UFABC

Universidade Federal do **ABC**

BIN0406: Introdução à Probabilidade e Estatística

Caderno

Professor: Dr. Thomas Logan Ritchie

Caio César Carvalho Ortega

RA 21038515

1 Prólogo

As anotações e considerações que se seguem foram realizadas de maneira autônoma e não são fruto de orientação por parte da universidade e/ou de qualquer membro do corpo docente. Foram realizadas para fins de estudo, sendo, portanto, reflexo de um esforço de cunho pessoal para melhor apreensão do conteúdo discutido em sala.

2 Análise combinatória

Início da aula de 24/09/2018

2.0.1 Exemplo 3

Sem admitir repetições, quantas placas são possíveis no Exemplo 1?

Figura 1: Placas

26	25	24				
			10	9	8	7

$= 78.624.000$

2.1 Permutações (embaralhamento, *"shuffling"*)

Quantas funções bijetoras há de $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ em $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$?

Ver Figura 2.

$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$

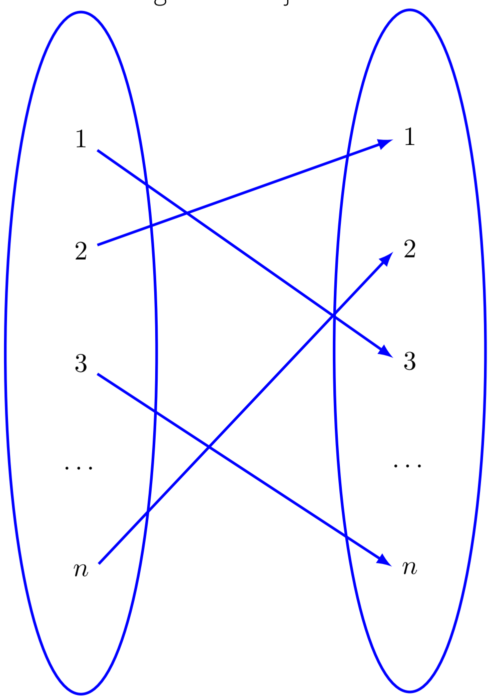
Resposta:

Se $n = 4$, então:

$4^4 = 256$ funções

$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ funções bijetoras

Figura 2: Conjuntos



$$\boxed{n^m}$$

2.1.1 Definição 1

Para cada número $n \in \mathbb{N}$, o número $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ denomina-se "n fatorial". Obs.: $0! \doteq 1$

2.1.2 Exemplo 4

Em uma turma com 6 homens e 4 mulheres, aplica-se uma prova e não ocorrem resultados iguais.

(a) Quantas classificações são possíveis?

Resposta: $10!$

Ver Figura 3.

$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 10!$

Figura 3: Representação dos alunos e seus resultados

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4	7	1	10	$\cdots$					

H H | M M

(b) Quantas classificações são possíveis, se homens e mulheres não concorrem entre si?

Resposta: $6!4!$

Homens: E_1: $6! = n_1$

Mulheres: E_2: $4!$

2.1.3 Exemplo 5

Em uma estante há 10 livros: 4 de matemática, 3 de química, 2 de história e 1 de português.

Figura 4: Livros na estante

M	M	M	M	Q	Q	Q	H	H	P

(a) Quantas disposições há?

Resposta: $10! = 3.628.100$

(b) Quantas disposições há, se os livros do mesmo assunto permanecerem juntos?

Desenvolvimento:

E_M: $4! = n_M$

E_Q: $4! = n_Q$

E_H: $4! = n_H$

E_P: $4! = n_P$

“B” de box E_B: $4! = n_B$

Resposta:

$$4! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1! = n_B \cdot n_M \cdot n_Q \cdot n_H \cdot n_P = 6.912$$

2.1.4 Exemplo 6

Quantos anagramas possui a palavra **arara**?

Resposta:

$$\frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$$

2.2 Permutações com repetições

Com itens indistinguíveis

Se pudermos classificar n objetos em r grupos (categorias) com $n_1, n_2, \ldots, n_r$ elementos cada um (subentende-se $r = 4$ para o Exemplo 5, pois $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ e $r = 2$ no Exemplo 6, pois $2 + 3 = 5$), de tal sorte que os elementos de um mesmo grupo são indistinguíveis, então o número de permutações é $\dfrac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdot \cdots \cdot n_r!}$

3 Combinações e arranjos

De quantas maneiras podemos selecionar m dentre n bolas numeradas de 1 a n?

(a) Considerando a ordem

Resposta: Pelo PBC:

Princípio Básico da Contagem

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot (n-m+1) = \frac{n!}{n-m!} = An, m$$

Lê-se: "arranjo de n, n a m", extraindo m de n sem reposição

(b) Sem considerar a ordem

Resposta:

$$\frac{\frac{n!}{n-m!}}{m!} = \frac{n!}{(n-m)! \cdot m!} = \binom{1}{2} = Cn, m$$

Combinação de n, n a m

3.1 Definição 2

O número $\binom{n}{m} = \dfrac{n!}{n-m! \cdot m!}$, onde $n, m \in \mathbb{Z}_+$ e $m \leq n$, denomina-se "coeficiente binomial".

3.1.1 Exemplo 7

Dentre 5 mulheres e 7 homens, quantas comissões diferentes podem-se formar com duas mulheres e três homens?

Resposta:

E_H: $\binom{7}{3} = n_H$

E_M: $\binom{5}{2} = n_M$

$$n_H \cdot n_M = \binom{7}{3} \cdot \binom{5}{2} = 35 \cdot 10 = 350$$

E se dois homens se recusarem a trabalhar juntos?

Resposta:

$$n_H \cdot n_M = \left[\underbrace{\binom{7}{3}}_{n_H} \cdot \binom{5}{1} \right] \cdot \underbrace{\binom{5}{2}}_{n_M} = (35 - 5) \cdot 10 = 300$$

Início da aula de 26/09/2018

3.1.2 Exemplo 8

De quantas maneiras diferentes podemos arranjar linearmente $m = 3$ bolas pretas e $n = 5$ bolas brancas sem que duas bolas pretas pequenas fiquem lado a lado?

Desenvolvimento:

$$\frac{8!}{5! \cdot 3!} = 336$$

$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = 20$$

Resposta:

$$\binom{n+1}{m}$$

3.2 Proposição 1

$$\frac{n!}{(n-m)! \cdot m!} = \binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1} \text{ para todos } n, m \in \mathbb{N}.$$

3.3 Triângulo de Pascal

$$\begin{array}{c|cccc}
n & & & & \\
\hline
0 & \binom{0}{0} & & & \\
1 & \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & \\
2 & \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & \\
3 & \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} \\
\hline
 & 0 & 1 & 2 & 3 \\
\hline
 & \multicolumn{4}{c}{m}
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccccccc}
n & & & & & & & & \\
\hline
0 & 1 & & & & & & & \\
1 & 1 & 1 & & & & & & \\
2 & 1 & 2 & 1 & & & & & \\
3 & 1 & 3 & 3 & 1 & & & & \\
4 & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & & \\
5 & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & & \\
6 & 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 & \\
7 & 1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 1 \\
\hline
 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\
\hline
 & \multicolumn{8}{c}{m}
\end{array}$$

Obs.: se plotarmos uma curva, ela terá a forma de uma curva gaussiana/curva de Gauss.

3.4 Teorema 2 (Binomial)

Se $a, b \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, então:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i} = \binom{n}{0} a^0 b^n + \binom{n}{1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{2} a^2 b^{n+1} + \dots$$

3.4.1 Exemplo 9

Resposta:

$a + b^4 = \binom{4}{0} a^0 b^4 + \binom{4}{1} + a^1 b^3 + \binom{4}{2} a^2 b^2 + \binom{4}{3} a^3 b^1 + \binom{4}{4} a^4 b^0 = b^4 + 4ab^3 + 6a^2b^2 + 4a^3 6 + a^4$

3.4.2 Exemplo 10

Quantos subconjuntos tem um conjunto com n elementos? Quantos subconjuntos com m elementos tem um conjunto com n elementos?

Resposta:

$$\sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} 1^m \cdot 1^{n-m} = (1+1)^m = 2^m$$

4 Coeficientes e Teorema Multinomial

4.1 Definição 3

Se $n, n_1, n_2, \dots, n_r \in \mathbb{Z}_+$ e $r \in \mathbb{N}, r > 2$ forem t. q. $n_1 + n_2 + \dots + n_r = n$ o coeficiente multinomial.

$\binom{n}{n, n_2, \dots, n_r}$ define-se por $\dfrac{n!}{n_1! n_2! \dots n_r!}$

4.2 Teorema 3 (Multinomial)

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_r)^n = \sum \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r} \cdot x_1^{n_1} \cdot x_2^{n_2} \cdot x_3^{n_3} \cdot \cdots \cdot x_r^{n_r}$$

4.2.1 Exemplo 12

O Exemplo 11 será abordado depois

Enunciado suprimido. $(\overbrace{a}^{1} + \overbrace{b}^{1} + \overbrace{c}^{1})^3 = ?$

Resposta:

$\binom{3}{3,0,0} a^3b^0c^0 + \binom{3}{0,3,0} a^0b^3c^0 + \binom{3}{0,0,3} c^3 + \binom{3}{3,0,0} a^3b^0c^0 + \binom{3}{2,1,0} a^2b^1c^0 + \binom{3}{2,0,1} a^2b^0c^1 + \binom{3}{1,2,0} ab^2 + \binom{3}{0,2,1} b^2c + \binom{3}{1,0,2} ac^2 + \binom{3}{0,1,2} bc^2 + \binom{3}{1,1,1} abc$

Qual a soma dos coeficientes multinomiais?

Resposta:

$(1 + 1 + 1)^3 = 3^3 = 27$

Faltei na aula de 08/10/2018

Motivo da falta: atraso.

Início da aula de 10/10/2018

5 Teoria Axiomática da Probabilidade

A teoria está centrada em três termos, que conformam o **Espaço de Probabilidade**:

- Espaço amostral (Ω)
- Espaço de eventos (ε)

- Medida de probabilidade ($\mathbb{P}$)

Também são adotadas as notações P, $\Pr$, $\mathcal{P}$ e $\wp$

Ao invés da letra omega (Ω), Ross (2010) usa a letra S, de *sample*, sendo sample amostra em inglês. Quanto a $\mathbb{P}$, um estudo matemático mais aprofundado requer se debruçar sobre a Teoria da Medida e Integração.

5.1 Espaço amostral

Ideia: um conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento aleatório. Símbolo: Ω, S.

$$\omega \in \Omega$$

5.1.1 Exemplo 1

Lançamento de uma moeda.

$\Omega = \{x, c\}, \{0, 1\}$

5.1.2 Exemplo 2

Lançamento de duas moedas.

$\Omega = \{0, 1\} \times \{0, 1\} = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$

5.1.3 Exemplo 3

Lançamento de n moedas.

$\{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \cdots \times \{0, 1\} = \{0, 1\}^n$

5.1.4 Exemplo 4

Lançamento de 3 dados.

$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^3$

5.1.5 Exemplo 5

Lançamento de infinitas moedas.

$\Omega = \{0,1\} \times \{0,1\} \times \{0,1\} \times \cdots \times \{0,1\} \doteq \{0,1\}^{\mathbb{N}}$

Obs.: acredito que os exemplos 4 e 7 foram suprimidos, provavelmente por questão de tempo

5.1.6 Exemplo 7

Tempo de vida (em horas) de uma lâmpada.

$\Omega = [0 + 00] \ni t$

5.1.7 Exemplo 8

Número aleatório.

$\Omega[0,1]$

5.2 Eventos

5.2.1 Definição 2

Definição preliminar

Um evento é um subconjunto de Ω.

5.2.2 Exemplo 9

Exemplo 9 $\Rightarrow$ Exemplo 1

$\Omega = \{c,k\}, \mathbb{P}(\Omega) = \{\{c\},\{k\},0,\{c,k\}\}$

$E = \{c\} \subset \{c,k\}$

$E = c \in \{c,k\}$

Preciso revisar isso aqui!

5.2.3 Exemplo 10

Moeda.

Exemplo 10 $\Rightarrow$ Exemplo 2

$\Omega = \{c, k\}^2$

$|\Omega| = 2^2 = 4$

$|\mathbb{P}(\Omega)| = 2^4 = 16$

$E = \{(k, k), (k, c), (c, k)\}$

Lê-se em português: "saiu pelo menos 1 coroa"

$E^c = \{(c, c)\}$

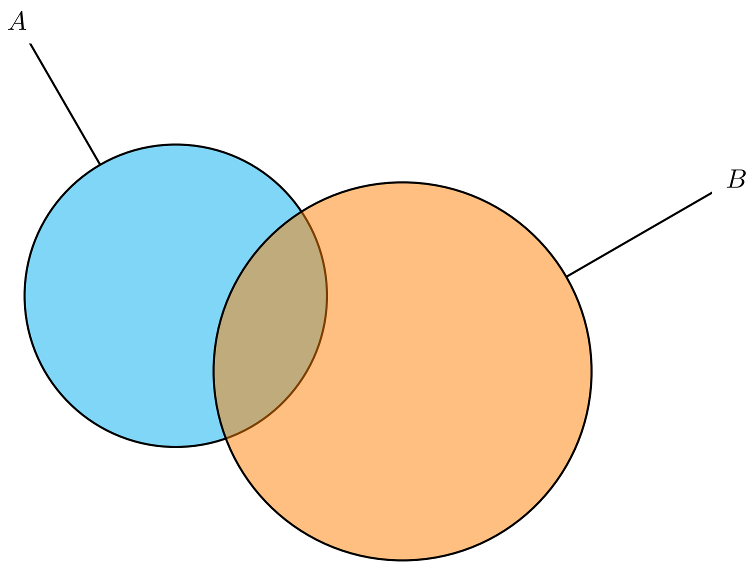
Lê-se em português: "não saiu coroa"

Faltei na aula de 17/10/2018

Motivo da falta: entrevista na PMSP/SMDU.

Início da aula de 22/10/2018

Prof. Thomas recorda a fórmula $P(A \bigcup B) = P(A) + P(B) - P(A \bigcap B)$, usada na última aula. Comenta que ela pode ser usada para áreas, afinal, a probabilidade é uma medida.



Prof. Thomas constrói ainda duas outras fórmulas, ampliando a lógica para quatro blocos:

$P(A\bigcup B\bigcup C) = P(A)+P(B)+P(C)-P(A\bigcap B)-P(A\bigcap C)-P(B\bigcap C)+P(A\bigcap B\bigcap C)$

$P(A\bigcup B\bigcup C\bigcup D) = P(A)+P(B)-P(C)+P(D)-P(A\bigcap B)-\cdots+P(A\bigcap B\bigcap C)+\cdots-P(A\bigcap B\bigcap C\bigcap D)$.

A fórmula inicial diz respeito à Proposição 5.

5.3 Proposição 6

Fórmula de Inclusão-Exclusão. Se $E_1, E_2, \ldots, E_n$ forem eventos em um espaço amostral Ω e $\mathbb{P}$ for uma medida de provabilidade (em ε), então $P(U_{i=1}^{n} E_i) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i) - \sum_{i_1 \leq i_2} P(E_{i_1} \bigcap E_{i_2}) + \sum_{i_1 \leq i_2 \leq i_3} P(E_{i_1} \bigcap E_{i_2} \bigcap E_{i_3}) - \cdots + (-1)^{n+1} P(n_{i=1}^{n} E_i)$

5.3.1 Exemplo 17

O exemplo não está completo

(b) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$P(\{i\}) = \frac{1}{6}, i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

$A = \{1, 2\}, B = \{1, 3\}, C = \{1, 4\}, D = \{1, 5\}$

5.4 Proposição 7

Desigualdades de Bonferroni. Primeira desigualdade de Bonferroni: subaditividade.

$$P(U_{i=1}^{n} E_i) \leq \sum_{i=1}^{n} P(E_i)$$

5.4.1 Definição 4

A tríade $(\Omega, \varepsilon, \mathbb{P})$ denomina-se **Espaço de Probabilidade**.

5.5 Espaços Dep. Equiprováveis

Resumo:

$\Omega = w_1, w_2, \ldots, w_n, |\Omega| = n$

$\varepsilon = P(\Omega), |\varepsilon| = 2^n$

$$\underbrace{\mathbb{P}(\{w_i\}) = \frac{1}{n}, i = 1, 2, \ldots, n}_{\mathbb{P}=\frac{|E|}{|\Omega|}=\frac{|E|}{n}}$$

$\frac{|E|}{|\Omega}$: casos favoráveis; $\frac{|E|}{n}$: total de casos

5.5.1 Exemplo 18

Jogam-se dois dados (honestos). Qual a probabilidade de a soma das faces observadas ser 8?

Resposta:

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2, |\Omega| = 36$

$\varepsilon = \mathcal{P}(\Omega); |\varepsilon| = 2^{36}$

$E\{(i, j)i + j = 8\} = \{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\}; |E| = 5$

$\mathcal{P}(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{5}{36} \approx 14\%$

5.5.2 Exemplo 21

Problema dos aniversários. Em uma sala há 23 pessoas. Qual a probabilidade de que ninguém aniversarie no mesmo dia?

Pode ser oportuno ler Morin (2016, p. 85–86)

Resposta:

$|\Omega| = 365^{23}$

$|E| = 365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \cdots \cdot 343 = A365, 23$

$\mathcal{P}(E) = \frac{A365,23}{365^{23}} = \frac{\frac{365!}{342!}}{365^{23}} = 49,27\%$

A prova 1 versa sobre os capítulos e listas 1 e 2. Data prevista: 05/11/2018

Início da aula de 24/10/2018

Voltaremos ao Exemplo 19. A ideia foi explicar que não há implicações negativas ao "etiquetar" as bolinhas. Professor comenta também brevemente sobre o Teorema da Probabilidade Total. Devemos estudá-lo dentro de uma ou duas aulas.

5.5.3 Exemplo 19

Com reposição.

$$\overbrace{\circ \bullet \bullet}^{E_{bpp}} \qquad \overbrace{\bullet \circ \bullet}^{E_{pbp}} \qquad \overbrace{\bullet \bullet \circ}^{E_{ppb}}$$

$$\frac{6}{11}\cdot\frac{5}{11}\cdot\frac{5}{11}+\frac{5}{11}\cdot\frac{6}{11}\cdot\frac{5}{11}+\frac{5}{11}\cdot\frac{5}{11}\cdot\frac{6}{11}$$

$$= \frac{450}{113} \approx 33,81\%$$

$E = E_{bpp} \cup E_{pbp} \cup E_{ppb} \rightarrow \mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(E_{bpp}) + \mathcal{P}(E_{pbp}) + \mathcal{P}(E_{ppb}) = 3 \cdot \frac{150}{113} = \frac{450}{113}$

$|E_{bpp}| = 6 \cdot 5 \cdot 5; |E_{pbp}| = 5 \cdot 6 \cdot 5; |E_{ppb}| = 5 \cdot 5 \cdot 6 = 5 \cdot 5 \cdot 6$

$\mathcal{P}(E) = \frac{|E|}{|\Omega|}$

$|\Omega| = 11^3$

5.5.4 Exemplo 20

Urna: 20 brancas + 20 pretas. As bolas são extraídas sequencialmente e acondicionadas em 20 caixas com 2 bolas em cada caixa.

(a) Qual a probabilidade d eque todas as caixas tenham bolas da mesma cor?

Resposta:

$$|\Omega| = \frac{40!}{(2!)^{20}}$$

$E =$ todas as caixas com a mesma cor, *i.e.* 10 caixas brancas + 10 caixas pretas.

$\frac{20!}{10!10!}$embaralhamentos possíveis $\binom{20}{10}$

$\mathcal{P}(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{20!}{10!^2} \cdot \frac{20!}{2!^{10}} \cdot \frac{20!}{2!^{10}} = \frac{40!}{2!^{30}}$

$= \frac{20!^3}{40!(10!)^2}$ = aproximadamente 1 chance em 746.100

Preenchimento das caixas brancas/pretas: $\binom{20}{2} \cdot \binom{28}{2} \cdot \cdots \cdot \binom{2}{2} = \frac{20!}{(2!)^{10}} = \frac{20!}{(2!)^{10}}$

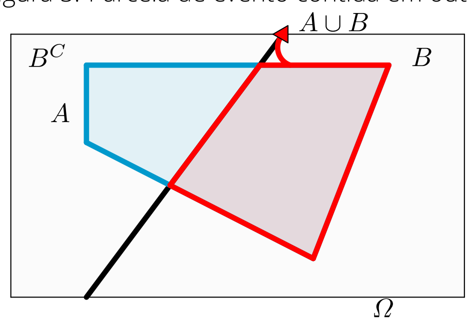
Pelo PBC (vide Página 4): $|E| = \binom{20}{10} \cdot \frac{20!}{2!^{10}} \cdot \frac{20!}{2!^{10}}$

Início da aula de 31/10/2018

5.6 Probabilidade condicional

Thomas comenta que a ideia da probabilidade condicional já estava sendo discutida informalmente por nós.

Figura 5: Parcela de evento contida em outro



Se possuímos interesse na parcela do avento A que está contida em B (vide Figura 5), temos: $\mathcal{P}(A|B) = \frac{\mathcal{P}(A \cap B)}{\mathcal{P}(B) > 0}$

5.6.1 Definição 1

Seja $(\Omega, \epsilon, \mathcal{P})$ um espaço de probabilidade. Se $A, B \in \varepsilon$ e $\mathcal{P}(B) > 0, \mathcal{P}(A|B)$ a probabilidade (condicional) de A dado B:

Lê-se probabilidade de A dado B

$$\mathcal{P}(A|B) = \frac{\mathcal{P}(A \cap B)}{\mathcal{P}(B)}$$

Em espaços equiprováveis:

$$\mathcal{P}(A|B) = \frac{\mathcal{P}(A \cap B)}{\mathcal{P}} = \frac{\frac{A \cap B}{\Omega}}{\frac{|B|}{\Omega}} = \frac{A \cap B}{|B|}$$

Em $\frac{A \cap B}{|B|}$, A é a quantidade de casos favoráveis após a informação, enquanto $|B|$ é a quantidade de casos após ser dada a informação

5.6.2 Exemplo 1

Uma moeda honesta é lançada três vezes, qual a probabilidade de observarem-se mais caras, sabendo-se que deu cara no primeiro lançamento?

Resposta:

$\Omega = \{(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(0,1,1),(1,0,0),(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\} = \{0,1\}^3$

A: mais caras do que coroas $= \{(0,1,1),(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\}$

B: cara no primeiro lançamento $= \{(1,0,0),(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\}$

Portanto $\mathcal{P}(A|B) = \frac{3}{4} = 75\%$

5.6.3 Exemplo 2

Urna com 10 bolas brancas, 10 bolas pretas. Foram 10 as bolas extraídas sequencialmente sem reposição. Observam-se 7 bolas brancas e 3 pretas. Qual a probabilidade de a primeira bola extraída ter sido branca?

$\Omega = A_{20,10} = 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot \dots \cdot 11 = \frac{20!}{10!}$

B: sete brancas e três pretas na amostra

A: primeira extração branca

$A \cap B$!

$$|B| = \binom{\overbrace{10}^{\text{escolha brancas}}}{7} \cdot \binom{10}{\underbrace{3}_{\text{escolha pretas}}} \cdot 10!$$

$$|A \cap B| = 10 \cdot \left(\underbrace{\begin{matrix} 9 \\ 6 \end{matrix}}_{\text{6 outras brancas}} \right) \cdot \left(\underbrace{\begin{matrix} 10 \\ 3 \end{matrix}}_{\text{3 pretas}} \right) \cdot \underbrace{9!}_{\textit{shuffle} \text{ das 9 posições}}$$

$$\mathcal{P}(A|B) = 10 \cdot \frac{\binom{9}{6} \cdot \binom{10}{3} \cdot 9!}{\binom{10}{7} \cdot \binom{10}{3} \cdot 10!} = \frac{10 \cdot \frac{\cancel{9!}}{\cancel{6!3!}} \cdot \frac{\cancel{10!}}{\cancel{7!3!}} \cdot 9!}{\frac{\cancel{10!}}{\cancel{7!3!}} \cdot \frac{\cancel{10!}}{\cancel{3!7!}} \cdot 10!} = \frac{7}{10}$$

5.6.4 Exemplo 3

Exemplo 3 $\Leftarrow$ Exemplo 2

Urna com 6 bolas brancas e 5 bolas pretas. Extraem-se 3 bolas sem reposição.

E_{bpp}: 1ª branca, 2ª preta, 3ª preta

$|E_{bpp}| = 6 \cdot 5 \cdot 4$

$\Omega = 11 \cdot 10 \cdot 9$

$\mathcal{P}(E_{bpp}) = ?$

$$\underbrace{6}_{\mathcal{P}(E_1)} \cdot \underbrace{5}_{\mathcal{P}(E_2|E_1)} \cdot 4 \rightarrow \mathcal{P}(E_3|E_1 \cap E_2)$$

$$\left.\begin{aligned} E_1 &= E_{bxx} \\ E_2 &= E_{xpx} \\ E_3 &= E_{xxp} \end{aligned}\right\} E_1 \cap E_2 \cap E_3 = E_{bpp}$$

Conclusão: $\mathcal{P}(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = \mathcal{P}(E_1) \cdot \mathcal{P}(E_2|E_1) \cdot \mathcal{P}(E_3|E_1 \cap E_2)$

5.6.5 Teorema 1 (Regra da Multiplicação)

Dados um espaço de probabilidade $(\Omega, \varepsilon, \mathcal{P})$ e $E_1, E_2, \ldots E_n \in \varepsilon$ t. q. $\mathcal{P}(E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_{n-1}) > 0$, vale a fórmula:

$\mathcal{P} = (E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap \cdots \cap E_n) = \mathcal{P}(E_1) \cdot \mathcal{P}(E_2|E_1) \cdot (E_3|E_1 \cap E_2) \cdot \cdots \cdot \mathcal{P}(E_n|E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_{n-1})$

Prova:

$$\cancel{\mathcal{P}(E_1)} \cdot \frac{\mathcal{P}(\cancel{E_1 \cap E_2 \cap E_3})}{\mathcal{P}(\cancel{E_1 \cap E_2})}, \ldots, \frac{\boxed{\mathcal{P}(E_1 \cap E_2 \cap \ldots E_n)}}{\mathcal{P}(\cancel{E_1 \cap E_2 \cap \ldots E_{n-1}})} = \mathcal{P}(n_{i=1}^{n} E_i) \text{ C.Q.D.}$$

Como se queria demonstrar (*quod erat demonstrandum*)

5.6.6 Exemplo 4

Um baralho com 52 cartas é distribuído entre 4 jogadores. Qual a probabilidade de que cada jogador receba 1 ás?

Resposta:

E_i: o i-ésimo jogador recebe exatamente 1 ás, $i = 1, 2, 3, 4$

$E = E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4$: 1 ás em cada mão

$$\mathcal{P} = \underbrace{\mathcal{P}(E_1)}_{\frac{\binom{4}{1}\cdot\binom{48}{12}}{\binom{52}{13}}} \cdot \underbrace{\mathcal{P}(E_2|E_1)}_{\frac{\binom{3}{1}\cdot\binom{36}{12}}{\binom{39}{13}}} \cdot \underbrace{\mathcal{P}(E_3|E_1 \cap E_2)}_{\frac{\binom{2}{1}\cdot\binom{24}{12}}{\binom{26}{13}}} \cdot \underbrace{\mathcal{P}(E_4|E_1 \cap E_2 \cap E_3)}_{\frac{\binom{1}{1}\cdot\binom{12}{12}}{\binom{13}{13}}} =$$

$$\frac{39 \cdot 26 \cdot 13}{51 \cdot 50 \cdot 49} \approx 10,5\%$$

Sem usar a probabilidade condicional:

$$\overbrace{01\ 02 \dots 13}^{\text{Primeira}}\ \overbrace{14 \dots 26}^{\text{Segunda}}\ \overbrace{27 \dots 39}^{\text{Terceira}}\ \overbrace{40 \dots 52}^{\text{Quarta}} =$$

$$\frac{52!}{13!13!13!13!} = \binom{52}{13, 13, 13, 13}$$

$|\Omega| = 52!$

$|\Omega| = 13!^4$

$|E| = 48! = 4!$

$|E| = 12!^4 = 4!$

Início da aula de 07/11/2018

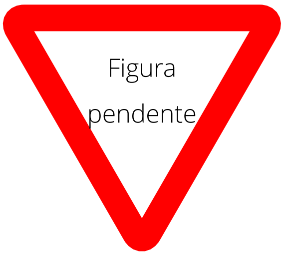
5.6.7 Teorema 2 (Probabilidade Total)

$(U_{i=1}^n E_i) = \Omega$

$A = A \cap \Omega = A \cap (U_{i=1}^n E_i) = U_{i=1}^n (A \cap E_i)$

$\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(U_{n=1}^n A \cap E_i) = \sum_{i=1}^n \mathcal{P}(A \cap E_i)$

Figura 6: Pedaços adjuntos



Falta a figura dos pedaços adjuntos

$$\mathcal{P}(A|E_i) = \frac{\mathcal{P}(A \cap E_i)}{\mathcal{P}(E_i)} = \textstyle\sum_{i=1}^{n} \underline{\mathcal{P}(A|E_i)\cdot \mathcal{P}(E_i)}$$

Números que somam um i para dois E_i (média ponderada)

Probabilidade condicional

Em um exemplo prático: $(\Omega, \epsilon, \mathcal{P})$ –Se $E_1, E_2, \ldots, E_n, A \in \varepsilon$ forem dois a dois disjuntos, $U_{i=1}^{n} E_i = \Omega$ e $\mathcal{P}(E_i) > 0, i = 1, 2, \ldots, n$ então:

$$\mathcal{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{P}(A|E_i) \cdot \mathcal{P}(E_i)$$

5.6.8 Exemplo 3

Um dado honesto com quatro faces $(1, 2, 3, 4)$ é lançado. Se o resultado for 1 ou 2 o dado é lançado uma segunda vez. Qual a probabilidade de a soma dos resultados ser pelo menos 4?

Desenvolvimento e resposta:

E_i: saiu i no primeiro lançamento, $i = 1, 2, 3, 4$

$\mathcal{P}(E_i) = \frac{1}{4}, i = 1, 2, 3, 4$

A: soma menos 4

$\mathcal{P}(A|E_i) = \frac{1}{2}$

Probabilidade da soma ser 4 quando caindo $1, 2, 3, 4$ no dado

$\underline{\mathcal{P}(A|E_2)} = \frac{3}{4}$

$\mathcal{P}(A|E_3)$: não pode mover o dado (contra regra); chance é 0

$\mathcal{P}(A|E_4) = 1$

$$\mathcal{P}(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2+3+0+4}{16} = \boxed{\frac{9}{16}}$$

Probabilidade é um número entre 0 e 1!

Olhando a Figura 6:

$$\mathcal{P}(E_i|A) = \frac{\mathcal{P}(A \cap E_i)}{\mathcal{P}(A)} = \frac{\mathcal{P}(A|E_K) \cdot \mathcal{P}(E_K)}{\sum_{i=1}^{n} \mathcal{P}(A|E_i) \cdot \mathcal{P}(E_i)}$$

$$\mathcal{P}(A \cap E_i) = \{\mathcal{P}(E_i) \cdot \mathcal{P}(A|E_i) \cup \mathcal{P}(A) \cdot \mathcal{P}(E_i|A)\}$$

5.6.9 Teorema 3 (Bayes)

Pode ser oportuno conferir Ross (2010, p. 89)

Em um espaço de probabilidade $(\Omega, \varepsilon, \mathcal{P})$, se $E_1, E_2, \ldots, E_n, A \in \varepsilon$ forem dois a dois disjuntos, $U_{i=1}^{n} E_1 = \Omega$ e $P(E_i) > 0, i = 1, 2, \ldots, n$, então:

$$\mathcal{P}(E_K|A) = \frac{P(A|E_K) \cdot \mathcal{P}(E_K)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|E_i) \cdot \mathcal{P}(E_i)}, K = 1, 2, \ldots, n$$

5.6.10 Exemplo 4

1 a cada 10.000 pessoas é HIV positivo. Teste tem 99% de confiabilidade. Qual a probabilidade de um paciente com teste positivo ser HIV positivo?

Desenvolvimento e resposta:

A: teste positivo

E_1: soro-positivos, $\mathcal{P}(E_1) = \frac{1}{10.000}$

E_2: soro-negativos, $\mathcal{P}(E_1) = \frac{9.999}{10.000}$

$\mathcal{P}(A|E_1) = 0,99$

$\mathcal{P}(A|E_2) = 0,01$

$$\mathcal{P}(E_1|A) = \frac{\mathcal{P}(A|E_1) \cdot \mathcal{P}(E_1)}{\mathcal{P}(A|E_1) \cdot \mathcal{P}(E_1) + \mathcal{P}(A|E_2) \cdot \mathcal{P}(E_2)} = \frac{0,99 \cdot \frac{1}{10.000}}{0,99 \cdot \frac{1}{10.000} + 0,01 \cdot 0,9999} \approx \frac{1}{100} = 1\%$$

5.6.11 Exemplo 5

Três moedas em uma urna: 2 honestas, 1 duas caras.

- Sorteia-se uma moeda;
- Lança-se a moeda sorteada;
- Observa-se a cara.

Qual a probabilidade de a moeda escolhida ter sido a de duas caras?

$\mathcal{P}(E_2|A) = ?$

Desenvolvimento e resposta:

A: observa-se cara no lançamento

E_1: escolhe-se moeda honesta $\rightarrow \mathcal{P}(E_1) = \frac{2}{3}$

E_2: escolhe-se moeda com duas caras $\rightarrow \mathcal{P}(E_2) = \frac{1}{3}$

$\mathcal{P}(A|E_1) = \frac{1}{2}$, $\mathcal{P}(A|E_2) = 1$

$$\frac{\mathcal{P}(A|E_2)\cdot\mathcal{P}(E_2)}{\mathcal{P}(A|E_1)\cdot\mathcal{P}(E_1)+\mathcal{P}(A|E_2)\cdot\mathcal{P}(E_2)} = \frac{1\cdot\frac{1}{3}}{\underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}+1+\frac{1}{3}}_{\mathcal{P}(A)=\frac{2}{3}}} = \frac{1}{2}$$

A: observaram-se 2 caras

$\mathcal{P}(A|E_1) = \frac{1}{4}$

$\mathcal{P}(A|E_2) = 1$

$$\mathcal{P}(E_2|A) = \frac{1\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}+1\cdot\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{6}+\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}$$

Início da aula de 14/11/2018

5.7 Independência (de eventos)

Pode ser oportuno conferir Ross (2010, p. 106)

5.7.1 Definição 2

Em um espaço de probabilidade (Ω, ϵ, $\mathcal{P}$), dois eventos A, B são independentes, sse $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cdot \mathcal{P}(B)$.

Lê-se "sse" como "se e somente se"

Ideia:

$$\left.\begin{matrix} > \mathcal{P}(A) \\ = \mathcal{P}(A) \\ < \mathcal{P}(A) \end{matrix}\right\} \frac{\mathcal{P}(A \cap B)}{\mathcal{P}(B)} = \mathcal{P}(A|B)$$

Para $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cdot \mathcal{P}(B)$, se o sinal de igualdade for trocado por $>$ então há correlação positiva; se o sinal de igualdade for trocado por $<$ então há correlação negativa

Observações:

1. Se se A e B forem independentes, então $\mathcal{P}(A|B) = \mathcal{P}(A)$ e $\mathcal{P}(B|A) = \mathcal{P}(B)$;
2. Se se $\mathcal{P}(A \cap B) > \mathcal{P}(A) \cdot P(B)$, então $\mathcal{P}(A|B) > \mathcal{P}(A)$ e $\mathcal{P}(B|A) > \mathcal{P}(B) \rightarrow$ A e B positivamente correlacionados;
3. Se se $\mathcal{P}(A \cap B) < \mathcal{P}(A) \cdot P(B)$, então $\mathcal{P}(A|B) < \mathcal{P}(A)$ e $\mathcal{P}(B|A) < \mathcal{P}(B) \rightarrow$ A e B negativamente correlacionados;
4. Se A e B forem positivamente correlacionados, então os pares (A, B^C) e (A^C, B) são positivamente correlacionados;
5. Se A e B forem negativamente correlacionados, então os pares (A, B^C) e (A^C, B) são negativamente correlacionados;
6. Se $\mathcal{P}(A) \in \{\Omega, 1\}$ ou $\mathcal{P}(B) \in \{0, 1\}$, então A e B são independentes.

5.7.2 Exemplo 9

Lançamento de 2 dados honestos.

Desenvolvimento e resposta:

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^2, \mathcal{P}(\{(i,j)\}) = \overbrace{\frac{1}{36}}^{\forall (i,j) \in \Omega} \rightarrow \text{espaço equiprovável}$$

$$\underbrace{\{(i,j)\}}_{\frac{1}{36}} = \underbrace{\overbrace{\{(k,l) \in \Omega i K = i\}}^{i \text{ no primeiro dado}}}_{\frac{1}{6}} \cup \underbrace{\overbrace{\{(K,l) \in \Omega\} : l = j}^{j \text{ no segundo dado}}}_{\frac{1}{6}}$$

$$\frac{1}{36} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$$

E_1: "soma das faces é 6" $= \{(i,j) : i+j=6\}$

E_2: "soma das faces é 7" $= \{(i,j) : i+j=6\}$

F: 1º lançamento é 4

G: 2º lançamento é 3

$|E_1| = 5 \to \mathcal{P}(E_1) = \frac{5}{36}$

$|E_2| = 6 \to \mathcal{P}(E_2) = \frac{1}{6}$

$|F| = 6 \to \mathcal{P}(F) = \frac{1}{6}$

$|G| = 6 \to \mathcal{P}(F) = \frac{1}{6}$

$$\underbrace{\mathcal{P}(E_1|F) > \mathcal{P}(E_1) = \frac{5}{36}}_{\frac{|E_1 \cap F|}{|F|} = \frac{1}{6} = \frac{5}{6}}$$

$G \cap E_2 = \{(4,3)\}$

$$\mathcal{P}(F|E_1) = \frac{\mathcal{P}(F \cap E_1)}{\mathcal{P}(E_1)} = \frac{|F \cap E_1|}{|E_1|} = \frac{1}{5} > \frac{1}{6} = \mathcal{P}(F)$$

$$\mathcal{P}(G|E_2) = \frac{\mathcal{P}(G \cap E_2)}{\mathcal{P}(E_2)} = \frac{|G \cap E_2|}{|E_2|} = \frac{1}{6} = \frac{1}{36} = \frac{|G|}{|\Omega|} = \mathcal{P}(G)$$

5.7.3 Exemplo 10

Dado honesto de quatro faces.

$\Omega = \{1,2,3,4\}, \mathcal{P}(\{i\}) = \frac{1}{4}, i = 1,2,3,4$

$A = \{1,2\}, B = \{1,3\}, C = \{1,4\}$

$\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A \cap C) = \mathcal{P}(B \cap C) = \mathcal{P}(\{1\}) \to A \perp B, A \perp C, B \perp C$. Mas $\mathcal{P}(A \cap B \cap C) = \mathcal{P}(\{1\}) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{1} = \mathcal{P}(A) \cdot \mathcal{P}(B) \cdot \mathcal{P}(C)$

5.7.4 Definição 2'

Em um espaço de probabilidade três eventos A, B, C são independentes, sse:

(i) $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cdot \mathcal{P}(B)$

(ii) $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cdot \mathcal{P}(C)$

(iii) $\mathcal{P}(B \cap C) = \mathcal{P}(B) \cdot \mathcal{P}(C)$

(iv) $\mathcal{P}(A \cap B \cap C) = \mathcal{P}(A) \cdot \mathcal{P}(B) \cdot \mathcal{P}(C)$

5.7.5 Definição 2" (Final)

Uma coleção arbitrária de eventos $\{E_i\}i \in I$ é denominação de uma **coleção de eventos independentes**, sse para todo subconjunto finito de índices $\{i_1, i_2, \ldots i_n\} \subset I, \mathcal{P}(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \cdots \cap E_{i_n}) = \mathcal{P}(E_{i_1}) \cdot \mathcal{P}(E_{i_2}) \cdot \cdots \cdot \mathcal{P}(E_{i_n})$

Lista de anotações

Referências

LIPSCHUTZ, S.; LIPSON, M. *Schaum's Outline of Probability*. Second edition. [S.l.]: McGraw-Hill Education, 2011. (Schaum's Outlines). ISBN 978-0-07-181658-8.

MORIN, D. J. *Probability: For the Enthusiastic Beginner*. [S.l.]: Createspace Independent Publishing Platform, 2016. ISBN 1523318678.

ROSS, S. *Probabilidade: um curso moderno com aplicações*. 8. ed. Porto Alegre: Bookman Editora, 2010. ISBN 978-85-7780-621-8.