

Questões Resolvidas do Capítulo 4

Teste de Hipóteses - Soluções Detalhadas

Curso de Inferência Estatística - PPGEST/UFPE
Compilado e detalhado

Novembro 2025

Sumário

Introdução	2
1 Questão 4.1: Exemplos de Testes	3
2 Questão 4.3: Função Poder do Teste	6
3 Questão 4.4: Teste MP para Distribuição Normal	10
4 Questão 4.5: Teste MP para Distribuição Exponencial	14
5 Questão 4.6: Teste MP para Distribuição Bernoulli	18
6 Questão 4.7: Teste MP para Distribuição Poisson	22
7 Questão 4.8: Teste MP para Densidades Não-Paramétricas	26
8 Questão 4.9: Teste MP com Duas Variáveis Independentes	30
9 Questão 4.10: Teste UMP para Variância (Normal com Média Zero)	34
10 Questão 4.12: Teste UMP via Teorema de Karlin-Rubin	38
Conclusão	42

Introdução

Este documento apresenta todas as questões resolvidas em sala de aula do Capítulo 4 sobre Teste de Hipóteses. As soluções foram expandidas com explicações detalhadas, intuições e comentários didáticos para facilitar o entendimento completo dos conceitos.

Organização do Documento

Cada questão está organizada da seguinte forma:

1. **Enunciado** - apresentação completa do problema
2. **Solução Detalhada** - desenvolvimento passo a passo
3. **Observações e Intuição** - comentários sobre o método e interpretações
4. **Resumo** - síntese dos principais resultados

Questões Incluídas

- Q(4.1) - Exemplos de testes e regiões críticas
- Q(4.3) - Função poder de um teste
- Q(4.4) - Teste MP para distribuição Normal (variância conhecida)
- Q(4.5) - Teste MP para distribuição Exponencial
- Q(4.6) - Teste MP para distribuição Bernoulli
- Q(4.7) - Teste MP para distribuição Poisson
- Q(4.8) - Teste MP para densidades não-paramétricas
- Q(4.9) - Teste MP com duas variáveis independentes
- Q(4.10) - Teste UMP para variância (Normal com média zero)
- Q(4.12) - Teste UMP via Teorema de Karlin-Rubin

1 Questão 4.1: Exemplos de Testes

Questão 4.1

Sejam X_1, \dots, X_9 uma amostra aleatória de $X \sim N(\theta, 1)$ para $\theta \in \mathbb{R}$ desconhecido. Deseja-se testar:

$$H_0 : \theta = 5.5 \quad \text{vs} \quad H_1 : \theta = 8 \quad (1)$$

Seja $\bar{X}_n = 9^{-1} \sum_{i=1}^9 X_i$ a média amostral.

Considere os seguintes testes:

- **Teste #1:** Rejeita-se H_0 se e só se $X_1 > 7$
- **Teste #2:** Rejeita-se H_0 se e só se $\frac{X_1+X_2}{2} > 7$
- **Teste #3:** Rejeita-se H_0 se e só se $\bar{X}_n > 6$
- **Teste #4:** Rejeita-se H_0 se e só se $\bar{X}_n > 7.5$

Determine as regiões críticas de cada teste e calcule os erros Tipo I (α) e Tipo II (β) para o Teste #1.

Solução Detalhada

Parte 1: Regiões Críticas

A região crítica R_c é o conjunto de valores amostrais para os quais rejeitamos H_0 .

Teste #1: Como rejeitamos quando $X_1 > 7$, temos:

$$R_c^{(1)} = \{(x_1, \dots, x_9) \in \mathbb{R}^9 : x_1 > 7\} \quad (2)$$

Interpretação: Este teste usa apenas a primeira observação, ignorando as outras 8. Isso é claramente ineficiente!

Teste #2:

$$R_c^{(2)} = \{(x_1, \dots, x_9) \in \mathbb{R}^9 : \frac{x_1 + x_2}{2} > 7\} \quad (3)$$

Interpretação: Usa apenas duas observações. Melhor que o Teste #1, mas ainda desperdiça informação.

Teste #3:

$$R_c^{(3)} = \{(x_1, \dots, x_9) \in \mathbb{R}^9 : \bar{x}_n > 6\} \quad (4)$$

Interpretação: Usa todas as 9 observações através da média amostral, que é uma estatística suficiente para θ .

Teste #4:

$$R_c^{(4)} = \{(x_1, \dots, x_9) \in \mathbb{R}^9 : \bar{x}_n > 7.5\} \quad (5)$$

Interpretação: Também usa todas as observações, mas com um limiar mais alto.

Parte 2: Cálculo de α e β para o Teste #1

Erro Tipo I (α): É a probabilidade de rejeitar H_0 quando ela é verdadeira.

$$\alpha = P_{H_0:\theta=5.5}\{X_1 > 7\} \quad (6)$$

$$= P\left\{\frac{X_1 - 5.5}{\sigma} > \frac{7 - 5.5}{\sigma}\right\} \quad (X_1 \sim N(5.5, 1) \text{ sob } H_0) \quad (7)$$

$$= P\{Z > 1.5\} \quad \text{onde } Z \sim N(0, 1) \quad (8)$$

$$= 1 - \Phi(1.5) \quad (9)$$

$$= 1 - 0.93319 \quad (10)$$

$$= 0.06681 \approx 6.68\% \quad (11)$$

Interpretação: Há cerca de 6.68% de chance de rejeitarmos H_0 incorretamente quando $\theta = 5.5$.

Erro Tipo II (β): É a probabilidade de não rejeitar H_0 quando ela é falsa (i.e., quando H_1 é verdadeira).

$$\beta = P_{H_1:\theta=8}\{X_1 \leq 7\} \quad (12)$$

$$= P\left\{\frac{X_1 - 8}{\sigma} < \frac{7 - 8}{\sigma}\right\} \quad (X_1 \sim N(8, 1) \text{ sob } H_1) \quad (13)$$

$$= P\{Z < -1\} \quad \text{onde } Z \sim N(0, 1) \quad (14)$$

Observações e Intuição

Pontos Importantes

1. **Eficiência dos Testes:** Os testes que usam mais informação (média de todas as observações) tendem a ser mais eficientes.
2. **Trade-off:** Não podemos minimizar simultaneamente α e β para um tamanho amostral fixo. Diminuir α geralmente aumenta β e vice-versa.
3. **Estatística Suficiente:** A média amostral \bar{X}_n é suficiente para θ quando $X \sim N(\theta, \sigma^2)$. Pelo princípio da suficiência, os melhores testes devem depender apenas de \bar{X}_n .
4. **Comparação dos Testes:**
 - Teste #1 usa 1 observação
 - Teste #2 usa 2 observações
 - Testes #3 e #4 usam todas as 9 observações

Esperamos que os testes #3 e #4 sejam mais poderosos.

Resumo da Questão

Principais Resultados:

- Para o Teste #1: $\alpha \approx 6.68\%$ e $\beta \approx 15.87\%$
- Poder do Teste #1: aproximadamente 84.13%
- As regiões críticas dependem da estatística de teste escolhida
- Testes baseados em estatísticas suficientes são preferíveis

2 Questão 4.3: Função Poder do Teste

Questão 4.3

Para o Teste #4 da Questão 4.1, determine a função poder $Q_T(\theta)$.

Recall: Teste #4 rejeita $H_0 : \theta = 5.5$ vs $H_1 : \theta = 8$ se e só se $\bar{X}_n > 7.5$, onde $X_1, \dots, X_9 \sim N(\theta, 1)$ i.i.d.

Solução Detalhada

Definição da Função Poder

A função poder de um teste Υ é definida como:

$$Q_{\Upsilon}(\theta) = P_{\theta}[\text{Rejeitar } H_0] = P_{\theta}[X \in R_c] \quad (17)$$

Elá mede a probabilidade de rejeitar H_0 para cada valor possível do parâmetro θ .

Cálculo para o Teste #4

Para o Teste #4, temos $R_c = \{x \in \mathbb{R}^9 : \bar{x}_n > 7.5\}$. Portanto:

$$Q_{\Upsilon}(\theta) = P_{\theta}[\bar{X}_n > 7.5] \quad (18)$$

$$= P_{\theta} \left[\frac{\bar{X}_n - \theta}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{7.5 - \theta}{\sigma/\sqrt{n}} \right] \quad (19)$$

Nota importante: Sob qualquer valor de θ , temos:

$$\bar{X}_n \sim N \left(\theta, \frac{\sigma^2}{n} \right) = N \left(\theta, \frac{1}{9} \right) \quad (20)$$

Portanto:

$$\frac{\bar{X}_n - \theta}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\bar{X}_n - \theta}{1/3} = 3(\bar{X}_n - \theta) \sim N(0, 1) \quad (21)$$

Continuando o cálculo:

$$Q_{\Upsilon}(\theta) = P \left[Z > \frac{7.5 - \theta}{1/3} \right] \quad \text{onde } Z \sim N(0, 1) \quad (22)$$

$$= P[Z > 3(7.5 - \theta)] \quad (23)$$

$$= P[Z > 22.5 - 3\theta] \quad (24)$$

$$= 1 - \Phi(22.5 - 3\theta) \quad (25)$$

Forma final da função poder:

$$Q_{\Upsilon}(\theta) = 1 - \Phi(\sqrt{n}(7.5 - \theta)) = 1 - \Phi(3(7.5 - \theta)) \quad (26)$$

Interpretação para Valores Específicos

Para $\theta = 5.5$ (sob H_0):

$$Q_{\Upsilon}(5.5) = 1 - \Phi(3(7.5 - 5.5)) \quad (27)$$

$$= 1 - \Phi(6) \quad (28)$$

$$\approx 1 - 0.999999999 \quad (29)$$

$$\approx 10^{-9} \text{ (praticamente zero)} \quad (30)$$

Isso significa que o Teste #4 tem probabilidade quase zero de rejeitar H_0 quando $\theta = 5.5$. O teste é extremamente conservador!

Para $\theta = 8$ (sob H_1):

$$Q_{\Upsilon}(8) = 1 - \Phi(3(7.5 - 8)) \quad (31)$$

$$= 1 - \Phi(-1.5) \quad (32)$$

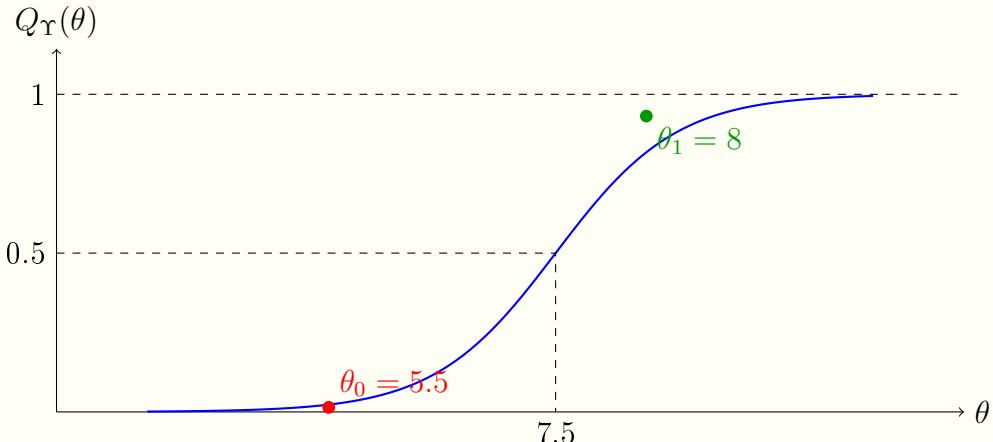
Observações e Intuição

Propriedades da Função Poder

1. **Monotonicidade:** Para este teste unilateral, $Q_T(\theta)$ é crescente em θ . Quanto maior o verdadeiro valor de θ , maior a probabilidade de rejeitarmos $H_0 : \theta = 5.5$.
2. **Tamanho do Teste:** O tamanho é $\alpha = \sup_{\theta \in \Theta_0} Q_T(\theta)$. Para este teste, $\alpha = Q_T(5.5) \approx 0$ (muito pequeno).
3. **Poder do Teste:** Para $\theta \in \Theta_1$, $Q_T(\theta)$ representa o poder. Quanto maior, melhor!
4. **Relação com Erros:**
 - $Q_T(\theta_0) = \alpha$ (Erro Tipo I quando $\theta = \theta_0$)
 - $Q_T(\theta_1) = 1 - \beta$ (Poder quando $\theta = \theta_1$)
5. **Comportamento Assintótico:**
 - $\lim_{\theta \rightarrow -\infty} Q_T(\theta) = 0$
 - $\lim_{\theta \rightarrow +\infty} Q_T(\theta) = 1$

Visualização

A função poder tem forma de curva S (sigmoidal):



Função Poder do Teste #4

Resumo da Questão

Principais Resultados:

$$Q_T(\theta) = 1 - \Phi(3(7.5 - \theta))$$

- Para $\theta = 5.5$: $Q \approx 0$ (tamanho $\alpha \approx 0$)
- Para $\theta = 7.5$: $Q = 0.5$
- Para $\theta = 8.0$: $Q \approx 0.933$ (poder $\approx 93.3\%$)
- A função é crescente: testes detectam melhor valores maiores de θ

3 Questão 4.4: Teste MP para Distribuição Normal

Questão 4.4

Sejam X_1, \dots, X_n uma amostra aleatória de $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ com μ desconhecido e $\sigma^2 \in \mathbb{R}^+$ conhecido.

Encontre o teste Mais Poderoso (MP) de nível α para:

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \mu = \mu_1 \quad (38)$$

onde μ_0 e μ_1 são conhecidos e $\mu_1 > \mu_0$.

Solução Detalhada

Passo 1: Identificar o Método Apropriado

Como ambas as hipóteses são **simples** (especificam completamente o parâmetro), podemos aplicar o **Lema de Neyman-Pearson (LNP)**.

Passo 2: Escrever as Funções de Verossimilhança

Para uma amostra $x = (x_1, \dots, x_n)$ de $N(\mu, \sigma^2)$, a função de verossimilhança é:

$$L(\mu; x) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left\{ -\frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\} \quad (39)$$

Simplificando:

$$L(\mu; x) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \right\} \quad (40)$$

Expandindo o termo $(x_i - \mu)^2$:

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 = \sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2\mu x_i + \mu^2) \quad (41)$$

$$= \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\mu \sum_{i=1}^n x_i + n\mu^2 \quad (42)$$

Logo:

$$L(\mu; x) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\mu \sum_{i=1}^n x_i + n\mu^2 \right) \right\} \quad (43)$$

Passo 3: Calcular a Razão de Verossimilhanças

Pelo LNP, o teste MP tem a forma: “Rejeita H_0 se e só se $\frac{L_1}{L_0} > k$ ”, onde $L_i = L(\mu_i; x)$.

Calculando a razão:

$$\frac{L_1}{L_0} = \frac{L(\mu_1; x)}{L(\mu_0; x)} \quad (44)$$

$$= \frac{\exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (\sum x_i^2 - 2\mu_1 \sum x_i + n\mu_1^2) \right\}}{\exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (\sum x_i^2 - 2\mu_0 \sum x_i + n\mu_0^2) \right\}} \quad (45)$$

$$= \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left[(-2\mu_1 \sum x_i + n\mu_1^2) - (-2\mu_0 \sum x_i + n\mu_0^2) \right] \right\} \quad (46)$$

$$= \exp \left\{ \frac{1}{2\sigma^2} \left[2(\mu_1 - \mu_0) \sum x_i - n(\mu_1^2 - \mu_0^2) \right] \right\} \quad (47)$$

$$= \exp \left\{ \frac{(\mu_1 - \mu_0)}{\sigma^2} \sum x_i - \frac{n(\mu_1^2 - \mu_0^2)}{2\sigma^2} \right\} \quad (48)$$

Passo 4: Simplificar a Região Crítica

A condição $\frac{L_1}{L_0} > k$ torna-se:

$$\exp \left\{ \frac{(\mu_1 - \mu_0)}{\sigma^2} \sum x_i - \frac{n(\mu_1^2 - \mu_0^2)}{2\sigma^2} \right\} > k \quad (49)$$

Observações e Intuição

Pontos Importantes

1. **Lema de Neyman-Pearson:** O LNP garante que este teste é o mais poderoso entre todos os testes de nível α . Nenhum outro teste de mesmo nível tem poder maior.
2. **Estatística Suficiente:** A média amostral \bar{X} é suficiente para μ . O LNP confirma que o melhor teste depende apenas dela (não das observações individuais).
3. **Teste Z:** Este é o famoso “teste Z” usado extensivamente na prática quando σ^2 é conhecido.
4. **Unilateralidade:** Como $\mu_1 > \mu_0$, rejeitamos H_0 para valores grandes de \bar{X} . O teste é unilateral à direita.
5. **Normalização:** A estatística $Z(x) = \sqrt{n} \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma}$ tem distribuição $N(0, 1)$ sob H_0 , independentemente de σ^2 e n . Isso facilita o uso de tabelas.
6. **Efeito do tamanho amostral:** Para n fixo e α fixo, o poder do teste aumenta à medida que $|\mu_1 - \mu_0|$ aumenta. Para $|\mu_1 - \mu_0|$ fixo e α fixo, o poder aumenta com n .

Conexão com Estimação

A estatística de teste pode ser reescrita como:

$$Z(x) = \frac{\hat{\mu} - \mu_0}{\text{SE}(\hat{\mu})} \quad (64)$$

onde $\hat{\mu} = \bar{x}$ é o estimador de máxima verossimilhança de μ e $\text{SE}(\hat{\mu}) = \sigma/\sqrt{n}$ é seu erro padrão.

Essa forma mostra que estamos medindo quantos "erros padrão" o estimado está do valor sob H_0 .

Resumo da Questão

Teste MP para $H_0 : \mu = \mu_0$ vs $H_1 : \mu = \mu_1$ ($\mu_1 > \mu_0$):

Estatística de Teste:

$$Z = \sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \stackrel{H_0}{\sim} N(0, 1)$$

Regra de Decisão:

Rejeita H_0 se $Z_{\text{cal}} > z_\alpha$

Propriedades:

- É o teste mais poderoso de nível α (pelo LNP)
- Depende apenas da estatística suficiente \bar{X}
- Distribuição sob H_0 é conhecida e tabelada

4 Questão 4.5: Teste MP para Distribuição Exponencial

Questão 4.5

Sejam X_1, \dots, X_n uma amostra aleatória de $X \sim \text{Exp}(\theta)$ com densidade:

$$f(x; \theta) = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}, \quad x > 0 \quad (65)$$

onde $\theta > 0$ é desconhecido.

Encontre o teste Mais Poderoso (MP) de nível α para:

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \theta = \theta_1 \quad (\theta_1 > \theta_0) \quad (66)$$

Solução Detalhada

Passo 1: Aplicação do LNP

Como temos hipóteses simples vs simples, aplicamos o Lema de Neyman-Pearson.

Passo 2: Função de Verossimilhança

Para uma amostra $x = (x_1, \dots, x_n)$:

$$L(\theta; x) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) \quad (67)$$

$$= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\theta} e^{-x_i/\theta} \quad (68)$$

$$= \theta^{-n} \exp \left\{ -\frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^n x_i \right\} \quad (69)$$

Portanto, para $i = 0, 1$:

$$L_i = L(\theta_i; x) = \theta_i^{-n} \exp \left\{ -\frac{\sum_{j=1}^n x_j}{\theta_i} \right\} \quad (70)$$

Passo 3: Razão de Verossimilhanças

$$\frac{L_1}{L_0} = \frac{L(\theta_1; x)}{L(\theta_0; x)} \quad (71)$$

$$= \frac{\theta_1^{-n} \exp \left\{ -\frac{\sum x_j}{\theta_1} \right\}}{\theta_0^{-n} \exp \left\{ -\frac{\sum x_j}{\theta_0} \right\}} \quad (72)$$

$$= \left(\frac{\theta_0}{\theta_1} \right)^n \exp \left\{ \sum_{j=1}^n x_j \left(\frac{1}{\theta_0} - \frac{1}{\theta_1} \right) \right\} \quad (73)$$

Passo 4: Região Crítica

Pelo LNP, rejeitamos H_0 quando $\frac{L_1}{L_0} > k$:

$$\left(\frac{\theta_0}{\theta_1} \right)^n \exp \left\{ \sum x_j \left(\frac{1}{\theta_0} - \frac{1}{\theta_1} \right) \right\} > k \quad (74)$$

Aplicando logaritmo:

$$n \log \left(\frac{\theta_0}{\theta_1} \right) + \sum x_j \left(\frac{1}{\theta_0} - \frac{1}{\theta_1} \right) > \log k \quad (75)$$

Rearranjando:

$$\sum x_j \left(\frac{1}{\theta_0} - \frac{1}{\theta_1} \right) > \log k - n \log \left(\frac{\theta_0}{\theta_1} \right) \quad (76)$$

Análise do sinal: Como $\theta_1 > \theta_0 > 0$, temos:

$$\frac{1}{\theta_0} - \frac{1}{\theta_1} = \frac{\theta_1 - \theta_0}{\theta_0 \theta_1} > 0 \quad (77)$$

Observações e Intuição

Pontos Importantes

1. **Estatística Suficiente:** A soma $\sum X_i$ é suficiente para θ na distribuição exponencial. O teste MP depende apenas dela.
2. **Transformação:** A transformação $Q(x) = \frac{2}{\theta_0} \sum x_i$ é crucial porque:
 - Remove a dependência de θ da distribuição sob H_0
 - Fornece uma distribuição conhecida e tabelada (χ^2_{2n})
3. **Relação com Gamma:** Como $\text{Exp}(\theta) = \text{Gamma}(1, \theta)$, temos:
$$\sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Gamma}(n, \theta) \quad (92)$$
4. **Graus de Liberdade:** A estatística tem $2n$ graus de liberdade (não n) porque cada $\frac{2X_i}{\theta}$ contribui com 2 graus de liberdade.
5. **Interpretação:** Valores grandes de $\sum X_i$ fornecem evidência de que θ é grande (pois $E[X] = \theta$). Como $\theta_1 > \theta_0$, rejeitamos H_0 para somas grandes.
6. **Cálculo Prático:** Na prática:
 - (a) Calcule $Q_{\text{cal}} = \frac{2}{\theta_0} \sum x_i$
 - (b) Encontre q_α em tabelas de χ^2_{2n} ou use software
 - (c) Compare Q_{cal} com q_α

Exemplo Numérico

Suponha $n = 10$, $\theta_0 = 2$, $\alpha = 0.05$ e observamos $\sum x_i = 25$.

1. Calcular estatística: $Q_{\text{cal}} = \frac{2}{2} \cdot 25 = 25$
2. Graus de liberdade: $2n = 20$
3. Valor crítico: $\chi^2_{20,0.95} = 31.41$ (da tabela)
4. Decisão: Como $25 < 31.41$, não rejeitamos H_0

Interpretação: Não há evidência suficiente ao nível 5% para concluir que $\theta > 2$.

Resumo da Questão

Teste MP para $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta = \theta_1$ ($\theta_1 > \theta_0$):

Estatística de Teste:

$$Q(x) = \frac{2}{\theta_0} \sum_{i=1}^n x_i \stackrel{H_0}{\sim} \chi_{2n}^2$$

Regra de Decisão:

Rejeita H_0 se $Q_{\text{cal}} > \chi_{2n,1-\alpha}^2$

Propriedades:

- Teste MP de nível α (pelo LNP)
- Depende da estatística suficiente $\sum X_i$
- Distribuição sob H_0 é χ^2 com $2n$ graus de liberdade

5 Questão 4.6: Teste MP para Distribuição Bernoulli

Questão 4.6

Sejam X_1, \dots, X_n uma amostra aleatória de $X \sim \text{Bernoulli}(p)$ para $p \in (0, 1)$ desconhecida.

Encontre o teste Mais Poderoso (MP) para:

$$H_0 : p = p_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : p = p_1 \quad (p_1 > p_0) \quad (93)$$

Solução Detalhada

Passo 1: Aplicação do LNP

Como ambas as hipóteses são simples, aplicamos o Lema de Neyman-Pearson.

Passo 2: Função de Verossimilhança

Para $X \sim \text{Bernoulli}(p)$, a função de massa de probabilidade é:

$$P(X = x) = p^x(1-p)^{1-x}, \quad x \in \{0, 1\} \quad (94)$$

Para uma amostra $x = (x_1, \dots, x_n)$:

$$L(p; x) = \prod_{k=1}^n p^{x_k} (1-p)^{1-x_k} \quad (95)$$

$$= p^{\sum_{k=1}^n x_k} (1-p)^{n - \sum_{k=1}^n x_k} \quad (96)$$

$$= p^{\sum x_k} (1-p)^{n - \sum x_k} \quad (97)$$

Podemos reescrever como:

$$L(p; x) = \left(\frac{p}{1-p} \right)^{\sum x_k} (1-p)^n \quad (98)$$

Passo 3: Razão de Verossimilhanças

$$\frac{L_1}{L_0} = \frac{L(p_1; x)}{L(p_0; x)} \quad (99)$$

$$= \frac{\left(\frac{p_1}{1-p_1} \right)^{\sum x_k} (1-p_1)^n}{\left(\frac{p_0}{1-p_0} \right)^{\sum x_k} (1-p_0)^n} \quad (100)$$

$$= \left[\frac{p_1(1-p_0)}{p_0(1-p_1)} \right]^{\sum x_k} \cdot \left[\frac{1-p_1}{1-p_0} \right]^n \quad (101)$$

Definindo:

$$A_1 = \frac{p_1(1-p_0)}{p_0(1-p_1)} \quad \text{e} \quad A_2 = \frac{1-p_1}{1-p_0} \quad (102)$$

Análise dos sinais:

- Como $p_1 > p_0$, temos $\frac{p_1}{p_0} > 1$ e $\frac{1-p_0}{1-p_1} > 1$, portanto $A_1 > 1$
- Como $p_1 > p_0$, temos $1-p_1 < 1-p_0$, portanto $A_2 < 1$

Passo 4: Região Crítica

Pelo LNP, rejeitamos H_0 quando:

$$A_1^{\sum x_k} \cdot A_2^n > k \quad (103)$$

Aplicando logaritmo:

$$\sum x_k \log(A_1) + n \log(A_2) > \log k \quad (104)$$

Observações e Intuição

Pontos Importantes

1. **Estatística Suficiente:** $\sum X_i$ é suficiente para p . O teste MP depende apenas desta soma.
2. **Necessidade de Aleatorização:** Para distribuições discretas, raramente conseguimos um teste não-aleatorizado com tamanho exato α . A aleatorização resolve esse problema.
3. **Distribuição Binomial:** A soma de Bernoullis independentes segue distribuição Binomial.
4. **Razão de Chances:** A razão $\frac{p}{1-p}$ é conhecida como "odds"(chances). O teste compara as chances sob H_1 e H_0 .
5. **Intuição:** Valores grandes de $\sum X_i$ (muitos sucessos) fornecem evidência de que p é grande, levando à rejeição de $H_0 : p = p_0$ em favor de $H_1 : p = p_1 > p_0$.

Exemplo Numérico

Suponha $n = 10$, $p_0 = 0.3$, $p_1 = 0.6$, $\alpha = 0.05$.

1. Sob H_0 : $\sum X_i \sim \text{Binomial}(10, 0.3)$
2. Calculamos (usando software ou tabelas):
 - $P(\sum X_i > 6) = 0.0473 < 0.05 \checkmark$
 - $P(\sum X_i > 5) = 0.1503 > 0.05 \times$
3. Portanto, $k_1 = 6$
4. $P(\sum X_i = 6) = \binom{10}{6} (0.3)^6 (0.7)^4 = 0.0368$
5. $\delta = \frac{0.05 - 0.0473}{0.0368} = 0.0734$

Regra de decisão:

- Se observamos 7, 8, 9 ou 10 sucessos: rejeitamos H_0
- Se observamos 0, 1, 2, 3, 4 ou 5 sucessos: não rejeitamos H_0
- Se observamos exatamente 6 sucessos: rejeitamos com probabilidade 7.34%

Resumo da Questão

Teste MP para $H_0 : p = p_0$ vs $H_1 : p = p_1$ ($p_1 > p_0$):
Estatística de Teste:

$$T = \sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Binomial}(n, p_0) \text{ sob } H_0$$

Função Crítica:

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & \sum x_i > k_1 \\ \delta, & \sum x_i = k_1 \\ 0, & \sum x_i < k_1 \end{cases}$$

Propriedades:

- Teste MP de nível α (pelo LNP)
- Geralmente requer aleatorização (distribuição discreta)
- Depende apenas da estatística suficiente $\sum X_i$

6 Questão 4.7: Teste MP para Distribuição Poisson

Questão 4.7

Sejam X_1, \dots, X_n uma amostra aleatória de $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ para $\lambda > 0$ desconhecido.

Derive o teste Mais Poderoso (MP) para:

$$H_0 : \lambda = \lambda_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \lambda = \lambda_1 \quad (\lambda_1 > \lambda_0) \quad (113)$$

Solução Detalhada

Passo 1: Aplicação do LNP

Como temos hipóteses simples vs simples, aplicamos o Lema de Neyman-Pearson.

Passo 2: Função de Verossimilhança

Para $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$, a função de massa de probabilidade é:

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, \quad x \in \{0, 1, 2, \dots\} \quad (114)$$

Para uma amostra $x = (x_1, \dots, x_n)$:

$$L(\lambda; x) = \prod_{k=1}^n \frac{\lambda^{x_k} e^{-\lambda}}{x_k!} \quad (115)$$

$$= \frac{\lambda^{\sum_{k=1}^n x_k} e^{-n\lambda}}{\prod_{k=1}^n x_k!} \quad (116)$$

$$= e^{-n\lambda} \cdot \lambda^{\sum x_k} \cdot \prod_{k=1}^n \frac{1}{x_k!} \quad (117)$$

Passo 3: Razão de Verossimilhanças

$$\frac{L_1}{L_0} = \frac{L(\lambda_1; x)}{L(\lambda_0; x)} \quad (118)$$

$$= \frac{e^{-n\lambda_1} \lambda_1^{\sum x_k}}{e^{-n\lambda_0} \lambda_0^{\sum x_k}} \quad (119)$$

$$= \left[\frac{e^{-\lambda_1}}{e^{-\lambda_0}} \right]^n \cdot \left[\frac{\lambda_1}{\lambda_0} \right]^{\sum x_k} \quad (120)$$

$$= e^{-n(\lambda_1 - \lambda_0)} \cdot \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0} \right)^{\sum x_k} \quad (121)$$

Passo 4: Região Crítica

Pelo LNP, rejeitamos H_0 quando $\frac{L_1}{L_0} > k$:

$$e^{-n(\lambda_1 - \lambda_0)} \cdot \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0} \right)^{\sum x_k} > k \quad (122)$$

Aplicando logaritmo:

$$-n(\lambda_1 - \lambda_0) + \sum x_k \log \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0} \right) > \log k \quad (123)$$

Como $\lambda_1 > \lambda_0$, temos $\frac{\lambda_1}{\lambda_0} > 1$, logo $\log \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0} \right) > 0$.

Rearranjando:

$$\sum x_k \log \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0} \right) > \log k + n(\lambda_1 - \lambda_0) \quad (124)$$

$$\sum x_k > \frac{\log k + n(\lambda_1 - \lambda_0)}{\log(\lambda_1 / \lambda_0)} = k_1 \quad (125)$$

Observações e Intuição

Pontos Importantes

1. **Propriedade Aditiva da Poisson:** A soma de Poissons independentes é Poisson. Esta propriedade é crucial para determinar a distribuição da estatística de teste.
2. **Estatística Suficiente:** $T(X) = \sum X_i$ é suficiente para λ . O teste ótimo depende apenas dela.
3. **Família Exponencial:** A Poisson pertence à família exponencial de distribuições. Para essas distribuições, a estatística suficiente tem forma simples.
4. **Comparação com Binomial:** Ambas são distribuições discretas que somam para uma distribuição da mesma família. Ambas requerem aleatorização para tamanho exato α .
5. **Aproximação Normal:** Para $n\lambda_0$ grande, $\sum X_i \approx N(n\lambda_0, n\lambda_0)$, permitindo usar teste Z aproximado.

Exemplo Numérico

Suponha $n = 5$, $\lambda_0 = 2$, $\lambda_1 = 4$, $\alpha = 0.05$.

1. Sob H_0 : $\sum X_i \sim \text{Poisson}(10)$
2. Valor esperado e variância: $E[\sum X_i] = 10$, $\text{Var}(\sum X_i) = 10$
3. Usando tabelas ou software Poisson(10):
 - $P(\sum X_i > 16) = 0.0487 < 0.05 \checkmark$
 - $P(\sum X_i > 15) = 0.0835 > 0.05 \times$
4. Portanto, $k_1 = 16$
5. $P(\sum X_i = 16) = \frac{10^{16}e^{-10}}{16!} = 0.0348$
6. $\delta = \frac{0.05 - 0.0487}{0.0348} = 0.0374$

Regra de decisão:

- Se $\sum x_i \geq 17$: rejeitamos H_0 sempre
- Se $\sum x_i \leq 15$: não rejeitamos H_0
- Se $\sum x_i = 16$: rejeitamos com probabilidade 3.74%

Resumo da Questão

Teste MP para $H_0 : \lambda = \lambda_0$ vs $H_1 : \lambda = \lambda_1$ ($\lambda_1 > \lambda_0$):
Estatística de Teste:

$$T = \sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Poisson}(n\lambda_0) \text{ sob } H_0$$

Função Crítica:

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & \sum x_i > k_1 \\ \delta, & \sum x_i = k_1 \\ 0, & \sum x_i < k_1 \end{cases}$$

Propriedades:

- Teste MP de nível α (pelo LNP)
- A soma de Poissons é Poisson
- Depende apenas da estatística suficiente $\sum X_i$

7 Questão 4.8: Teste MP para Densidades Não-Paramétricas

Questão 4.8

Seja X uma v.a. com densidade $f(x)$ para $x \in \mathbb{R}$. Considere duas densidades:

$$f_0(x) = \begin{cases} \frac{3x^2}{64}, & 0 < x < 4 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \quad \text{e} \quad f_1(x) = \begin{cases} \frac{3}{16}\sqrt{x}, & 0 < x < 4 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \quad (135)$$

Determine o teste MP de nível α para:

$$H_0 : f(x) = f_0(x) \quad \text{vs} \quad H_1 : f(x) = f_1(x) \quad (136)$$

Solução Detalhada

Passo 1: Aplicação do LNP

Este é um exemplo de teste entre densidades completamente especificadas (hipóteses simples). Aplicamos o LNP.

Observação: Este não é um teste paramétrico tradicional, mas o LNP ainda se aplica!

Passo 2: Razão de Densidades

Pelo LNP, rejeitamos H_0 quando:

$$\frac{f_1(x)}{f_0(x)} > k \quad (137)$$

Calculando a razão para $x \in (0, 4)$:

$$\frac{f_1(x)}{f_0(x)} = \frac{\frac{3}{16}\sqrt{x}}{\frac{3x^2}{64}} \quad (138)$$

$$= \frac{3 \cdot 64 \cdot x^{1/2}}{16 \cdot 3 \cdot x^2} \quad (139)$$

$$= \frac{64 \cdot x^{1/2}}{16 \cdot x^2} \quad (140)$$

$$= \frac{4}{x^{3/2}} \quad (141)$$

$$= 4x^{-3/2} \quad (142)$$

Passo 3: Região Crítica

Rejeitamos H_0 quando:

$$4x^{-3/2} > k \quad (143)$$

Rearranjando:

$$x^{-3/2} > \frac{k}{4} \quad (144)$$

$$x^{3/2} < \frac{4}{k} \quad (145)$$

$$x < \left(\frac{4}{k}\right)^{2/3} \quad (146)$$

Definindo $k_1 = \left(\frac{4}{k}\right)^{2/3}$:

$$R_c = \{x \in (0, 4) : x < k_1\} \quad (147)$$

Interpretação importante: Rejeitamos H_0 para valores PEQUENOS de X ! Isso acontece porque f_1 dá mais peso para valores pequenos que f_0 .

Passo 4: Determinação de k_1 para Tamanho α

Queremos que o teste tenha tamanho α :

$$\alpha = P_{f_0}[X < k_1] = \int_0^{k_1} f_0(x) dx \quad (148)$$

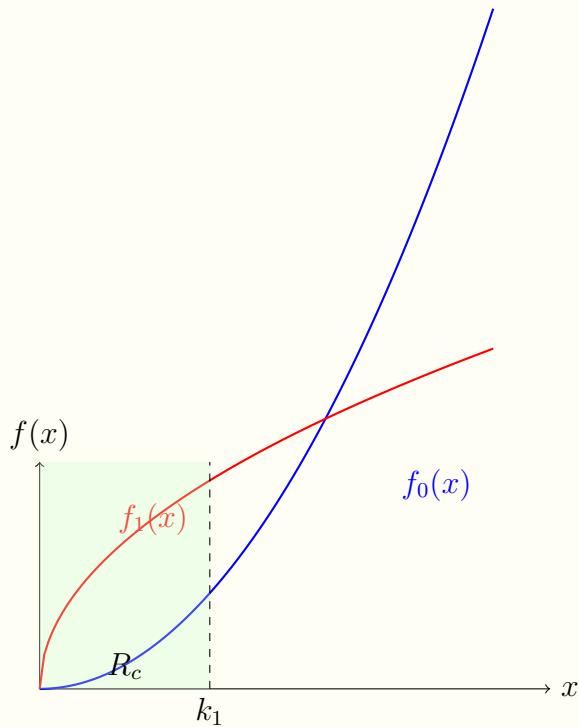
Calculando:

Observações e Intuição

Pontos Importantes

1. **Teste Não-Paramétrico:** Este é um exemplo onde não há parâmetro desconhecido. Estamos testando entre duas formas funcionais completamente especificadas.
2. **Região Crítica não-Intuitiva:** Rejeitamos para valores PEQUENOS de X . Isso ilustra que a região crítica depende de como as densidades se relacionam.
3. **Poder Crescente com α :** Como o poder é $\sqrt{\alpha}$, ele aumenta com α , mas de forma sub-linear.
4. **Exemplo Numérico:**
 - Para $\alpha = 0.05$: $k_1 = 4(0.05)^{1/3} \approx 1.47$, Poder = $\sqrt{0.05} \approx 22.4\%$
 - Para $\alpha = 0.01$: $k_1 = 4(0.01)^{1/3} \approx 0.86$, Poder = $\sqrt{0.01} = 10\%$
5. **Visualização:** $f_1(x)$ é maior que $f_0(x)$ para x pequenos e menor para x grandes. A razão $\frac{f_1}{f_0}$ é grande para x pequenos.

Comparação das Densidades



A região crítica R_c (em verde) corresponde a valores pequenos de X onde f_1 domina f_0 .

Resumo da Questão

Teste MP para $H_0 : f = f_0$ vs $H_1 : f = f_1$:

Região Crítica:

$$R_c = \{x \in (0, 4) : x < 4\alpha^{1/3}\}$$

Regra de Decisão:

Rejeita H_0 se $X_{\text{obs}} < 4\alpha^{1/3}$

Propriedades:

- Tamanho exato α
- Poder = $\sqrt{\alpha}$
- Exemplo de teste não-paramétrico MP
- Região crítica em valores pequenos de X

8 Questão 4.9: Teste MP com Duas Variáveis Independentes

Questão 4.9

Sejam X_1 e X_2 duas v.a.'s independentes com densidade $f(x)$.

Determine o teste MP de nível α para:

$$H_0 : f(x) = f_0(x) \quad \text{vs} \quad H_1 : f(x) = f_1(x) \quad (165)$$

onde f_0 e f_1 são as mesmas densidades da Questão 4.8.

Solução Detalhada

Passo 1: Aplicação do LNP para Amostra Bivariada

Para duas observações independentes, a densidade conjunta é o produto das marginais.

Pelo LNP, rejeitamos H_0 quando:

$$\frac{f_1(x_1)f_1(x_2)}{f_0(x_1)f_0(x_2)} > k \quad (166)$$

Passo 2: Simplificação da Razão

Da Questão 4.8, sabemos que $\frac{f_1(x)}{f_0(x)} = 4x^{-3/2}$ para $x \in (0, 4)$.

Portanto:

$$\frac{f_1(x_1)f_1(x_2)}{f_0(x_1)f_0(x_2)} = \frac{f_1(x_1)}{f_0(x_1)} \cdot \frac{f_1(x_2)}{f_0(x_2)} \quad (167)$$

$$= 4x_1^{-3/2} \cdot 4x_2^{-3/2} \quad (168)$$

$$= 16(x_1x_2)^{-3/2} \quad (169)$$

Passo 3: Região Crítica

Rejeitamos H_0 quando:

$$16(x_1x_2)^{-3/2} > k \quad (170)$$

Rearranjando:

$$(x_1x_2)^{-3/2} > \frac{k}{16} \quad (171)$$

$$(x_1x_2)^{3/2} < \frac{16}{k} \quad (172)$$

$$x_1x_2 < \left(\frac{16}{k}\right)^{2/3} \quad (173)$$

Definindo $K_1 = \left(\frac{16}{k}\right)^{2/3}$:

$$R_c = \{(x_1, x_2) \in (0, 4) \times (0, 4) : x_1x_2 < K_1\} \quad (174)$$

Passo 4: Usando a Função de Distribuição

Para determinar K_1 , usamos a função de distribuição acumulada de f_0 . A fda correspondente a f_0 é:

$$F_0(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{x^3}{64}, & 0 < x < 4 \\ 1, & x \geq 4 \end{cases} \quad (175)$$

Verificação:

$$F_0(x) = \int_0^x \frac{3t^2}{64} dt = \frac{3}{64} \cdot \frac{t^3}{3} \Big|_0^x = \frac{x^3}{64} \quad (176)$$

Passo 5: Estatística qui-Quadrado

Uma propriedade útil: Se $X \sim f_0$, então:

Observações e Intuição

Pontos Importantes

1. **Extensão Natural:** Este problema estende a Questão 4.8 para duas observações. A lógica é similar, mas trabalhamos no espaço bidimensional.
2. **Estatística Qui-Quadrado:** A transformação via $-2 \log F_0$ é uma técnica poderosa que aparece em muitos contextos (teste da razão de verossimilhanças, por exemplo).
3. **Independência:** A independência de X_1 e X_2 permite que a estatística seja a soma de duas χ^2_2 , resultando em χ^2_4 .
4. **Generalização:** Para n observações, teríamos:

$$Q = -2 \sum_{i=1}^n \log F_0(X_i) \sim \chi^2_{2n} \quad (190)$$

5. **Aplicação Prática:** Para $\alpha = 0.05$, usamos $\chi^2_{4,0.95} = 9.488$. Se $Q_{\text{calc}} > 9.488$, rejeitamos H_0 .

Exemplo Numérico

Suponha que observamos $x_1 = 0.5$ e $x_2 = 1.0$.

1. Calcular F_0 :

$$F_0(0.5) = \frac{(0.5)^3}{64} = \frac{0.125}{64} \approx 0.00195 \quad (191)$$

$$F_0(1.0) = \frac{1^3}{64} = \frac{1}{64} \approx 0.01563 \quad (192)$$

2. Calcular Q :

$$Q = -2 \log(0.00195) - 2 \log(0.01563) \quad (193)$$

$$= -2(-6.241) - 2(-4.158) \quad (194)$$

$$= 12.482 + 8.316 \quad (195)$$

$$= 20.798 \quad (196)$$

3. Decisão: Como $20.798 > 9.488$, rejeitamos H_0 ao nível 5%.

Interpretação: Os valores observados $(0.5, 1.0)$ são "muito pequenos" sob f_0 , fornecendo evidência forte a favor de f_1 .

Resumo da Questão

Teste MP para $H_0 : f = f_0$ vs $H_1 : f = f_1$ (2 observações):
Estatística de Teste:

$$Q = -2 \sum_{i=1}^2 \log F_0(X_i) \stackrel{H_0}{\sim} \chi_4^2$$

Regra de Decisão:

Rejeita H_0 se $Q_{\text{cal}} > \chi_{4,1-\alpha}^2$

Propriedades:

- Generalização da Q4.8 para 2 observações
- Usa transformação via função de distribuição
- Estatística de teste tem distribuição χ^2 conhecida

9 Questão 4.10: Teste UMP para Variância (Normal com Média Zero)

Questão 4.10

Sejam X_1, \dots, X_n uma amostra aleatória de $X \sim N(0, \sigma^2)$, onde $\sigma^2 > 0$ é desconhecido.

Fixando $\alpha \in (0, 1)$, obtenha o teste Uniformemente Mais Poderoso (UMP) de nível α para:

$$H_0 : \sigma = \sigma_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \sigma < \sigma_0 \quad (197)$$

onde $\sigma_0 > 0$ é conhecido.

Solução Detalhada

Passo 1: Estratégia via LNP

Fixemos $\sigma_1 < \sigma_0$ e consideremos inicialmente o problema:

$$H_0 : \sigma = \sigma_0 \quad \text{vs} \quad H'_1 : \sigma = \sigma_1 \quad (198)$$

Aplicamos o LNP e depois mostramos que o teste resultante não depende da escolha de σ_1 , provando que é UMP.

Passo 2: Função de Verossimilhança

Para $X \sim N(0, \sigma^2)$, a densidade é:

$$f(x; \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\} \quad (199)$$

Para uma amostra $x = (x_1, \dots, x_n)$:

$$L(\sigma; x) = \prod_{j=1}^n (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{x_j^2}{2\sigma^2}\right\} \quad (200)$$

$$= (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^n x_j^2\right\} \quad (201)$$

Para $k = 0, 1$:

$$L_k = L(\sigma_k; x) = (2\pi\sigma_k^2)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{\sum x_j^2}{2\sigma_k^2}\right\} \quad (202)$$

Passo 3: Razão de Verossimilhanças

$$\frac{L_1}{L_0} = \frac{(2\pi\sigma_1^2)^{-n/2}}{(2\pi\sigma_0^2)^{-n/2}} \exp\left\{-\frac{\sum x_j^2}{2} \left(\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_0^2}\right)\right\} \quad (203)$$

$$= \left(\frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2}\right)^{n/2} \exp\left\{-\frac{\sum x_j^2}{2} \left(\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_0^2}\right)\right\} \quad (204)$$

Passo 4: Região Crítica

Pelo LNP, rejeitamos H_0 quando $\frac{L_1}{L_0} > k$:

$$\left(\frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2}\right)^{n/2} \exp\left\{-\frac{\sum x_j^2}{2} \left(\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_0^2}\right)\right\} > k \quad (205)$$

Aplicando logaritmo:

$$\frac{n}{2} \log\left(\frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2}\right) - \frac{\sum x_j^2}{2} \left(\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_0^2}\right) > \log k \quad (206)$$

Rearranjando:

$$-\frac{\sum x_j^2}{2} \left(\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_0^2}\right) \gtrless \log k - \frac{n}{2} \log\left(\frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2}\right) \quad (207)$$

Como $\sigma_1 < \sigma_0$, temos $\frac{1}{\sigma_1^2} > \frac{1}{\sigma_0^2}$, logo $\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_0^2} > 0$.

Multiplicando por -1 (inverte desigualdade):

Observações e Intuição

Pontos Importantes

- Teste Unilateral à Esquerda:** Este é um exemplo raro onde rejeitamos na CAUDA ESQUERDA da distribuição qui-quadrado. Isso acontece porque $H_1 : \sigma < \sigma_0$.
- Propriedade UMP:** O teste não depende da escolha específica de σ_1 , apenas de σ_0 . Isso o torna UMP.
- Relação com Variância Amostral:** Como $\mu = 0$ é conhecido, a variância amostral apropriada é:

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 \quad (221)$$

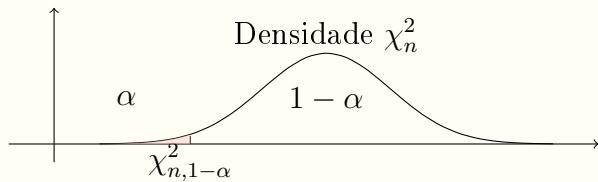
O teste pode ser reescrito como: rejeitar se $nS^2/\sigma_0^2 < \chi_{n,1-\alpha}^2$.

- Comparação com σ^2 Desconhecida:** Se μ fosse desconhecido, usaríamos:

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi_{n-1}^2 \quad (222)$$

onde $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum (X_i - \bar{X})^2$.

- Visualização da Região Crítica:**



Rejeitamos H_0 na região vermelha (cauda esquerda).

Exemplo Numérico

Suponha $n = 10$, $\sigma_0 = 2$, $\alpha = 0.05$ e observamos $\sum x_i^2 = 20$.

- Calcular estatística: $Q_{\text{cal}} = \frac{20}{4} = 5$
- Graus de liberdade: $n = 10$
- Valor crítico: $\chi_{10,0.05}^2 = 3.94$ (da tabela)
- Decisão: Como $5 > 3.94$, NÃO rejeitamos H_0

Interpretação: Não há evidência suficiente ao nível 5% para concluir que $\sigma < 2$. Se tivéssemos observado $\sum x_i^2 = 10$, então $Q = 2.5 < 3.94$ e rejeitariammos H_0 .

Resumo da Questão

Teste UMP para $H_0 : \sigma = \sigma_0$ vs $H_1 : \sigma < \sigma_0$:

Estatística de Teste:

$$Q = \frac{1}{\sigma_0^2} \sum_{i=1}^n X_i^2 \stackrel{H_0}{\sim} \chi_n^2$$

Regra de Decisão:

Rejeita H_0 se $Q_{\text{cal}} < \chi_{n,1-\alpha}^2$

Propriedades:

- Teste UMP de nível α
- Rejeição na cauda ESQUERDA
- Apropriado quando média é zero (conhecida)
- Não depende da escolha de σ_1

10 Questão 4.12: Teste UMP via Teorema de Karlin-Rubin

Questão 4.12

Sejam X_1, \dots, X_n uma amostra aleatória de $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ com $\mu \in \mathbb{R}$ desconhecida e $\sigma^2 \in \mathbb{R}^+$ conhecida.

Encontre o teste UMP para:

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \mu > \mu_0, \quad \text{de nível } \alpha \quad (223)$$

Solução Detalhada

Passo 1: Verificar Aplicabilidade do Teorema de Karlin-Rubin

O Teorema de Karlin-Rubin fornece testes UMP para hipóteses unilaterais quando a família de distribuições possui Razão de Verossimilhança Monótona (RVM). Precisamos verificar:

1. Existe uma estatística suficiente $T(X)$
2. A família de densidades induzidas por T tem RVM

Passo 2: Estatística Suficiente

Pelo Lema da Fatoração de Neyman, a verossimilhança pode ser escrita como:

$$L(\mu; x) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \right\} \quad (224)$$

$$= (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum x_i^2 \right\} \cdot \exp \left\{ \frac{\mu}{\sigma^2} \sum x_i - \frac{n\mu^2}{2\sigma^2} \right\} \quad (225)$$

Portanto:

$$T(X) = \sum_{i=1}^n X_i \quad (226)$$

é suficiente para μ (com σ^2 conhecido).

Passo 3: Densidade Induzida de T

Como $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ são independentes:

$$T = \sum_{i=1}^n X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2) \quad (227)$$

A densidade de T é:

$$f(t; \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n\sigma^2}} \exp \left\{ -\frac{(t - n\mu)^2}{2n\sigma^2} \right\} \quad (228)$$

Passo 4: Verificar RVM

Para $\mu^* > \mu$, calculamos:

$$\frac{f(t; \mu^*)}{f(t; \mu)} = \frac{\exp \left\{ -\frac{(t - n\mu^*)^2}{2n\sigma^2} \right\}}{\exp \left\{ -\frac{(t - n\mu)^2}{2n\sigma^2} \right\}} \quad (229)$$

$$= \exp \left\{ \frac{1}{2n\sigma^2} [(t - n\mu)^2 - (t - n\mu^*)^2] \right\} \quad (230)$$

$$= \exp \left\{ \frac{1}{2n\sigma^2} [t^2 - 2nt\mu + n^2\mu^2 - t^2 + 2nt\mu^* - n^2(\mu^*)^2] \right\} \quad (231)$$

$$= \exp \left\{ \frac{1}{2n\sigma^2} [2nt(\mu^* - \mu) + n^2(\mu^2 - (\mu^*)^2)] \right\} \quad (232)$$

$$= \exp \left\{ \frac{t(\mu^* - \mu)}{\sigma^2} + \frac{n(\mu^2 - (\mu^*)^2)}{2\sigma^2} \right\} \quad (233)$$

Observações e Intuição

Pontos Importantes

1. **Este é o Teste Z Clássico:** O teste UMP para esta situação é exatamente o teste Z que usamos rotineiramente!
2. **Teorema de Karlin-Rubin:** O TKR fornece uma maneira sistemática de construir testes UMP para hipóteses unilaterais quando há RVM.
3. **RVM na Normal:** A família Normal com média desconhecida e variância conhecida possui RVM em $\sum X_i$ (ou equivalentemente, em \bar{X}).
4. **Otimalidade:** Este teste é UMP, significando que entre TODOS os testes de nível α , este tem o maior poder para qualquer $\mu > \mu_0$.
5. **Comparação com Q4.4:**
 - Q4.4: Hipóteses simples ($\mu = \mu_1$) \Rightarrow Teste MP via LNP
 - Q4.12: Hipótese composta ($\mu > \mu_0$) \Rightarrow Teste UMP via TKR
 - Resultado: Mesmo teste Z!
6. **Extensões:**
 - Para $H_1 : \mu < \mu_0$: rejeitamos se $Z < -z_\alpha$
 - Para $H_1 : \mu \neq \mu_0$: rejeitamos se $|Z| > z_{\alpha/2}$ (teste bilateral)

Exemplo Numérico Completo

Suponha $n = 25$, $\sigma = 5$, $\mu_0 = 100$, $\alpha = 0.05$.

Observamos $\bar{x} = 103$.

1. Calcular estatística:

$$Z_{\text{cal}} = \frac{\sqrt{25}(103 - 100)}{5} = \frac{5 \cdot 3}{5} = 3 \quad (245)$$

2. Valor crítico: $z_{0.05} = 1.645$
3. Decisão: Como $3 > 1.645$, rejeitamos H_0
4. p-valor: $p = P(Z > 3) = 1 - \Phi(3) = 0.0013$

Interpretação: Há evidência muito forte ($p = 0.13\%$) de que $\mu > 100$.

Função Poder

A função poder deste teste é:

$$Q(\mu) = P_\mu[Z > z_\alpha] = P_\mu \left[\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{\sigma} > z_\alpha \right] \quad (246)$$

Para $\mu \neq \mu_0$:

$$Q(\mu) = 1 - \Phi \left(\frac{\sqrt{n}(\mu - \mu_0)}{\sigma} \right) \quad (247)$$

Esta função é:

Resumo da Questão

Teste UMP para $H_0 : \mu \leq \mu_0$ vs $H_1 : \mu > \mu_0$:
Estatística de Teste:

$$Z = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{\sigma} \stackrel{H_0}{\sim} N(0, 1)$$

Regra de Decisão:

Rejeita H_0 se $Z_{\text{cal}} > z_\alpha$

Propriedades:

- Teste UMP de nível α (pelo TKR)
- É o teste Z clássico
- Baseado em estatística suficiente com RVM
- Poder máximo entre todos os testes de nível α

Conclusão

Este documento apresentou soluções detalhadas e didáticas para todas as questões do Capítulo 4 sobre Teste de Hipóteses resolvidas em sala de aula.

Síntese dos Tópicos Abordados

1. **Q4.1 e Q4.3:** Exemplos introdutórios ilustrando regiões críticas, erros Tipo I e II, e função poder
2. **Q4.4, Q4.5, Q4.6, Q4.7:** Aplicações do Lema de Neyman-Pearson para distribuições paramétricas (Normal, Exponencial, Bernoulli, Poisson)
3. **Q4.8 e Q4.9:** Testes não-paramétricos e extensões multivariadas
4. **Q4.10 e Q4.12:** Testes UMP via Teorema de Karlin-Rubin para hipóteses compostas

Conexões Entre as Questões

- Q4.1 → Q4.3: Conceitos básicos → Função poder
- Q4.4 → Q4.12: MP (simples) → UMP (composta) para Normal
- Q4.6 ↔ Q4.7: Distribuições discretas (aleatorização)
- Q4.8 → Q4.9: Uma observação → Duas observações

Mensagens Principais

1. O **Lema de Neyman-Pearson** fornece testes MP para hipóteses simples
2. O **Teorema de Karlin-Rubin** estende para testes UMP quando há RVM
3. **Estatísticas suficientes** são fundamentais para testes ótimos
4. **Distribuições discretas** geralmente requerem aleatorização
5. **Testes clássicos** (Z , t , χ^2 , F) são casos especiais de princípios gerais

Recomendações Finais

Para dominar o material:

- Pratique derivar os testes do zero, não apenas aplicar fórmulas
- Entenda a intuição por trás de cada região crítica
- Compare diferentes testes para o mesmo problema
- Simule dados e verifique as propriedades dos testes
- Conecte os conceitos com aplicações práticas

Fim do Documento de Questões Resolvidas