DISCIPLINA: Cálculo I

Conceito e aplicabilidade de limites com suas propriedades. Cálculo de limites e de limites laterais.

INFORMAÇÕES PRELIMINARES

Objetivo da Lição: Compreender a ideia intuitiva de limite de uma função; calcular limites utilizando as propriedades e compreender o conceito e aplicabilidade de limites laterais.

O que se espera do aluno ao final da lição: ao final da lição, o aluno estará em condições de, a partir do embasamento conceitual adquirido ao longo do presente módulo, saber o conceito e aplicabilidade de limites, aprender a contornar o problema da indeterminação e por fim entender e calcular os limites laterais. Tudo com a finalidade de preparar o aluno à formação do conhecimento de derivadas e integrais.

Primeiramente vamos abordar o conceito intuitivo de limites, que nos gráficos serão bem melhor visualizados e num segundo momento as suas propriedades e aplicações na resolução de exercícios.

Vale lembrar, prezado aluno(a) que os conceitos matemáticos iniciais, por exemplo fatoração de polinômios, serão necessários. Mas não se preocupe que no momento oportuno iremos dar uma relembrada.

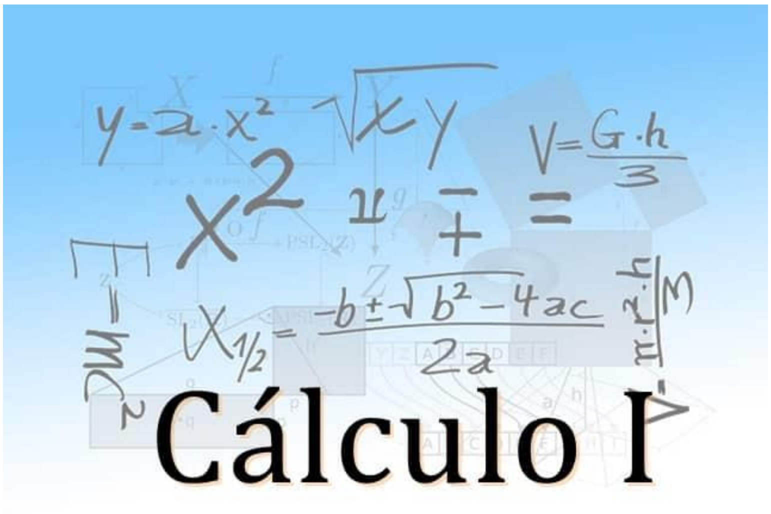
Por fim, e em busca da formação de uma conclusão e compreensão mais completa e abundante sobre os temas tratados, faremos alguns **EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO** para consolidarmos a compreensão dos assuntos estudados.

Seja bem-vindo(a) e vamos juntos construir o conhecimento acerca desse universo maravilhoso que é o **Cálculo Diferencial e Integral**!

Ótimos Estudos!!!

CONTEÚDO DA LIÇÃO

1 INTRODUÇÃO



O cálculo aborda principalmente o estudo do movimento e o cálculo de áreas de figuras gerais. Imagine você ser capaz de calcular uma velocidade instantânea, não apenas de automóvel mas velocidade de escoamento de um fluido, velocidade em que um boato se propaga numa população, velocidade em que uma população aumenta ou diminui e velocidade de uma reação química. Todos esses fenômenos são objetos de estudo dos **Limites Matemáticos**.

Da mesma forma imagina você calcular uma área em que um dos lados da figura é uma curva, parte de uma parábola por exemplo, não existe uma fórmula pronta na geometria plana que você possa usar.

Neste caso aparece novamente a necessidade de utilizar limites.

Veremos também que os limites necessários para abordar velocidades (derivadas) são de natureza diferentes dos limites utilizados na abordagem do cálculo de áreas (integral). Veremos que a primeira trata de aproximação por vetor tangente, enquanto a outra trata de aproximação por somas.
A aproximação por somas já era abordada desde a época de Arquimedes (Sec. III AC), já a aproximação para cálculo de velocidades é assunto mais recente Sec. XVIII DC) teorizadas por Newton e Leibnitz.

Uma breve história do Cálculo Integral e Diferencial no vídeo abaixo que você deverá assistir antes de iniciarmos a construção do conhecimento.
Veja o vídeo em: https://www.youtube.com/watch?v=1wcAzH4H1Bw

A noção de limite envolve a ideia de aproximação. Esta ideia de aproximar-se tanto quanto possível de um determinado ponto não é um exercício fácil. Com a utilização de limites problemas de geometria podem ser mais facilmente resolvidos, problemas de física principalmente equações diferenciais são mais facilmente atacados.
Por mais abstrato e entediante que pareça as manipulações para o cálculo de limites eles são necessários para um completo entendimento dos problemas concretos que virão a seguir. Pense numa coisa equivalente: se você é um aluno de música, o professor entende que você deve exercitar dias e dias antes de atacar uma música, que é o que realmente você está interessado, no cálculo, o professor entende que precisa fazer um monte de exercícios para facilitar entendimento das aplicações nas derivadas e integrais que são objetos do estudo do **Cálculo**.
As equações diferenciais puderam ser mais facilmente estudadas (pesquisadas) depois que a teoria dos limites estava mais consolidada. Hoje obtemos equações que modelam o crescimento populacional, farmacológico (comportamento de uma droga), rendimento do corpo humano, desenvolvimento de uma doença, decaimento radioativo, datação através do carbono 14, etc.

Para Saber Mais sobre o ASSUNTO, Consulte: BARDI, Jason Sócrates. Querra do Cálculo.1ª ed. Rio de Janeiro: Record, 2019.

2 NOÇÃO INTUITIVA DE LIMITES

No gráfico a seguir apresentamos uma função afim *f(x) = x + 2* e logo em seguida uma tabela de valores associado a esta função.

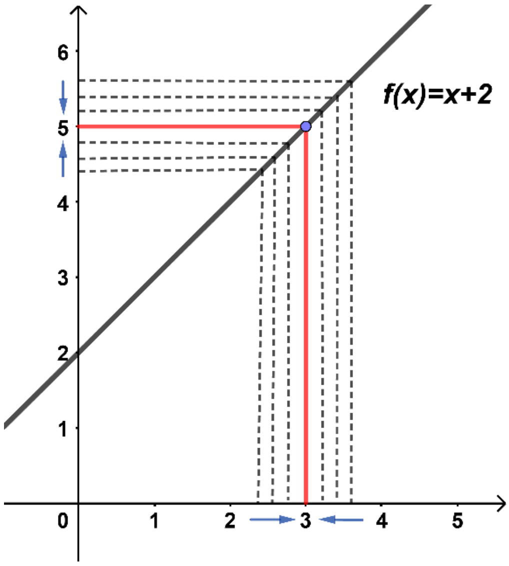


Gráfico 1

x	2,8	2,9	2,99	2,999
f(x)	4,8	4,9	4,99	4,999

x	3,2	3,1	3,01	3,001
f(x)	5,2	5,1	5,01	5,001

Observe que quanto mais próximo de x = 3, tanto pela esquerda 3^- quanto pela direita 3^+ você escolher, mais próximo de y = 5 sua função estará.

Dizemos que y tende a 5 quando x tende a 3. Em símbolos:

$$y \xrightarrow{tende} 5 \text{ desde que } x \xrightarrow{tende} 3$$

E ainda dizemos:

Limite de y = x + 2 é **igual** a 5 quando x tende a 3.

$$\lim_{x \to 3} y = 5 \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x \to 3} (x + 2) = 5$$

Cuidado: não é só substituir o valor de x na função para obtermos o limite. O limite é um local que você quer alcançar mesmo que não consiga exatamente.

Vamos a um exemplo: onde a observação acima será esclarecida

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

x	2,5	2,8	2,9	2,99
f(x)	5,5	5,8	5,9	5,99

x	3,5	3,2	3,1	3,01
f(x)	6,5	6,2	6,1	6,01

Observe que:

$$f(x) \xrightarrow{tende} 6 \text{ quando que } x \xrightarrow{tende} 3$$

Ou ainda: o valor a ser alcançado por *f(x)* é 6.

E ainda dizemos simbolicamente:

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 6 \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$$

Porém perceba que a função não está definida para x = 3 pois o resultado seria f(3) = $\frac{0}{0}$ que chamamos de **indeterminação***.* Por incrível que pareça o gráfico dessa função é uma reta *f(x)* = *x* + *3* cujo domínio D = R – {3}.

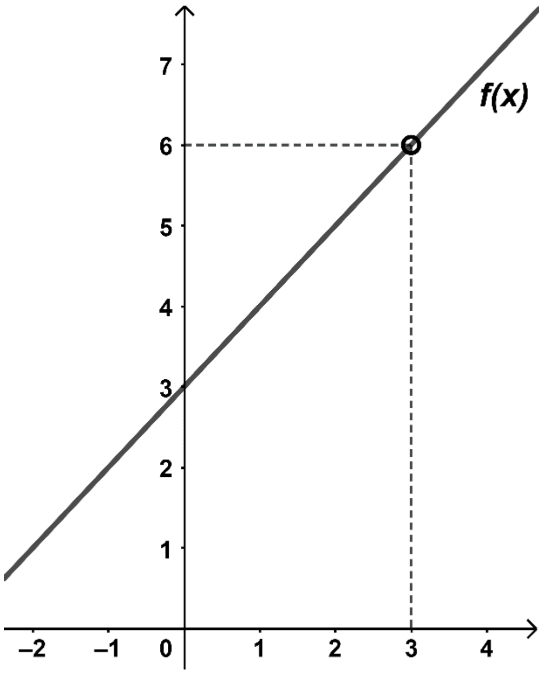


Gráfico 2

Deve ficar claro que limite se trata de aproximações

Espera aí. Mas como $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$ chegou a $f(x) = x + 3$???

Bom, uma das bases para resolver a indeterminação de $\frac{0}{0}$ é fatorar e simplificar antes as expressões.

Vamos relembrar um pouco: $x^2 - 9$, pode ser fatorado por produtos notáveis $a^2 - b^2 = (a + b).(a - b)$, portanto $x^2 - 9 = (x + 3).(x - 3)$.

Substituindo:

$$f(x) = \frac{x^2-9}{x-3} = \frac{(x+3).(x-3)}{(x-3)} = x + 3$$

Porém nem tudo são flores. Vamos tentar resolver:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-3x+2}{x^2-6x+8} = \frac{0}{0},$$

perceba que ao aplicarmos *x = 2* caímos na indeterminação. E agora? Vamos fatorar o denominador e o numerador através das raízes da equação quadrática: *a.(x – x’).(x – x”)*

$$\frac{x^2-3x+2}{x^2-6x+8} = \frac{(x-2).(x-1)}{(x-2).(x-4)} = \frac{x-1}{x-4} =, \quad \lim_{x\to 2}\frac{x-1}{x-4} = \frac{2-1}{2-4} = -\frac{1}{2}$$

Caso você não esteja muita familiarizado em fatoração de polinômios, sugiro que você assista aos seguintes vídeos para relembrar:

https://youtu.be/Nu4KjkyQaUo?t=19

https://youtu.be/YIGOK75npgc

Vale relembrar que existem vários outros vídeos que nos ajudarão a recordar polinômios e fatoração de polinômios.

e se tentarmos resolver $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-6x+5}{x^2-5x+4}$ que também é igual a $\frac{0}{0}$ quando substituímos $x = 1$.

O denominador poderá ser fatorado obtendo facilmente

$$x^2 - 5x + 4 = (x-1)(x-4)$$

Já o numerador? Como fatorar?

Podemos utilizar o processo prático de Briot – Ruffini

1	1	0	-6	5
	1	1	-5	0

Transformando $x^3 - 6x + 5 = (x-1)\left(x^2 + x - 5\right)$

E daí

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-6x+5}{x^2-5x+4} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(x^2+x-5\right)}{(x-1)(x-4)} = \lim_{x\to 1}\frac{\left(x^2+x-5\right)}{(x-4)} = 1$$

Caso você não esteja muita familiarizado no processo prático de Briot - Ruffini, sugiro que você assista aos seguintes vídeos para relembrar:
https://www.youtube.com/watch?v=BkbzsACknE0
https://www.youtube.com/watch?v=q1IXhImpKog

E finalmente este problema, como fazer?

$\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$ o qual também dá $\frac{0}{0}$ quando substituímos $x = 3$

A ideia é fazer um tipo de RACIONALIZAÇÃO mesmo que não seja do denominador

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3} = \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{3})}{(x-3)} \cdot \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{3})}{(\sqrt{x}+\sqrt{3})} = \frac{x-3}{(x-3).(\sqrt{x}+\sqrt{3})} = \frac{1}{(\sqrt{x}+\sqrt{3})}$$

Logo

$$\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3} = \lim_{x \to 3} \frac{1}{(\sqrt{x}+\sqrt{3})} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

Mas ***só fatore*** ou use ***BRIOT – RUFFINI*** ou "**RACIONALIZE**" se você perceber que ao substituir o valor para o qual o x está tendendo o resultado obtido for indeterminado $\frac{0}{0}$. Caso isso não ocorra, faça a substituição direta que chegará no limite da função *f(x)*.

Observe os gráficos a seguir e as observações ao lado com o objetivo de entender que *cálculo de limite* e o *valor de uma função num ponto* são coisas distintas:

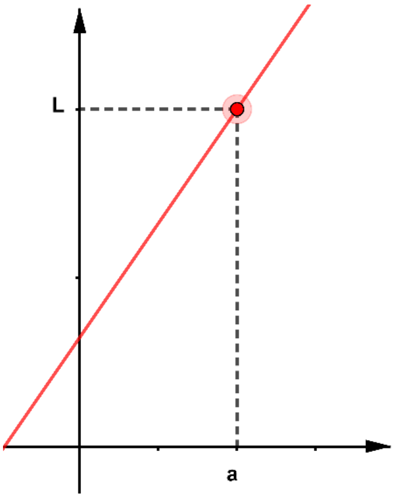


Gráfico 3

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

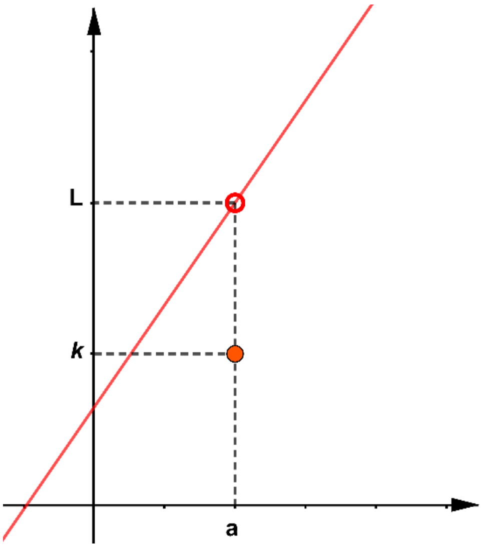


Gráfico 4

$\lim_{x \to a} f(x) = L$ e f(a) = k

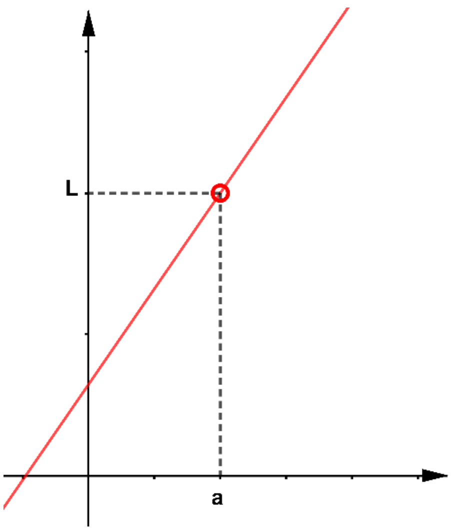


Gráfico 5

$\lim_{x \to a} f(x) = L$ e $\nexists$ f(a)

IMPORTANTE:

Ao escrever $\lim_{x \to a} f(x) = L$

1) Você está estudando a função *f(x)* nas imediações de a;
2) Quando *x* está próximo de a nós queremos saber o que acontece com a função;
3) Quando *x* tende a *a, f(x)* tende a *L*; e
4) Nunca dizemos que *f(x)* = *L* ou *x* = *a*.

3 PROPRIEDADES DOS LIMITES

Veremos agora as propriedades dos limites que será de grande ajuda para a resolução dos exercícios de fixação e as demais atividades propostas. Vamos lá!

1) $\lim_{x \to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$
2) $\lim_{x \to a}[f(x) \, . \, g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) . \lim_{x \to a} g(x)$
3) $\lim_{x \to a} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$ desde que $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$
4) $\lim_{x \to a} f(x)^n = [\lim_{x \to a} f(x)]^n$, n ∈ $\mathbb{N}^*$
5) $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}$, n ∈ $\mathbb{N}^*$ e f(x) ≥ 0. (Se f(x) < 0 e n ímpar).
6) $\lim_{x \to a} [c \, . \, f(x)] = c \, . \lim_{x \to a} f(x)$
7) $\lim_{x \to a} |f(x)| = |\lim_{x \to a} f(x)|$
8) $\lim_{x \to a} c = c$

Não há necessidade de decorar todos eles, nem tampouco perdemos tempo agora demonstrando a validade de cada um. Você, prezado(a) aluno(a), no momento oportuno saberá recorrer a essas propriedades quando da aplicação nos exercícios.

4 LIMITES LATERAIS

Quando escrevemos $\lim_{x \to a} f(x)$ estamos interessados nos valores de f quando x está próximo de a, isto é, valores de x que se aproximam de a, e que podem ser maiores ou menores que a. No entanto existem funções que tem comportamentos diferentes quando x se aproxima de a por valores maiores ou menores que a.

Observe o gráfico e as explicações abaixo:

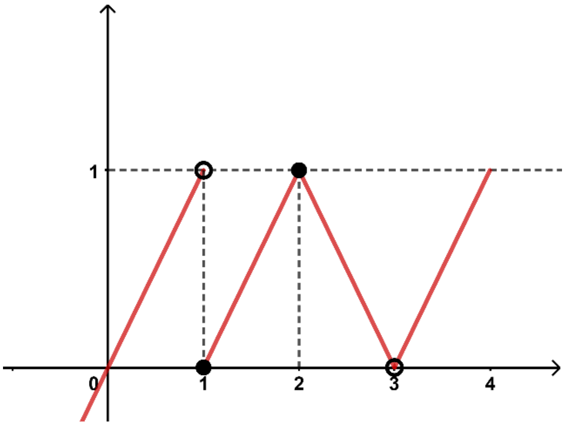


Gráfico 6

Determine cada limite se houver:

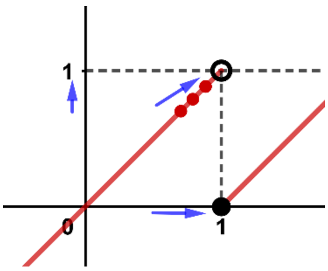
a) $\lim_{x \to 1} f(x)$

b) $\lim_{x \to 2} f(x)$

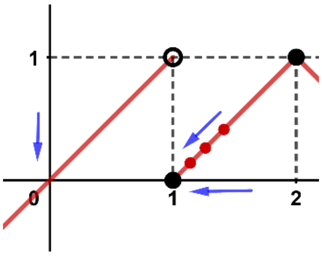
c) $\lim_{x \to 3} f(x)$

Respostas:

a)



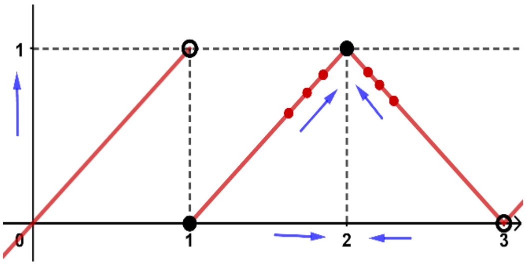
Observe pelo gráfico que ao se aproximar de $x = 1$ por valores menores que 1 a função *f(x)* tende ao número 1. Dizemos que x se aproxima pela esquerda e representamos $x \to 1^-$



Agora observe o que acontece com a função *f(x)* quando nos aproximamos cada vez mais do *x = 1* por valores maiores que 1 a função *f(x)* tende ao 0. Dizemos que *x* se aproxima pela direita e representamos $x \to 1^+$

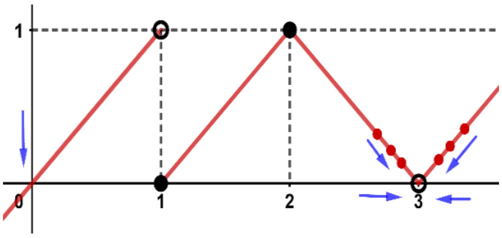
Escrevemos simbolicamente $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1$ e $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 0$. Nesse caso temos dois resultados diferentes, isto é, $\lim_{x \to 1^-} f(x) \neq \lim_{x \to 1^+} f(x)$, portanto $\nexists$ (*não existe*) $\lim_{x \to 1} f(x)$, pois para nos aproximarmos pelos dois lados de *x = 1* temos resultados diferentes.

b) De forma análoga, observe a aproximação de *x = 2* tanto pela direita quanto pela esquerda.



A função f(x) tende ao número 1. Portanto, $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x)$ então $\exists \lim_{x \to 2} f(x)$.

c) Neste caso $\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^+} f(x) = 0$, então $\exists \lim_{x \to 3} f(x)$, mesmo que a função f(3) não exista, mas lembre-se, **limite calcula a tendência da função**.



Aproveitando a oportunidade para você prezado(a) aluno(a) entender melhor o conceito de limites laterais sugiro que você assista ao seguinte vídeo: https://www.youtube.com/watch?v=M6-1RYYNPw4

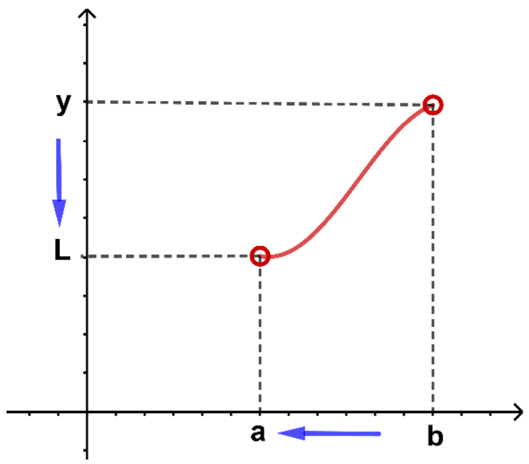
Vamos agora dar um exemplo e definir limites laterais

Se quisermos calcular o valor do $\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x-2}}{x+1}$, observamos que o domínio será dado pelo intervalo [2,+∞[(traduzindo: fechado para o número 2 e aberto para o infinito positivo). Em outras palavras o valor de *x* só poderá ser maior ou igual a 2 uma vez que valores menores caímos numa raiz quadrada de número negativo.

Expressamos isso assim: $\lim_{x \to 2^+} \frac{\sqrt{x-2}}{x+1}$, o sinal de (+) indica uma aproximação do *x = 2* pela direita. Dizemos então que este é o limite lateral à direita da função f(x) isto é, x se aproxima de 2 por valores maiores do que 2. Da mesma forma se estivesse assim: 2^- (que não é o caso da função acima), diríamos que estamos nos aproximando do x = 2 pela esquerda, isto é por valores menores do que 2.

Definição de limites laterais: seja uma função *f(x)* definida num intervalo aberto]a,b[onde *f(x)* se aproxima cada vez mais de *L* a medida que *x* se aproxima de *a*. Dizemos então que **L é o limite lateral à direita** da função quando x tende a a e escrevemos $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$

Vamos observar graficamente os limites laterais para que você entenda melhor:



Repare que quanto mais próximo de *a* pela direita você escolher valores para o *x* mais a função *f(x)* se aproxima de *L.*

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

Gráfico 7

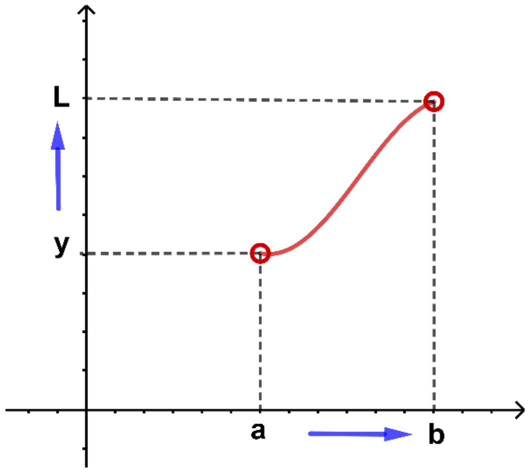


Gráfico 8

De forma análoga, se usarmos valores cada vez mais perto de *b*, a função *f(x)* se aproxima de *L*, ou seja, **L é o limite lateral à esquerda** da função quando x tende a *b* e escrevemos

$$\lim_{x \to b^+} f(x) = L$$

Vamos ver um exemplo para que fique claro para você:

Seja *f(x)* = $\begin{cases} x^2 - 1, se\ x < 2 \\ 4, se\ x = 2 \\ x - 1, se\ x > 2 \end{cases}$. Determinar a existência ou não dos seguintes limites:

a) $\lim_{x \to 2^+} f(x)$
b) $\lim_{x \to 2^-} f(x)$
c) $\lim_{x \to 2} f(x)$
d) construa o gráfico.

veja que $x \to 2^-$ é a mesma coisa que tomar $x < 2$, concorda? Eu quero valores menores que 2, então vou me aproximar do 2 pela esquerda. Do mesmo modo para $x > 2$ a aproximação é feita pela direita e representamos por $x \to 2^+$.

RESOLVENDO:

a) *f(x)* = *x*^{2} – *1* quando o x se aproxima de 2 pela esquerda, resolvendo

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (x^2 - 1) = 2^2 - 1 = 3$$

b) *f(x) = x – 1* quando o x se aproxima de 2 pela direita, resolvendo

c) $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (x - 1)$ = 2 – 1 = 1

d) oras, ficou claro nos itens a) e b) que $\lim_{x \to 2^-} f(x) \neq \lim_{x \to 2^+} f(x)$, portanto $\nexists \lim_{x \to 2} f(x)$

e) como você pode observar, $f(x) = x^2 - 1$ é uma parábola de concavidade para cima (a > 0) que passa por -1 (c = -1) e cujos zeros da função são ± 1 e que termina em x se aproximando de 2 porém sem toca-lo. Já $f(x) = x - 1$ é reta que começa em $x = 2$ e passa pelo ponto (4,3).

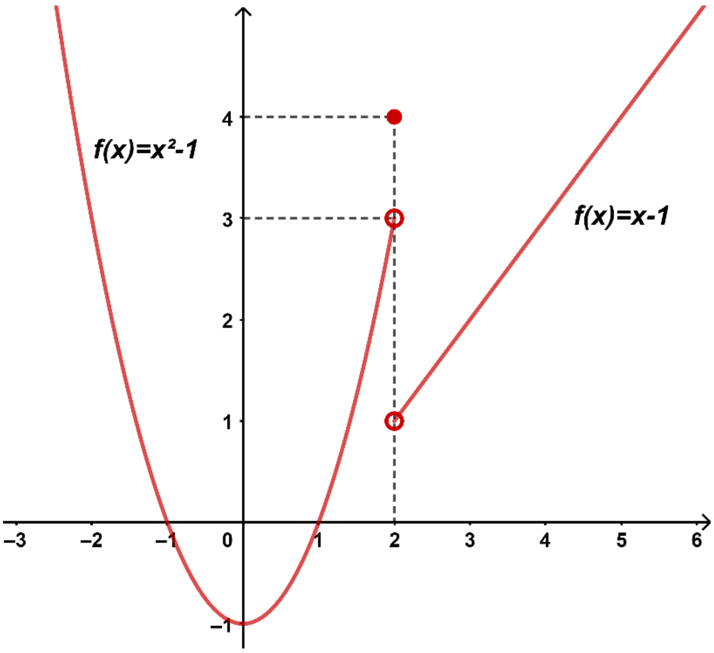


Gráfico 9

6 CONCLUSÃO

Quando os matemáticos formalizaram o estudo de limites, o Cálculo Diferencial e Integral obteve sua maioridade e a compreensão do estudo do movimento ficou mais rigoroso e o cálculo de áreas das mais diversas pôde ser compreendida mais facilmente.

Nesta unidade você tomou conhecimento pela primeira vez sobre limite de função, aprendeu a calcular alguns deles. Mas não se iludam, muito ainda está por vir, mas esse primeiro passo foi importante. Imagine que somente começou a engatinhar e, nas próximas unidades você vai aprender a andar.

Este início pode ter sido um pouco penoso mas esses procedimentos aprendidos nessa unidade foram importantes para a prática que virá no momento em que estiverem debruçados sobre as derivadas e as integrais.

PARA REFLETIR: Imagine um atleta querendo correr uma distância de 5km. Para chegar no final do percurso, ele primeiro terá que passar no ponto que corresponde a 1/2 (metade) do percurso de cada vez, depois no próximo ponto que corresponde a 1/4 do percurso, depois 1/8 do percurso, para assim chegar a 1/16 do percurso e depois 1/32 do percurso e assim por diante, tendendo assim a ser um número infinito de pontos antes que o corredor chegue ao final. Você acha que ele chegará ao final da corrida???

Deixei para o final uma superdica que o auxiliará durante todo o curso de Cálculo Diferencial e Integral: um software livre de matemática chamado **GeoGebra** que o auxiliará na construção geométricas utilizando pontos, retas, segmentos de retas, funções, figuras até mesmo em 3D. Vale a pena você baixar essa poderosa ferramenta em https://www.geogebra.org/ e se ambientar com esse universo que está começando a conhecendo agora.

7 REFERÊNCIAS

YouTube. (2016, Abril, 16). Cálculo Integral e Diferencial e suas aplicações. 4min35seg. Disponível em: < https://www.youtube.com/watch?v=1wcAzH4H1Bw>. Acesso em: 20 mar. 2019.

YouTube. (2014, Abril, 14). Matemática Básica – Aula 21 – Fatoração de Expressões Algébricas – Parte 1. 27min47seg. Disponível em: < https://www.youtube.com/watch?v=gpLUtjncoSo>. Acesso em: 20 fev. 2019.

YouTube. (2014, Abril, 10). Matemática Básica – Aula 21 – Fatoração de Expressões Algébricas – Parte 2. 47min54seg. Disponível em: < https://www.youtube.com/watch?v=HQpjjix_aeE>. Acesso em: 20 fev. 2019.

YouTube. (2014, Dezembro, 1). Grings – Aula 11 – Fatoração de polinômios com Briot-Ruffini – Parte 1. 13min17seg. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=QIfxBMR4qkw >. Acesso em: 20 fev. 2019.

YouTube. (2015, Julho,2). Aula 2 – cálculo – limite – Utilização de Briot – Ruffini – 4min58seg. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=BkbzsACknE0>. Acesso em 25 fev. 2019.

YouTube. (2013, Outubro, 11). Divisão sintética exemplo 2. 5min01seg. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=q1IXhImpKog>. Acesso em 25 mar. 2019.