relatividade - eletromagnetismo

M.R. Robilotta - 2015

I. OS OBJETOS BÁSICOS

• tensor eletromagnético

As componentes dos campos $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{B}$ podem ser acomodadas no *tensor eletromagnético*, dado por

$$F^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -E_1/c & -E_2/c & -E_3/c \\ E_1/c & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2/c & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3/c & -B_2 & B_1 & 0 \end{bmatrix} . \tag{1}$$

• quadri-corrente

A densidade de carga ρ e a densidade de corrente $\boldsymbol{j}$ são incorporadas em uma *quadricorrente*, da forma

$$j^\mu = (c\rho, \boldsymbol{j}) . \tag{2}$$

• as transformações

$$F^{\mu\nu} \to F'^{\,\mu\nu} = \Lambda^\mu_\alpha \, \Lambda^\nu_\beta \, F^{\alpha\beta} . \tag{3}$$

Por exemplo, para uama TL ao longo do eixo y , podemos usar a eq.(grupos-25) para escrever explicitamente

$$F \to F' = \begin{bmatrix} 0 & -E'_1/c & -E'_2/c & -E'_3/c \\ E'_1/c & 0 & -B'_3 & B'_2 \\ E'_2/c & B'_3 & 0 & -B'_1 \\ E'_3/c & -B'_2 & B'_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \gamma & 0 & -\gamma\,\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\gamma\,\beta & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -E_1/c & -E_2/c & -E_3/c \\ E_1/c & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2/c & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3/c & -B_2 & B_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma & 0 & -\gamma\,\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\gamma\,\beta & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -\gamma[E_1/c+\beta\,B_3] & -E_2/c & -\gamma[E_3/c-\beta\,B_1] \\ \gamma[E_1/c+\beta\,B_3] & 0 & -\gamma[B_3+\beta\,E_1/c] & B_2 \\ E_2/c & \gamma[B_3+\beta\,E_1/c] & 0 & -\gamma[B_1-\beta\,E_3/c] \\ \gamma[E_3/c-\beta\,B_1] & -B_2 & \gamma[B_1-\beta\,E_3/c] & 0 \end{bmatrix} \tag{4}$$

A comparação da primeira matriz com a última fornece as mesmas equações para as componentes de $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{B}$, obtidas de modo diferente na aula 24 da apostila de física 4, e expressas pelas eqs.(24.49-24.54).

A transformação da quadri-corrente é dada por

$$j^{\mu} \to j'^{\,\mu} = \Lambda^{\mu}_{\alpha}\, j^{\alpha} \; . \tag{5}$$

No caso particular da TL ao longo do eixo y temos

$$\begin{bmatrix} c\,\rho'^{\,0} \\ j'^{\,1} \\ j'^{\,2} \\ j'^{\,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & -\gamma\,\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\gamma\,\beta & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\,\rho^{0} \\ j^{1} \\ j^{2} \\ j^{3} \end{bmatrix} \; , \tag{6}$$

que corresponde aos mesmos resultados dados pelas eqs.(24.89-24.92) da apostila de física 4.

II. EQUAÇÕES DE MAXWELL

Na relatividade, as quatro equações de Maxwell da física 4 passam a ser escritas como *duas* equações covariantes. É muito importante notar que, independentemente da forma, o conteúdo físico das equações é sempre o mesmo.

As equações covariantes são dadas por

$$\frac{1}{2}\,\epsilon_{\mu\nu\sigma\rho}\partial^{\nu}\, F^{\sigma\rho} = 0 \; , \tag{7}$$

$$\partial_{\mu} F^{\mu\nu} = \mu_0\, j^{\nu} \; . \tag{8}$$

Mostramos, a seguir, que

$$\frac{1}{2}\,\epsilon_{\mu\nu\sigma\rho}\partial^{\nu}\, F^{\sigma\rho} = 0 \leftrightarrow \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = -\,\frac{\partial\,\boldsymbol{B}}{\partial t} \;\text{ e }\; \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B} = 0 \; , \tag{9}$$

$$\partial_{\mu} F^{\mu\nu} = \mu_0\, j^{\nu} \leftrightarrow \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} = \rho/\epsilon_0 \;\text{ e }\; \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} = \mu_0\,\boldsymbol{j} + \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial\,\boldsymbol{E}}{\partial t} \; . \tag{10}$$

- Começamos com a eq.(8), que tem 4 componentes, associadas aos valores do índice ν.

Tomando $\nu = 0$, temos

$$\begin{aligned} \partial_{\mu} F^{\mu 0} &= \partial_0 F^{00} + \partial_1 F^{10} + \partial_2 F^{20} + \partial_3 F^{30} = \mu_0\, j^{0} \\ &= \partial_1 E_1/c + \partial_2 E_2/c + \partial_3 E_3/c = \mu_0\, c\,\rho \leftrightarrow \frac{1}{c}\left[\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} = \rho/\epsilon_0\right] \; , \end{aligned} \tag{11}$$

onde usamos $c^2 = 1/(\mu_0\epsilon_0)$. Escolhendo $\nu = 1$, escrevemos

$$\begin{aligned} \partial_{\mu} F^{\mu 0} &= \partial_0 F^{01} + \partial_1 F^{11} + \partial_2 F^{21} + \partial_3 F^{31} = \mu_0\, j^{1} \\ &= \partial_0[-E_1/c] + \partial_2 B_3/c + \partial_3 B_2/c = \mu_0\, j_1 \leftrightarrow -\mu_0\epsilon_0 \frac{\partial E_1}{\partial t} + [\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B}]_1 = \mu_0\, j_1 \; , \end{aligned} \tag{12}$$

que é a componente 1 da lei de Ampère-Maxwell. O cálculo para as demais componentes é totalmente análogo.

• Na eq.(7), o símbolo $\epsilon_{\mu\nu\sigma\rho}$ representa o tensor totalmente anti-simétrico. Ele é nulo para quaiquer dois índices iguais, e é definido pela condição $\epsilon_{0123} = 1$; ele também vale $+1$ para todas as permutações *pares* de índices e -1, para todas as permutações ímpares.

A eq.(7) também tem quatro componentes, associads ao índice μ.

Para o caso $\mu = 0$, temos

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left[\epsilon_{0123}\partial^1 F^{23} + \epsilon_{0132}\partial^1 F^{32} + \epsilon_{0213}\partial^2 F^{13} + \epsilon_{0213}\partial^2 F^{31} + \epsilon_{0312}\partial^3 F^{12} + \epsilon_{0321}\partial^3 F^{21}\right] \\ &= \left[\epsilon_{0123}\partial^1 F^{23} + \epsilon_{0213}\partial^2 F^{13} + \epsilon_{0312}\partial^3 F^{12}\right] = 0\ ,\end{aligned} \tag{13}$$

onde usamos o fato the tanto $\epsilon_{\mu\nu\sigma\rho}$ como $F^{\sigma\rho}$ são antissimétricos quando permutamos os índices σ e ρ. Usando os valores de $\epsilon_{\mu\nu\sigma\rho}$, a eq.(13) pode ser escrita como

$$\left[\partial^1 F^{23} - \partial^2 F^{13} + \partial^3 F^{12}\right] = -\left[\partial_1 F^{23} - \partial_2 F^{13} + \partial_3 F^{12}\right] = 0\ . \tag{14}$$

Identificando as componentes de $F^{\sigma\rho}$, temos

$$\partial_1\left[-B_1\right] - \partial_2\left[B_2\right] + \partial_3\left[-B_3\right] = 0 \leftrightarrow -\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B} = 0\ . \tag{15}$$

Repetindo o procedimento para $\mu = 1$, temos

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left[\epsilon_{1023}\partial^0 F^{23} + \epsilon_{1032}\partial^0 F^{32} + \epsilon_{1203}\partial^2 F^{03} + \epsilon_{1230}\partial^2 F^{30} + \epsilon_{1302}\partial^3 F^{02} + \epsilon_{1320}\partial^3 F^{20}\right] \\ &= \left[\epsilon_{1023}\partial^0 F^{23} + \epsilon_{1203}\partial^2 F^{03} + \epsilon_{1302}\partial^3 F^{02}\right] \\ &= \left[-\partial^0 F^{23} + \partial^2 F^{03} - \partial^3 F^{02}\right] = -\partial_0 F^{23} - \partial_2 F^{03} + \partial_3 F^{02} = 0\ .\end{aligned} \tag{16}$$

Identificando as componentes de $F^{\sigma\rho}$, 0btemos

$$-\partial_0\left[-B_1\right] - \partial_2\left[-E_3/c\right] + \partial_3\left[-E_2/c\right] = 0 \leftrightarrow \frac{1}{c}\left\{\frac{\partial B_1}{\partial t} + \left[\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}\right]_1 = 0\right\}\ . \tag{17}$$

O cálculo das demais componentes é totalmente análogo.

III. EQUAÇÃO DA CONTINUIDADE

Tomando a divergência da eq.(8), temos

$$\partial_\nu\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0\,\partial_\nu\, j^\nu\ . \tag{18}$$

Como $F^{\mu\nu}$ é antissimétrico, encontramos

$$\partial_\nu\, j^\nu = 0\ , \tag{19}$$

que é a equação da continuidade, que expressa a conservação da carga elétrica.