FUNÇÕES DE SEGUNDO GRAU

CONTEÚDO DA LIÇÃO

1 INTRODUÇÃO

Estamos cada dia mais convencidos que diversas situações do nosso dia a dia, podem ser representadas por funções. As funções quadráticas estão muito presentes em aplicações da física, da química, da biologia, da administração, da engenharia, entre outras.

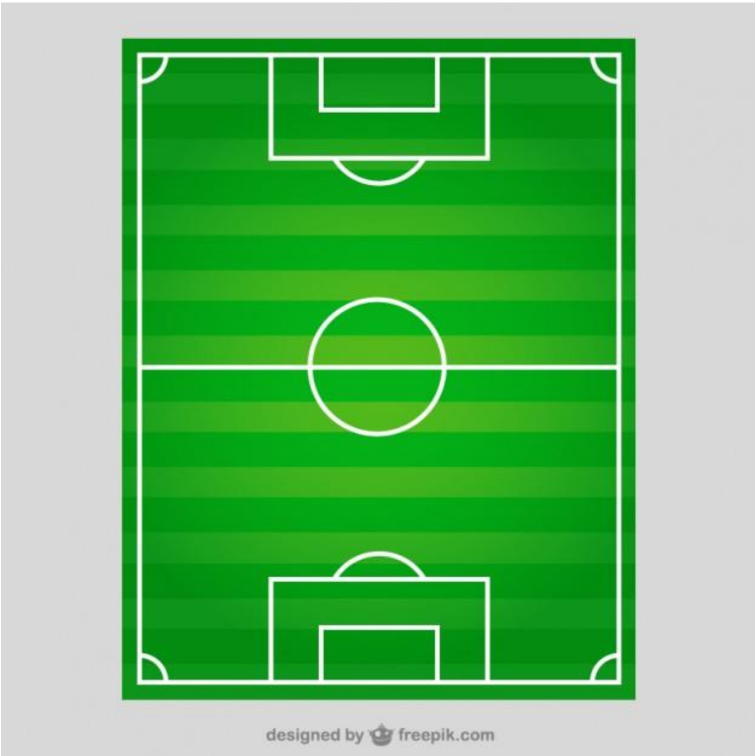
Porém os livros didáticos tradicionais normalmente utilizam linguagem mais formal para discuti-la. Uma abordagem abstrata e com menos aplicações. Porém podemos fazer dessa discussão conceitual, mas também prática.

Por exemplo: A parábola, naturalmente está presente numa variedade de situações, no lançamento de uma bola, no lançamento de um projétil, na área de um círculo, no corte de um cone. Esses exemplos citados, parecem não ter ligação, mas quando estudamos conceitos matemáticos, eles estão diretamente interligados conceitualmente. Veja abaixo o exemplo de uma parábola.

Considerando essa interligação entre conceito matemático e situações práticas, discutiremos características da função do segundo grau (ou funções quadráticas), veremos sua definição, determinação de zeros da função e seu vértice, estudo de sinais, como esboçar seu gráficos e aplicações.

2FUNÇÃO DO SEGUNDO GRAU

Um diretor de um clube de futebol, deseja cercar o campo de treinamento e outros aparatos esportivos que estão a sua volta com tela de alambrado. Tendo recebido 180 metros de tela, os diretores desejam saber quais as dimensões do terreno a cercar com a tela para que a área cercada, seja a maior possível. Sabendo que a largura tem medida x e altura tem medida (80-x).



Sabemos que para calcular a área de um retângulo, calculamos:

$$A = base \times altura$$

Então a função que representa a área que será cercada em torno do campo de treinamento será:

$$A = f(x) = x.(80 - x)$$

$$f(x) = -x^2 + 80x$$

Esta é a lei da função que representa a área da região que será cercada, em função da medida x.

Note que esta lei de função é dada por um polinômio de grau 2. Dizemos então, que esta é a representação de uma função de segundo grau, que veremos daqui em diante.

Também discutiremos resolução de problemas, como exemplo dado acima para ilustrar a estrutura de uma função de segundo grau.

Vamos relembrar sobre polinômios? Assista vídeo com atenção para relembrar características de um polinômio.

https://youtu.be/Qa1YqDWn61c

2.1Definição de Função do Segundo Grau

Seja $a, b \ e \ c \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$. Chama-se função do 2º grau a função definida $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, pela lei:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

O domínio de uma função do 2º grau é $\mathbb{R}$.

São exemplos de funções do 2º grau:

a) $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$

b) $f(x) = -x^2 + 4$

c) $f(x) = 5x^2 + 15x$

d) $f(x) = x^2 + x - 6$

e) $f(x) = x^2$

Algumas funções dos exemplos acima estão completas, ou seja, tem coeficientes a, b e c diferentes de zero. Porém temos algumas funções de 2º grau que chamamos incompletas, onde poderemos ter b ou c, iguais a zero e a função ainda continuam sendo uma função de 2º grau, pois o que a caracteriza é sempre ter $a \neq 0$.

Podemos também encontrar o valor numérico de uma função de 2º grau, sempre que for atribuído um valor para x (variável independente).

Exemplo:

Dada a função quadrática $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 + x - 6$.

a) Determine os coeficientes a, b e c;
b) $f(0), f(-2), f\left(\frac{1}{3}\right)$ e $f(10)$;
c) Se $x \in \mathbb{R}$, tal que $f(x) = -4$. Se existir, calcule x.
d) Se essa função tem RAÍZ (ou zero). Em caso positivo, calcule-o.

Resposta:

a) Pede-se os coeficientes da função, então:

$$a = 1, \qquad b = 1 \;\; e \; c = -6$$

b) Para calcular valores de y pedidos, devemos substituir na função de 2º grau, o valor de x dado, temos
   - $f(0) = 0^2 + 0 - 6 = -6$
   - $f(-2) = (-2)^2 + (-2) - 6 = 4 - 2 - 6 = -4$
   - $f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} - 6 = \frac{1}{9} + \frac{1}{3} - 6$ tirando MMC

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1 + 3 - 54}{9} = \frac{50}{9}$$

   - $f(10) = (10)^2 + 10 - 6 = 100 + 10 - 6 = 104$

c) Quando é dado valor de y, precisamos igualar a função de segundo grau, e encontraremos uma equação de 2º grau para resolver. Já estudamos anteriormente que para resolvermos uma equação de 2º grau, utilizamos fatoração (quando possível) ou fórmula de bháskara. Temos:

$$x^2 + x - 6 = -4$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4.1.(-2)}}{2.1}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

$$x_1 = -2 \;\; e \;\; x_2 = 1$$

$$S = \{-2, 1\}$$

d) Raízes ou zeros de uma função, são valores de x que encontramos e fazem de y igual a ZERO (y=0). Verificando se a função dada tem raízes:

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4.1.(-6)}}{2.1}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2}$$

$$x_1 = -3 \quad e \quad x_2 = 2$$

$$S = \{-3, 2\}$$

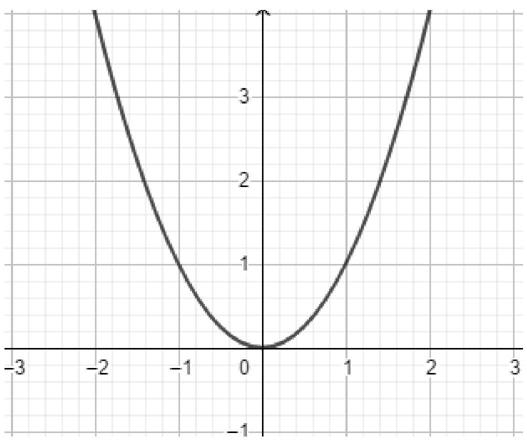
2.2 Gráficos funções do 2º grau

O gráfico de uma função do 2º grau, é uma curva chamada Parábola. Para desenhar uma parábola no Plano, precisamos reconhecer as características da função e obter alguns pontos que pertencem a curva. Vamos começar com dois exemplos:

Exemplo 01: Considere a função $f(x) = x^2$.

Vamos utilizar cinco valor para x e encontrar cinco valores para y.

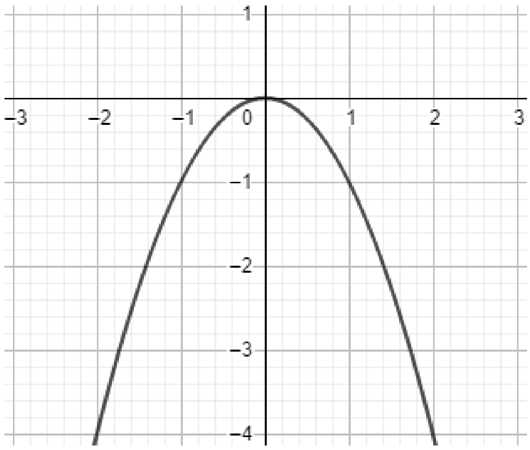
x	$f(x)$	**Par ordenado**
-2	4	(-2, 4)
-1	1	(-1, 1)
0	0	(0, 0)
1	1	(1, 1)
2	4	(2, 2)



Exemplo 02: Considere a função $f(x) = -x^2$.

Vamos utilizar cinco valores para x e encontrar cinco valores para y.

x	$f(x)$	**Par ordenado**
-2	-4	(-2, -4)
-1	-1	(-1, -1)
0	0	(0, 0)
1	-1	(1, -1)
2	-4	(2, -2)



Para Refletir!!!

Relacione os coeficientes com a posição das parábolas.

Porque não são suficientes dois pontos apenas para determinar o gráfico de uma função quadrática, como fizemos na função afim?

Analisando a abertura das duas parábolas do exemplo acima, percebemos que ela tem um ponto acima de todos os pontos ou um único ponto abaixo de todos os pontos na curva. Esse ponto é chamado de Vértice.

A parábola apresenta uma simetria em relação a reta que passa pelo vértice e é perpendicular ao eixo x.

- Quando o $a > 0$, a parábola tem a **concavidade voltada para Cima** e vértice é o menor ponto da curva;
- Quando o $a < 0$, a parábola tem a **concavidade voltada para Baix**o e vértice é o maior ponto da curva.

Considerando uma função de 2º grau:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

com $a, b\ e\ c \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$, o valor de a que determina se a parábola que representa a função é côncava para cima ou côncava para baixo.

Exemplos:

a) $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$ – Côncava para Cima
b) $f(x) = -x^2 + 4$ – Côncava para Baixo
c) $f(x) = 5x^2 + 15x$ – Côncava para Cima
d) $f(x) = x^2 + x - 6$ – Côncava para Cima

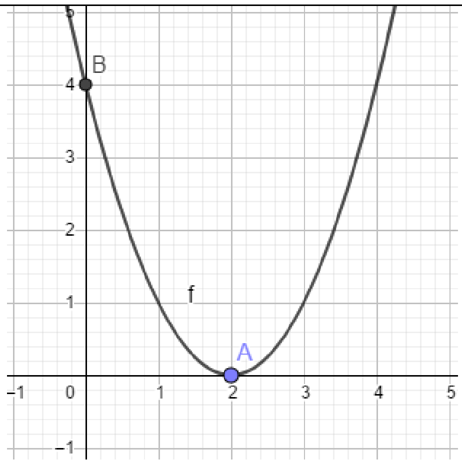
Já caracterizamos a curva, identificamos que é uma parábola, que pode ser côncava para cima ou para baixo, dependendo apenas no valor do coeficiente a.

Porém, para construir o gráfico de uma função de 2º grau, precisamos nos atentar a todos os detalhes importantes, que podemos chamar de principais elementos para construção de uma parábola.

Nessa discussão, falamos de Intersecções com os eixos. Vamos analisar os exemplos abaixo para fazermos essa discussão:

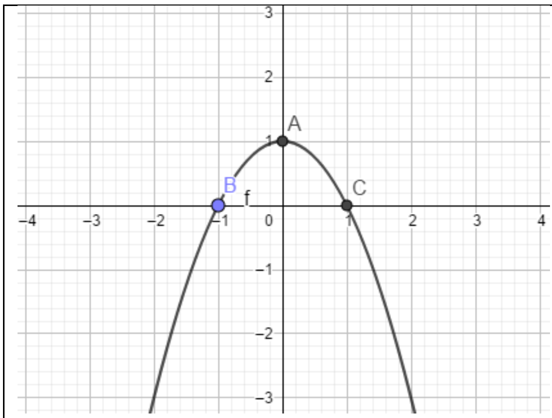
Exemplo 01: Considere a função:

$$f(x) = x^2 - 4x + 4$$

 	Percebemos que temos dois pontos que interceptam eixos nessa função. →Se $x = 0$, temos: $y = 0^2 - 4.0 + 4 = 4.$ Intercepto no eixo y em (0,4) →Se encontramos as raízes, para y= 0, temos: $$x^2 - 4x + 4 = 0$$ $$\Delta = 16 - 16 = 0$$ $x_1 = x_2 = 2.$ A parábola intercepta o eixo x em apenas um ponto (2,0) Observe que $\Delta = 0$

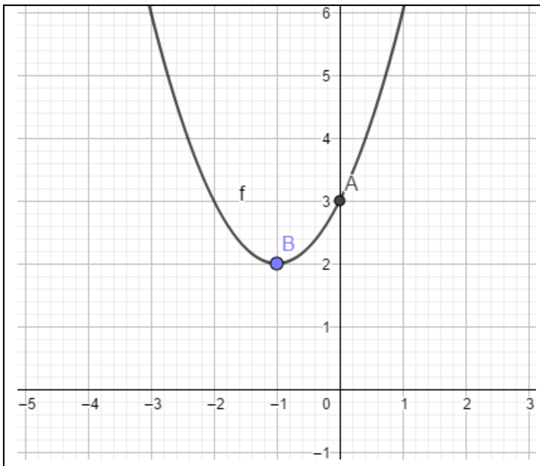
Exemplo 02: Considere a função:

$$f(x) = -x^2 + 1$$

 	Percebemos que temos três pontos que interceptam eixos nessa função. →Se $x = 0$, temos: $y = -0^2 + = 1.$ Intercepto no eixo y em (0,1) →Se encontramos as raízes, para y= 0, temos: $$-x^2 + 1 = 0$$ $$\Delta = 0 + 4 = 4$$ $x_1 = -2 \;\; e \;\; x_2 = 2.$ A parábola intercepta o eixo x em dois pontos (-2,0) e (2, 0). Observe que $\Delta > 0.$

Exemplo 02: Considere a função:

$$f(x) = x^2 + 2x + 3$$

	Percebemos que temos apenas um ponto que intercepta eixo nessa função. →Se $x = 0$, temos: $y = 0^2 + 2.0 + 3 = 3.$ Intercepto no eixo y em (0,3) – ponto A →Se tentarmos encontrar as raízes, teremos y= 0, temos: $x^2 + 2x + 3 = 0$ $\Delta = 4 - 12 = -8$ Não existe Raíz Real, portanto não irá interceptar o eixo x. Observe que $\Delta < 0$.

Podemos concluir que para interceptar o eixo y, basta assumir x=0.

Para a parábola interceptar o eixo x, precisamos assumir y=0, e encontrar as raízes da função, podendo interceptar o eixo x em até dois pontos, porém dependendo do valor do discriminante (Δ).

$\Delta = 0$	A função tem uma raiz real (duas raízes reais e iguais), portanto intercepta o eixo x em apenas um ponto.
$\Delta > 0$	A função tem duas raízes reais e distintas, portanto a parábola intercepta o eixo x em dois pontos.
$\Delta < 0$	A função não tem raízes reais, portanto a parábola não intercepta o eixo x.

Exemplo: Determine para que valores reais de m a função

$$f(x) = (2m - 1)x^2 - 3x + 1$$

tem raízes reais e diferentes.

Resolução:

Para que a função tenha raízes reais e diferentes, seu discriminante precisa assumir valores maiores que zero $\Delta > 0$ então:

$$\Delta = 3^2 - 4.(2m - 1).1$$

$$9 - 8m + 4 > 0$$

$$-8m + 13 > 0$$

$$-8m > -13 \quad \times (-1)$$

$$8m < 13$$

$$m < \frac{13}{8}$$

Logo,

$\left\{m \in \mathbb{R} \middle| m < \frac{13}{8}\right\}$.

2.3 Vértice da parábola da função do 2º grau

Ainda continuando a discussão sobre características da função do 2º grau, estamos falando já há um tempo sobre o Vértice desta parábola.

Percebemos que gráficos de funções do 2º grau é **simétrico** em relação a um eixo, perpendicular ao eixo x, e que passa pelo vértice.

Quando dizemos que dois pontos de uma parábola de uma função quadrática são simétricos, estamos dizendo que eles têm a mesma ORDENADA.

Exemplos de Pontos simétricos vistos anteriormente (pontos pintados com mesma cor, são simétricos).

x	$f(x)$	**Par ordenado**
-2	4	(-2, 4)
-1	1	(-1, 1)
0	0	(0, 0)
1	1	(1, 1)
2	4	(2, 2)

O **Vértice** é determinado pela seguinte relação:

$V(x_V, y_V) = V\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$.

Lembrando que estamos sempre nos referindo a função quadrática:

$f(x) = ax^2 + bx + c$,

com $a, b\ e\ c \in \mathbb{R}$,

com $a \neq 0$.

Assista vídeo que é uma Introdução visual sobre parábolas. É muito interessante e complementará assunto que estamos discutindo neste tópico.

https://youtu.be/q-RCTPp5OHY

Exemplos: Encontrar os vértices das parábolas:

a) $f(x) = -2x^2 + 3x$

b) $f(x) = x^2 - 8x - 9$

Resolução:

Utilizando a fórmula:

$V\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$.

Temos:

- $f(x) = -2x^2 + 3x$

$$x_V = \frac{-3}{2.(-2)} = \frac{3}{4} \quad e \quad y_V = \frac{-(3^2 - 4.(-2).0)}{4.(-2)} = \frac{-9}{-8} = \frac{9}{8}$$

Assim:

$V\left(\frac{3}{4}, \frac{9}{3}\right)$.

- $f(x) = x^2 - 8x - 9$

$$x_V = \frac{-(-8)}{2.(1)} = \frac{8}{2} = 4 \quad e \quad y_V = \frac{-[(-8)^2 - 4.1.(-9)]}{4.(1)} = \frac{-(64+36)}{4} = \frac{-100}{4} = -25$$

Assim:

$V(4, -25)$.

Observamos que existe uma SIMETRIA em relação a reta que passa pelo vértice da parábola e ela é Perpendicular ao eixo x.

Como foi dito anteriormente:

- Quando o $a > 0$, a parábola tem a **concavidade voltada para Cima** e vértice é o menor ponto (ponto mais baixo) da curva, sendo **Valor Mínimo**.
- Quando o $a < 0$, a parábola tem a **concavidade voltada para Baix**o e vértice é o maior ponto (ponto mais alto) da curva, sendo **Valor Máximo.**

Sendo assim, analisar gráficos de uma parábola, nos permite encontrar **Valor Máximo ou Valor Mínimo**.

Com essa discussão, determinamos a **IMAGEM** de uma função de 2º grau.

Toda função de 2º grau quadrática

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

com $a, b\ e\ c \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$, tem sua Imagem (valores de y), dependendo da concavidade de seu gráfico:

- Se a>0 (concavidade voltada para cima) =
  $Im_f = \left[\frac{-\Delta}{4a}, +\infty\right[$;
- Se a<0 (concavidade voltada para baixo) =
  $Im_f = \left]-\infty, \frac{-\Delta}{4a}\right]$.

Exemplo 01: Determine o Vértice, a Im_f e o valor de máximo ou mínimo para $f(x) = 4x^2 - 3x - 1$.

Resolução:

Esta parábola tem a concavidade voltada para cima, pois valor de a>0 (a=4). Sendo assim, ela terá um Valor de Mínimo. Lembrando que **Valor de Mínimo se refere a <u>ordenada</u> e Número de Mínimo refere-se a <u>abscissa</u>**.

Para determinar o vértice:

$$x_V = \frac{-b}{2a} \rightarrow x_V = \frac{-(-3)}{2.(4)} \rightarrow x_V = \frac{3}{8}$$

$$y_V = \frac{-\Delta}{4a} \rightarrow y_V = \frac{-(9+16)}{16} \rightarrow y_V = \frac{-25}{16}$$

- Vértice $V\left(\frac{3}{8}, \frac{-25}{16}\right)$

Imagem será $Im_f = \left[\frac{-\Delta}{4a}, +\infty\right[$, então

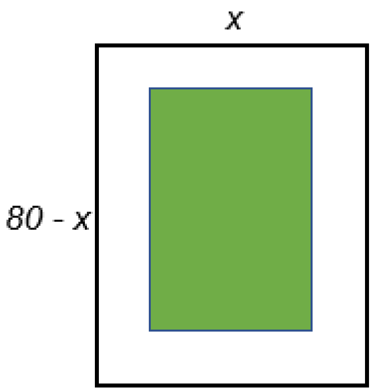
- $Im_f = \left[\frac{-25}{16}, +\infty\right[$
- O valor de Mínimo de f será: $y_V = \frac{-25}{16}$

Exemplo 2: Voltando ao problema do início do tópico.

Um diretor de um clube de futebol, deseja cercar o campo de treinamento e outros aparatos esportivos que estão a sua volta com tela de alambrado.

Tendo recebido 180 metros de tela, e sabendo que a largura tem medida x e altura tem medida (80-x), os diretores desejam saber quais as dimensões do terreno a cercar com a tela para que a área cercada, seja a maior possível.

Abaixo ilustração matemática do problema:



Área do terreno, representando pela lei da função:

$$A = f(x) = x.(80 - x)$$

$$f(x) = -x^2 + 80x$$

Para que a área seja máxima, precisamos encontrar o

$x_V = \frac{-b}{2a} \rightarrow x_V = \frac{-(80)}{2.(-1)} \rightarrow x_V = 40.$

Ou seja, quando, quando a largura for igual a 40 metros e altura for igual (80-40) = 40 metros, teremos a maior área para conseguir cercar a região do campo.

Exemplo 03: Apos estudar as principais características de uma função do 2º grau, faça um esboço de seu gráfico da função

$f(x) = x^2 + 5x + 4,$

usando os principais elementos:

- Interceptos em x (raízes)
- Intercepto em y (c, 0)
- Vértice $V\left(\frac{-b}{2a},\frac{-\Delta}{4a}\right)$

Interceptos em x (raízes)

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{25-16}}{2}\rightarrow x=\frac{-5\pm\sqrt{9}}{2}\rightarrow x=\frac{-5\pm 3}{2}$$

$$x_1=-4\ \ e\ \ x_2=-1$$

$$(-4{,}0)\ e\ \ (-1,0)$$

Intercepto em y (c, 0)

$$y=f(0)=0^2+5.0+4$$

$$y=4$$

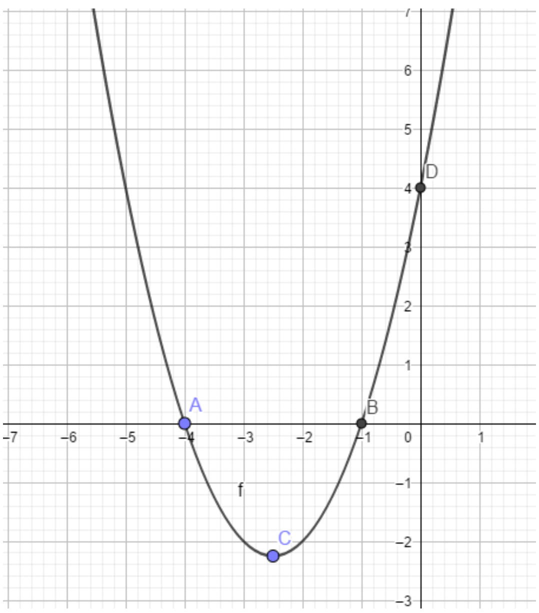
$$(0,4)$$

Vértice $V\left(\frac{-b}{2a},\frac{-\Delta}{4a}\right)$

$$x_V=\frac{-5}{2.1}=-\frac{5}{2}$$

$$y_V=\frac{-9}{4.1}=-\frac{9}{4}$$

$$V(-\frac{5}{2},-\frac{9}{4})$$



2.4 Estudo de sinal

Estudar o sinal de uma função quadrática

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

significa determinar valores reais de x, para os quais:

- $f(x) > 0$
- $f(x) = 0$
- $f(x) < 0$

Porém este estudo depende do valor do discriminante

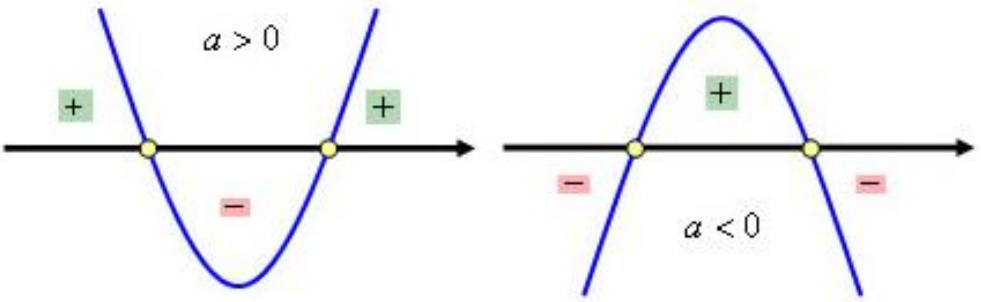
$$\Delta = b^2 - 4ac$$

(quantas raízes a função tem) e do coeficiente *a* (se parábola tem concavidade voltada para cima ou para baixo).

Teremos três casos:

Caso 01: Se $\Delta > 0$

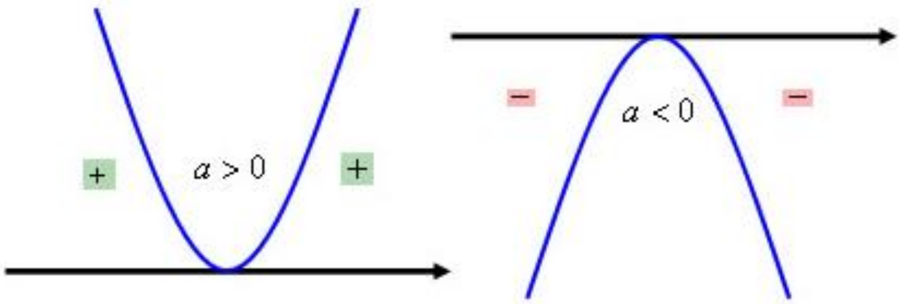
Neste caso a função tem duas raízes reais e diferentes, tocando o eixo x em dois pontos.



Para $a > 0$	Para $a < 0$
• $f(x) > 0$, para $x < x_1$ ou $x > x_2$ • $f(x) = 0$, para $x = x_1$ ou $x = x_2$ • $f(x) < 0$, para $x_1 < x < x_2$	• $f(x) > 0$, para $x_1 < x < x_2$ • $f(x) = 0$, para $x = x_1$ ou $x = x_2$ • $f(x) < 0$, para $x < x_1$ ou $x > x_2$

Caso 02: Se $\Delta = 0$

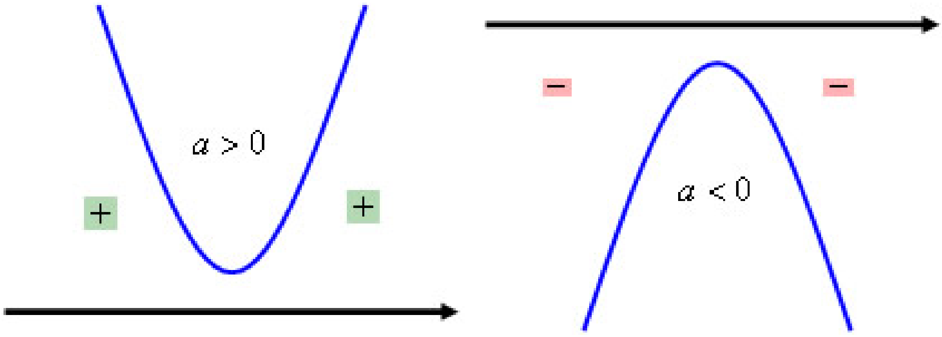
Neste caso a função tem duas raízes iguais (ou uma raíz), tocando o eixo x em apenas um ponto.



Para $a > 0$	Para $a < 0$
• $f(x) > 0$, para $x \neq x_1$ • $f(x) = 0$, para $x = x_1$	• $f(x) = 0$, para $x = x_1$ • $f(x) < 0$, para $x \neq x_1$

Caso 03: Se $\Delta < 0$

Neste caso a função quadrática não tem raízes reais, portanto não toca o eixo x em nenhum ponto.



Para $a > 0$	Para $a < 0$
• $f(x) > 0$, para todo x real	• $f(x) < 0$, para todo x real

3 REFERÊNCIAS

YouTube. (2017, Junho, 12). Khan Academy Brasil. **Introdução aos Polinômios – Álgebra 1**. 11min.53seg. Disponível em: <https://youtu.be/Qa1YqDWn61c>.

YouTube. (2017, Junho, 11). Khan Academy Brasil. **Introdução as Parábolas– Álgebra 1**. 07min.10seg. Disponível em: <https://youtu.be/q-RCTPp5OHY>.