - 1.96\sqrt{2},\ \bar{X} + 1.96\sqrt{2} \right) \right\} \\
&= P_\mu \left\{ \bar{X} - \frac{1.96}{\sqrt{2}} < \mu < \bar{X} + \frac{1.96}{\sqrt{2}} \right\} \\
&= P_\mu \left\{ (\bar{X} - \mu)\sqrt{2} \le 1.96 \ \wedge \ (\bar{X} - \mu)\sqrt{2} \ge -1.96 \right\} \\
&= P_\mu \left\{ \left| (\bar{X} - \mu)\sqrt{2} \right| \le 1.96 \right\} \\
&\qquad \bar{X} \sim N(0,1) \\
&= P_\mu \left\{ |Z| \le 1.96 \right\} = 0.95
\end{aligned} \tag{9}
$$

12/11/2015

- Para construir IC, podem ser feitos duas abordagens:
    1. Procedimento de teste de hipótese
    2. Via estatística pivotal

5.1 Inversão de um procedimento de teste

Em teste de hipóteses, a região de não rejeição de H_0 foi denotada como:

$$R^c = \begin{cases} \{x \in \chi^n : T(x) > k_3\}^c & \text{p/ } H_1 : \theta \geq \theta_0, \\ \{x \in \chi^n : T(x) < k_3\}^c & \text{p/ } H_1 : \theta \leq \theta_0, \\ \{x \in \chi^n : |T(x)| > k_3\}^c & \text{p/ } H_1 : \theta \neq \theta_0. \end{cases}$$

Em IC é bastante relacionado a R^c.

Q(52)

Sejam $X_1, \dots, X_n$ uma amostra de $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ para $\mu \in \mathbb{R}$ desconhecida e $\sigma^2 > 0$ conhecida. Deseja-se testar:

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{x} \quad H_1 : \mu > \mu_0 \tag{10}$$

Encontre o estimador intervalar para μ com nível de confiança de $1-\alpha$ para $\alpha \in (0,1)$.

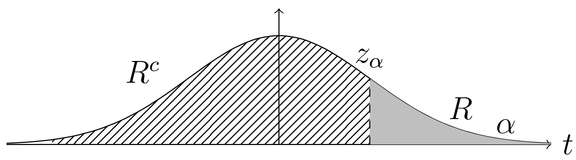
Solução

Como já foi discutido, o teste UMP para H_0 x H_1 de nível α tem função crítica dada por:

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & \sqrt{n}\dfrac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sigma} \geq z_\alpha, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \tag{11}$$

A região de não rejeição é dada por:

$$R^c = \left\{ x \in \mathcal{X} : \sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sigma} \leq z_\alpha \right\} \tag{12}$$



Note que

$$P_\mu\left\{\sqrt{n}\frac{\overline{X}_n-\mu_0}{\sigma}\leq z_\alpha\right\}=1-\alpha$$

$$\therefore P_\mu\left\{\mu_0\geq\overline{X}_n-z_\alpha n^{-1/2}\sigma\right\}=1-\alpha$$

$$\text{Logo,}\quad P_\mu\left\{\mu\geq\overline{X}_n-z_\alpha n^{-1/2}\sigma\right\}=1-\alpha,\quad\forall\mu\in\mathbb{R}$$

$$I.C.(\mu)=\left[\overline{X}_n-z_\alpha n^{-1/2}\sigma,\infty\right]_{1-\alpha}$$

Q (5.3)

Sejam $X_1,\ldots,X_n$ uma amostra de $X\sim\text{EXP}(\theta)$ para $\theta>0$ desconhecido. Deseja-se testar:

$$H_0:\theta=\theta_0\quad\text{vs}\quad H_1:\theta>\theta_0$$

Encontre o estimador intervalar para θ com nível de confiança $1-\alpha$.

Solução

Como já foi discutido, o teste UMP para H_0 de nível α tem função crítica:

$$\psi(\mathbf{x})=\begin{cases}1, & 2\sum_{i=1}^n\frac{x_i}{\theta_0}>\chi^2_{2n,\alpha}\\ 0, & 2\sum_{i=1}^n\frac{x_i}{\theta_0}<\chi^2_{2n,\alpha}\end{cases}$$

A região de não rejeição é dada por:

$$R^c=\left\{\mathbf{x}\in\mathcal{X}:2\sum_{i=1}^n\frac{x_i}{\theta_0}<\chi^2_{2n,\alpha}\right\}$$

Note que

$$P_{\theta_0}\left\{2\sum_{i=1}^{n} x_i/\theta_0 < \chi^2_{2n,\alpha}\right\} \tag{13}$$

$$= 1 - P_{\theta_0}\left\{2\sum_{i=1}^{n} x_i/\theta_0 \geq \chi^2_{2n,\alpha}\right\} \tag{14}$$

$$= 1-\alpha \quad \therefore \quad P_{\theta_0}\left\{\theta_0 > 2\sum_{i=1}^{n} x_i/\chi^2_{2n,\alpha}\right\} = 1-\alpha \tag{15}$$

Dai,

$$P_{\theta}\left\{\theta \geq 2\sum_{i=1}^{n} x_i/\chi^2_{2n,\alpha}\right\} = 1-\alpha, \quad \forall\theta \in \mathbb{R}_+, \text{isto é} \tag{16}$$

$$IC(\theta) = \left(\frac{2\sum_{i=1}^{n} x_i}{\chi^2_{2n,\alpha}}, \alpha, \infty\right)_{1-\alpha} \tag{17}$$

5.3 Abordagem pela estatística Pivotal

Definição (5.3.1) (Pivô) Seja $T(x)$ (para $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ como uma só). Uma estatística suficiente (mínima) para θ. Um pivô é uma v.a. U que depende de T e θ cuja distribuição não depende de θ.

Obs:

1) No caso de família locação em $a(\theta)$, a distribuição $\{T - a(\theta)\}$ não depende de θ.

2) No caso de família escala em $b(\theta)$, a distribuição $T/b(\theta)$ não depende de θ.

3) No caso de família locação escala em $a(\theta); b(\theta)$, a distribuição de $\{T - a(\theta)\}/b(\theta)$ não depende de θ.

Data: 12/11/25

Vamos considerar exemplos para abordar esse conceito em IC.

Q(5.4) Seja $X \sim \exp(\theta)$ com densidade

$$f(x;\theta) = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta} I_{(0,\infty)}(x) \tag{18}$$

Note que $U = X/\theta$ tem densidade

$$f_U(u) = \frac{dF_X(u\theta)}{du} = \theta f_X(u\theta;\theta) \tag{19}$$

$$f_U(u) = e^{-u} I_{(0,\infty)}(u) \tag{20}$$

Então U é um pivô pela Definição (5.3.1).

Note que é possível determinar dois pontos $a, b > 0$ tais que $a < b$ e

$$P(U \leq a) = P(U > b) = \frac{\alpha}{2} \quad \text{ou equivalentemente} \tag{21}$$

$$P(a < U < b) = 1 - \alpha \tag{22}$$

Com $\alpha \in (0,1)$ fixado, detalhando:

$$\int_0^a e^{-x}\, dx = 1 - e^{-a} = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad a = -\log\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \tag{23}$$

$$
\begin{aligned}
e\int_b^\infty e^{-x}\,dx &= 1-\frac{F(b)}{e^{xp(a)}}\\
&= 1-(1-e^{-b}) = e^{-b} = \frac{\alpha}{2}\\
&\therefore b = -\log\left(\frac{\alpha}{2}\right)
\end{aligned}
$$

Dai,

$$
\begin{aligned}
P_\theta\{a < \frac{X}{\theta} < b\} &= 1-\alpha\\
\therefore P_\theta\left\{\frac{1}{b} < \frac{\theta}{X} < \frac{1}{a}\right\} &= 1-\alpha\\
\therefore P_\theta\left\{\theta \in \left(\frac{X}{b}, \frac{X}{a}\right)\right\} &= 1-\alpha
\end{aligned}
$$

Isto é

$$IC_{1-\alpha}(\theta) = \left(\frac{X}{b}, \frac{X}{a}\right) \quad \text{é o intervalo bilateral para } \theta \text{ com confiança } 1-\alpha.$$

Q(55) Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra de $X \sim U(0,\theta)$ para $\theta > 0$ desconhecido. Encontre o estimador intervalar bilateral para θ com confiança de $1-\alpha$.

Solução A estatística $T(X) = X_{(n)}$ é suficiente mínima para θ com densidade

$$f_T(t;\theta) = \frac{n}{\theta^n}t^{n-1}$$

Note que $U = T/\theta$ tem densidade

$$F_U^{(u)} = \frac{dF_U(u)}{du} = \frac{dF_T(u\theta)}{du} \tag{24}$$

$$= \theta F_T(u\theta;\theta) = \theta \cdot \frac{n}{\theta^n}(u \cdot \theta)^{n-1} \tag{25}$$

$$= nu^{n-1}, \quad P/u \in (0,1) \tag{26}$$

Portanto U é um pivô.
Considere $a, b \in (0,1)$ tal que $0 < a < b < 1$ e

$$P(U < a) = P(U > b) = \frac{\alpha}{2} \quad \text{ou, equivalentemente} \tag{27}$$

$$P(a < U < b) = 1 - \alpha \tag{28}$$

Desenvolvendo os limites

$$P(U < a) = \int_0^a n \cdot u^{n-1}\, du = [u^n]_0^a \tag{29}$$

$$= a^n = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad a = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{1/n} \tag{30}$$

e

$$P(U > b) = \int_b^1 n \cdot u^{n-1}\, du = [u^n]_b^1 \tag{31}$$

$$= 1 - b^n = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad b = \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)^{1/n} \tag{32}$$

Assim,

$$P(a < u < b) = 1 - \alpha \tag{33}$$

$$\therefore \quad P\left(a < \frac{T}{\theta} < b\right) = 1 - \alpha \quad \therefore \quad P\left(\frac{1}{b} < \frac{\theta}{T} < \frac{1}{a}\right) = 1 - \alpha$$

$$\therefore \quad P\left(\theta \in \left(\frac{T}{b}, \frac{T}{a}\right)\right) = 1 - \alpha, \quad e$$

$$IC_{1-\alpha}(\theta) = \left(b^{-1}X_{n:n},\ a^{-1}X_{n:n}\right) \tag{34}$$

Q(56) Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra de $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ com $\mu \in \mathbb{R}$ desconhecido e $\sigma^2 > 0$ conhecido. Encontre o IC bilateral com $1 - \alpha$ de confiança para μ.

Solução

De discussões anteriores $T = \bar{X}_n$ é uma estatística suficiente mínima para μ e $T \sim N(\mu, \sigma^2/n)$.

Assim, X_i's e T pertencem a uma família locação.

Note que

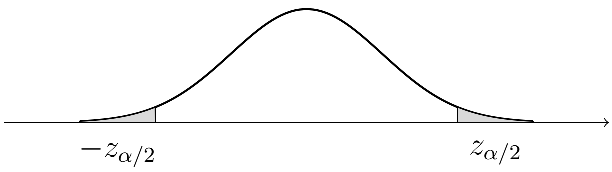
$$U = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1) \tag{35}$$

é um pivô para $z_{\alpha/2}$, logo temos

$$P\left(-z_{\alpha/2} < U < z_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha \tag{36}$$

$$\therefore \quad P\left(-z_{\alpha/2} < \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < z_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

$$\therefore \quad P\left(\mu \in \left(\bar{X}_n + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}(-z_{\alpha/2}),\ \bar{X}_n + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}\right)\right) = 1 - \alpha$$



$$e \quad IC(\mu) = \left(\bar{X}_n \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)_{1-\alpha}$$

Q (5.7) Sejam $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. de $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ com $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma^2 > 0$ desconhecido. Encontre estimador bilateral intervalar com $1 - \alpha$ de confiança para μ.

Solução:

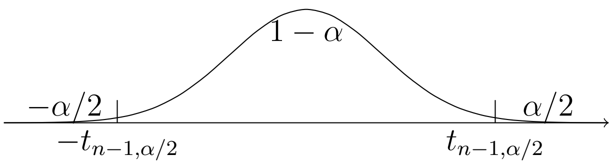
Dai de discussões anteriores $(\bar{X}_n, S)$ é uma estatística suficiente mínima para (μ, σ). Aqui, X_i's têm família de locação-escala.

Note que

$$U = \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{S_n} \sim t_{n-1} \quad \text{é um pivô.} \tag{37}$$

Para $t_{n-1,\alpha/2} > 0$ tal que

$$P\left(U > t_{n-1,\alpha/2}\right) = \frac{\alpha}{2} \tag{38}$$



Tem-se

$$P\left\{-t_{n-1,\alpha/2} < U < t_{n-1,\alpha/2}\right\} = 1 - \alpha \tag{39}$$

$$\therefore P\left\{-t_{n-1,\alpha/2} < \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{S_n} < t_{n-1,\alpha/2}\right\} = 1 - \alpha$$

$$\therefore P\left\{\mu \in \left(\bar{X}_n \pm t_{n-1,\alpha/2} \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)\right\} = 1 - \alpha$$

$$IC(\mu) = \left[\bar{X} \pm t_{n-1,\alpha/2} \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right]_{(1-\alpha)}$$

Exercício: Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma a.a de $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ com $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma^2 > 0$ desconhecido. Mostre que

$$IC_{\frac{1}{\alpha}}(\sigma^2) = \left[\frac{(n-1)S_n^2}{\chi^2_{n-1;\alpha/2}}, \frac{(n-1)S_n^2}{\chi^2_{n-1;1-\alpha/2}} \right] \tag{40}$$

é o IC bilateral para σ^2 com confiança de $1 - \alpha$.

5.3 Problema para duas amostras

Considere a dedução de IC pela abordagem pivotal. Para uma função paramétrica desconhecida $K(\theta)$, assuma que temos um estimador $\hat{K}(\theta)$ que é função de uma estatística suficiente (mínima) para $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^p$.

Problema para duas amostras

Se τ_Θ é conhecido, podem-se obter $a < b$ tais que

$$P_\Theta \left\{ a < \frac{\hat{K}(\Theta) - K(\Theta)}{\tau} < b \right\} = 1 - \alpha \tag{41}$$

Desta última identidade, obtém-se o intervalo de confiança $1 - \alpha$ para $K(\Theta)$.
Para τ_Θ desconhecido, estima-se $K(\Theta)$ por $\hat{K}(\Theta)$ e trabalha-se com

$$P_\Theta \left\{ a < \frac{\hat{K}(\Theta) - K(\Theta)}{\hat{\tau}} < b \right\} = 1 - \alpha \tag{42}$$

Desta relação, pode-se derivar o intervalo de confiança $1 - \alpha$ para $K(\Theta)$.
No parâmetro de escala, pode-se o pivô $\frac{\hat{K}(\Theta)}{K(\Theta)}$ cuja distribuição independe de $\Theta \in \Theta$.
Então, a e b tais que $a < b$ são obtidos de

$$P_\Theta \left\{ a < \frac{\hat{K}(\Theta)}{K(\Theta)} < b \right\} = 1 - \alpha \tag{43}$$

Resta identidade, obtém-se o intervalo com confiança de $1-\alpha$ para $K(\theta)$.

5.3.1 Comparando Parâmetros de localização

Aqui, vamos analisar a diferença de médias, entre duas populações normais independentes.

Q (5.10)

Sejam $X_{i1}, \ldots, X_{in_i}$ para $i = 1, 2$ duas amostras aleatórias independentes de $X_i \sim N(\mu_i, \sigma^2)$, $X_1 \perp X_2$.

Vamos assumir que $\theta = (\mu_1, \mu_2, \sigma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ é desconhecido.

Encontre o intervalo bilateral com confiança $1-\alpha$ para $K(\theta) = \mu_1 - \mu_2$.

Solução

Note que

$$f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) \overset{X_1 \perp X_2}{=} f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) \tag{44}$$

$$= (2\pi\sigma^2)^{-1} \times \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma}\right)^2\right\} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma}\right)^2\right\} \tag{45}$$

$$f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = (2\pi\sigma^2)^{-1} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(x_1^2 - 2x_1\mu_1 + \mu_1^2 + x_2^2 - 2x_2\mu_2 + \mu_2^2\right)\right\} \tag{46}$$

$$g(x_1, x_2) = (2\pi)^{-1} \exp\left\{-\frac{(\mu_1^2 + \mu_2^2)}{2\sigma^2}\right\} \sigma^{-2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x_1^2 + x_2^2) + \frac{\mu_1}{\sigma^2}x_1 + \frac{\mu_2}{\sigma^2}x_2\right\} \tag{47}$$

onde:

$$a(\theta) = (2\pi)^{-1} \exp\left\{-\frac{\mu_1^2 + \mu_2^2}{2\sigma^2}\right\} \sigma^{-2}$$

$$h_3(x) = x_1^2 + x_2^2, \quad b_3(\theta) = -\frac{1}{2\sigma^2}$$

$$h_1(x) = x_1, \quad b_1(\theta) = \frac{\mu_1}{\sigma^2}$$

$$h_2(x) = x_2, \quad b_2(\theta) = \frac{\mu_2}{\sigma^2}$$

Pelo teorema (2.2)

$$T_1 = \left[\sum_{i=1}^{n_1} X_{1i},\ \sum_{i=1}^{n_2} X_{2i},\ \sum_{i=1}^{n_1} X_{1i}^2 + \sum_{i=1}^{n_2} X_{2i}^2\right] \tag{48}$$

$$\sum_{i=1}^{n_1} R_{11}(X_{1i}),\quad \sum_{i=1}^{n_2} R_{12}(X_{2i}),\quad \sum_{i=1}^{n_1} R_{31}(X_{1i}) + \sum_{i=1}^{n_2} R_{32}(X_{2i})$$

é conjuntamente suficiente para $\theta = (\mu_1, \mu_2, \sigma)^T$.

Pelo Teorema (2.4),

$$T_3 = \left[\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} X_{1i},\ \frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2} X_{2i},\ \frac{1}{n_1+n_2-2}\left[\sum_{i=1}^{n_1}(X_{1i}-\bar{X}_1)^2 + \sum_{i=1}^{n_2}(X_{2i}-\bar{X}_2)^2\right]\right] \tag{49}$$

$$\hat{S}_p^2$$

é também suficiente para θ. O termo $\hat{S}_p^2$ é chamado de variância amostral conjunta e pode ser descrito como:

Para

$$S_1^2 = (n_1-1)^{-1}\sum_{i=1}^{n_1}(X_{1i}-\bar{X}_1)^2$$

e

$$S_2^2 = (n_2-1)^{-1}\sum_{i=1}^{n_2}(X_{2i}-\bar{X}_2)^2$$

$$S_p^2 = (n_1+n_2-2)^{-1}\left[(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2\right] \tag{50}$$

Note que como $(n_1 - 1) \cdot \frac{S_1^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n_1-1}$ e $(n_2 - 1) \cdot \frac{S_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n_2-1}$, então

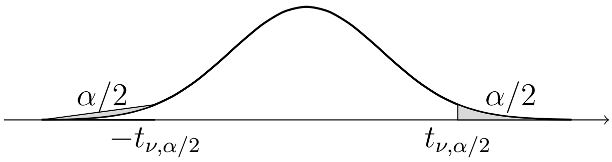
$$(n_1 + n_2 - 2) \cdot \frac{S_p^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n_1+n_2-2} \tag{51}$$

Daí note que

$$U = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \cdot \sqrt{\frac{n_1 + n_2 - 2}{n_1 + n_2 - 2} \cdot \frac{S_p^2}{\sigma^2}} \sim t_{n_1+n_2-2} \tag{52}$$

Para $\nu = n_1 + n_2 - 2$ e $t_{\nu,\alpha/2}$ tal que

$$P(U > t_{\nu,\alpha/2}) = \frac{\alpha}{2} \tag{53}$$



$$P\{-t_{\nu,\alpha/2} < U < t_{\nu,\alpha/2}\} = 1 - \alpha \tag{54}$$

$$P\left\{-t_{\nu,\alpha/2} < \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} < t_{\nu,\alpha/2}\right\} = 1 - \alpha \tag{55}$$

$$\therefore P\left\{\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - t_{\nu,\alpha/2} \cdot S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < \overline{X}_1 - \overline{X}_2 + t_{\nu,\alpha/2} \cdot S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\right\} = 1 - \alpha \tag{56}$$

Isto é

$$IC_{1-\alpha}(\mu_1 - \mu_2) = \left[\overline{X}_1 - \overline{X}_2 \pm t_{\nu,\alpha/2} \cdot S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\right] \tag{57}$$

5.3.2 Comparação escala

Vamos considerar um problema sobre variâncias (escalas) em distribuição normal.

Q (5.11)

Sejam $X_{i1}, \dots, X_{in_i}$ uma amostra de $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ para $n_i \geq 2$ e $i = 1, 2$. Assuma que $X_1 \perp X_2$ e

$$\theta = (\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$$

é desconhecido.

Encontre o intervalo bilateral com confiança $1 - \alpha$ para

$$K(\theta) = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}.$$

Solução

Pode-se mostrar (fica como exercício) que

$$\bar{X}_1 = n_1^{-1} \sum_{i=1}^{n_1} X_{1i}, \quad \bar{X}_2 = n_2^{-1} \sum_{i=1}^{n_2} X_{2i}, \quad S_1^2 = \frac{1}{n_1 - 1} \sum_{i=1}^{n_1} (X_{1i} - \bar{X}_1)^2 \tag{58}$$

e

$$S_2^2 = \frac{1}{n_2 - 1} \sum_{i=1}^{n_2} (X_{2i} - \bar{X}_2)^2 \tag{59}$$

são suficientes para $\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2$.

Note que (por definição da distribuição F - cenário i.c.):

$$U = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F_{n_1-1,\, n_2-1}. \tag{60}$$

Uma vez que

$$(n_1 - 1)\frac{S_1^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2_{n_1-1} \quad \text{e} \quad (n_2 - 1)\frac{S_2^2}{\sigma_2^2} \sim \chi^2_{n_2-1} \tag{61}$$

são independentes.

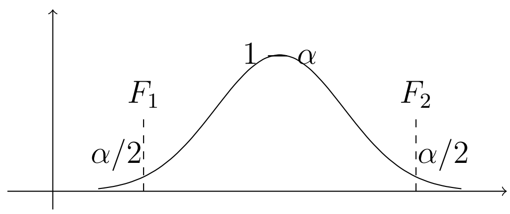
Logo U é uma quantidade pivotal. Sejam

$$F_{n_1-1,n_2-1,1-\alpha/2} > 0 \quad \text{e} \quad F_{n_1-1,n_2-1,\alpha/2}$$

tais que

$$P(U < F_1) = \frac{\alpha}{2} \tag{62}$$

$$P(U > F_2) = \frac{\alpha}{2} \tag{63}$$



Daí:

$$P_\theta\{F_1 < U < F_2\} = 1 - \alpha \tag{64}$$

$$P_\theta\left\{F_1\frac{S_2^2}{S_1^2} < \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} < F_2\frac{S_2^2}{S_1^2}\right\} = 1 - \alpha \tag{65}$$

$$P_\theta\left\{F_2^{-1}\frac{S_1^2}{S_2^2} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < F_1^{-1}\frac{S_1^2}{S_2^2}\right\} = 1 - \alpha \tag{66}$$

$$IC_{1-\alpha}\left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\right) = \left(F_2^{-1}\frac{S_1^2}{S_2^2},\ F_1^{-1}\frac{S_1^2}{S_2^2}\right) \tag{67}$$

Resumo e Consolidação: Capítulo 5 - Intervalos de Confiança

Visão Geral

Este capítulo apresentou a teoria e prática de intervalos de confiança, uma ferramenta essencial para quantificar a incerteza em estimativas estatísticas. A seguir, consolidamos os principais conceitos, métodos e suas aplicações.

1. Conceitos Fundamentais e Terminologia

Tabela 1: Terminologia Básica em Intervalos de Confiança

Conceito	Definição/Interpretação
Intervalo aleatório	$[T_L(X), T_U(X)]$ - função dos dados (aleatório antes da amostra)
Intervalo de confiança	Realização específica do intervalo aleatório
Coeficiente de confiança	$\inf_{\theta \in \Theta} P_\theta[\theta \in IC] = 1 - \alpha$
Probabilidade de cobertura	$P_\theta[\theta \in IC]$ para um valor específico de θ
Nível de confiança	$(1 - \alpha) \times 100\%$ (ex: 95%, 99%)
Margem de erro	Metade do comprimento do IC bilateral
IC unilateral inferior	$[T_L(X), +\infty)$
IC unilateral superior	$(-\infty, T_U(X)]$
IC bilateral	$[T_L(X), T_U(X)]$

2. Métodos de Construção de Intervalos de Confiança

Tabela 2: Métodos para Construir Intervalos de Confiança

Método	Princípio	Quando Usar
Inversão de Testes de Hipóteses	$IC_{1-\alpha} = \{\theta_0 :$ não rejeita $H_0 : \theta = \theta_0$ ao nível $\alpha\}$	Quando teste UMP/UMPNV está disponível
Método Pivotal	Encontrar $U(X, \theta)$ com distribuição conhecida independente de θ	Para famílias de locação, escala ou locação-escala
Aproximação Assintótica	Usar Teorema Central do Limite: $\frac{\hat{\theta}-\theta}{SE(\hat{\theta})} \approx N(0, 1)$	Para amostras grandes quando distribuição exata é desconhecida

Tabela 3: IC para Parâmetros de Distribuições Conhecidas

Distribuição	**Parâmetro**	**IC Bilateral** $(1-\alpha)$	**Pivô**
$N(\mu, \sigma^2)$	μ (σ^2 conhecida)	$\bar{X} \pm z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$
$N(\mu, \sigma^2)$	μ (σ^2 desconhecida)	$\bar{X} \pm t_{n-1,\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}$	$T = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$
$N(\mu, \sigma^2)$	σ^2 (μ desconhecida)	$\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1,\alpha/2}}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}}\right]$	$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$
$\text{Exp}(\theta)$	θ	$\left[\frac{X}{-\log(\alpha/2)}, \frac{X}{-\log(1-\alpha/2)}\right]$ (1 obs.)	$U = X/\theta$
$U(0, \theta)$	θ	$\left[\frac{X_{(n)}}{(1-\alpha/2)^{1/n}}, \frac{X_{(n)}}{(\alpha/2)^{1/n}}\right]$	$U = X_{(n)}/\theta$

3. Intervalos de Confiança para Distribuições Comuns

4. Relação entre Testes de Hipóteses e Intervalos de Confiança

Dualidade Fundamental: Existe uma correspondência exata entre testes de hipóteses e intervalos de confiança:

- Se $IC_{1-\alpha}$ é um IC para θ com coeficiente $1-\alpha$
- Então rejeitamos $H_0 : \theta = \theta_0$ ao nível α se e somente se $\theta_0 \notin IC_{1-\alpha}$
- Teste bilateral $\Leftrightarrow$ IC bilateral
- Teste unilateral $\Leftrightarrow$ IC unilateral

Tabela 4: Correspondência entre Testes e Intervalos

Teste	**Tipo de IC**	**Forma do IC**
$H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta > \theta_0$	Unilateral inferior	$[\theta_L, +\infty)$
$H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta < \theta_0$	Unilateral superior	$(-\infty, \theta_U]$
$H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta \neq \theta_0$	Bilateral	$[\theta_L, \theta_U]$

5. Propriedades Desejáveis de Intervalos de Confiança

Critérios de Otimalidade:

1. **Comprimento Mínimo:** Entre todos os IC de nível $1-\alpha$, preferimos o de menor comprimento esperado
2. **Não Viesado:** $P_\theta[\theta \in IC] \geq 1-\alpha$ para todo $\theta \in \Theta$
3. **Baseado em Estatística Suficiente:** IC ótimos geralmente dependem apenas de estatísticas suficientes
4. **Invariância:** Sob transformações dos dados, o IC se transforma apropriadamente

6. Estratégias para Construção de Intervalos

Roteiro Passo a Passo:

1. **Identificar:**
    - Parâmetro de interesse θ
    - Distribuição populacional (se conhecida)
    - Nível de confiança desejado $1-\alpha$
    - Tipo de IC (bilateral ou unilateral)
2. **Escolher Método:**
    - Se existe teste UMP $\rightarrow$ use inversão de testes
    - Se é família locação/escala $\rightarrow$ use método pivotal
    - Se n é grande $\rightarrow$ use aproximação assintótica
3. **Encontrar Pivô ou Estatística:**
    - Identifique uma estatística suficiente $T(X)$
    - Construa quantidade com distribuição conhecida
    - Determine valores críticos/quantis
4. **Inverter para Obter Limites:**
    - Isole θ na desigualdade probabilística
    - Obtenha expressões para $T_L(X)$ e $T_U(X)$
    - Verifique que $P_\theta[\theta \in IC] = 1-\alpha$
5. **Calcular e Interpretar:**
    - Substitua os valores observados
    - Calcule o IC numérico
    - Interprete no contexto do problema

7. Determinação do Tamanho Amostral

Para obter uma margem de erro E desejada com confiança $1-\alpha$:

Tabela 5: Fórmulas para Tamanho Amostral

Parâmetro	**Margem de Erro**	**Tamanho Amostral**
Média (σ^2 conhecida)	$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$n = \left(\frac{z_{\alpha/2}\sigma}{E}\right)^2$
Proporção p	$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$	$n = \frac{z_{\alpha/2}^2 p(1-p)}{E^2}$
	(usar $p = 0.5$ se desconhecido)	(máximo quando $p = 0.5$)

8. Interpretação Correta vs Incorreta

Interpretação CORRETA:

- "Estamos 95% confiantes de que o verdadeiro valor de μ está entre 10 e 15"
- "Se repetíssemos este procedimento muitas vezes, cerca de 95% dos intervalos conteriam o verdadeiro μ"
- "O intervalo $[10, 15]$ foi construído por um método que captura o verdadeiro parâmetro em 95% das aplicações"

Interpretação INCORRETA:

× "A probabilidade de μ estar entre 10 e 15 é 95%" (parâmetro não é aleatório!)

× "95% dos valores da população estão entre 10 e 15" (confunde IC com intervalo de predição)

× "Há 95% de chance de a amostra estar neste intervalo" (intervalo não prevê futuras amostras)

9. Checklist de Verificação

Ao construir e reportar um intervalo de confiança, verifique:

- ☐ O nível de confiança $1 - \alpha$ foi especificado claramente?
- ☐ As suposições do modelo foram verificadas (normalidade, independência, etc.)?
- ☐ O tipo de intervalo (bilateral, unilateral) é apropriado para o problema?
- ☐ A estatística pivotal tem realmente distribuição independente de θ?
- ☐ Os cálculos dos limites inferior e superior estão corretos?
- ☐ O intervalo faz sentido no contexto (valores plausíveis)?
- ☐ A interpretação está expressa corretamente (evitando erros comuns)?
- ☐ O tamanho amostral é adequado para a margem de erro desejada?

10. Conexões e Extensões

Tópicos Avançados (não cobertos em detalhe):

- **Intervalos de Predição:** Para valores futuros (não para parâmetros)
- **Intervalos de Tolerância:** Contêm uma proporção específica da população
- **Intervalos Bootstrap:** Métodos computacionais para distribuições complexas
- **Intervalos Bayesianos:** Interpretação probabilística sobre θ (requer priori)
- **Regiões de Confiança:** Generalização para múltiplos parâmetros

Relação com Outras Técnicas:

- **Estimação Pontual $\to$ IC:** IC complementa estimadores pontuais com medida de precisão
- **Testes $\leftrightarrow$ IC:** Dualidade permite converter entre métodos
- **Análise de Regressão:** IC para coeficientes, predições
- **Análise de Variância:** IC para médias de grupos, contrastes

11. Tabela de Referência Rápida: Quantis Importantes

Tabela 6: Valores Críticos Comuns

Nível de Confiança	α	$\alpha/2$	$z_{\alpha/2}$	$t_{n-1,\alpha/2}$ $(n = 10)$
90%	0.10	0.05	1.645	1.833
95%	0.05	0.025	1.960	2.262
99%	0.01	0.005	2.576	3.250
99.9%	0.001	0.0005	3.291	4.781

12. Conclusão

O Capítulo 5 apresentou uma teoria completa e prática para construção e interpretação de intervalos de confiança. Os principais aprendizados são:

- Intervalos de confiança quantificam a incerteza em estimativas estatísticas
- Existem métodos sistemáticos (inversão de testes, pivotal) para construir IC
- A interpretação frequentista é fundamental: o intervalo é aleatório, não o parâmetro
- IC ótimos geralmente dependem de estatísticas suficientes
- Existe dualidade profunda entre testes e intervalos de confiança
- A comunicação correta de resultados requer compreensão conceitual sólida

Recomendação de Estudo: Para dominar este capítulo, é essencial:

1. Praticar a derivação de IC para diferentes distribuições
2. Compreender a interpretação frequentista e evitar interpretações incorretas
3. Explorar a conexão entre testes e IC através de exemplos
4. Calcular IC para dados reais e interpretar no contexto
5. Usar simulações para visualizar o conceito de coeficiente de confiança