UFABC

Universidade Federal do **ABC**

BIN0406: Introdução à Probabilidade e Estatística

Caderno

Professor: Dr. Thomas Logan Ritchie

Caio César Carvalho Ortega

RA 21038515

1 Prólogo

As anotações e considerações que se seguem foram realizadas de maneira autônoma e não são fruto de orientação por parte da universidade e/ou de qualquer membro do corpo docente. Foram realizadas para fins de estudo, sendo, portanto, reflexo de um esforço de cunho pessoal para melhor apreensão do conteúdo discutido em sala.

2 Análise combinatória

Início da aula de 24/09/2018

2.0.1 Exemplo 3

Sem admitir repetições, quantas placas são possíveis no Exemplo 1?

Figura 1: Placas

26	25	24				
			10	9	8	7

$= 78.624.000$

2.1 Permutações (embaralhamento, *"shuffling"*)

Quantas funções bijetoras há de $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ em $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$?

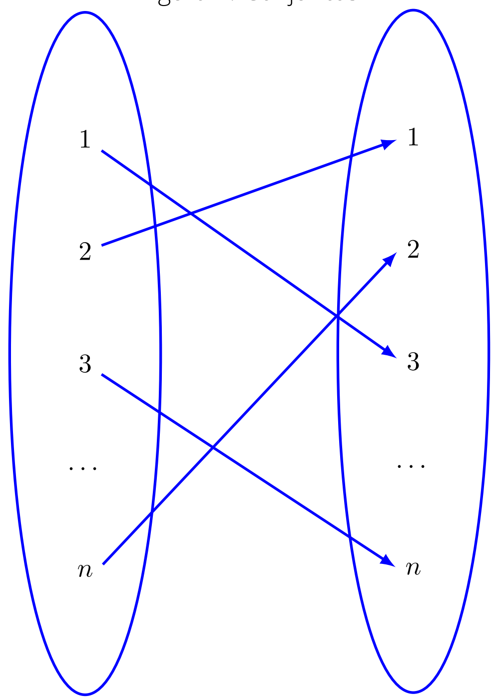
Ver Figura 2.

$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$

Resposta:

Se $n = 4$, então:

Figura 2: Conjuntos



$$\boxed{n^m}$$

$4^4 = 256$ funções

$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ funções bijetoras

2.1.1 Definição 1

Para cada número $n \in \mathbb{N}$, o número $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ denomina-se "n fatorial". Obs.: $0! \doteq 1$

2.1.2 Exemplo 4

Em uma turma com 6 homens e 4 mulheres, aplica-se uma prova e não ocorrem resultados iguais.

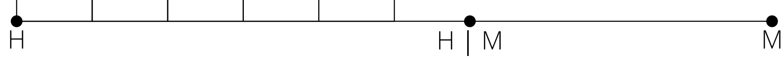
(a) Quantas classificações são possíveis?

Resposta: $10!$

Ver Figura 3.

Figura 3: Representação dos alunos e seus resultados

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4	7	1	10	$\cdots$					



$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 10!$

(b) Quantas classificações são possíveis, se homens e mulheres não concorrem entre si?

Resposta: $6!4!$

Homens: E_1: $6! = n_1$

Mulheres: E_2: $4!$

2.1.3 Exemplo 5

Em uma estante há 10 livros: 4 de matemática, 3 de química, 2 de história e 1 de português.

Figura 4: Livros na estante

M	M	M	M	Q	Q	Q	H	H	P

(a) Quantas disposições há?

Resposta: $10! = 3.628.100$

(b) Quantas disposições há, se os livros do mesmo assunto permanecerem juntos?

Desenvolvimento:

E_M: $4! = n_M$

E_Q: $4! = n_Q$

E_H: $4! = n_H$

E_P: $4! = n_P$

E_B: $4! = n_B$ "B" de box

Resposta:

$4! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1! = n_B \cdot n_M \cdot n_Q \cdot n_H \cdot n_P = 6.912$

2.1.4 Exemplo 6

Quantos anagramas possui a palavra **arara**?

Resposta:

$$\frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$$

2.2 Permutações com repetições

Com itens indistinguíveis

Se pudermos classificar n objetos em r grupos (categorias) com $n_1, n_2, \ldots, n_r$ elementos cada um (subentende-se $r = 4$ para o Exemplo 5, pois $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ e $r = 2$ no Exemplo 6, pois $2 + 3 = 5$), de tal sorte que os elementos de um mesmo grupo são indistinguíveis, então o número de permutações é $\dfrac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdot \cdots \cdot n_r!}$

3 Combinações e arranjos

De quantas maneiras podemos selecionar m dentre n balas numeradas de 1 a n?

(a) Considerando a ordem

Resposta: Pelo PBC:

Princípio Básico da Contagem

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-m+1) = \frac{n!}{n-m!} = An, m$$

Lê-se: "arranjo de n, n a m", extraindo m de n sem reposição

(b) Sem considerar a ordem

Resposta:

$$\frac{\frac{n!}{n-m!}}{m!} = \frac{n!}{(n-m)! \cdot m!} = \binom{1}{2} = Cn, m$$

Combinação de n, n a m

3.1 Definição 2

O número $\binom{n}{m} = \frac{n!}{n-m! \cdot m!}$, onde $n, m \in \mathbb{Z}_+$ e $m \leq n$, denomina-se "coeficiente binomial".

3.1.1 Exemplo 7

Dentre 5 mulheres e 7 homens, quantas comissões diferentes podem-se formar com duas mulheres e três homens?

Resposta:

E_H: $\binom{7}{3} = n_H$

E_M: $\binom{5}{2} = n_M$

$$n_H \cdot n_M = \binom{7}{3} \cdot \binom{5}{2} = 35 \cdot 10 = 350$$

E se dois homens se recusarem a trabalhar juntos?

Resposta:

$$n_H \cdot n_M = \left[\underbrace{\binom{7}{3}}_{n_H} \cdot \binom{5}{1}\right] \cdot \underbrace{\binom{5}{2}}_{n_M} = (35 - 5) \cdot 10 = 300$$

Início da aula de 26/09/2018

3.1.2 Exemplo 8

De quantas maneiras diferentes podemos arranjar linearmente $m = 3$ bolas pretas e $n = 5$ bolas brancas sem que duas bolas pretas pequenas fiquem lado a lado?

Desenvolvimento:

$$\frac{8!}{5! \cdot 3!} = 336$$

$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = 20$$

Resposta:

$$\binom{n+1}{m}$$

3.2 Proposição 1

$$\frac{n!}{(n-m)! \cdot m!} = \binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}$$ para todos $n, m \in \mathbb{N}$.

3.3 Triângulo de Pascal

$$
\begin{array}{c|cccc}
n & & & & \\
\hline
0 & \binom{0}{0} & & & \\
1 & \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & \\
2 & \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & \\
3 & \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} \\
\hline
 & 0 & 1 & 2 & 3 \\
\hline
 & \multicolumn{4}{c}{m}
\end{array}
$$

n								
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1
	0	1	2	3	4	5	6	7
	m							

Obs.: se plotarmos uma curva, ela terá a forma de uma curva gaussiana/curva de Gauss.

3.4 Teorma 2 (Binomial)

Se $a, b \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, então:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i} = \binom{n}{0} a^0 b^n + \binom{n}{1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{2} a^2 b^{n+1} + \dots$$

3.4.1 Exemplo 9

Resposta:

$a + b^4 = \binom{4}{0} a^0b^4 + \binom{4}{1} + a^1b^3 + \binom{4}{2} a^2b^2 + \binom{4}{3} a^3b^1 + \binom{4}{4} a^4b^0 = b^4 + 4ab^3 + 6a^2b^2 + 4a^36 + a^4$

3.4.2 Exemplo 10

Quantos subconjuntos tem um conjunto com n elementos? Quantos subconjuntos com m elementos tem um conjunto com n elementos?

Resposta:

$$\sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} 1^m \cdot 1^{n-m} = (1+1)^m = 2^m$$

4 Coeficientes e Teorema Multinomial

4.1 Definição 3

Se $n, n_1, n_2, \dots, n_r \in \mathbb{Z}_+$ e $r \in \mathbb{N}, r > 2$ forem t. q. $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$ o coeficiente multinomial.

$\binom{n}{n, n_2, \dots, n_r}$ defini-se por $\dfrac{n!}{n_1!n_2! \dots n_r!}$

4.2 Teorema 3 (Multinomial)

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_r)^n = \sum \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r} \cdot x_1^{n_1} \cdot x_2^{n_2} \cdot x_3^{n_3} \cdot \dots \cdot x_r^{n_r}$$

4.2.1 Exemplo 12

O Exemplo 11 será abordado depois

Enunciado suprimido. $(\overbrace{a}^{1}+\overbrace{b}^{1}+\overbrace{c}^{1})^3=?$

Resposta:

$$\binom{3}{3,0,0}a^3b^0c^0+\binom{3}{0,3,0}a^0b^3c^0+\binom{3}{0,0,3}c^3+\binom{3}{3,0,0}a^3b^0c^0+\binom{3}{2,1,0}a^2b^1c^0+\binom{3}{2,0,1}a^2b^0c^1+\binom{3}{1,2,0}ab^2+\binom{3}{0,2,1}b^2c+\binom{3}{1,0,2}ac^2+\binom{3}{0,1,2}bc^2+\binom{3}{1,1,1}abc$$

Qual a soma dos coeficientes multinomiais?

Resposta:

$(1+1+1)^3=3^3=27$

Faltei na aula de 08/10/2018

Motivo da falta: atraso.

Início da aula de 10/10/2018

5 Teoria Axiomática da Probabilidade

A teoria está centrada em três termos, que conformam o **Espaço de Probabilidade**:

- Espaço amostral (Ω)
- Espaço de eventos (ε)
- Medida de probabilidade ($\mathbb{P}$)

Também são adotadas as notações P, $\Pr$, $\mathcal{P}$ e $\wp$

Ao invés da letra omega (Ω), Ross (2010) usa a letra S, de *sample*, sendo sample amostra em inglês. Quanto a $\mathbb{P}$, um estudo matemático mais aprofundado requer se debruçar sobre a Teoria da Medida e Integração.

5.1 Espaço amostral

Ideia: um conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento aleatório. Símbolo: Ω, S.

$$\omega \in \Omega$$

5.1.1 Exemplo 1

Lançamento de uma moeda.

$\Omega = \{x, c\}, \{0, 1\}$

5.1.2 Exemplo 2

Lançamento de duas moedas.

$\Omega = \{0, 1\} \times \{0, 1\} = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$

5.1.3 Exemplo 3

Lançamento de n moedas.

$\{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \cdots \times \{0, 1\} = \{0, 1\}^n$

5.1.4 Exemplo 4

Lançamento de 3 dados.

$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^3$

5.1.5 Exemplo 5

Lançamento de infinitas moedas.

$$\Omega = \{0,1\} \times \{0,1\} \times \{0,1\} \times \cdots \times \{0,1\} \doteq \{0,1\}^{\mathbb{N}}$$

Obs.: acredito que os exemplos 4 e 7 foram suprimidos, provavelmente por questão de tempo

5.1.6 Exemplo 7

Tempo de vida (em horas) de uma lâmpada.

$$\Omega = [0 + 00] \ni t$$

5.1.7 Exemplo 8

Número aleatório.

$$\Omega[0,1]$$

5.2 Eventos

5.2.1 Definição 2

Definição preliminar

Um evento é um subconjunto de Ω.

5.2.2 Exemplo 9

Exemplo 9 $\Rightarrow$ Exemplo 1

$$\Omega = \{c,k\}, \mathbb{P}(\Omega) = \{\{c\},\{k\},0,\{c,k\}\}$$

$E = \{c\} \subset \{c, k\}$

$E = \subset \in \{c, k\}$

Preciso revisar isso aqui!

5.2.3 Exemplo 10

Moeda.

Exemplo 10 $\Rightarrow$ Exemplo 2

$\Omega = \{c, k\}^2$

$|\Omega| = 2^2 = 4$

$|\mathbb{P}(\Omega)| = 2^4 = 16$

$E = \{(k, k), (k, c), (c, k)\}$

$E^c = \{(c, c)\}$

Lê-se em português: "saiu pelo menos 1 coroa"

Lê-se em português: "não saiu coroa"

Faltei na aula de 17/10/2018

Motivo da falta: entrevista na PMSP/SMDU.

Início da aula de 22/10/2018

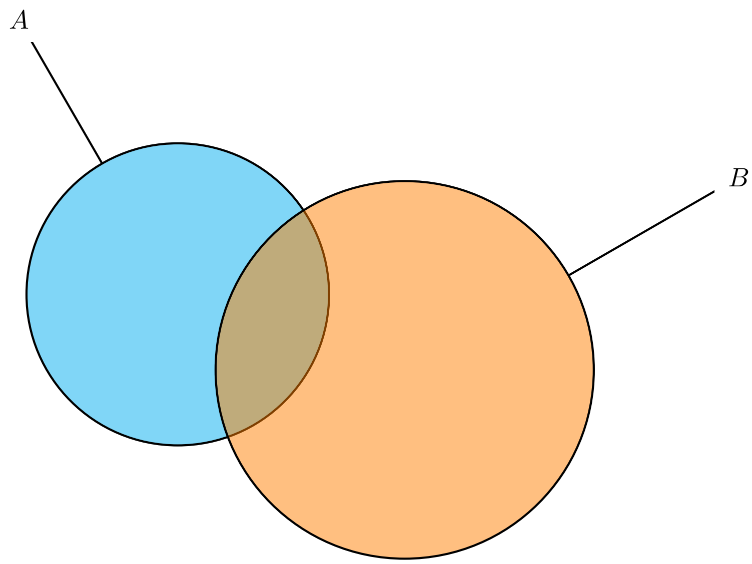
Prof. Thomas recorda a fórmula $P(A \bigcup B) = P(A) + P(B) - P(A \bigcap B)$, usada na última aula. Comenta que ela pode ser usada para áreas, afinal, a probabilidade é uma medida.

Prof. Thomas constrói ainda duas outras fórmulas, ampliando a lógica para quatro blocos:

$P(A \bigcup B \bigcup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \bigcap B) - P(A \bigcap C) - P(B \bigcap C) + P(A \bigcap B \bigcap C)$

$P(A \bigcup B \bigcup C \bigcup D) = P(A) + P(B) - P(C) + P(D) - P(A \bigcap B) - \cdots + P(A \bigcap B \bigcap C) + \cdots - P(A \bigcap B \bigcap C \bigcap D)$.

A fórmula inicial diz respeito à Proposição 5.



5.3 Proposição 6

Fórmula de Inclusão-Exclusão. Se $E_1, E_2, \ldots, E_n$ forem eventos em um espaço amostral Ω e $\mathbb{P}$ for uma medida de provabilidade (em ε), então $P(U_{i=1}^{n} E_i) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i) - \sum_{i_1 \leq i_2} P(E_{i_1} \bigcap E_{i_2}) + \sum_{i_1 \leq i_2 \leq i_3} P(E_{i_1} \bigcap E_{i_2} \bigcap E_{i_3}) - \cdots + (-1)^{n+1} P(n_{i=1}^{n} E_i)$

5.3.1 Exemplo 17

O exemplo não está completo

(b) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$P(\{i\}) = \frac{1}{6}, i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

$A = \{1, 2\}, B = \{1, 3\}, C = \{1, 4\}, D = \{1, 5\}$

5.4 Proposição 7

Desigualdades de Bonferroni. Primeira desigualdade de Bonferroni: subaditividade.

$$P(U_{i=1}^{n} E_i) \leq \sum_{i=1}^{n} P(E_i)$$

5.4.1 Definição 4

A tríade $(\Omega, \varepsilon, \mathbb{P})$ denomina-se **Espaço de Probabilidade**.

5.5 Espaços Dep. Equiprováveis

Resumo:

$\Omega = w_1, w_2, \ldots, w_n, |\Omega| = n$

$\varepsilon = P(\Omega), |\varepsilon| = 2^n$

$\underbrace{\mathbb{P}(\{w_i\}) = \dfrac{1}{n}, i = 1, 2, \ldots, n}_{\mathbb{P} = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{|E|}{n}}$

5.5.1 Exemplo 18

Jogam-se dois dados (honestos). Qual a probabilidade de a soma das faces observadas ser 8?

Resposta:

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2, |\Omega| = 36$

$\varepsilon = \mathcal{P}(\Omega); |\varepsilon| = 2^{36}$

$E\{(i, j) i + j = 8\} = \{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\}; |E| = 5$

$\mathcal{P}(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{5}{36} \approx 14\%$

5.5.2 Exemplo 21

Problema dos aniversários. Em uma sala há 23 pessoas. Qual a probabilidade de que ninguém aniversarie no mesmo dia?

Pode ser oportuno ler Morin (2016, p.85–86)

Resposta:

$|\Omega| = 365^{23}$

$|E| = 365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \cdots \cdot 343 = A365, 23$

$\mathcal{P}(E) = \frac{A365,23}{365^{23}} = \frac{\frac{365!}{342!}}{365^{23}} = 49,27\%$

A prova 1 versa sobre os capítulos e listas 1 e 2. Data prevista: 05/11/2018

Início da aula de 24/10/2018

Voltaremos ao Exemplo 19. A ideia foi explicar que não há implicações negativas ao "etiquetar" as bolinhas. Professor comenta também brevemente sobre o Teorema da Probabilidade Total. Devemos estudá-lo dentro de uma ou duas aulas.

5.5.3 Exemplo 19

Com reposição.

$$\overset{\overbrace{\circ\,\bullet\,\bullet}^{E_{bpp}}}{\frac{6}{11}\cdot\frac{5}{11}\cdot\frac{5}{11}}+\overset{\overbrace{\bullet\,\circ\,\bullet}^{E_{pbp}}}{\frac{5}{11}\cdot\frac{6}{11}\cdot\frac{5}{11}}+\overset{\overbrace{\bullet\,\bullet\,\circ}^{E_{ppb}}}{\frac{5}{11}\cdot\frac{5}{11}\cdot\frac{6}{11}}$$

$$= \frac{450}{113} \approx 33,81\%$$

$E = E_{bpp} \cup E_{pbp} \cup E_{ppb} \to \mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(E_{bpp}) + \mathcal{P}(E_{pbp}) + \mathcal{P}(E_{ppb}) = 3 \cdot \frac{150}{113} = \frac{450}{113}$

$|E_{bpp}| = 6 \cdot 5 \cdot 5; |E_{pbp}| = 5 \cdot 6 \cdot 5; |E_{ppb}| = 5 \cdot 5 \cdot 6 = 5 \cdot 5 \cdot 6$

$\mathcal{P}(E) = \frac{|E|}{|\Omega|}$

$|\Omega| = 11^3$

5.5.4 Exemplo 20

Urna: 20 brancas + 20 pretas. As bolas são extraídas sequencialmente e acondicionadas em 20 caixas com 2 bolas em cada caixa.

(a) Qual a probabilidade d eque todas as caixas tenham bolas da mesma cor?

Resposta:

$$|\Omega| = \frac{40!}{(2!)^{20}}$$

$E =$ todas as caixas com a mesma cor, *i.e.* 10 caixas brancas + 10 caixas pretas.

$\frac{20!}{10!10!}$embaralhamentos possíveis $\binom{20}{10}$

$$\mathcal{P}(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{20!}{10!^2} \cdot \frac{20!}{2!^{10}} \cdot \frac{20!}{2!^{10}} = \frac{40!}{2!^{30}}$$

$$= \frac{20!^3}{40!(10!)^2} = \text{aproximadamente } 1 \text{ chance em } 746.100$$

Preenchimento das caixas brancas/pretas: $\binom{20}{2} \cdot \binom{28}{2} \cdot \dots \cdot \binom{2}{2} = \frac{20!}{(2!)^{10}} = \frac{20!}{(2!)^{10}}$

Pelo PBC (vide Página 5): $|E| = \binom{20}{10} \cdot \frac{20!}{2!^{10}} \cdot \frac{20!}{2!^{10}}$

Lista de anotações

Referências

LIPSCHUTZ, S.; LIPSON, M. *Schaum's Outline of Probability*. Second edition. [S.l.]: McGraw-Hill Education, 2011. (Schaum's Outlines). ISBN 978-0-07-181658-8.

MORIN, D. J. *Probability: For the Enthusiastic Beginner*. [S.l.]: Createspace Independent Publishing Platform, 2016. ISBN 1523318678.

ROSS, S. *Probabilidade: um curso moderno com aplicações*. 8. ed. Porto Alegre: Bookman Editora, 2010. ISBN 978-85-7780-621-8.