



---

Universidade Federal do **ABC**

# BIN0406: Introdução à Probabilidade e Estatística

**Caderno**

Professor: Dr. Thomas Logan Ritchie

**Caio César Carvalho Ortega**

RA 21038515

## 1 Prólogo

As anotações e considerações que se seguem foram realizadas de maneira autônoma e não são fruto de orientação por parte da universidade e/ou de qualquer membro do corpo docente. Foram realizadas para fins de estudo, sendo, portanto, reflexo de um esforço de cunho pessoal para melhor apreensão do conteúdo discutido em sala.

## 2 Análise combinatória

Início da aula de 24/09/2018

### 2.0.1 Exemplo 3

Sem admitir repetições, quantas placas são possíveis no Exemplo 1?

Figura 1: Placas

26	25	24				
			10	9	8	7

$$= 78.624.000$$

### 2.1 Permutações (embaralhamento, “shuffling”)

Quantas funções bijetoras há de  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$  em  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ ?

Ver Figura 2.

$$n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot (n - 3) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

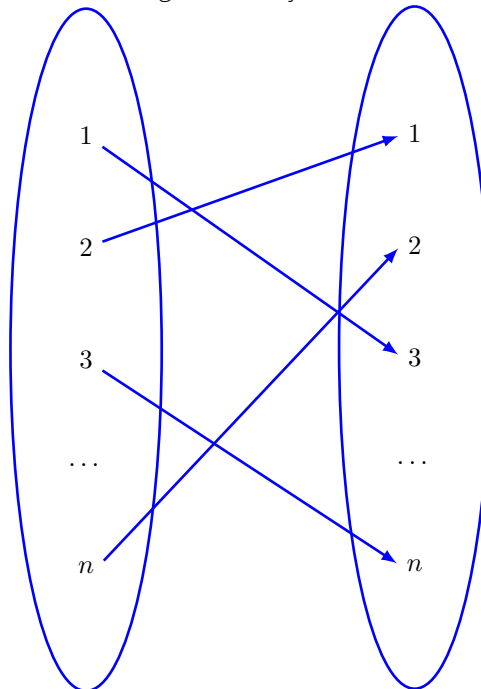
Resposta:

Se  $n = 4$ , então:

$$4^4 = 256 \text{ funções}$$

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 \text{ funções bijetoras}$$

Figura 2: Conjuntos



$$n^m$$

### 2.1.1 Definição 1

Para cada número  $n \in \mathbb{N}$ , o número  $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$  denomina-se “n fatorial”.

Obs.:  $0! \doteq 1$

### 2.1.2 Exemplo 4

Em uma turma com 6 homens e 4 mulheres, aplica-se uma prova e não ocorrem resultados iguais.

(a) Quantas classificações são possíveis?

Resposta:  $10!$

Ver Figura 3.

$$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 10!$$

Figura 3: Representação dos alunos e seus resultados

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4	7	1	10	...					

(b) Quantas classificações são possíveis, se homens e mulheres não concorrem entre si?

Resposta:  $6!4!$

Homens:  $E_1: 6! = n_1$

Mulheres:  $E_2: 4!$

### 2.1.3 Exemplo 5

Em uma estante há 10 livros: 4 de matemática, 3 de química, 2 de história e 1 de português.

Figura 4: Livros na estante

M	M	M	M	Q	Q	Q	H	H	P
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

(a) Quantas disposições há?

Resposta:  $10! = 3.628.100$

(b) Quantas disposições há, se os livros do mesmo assunto permanecerem juntos?

Desenvolvimento:

$E_M: 4! = n_M$

$E_Q: 3! = n_Q$

$E_H: 2! = n_H$

$E_P: 1! = n_P$

$E_B: 4! = n_B$

"B" de box

Resposta:

$$4! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1! = n_B \cdot n_M \cdot n_Q \cdot n_H \cdot n_P = 6.912$$

### 2.1.4 Exemplo 6

Quantos anagramas possui a palavra **arara**?

Resposta:

$$\frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$$

## 2.2 Permutações com repetições

Com itens indistinguíveis

Se pudermos classificar  $n$  objetos em  $r$  grupos (categorias) com  $n_1, n_2, \dots, n_r$  elementos cada um (subentende-se  $r = 4$  para o Exemplo 5, pois  $4 + 3 + 2 + 1 = 10$  e  $r = 2$  no Exemplo 6, pois  $2 + 3 = 5$ ), de tal sorte que os elementos de um mesmo grupo são indistinguíveis, então o número de permutações é

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdot \dots \cdot n_r!}$$

## 3 Combinações e arranjos

De quantas maneiras podemos selecionar  $m$  dentre  $n$  balas numeradas de 1 a  $n$ ?

(a) Considerando a ordem

Resposta: Pelo PBC:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-m+1) = \frac{n!}{n-m!} = A_{n,m}$$

Princípio Básico da Contagem

(b) Sem considerar a ordem

Resposta:

$$\frac{\frac{n!}{n-m!}}{m!} = \frac{n!}{(n-m)! \cdot m!} = \binom{n}{m} = C_{n,m}$$

Lê-se: "arranjo de  $n$ ,  $n$  a  $m$ ", extraindo  $m$  de  $n$  sem reposição

Combinação de  $n$ ,  $n$  a  $m$

### 3.1 Definição 2

O número  $\binom{n}{m} = \frac{n!}{n-m! \cdot m!}$ , onde  $n, m \in \mathbb{Z}_+$  e  $m \leq n$ , denomina-se “coeficiente binomial”.

#### 3.1.1 Exemplo 7

Dentre 5 mulheres e 7 homens, quantas comissões diferentes podem-se formar com duas mulheres e três homens?

Resposta:

$$E_H: \binom{7}{3} = n_H$$

$$E_M: \binom{5}{2} = n_M$$

$$n_H \cdot n_M = \binom{7}{3} \cdot \binom{5}{2} = 35 \cdot 10 = 350$$

E se dois homens se recusarem a trabalhar juntos?

Resposta:

$$n_H \cdot n_M = \left[ \underbrace{\binom{7}{3}}_{n_H} \cdot \binom{5}{1} \right] \cdot \underbrace{\binom{5}{2}}_{n_M} = (35 - 5) \cdot 10 = 300$$

**Início da aula de 26/09/2018**

#### 3.1.2 Exemplo 8

De quantas maneiras diferentes podemos arranjar linearmente  $m = 3$  bolas pretas e  $n = 5$  bolas brancas sem que duas bolas pretas pequenas fiquem lado a lado?

Desenvolvimento:

$$\frac{8!}{5! \cdot 3!} = 336$$

$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = 20$$

Resposta:

$$\binom{n+1}{m}$$

### 3.2 Proposição 1

$$\frac{n!}{(n-m)! \cdot m!} = \binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1} \text{ para todos } n, m \in \mathbb{N}.$$

### 3.3 Triângulo de Pascal

$n$				
0	$\binom{0}{0}$			
1	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$		
2	$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$	
3	$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$
	0	1	2	3
	$m$			

$n$								
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1
	0	1	2	3	4	5	6	7
	$m$							

Obs.: se plotarmos uma curva, ela terá a forma de uma curva gaussiana/curva de Gauss.

### 3.4 Teorma 2 (Binomial)

Se  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $n \in \mathbb{N}$ , então:

$$(a + b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i b^{n-i} = \binom{n}{0} a^0 b^n + \binom{n}{1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{2} a^2 b^{n-2} + \dots$$

#### 3.4.1 Exemplo 9

Resposta:

$$a + b^4 = \binom{4}{0} a^0 b^4 + \binom{4}{1} a^1 b^3 + \binom{4}{2} a^2 b^2 + \binom{4}{3} a^3 b^1 + \binom{4}{4} a^4 b^0 = b^4 + 4ab^3 + 6a^2b^2 + 4a^3b + a^4$$

#### 3.4.2 Exemplo 10

Quantos subconjuntos tem um conjunto com  $n$  elementos? Quantos subconjuntos com  $m$  elementos tem um conjunto com  $n$  elementos?

Resposta:

$$\sum_{m=0}^n \binom{n}{m} = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} 1^m \cdot 1^{n-m} = (1 + 1)^n = 2^n$$

## 4 Coeficientes e Teorema Multinomial

### 4.1 Definição 3

Se  $n, n_1, n_2, \dots, n_r \in \mathbb{Z}_+$  e  $r \in \mathbb{N}, r > 2$  forem t. q.  $n_1 + n_2 + \dots + n_r = n$  o coeficiente multinomial.

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r} \text{ define-se por } \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_r!}$$



## 4.2 Teorema 3 (Multinomial)

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_r)^n = \sum \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r} \cdot x_1^{n_1} \cdot x_2^{n_2} \cdot x_3^{n_3} \cdot \dots \cdot x_r^{n_r}$$

### 4.2.1 Exemplo 12

O Exemplo 11 será abordado depois

Enunciado suprimido.  $(\overbrace{a}^1 + \overbrace{b}^1 + \overbrace{c}^1)^3 = ?$

Resposta:

$$\begin{aligned} & \binom{3}{3, 0, 0} a^3 b^0 c^0 + \binom{3}{0, 3, 0} a^0 b^3 c^0 + \binom{3}{0, 0, 3} c^3 + \binom{3}{3, 0, 0} a^3 b^0 c^0 + \binom{3}{2, 1, 0} a^2 b^1 c^0 + \\ & \binom{3}{2, 0, 1} a^2 b^0 c^1 + \binom{3}{1, 2, 0} a b^2 + \binom{3}{0, 2, 1} b^2 c + \binom{3}{1, 0, 2} a c^2 + \binom{3}{0, 1, 2} b c^2 + \\ & \binom{3}{1, 1, 1} a b c \end{aligned}$$

Qual a soma dos coeficientes multinomiais?

Resposta:

$$(1 + 1 + 1)^3 = 3^3 = 27$$

**Faltei na aula de 08/10/2018**

Motivo da falta: atraso.

**Início da aula de 10/10/2018**

## 5 Teoria Axiomática da Probabilidade

A teoria está centrada em três termos, que conformam o **Espaço de Probabilidade**:

- Espaço amostral ( $\Omega$ )
- Espaço de eventos ( $\varepsilon$ )

- Medida de probabilidade ( $\mathbb{P}$ )

Ao invés da letra omega ( $\Omega$ ), Ross (2010) usa a letra  $S$ , de *sample*, sendo sample amostra em inglês. Quanto a  $\mathbb{P}$ , um estudo matemático mais aprofundado requer se debruçar sobre a Teoria da Medida e Integração.

Também são adotadas as notações  $P$ ,  $\text{Pr}$ ,  $\mathcal{P}$  e  $\wp$

## 5.1 Espaço amostral

Ideia: um conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento aleatório. Símbolo:  $\Omega$ ,  $S$ .

$$\omega \in \Omega$$

### 5.1.1 Exemplo 1

Lançamento de uma moeda.

$$\Omega = \{x, c\}, \{0, 1\}$$

### 5.1.2 Exemplo 2

Lançamento de duas moedas.

$$\Omega = \{0, 1\} \times \{0, 1\} = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$$

### 5.1.3 Exemplo 3

Lançamento de  $n$  moedas.

$$\{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \cdots \times \{0, 1\} = \{0, 1\}^n$$

### 5.1.4 Exemplo 4

Lançamento de 3 dados.

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^3$$

**5.1.5 Exemplo 5**

Lançamento de infinitas moedas.

$$\Omega = \{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \cdots \times \{0, 1\} \doteq \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$$

Obs.: acredito que os exemplos 4 e 7 foram suprimidos, provavelmente por questão de tempo

**5.1.6 Exemplo 7**

Tempo de vida (em horas) de uma lâmpada.

$$\Omega = [0 + \infty) \ni t$$

**5.1.7 Exemplo 8**

Número aleatório.

$$\Omega[0, 1]$$

**5.2 Eventos****5.2.1 Definição 2**

Definição preliminar

Um evento é um subconjunto de  $\Omega$ .

**5.2.2 Exemplo 9**

Exemplo 9  $\Rightarrow$  Exemplo 1

$$\Omega = \{c, k\}, \mathbb{P}(\Omega) = \{\{c\}, \{k\}, \emptyset, \{c, k\}\}$$

$$E = \{c\} \subset \{c, k\}$$

$$E = \{c\} \subset \{c, k\}$$

Preciso  
revisar isso  
aqui!

## 5.2.3 Exemplo 10

Moeda.

Exemplo 10  $\Rightarrow$  Exemplo 2

$$\Omega = \{c, k\}^2$$

$$|\Omega| = 2^2 = 4$$

$$|\mathbb{P}(\Omega)| = 2^4 = 16$$

$$E = \{(k, k), (k, c), (c, k)\}$$

$$E^c = \{(c, c)\}$$

Faltei na aula de 17/10/2018

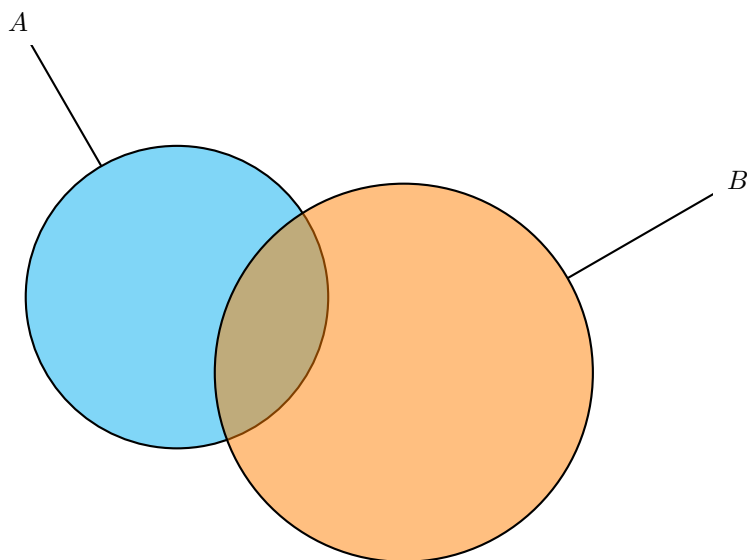
Motivo da falta: entrevista na PMSP/SMDU.

Início da aula de 22/10/2018

Lê-se em português:  
"saiu pelo menos 1 coroa"

Lê-se em português:  
"não saiu coroa"

Prof. Thomas recorda a fórmula  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ , usada na última aula. Comenta que ela pode ser usada para áreas, afinal, a probabilidade é uma medida.



Prof. Thomas constrói ainda duas outras fórmulas, ampliando a lógica para quatro blocos:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

$$P(A \cup B \cup C \cup D) = P(A) + P(B) + P(C) + P(D) - P(A \cap B) - \dots + P(A \cap B \cap C) + \dots - P(A \cap B \cap C \cap D).$$

A fórmula inicial diz respeito à Proposição 5.

### 5.3 Proposição 6

**Fórmula de Inclusão-Exclusão.** Se  $E_1, E_2, \dots, E_n$  forem eventos em um espaço amostral  $\Omega$  e  $\mathbb{P}$  for uma medida de provabilidade (em  $\varepsilon$ ), então  $P(U_{i=1}^n E_i) = \sum_{i=1}^n P(E_i) - \sum_{i_1 \leq i_2} P(E_{i_1} \cap E_{i_2}) + \sum_{i_1 \leq i_2 \leq i_3} P(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap E_{i_3}) - \dots + (-1)^{n+1} P(n_{i=1}^n E_i)$

#### 5.3.1 Exemplo 17

O exemplo não está completo

$$(b) \Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$P(\{i\}) = \frac{1}{6}, i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

$$A = \{1, 2\}, B = \{1, 3\}, C = \{1, 4\}, D = \{1, 5\}$$

### 5.4 Proposição 7

**Desigualdades de Bonferroni.** Primeira desigualdade de Bonferroni: sub-aditividade.

$$P(U_{i=1}^n E_i) \leq \sum_{i=1}^n P(E_i)$$

#### 5.4.1 Definição 4

A tríade  $(\Omega, \varepsilon, \mathbb{P})$  denomina-se **Espaço de Probabilidade**.

## 5.5 Espaços Dep. Equiprováveis

Resumo:

$$\Omega = w_1, w_2, \dots, w_n, |\Omega| = n$$

$$\varepsilon = P(\Omega), |\varepsilon| = 2^n$$

$$\underbrace{\mathbb{P}(\{w_i\}) = \frac{1}{n}, i = 1, 2, \dots, n}_{\mathbb{P} = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{|E|}{n}}$$

### 5.5.1 Exemplo 18

Jogam-se dois dados (honestos). Qual a probabilidade de a soma das faces observadas ser 8?

Resposta:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2, |\Omega| = 36$$

$$\varepsilon = \mathcal{P}(\Omega); |\varepsilon| = 2^{36}$$

$$E\{(i, j) | i + j = 8\} = \{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\}; |E| = 5$$

$$\mathcal{P}(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{5}{36} \approx 14\%$$

### 5.5.2 Exemplo 21

Problema dos aniversários. Em uma sala há 23 pessoas. Qual a probabilidade de que ninguém aniversarie no mesmo dia?

Pode ser oportuno ler Morin (2016, p.85-86)

Resposta:

$$|\Omega| = 365^{23}$$

$$|E| = 365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \dots \cdot 343 = A_{365, 23}$$

$$\mathcal{P}(E) = \frac{A_{365, 23}}{365^{23}} = \frac{365!}{342!} = 49, 27\%$$

A prova 1 versa sobre os capítulos e listas 1 e 2. Data prevista: 05/11/2018

**Início da aula de 24/10/2018**

Voltaremos ao Exemplo 19. A ideia foi explicar que não há implicações negativas ao “etiquetar” as bolinhas. Professor comenta também brevemente sobre o Teorema da Probabilidade Total. Devemos estudá-lo dentro de uma ou duas aulas.

### 5.5.3 Exemplo 19

Com reposição.

$$\begin{aligned}
 & \frac{6}{11} \cdot \frac{5}{11} \cdot \frac{5}{11} + \frac{5}{11} \cdot \frac{6}{11} \cdot \frac{5}{11} + \frac{5}{11} \cdot \frac{5}{11} \cdot \frac{6}{11} \\
 &= \frac{450}{113} \approx 33,81\%
 \end{aligned}$$

$$E = E_{bpp} \cup E_{pbp} \cup E_{ppb} \rightarrow \mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(E_{bpp}) + \mathcal{P}(E_{pbp}) + \mathcal{P}(E_{ppb}) = 3 \cdot \frac{150}{113} = \frac{450}{113}$$

$$|E_{bpp}| = 6 \cdot 5 \cdot 5; |E_{pbp}| = 5 \cdot 6 \cdot 5; |E_{ppb}| = 5 \cdot 5 \cdot 6 = 5 \cdot 5 \cdot 6$$

$$\mathcal{P}(E) = \frac{|E|}{|\Omega|}$$

$$|\Omega| = 11^3$$

### 5.5.4 Exemplo 20

Urna: 20 brancas + 20 pretas. As bolas são extraídas sequencialmente e acondicionadas em 20 caixas com 2 bolas em cada caixa.

(a) Qual a probabilidade de que todas as caixas tenham bolas da mesma cor?

Resposta:

$$|\Omega| = \frac{40!}{(2!)^{20}}$$

$E$  = todas as caixas com a mesma cor, *i.e.* 10 caixas brancas + 10 caixas pretas.

$$\frac{20!}{10!10!} \text{ embaralhamentos possíveis} \qquad \binom{20}{10}$$

$$\mathcal{P}(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{20!}{10!^2} \cdot \frac{20!}{2!^{10}} \cdot \frac{20!}{2!^{10}} = \frac{40!}{2!^{30}}$$

$$= \frac{20!^3}{40!(10!)^2} = \text{aproximadamente 1 chance em 746.100}$$

Preenchimento das caixas brancas/pretas:  $\binom{20}{2} \cdot \binom{28}{2} \cdots \binom{2}{2} = \frac{20!}{(2!)^{10}} =$

Pelo PBC (vide Página 4):  $|E| = \binom{20}{10} \cdot \frac{20!}{2!^{10}} \cdot \frac{20!}{2!^{10}}$

Início da aula de 31/10/2018

## 5.6 Probabilidade condicional

Thomas comenta que a ideia da probabilidade condicional já estava sendo discutida informalmente por nós.

Falta figura

Se possuímos interesse na parcela do evento  $A$  que está contida em  $B$ , temos:

$$\mathcal{P}(A|B) = \frac{\mathcal{P}(A \cap B)}{\mathcal{P}(B) > 0}$$

### 5.6.1 Definição 1

Seja  $(\Omega, \epsilon, \mathcal{P})$  um espaço de probabilidade. Se  $A, B \in \epsilon$  e  $\mathcal{P}(B) > 0$ ,  $\mathcal{P}(A|B)$  a probabilidade (condicional) de  $A$  dado  $B$ :

$$\mathcal{P}(A|B) =$$

$$\frac{\mathcal{P}(A \cap B)}{\mathcal{P}(B)}$$

Lê-se probabilidade de  $A$  dado  $B$

Em espaços equiprováveis:

$$\mathcal{P}(A|B) = \frac{\mathcal{P}(A \cap B)}{\mathcal{P}} = \frac{\frac{|A \cap B|}{|\Omega|}}{\frac{|B|}{|\Omega|}} = \frac{|A \cap B|}{|B|}$$



Em  $\frac{A \cap B}{|B|}$ ,  $A$  é a quantidade de casos favoráveis após a informação, enquanto  $|B|$  é a quantidade de casos após ser dada a informação

### 5.6.2 Exemplo 1

Uma moeda honesta é lançada três vezes, qual a probabilidade de observarem-se mais caras, sabendo-se que deu cara no primeiro lançamento?

Resposta:

$$\Omega = \{(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\} = \{0, 1\}^3$$

$$A: \text{mais caras do que coroas} = \{(0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$$

$$B: \text{cara no primeiro lançamento} = \{(1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$$

$$\text{Portanto } \mathcal{P}(A|B) = \frac{3}{4} = 75\%$$

### 5.6.3 Exemplo 2

Urna com 10 bolas brancas, 10 bolas pretas. Foram 10 as bolas extraídas sequencialmente sem reposição. Observam-se 7 bolas brancas e 3 pretas. Qual a probabilidade de a primeira bola extraída ter sido branca?

$$\Omega = A_{20,10} = 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot \dots \cdot 11 = \frac{20!}{10!}$$

$B$ : sete brancas e três pretas na amostra

$A$ : primeira extração branca

$A \cap B$ :

$$|B| = \binom{\overbrace{10}^{\text{Escolha brancas}}}{7} \cdot \binom{\underbrace{10}{\text{Escolha pretas}}}{3} \cdot 10!$$

$$|A \cap B| = 10 \cdot \binom{\underbrace{9}{\text{6 outras brancas}}}{6} \cdot \binom{\underbrace{10}{\text{3 pretas}}}{3} \cdot \underbrace{9!}_{\text{shuffle das 9 posições}}$$

$$\mathcal{P}(A|B) = 10 \cdot \frac{\binom{9}{6} \cdot \binom{10}{3} \cdot 9!}{\binom{10}{7} \cdot \binom{10}{3} \cdot 10!} = \frac{10 \cdot \frac{9!}{6!3!} \cdot \frac{10!}{7!3!} \cdot 9!}{\frac{10!}{7!3!} \cdot \frac{10!}{3!7!} \cdot 10!} = \frac{7}{10}$$

## 5.6.4 Exemplo 3

Exemplo 3  $\leftarrow$  Exemplo 2

Urna com 6 bolas brancas e 5 bolas pretas. Extraem-se 3 bolas sem reposição.

$E_{bpp}$ : 1ª branca, 2ª preta, 3ª preta

$$|E_{bpp}| = 6 \cdot 5 \cdot 4$$

$$\Omega = 11 \cdot 10 \cdot 9$$

$$\mathcal{P}(E_{bpp}) = ?$$

$$\underbrace{6}_{\mathcal{P}(E_1)} \cdot \underbrace{5}_{\mathcal{P}(E_2|E_1)} \cdot 4 \rightarrow \mathcal{P}(E_3|E_1 \cap E_2)$$

$$\left. \begin{array}{l} E_1 = E_{bxx} \\ E_2 = E_{xpx} \\ E_3 = E_{xpx} \end{array} \right\} E_1 \cap E_2 \cap E_3 = E_{bpp}$$

$$\text{Conclusão: } \mathcal{P}(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = \mathcal{P}(E_1) \cdot \mathcal{P}(E_2|E_1) \cdot \mathcal{P}(E_3|E_1 \cap E_2)$$

## 5.6.5 Teorema 1 (Regra da Multiplicação)

Dados um espaço de probabilidade  $(\Omega, \varepsilon, \mathcal{P})$  e  $E_1, E_2, \dots, E_n \in \varepsilon$  t. q.  $\mathcal{P}(E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_{n-1}) > 0$ , vale a fórmula:

## Lista de anotações

■ Início da aula de 24/09/2018 . . . . .	1
■ Obs.: $0! \doteq 1$ . . . . .	2
■ "B" de box . . . . .	3
■ Com itens indistinguíveis . . . . .	4
■ Princípio Básico da Contagem . . . . .	4
■ Lê-se: "arranjo de $n$ , $n$ a $m$ ", extraindo $m$ de $n$ sem reposição . . . . .	4
■ Combinação de $n$ , $n$ a $m$ . . . . .	4

<span style="background-color: #d1c4e9;">■</span> <b>Início da aula de 26/09/2018</b> . . . . .	5
<span style="background-color: #ffe0b2;">■</span> Obs.: se plotarmos uma curva, ela terá a forma de uma curva gaussiana/curva de Gauss. . . . .	6
<span style="background-color: #ffe0b2;">■</span> O Exemplo 11 será abordado depois . . . . .	8
<span style="background-color: #d1c4e9;">■</span> <b>Faltei na aula de 08/10/2018</b> . . . . .	8
<span style="background-color: #d1c4e9;">■</span> <b>Início da aula de 10/10/2018</b> . . . . .	8
<span style="background-color: #fff176;">■</span> Também são adotadas as notações $P$ , $\Pr$ , $\mathcal{P}$ e $\wp$ . . . . .	9
<span style="background-color: #ffe0b2;">■</span> Obs.: acredito que os exemplos 4 e 7 foram suprimidos, provavelmente por questão de tempo . . . . .	10
<span style="background-color: #ffe0b2;">■</span> Definição preliminar . . . . .	10
<span style="background-color: #ffe0b2;">■</span> Exemplo 9 $\Rightarrow$ Exemplo 1 . . . . .	10
<span style="background-color: #ff8a65;">■</span> Preciso revisar isso aqui! . . . . .	10
<span style="background-color: #ffe0b2;">■</span> Exemplo 10 $\Rightarrow$ Exemplo 2 . . . . .	11
<span style="background-color: #fff176;">■</span> Lê-se em português: “saiu pelo menos 1 coroa” . . . . .	11
<span style="background-color: #fff176;">■</span> Lê-se em português: “não saiu coroa” . . . . .	11
<span style="background-color: #d1c4e9;">■</span> <b>Faltei na aula de 17/10/2018</b> . . . . .	11
<span style="background-color: #d1c4e9;">■</span> <b>Início da aula de 22/10/2018</b> . . . . .	11
<span style="background-color: #ffe0b2;">■</span> O exemplo não está completo . . . . .	12
<span style="background-color: #fff176;">■</span> Pode ser oportuno ler Morin (2016, p.85–86) . . . . .	13
<span style="background-color: #ffe0b2;">■</span> A prova 1 versa sobre os capítulos e listas 1 e 2. Data prevista: 05/11/2018	13
<span style="background-color: #d1c4e9;">■</span> <b>Início da aula de 24/10/2018</b> . . . . .	13
<span style="background-color: #d1c4e9;">■</span> <b>Início da aula de 31/10/2018</b> . . . . .	15
<span style="background-color: #fff176;">■</span> Lê-se probabilidade de $A$ dado $B$ . . . . .	15
<span style="background-color: #ffe0b2;">■</span> Em $\frac{A \cap B}{ B }$ , $A$ é a quantidade de casos favoráveis após a informação, enquanto $ B $ é a quantidade de casos após ser dada a informação . . . .	15
<span style="background-color: #ffe0b2;">■</span> Exemplo 3 $\Leftarrow$ Exemplo 2 . . . . .	17

## Referências

LIPSCHUTZ, S.; LIPSON, M. *Schaum's Outline of Probability*. Second edition. [S.l.]: McGraw-Hill Education, 2011. (Schaum's Outlines). ISBN 978-0-07-181658-8.

MORIN, D. J. *Probability: For the Enthusiastic Beginner*. [S.l.]: Createspace Independent Publishing Platform, 2016. ISBN 1523318678.

ROSS, S. *Probabilidade: um curso moderno com aplicações*. 8. ed. Porto Alegre: Bookman Editora, 2010. ISBN 978-85-7780-621-8.