



Universidade Federal do **ABC**

BIN0406: Introdução à Probabilidade e Estatística

Caderno

Professor: Dr. Thomas Logan Ritchie

Caio César Carvalho Ortega

RA 21038515

1 Prólogo

As anotações e considerações que se seguem foram realizadas de maneira autônoma e não são fruto de orientação por parte da universidade e/ou de qualquer membro do corpo docente. Foram realizadas para fins de estudo, sendo, portanto, reflexo de um esforço de cunho pessoal para melhor apreensão do conteúdo discutido em sala.

2 Análise combinatória

Início da aula de 24/09/2018

2.0.1 Exemplo 3

Sem admitir repetições, quantas placas são possíveis no Exemplo 1?

Figura 1: Placas

26	25	24				
			10	9	8	7

$$= 78.624.000$$

2.1 Permutações (embaralhamento, “shuffling”)

Quantas funções bijetoras há de $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ em $\{1, 2, 3, \dots, n\}$?

Ver Figura 2.

$$n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot (n - 3) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

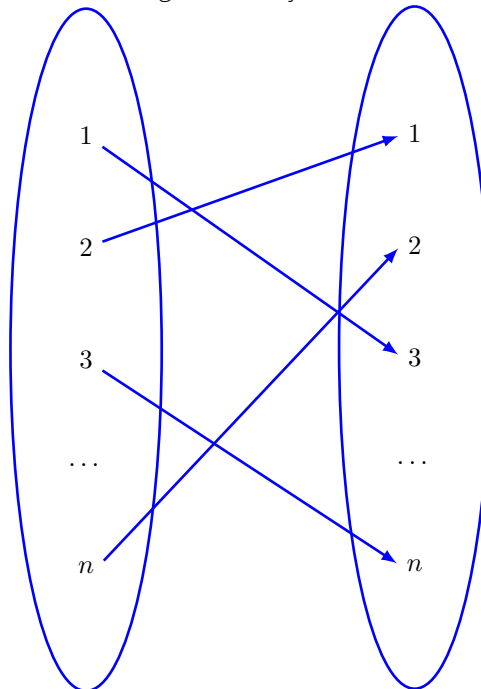
Resposta:

Se $n = 4$, então:

$$4^4 = 256 \text{ funções}$$

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 \text{ funções bijetoras}$$

Figura 2: Conjuntos



$$n^m$$

2.1.1 Definição 1

Para cada número $n \in \mathbb{N}$, o número $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$ denomina-se “n fatorial”.

Obs.: $0! \doteq 1$

2.1.2 Exemplo 4

Em uma turma com 6 homens e 4 mulheres, aplica-se uma prova e não ocorrem resultados iguais.

(a) Quantas classificações são possíveis?

Resposta: $10!$

Ver Figura 3.

$$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 10!$$

Figura 3: Representação dos alunos e seus resultados

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4	7	1	10	...					

(b) Quantas classificações são possíveis, se homens e mulheres não concorrem entre si?

Resposta: $6!4!$

Homens: $E_1: 6! = n_1$

Mulheres: $E_2: 4!$

2.1.3 Exemplo 5

Em uma estante há 10 livros: 4 de matemática, 3 de química, 2 de história e 1 de português.

Figura 4: Livros na estante

M	M	M	M	Q	Q	Q	H	H	P
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

(a) Quantas disposições há?

Resposta: $10! = 3.628.100$

(b) Quantas disposições há, se os livros do mesmo assunto permanecerem juntos?

Desenvolvimento:

$E_M: 4! = n_M$

$E_Q: 3! = n_Q$

$E_H: 2! = n_H$

$E_P: 1! = n_P$

"B" de box

$E_B: 1! = n_B$

Resposta:

$$4! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1! = n_B \cdot n_M \cdot n_Q \cdot n_H \cdot n_P = 6.912$$

2.1.4 Exemplo 6

Quantos anagramas possui a palavra **arara**?

Resposta:

$$\frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$$

2.2 Permutações com repetições

Com itens indistinguíveis

Se pudermos classificar n objetos em r grupos (categorias) com n_1, n_2, \dots, n_r elementos cada um (subentende-se $r = 4$ para o Exemplo 5, pois $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ e $r = 2$ no Exemplo 6, pois $2 + 3 = 5$), de tal sorte que os elementos de um mesmo grupo são indistinguíveis, então o número de permutações é

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdot \dots \cdot n_r!}$$

3 Combinações e arranjos

De quantas maneiras podemos seleccionar m dentre n bolas numeradas de 1 a n ?

(a) Considerando a ordem

Resposta: Pelo PBC:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-m+1) = \frac{n!}{n-m!} = \underline{An, m}$$

Princípio Básico da Contagem

(b) Sem considerar a ordem

Resposta:

$$\frac{\frac{n!}{n-m!}}{m!} = \frac{n!}{(n-m)! \cdot m!} = \binom{n}{m} = \underline{Cn, m}$$

Lê-se: "arranjo de n , n a m ", extraindo m de n sem reposição

Combinação de n , n a m

3.1 Definição 2

O número $\binom{n}{m} = \frac{n!}{n-m! \cdot m!}$, onde $n, m \in \mathbb{Z}_+$ e $m \leq n$, denomina-se “coeficiente binomial”.

3.1.1 Exemplo 7

Dentre 5 mulheres e 7 homens, quantas comissões diferentes podem-se formar com duas mulheres e três homens?

Resposta:

$$E_H: \binom{7}{3} = n_H$$

$$E_M: \binom{5}{2} = n_M$$

$$n_H \cdot n_M = \binom{7}{3} \cdot \binom{5}{2} = 35 \cdot 10 = 350$$

E se dois homens se recusarem a trabalhar juntos?

Resposta:

$$n_H \cdot n_M = \left[\underbrace{\binom{7}{3}}_{n_H} \cdot \binom{5}{1} \right] \cdot \underbrace{\binom{5}{2}}_{n_M} = (35 - 5) \cdot 10 = 300$$

Início da aula de 26/09/2018

3.1.2 Exemplo 8

De quantas maneiras diferentes podemos arranjar linearmente $m = 3$ bolas pretas e $n = 5$ bolas brancas sem que duas bolas pretas pequenas fiquem lado a lado?

Desenvolvimento:

$$\frac{8!}{5! \cdot 3!} = 336$$

$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = 20$$

Resposta:

$$\binom{n+1}{m}$$

3.2 Proposição 1

$$\frac{n!}{(n-m)! \cdot m!} = \binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1} \text{ para todos } n, m \in \mathbb{N}.$$

3.3 Triângulo de Pascal

n				
0	$\binom{0}{0}$			
1	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$		
2	$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$	
3	$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$
	0	1	2	3
	m			

n								
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1
	0	1	2	3	4	5	6	7
	m							

Obs.: se plotarmos uma curva, ela terá a forma de uma curva gaussiana/curva de Gauss.

3.4 Teorema 2 (Binomial)

Se $a, b \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, então:

$$(a + b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i b^{n-i} = \binom{n}{0} a^0 b^n + \binom{n}{1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{2} a^2 b^{n-2} + \dots$$

3.4.1 Exemplo 9

Resposta:

$$a + b^4 = \binom{4}{0} a^0 b^4 + \binom{4}{1} a^1 b^3 + \binom{4}{2} a^2 b^2 + \binom{4}{3} a^3 b^1 + \binom{4}{4} a^4 b^0 = b^4 + 4ab^3 + 6a^2b^2 + 4a^3b + a^4$$

3.4.2 Exemplo 10

Quantos subconjuntos tem um conjunto com n elementos? Quantos subconjuntos com m elementos tem um conjunto com n elementos?

Resposta:

$$\sum_{m=0}^n \binom{n}{m} = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} 1^m \cdot 1^{n-m} = (1 + 1)^n = 2^n$$

4 Coeficientes e Teorema Multinomial

4.1 Definição 3

Se $n, n_1, n_2, \dots, n_r \in \mathbb{Z}_+$ e $r \in \mathbb{N}, r > 2$ forem t. q. $n_1 + n_2 + \dots + n_r = n$ o coeficiente multinomial.

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r} \text{ define-se por } \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_r!}$$

4.2 Teorema 3 (Multinomial)

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_r)^n = \sum \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r} \cdot x_1^{n_1} \cdot x_2^{n_2} \cdot x_3^{n_3} \cdot \dots \cdot x_r^{n_r}$$

4.2.1 Exemplo 12

O Exemplo 11 será abordado depois

Enunciado suprimido. $(\overbrace{a}^1 + \overbrace{b}^1 + \overbrace{c}^1)^3 = ?$

Resposta:

$$\begin{aligned} & \binom{3}{3, 0, 0} a^3 b^0 c^0 + \binom{3}{0, 3, 0} a^0 b^3 c^0 + \binom{3}{0, 0, 3} c^3 + \binom{3}{3, 0, 0} a^3 b^0 c^0 + \binom{3}{2, 1, 0} a^2 b^1 c^0 + \\ & \binom{3}{2, 0, 1} a^2 b^0 c^1 + \binom{3}{1, 2, 0} a b^2 + \binom{3}{0, 2, 1} b^2 c + \binom{3}{1, 0, 2} a c^2 + \binom{3}{0, 1, 2} b c^2 + \\ & \binom{3}{1, 1, 1} a b c \end{aligned}$$

Qual a soma dos coeficientes multinomiais?

Resposta:

$$(1 + 1 + 1)^3 = 3^3 = 27$$

Faltei na aula de 08/10/2018

Motivo da falta: atraso.

Início da aula de 10/10/2018

5 Teoria Axiomática da Probabilidade

A teoria está centrada em três termos, que conformam o **Espaço de Probabilidade**:

- Espaço amostral (Ω)
- Espaço de eventos (ε)

- Medida de probabilidade (\mathbb{P})

Ao invés da letra omega (Ω), Ross (2010) usa a letra S , de *sample*, sendo sample amostra em inglês. Quanto a \mathbb{P} , um estudo matemático mais aprofundado requer se debruçar sobre a Teoria da Medida e Integração.

Também são adotadas as notações P , Pr , \mathcal{P} e \wp

5.1 Espaço amostral

Ideia: um conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento aleatório. Símbolo: Ω , S .

$$\omega \in \Omega$$

5.1.1 Exemplo 1

Lançamento de uma moeda.

$$\Omega = \{x, c\}, \{0, 1\}$$

5.1.2 Exemplo 2

Lançamento de duas moedas.

$$\Omega = \{0, 1\} \times \{0, 1\} = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$$

5.1.3 Exemplo 3

Lançamento de n moedas.

$$\{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \cdots \times \{0, 1\} = \{0, 1\}^n$$

5.1.4 Exemplo 4

Lançamento de 3 dados.

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^3$$

5.1.5 Exemplo 5

Lançamento de infinitas moedas.

$$\Omega = \{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \cdots \times \{0, 1\} \doteq \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$$

Obs.: acredito que os exemplos 4 e 7 foram suprimidos, provavelmente por questão de tempo

5.1.6 Exemplo 7

Tempo de vida (em horas) de uma lâmpada.

$$\Omega = [0 + \infty) \ni t$$

5.1.7 Exemplo 8

Número aleatório.

$$\Omega[0, 1]$$

5.2 Eventos**5.2.1 Definição 2**

Definição preliminar

Um evento é um subconjunto de Ω .

5.2.2 Exemplo 9

Exemplo 9 \Rightarrow Exemplo 1

$$\Omega = \{c, k\}, \mathbb{P}(\Omega) = \{\{c\}, \{k\}, \emptyset, \{c, k\}\}$$

$$E = \{c\} \subset \{c, k\}$$

$$E = \{c\} \subset \{c, k\}$$

Preciso
revisar isso
aqui!

5.2.3 Exemplo 10

Moeda.

Exemplo 10 \Rightarrow Exemplo 2

$$\Omega = \{c, k\}^2$$

$$|\Omega| = 2^2 = 4$$

$$|\mathbb{P}(\Omega)| = 2^4 = 16$$

$$E = \{(k, k), (k, c), (c, k)\}$$

$$E^c = \{(c, c)\}$$

Faltei na aula de 17/10/2018

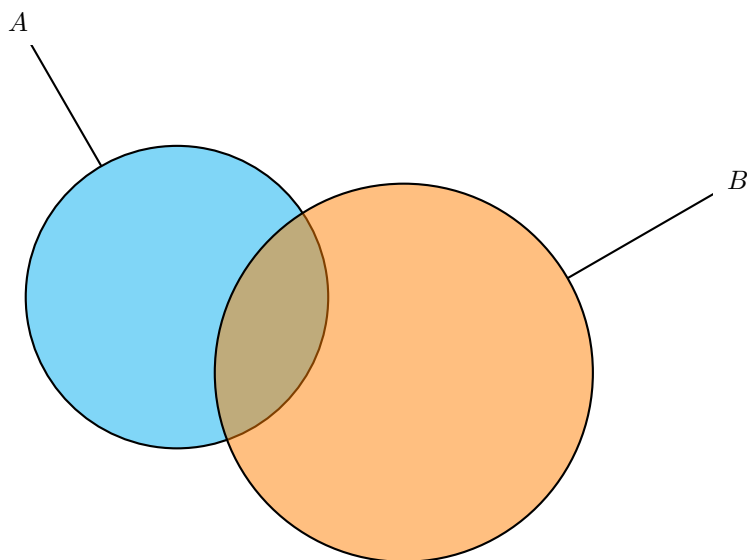
Motivo da falta: entrevista na PMSP/SMDU.

Início da aula de 22/10/2018

Lê-se em português:
"saiu pelo menos 1 coroa"

Lê-se em português:
"não saiu coroa"

Prof. Thomas recorda a fórmula $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, usada na última aula. Comenta que ela pode ser usada para áreas, afinal, a probabilidade é uma medida.



Prof. Thomas constrói ainda duas outras fórmulas, ampliando a lógica para quatro blocos:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

$$P(A \cup B \cup C \cup D) = P(A) + P(B) + P(C) + P(D) - P(A \cap B) - \dots + P(A \cap B \cap C) + \dots - P(A \cap B \cap C \cap D).$$

A fórmula inicial diz respeito à Proposição 5.

5.3 Proposição 6

Fórmula de Inclusão-Exclusão. Se E_1, E_2, \dots, E_n forem eventos em um espaço amostral Ω e \mathbb{P} for uma medida de provabilidade (em ε), então $P(U_{i=1}^n E_i) = \sum_{i=1}^n P(E_i) - \sum_{i_1 \leq i_2} P(E_{i_1} \cap E_{i_2}) + \sum_{i_1 \leq i_2 \leq i_3} P(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap E_{i_3}) - \dots + (-1)^{n+1} P(E_{i=1}^n E_i)$

5.3.1 Exemplo 17

O exemplo não está completo

$$(b) \Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$P(\{i\}) = \frac{1}{6}, i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

$$A = \{1, 2\}, B = \{1, 3\}, C = \{1, 4\}, D = \{1, 5\}$$

5.4 Proposição 7

Desigualdades de Bonferroni. Primeira desigualdade de Bonferroni: sub-aditividade.

$$P(U_{i=1}^n E_i) \leq \sum_{i=1}^n P(E_i)$$

5.4.1 Definição 4

A tríade $(\Omega, \varepsilon, \mathbb{P})$ denomina-se **Espaço de Probabilidade**.

5.5 Espaços Dep. Equiprováveis

Resumo:

$$\Omega = w_1, w_2, \dots, w_n, |\Omega| = n$$

$$\varepsilon = P(\Omega), |\varepsilon| = 2^n$$

$$\underbrace{\mathbb{P}(\{w_i\}) = \frac{1}{n}, i = 1, 2, \dots, n}_{\mathbb{P} = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{|E|}{n}}$$

$\frac{|E|}{|\Omega|}$: casos favoráveis; $\frac{|E|}{n}$: total de casos

5.5.1 Exemplo 18

Jogam-se dois dados (honestos). Qual a probabilidade de a soma das faces observadas ser 8?

Resposta:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2, |\Omega| = 36$$

$$\varepsilon = \mathcal{P}(\Omega); |\varepsilon| = 2^{36}$$

$$E\{(i, j) \mid i + j = 8\} = \{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\}; |E| = 5$$

$$\mathcal{P}(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{5}{36} \approx 14\%$$

5.5.2 Exemplo 21

Problema dos aniversários. Em uma sala há 23 pessoas. Qual a probabilidade de que ninguém aniversarie no mesmo dia?

Resposta:

$$|\Omega| = 365^{23}$$

$$|E| = 365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \dots \cdot 343 = A_{365, 23}$$

$$\mathcal{P}(E) = \frac{A_{365, 23}}{365^{23}} = \frac{365!}{342!} = 49,27\%$$

Pode ser oportuno ler Morin (2016, p. 85–86)

A prova 1 versa sobre os capítulos e listas 1 e 2. Data prevista: 05/11/2018

Início da aula de 24/10/2018

Voltaremos ao Exemplo 19. A ideia foi explicar que não há implicações negativas ao “etiquetar” as bolinhas. Professor comenta também brevemente sobre o Teorema da Probabilidade Total. Devemos estudá-lo dentro de uma ou duas aulas.

5.5.3 Exemplo 19

Com reposição.

$$\begin{aligned} & \frac{6}{11} \cdot \frac{5}{11} \cdot \frac{5}{11} + \frac{5}{11} \cdot \frac{6}{11} \cdot \frac{5}{11} + \frac{5}{11} \cdot \frac{5}{11} \cdot \frac{6}{11} \\ &= \frac{450}{113} \approx 33,81\% \end{aligned}$$

$$E = E_{bpp} \cup E_{pbp} \cup E_{ppb} \rightarrow \mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(E_{bpp}) + \mathcal{P}(E_{pbp}) + \mathcal{P}(E_{ppb}) = 3 \cdot \frac{150}{113} = \frac{450}{113}$$

$$|E_{bpp}| = 6 \cdot 5 \cdot 5; |E_{pbp}| = 5 \cdot 6 \cdot 5; |E_{ppb}| = 5 \cdot 5 \cdot 6 = 5 \cdot 5 \cdot 6$$

$$\mathcal{P}(E) = \frac{|E|}{|\Omega|}$$

$$|\Omega| = 11^3$$

5.5.4 Exemplo 20

Urna: 20 brancas + 20 pretas. As bolas são extraídas sequencialmente e acondicionadas em 20 caixas com 2 bolas em cada caixa.

(a) Qual a probabilidade de que todas as caixas tenham bolas da mesma cor?

Resposta:

$$|\Omega| = \frac{40!}{(2!)^{20}}$$

E = todas as caixas com a mesma cor, *i.e.* 10 caixas brancas + 10 caixas pretas.

$$\frac{20!}{10!10!} \text{ embaralhamentos possíveis} \quad \binom{20}{10}$$

$$\mathcal{P}(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{20!}{10!^2} \cdot \frac{20!}{2!^{10}} \cdot \frac{20!}{2!^{10}} = \frac{40!}{2!^{30}}$$

$$= \frac{20!^3}{40!(10!)^2} = \text{aproximadamente 1 chance em 746.100}$$

$$\text{Preenchimento das caixas brancas/pretas: } \binom{20}{2} \cdot \binom{28}{2} \cdots \binom{2}{2} = \frac{20!}{(2!)^{10}} = \frac{20!}{(2!)^{10}}$$

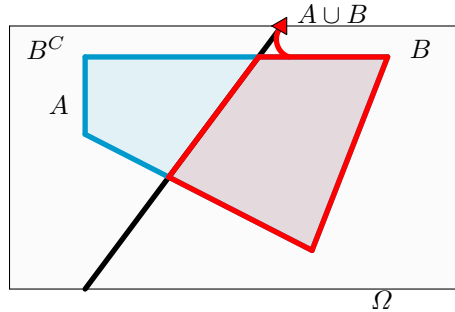
$$\text{Pelo PBC (vide Página 4): } |E| = \binom{20}{10} \cdot \frac{20!}{2!^{10}} \cdot \frac{20!}{2!^{10}}$$

Início da aula de 31/10/2018

5.6 Probabilidade condicional

Thomas comenta que a ideia da probabilidade condicional já estava sendo discutida informalmente por nós.

Figura 5: Parcela de evento contida em outro



Se possuímos interesse na parcela do evento A que está contida em B (vide Figura 5), temos: $\mathcal{P}(A|B) = \frac{\mathcal{P}(A \cap B)}{\mathcal{P}(B) > 0}$

5.6.1 Definição 1

Seja $(\Omega, \epsilon, \mathcal{P})$ um espaço de probabilidade. Se $A, B \in \epsilon$ e $\mathcal{P}(B) > 0$, $\mathcal{P}(A|B)$ a probabilidade (condicional) de A dado B :

Lê-se probabilidade de A dado B

$$\mathcal{P}(A|B) = \frac{\mathcal{P}(A \cap B)}{\mathcal{P}(B)}$$

Em espaços equiprováveis:

$$\mathcal{P}(A|B) = \frac{\mathcal{P}(A \cap B)}{\mathcal{P}} = \frac{\frac{|A \cap B|}{|\Omega|}}{\frac{|B|}{|\Omega|}} = \frac{|A \cap B|}{|B|}$$

Em $\frac{|A \cap B|}{|B|}$, A é a quantidade de casos favoráveis após a informação, enquanto $|B|$ é a quantidade de casos após ser dada a informação

5.6.2 Exemplo 1

Uma moeda honesta é lançada três vezes, qual a probabilidade de observarem-se mais caras, sabendo-se que deu cara no primeiro lançamento?

Resposta:

$$\Omega = \{(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\} = \{0, 1\}^3$$

$$A: \text{mais caras do que coroas} = \{(0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$$

$$B: \text{cara no primeiro lançamento} = \{(1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$$

$$\text{Portanto } \mathcal{P}(A|B) = \frac{3}{4} = 75\%$$

5.6.3 Exemplo 2

Urna com 10 bolas brancas, 10 bolas pretas. Foram 10 as bolas extraídas sequencialmente sem reposição. Observam-se 7 bolas brancas e 3 pretas. Qual a probabilidade de a primeira bola extraída ter sido branca?

$$\Omega = A_{20,10} = 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot \dots \cdot 11 = \frac{20!}{10!}$$

B : sete brancas e três pretas na amostra

A : primeira extração branca

$A \cap B$:

$$|B| = \binom{\overbrace{\text{escolha brancas}}^{10}}{7} \cdot \binom{\overbrace{\text{escolha pretas}}^{10}}{3} \cdot 10!$$

$$|A \cap B| = 10 \cdot \underbrace{\binom{9}{6}}_{6 \text{ outras brancas}} \cdot \underbrace{\binom{10}{3}}_{3 \text{ pretas}} \cdot \underbrace{9!}_{\text{shuffle das 9 posições}}$$

$$\mathcal{P}(A|B) = 10 \cdot \frac{\binom{9}{6} \cdot \binom{10}{3} \cdot 9!}{\binom{10}{7} \cdot \binom{10}{3} \cdot 10!} = \frac{10 \cdot \frac{9!}{6!3!} \cdot \frac{10!}{7!3!} \cdot 9!}{\frac{10!}{7!3!} \cdot \frac{10!}{3!7!} \cdot 10!} = \frac{7}{10}$$

5.6.4 Exemplo 3

Exemplo 3 \Leftarrow Exemplo 2

Urna com 6 bolas brancas e 5 bolas pretas. Extraem-se 3 bolas sem reposição.

E_{bpp} : 1ª branca, 2ª preta, 3ª preta

$$|E_{bpp}| = 6 \cdot 5 \cdot 4$$

$$\Omega = 11 \cdot 10 \cdot 9$$

$$\mathcal{P}(E_{bpp}) = ?$$

$$\underbrace{6}_{\mathcal{P}(E_1)} \cdot \underbrace{5}_{\mathcal{P}(E_2|E_1)} \cdot 4 \rightarrow \mathcal{P}(E_3|E_1 \cap E_2)$$

$$\left. \begin{array}{l} E_1 = E_{bxx} \\ E_2 = E_{xpx} \\ E_3 = E_{xpx} \end{array} \right\} E_1 \cap E_2 \cap E_3 = E_{bpp}$$

Conclusão: $\mathcal{P}(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = \mathcal{P}(E_1) \cdot \mathcal{P}(E_2|E_1) \cdot \mathcal{P}(E_3|E_1 \cap E_2)$

5.6.5 Teorema 1 (Regra da Multiplicação)

Dados um espaço de probabilidade $(\Omega, \varepsilon, \mathcal{P})$ e $E_1, E_2, \dots, E_n \in \varepsilon$ t. q. $\mathcal{P}(E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_{n-1}) > 0$, vale a fórmula:

$$\mathcal{P} = (E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap \dots \cap E_n) = \mathcal{P}(E_1) \cdot \mathcal{P}(E_2|E_1) \cdot \mathcal{P}(E_3|E_1 \cap E_2) \cdot \dots \cdot \mathcal{P}(E_n|E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_{n-1})$$

Prova:

$$\cancel{\mathcal{P}(E_1)} \cdot \frac{\cancel{\mathcal{P}(E_1 \cap E_2 \cap E_3)}}{\cancel{\mathcal{P}(E_1 \cap E_2)}}, \dots, \frac{\boxed{\mathcal{P}(E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_n)}}{\cancel{\mathcal{P}(E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_{n-1})}} = \mathcal{P}(E_n|E_1 \cap \dots \cap E_{n-1}) \text{ C.Q.D.}$$

Como se queria demonstrar (*quod erat demonstrandum*)

5.6.6 Exemplo 4

Um baralho com 52 cartas é distribuído entre 4 jogadores. Qual a probabilidade de que cada jogador receba 1 ás?

Resposta:

E_i : o i -ésimo jogador recebe exatamente 1 ás, $i = 1, 2, 3, 4$

$E = E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4$: 1 ás em cada mão

$$\mathcal{P} = \frac{\mathcal{P}(E_1)}{\binom{52}{13}} \cdot \frac{\mathcal{P}(E_2|E_1)}{\binom{39}{13}} \cdot \frac{\mathcal{P}(E_3|E_1 \cap E_2)}{\binom{26}{13}} \cdot \frac{\mathcal{P}(E_4|E_1 \cap E_2 \cap E_3)}{\binom{13}{13}} =$$

$$\frac{\binom{4}{1} \cdot \binom{48}{12}}{\binom{52}{13}} \cdot \frac{\binom{3}{1} \cdot \binom{36}{12}}{\binom{39}{13}} \cdot \frac{\binom{2}{1} \cdot \binom{24}{12}}{\binom{26}{13}} \cdot \frac{\binom{1}{1} \cdot \binom{12}{12}}{\binom{13}{13}} =$$

$$\frac{39 \cdot 26 \cdot 13}{51 \cdot 50 \cdot 49} \approx 10,5\%$$

Sem usar a probabilidade condicional:

$$\begin{array}{cccc} \text{Primeira} & \text{Segunda} & \text{Terceira} & \text{Quarta} \\ \hline \textcircled{01} \textcircled{02} \dots \textcircled{13} & \textcircled{14} \dots \textcircled{26} & \textcircled{27} \dots \textcircled{39} & \textcircled{40} \dots \textcircled{52} \end{array} =$$

$$\frac{52!}{13!13!13!13!} = \binom{52}{13, 13, 13, 13}$$

$$|\Omega| = 52!$$

$$|\Omega| = 13!^4$$

$$|E| = 48! = 4!$$

$$|E| = 12!^4 = 4!$$

Início da aula de 07/11/2018

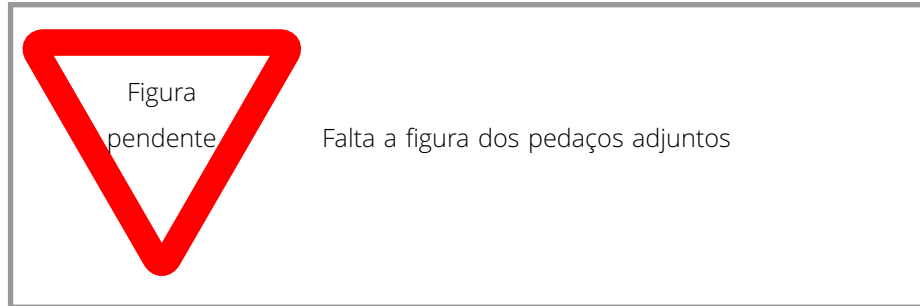
5.6.7 Teorema 2 (Probabilidade Total)

$$(U_{i=1}^n E_i) = \Omega$$

$$A = A \cap \Omega = A \cap (U_{i=1}^n E_i) = U_{i=1}^n (A \cap E_i)$$

$$\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(U_{i=1}^n A \cap E_i) = \sum_{i=1}^n \mathcal{P}(A \cap E_i)$$

Figura 6: Pedacos adjuntos



$$\mathcal{P}(A|E_i) = \frac{\mathcal{P}(A \cap E_i)}{\mathcal{P}(E_i)} = \sum_{i=1}^n \mathcal{P}(A|E_i) \cdot \mathcal{P}(E_i)$$

Em um exemplo prático: $(\Omega, \epsilon, \mathcal{P})$ - Se $E_1, E_2, \dots, E_n, A \in \epsilon$ forem dois a dois disjuntos, $\bigcup_{i=1}^n E_i = \Omega$ e $\mathcal{P}(E_i) > 0, i = 1, 2, \dots, n$ então:

$$\mathcal{P}(A) = \sum_{i=1}^n \mathcal{P}(A|E_i) \cdot \mathcal{P}(E_i)$$

Números
que so-
mam um i
para dois
 E_i (média
ponde-
rada)

Probabili-
dade con-
dicional

5.6.8 Exemplo 3

Um dado honesto com quatro faces $(1, 2, 3, 4)$ é lançado. Se o resultado for 1 ou 2 o dado é lançado uma segunda vez. Qual a probabilidade de a soma dos resultados ser pelo menos 4?

Desenvolvimento e resposta:

E_i : saiu i no primeiro lançamento, $i = 1, 2, 3, 4$

$$\mathcal{P}(E_i) = \frac{1}{4}, i = 1, 2, 3, 4$$

A : soma menos 4

$$\mathcal{P}(A|E_1) = \frac{1}{2}$$

$$\mathcal{P}(A|E_2) = \frac{3}{4}$$

$\mathcal{P}(A|E_3)$: não pode mover o dado (contra regra); chance é 0

$$\mathcal{P}(A|E_4) = 1$$

Probabi-
lidade da
soma ser
4 quando
caíndo
1, 2, 3, 4
no dado

$$\mathcal{P}(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2+3+0+4}{16} = \frac{9}{16}$$

Probabili-
dade é um
número
entre 0 e
1!

Olhando a Figura 6:

$$\mathcal{P}(E_i|A) = \frac{\mathcal{P}(A \cap E_i)}{\mathcal{P}(A)} = \frac{\mathcal{P}(A|E_K) \cdot \mathcal{P}(E_K)}{\sum_{i=1}^n \mathcal{P}(A|E_i) \cdot \mathcal{P}(E_i)}$$

$$\mathcal{P}(A \cap E_i) = \{\mathcal{P}(E_i) \cdot \mathcal{P}(A|E_i) \cup \mathcal{P}(A) \cdot \mathcal{P}(E_i|A)\}$$

5.6.9 Teorema 3 (Bayes)

Pode ser oportuno conferir Ross (2010, p. 89)

Em um espaço de probabilidade $(\Omega, \varepsilon, \mathcal{P})$, se $E_1, E_2, \dots, E_n, A \in \varepsilon$ forem dois a dois disjuntos, $\bigcup_{i=1}^n E_i = \Omega$ e $\mathcal{P}(E_i) > 0, i = 1, 2, \dots, n$, então:

$$\mathcal{P}(E_K|A) = \frac{\mathcal{P}(A|E_K) \cdot \mathcal{P}(E_K)}{\sum_{i=1}^n \mathcal{P}(A|E_i) \cdot \mathcal{P}(E_i)}, K = 1, 2, \dots, n$$

5.6.10 Exemplo 4

1 a cada 10.000 pessoas é HIV positivo. Teste tem 99% de confiabilidade. Qual a probabilidade de um paciente com teste positivo ser HIV positivo?

Desenvolvimento e resposta:

A : teste positivo

E_1 : soro-positivos, $\mathcal{P}(E_1) = \frac{1}{10.000}$

E_2 : soro-negativos, $\mathcal{P}(E_1) = \frac{9.999}{10.000}$

$\mathcal{P}(A|E_1) = 0,99$

$\mathcal{P}(A|E_2) = 0,01$

$$\mathcal{P}(E_1|A) = \frac{\mathcal{P}(A|E_1) \cdot \mathcal{P}(E_1)}{\mathcal{P}(A|E_1) \cdot \mathcal{P}(E_1) + \mathcal{P}(A|E_2) \cdot \mathcal{P}(E_2)} = \frac{0,99 \cdot \frac{1}{10.000}}{0,99 \cdot \frac{1}{10.000} + 0,01 \cdot 0,9999} \approx \frac{1}{100} = 1\%$$

5.6.11 Exemplo 5

Três moedas em uma urna: 2 honestas, 1 duas caras.

- Sorteia-se uma moeda;
- Lança-se a moeda sorteada;
- Observa-se a cara.

Qual a probabilidade de a moeda escolhida ter sido a de duas caras?

$\mathcal{P}(E_2|A) = ?$

Desenvolvimento e resposta:

A: observa-se cara no lançamento

E_1 : escolhe-se moeda honesta $\rightarrow \mathcal{P}(E_1) = \frac{2}{3}$

E_2 : escolhe-se moeda com duas caras $\rightarrow \mathcal{P}(E_2) = \frac{1}{3}$

$\mathcal{P}(A|E_1) = \frac{1}{2}$, $\mathcal{P}(A|E_2) = 1$

$$\frac{\mathcal{P}(A|E_2) \cdot \mathcal{P}(E_2)}{\mathcal{P}(A|E_1) \cdot \mathcal{P}(E_1) + \mathcal{P}(A|E_2) \cdot \mathcal{P}(E_2)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{\underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3}}_{\mathcal{P}(A) = \frac{2}{3}}} = \frac{1}{2}$$

A: observaram-se 2 caras

$\mathcal{P}(A|E_1) = \frac{1}{4}$

$\mathcal{P}(A|E_2) = 1$

$$\mathcal{P}(E_2|A) = \frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{6} + \frac{1}{3}} = \frac{2}{3}$$

Início da aula de 14/11/2018

5.7 Independência (de eventos)

Pode ser oportuno conferir Ross (2010, p. 106)

5.7.1 Definição 2

Lê-se “sse”
como “se
e somente
se”

Em um espaço de probabilidade $(\Omega, \epsilon, \mathcal{P})$, dois eventos A, B são independentes, sse $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cdot \mathcal{P}(B)$.

Ideia:

$$\left. \begin{array}{l} > \mathcal{P}(A) \\ = \mathcal{P}(A) \\ < \mathcal{P}(A) \end{array} \right\} \frac{\mathcal{P}(A \cap B)}{\mathcal{P}(B)} = \mathcal{P}(A|B)$$

Para $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cdot \mathcal{P}(B)$, se o sinal de igualdade for trocado por $>$ então há correlação positiva; se o sinal de igualdade for trocado por $<$ então há correlação negativa

Observações:

1. Se se A e B forem independentes, então $\mathcal{P}(A|B) = \mathcal{P}(A)$ e $\mathcal{P}(B|A) = \mathcal{P}(B)$;
2. Se se $\mathcal{P}(A \cap B) > \mathcal{P}(A) \cdot \mathcal{P}(B)$, então $\mathcal{P}(A|B) > \mathcal{P}(A)$ e $\mathcal{P}(B|A) > \mathcal{P}(B) \rightarrow A$ e B positivamente correlacionados;
3. Se se $\mathcal{P}(A \cap B) < \mathcal{P}(A) \cdot \mathcal{P}(B)$, então $\mathcal{P}(A|B) < \mathcal{P}(A)$ e $\mathcal{P}(B|A) < \mathcal{P}(B) \rightarrow A$ e B negativamente correlacionados;
4. Se A e B forem positivamente correlacionados, então os pares (A, B^C) e (A^C, B) são positivamente correlacionados;
5. Se A e B forem negativamente correlacionados, então os pares (A, B^C) e (A^C, B) são negativamente correlacionados;
6. Se $\mathcal{P}(A) \in \{0, 1\}$ ou $\mathcal{P}(B) \in \{0, 1\}$, então A e B são independentes.

5.7.2 Exemplo 9

Lançamento de 2 dados honestos.

Desenvolvimento e resposta:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2, \mathcal{P}(\{(i, j)\}) = \frac{\overbrace{1}^{\forall (i, j) \in \Omega}}{36} \rightarrow \text{espaço equiprovável}$$

$$\underbrace{\{(i, j)\}}_{\frac{1}{36}} = \underbrace{\{(k, l) \in \Omega : k = i\}}_{\frac{1}{6}} \times \underbrace{\{(K, l) \in \Omega : l = j\}}_{\frac{1}{6}}$$

i no primeiro dado j no segundo dado

$$E_1: \text{"soma das faces é 6"} = \{(i, j) : i + j = 6\}$$

$$E_2: \text{"soma das faces é 7"} = \{(i, j) : i + j = 6\}$$

$$F: \text{1º lançamento é 4}$$

$$G: \text{2º lançamento é 3}$$

$$|E_1| = 5 \rightarrow \mathcal{P}(E_1) = \frac{5}{36}$$

$$|E_2| = 6 \rightarrow \mathcal{P}(E_2) = \frac{1}{6}$$

$$|F| = 6 \rightarrow \mathcal{P}(F) = \frac{1}{6}$$

$$|G| = 6 \rightarrow \mathcal{P}(F) = \frac{1}{6}$$

$$\underbrace{\mathcal{P}(E_1|F) > \mathcal{P}(E_1)}_{\frac{|E_1 \cap F|}{|F|} = \frac{1}{6} = \frac{5}{36}}$$

$$G \cap E_2 = \{(4, 3)\}$$

$$\mathcal{P}(F|E_1) = \frac{\mathcal{P}(F \cap E_1)}{\mathcal{P}(E_1)} = \frac{|F \cap E_1|}{|E_1|} = \frac{1}{5} > \frac{1}{6} = \mathcal{P}(F)$$

$$\mathcal{P}(G|E_2) = \frac{\mathcal{P}(G \cap E_2)}{\mathcal{P}(E_2)} = \frac{|G \cap E_2|}{|E_2|} = \frac{1}{6} = \frac{1}{36} = \frac{|G|}{|\Omega|} = \mathcal{P}(G)$$

5.7.3 Exemplo 10

Dado honesto de quatro faces.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4\}, \mathcal{P}(\{i\}) = \frac{1}{4}, i = 1, 2, 3, 4$$

$$A = \{1, 2\}, B = \{1, 3\}, C = \{1, 4\}$$

$$\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A \cap C) = \mathcal{P}(B \cap C) = \mathcal{P}(\{1\}) \rightarrow A \perp B, A \perp C, B \perp C. \text{ Mas } \mathcal{P}(A \cap B \cap C) = \mathcal{P}(\{1\}) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{1} = \mathcal{P}(A) \cdot \mathcal{P}(B) \cdot \mathcal{P}(C)$$

5.7.4 Definição 2'

Em um espaço de probabilidade três eventos A, B, C são independentes, sse:

- (i) $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cdot \mathcal{P}(B)$
- (ii) $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cdot \mathcal{P}(C)$
- (iii) $\mathcal{P}(B \cap C) = \mathcal{P}(B) \cdot \mathcal{P}(C)$
- (iv) $\mathcal{P}(A \cap B \cap C) = \mathcal{P}(A) \cdot \mathcal{P}(B) \cdot \mathcal{P}(C)$

5.7.5 Definição 2" (Final)

Uma coleção arbitrária de eventos $\{E_i\}_{i \in I}$ é denominada de uma **coleção de eventos independentes**, sse para todo subconjunto finito de índices $\{i_1, i_2, \dots, i_n\} \subset I$, $\mathcal{P}(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \dots \cap E_{i_n}) = \mathcal{P}(E_{i_1}) \cdot \mathcal{P}(E_{i_2}) \cdot \dots \cdot \mathcal{P}(E_{i_n})$

Lista de anotações

 Início da aula de 24/09/2018	1
 Obs.: $0! \doteq 1$	2
 "B" de box	3
 Com itens indistinguíveis	4
 Princípio Básico da Contagem	4
 Lê-se: "arranjo de n , n a m ", extraíndo m de n sem reposição	4
 Combinação de n , n a m	4
 Início da aula de 26/09/2018	5
 Obs.: se plotarmos uma curva, ela terá a forma de uma curva gaussiana/curva de Gauss.	6
 O Exemplo 11 será abordado depois	8
 Faltei na aula de 08/10/2018	8
 Início da aula de 10/10/2018	8
 Também são adotadas as notações P , Pr , \mathcal{P} e \wp	9
 Obs.: acredito que os exemplos 4 e 7 foram suprimidos, provavelmente por questão de tempo	10

Definição preliminar	10
Exemplo 9 \Rightarrow Exemplo 1	10
Preciso revisar isso aqui!	10
Exemplo 10 \Rightarrow Exemplo 2	11
Lê-se em português: “saiu pelo menos 1 coroa”	11
Lê-se em português: “não saiu coroa”	11
Faltei na aula de 17/10/2018	11
Início da aula de 22/10/2018	11
O exemplo não está completo	12
$\frac{ E }{ \Omega }$: casos favoráveis; $\frac{ E }{n}$: total de casos	13
Pode ser oportuno ler Morin (2016, p. 85–86)	13
A prova 1 versa sobre os capítulos e listas 1 e 2. Data prevista: 05/11/2018	13
Início da aula de 24/10/2018	14
Início da aula de 31/10/2018	15
Lê-se probabilidade de A dado B	16
Em $\frac{A \cap B}{ B }$, A é a quantidade de casos favoráveis após a informação, enquanto $ B $ é a quantidade de casos após ser dada a informação	16
Exemplo 3 \Leftarrow Exemplo 2	17
Como se queria demonstrar (<i>quod erat demonstrandum</i>)	17
Início da aula de 07/11/2018	18
Figura: Falta a figura dos pedaços adjuntos	19
Números que somam um i para dois E_i (média ponderada)	19
Probabilidade condicional	19
Probabilidade da soma ser 4 quando caindo 1, 2, 3, 4 no dado	19
Probabilidade é um número entre 0 e 1!	20

■	Pode ser oportuno conferir Ross (2010, p. 89)	20
■	$\mathcal{P}(E_2 A) = ?$	21
■	Início da aula de 14/11/2018	21
■	Pode ser oportuno conferir Ross (2010, p. 106)	21
■	Lê-se “sse” como “se e somente se”	22
■	Para $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cdot \mathcal{P}(B)$, se o sinal de igualdade for trocado por $>$ então há correlação positiva; se o sinal de igualdade for trocado por $<$ então há correlação negativa	22

Referências

LIPSCHUTZ, S.; LIPSON, M. *Schaum's Outline of Probability*. Second edition. [S.l.]: McGraw-Hill Education, 2011. (Schaum's Outlines). ISBN 978-0-07-181658-8.

MORIN, D. J. *Probability: For the Enthusiastic Beginner*. [S.l.]: Createspace Independent Publishing Platform, 2016. ISBN 1523318678.

ROSS, S. *Probabilidade: um curso moderno com aplicações*. 8. ed. Porto Alegre: Bookman Editora, 2010. ISBN 978-85-7780-621-8.