13/03/2015

Exercício de Programa 1:

Agulha de Buffon

Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo

Por
Caio Vinícius Dadauto 7994808

Professor
Julio Michael Stern

1 Introdução

Nascido na aristocracia durante o século XVIII, Georges Louis Leclerc (Conde de Buffon), estudou Medicina e Direito. Contudo, mostrou grande interesse pela Matemática e, principalmente, pela história natural. Foi deste interesse e enorme curiosidade que Buffon elaborou o problema da agulha, o qual foi o primeiro escrito sobre o que hoje se conhece por probabilidade geométrica.

2 O problema da agulha

O problema consiste da seguinte situação, considere uma plataforma composta por infinitas retas paralelas distantes de a uma das outras. Dessa forma, lança-se uma agulha de comprimento $l \leq a$ sobre esta plataforma. Baseando-se nesta situação, Buffon procurou determinar qual seria a probabilidade dessa agulha tocar alguma das linhas.

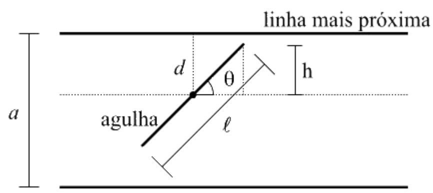

Figura 1: Diagrama simulando uma agulha laçada ao acaso sobre a plataforma.

Assim, o problema pode ser abordado da seguinte forma, denota-se d como sendo a distância entre o centro da agulha e a linha mais proxima deste centro. A partir da figura 1, é possível inferir que a $0 \leq d \leq \frac{a}{2}$. Ainda, considera-se o ângulo θ formado entre a agulha e as paralelas, onde $\theta \in [0, \pi]$.

Desta forma, é possível determinar a distância h entre a extremidade da agulha mais proxima da linha e uma reta paralela as linhas de forma a cruzar o centro da agulha (vide figiura 1). Tal ditância h pode ser dada por:

$$h(\theta) = \frac{l \sin \theta}{2} \tag{1}$$

É importante observar que a agulha estará encostando em uma das linhas somente se a condição $h \geq d$ for satisfeita, ou seja, se

$$d \leq \frac{l \sin \theta}{2} \tag{2}$$

Por outro lado, plotando o gráfico de $d(\theta) = \frac{l \sin \theta}{2}$ no espaço amostral θxd, obtem-se a seguinte figura:

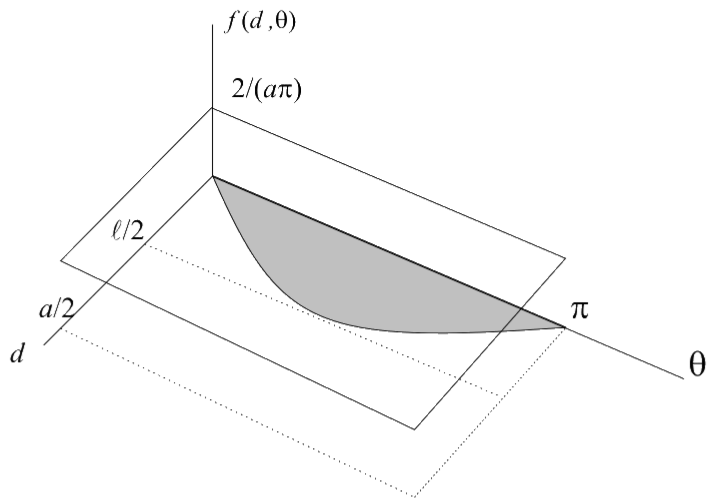

Figura 2: Função de $h(\theta)$ no dominio $[0, \pi]$.

A partir da desigualdade (2), sabe-se que a área sobre o gráfico de $d(\theta)$ corresponde a todos os pares ordenados (θ, d) nos quais a agulha ecosta em uma das linhas. Portanto, a probabilidade geométrica (P) de que uma agulha encoste em uma das linhas é dada pela razão entre a área sobre o gráfico e a área do retângulo $((0,0), (\pi, 0), (\pi, \frac{a}{2})$ e $(0, \frac{a}{2}))$ que representra todo o espaço amostral. Dessa forma, tem-se que a probabilidade é dada por:

$$P = \frac{\int_0^{\pi} \frac{l \sin\theta}{2} \mathrm{d}\theta}{\pi \frac{a}{2}} = \frac{2l}{a\pi} \tag{3}$$

Assim, adotando n como sendo o número de vezes que a agulha é lançada sobre a plataforma e k o número de vezes em que a agulha encosta em uma das linhas, tem-se que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k}{n} = \frac{2l}{a\pi} \tag{4}$$

Entretanto, simulações mostram que a convergência é muito lenta (vide [1]).

3 Macarrão de Buffon

O problema da agulha de Buffon pode ser extendido para qualquer curva de comprimento A sendo denominada de macarrão de Buffon, uma vez que, agora, o objeto lançado é uma curva, como por exemplo uma macarrão.

Suponha-se uma curva seccionada em N seguimentos de reta de comprimento l_i, então:

$$A = \sum_{i=1}^{N} l_i \tag{5}$$

Mas, cada seguimento l_i pode ser tratado como uma agulha de Buffon. Portanto, a probabilidade P_m de que alguma dessas agulhas encoste em uma das linhas será de

$$P_m = \sum_{i=1}^{N} \frac{2l_i}{a\pi} = \frac{2A}{a\pi} \tag{6}$$

Porém, caso alguma agulha encoste em uma das linhas, necessariamente a curva A também terá encostado. Portanto, P_m (6) é a probabilidade de que a curva A (macarrão de Buffon) encoste em uma das linhas.

Referências

[1] *LINS, L. D., Agulha de Buffon, 2004*,
http://www.cin.ufpe.br/∽ldl/Buffon.pdf

[2] *Buffon's Needle and Noodle Problem*,
http://www.bernardleong.com/2009/02/06/Buffon-needle-noodle-problem/