MAC420/5744: Introdução à Computação Gráfica

Marcel P. Jackowski

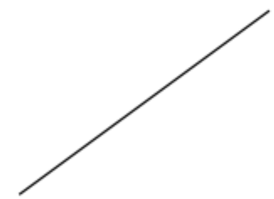
mjack@ime.usp.br

Aula #19: B-splines

Funções polinomiais

- Linear:

$$f(t) = at + b$$

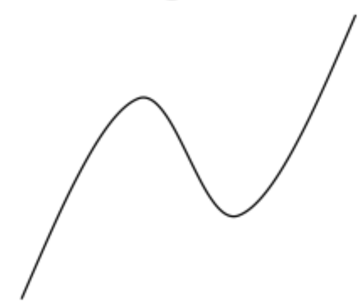


- Quadratic:

$$f(t) = at^2 + bt + c$$

- Cubic:

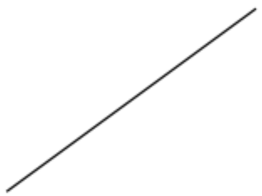
$$f(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$$



Curvas polinomiais

- Linear:

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{a}t + \mathbf{b}$$

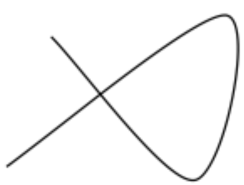


- Quadratic:

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{a}t^2 + \mathbf{b}t + \mathbf{c}$$

- Cubic:

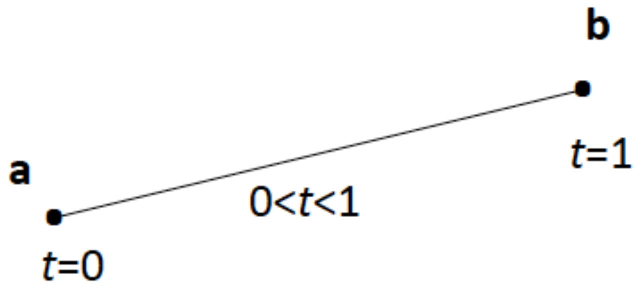
$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{a}t^3 + \mathbf{b}t^2 + \mathbf{c}t + \mathbf{d}$$



We usually define the curve for $0 \le t \le 1$

Lerp

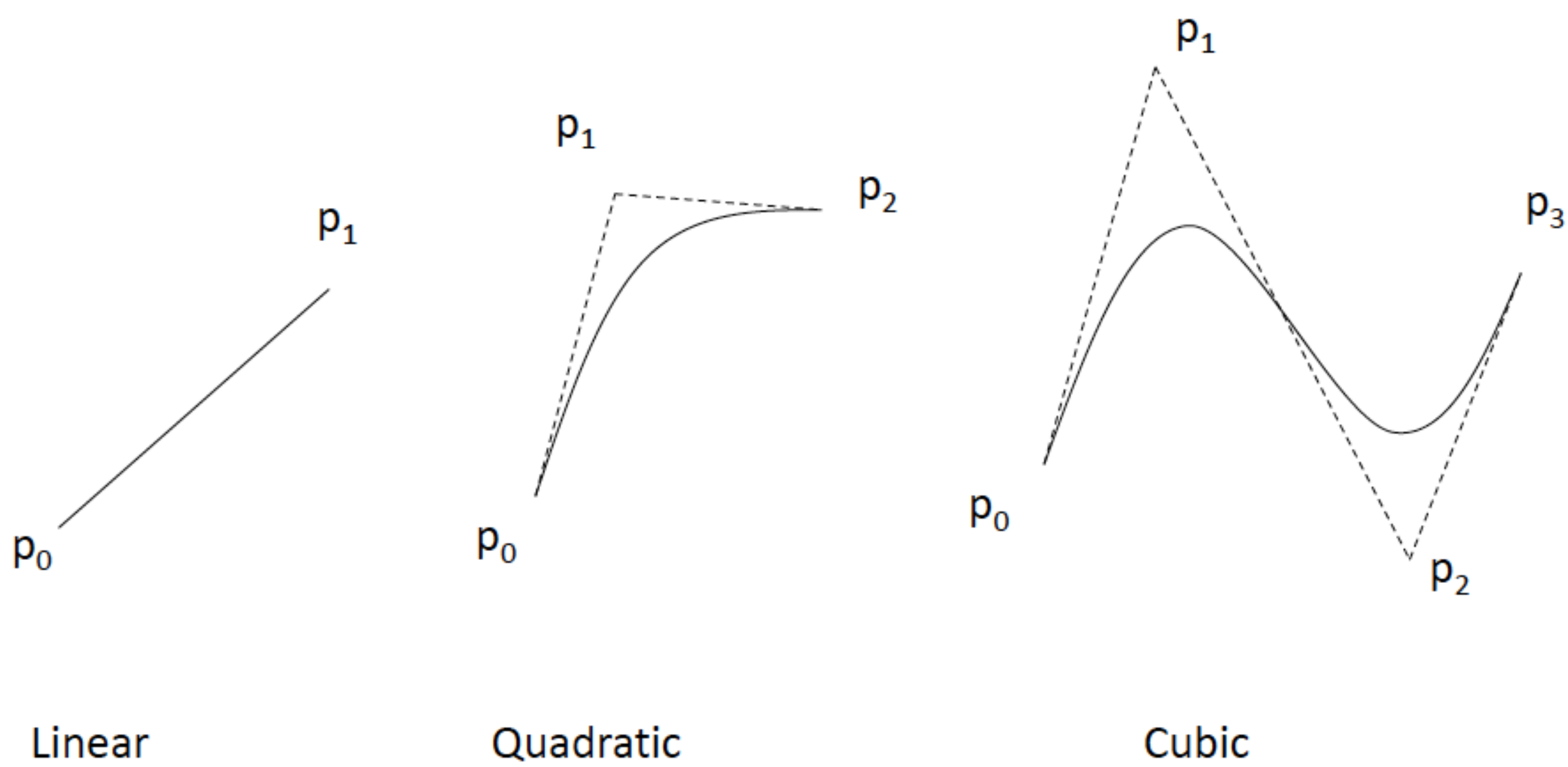
- Linear interpolation (Lerp) is a common technique for generating a new value that is somewhere in between two other values
- A 'value' could be a number, vector, color, or even something more complex like an entire 3D object…
- Consider interpolating between two points **a** and **b** by some parameter *t*



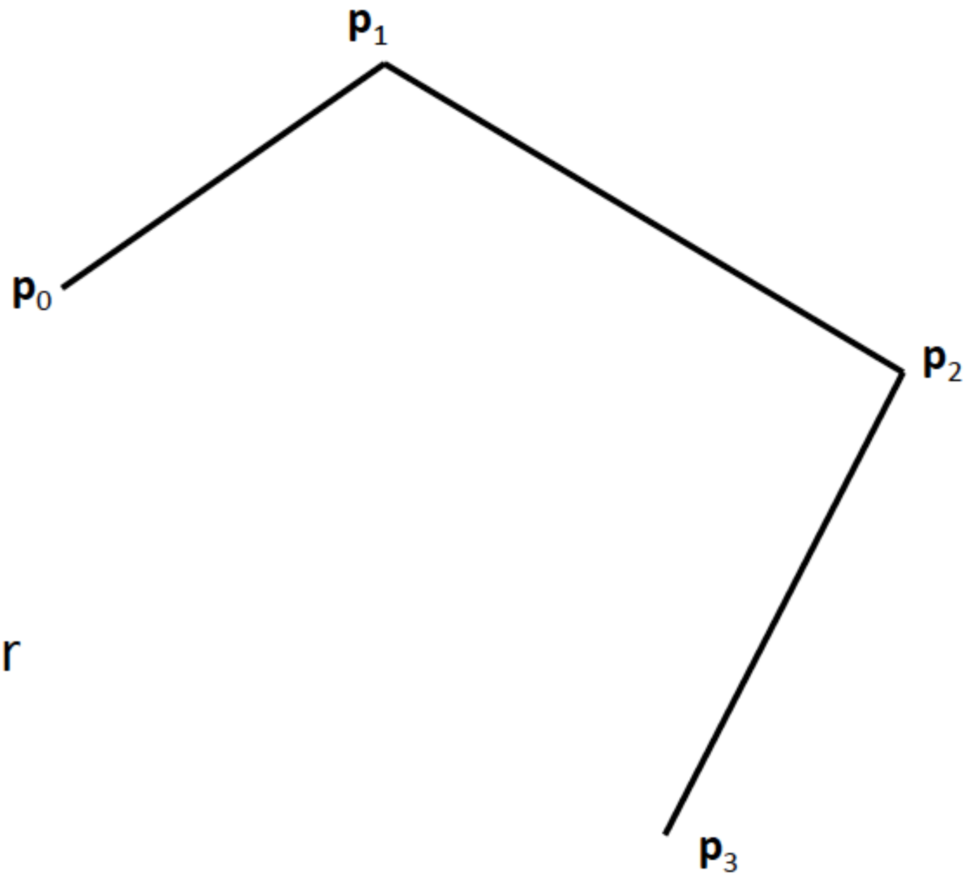
$$Lerp(t,\mathbf{a},\mathbf{b}) = (1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}$$

Bézier

- Bezier curves can be thought of as a higher order extension of linear interpolation

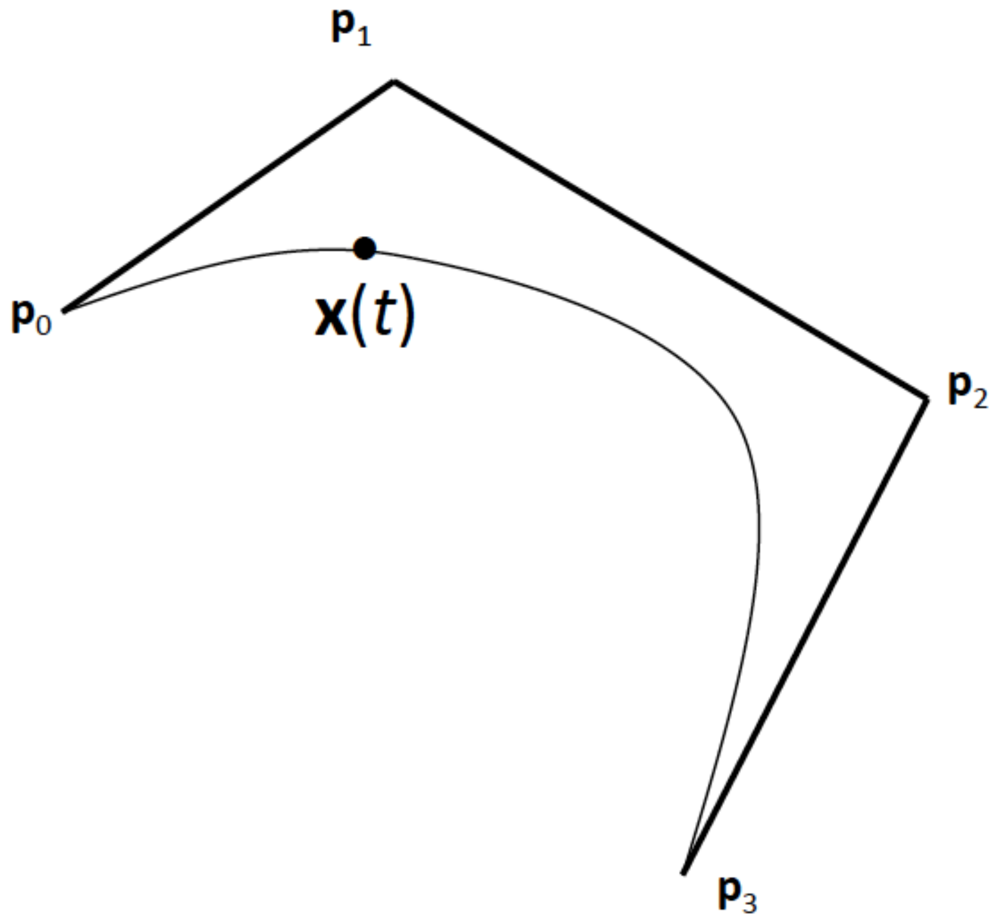


de Casteljau



- We start with our original set of points
- In the case of a cubic Bezier curve, we start with four points

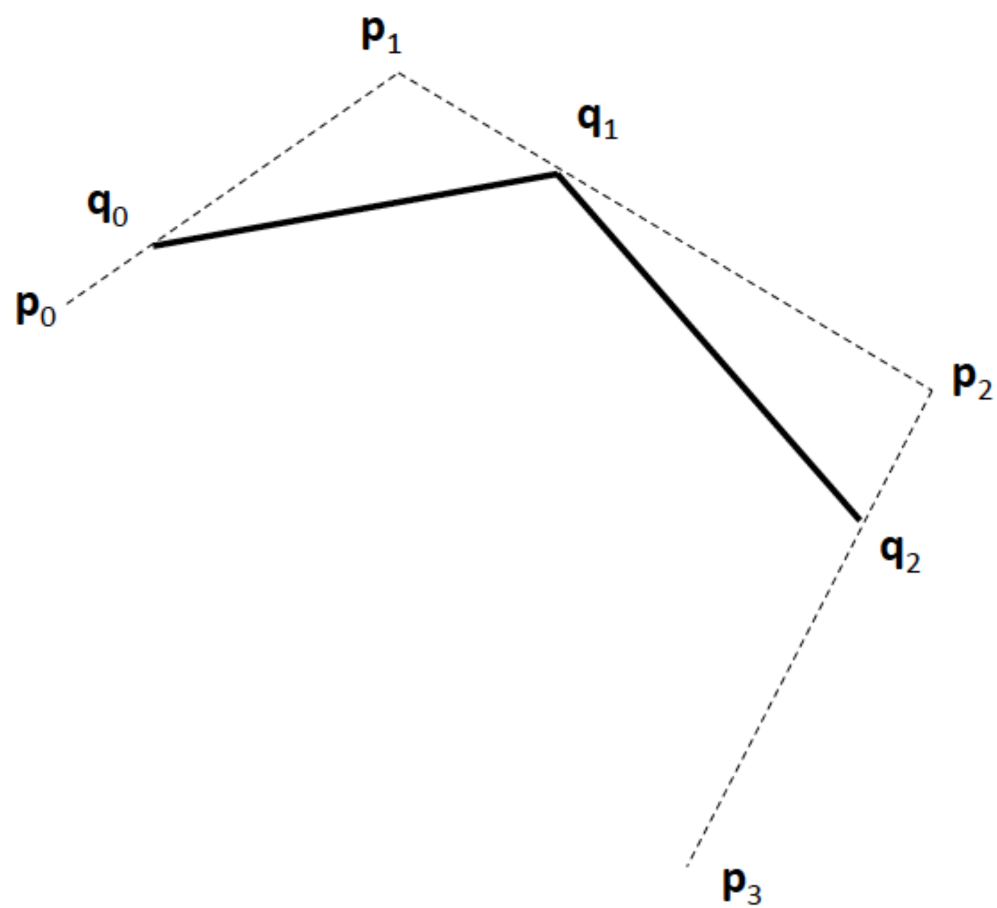
de Casteljau



- We want to find the point **x** on the curve as a function of parameter *t*

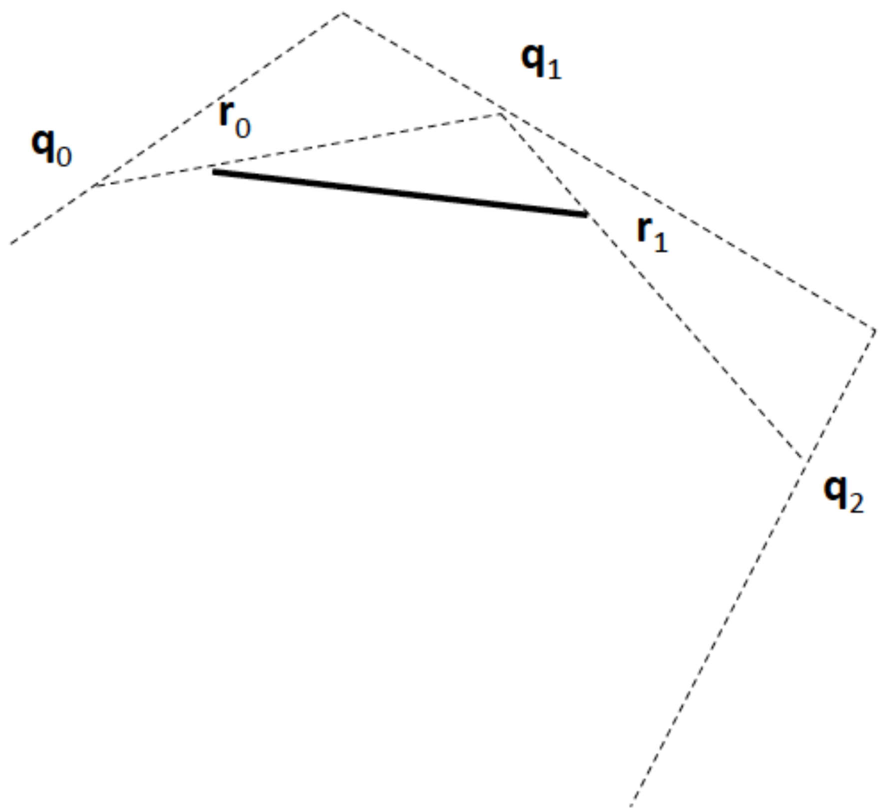
de Casteljau

$$\mathbf{q}_0 = Lerp(t, \mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1)$$
$$\mathbf{q}_1 = Lerp(t, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$$
$$\mathbf{q}_2 = Lerp(t, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3)$$



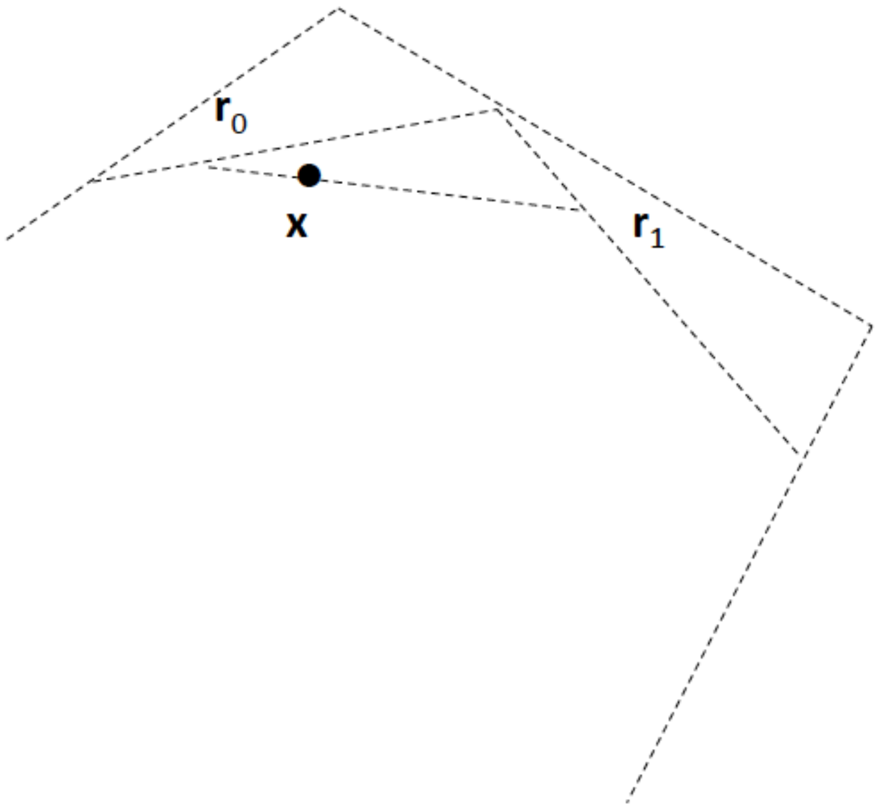
de Casteljau

$$\mathbf{r}_0 = Lerp(t, \mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1)$$
$$\mathbf{r}_1 = Lerp(t, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)$$

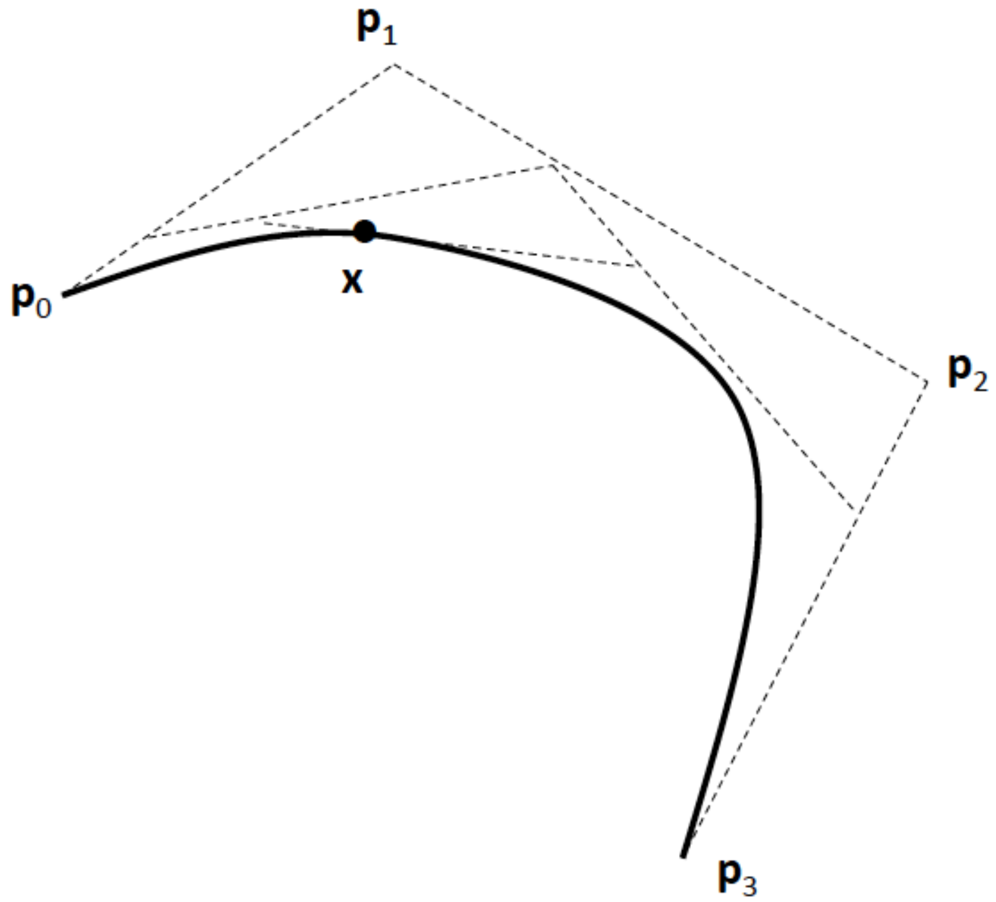


de Casteljau

$$\mathbf{x} = Lerp(t, \mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1)$$



Curva Bézier



Interpolação linear recursiva

$$\mathbf{x} = Lerp(t, \mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1)$$

$$\mathbf{r}_0 = Lerp(t, \mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1)$$
$$\mathbf{r}_1 = Lerp(t, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)$$

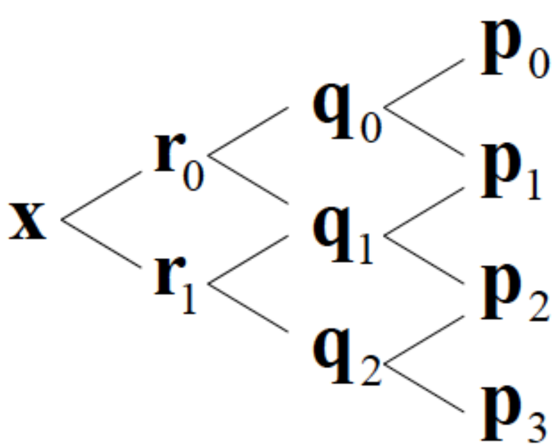
$$\mathbf{q}_0 = Lerp(t, \mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1)$$
$$\mathbf{q}_1 = Lerp(t, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$$
$$\mathbf{q}_2 = Lerp(t, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3)$$

$\mathbf{p}_0$

$\mathbf{p}_1$

$\mathbf{p}_2$

$\mathbf{p}_3$



Expandindo *Lerps*

$$\mathbf{q}_0 = Lerp(t, \mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1) = (1-t)\mathbf{p}_0 + t\mathbf{p}_1$$
$$\mathbf{q}_1 = Lerp(t, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = (1-t)\mathbf{p}_1 + t\mathbf{p}_2$$
$$\mathbf{q}_2 = Lerp(t, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3) = (1-t)\mathbf{p}_2 + t\mathbf{p}_3$$

$$\mathbf{r}_0 = Lerp(t, \mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1) = (1-t)((1-t)\mathbf{p}_0 + t\mathbf{p}_1) + t((1-t)\mathbf{p}_1 + t\mathbf{p}_2)$$
$$\mathbf{r}_1 = Lerp(t, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) = (1-t)((1-t)\mathbf{p}_1 + t\mathbf{p}_2) + t((1-t)\mathbf{p}_2 + t\mathbf{p}_3)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{x} = Lerp(t, \mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1) = (1-t)((1-t)((1-t)\mathbf{p}_0 + t\mathbf{p}_1) + t((1-t)\mathbf{p}_1 + t\mathbf{p}_2)) \\ + t((1-t)((1-t)\mathbf{p}_1 + t\mathbf{p}_2) + t((1-t)\mathbf{p}_2 + t\mathbf{p}_3))\end{aligned}$$

Forma cúbica

$$\mathbf{x} = (1-t)\big((1-t)((1-t)\mathbf{p}_0 + t\mathbf{p}_1) + t((1-t)\mathbf{p}_1 + t\mathbf{p}_2)\big)$$
$$+ t\big((1-t)((1-t)\mathbf{p}_1 + t\mathbf{p}_2) + t((1-t)\mathbf{p}_2 + t\mathbf{p}_3)\big)$$

$$\mathbf{x} = (-\mathbf{p}_0 + 3\mathbf{p}_1 - 3\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3)t^3 + (3\mathbf{p}_0 - 6\mathbf{p}_1 + 3\mathbf{p}_2)t^2$$
$$+ (-3\mathbf{p}_0 + 3\mathbf{p}_1)t + (\mathbf{p}_0)1$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{a}t^3 + \mathbf{b}t^2 + \mathbf{c}t + \mathbf{d}$$

$$\mathbf{a} = (-\mathbf{p}_0 + 3\mathbf{p}_1 - 3\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3)$$
$$\mathbf{b} = (3\mathbf{p}_0 - 6\mathbf{p}_1 + 3\mathbf{p}_2)$$
$$\mathbf{c} = (-3\mathbf{p}_0 + 3\mathbf{p}_1)$$
$$\mathbf{d} = (\mathbf{p}_0)$$

Forma matricial

$$\mathbf{x} = \mathbf{a}t^3 + \mathbf{b}t^2 + \mathbf{c}t + \mathbf{d}$$

$$\mathbf{a} = \left(-\mathbf{p}_0 + 3\mathbf{p}_1 - 3\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3\right)$$
$$\mathbf{b} = \left(3\mathbf{p}_0 - 6\mathbf{p}_1 + 3\mathbf{p}_2\right)$$
$$\mathbf{c} = \left(-3\mathbf{p}_0 + 3\mathbf{p}_1\right)$$
$$\mathbf{d} = \left(\mathbf{p}_0\right)$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \\ \mathbf{d} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \\ \mathbf{d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{p}_0 \\ \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{p}_3 \end{bmatrix}$$

Forma matricial

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{p}_0 \\ \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{p}_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_{0x} & p_{0y} & p_{0z} \\ p_{1x} & p_{1y} & p_{1z} \\ p_{2x} & p_{2y} & p_{2z} \\ p_{3x} & p_{3y} & p_{3z} \end{bmatrix}$$

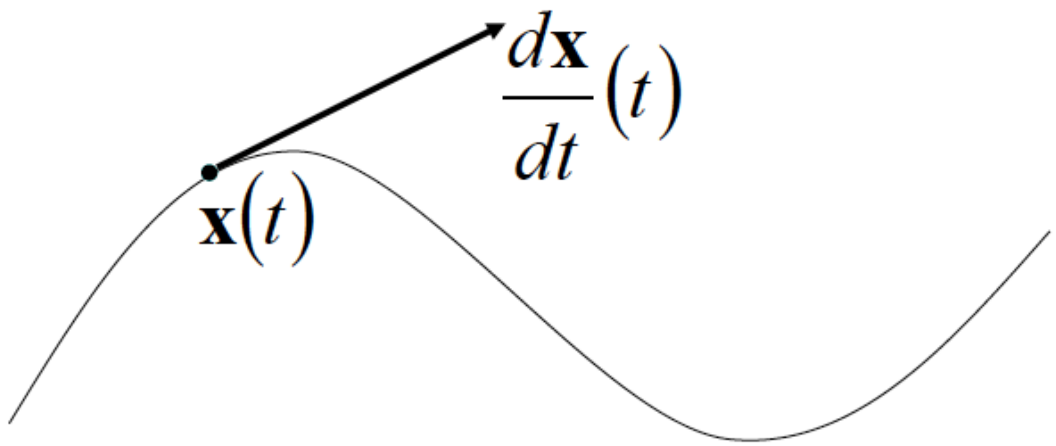
Forma matricial

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_{0x} & p_{0y} & p_{0z} \\ p_{1x} & p_{1y} & p_{1z} \\ p_{2x} & p_{2y} & p_{2z} \\ p_{3x} & p_{3y} & p_{3z} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{t} \cdot \mathbf{B}_{Bez} \cdot \mathbf{G}_{Bez} \\ \mathbf{x} &= \mathbf{t} \cdot \mathbf{C} \end{aligned}}$$

Tangentes

- The derivative of a curve represents the tangent vector to the curve at some point



Derivadas

- Finding the derivative (tangent) of a curve is easy:

$$\mathbf{x} = \mathbf{a}t^3 + \mathbf{b}t^2 + \mathbf{c}t + \mathbf{d} \qquad \frac{d\mathbf{x}}{dt} = 3\mathbf{a}t^2 + 2\mathbf{b}t + \mathbf{c}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \\ \mathbf{d} \end{bmatrix} \qquad \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 3t^2 & 2t & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \\ \mathbf{d} \end{bmatrix}$$

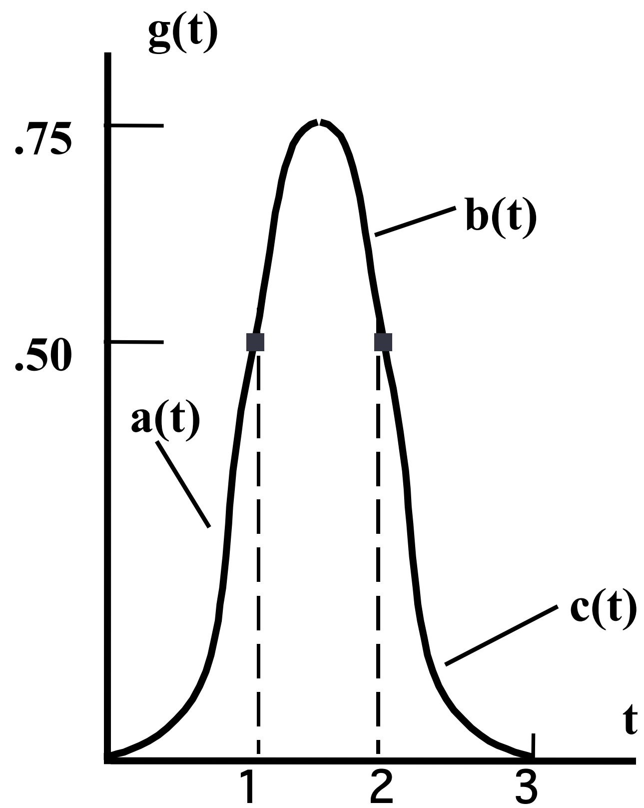
Funções polinomiais por partes

- g(*t*) consiste de 3 *segmentos* polinomiais, definidos como:

$$a(t) = \frac{1}{2}t^2$$

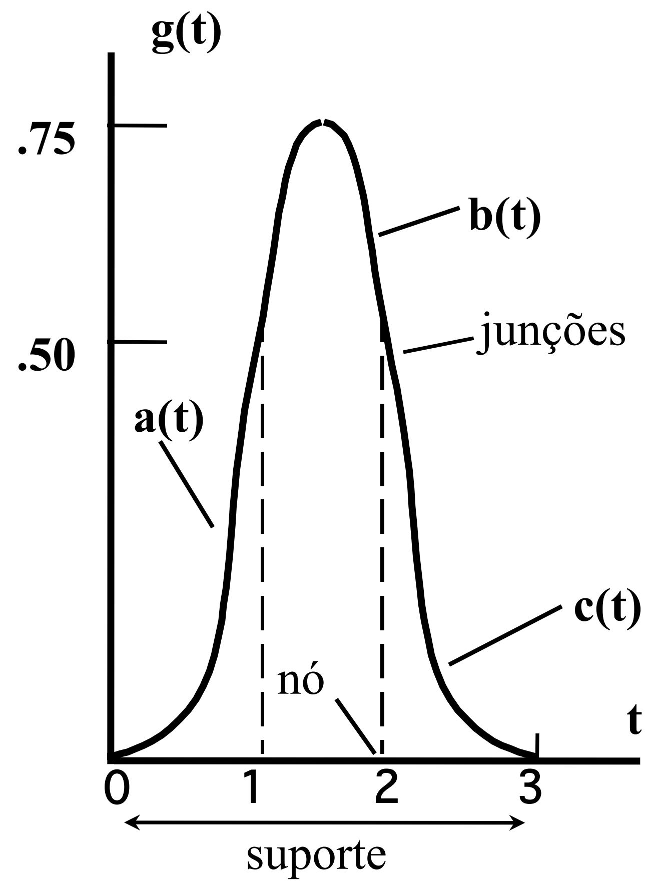
$$b(t) = \frac{3}{4} - (t - \frac{3}{2})^2$$

$$c(t) = \frac{1}{2}(3 - t)^2$$



Funções polinomiais por partes

- O suporte de $g(t)$ é [0, 3].
  - $a(t)$ é definido em [0, 1], $b(t)$ em [1, 2], e $c(t)$ em [2, 3].
- Pontos onde um par de segmentos se encontram são denominados *junções*.
- Os valores de t nas junções são chamados de *nós*.
  - Existem quatro nós neste exemplo: 0, 1, 2, e 3.



Funções polinomiais por partes

- $g(t)$ é contínua no seu suporte;
- Já que ela é feita com polinômios, ela é certamente contínua dentro de cada extensão, e $a(1) = b(1) = 1/2$, and $b(2) = c(2) = 1/2$.
- A derivada de $g(t)$ é contínua em todo o suporte: $g(t)$ é 1-suave em [0, 3].
  - A derivada é contínua dentro de cada segmento e $a'(1) = b'(1) = 1$, $b'(2) = c'(2) = -1$.

$$a(t) = \frac{1}{2}t^2$$

$$b(t) = \frac{3}{4} - (t - \frac{3}{2})^2$$

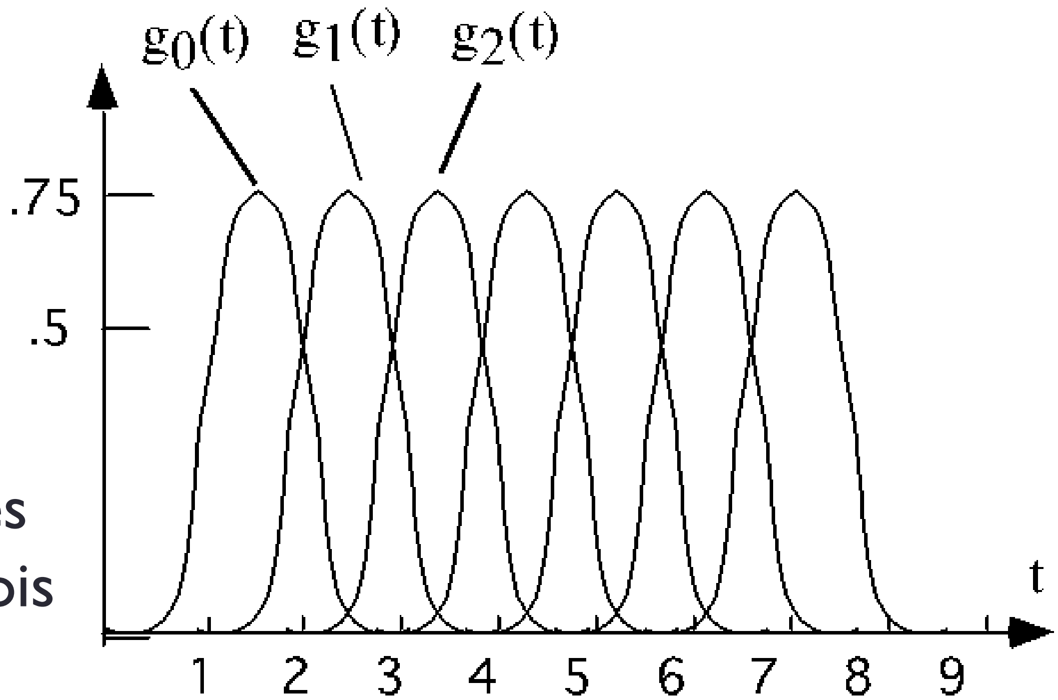
$$c(t) = \frac{1}{2}(3 - t)^2$$

Splines

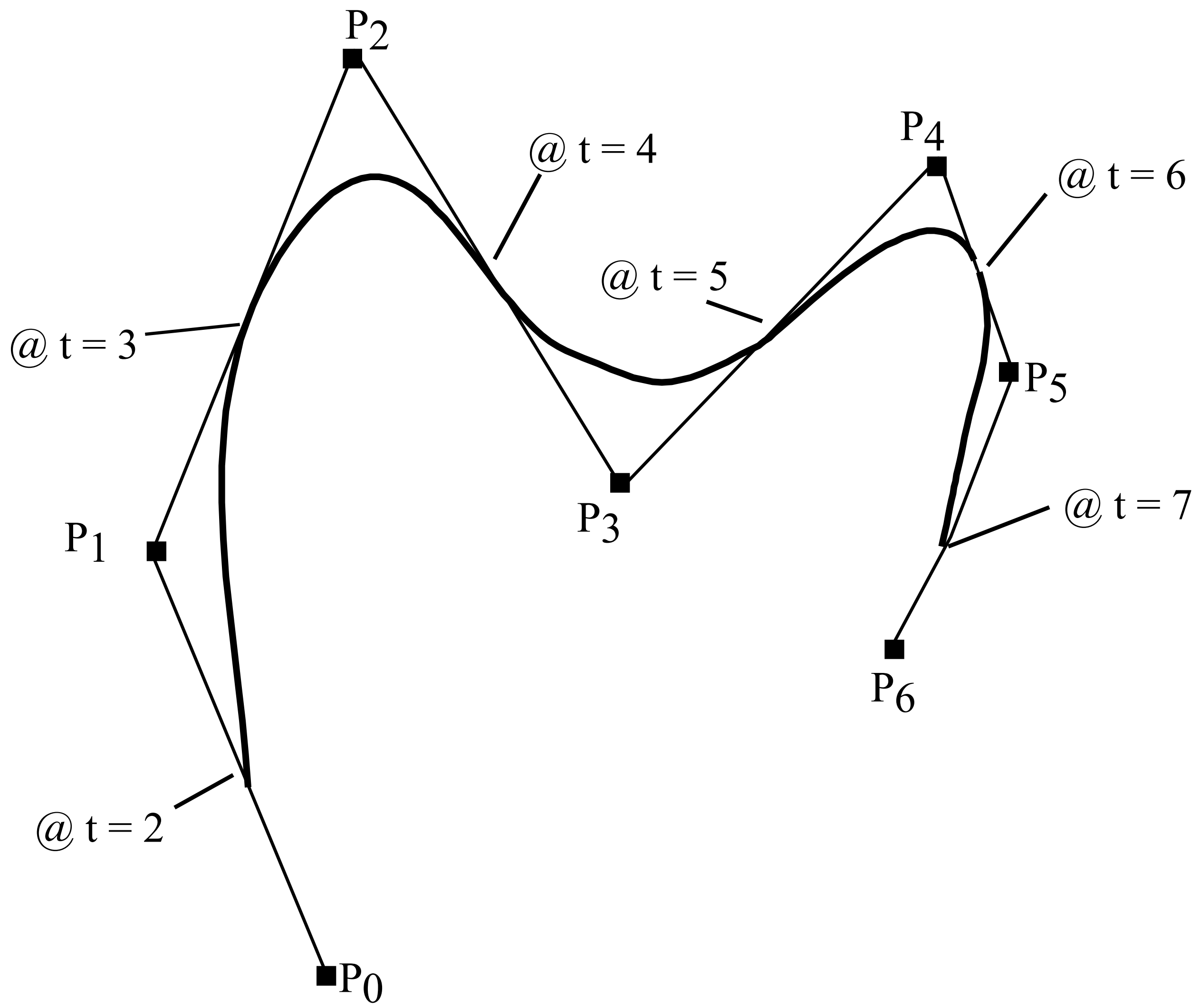
- A forma $g(t)$ é um exemplo de uma *função Spline*, uma função polinomial por partes que possui um grau de suavidade suficiente.
- Definição: Uma função spline de grau M é uma função polinomial por partes de grau M que é $(M\text{-}1)$-suave em cada nó.
  - O exemplo $g(t)$ é uma spline quadrática, pois possui grau 2 e sua primeira derivada é contínua em todo o intervalo.

Funções de ponderação

- Usaremos versões transladas de $g(t)$, onde cada função de ponderação $g_k(t)$ é formada por uma translação a partir da origem.
- A figura mostra 7 funções $g_0(t),\ldots,g_6(t)$ obtidas depois de transladar g(.) por valores inteiros.



Exemplo de curva spline



Funções B-spline

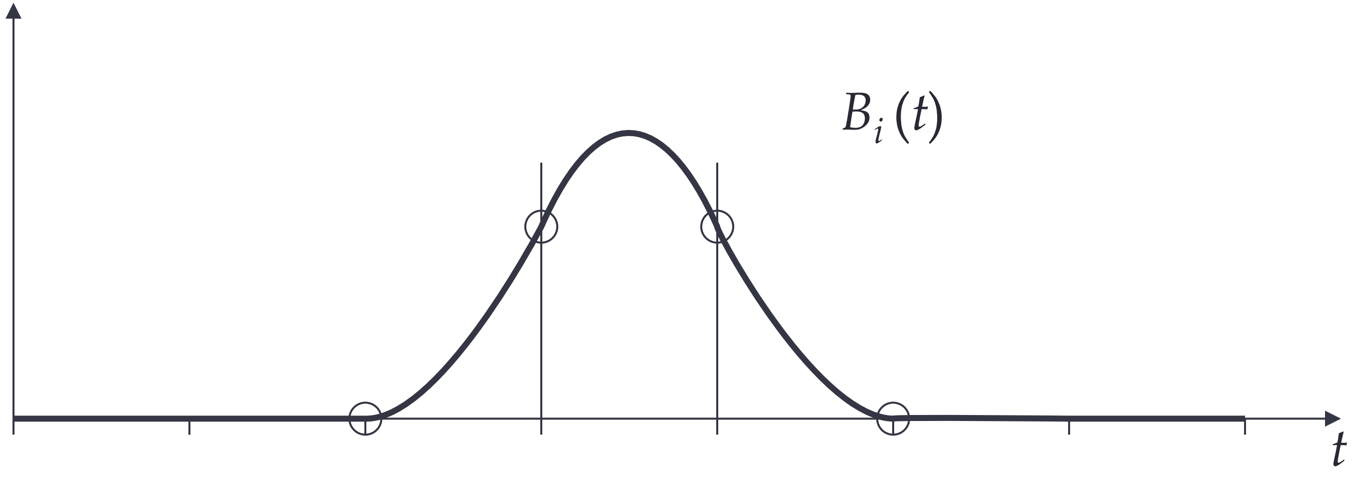
- Dado um vetor de nós, existirá uma família de funções de ponderação que permitam gerar quaisquer curvas splines possíveis (e.g. Bézier) definidas por aquele vetor de nós ?
- Tal família será chamada de *base* para as splines, ou seja, qualquer curva spline continuará ser obtida através da soma

$$P(t) = \sum_{k=0}^{L} \mathrm{P}_{\mathrm{k}} R_k(t)$$

- Uma B-spline uniforme de grau *d* tem continuidade C^{d-1}

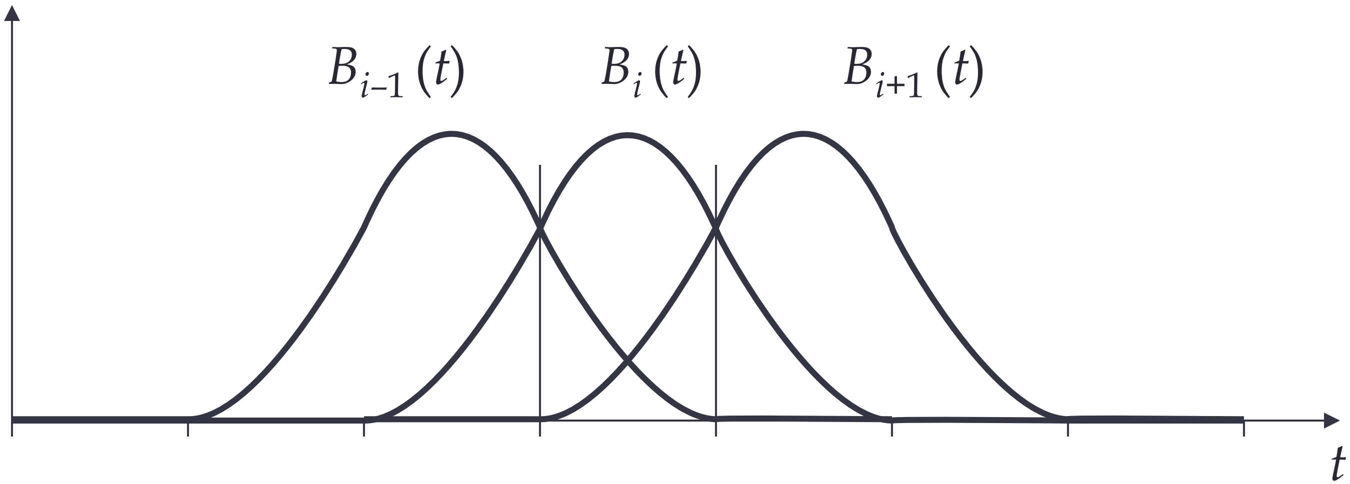
Funções B-spline

- Funções de base não-nulas apenas em um intervalo no espaço de parâmetros
- Como é impossível obter isso com apenas 1 função polinomial, ela é composta da emenda de funções polinomiais
- Uma função base de uma B-spline quadrática tem 3 trechos (não nulos) emendados com continuidade C^1



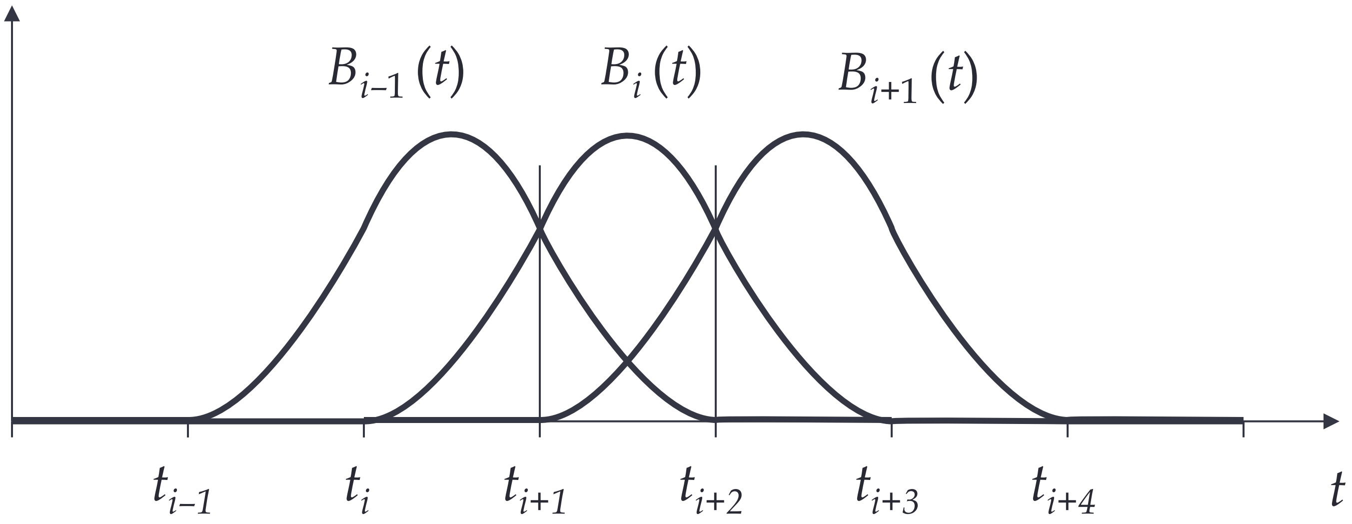
Funções B-spline

- Todas as funções de base têm a mesma forma, mas são deslocadas entre si em intervalos no espaço
- Num determinado intervalo, apenas um pequeno número de funções base são não-nulas
- Numa B-spline quadrática, cada intervalo é influenciado por 3 funções base



Funções B-spline

- Os valores t_i do espaço de parâmetro que delimitam os intervalos são chamados de *nós*
- Podemos pensar em intervalos regulares por enquanto (B-splines uniformes)



Funções B-spline

- Queremos exprimir curvas como pontos ponderados por intermédio de funções da base B-spline

$$P(t) = \sum_{i=0}^{m} \mathrm{P_i} B_{i,d}(t)$$

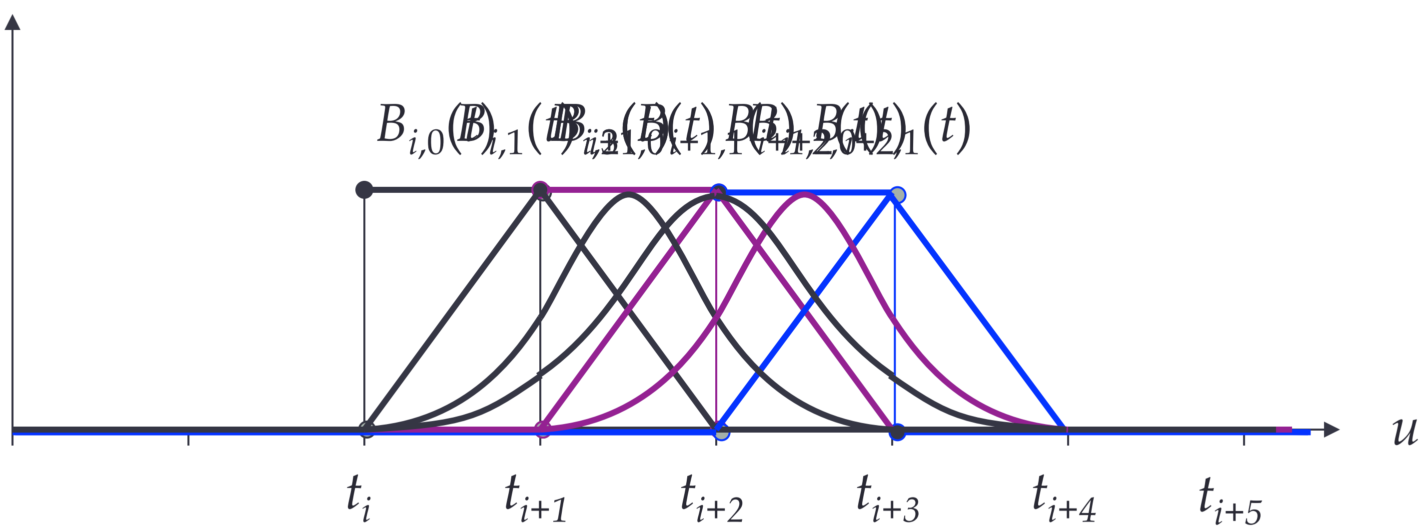
 onde *m* é o número de pontos do polígono de controle e *d* é o grau da B-spline que se quer usar

- Para derivar as funções de base B-spline pode-se resolver um sistema de equações
  - Para B-splines cúbicas, requer-se continuidade C^2 nos nós, a propriedade do fecho convexo, etc

Recorrência Cox-de Boor

$$B_{k,0}(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } t_k \leq t < t_{k+1}, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$B_{k,d}(t) = \frac{t - t_k}{t_{k+d} - t_k} B_{k,d-1} + \frac{t_{k+d+1} - t}{t_{k+d+1} - t_{k+1}} B_{k+1,d-1}$$

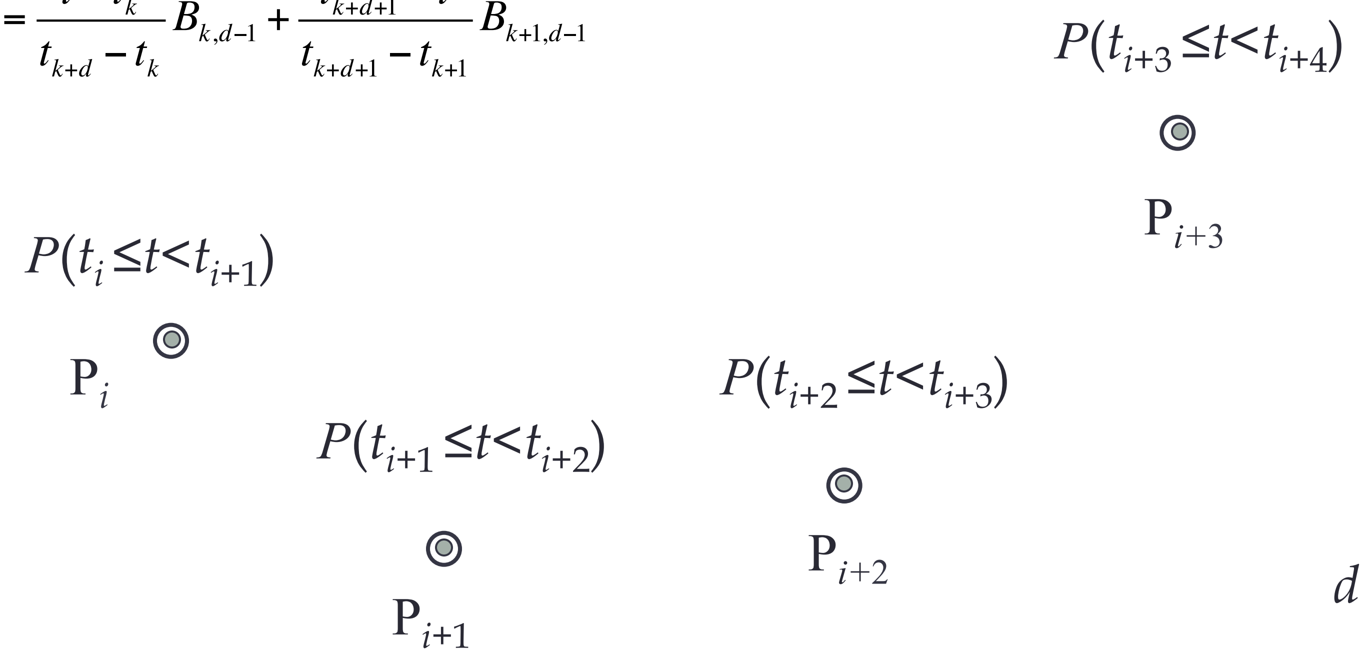


Recorrência Cox-de Boor

$$B_{k,0}(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } t_k \le t < t_{k+1}, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$B_{k,d}(t) = \frac{t - t_k}{t_{k+d} - t_k} B_{k,d-1} + \frac{t_{k+d+1} - t}{t_{k+d+1} - t_{k+1}} B_{k+1,d-1}$$

$$P(t) = \sum_{i=0}^{m} \mathrm{P}_i B_{i,d}(t)$$



$d = 0$

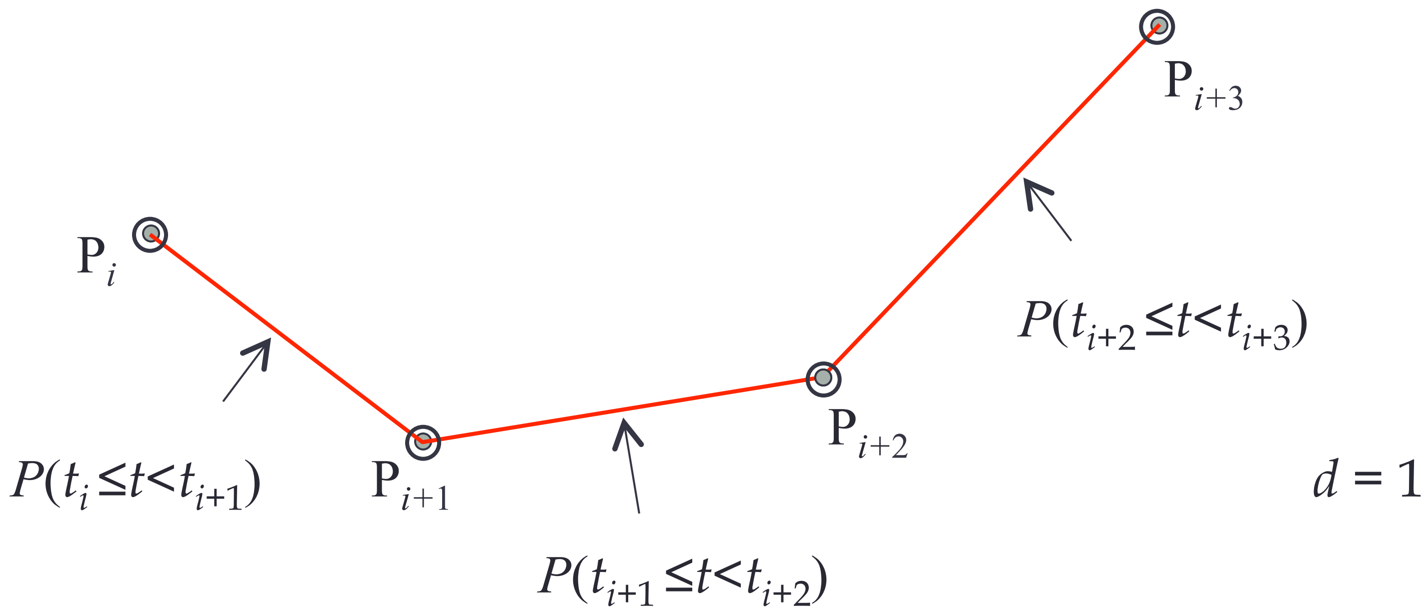
(para $t = t_i$, a spline de grau 0 passa por P_i)

Recorrência Cox-de Boor

$$P(t) = \sum_{i=0}^{m} \mathrm{P}_{\mathrm{i}} B_{i,d}(t)$$

$$B_{k,0}(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } t_k \le t < t_{k+1}, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$B_{k,d}(t) = \frac{t - t_k}{t_{k+d} - t_k} B_{k,d-1} + \frac{t_{k+d+1} - t}{t_{k+d+1} - t_{k+1}} B_{k+1,d-1}$$

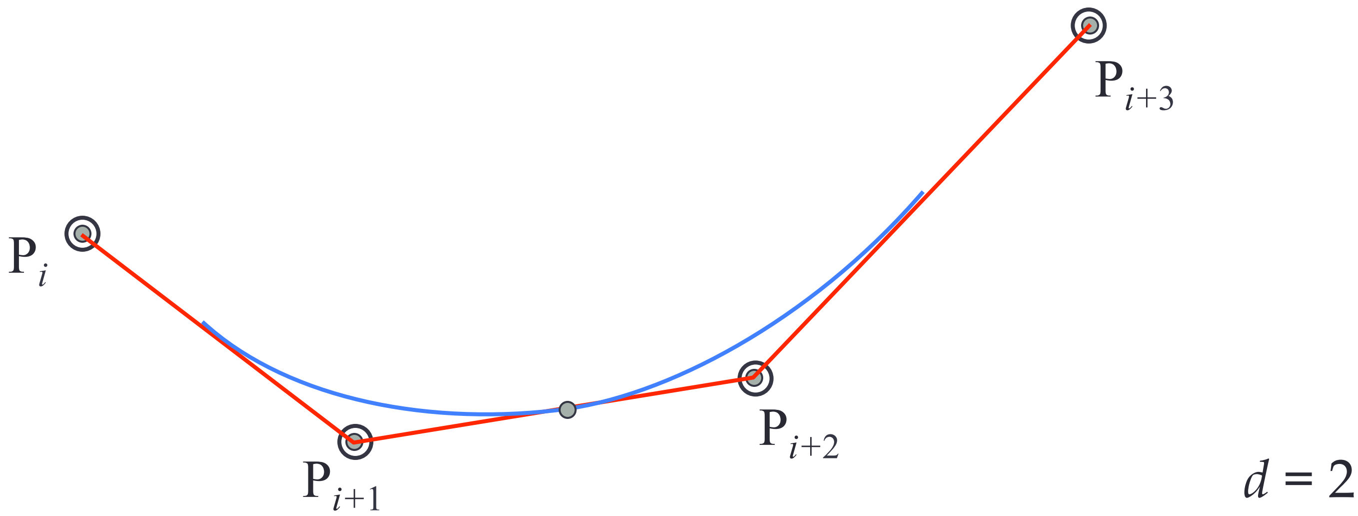


Recorrência Cox-de Boor

$$P(t) = \sum_{i=0}^{m} \mathrm{P_i} B_{i,d}(t)$$

$$B_{k,0}(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } t_k \le t < t_{k+1}, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$B_{k,d}(t) = \frac{t - t_k}{t_{k+d} - t_k} B_{k,d-1} + \frac{t_{k+d+1} - t}{t_{k+d+1} - t_{k+1}} B_{k+1,d-1}$$

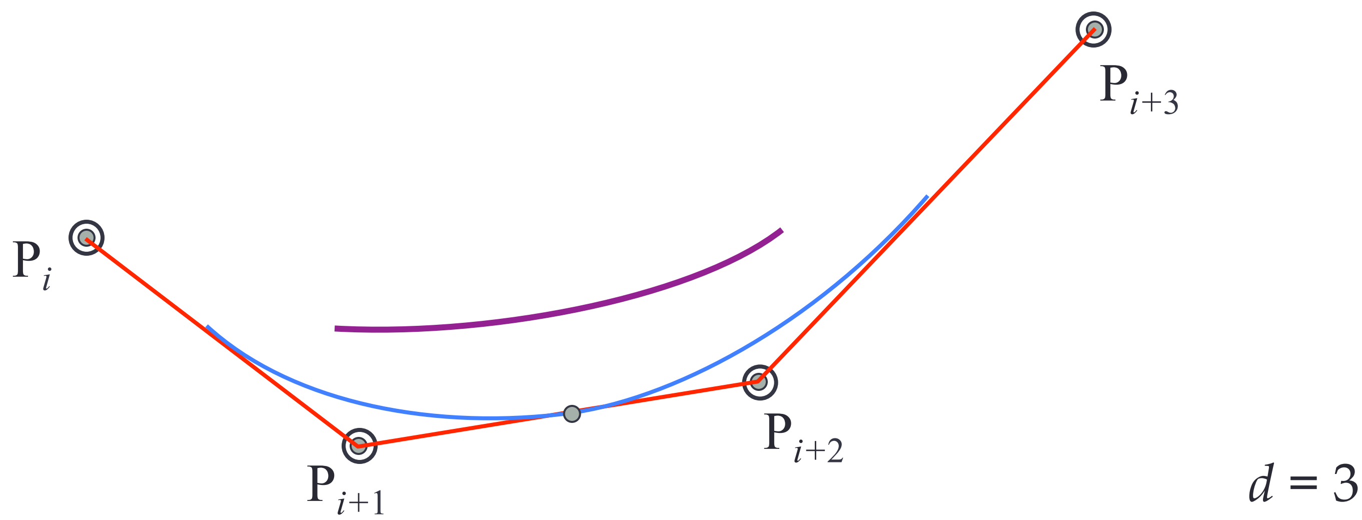


Recorrência Cox-de Boor

$$B_{k,0}(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } t_k \le t < t_{k+1}, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$P(t) = \sum_{i=0}^{m} \mathrm{P}_{\mathrm{i}} B_{i,d}(t)$$

$$B_{k,d}(t) = \frac{t - t_k}{t_{k+d} - t_k} B_{k,d-1} + \frac{t_{k+d+1} - t}{t_{k+d+1} - t_{k+1}} B_{k+1,d-1}$$



Propriedades das B-splines

- Dados $n+1$ pontos ($\mathbf{P}_0 \ldots \mathbf{P}_n$) de controle, ela é composta de (n-d+1) curvas de grau d emendadas com continuidade d-1 nos $n+d+1$ nós $t_0, t_1, \ldots, t_{n+d+1}$
- Cada ponto da curva é afetado por d+1 pontos de controle
- Cada ponto de controle afeta d+1 segmentos
- Curva restrita ao fecho convexo do polígono de controle
- Invariante sob transformações afins

Splines demo

- http://www.ibiblio.org/e-notes/Splines/Basis.htm

Inserindo nós

- Podemos notar que as B-splines uniformes em geral não passam pelos pontos de controle
- Entretanto, se repetirmos nós podemos fazer a curva se aproximar dos pontos de controle
  - Para fazer a interpolação do primeiro ponto usando uma B-spline cúbica, fazemos $t_0=t_1=t_2=t_3$
  - Para fazer uma B-spline cúbica interpolar primeiro e último ponto, podemos usar o vetor de nós: 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1
  - De fato, com este vetor de nós, teremos uma Bézier cúbica

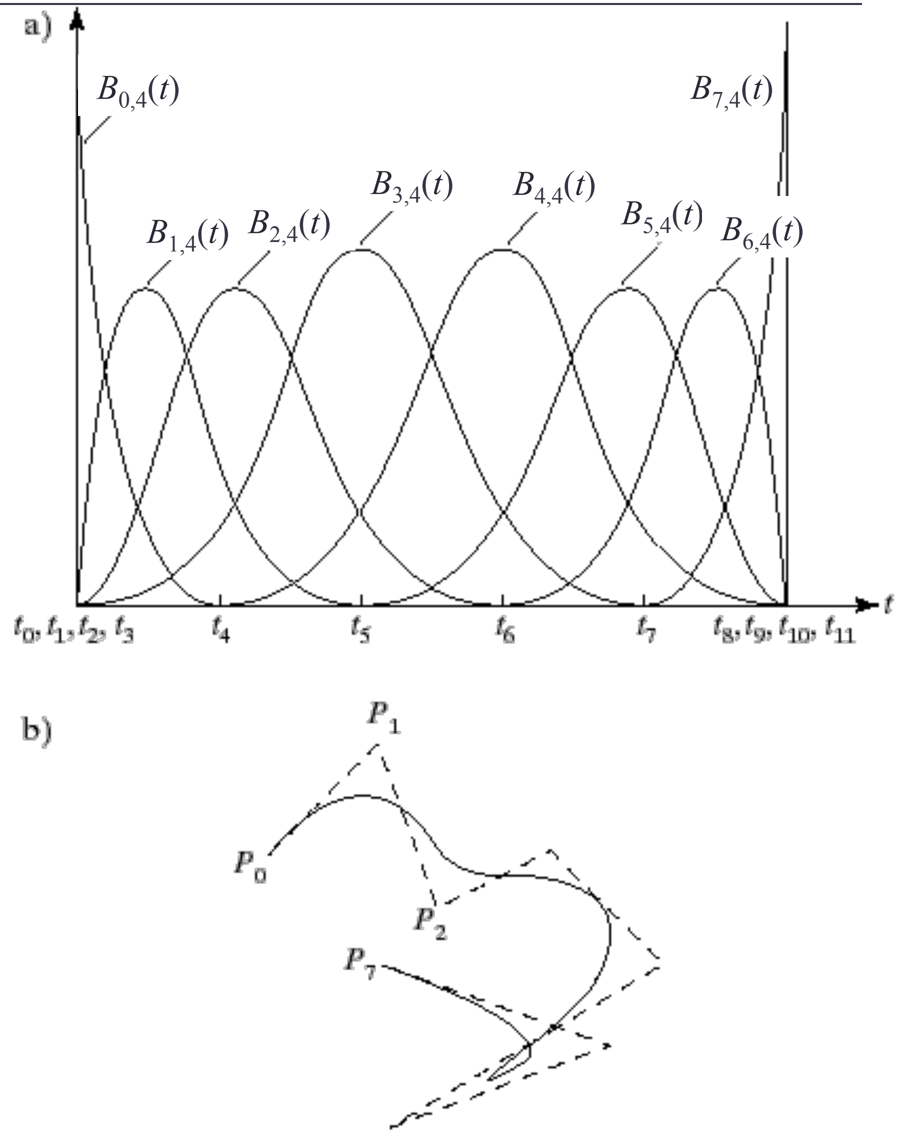
Vetor padrão de nós

- O vetor padrão de nós para uma B-spline de ordem m começa e termina com um nó de multiplicidade m e atribui um espaçamento unitário para os nós restantes.
- Se tivermos 8 pontos de controle e utilizarmos B-splines cúbicas ($m = 4$), o vetor padrão será:

$$T = (0, 0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 5, 5, 5)$$

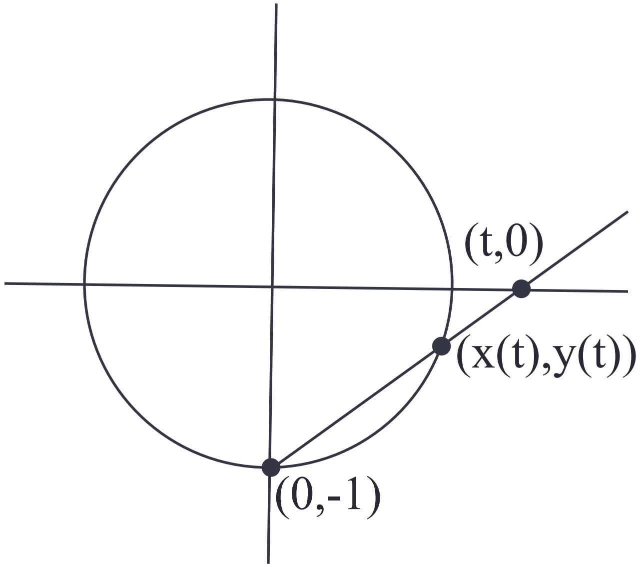
Vetor padrão de nós

- As funções $B_{0,4}(t)$ e $B_{7,4}(t)$ se tornam discontínuas e possuem suporte 1.
- Somente $B_{3,4}(t)$ e $B_{4,4}(t)$ possuem suporte 4.
- As funções restantes possuem suporte 2 ou 3, e suas curvas se tornam mais distorcidas quando aproximam o primeiro e último nó.



Parametrização do círculo

- Forma implícita
  - x = ty + t, sujeito à condição
  - $x^2 + y^2 = 1$
- Resolvendo esse sistema chega-se a uma parametrização alternativa do círculo:



$$x(t) = \frac{2u}{1+t^2} \qquad y(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Note o denominador!

Curvas paramétricas racionais

- Funções são razões
  - Avaliadas em coordenadas homogêneas:

$$[x(t), y(t), z(t), w(t)] \rightarrow \left[\frac{x(t)}{w(t)}, \frac{y(t)}{w(t)}, \frac{z(t)}{w(t)}\right]$$

- São projeções de R^4 em R^3
- Podem representar seções cônicas (círculos, elipses, etc) exatas
- Invariantes à transformações projetivas

Splines racionais

$$P(t) = \sum_{k=0}^{L} \mathrm{P_k} R_k(t)$$

- B-spline normal:

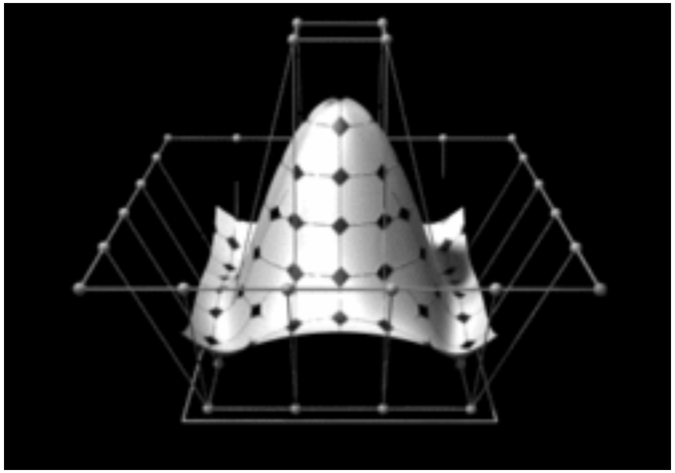
$$R_k = B_{k,m}(t)$$

- B-spline racional:

$$R_k(t) = \frac{w_k B_{k,m}(t)}{\sum_{l=0}^{L} w_l B_{l,m}(t)}$$

Splines racionais

- $B_{k,m}(t)$ são B-splines de ordem m
- Os pesos são positivos para garantir que o denominador não seja zero
- O vetor de nós que define as funções B-splines são normalmente não-uniformes
- Esta família de curvas é chamada de *B-Splines Racionais Não-Uniformes*, ou simplesmente *NURBS*.



Splines racionais

- O numerador de $P(t)$ é uma combinação linear dos pontos de controle.
- Ele também deve ser uma combinação afim dos pontos P_k
- Escalando todos os w_k de forma com que eles somem 1 faz com que P(t) seja uma combinação afim de P_k.
- Se $w_j = 0$, ponto P_j não possui influência na curva.

$$P(t) = \frac{\sum_{k=0}^{L} w_k P_k N_{k,m}(t)}{\sum_{k=0}^{L} w_k N_{k,m}(t)}$$

Splines racionais

- Se todos os pesos forem os mesmos, teremos a forma de uma B-spline normal
- Quando os pesos forem diferentes, $P_k(t)$ passará a ser um NURBS

$$R_k(t) = \frac{w_k N_{k,m}(t)}{\sum_{l=0}^{L} w_l N_{l,m}(t)}$$

Splines racionais

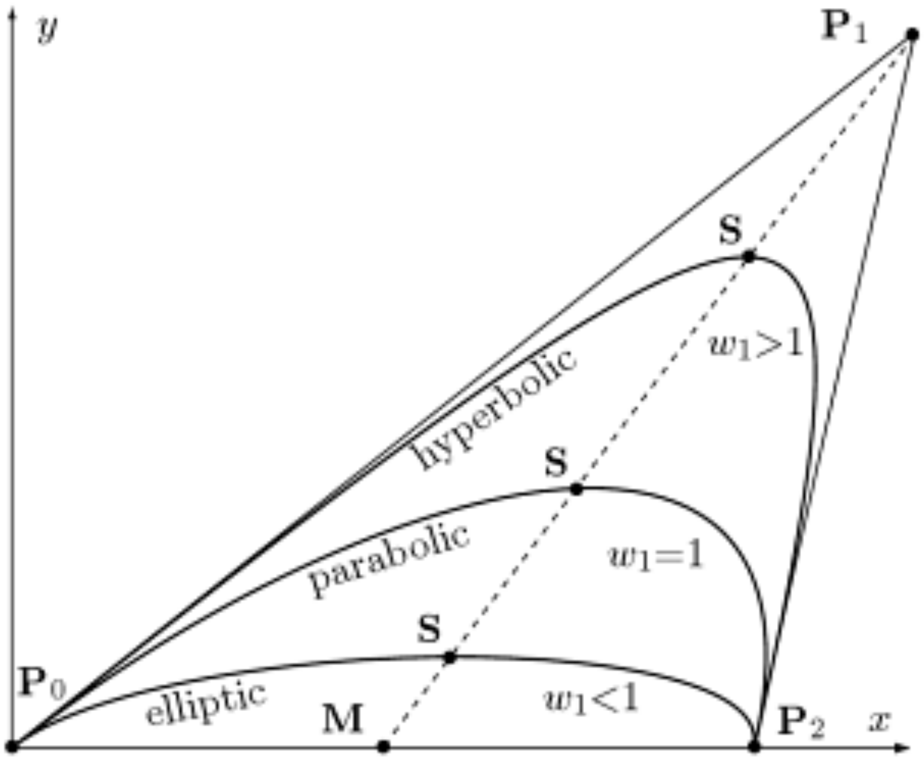
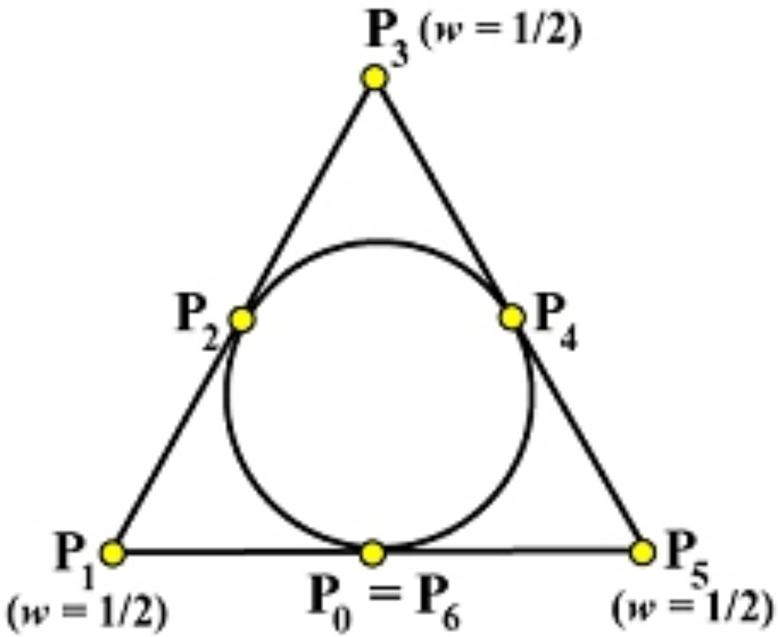
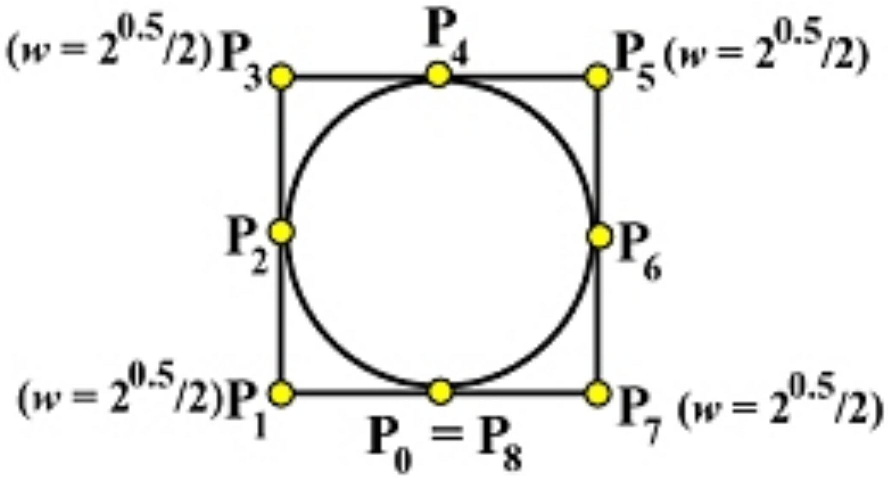


Figure 7.22: Conics Generated by Varying w_1.

- Efeito resultante da escolha de pesos

Desenhando círculos com NURBS





Nós = { 0, 0, 0, 1/3, 1/3, 2/3, 2/3, 1, 1, 1 }

Nós = { 0, 0, 0, 1/4, 1/4, 1/2, 1/2, 3/4, 3/4, 1, 1, 1 }

Superfícies gaussianas (RaGs)

- Assumindo que os vértices obtidos pela subdivisão são representados por P_i, uma superfície RaG é definida por

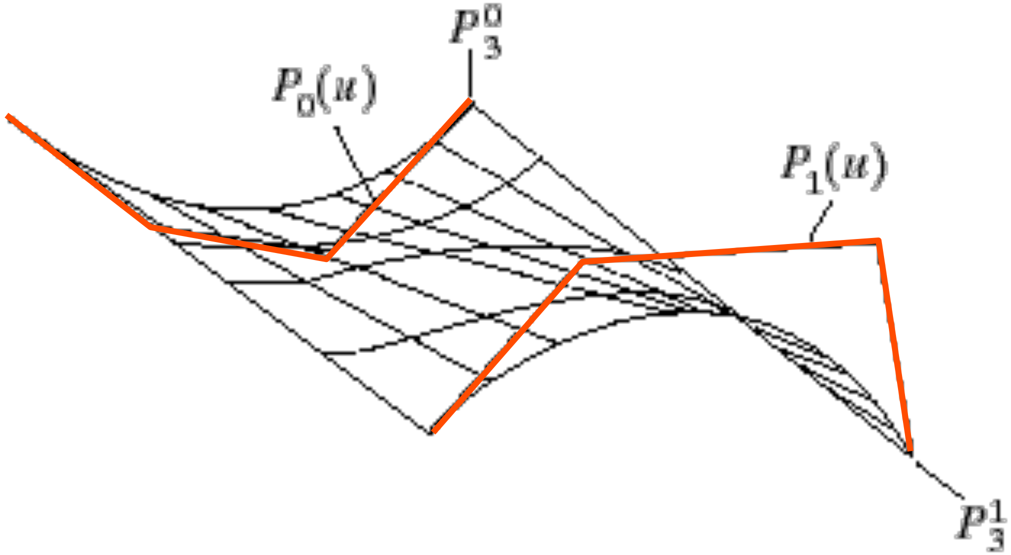
$$\mathrm{P}(u,v) = \sum_{i=1}^{N} \mathrm{P}_i g_i(u,v)$$

$$g_i(u,v) = \frac{w_i G_{i,\sigma}(u-u_i, v-v_i)}{\sum_{j=1}^{N} w_j G_{j,\sigma}(u-u_j, v-v_j)}$$

- Onde G_i é uma Gaussiana (com altura unitária) em 2D centralizada em cada ponto de controle.

Modelagem de superfícies

- Superfícies de revolução e retalhos ("patches") podem ser desenhados usando curvas Bézier ou B-spline



Superfícies de revolução

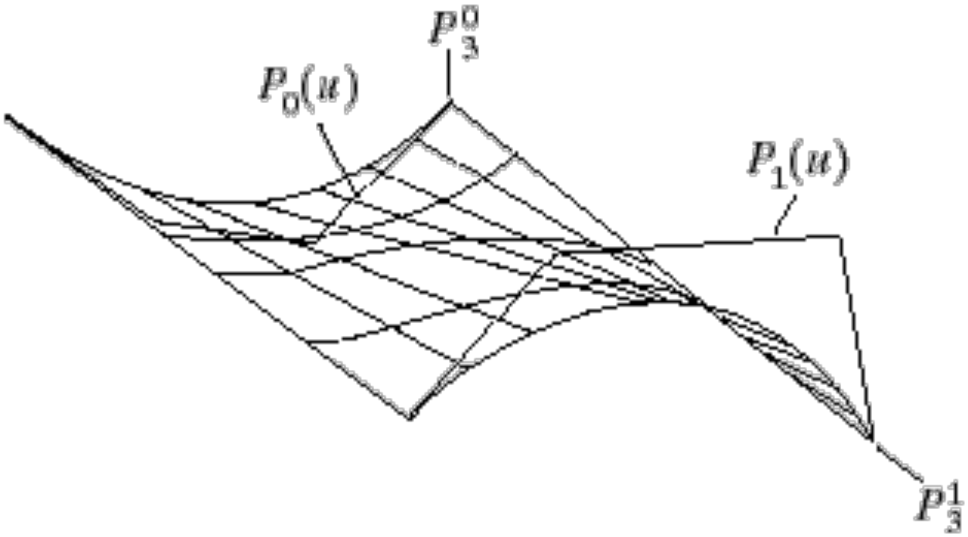
- Uma superfície de revolução é definido por duas curvas de fronteira $P_0(u)$ e $P_1(u)$, conectadas em cada valor de u
- A expressão paramétrica para uma superfície de revolução é simplesmente uma interpolação linear entre P_0 e P_1

$$P(u, v) = (1\text{-}v)\, P_0(u) + v\, P_1(u)$$

- $P_0(u)$ e $P_1(u)$ poderão ser curvas B-spline (ou curvas Bézier)

Superfícies de revolução

- Ambas as curvas $P_0(u)$ e $P_1(u)$ são Bézier cúbicas
- $P_0(u)$ é baseada nos pontos $P_0{}^0$, $P_1{}^0$, $P_2{}^0$, $P_3{}^0$, e $P_1(u)$ é baseada nos pontos $P_0{}^1, P_1{}^1, P_2{}^1, P_3{}^1$



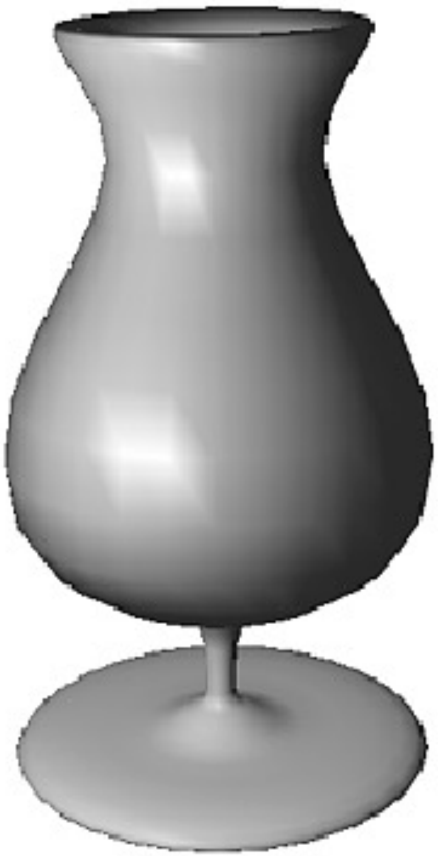
Superfícies de revolução

- A equação para esta superfície é:

$$P(u,v) = \sum_{k=0}^{3} ((1-v)P_k^0 + vP_k^1)B_k^3(u)$$

- Seus contornos *v* são linhas retas ligando pontos correspondentes nas duas curvas Bézier
- Os contornos *u* são curvas Bézier cujos pontos de controle são o resultado da interpolação dos pontos de controle das duas curvas Bézier
- Curvas B-spline ou NURBS poderiam também ser usadas como curvas finais

Superfícies de revolução B-spline



Superfícies de revolução B-spline

- Uma superfície de revolução é formada quando um perfil $C(v)=(X(v), Z(v))$ é rotacionado no eixo z
- A superfície possuirá a forma paramétrica:

$$P(u,v) = (X(v)\cos(u), X(v)\sin(u), Z(v))$$

Tarefa de casa

- EP #3!