



Universidade Federal do **ABC**

BIN0406: Introdução à Probabilidade e Estatística

Caderno

Professor: Dr. Thomas Logan Ritchie

Caio César Carvalho Ortega

RA 21038515

1 Prólogo

As anotações e considerações que se seguem foram realizadas de maneira autônoma e não são fruto de orientação por parte da universidade e/ou de qualquer membro do corpo docente. Foram realizadas para fins de estudo, sendo, portanto, reflexo de um esforço de cunho pessoal para melhor apreensão do conteúdo discutido em sala.

2 Análise combinatória

Início da aula de 24/09/2018

2.0.1 Exemplo 3

Sem admitir repetições, quantas placas são possíveis no Exemplo 1?

Figura 1: Placas

26	25	24					
			10	9	8	7	

$$= 78.624.000$$

2.1 Permutações (embaralhamento, “*shuffling*”)

Quantas funções bijetoras há de $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ em $\{1, 2, 3, \dots, n\}$?

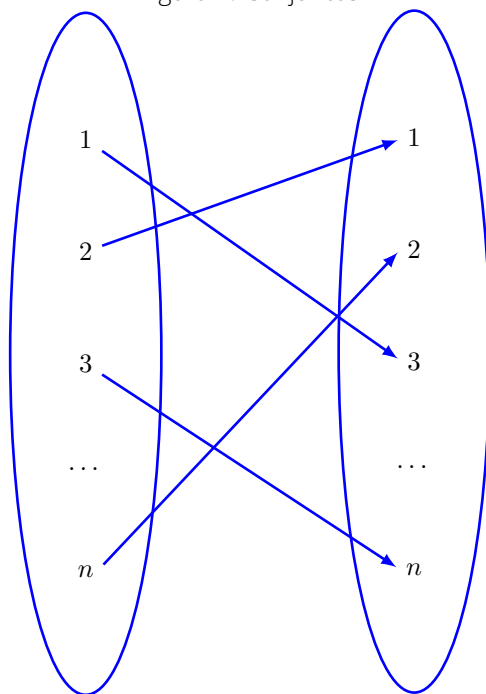
Ver Figura 2.

$$n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot (n - 3) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Resposta:

Se $n = 4$, então:

Figura 2: Conjuntos



$$n^m$$

$$4^4 = 256 \text{ funções}$$

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 \text{ funções bijetoras}$$

2.1.1 Definição 1

Para cada número $n \in \mathbb{N}$, o número $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$ denomina-se “n fatorial”.

Obs.: $0! \doteq 1$

2.1.2 Exemplo 4

Em uma turma com 6 homens e 4 mulheres, aplica-se uma prova e não ocorrem resultados iguais.

$$E_M: 4! = n_M$$

$$E_Q: 4! = n_Q$$

$$E_H: 4! = n_H$$

$$E_P: 4! = n_P$$

$$E_B: 4! = n_B$$

"B" de box

Resposta:

$$4! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1! = n_B \cdot n_M \cdot n_Q \cdot n_H \cdot n_P = 6.912$$

2.1.4 Exemplo 6

Quantos anagramas possui a palavra **arara**?

Resposta:

$$\frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$$

2.2 Permutações com repetições

Com itens indistinguíveis

Se pudermos classificar n objetos em r grupos (categorias) com n_1, n_2, \dots, n_r elementos cada um (subentende-se $r = 4$ para o Exemplo 5, pois $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ e $r = 2$ no Exemplo 6, pois $2 + 3 = 5$), de tal sorte que os elementos de um mesmo grupo são indistinguíveis, então o número de permutações é

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdot \dots \cdot n_r!}$$

3 Combinações e arranjos

De quantas maneiras podemos seleccionar m dentre n balas numeradas de 1 a n ?

(a) Considerando a ordem

Resposta: Pelo PBC:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-m+1) = \frac{n!}{n-m!} = A_{n,m}$$

Princípio Básico da Contagem

(b) Sem considerar a ordem

Resposta:

$$\frac{\frac{n!}{n-m!}}{m!} = \frac{n!}{(n-m)! \cdot m!} = \binom{n}{m} = C_{n,m}$$

Lê-se: "arranjo de n , n a m ", extraindo m de n sem reposição

Combinação de n , n a m

3.1 Definição 2

O número $\binom{n}{m} = \frac{n!}{n-m! \cdot m!}$, onde $n, m \in \mathbb{Z}_+$ e $m \leq n$, denomina-se "coeficiente binomial".

3.1.1 Exemplo 7

Dentre 5 mulheres e 7 homens, quantas comissões diferentes podem-se formar com duas mulheres e três homens?

Resposta:

$$E_H: \binom{7}{3} = n_H$$

$$E_M: \binom{5}{2} = n_M$$

$$n_H \cdot n_M = \binom{7}{3} \cdot \binom{5}{2} = 35 \cdot 10 = 350$$

E se dois homens se recusarem a trabalhar juntos?

Resposta:

$$n_H \cdot n_M = \left[\underbrace{\binom{7}{3}}_{n_H} \cdot \binom{5}{1} \right] \cdot \underbrace{\binom{5}{2}}_{n_M} = (35 - 5) \cdot 10 = 300$$

Início da aula de 26/09/2018

3.1.2 Exemplo 8

De quantas maneiras diferentes podemos arranjar linearmente $m = 3$ bolas pretas e $n = 5$ bolas brancas sem que duas bolas pretas pequenas fiquem lado a lado?

Desenvolvimento:

$$\frac{8!}{5! \cdot 3!} = 336$$

$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = 20$$

Resposta:

$$\binom{n+1}{m}$$

3.2 Proposição 1

$$\frac{n!}{(n-m)! \cdot m!} = \binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1} \text{ para todos } n, m \in \mathbb{N}.$$

3.3 Triângulo de Pascal

n				
0	$\binom{0}{0}$			
1	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$		
2	$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$	
3	$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$
	0	1	2	3
	m			

n							
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1
7	1	7	21	35	35	21	7
	0	1	2	3	4	5	6
	m						

Obs.: se plotarmos uma curva, ela terá a forma de uma curva gaussiana/curva de Gauss.

3.4 Teorma 2 (Binomial)

Se $a, b \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, então:

$$(a + b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i b^{n-i} = \binom{n}{0} a^0 b^n + \binom{n}{1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{2} a^2 b^{n-2} + \dots$$

3.4.1 Exemplo 9

Resposta:

$$a + b^4 = \binom{4}{0} a^0 b^4 + \binom{4}{1} a^1 b^3 + \binom{4}{2} a^2 b^2 + \binom{4}{3} a^3 b^1 + \binom{4}{4} a^4 b^0 = b^4 + 4ab^3 + 6a^2b^2 + 4a^3b + a^4$$

3.4.2 Exemplo 10

Quantos subconjuntos tem um conjunto com n elementos? Quantos subconjuntos com m elementos tem um conjunto com n elementos?

Resposta:

$$\sum_{m=0}^n \binom{n}{m} = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} 1^m \cdot 1^{n-m} = (1+1)^n = 2^n$$

4 Coeficientes e Teorema Multinomial

4.1 Definição 3

Se $n, n_1, n_2, \dots, n_r \in \mathbb{Z}_+$ e $r \in \mathbb{N}, r > 2$ forem t. q. $n_1 + n_2 + \dots + n_r = n$ o coeficiente multinomial.

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r} \text{ defini-se por } \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_r!}$$

4.2 Teorema 3 (Multinomial)

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_r)^n = \sum \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r} \cdot x_1^{n_1} \cdot x_2^{n_2} \cdot x_3^{n_3} \cdot \dots \cdot x_r^{n_r}$$

4.2.1 Exemplo 12

O Exemplo 11 será abordado depois

Enunciado suprimido. $(\overbrace{a}^1 + \overbrace{b}^1 + \overbrace{c}^1)^3 = ?$

Resposta:

$$\begin{aligned} & \binom{3}{3,0,0} a^3 b^0 c^0 + \binom{3}{0,3,0} a^0 b^3 c^0 + \binom{3}{0,0,3} c^3 + \binom{3}{3,0,0} a^3 b^0 c^0 + \binom{3}{2,1,0} a^2 b^1 c^0 + \\ & \binom{3}{2,0,1} a^2 b^0 c^1 + \binom{3}{1,2,0} a b^2 + \binom{3}{0,2,1} b^2 c + \binom{3}{1,0,2} a c^2 + \binom{3}{0,1,2} b c^2 + \\ & \binom{3}{1,1,1} a b c \end{aligned}$$

Qual a soma dos coeficientes multinomiais?

Resposta:

$$(1 + 1 + 1)^3 = 3^3 = 27$$

Faltei na aula de 08/10/2018

Motivo da falta: atraso.

Início da aula de 10/10/2018

5 Teoria Axiomática da Probabilidade

A teoria está centrada em três termos, que conformam o **Espaço de Probabilidade**:

- Espaço amostral (Ω)
- Espaço de eventos (ϵ)
- Medida de probabilidade (\mathbb{P})

Ao invés da letra omega (Ω), Ross (ROSS, 2010) usa a letra S , de *sample*, sendo

sample a amostra em inglês. Quanto a \mathbb{P} , um estudo matemático mais aprofundado requer se debruçar sobre a Teoria da Medida e Integração.

5.1 Espaço amostral

Ideia: um conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento aleatório.

Símbolo: Ω, S

$\omega \in \Omega$

5.1.1 Exemplo 1

Lançamento de uma moeda.

$$\Omega = \{x, c\}, \{0, 1\}$$

5.1.2 Exemplo 2

Lançamento de duas moedas.

$$\Omega = \{0, 1\} \times \{0, 1\} = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$$

5.1.3 Exemplo 3

Lançamento de n moedas.

$$\{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \cdots \times \{0, 1\} = \{0, 1\}^n$$

5.1.4 Exemplo 4

Lançamento de 3 dados.

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^3$$

5.1.5 Exemplo 5

Lançamento de infinitas moedas.

$$\Omega = \{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \cdots \times \{0, 1\} \doteq \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$$

Obs.: acredito que os exemplos 4 e 7 foram suprimidos, provavelmente por questão de tempo

5.1.6 Exemplo 7

Tempo de vida (em horas) de uma lâmpada.

$$\Omega = [0 + \infty] \ni t$$

5.1.7 Exemplo 8

Número aleatório.

$$\Omega[0, 1]$$

5.2 Eventos**5.2.1 Definição 2**

Definição preliminar

Um evento é um subconjunto de Ω .

5.2.2 Exemplo 9

Exemplo 9 \Rightarrow Exemplo 1

$$\Omega = \{c, k\}, \mathbb{P}(\Omega) = \{\{c\}, \{k\}, 0, \{c, k\}\}$$

$$E = \{c\} \subset \{c, k\}$$

$$E = \subset \subset \{c, k\}$$

Preciso re-
visar isso
aqui!

5.2.3 Exemplo 10

Moeda.

Exemplo 10 \Rightarrow Exemplo 2

$$\Omega = \{c, k\}^2$$

$$|\Omega| = 2^2 = 4$$

$$|\mathbb{P}(\Omega)| = 2^4 = 16$$

$$E = \{(k, k), (k, c), (c, k)\}$$

$$E^c = \{(c, c)\}$$

Lê-se em
português:
"saiu pelo
menos 1
coroa"

Faltei na aula de 17/10/2018

Motivo da falta: entrevista na PMSP/SMDU.

Lê-se em
português:
"não saiu
coroa"

Início da aula de 22/10/2018

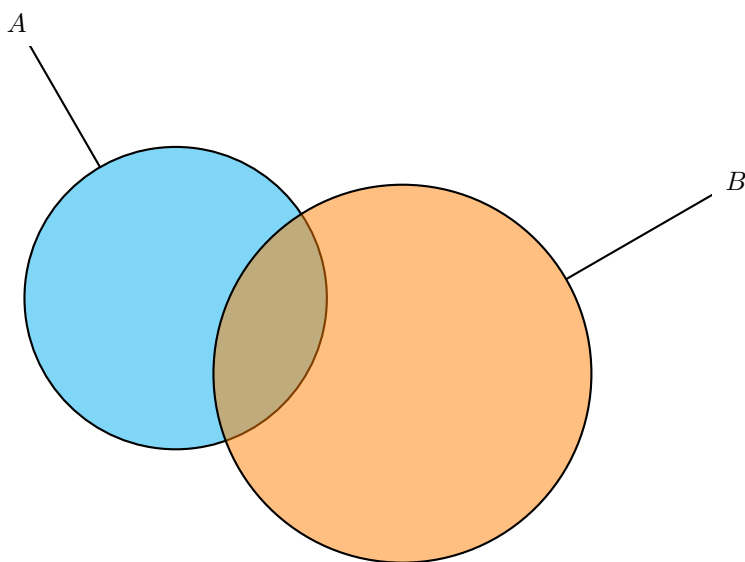
Prof. Thomas recorda a fórmula $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, usada na última aula. Comenta que ela pode ser usada para áreas, afinal, a probabilidade é uma medida.

Prof. Thomas constrói ainda duas outras fórmulas, ampliando a lógica para quatro blocos:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

$$P(A \cup B \cup C \cup D) = P(A) + P(B) + P(C) + P(D) - P(A \cap B) - \dots + P(A \cap B \cap C) + \dots - P(A \cap B \cap C \cap D).$$

A fórmula inicial diz respeito à Proposição 5.



5.3 Proposição 6

Fórmula de Inclusão-Exclusão. Se E_1, E_2, \dots, E_n forem eventos em um espaço amostral Ω e \mathbb{P} for uma medida de probabilidade (em ε), então $P(U_{i=1}^n E_i) = \sum_{i=1}^n P(E_i) - \sum_{i_1 \leq i_2} P(E_{i_1} \cap E_{i_2}) + \sum_{i_1 \leq i_2 \leq i_3} P(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap E_{i_3}) - \dots + (-1)^{n+1} P(\cap_{i=1}^n E_i)$

5.3.1 Exemplo 17

O exemplo não está completo

$$(b) \Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$P(\{i\}) = \frac{1}{6}, i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

$$A = \{1, 2\}, B = \{1, 3\}, C = \{1, 4\}, D = \{1, 5\}$$

5.4 Proposição 7

Desigualdades de Bonferroni. Primeira desigualdade de Bonferroni: sub-aditividade.

$$P(U_{i=1}^n E_i) \leq \sum_{i=1}^n P(E_i)$$

5.4.1 Definição 4

A tríade $(\Omega, \varepsilon, \mathbb{P})$ denomina-se **Espaço de Probabilidade**.

5.5 Espaços Dep. Equiprováveis

Resumo:

$$\Omega = w_1, w_2, \dots, w_n, |\Omega| = n$$

$$\varepsilon = P(\Omega), |\varepsilon| = 2^n$$

$$\underbrace{\mathbb{P}(\{w_i\}) = \frac{1}{n}, i = 1, 2, \dots, n}_{\mathbb{P} = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{|E|}{n}}$$

5.5.1 Exemplo 18

Jogam-se dois dados (honestos). Qual a probabilidade de a soma das faces observadas ser 8?

Resposta:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2, |\Omega| = 36$$

$$\varepsilon = \mathcal{P}(\Omega); |\varepsilon| = 2^{36}$$

$$E\{(i, j) \mid i + j = 8\} = \{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\}; |E| = 5$$

$$\mathcal{P}(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{5}{36} \approx 14\%$$

5.5.2 Exemplo 21

Problema dos aniversários. Em uma sala há 23 pessoas. Qual a probabilidade de que ninguém aniversarie no mesmo dia?

Pode ser oportuno ler Morin (2016, p.85–86)

Resposta:

$$|\Omega| = 365^{23}$$

$$|E| = 365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \dots \cdot 343 = A_{365, 23}$$

$$\mathcal{P}(E) = \frac{A_{365, 23}}{365^{23}} = \frac{365!}{342!} = 49,27\%$$

A prova 1 versa sobre os capítulos e listas 1 e 2. Data prevista: 05/11/2018

Início da aula de 24/10/2018

Voltaremos ao Exemplo 19. A ideia foi explicar que não há implicações negativas ao “etiquetar” as bolinhas. Professor comenta também brevemente sobre o Teorema da Probabilidade Total. Devemos estudá-lo dentro de uma ou duas aulas.

5.5.3 Exemplo 19

Com reposição.

$$\begin{array}{ccc} E_{b_{pp}} & E_{p_{bp}} & E_{p_{pb}} \\ \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array} & \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array} & \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array} \\ \frac{6}{11} \cdot \frac{5}{11} \cdot \frac{5}{11} + \frac{5}{11} \cdot \frac{6}{11} \cdot \frac{5}{11} + \frac{5}{11} \cdot \frac{5}{11} \cdot \frac{6}{11} \\ = \frac{450}{113} \approx 33,81\% \end{array}$$

$$E = E_{b_{pp}} \cup E_{p_{bp}} \cup E_{p_{pb}} \rightarrow \mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(E_{b_{pp}}) + \mathcal{P}(E_{p_{bp}}) + \mathcal{P}(E_{p_{pb}}) = 3 \cdot \frac{150}{113} = \frac{450}{113}$$

$$|E_{b_{pp}}| = 6 \cdot 5 \cdot 5; |E_{p_{bp}}| = 5 \cdot 6 \cdot 5; |E_{p_{pb}}| = 5 \cdot 5 \cdot 6 = 5 \cdot 5 \cdot 6$$

$$\mathcal{P}(E) = \frac{|E|}{|\Omega|}$$

$$|\Omega| = 11^3$$

5.5.4 Exemplo 20

Urna: 20 brancas + 20 pretas. As bolas são extraídas sequencialmente e acondicionadas em 20 caixas com 2 bolas em cada caixa.

(a) Qual a probabilidade de que todas as caixas tenham bolas da mesma cor?

Resposta:

$$|\Omega| = \frac{40!}{(2!)^{20}}$$

E = todas as caixas com a mesma cor, *i.e.* 10 caixas brancas + 10 caixas pretas.

$$\frac{20!}{10!10!} \text{ embaralhamentos possíveis} \quad \binom{20}{10}$$

$$\mathcal{P}(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{20!}{10!^2} \cdot \frac{20!}{2!^{10}} \cdot \frac{20!}{2!^{10}} = \frac{40!}{2!^{30}}$$

$$= \frac{20!^3}{40!(10!)^2} = \text{aproximadamente 1 chance em 746.100}$$


$$\text{Preenchimento das caixas brancas/pretas: } \binom{20}{2} \cdot \binom{18}{2} \cdots \binom{2}{2} = \frac{20!}{(2!)^{10}} = \frac{20!}{(2!)^{10}}$$

$$\text{Pelo PBC (vide Página 5): } |E| = \binom{20}{10} \cdot \frac{20!}{2!^{10}} \cdot \frac{20!}{2!^{10}}$$

Lista de anotações

 Início da aula de 24/09/2018	1
 Obs.: $0! \doteq 1$	2

■ "B" de box	4
■ Com itens indistinguíveis	4
■ Princípio Básico da Contagem	5
■ Lê-se: "arranjo de n, n a m ", extraíndo m de n sem reposição	5
■ Combinação de n, n a m	5
■ Início da aula de 26/09/2018	6
■ Obs.: se plotarmos uma curva, ela terá a forma de uma curva gaussiana/curva de Gauss.	7
■ O Exemplo 11 será abordado depois	9
■ Faltei na aula de 08/10/2018	9
■ Início da aula de 10/10/2018	9
■ Obs.: acredito que os exemplos 4 e 7 foram suprimidos, provavelmente por questão de tempo	11
■ Definição preliminar	11
■ Exemplo 9 \Rightarrow Exemplo 1	11
■ Preciso revisar isso aqui!	12
■ Exemplo 10 \Rightarrow Exemplo 2	12
■ Lê-se em português: "saiu pelo menos 1 coroa"	12
■ Lê-se em português: "não saiu coroa"	12
■ Faltei na aula de 17/10/2018	12
■ Início da aula de 22/10/2018	12
■ O exemplo não está completo	13
■ Pode ser oportuno ler Morin (2016, p.85–86)	15
■ A prova 1 versa sobre os capítulos e listas 1 e 2. Data prevista: 05/11/2018	15

 Início da aula de 24/10/2018	15
--	----

Referências

LIPSCHUTZ, S.; LIPSON, M. *Schaum's Outline of Probability*. Second edition. [S.l.]: McGraw-Hill Education, 2011. (Schaum's Outlines). ISBN 978-0-07-181658-8.

MORIN, D. J. *Probability: For the Enthusiastic Beginner*. [S.l.]: Createspace Independent Publishing Platform, 2016. ISBN 1523318678.

ROSS, S. *Probabilidade: um curso moderno com aplicações*. 8. ed. Porto Alegre: Bookman Editora, 2010. ISBN 978-85-7780-621-8.