MAC420/5744: Introdução à Computação Gráfica

Marcel P. Jackowski
mjack@ime.usp.br

Aula #7: Introdução à transformações

Objetos geométricos

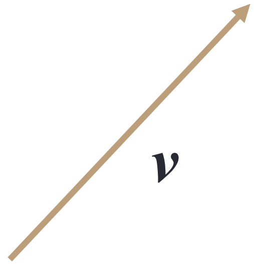
- A geometria estuda os relacionamentos entre objetos em um espaço n-dimensional
- Em CG, estamos interessados em objetos que existem nas dimensões 2 e 3
- Precisaremos de 3 elementos básicos
  - Escalares
  - Vetores
  - Pontos

Escalares

- Membros de conjuntos que podem ser combinados por duas operações básicas (adição e multiplicação)
- Obedecem alguns axiomas fundamentais
  - Associatividade, comutatividade, inverso, etc
- Exemplos:
  - Conjuntos dos números reais e complexos
- Não possuem propriedades geométricas

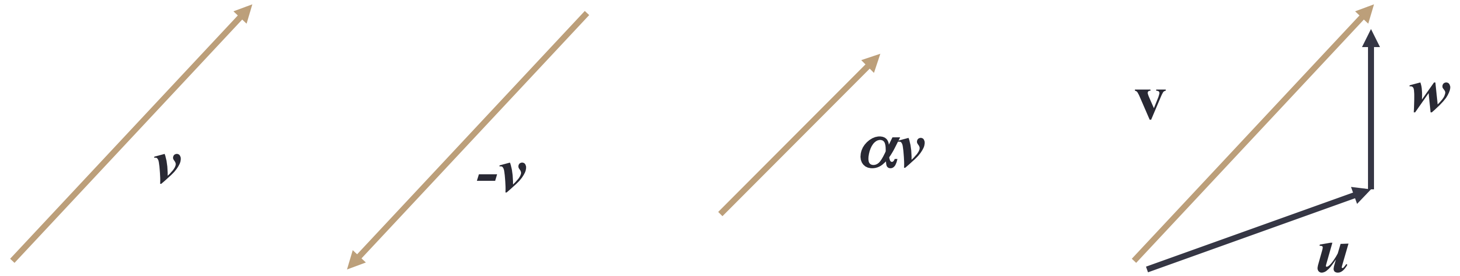
Vetores

- Um vetor é uma quantidade com dois atributos
  - Direção
  - Magnitude
- Exemplos:
  - Força
  - Velocidade
  - Segmentos de reta orientados



Operações com vetores

- Todo vetor possui um vetor inverso
  - Mesma magnitude mas direção oposta
- Todo vetor pode ser multiplicado por um escalar
- Existência do vetor nulo
  - Magnitude 0, direção indefinida
- A soma de dois vetores é um vetor



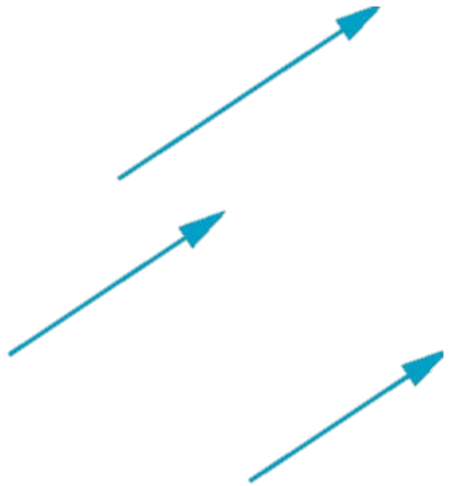
Espaços vetoriais

- Sistema matemático para manipulação de vetores
- Operações
  - Multiplicação escalar-vetor: $u=\alpha v$
  - Adição vetor-vetor: $w=u+v$
- Expressões como

$$v=u+2w-3r$$

fazem sentido em um espaço vetorial.

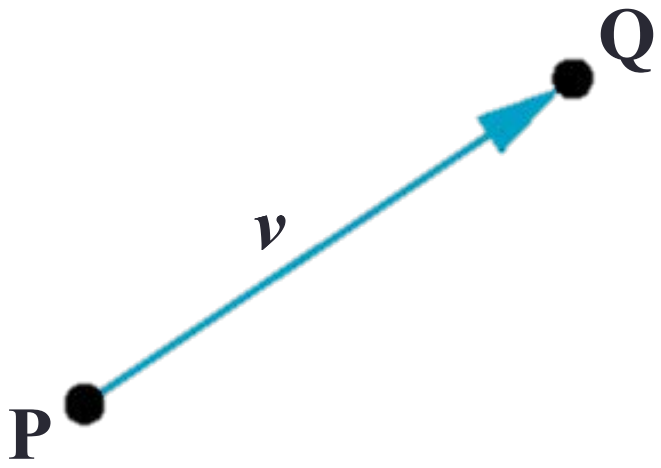
Vetores não possuem posição



- Estes vetores são idênticos
  - Mesma orientação e magnitude
- Espaços vetoriais insuficientes para geometria
  - Precisamos de pontos!

Pontos

- Posições no espaço
- Operações entre pontos e vetores
  - Subtração entre pontos
  - Adição entre ponto e vetor

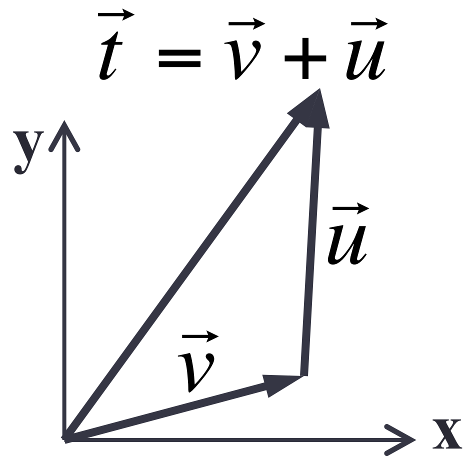


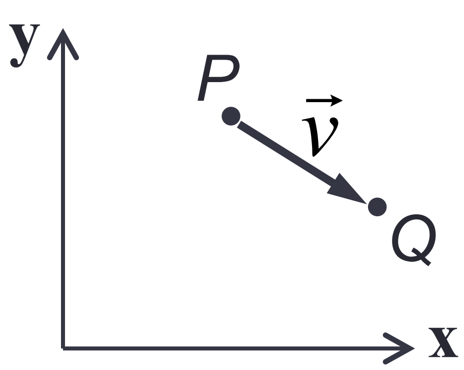
$$v = Q - P$$

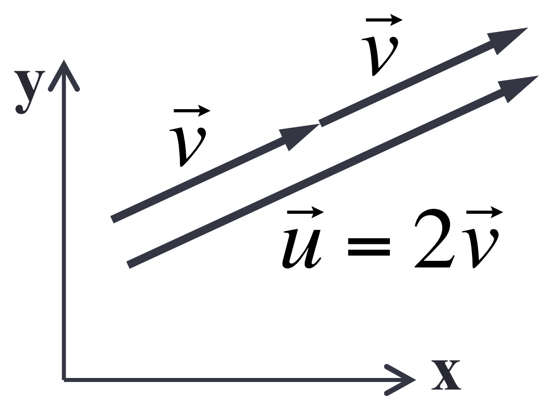
$$Q = v + P$$

Espaço vetorial afim

- Soma de vetores
- Multiplicação de vetor por escalar
- Subtração de pontos
- Soma de ponto com vetor

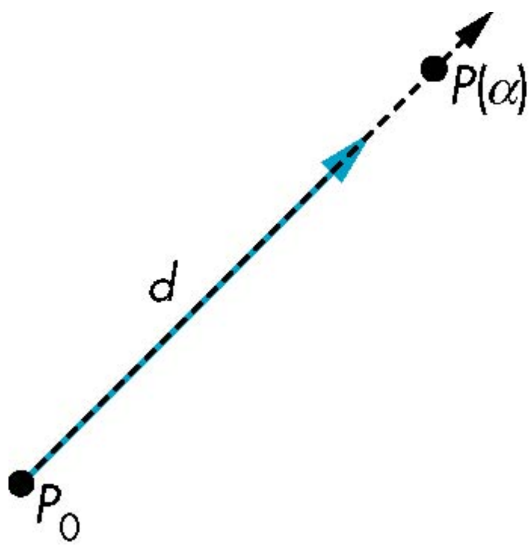






Retas

- Considere todos os pontos da forma
  - $P(\alpha)=P_0+\alpha\mathbf{d}$
  - Conjunto de todos os pontos que passam por P_0 na direção do vetor **d**



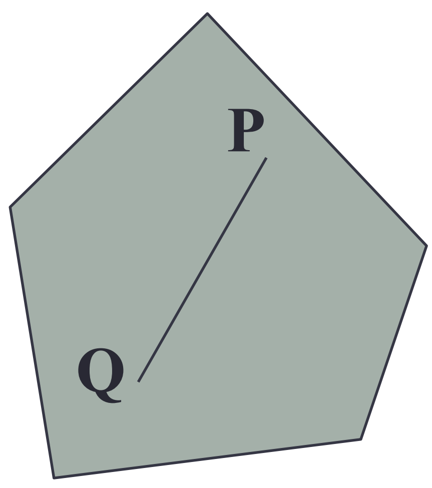
Forma paramétrica da reta

- Mais robusta e geral que outras formas
- Extensível para curvas e superfícies
- Formas bidimensionais
  - Explícita: $y = mx + h$
  - Implícita: $ax + by + c = 0$
  - Paramétrica:

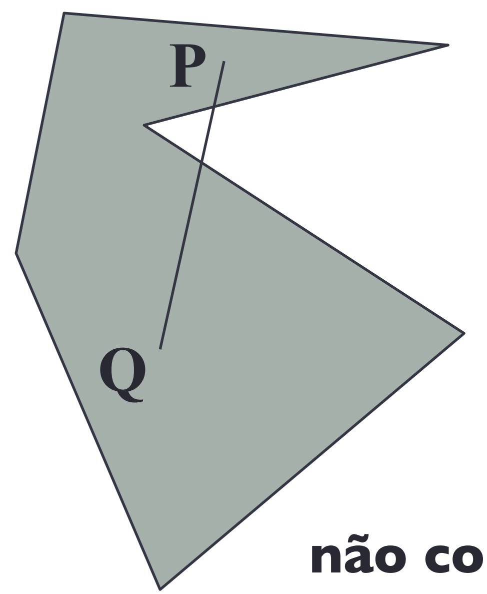
$$x(t) = x_0 + t\mathbf{v_x}$$
$$y(t) = y_0 + t\mathbf{v_y}$$

Convexidade

- Um objeto é *convexo* se e somente se para quaisquer dois pontos no objeto, todos os pontos no segmento de reta entre estes dois pontos também pertencem ao objeto.



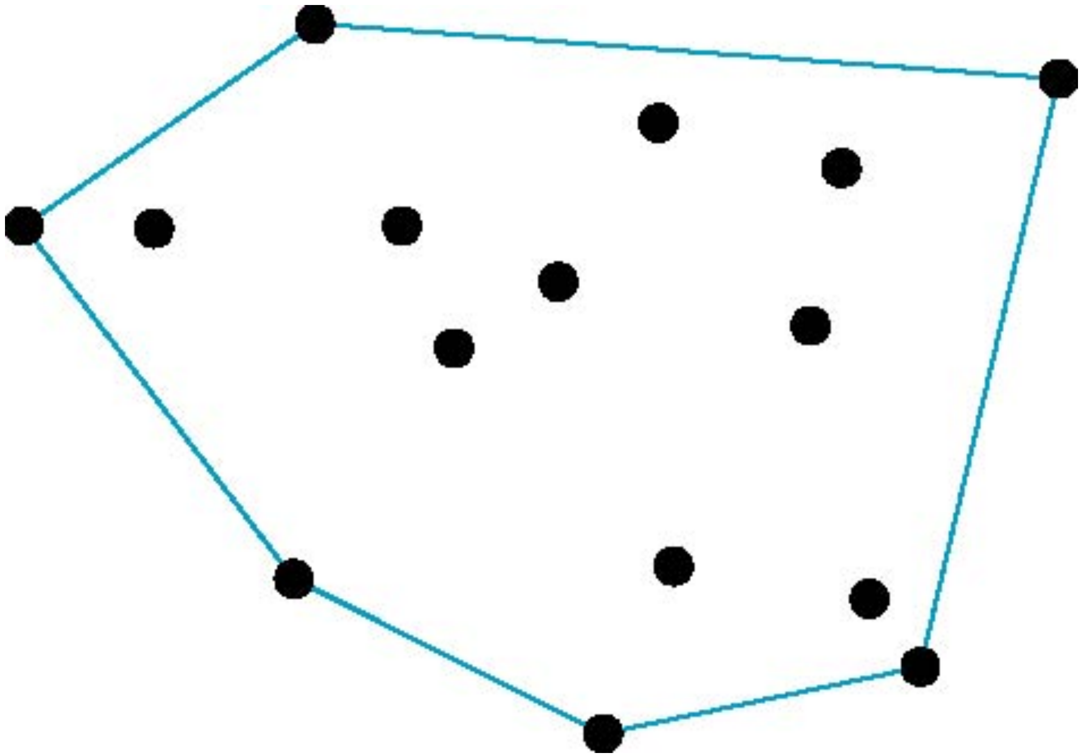
convexo



não convexo

Fecho convexo

- Menor objeto convexo que contém $P_1, P_2, \ldots, P_n,$ $P = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \ldots\ldots + \alpha_n P_n$



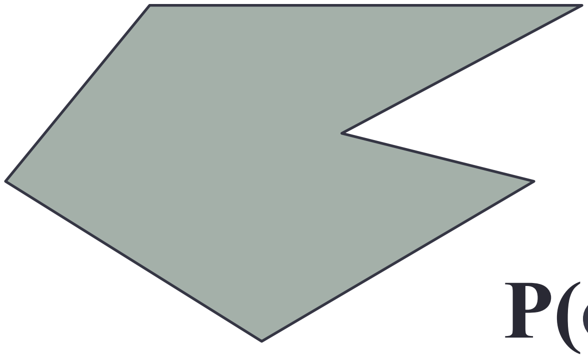
$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots\ldots \alpha_n = 1$

$\alpha_i >= 0$

Curvas e superfícies

- Curvas são entidades baseadas em um parâmetro descritas como $P(\alpha)$ onde a função é não linear
- Superfícies são formadas por funções de dois parâmetros $P(\alpha, \beta)$
  - Funções lineares dão origem à polígonos e planos

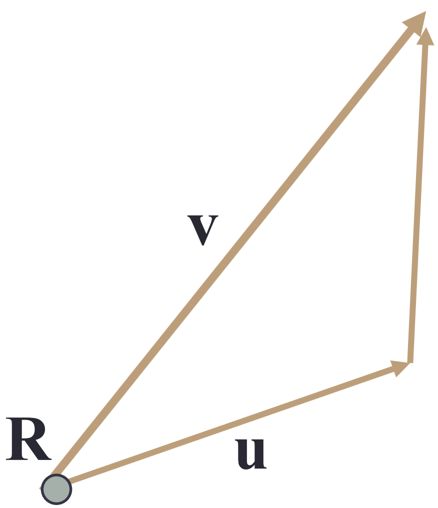
$P(\alpha)$

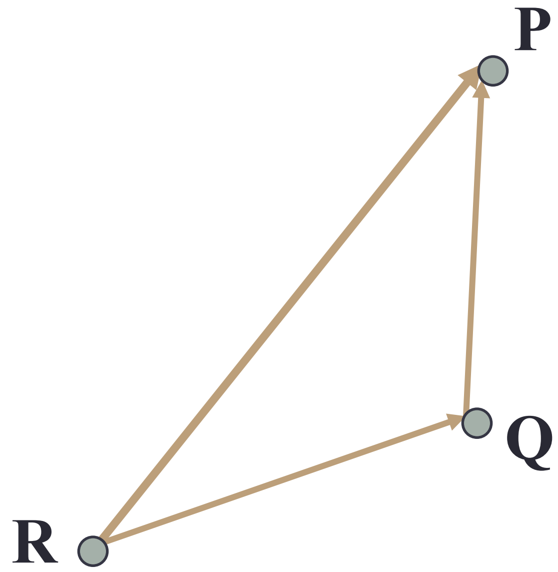


$P(\alpha, \beta)$

Planos

- Um plano pode ser definido por um ponto e dois vetores ou por três pontos





$P(\alpha,\beta)=R+\alpha u+\beta v$

$P(\alpha,\beta)=R+\alpha(Q-R)+\beta(P-Q)$

Coordenadas baricêntricas

- O triângulo é convexo então qualquer ponto pode ser representado pela soma afim

$$P(\alpha_{1,}\ \alpha_{2,}\ \alpha_3)=\alpha_1 P+\alpha_2 Q+\alpha_3 R$$

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=1$$
$$\alpha_i \geq 0$$

- Esta representação é chamada de coordenada ou representação baricêntrica de P

Independência linear

- Um conjunto de vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ é *linearmente independente* somente quando

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots \alpha_n v_n = 0 \quad \text{e} \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = 0$$

- Se um conjunto de vetores é linearmente independente, não podemos representar um vetor em função de outros vetores
  - Se forem linearmente dependentes, pelo menos um vetor pode ser escrito em termos dos outros vetores

Dimensão

- Em um espaço vetorial, o número máximo de vetores linearmente independentes é fixo e é chamado de *dimensão* do espaço
- Em um espaço *n*-dimensional, qualquer conjunto de n vetores linearmente independentes formam uma *base* para aquele espaço
- Dada uma base $v_1, v_2, \ldots, v_n$, qualquer vetor v pode ser escrito como:

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$$

onde α_i são únicos

Representação

- Até o momento, temos trabalhado com entidades geométricas sem utilizar um referencial (i.e. sistema de coordenadas)
- Mas precisamos de um referencial para relacionar pontos e objetos em nosso mundo físico.
  - Por exemplo, onde está localizado um ponto? Impossível de responder sem um referencial
  - Coordenadas do mundo
  - Coordenadas da câmera

Sistemas de coordenadas

- Considere uma base $v_1, v_2, \ldots., v_n$
- Um vetor é expresso como $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots. + \alpha_n v_n$
- A lista de escalares $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots. \alpha_n\}$ é a *representação* de v em função daquela base
- Podemos escrever esta representação como um vetor linha ou coluna de escalares

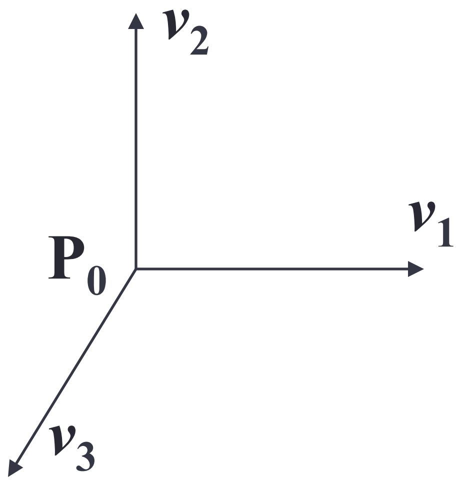
$$a = [\alpha_1 \;\; \alpha_2 \;\; \ldots. \; \alpha_n]^T = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ . \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

Exemplos

- Note que esta representação é dependente de uma base em particular
  - $v=2v_1+3v_2-4v_3$
  - $a=[2\ 3\ –4]^T$
- Por exemplo, em OpenGL/WebGL utilizaremos vetores para descrever uma base representativa do objeto, e mais tarde bases para descrição da câmera ou do observador.

Sistema de referência

- Um sistema de coordenadas é insuficiente para representar pontos
- Se trabalharmos em um espaço afim, poderemos adicionar um ponto, a *origem*, aos vetores base para formar um sistema de referência



Sistemas de referência

- Sistemas de referência podem ser representados pela tupla (P_0, v_1, v_2, v_3)
- Cada vetor pode ser então expresso por

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$$

- Cada ponto pode ser representado como

$$P = P_0 + \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \ldots + \beta_n v_n$$

Confusão entre pontos e vetores

Considere o ponto e o vetor abaixo:

$$P = P_0 + \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \ldots + \beta_n v_n$$

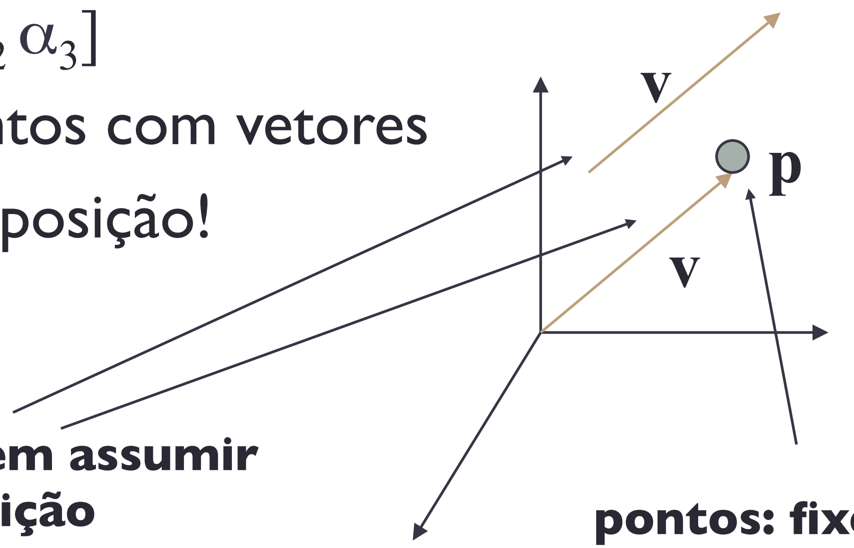
$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$$

Elas possuem representações semelhantes:

p$=[\beta_1\ \beta_2\ \beta_3]$ **v**$=[\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3]$

o que pode confundir pontos com vetores

Mas um vetor não possui posição!



Vetores podem assumir qualquer posição

pontos: fixos

Uma única representação

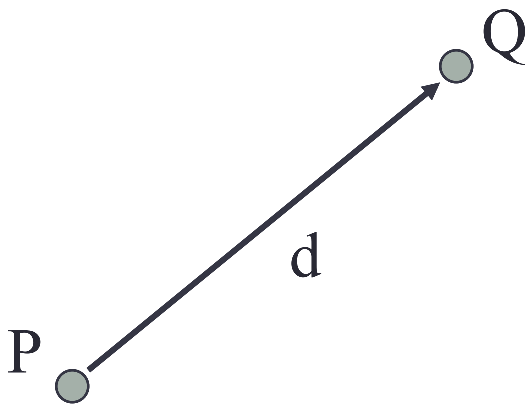
- Que tal definir vetores e pontos com uma coordenada adicional

$$v=\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\alpha_3 v_3=[\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ 0\ ]\ [v_1\ v_2\ v_3\ P_0]^T$$
$$P = P_0+\beta_1 v_1+\beta_2 v_2+\beta_3 v_3=[\ \beta_1\ \beta_2\ \beta_3\ 1\ ]\ [v_1\ v_2\ v_3\ P_0]^T$$

- Desta forma, obtemos uma representação quadridimensional chamada de *coordenadas homogêneas*

$$v = [\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ 0\ ]^T$$
$$p = [\beta_1\ \beta_2\ \beta_3\ 1\ ]^T$$

Translação



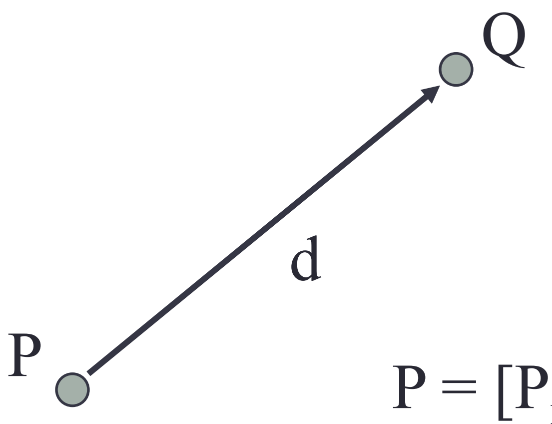
$$\begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \end{bmatrix}$$

- Podemos representar uma translação em termos de uma multiplicação entre matriz e vetor ?

$$\begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \end{bmatrix}$$

Coordenadas homogêneas

- Que tal se aumentássemos a dimensionalidade ?



$$\begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$P = [P_x, P_y, \mathbf{1}]^T$
$Q = [Q_x, Q_y, \mathbf{1}]^T$
$d = [d_x, d_y, \mathbf{0}]^T$

Coordenadas homogêneas

- Coordenadas homogêneas permitem unificar o tratamento de vetores e pontos
- Problema é levado para uma dimensão superior:
  - Coordenada extra *w*=0 para vetores e w=1 p/ pontos
  - Termos independentes formam uma coluna extra na matriz de transformação

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$$

Coordenadas homogêneas

- O sistema de coordenadas homogêneas são cruciais para CG:
  - Todas as transformações clássicas (rotação, translação, escala) podem ser implementadas por multiplicações entre matrizes 4x4
  - O pipeline de hardware trabalha nativamente com representações tri- e quadri-dimensionais
- Para projeção ortográfica, podemos manter w=0 para vetores e w=1 para pontos
  - Para projeção perspectiva, precisaremos de um fator de divisão

Troca de sistemas de coordenadas

- Considere duas representações do mesmo vetor em duas bases diferentes:

$$\mathbf{a} = [\ \alpha_1\ \alpha_2\ \ \alpha_3\ ]$$
$$\mathbf{b} = [\ \beta_1\ \ \beta_2\ \ \beta_3\ ]$$

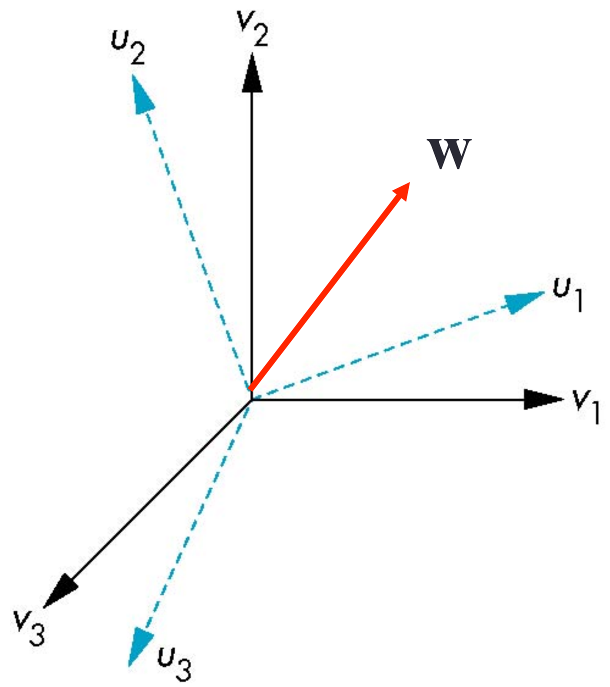
onde

$$\mathbf{w}=\alpha_1 v_1+ \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = [\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3]\ [v_1\ v_2\ v_3]^T$$
$$=\beta_1 u_1+ \beta_2 u_2 + \beta_3 u_3 = [\beta_1\ \beta_2\ \beta_3]\ [u_1\ u_2\ u_3]^T$$

Troca de bases

Cada um dos vetores da base secundária u_1, u_2, u_3, podem ser representados em função da primeira base:

$$\mathbf{u}_1 = \gamma_{11}\mathbf{v}_1 + \gamma_{12}\mathbf{v}_2 + \gamma_{13}\mathbf{v}_3$$
$$\mathbf{u}_2 = \gamma_{21}\mathbf{v}_1 + \gamma_{22}\mathbf{v}_2 + \gamma_{23}\mathbf{v}_3$$
$$\mathbf{u}_3 = \gamma_{31}\mathbf{v}_1 + \gamma_{32}\mathbf{v}_2 + \gamma_{33}\mathbf{v}_3$$



Forma matricial

Tais coeficientes definem uma matriz 3 x 3

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{bmatrix}$$

e então estas bases se relacionam através da transformação $\mathbf{u}=\mathbf{M}\mathbf{v}$

$$\mathbf{w}=\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = [\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3]\ [v_1\ v_2\ v_3]^T$$

$$=\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \beta_3 u_3 = [\beta_1\ \beta_2\ \beta_3]\ [u_1\ u_2\ u_3]^T$$

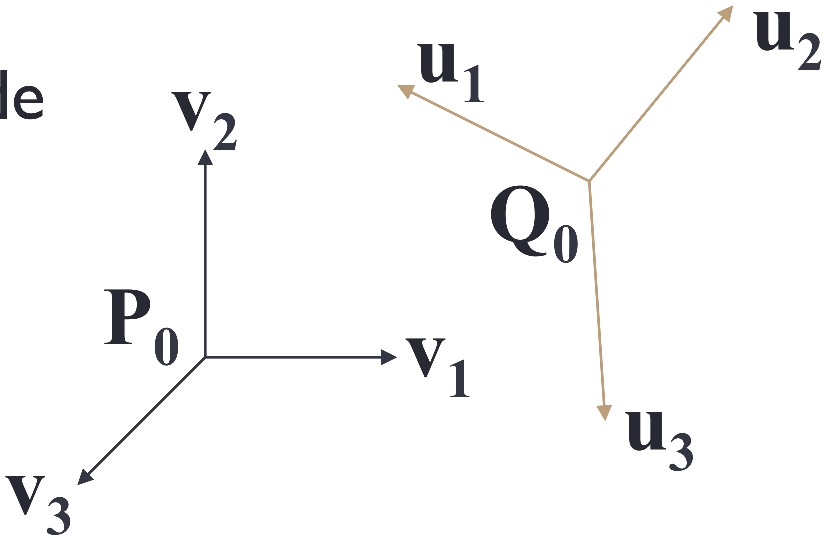
$$\mathbf{w} = \mathbf{b}^T\mathbf{M}\mathbf{v} = \mathbf{a}^T\mathbf{v}$$

Trocas entre referenciais

- Podemos aplicar o mesmo processo utilizando coordenadas homogêneas:

Considere os sistemas de referências:

$(\mathbf{P_0}, \mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3})$
$(\mathbf{Q_0}, \mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3})$



- Qualquer ponto ou vetor pode ser representado em qualquer um dos sistemas
- Podemos representar Q_0, u_1, u_2, u_3 em termos de P_0, v_1, v_2, v_3

Trocas entre referenciais

Estendendo o que fizemos com mudanças entre bases:

$$
\begin{aligned}
u_1 &= \gamma_{11}v_1 + \gamma_{12}v_2 + \gamma_{13}v_3 \\
u_2 &= \gamma_{21}v_1 + \gamma_{22}v_2 + \gamma_{23}v_3 \\
u_3 &= \gamma_{31}v_1 + \gamma_{32}v_2 + \gamma_{33}v_3 \\
Q_0 &= \gamma_{41}v_1 + \gamma_{42}v_2 + \gamma_{43}v_3 + P_0
\end{aligned}
$$

$$
\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} & 0 \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} & 0 \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} & 0 \\ \gamma_{41} & \gamma_{42} & \gamma_{43} & 1 \end{bmatrix}
$$

Trabalhando com representações

Em dois sistemas de referências quaisquer,qualquer ponto ou vetor possui uma mesma representação

$\mathbf{a}=[a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ ]$ no primeiro referencial
$\mathbf{b}=[b_1\ b_2\ b_3\ b_4\ ]$ no segundo referencial

onde $a_4 = b_4 = 1$ para pontos e $a_4 = b_4 = 0$ para vetores:

$$\mathbf{a}=\mathbf{M}^{\mathrm{T}}\mathbf{b}$$

A matriz **M** é 4 x 4 e representa uma transformação afim em coordenadas homogêneas

Transformações afins

- Cada transformação linear é equivalente à uma mudança de referencial
- Toda transformação afim preserva retas
- Uma transformação afim possui 12 graus de liberdade já que 4 dos elementos são fixos e representam um subconjunto de todas as possiveis transformações lineares 4 x 4.

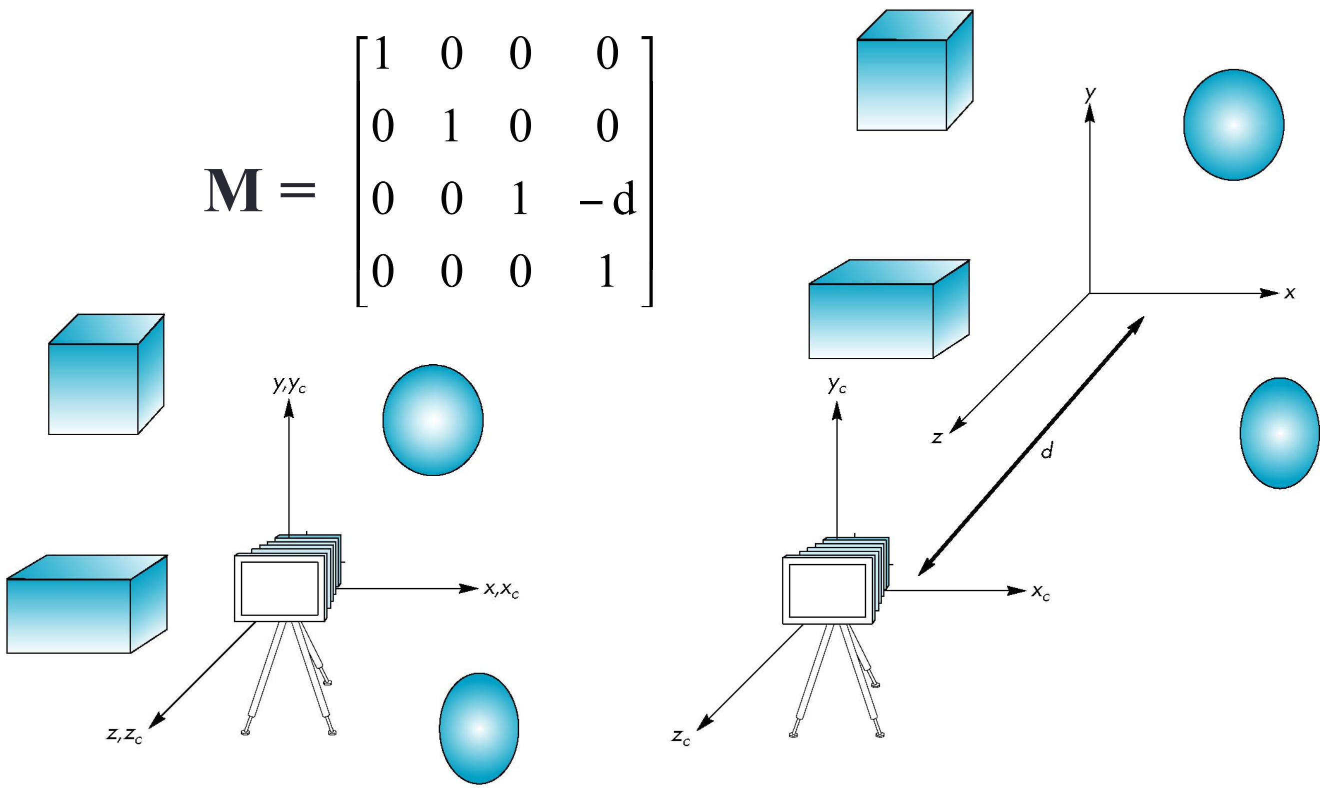
Sistemas do mundo e da câmera

- Quando trabalharmos com representações, utilizaremos n-tuplas ou arrays de n escalares
- Mudanças em sistemas de referências são definidas por matrizes 4 x 4
- No OpenGL/WebGL, o referencial primário é o referencial do mundo
- Eventualmente representaremos entidades no sistema da câmera, mudando a representação do mundo utilizando uma matriz (i.e. model-view)
  - Inicialmente elas são as mesmas (M=I)

Movimentando a câmera

Se objetos estão localizados em ambos os lados do z=0, devemos mudar o sistema da câmera

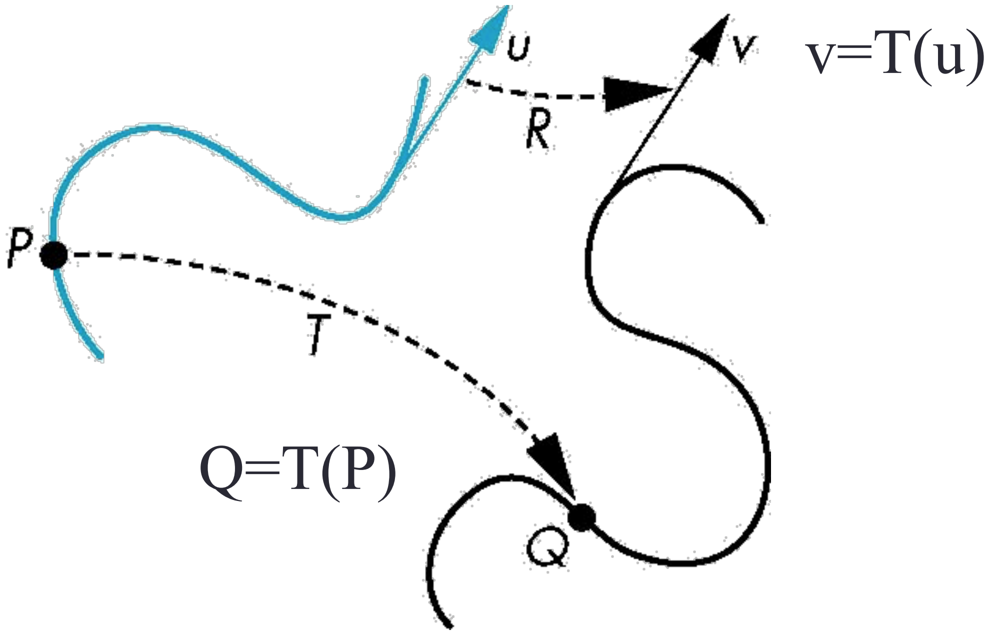
$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



(a) (b)

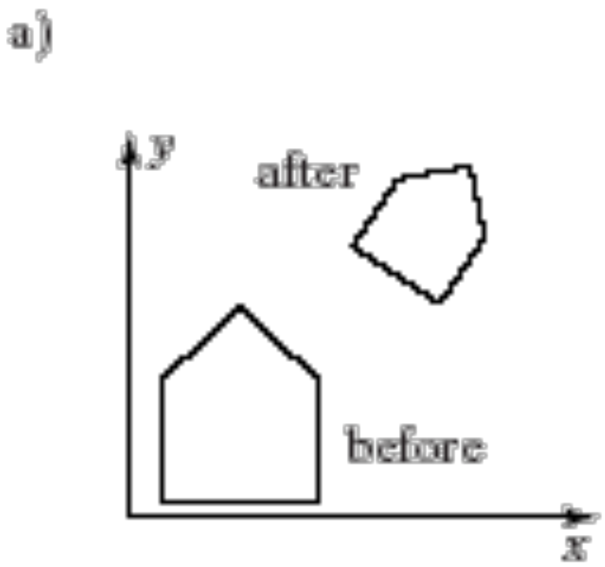
Transformações

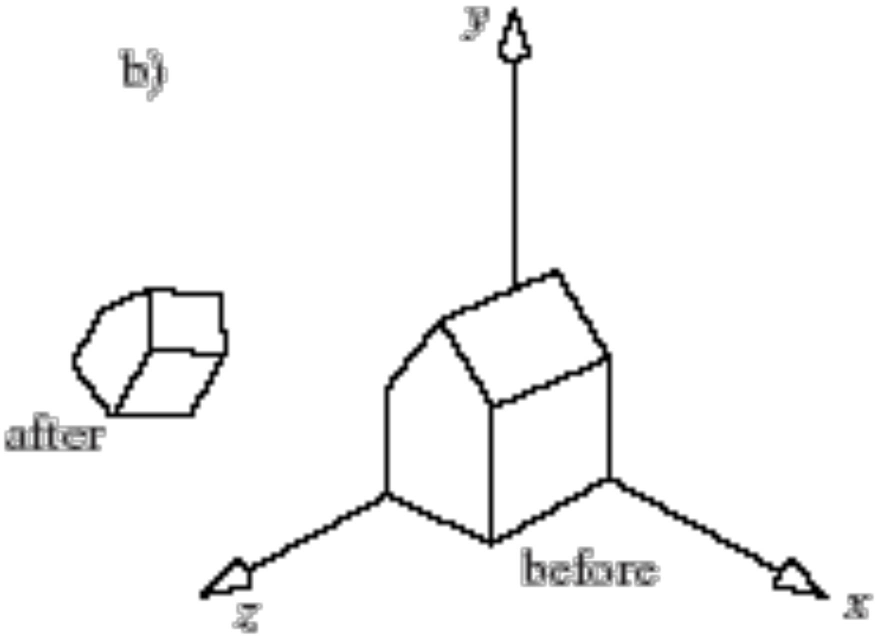
- Transformação é uma função que mapeia pontos (vetores) entre outros pontos (vetores)



Exemplo de transformação

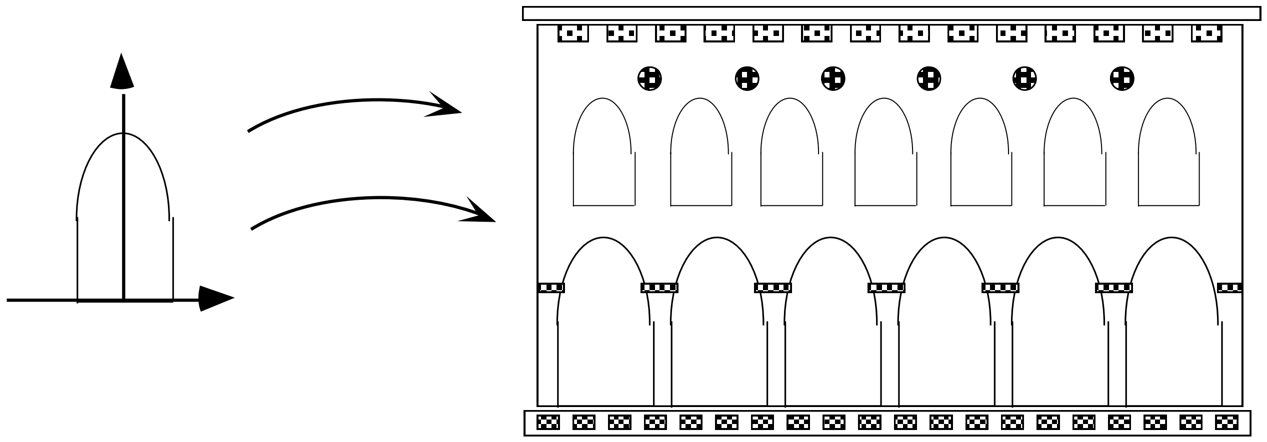
- A casa foi escalada, rotacionada e transladada, em 2D e 3D





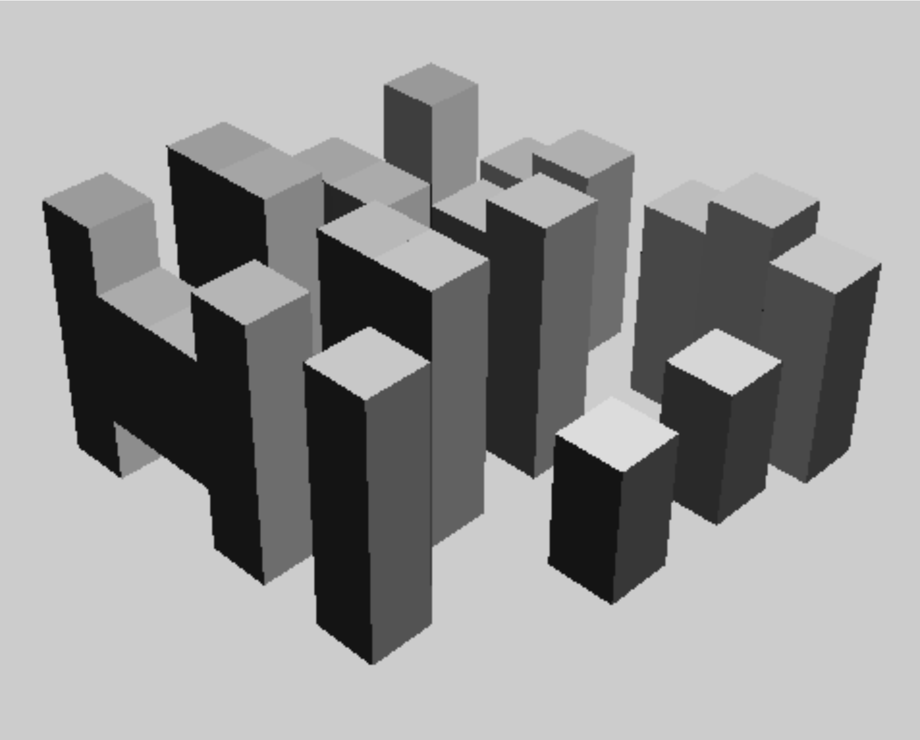
Usando transformações

- Cada arco foi desenhado no seu próprio sistema de coordenadas
- A cena abaixo é criada através do desenho de várias instâncias do arco em posições e tamanhos diferentes



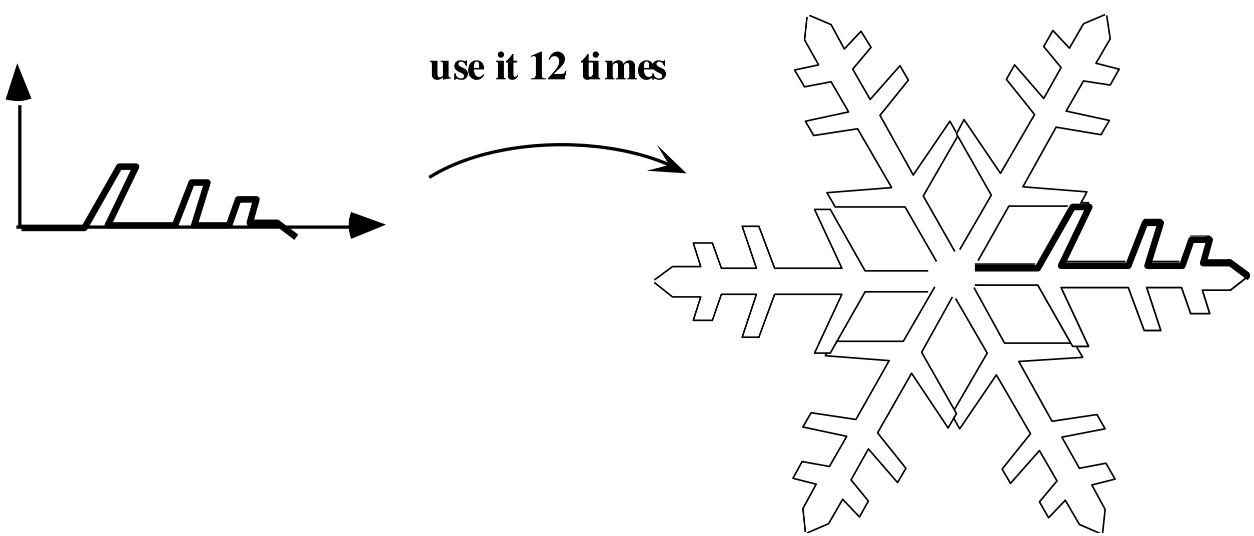
Usando transformações

- Em 3D, um conjunto de paralelepípedos pode se assemelhar à um conjunto de prédios



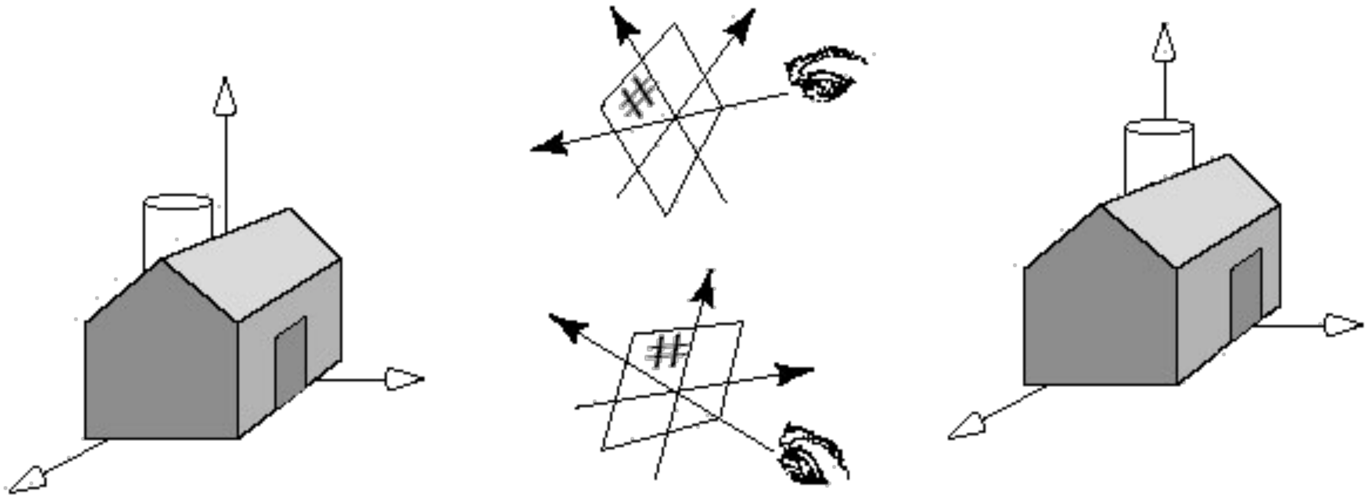
Usando transformações

- Um floco de neve é simétrico
- Podemos iniciar com um simples perfil e desenhar toda a figura usando reflexões, rotações e translações deste perfil



Usando transformações

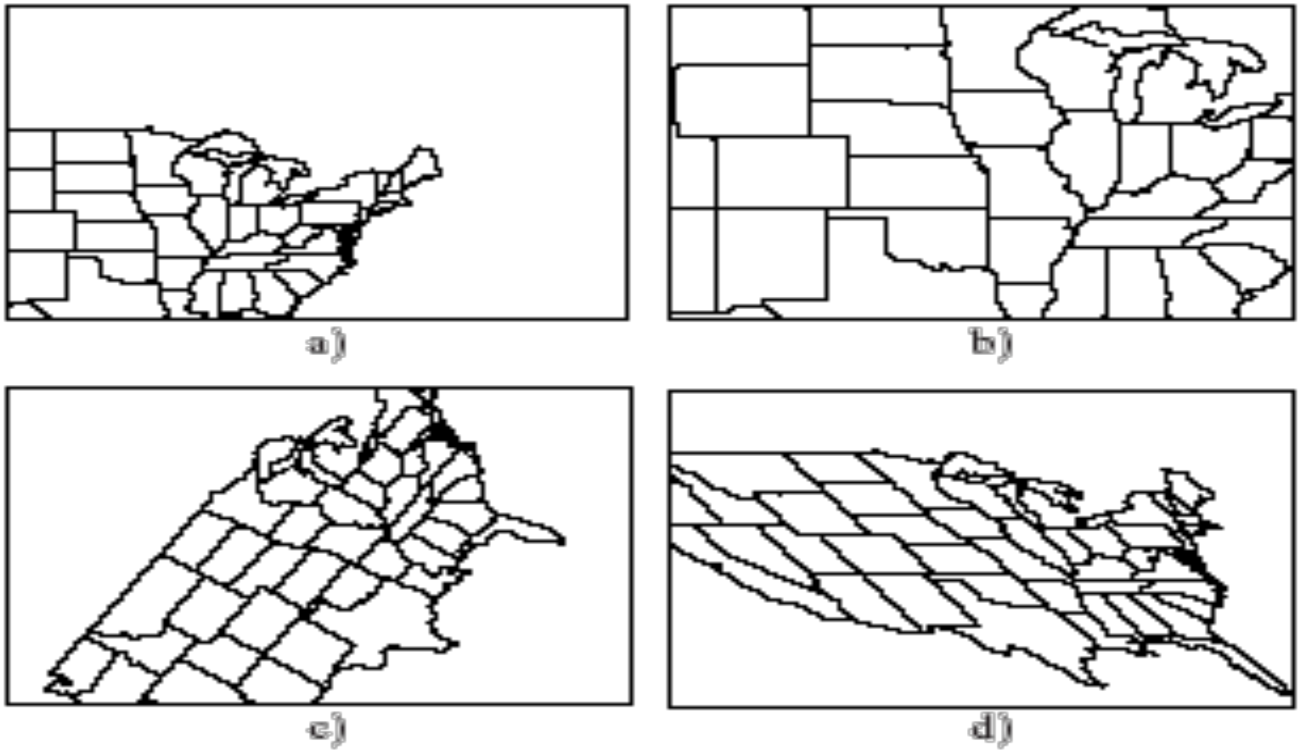
- Um desenhista pode desejar visualizar um objeto de diferentes perspectivas.
- O posicionamento e reorientação da câmera pode ser feito através de transformações.



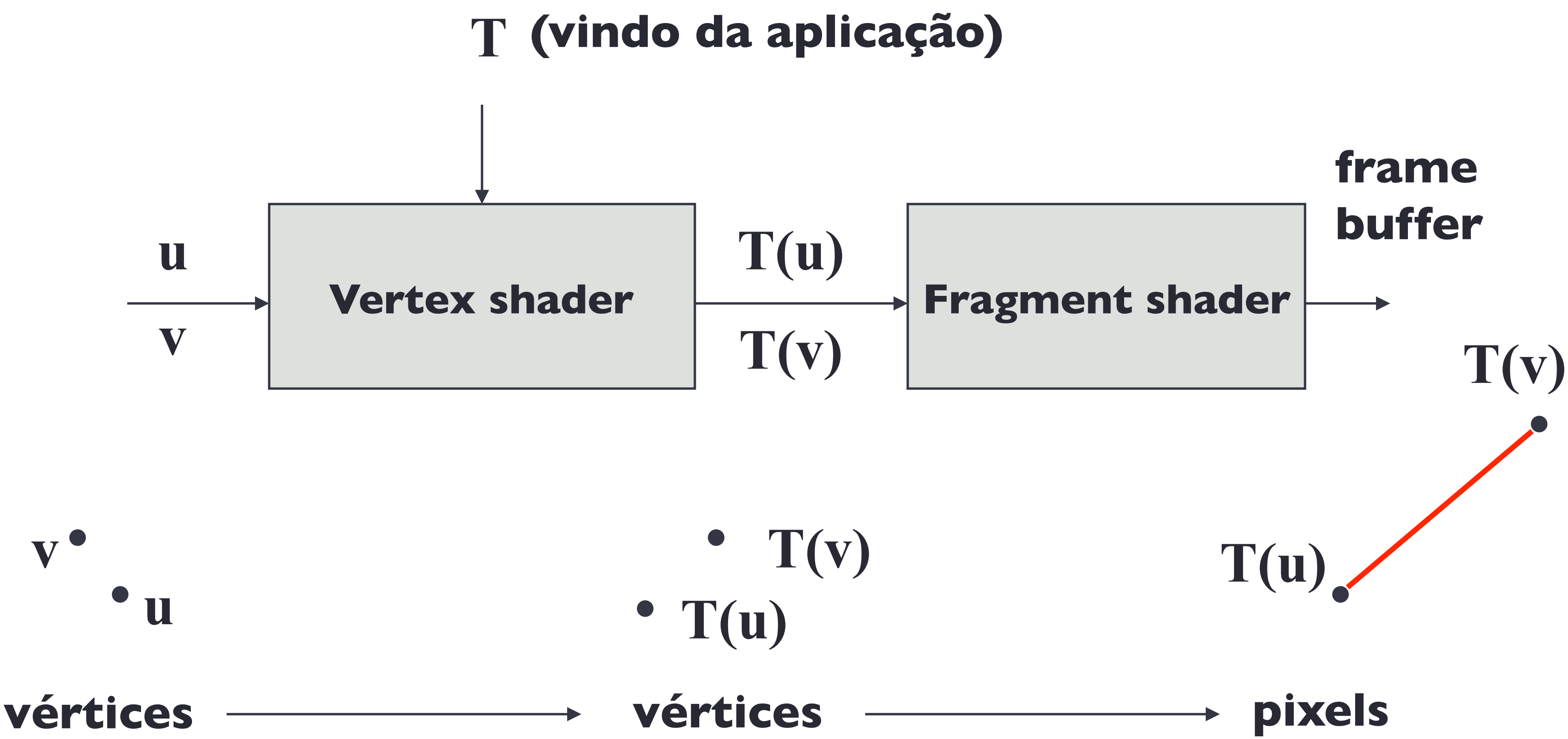
Usando transformações

- Em uma animação, objetos em uma cena se movimentam
- Esta movimentação é criada através de translações e rotações de seus sistemas de coordenadas a medida que a animação prossegue
- Em OpenGL, podemos aplicar uma série de operações que serão aplicadas em todos os pontos de um objeto
- O objeto é desenhado depois das transformações de seus pontos

Efeitos geométricos

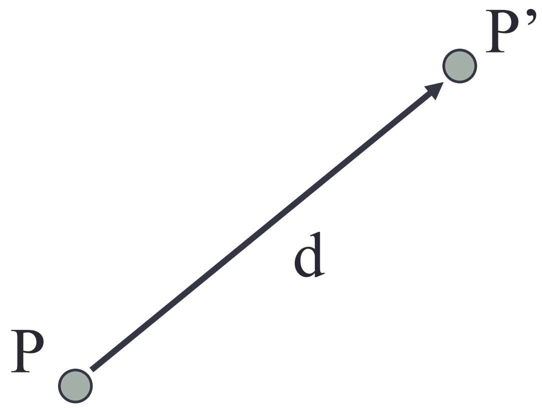


Implementação do pipeline



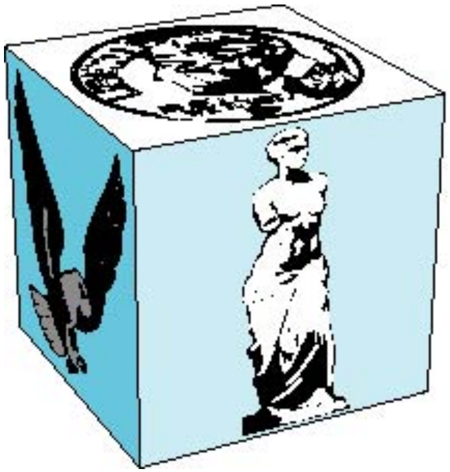
Translação

- Mover (transladar) um ponto para uma nova posição

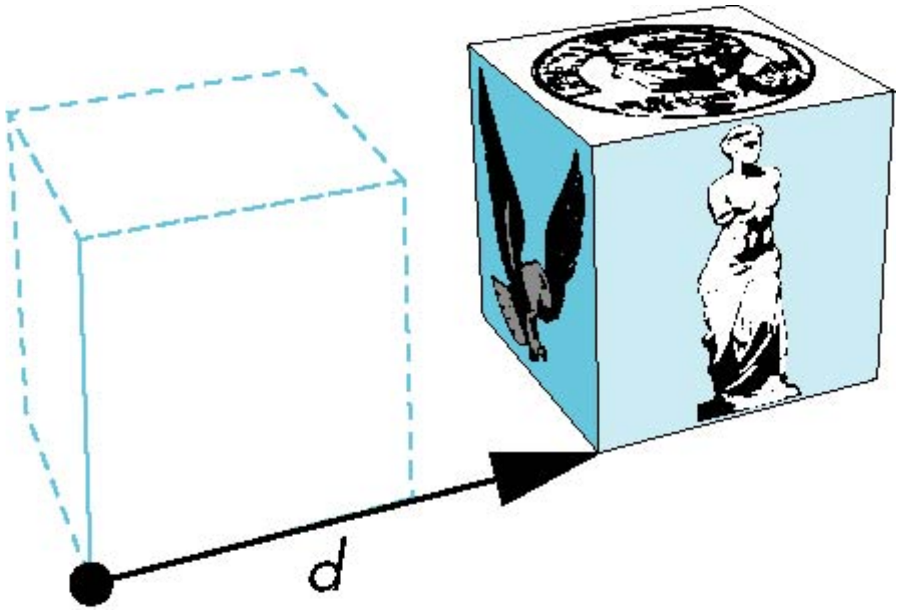


- Translação determinada pelo vetor d
  - P'=P+d
  - Três graus de liberdade

Movendo vários pontos



objeto



cada ponto é transladado
pelo mesmo vetor

Coordenadas homogêneas

$$\mathbf{p} = [\ x\ y\ z\ 1\ ]^T$$
$$\mathbf{p}' = [\ x'\ y'\ z'\ 1\ ]^T$$
$$\mathbf{d} = [\ dx\ dy\ dz\ 0\ ]^T$$

Então $\mathbf{p}' = \mathbf{p} + \mathbf{d}$ ou

$$x' = x + d_x$$
$$y' = y + d_y$$
$$z' = z + d_z$$

note que esta expressão está em 4D e representa a operação ponto = vetor + ponto

Matriz de translação

Podemos expressar a translação através de uma matriz 4 x 4 **T** em coordenadas homogêneas:

p'= **Tp** onde

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}(d_x, d_y, d_z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Escala

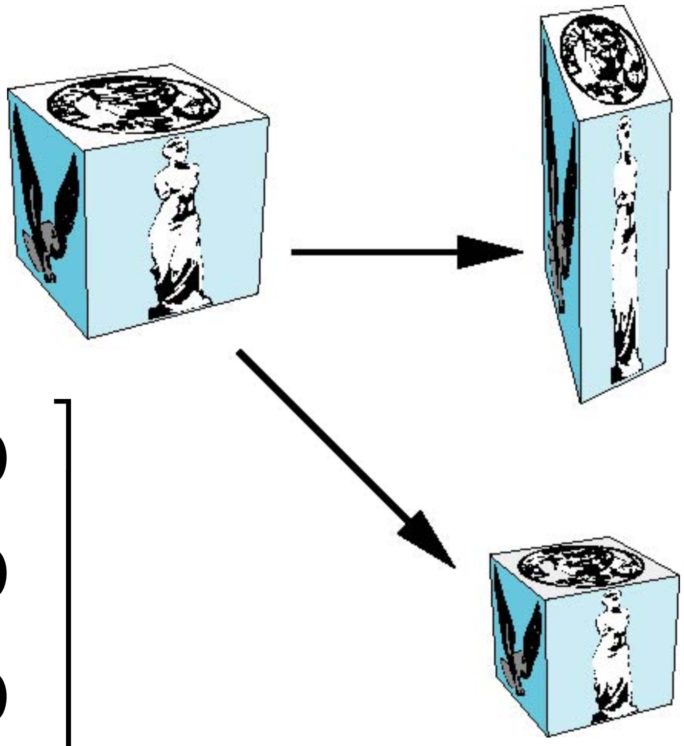
Expandir ou contrair ao longo de um eixo

$x' = s_x x$

$y' = s_y y$

$z' = s_z z$

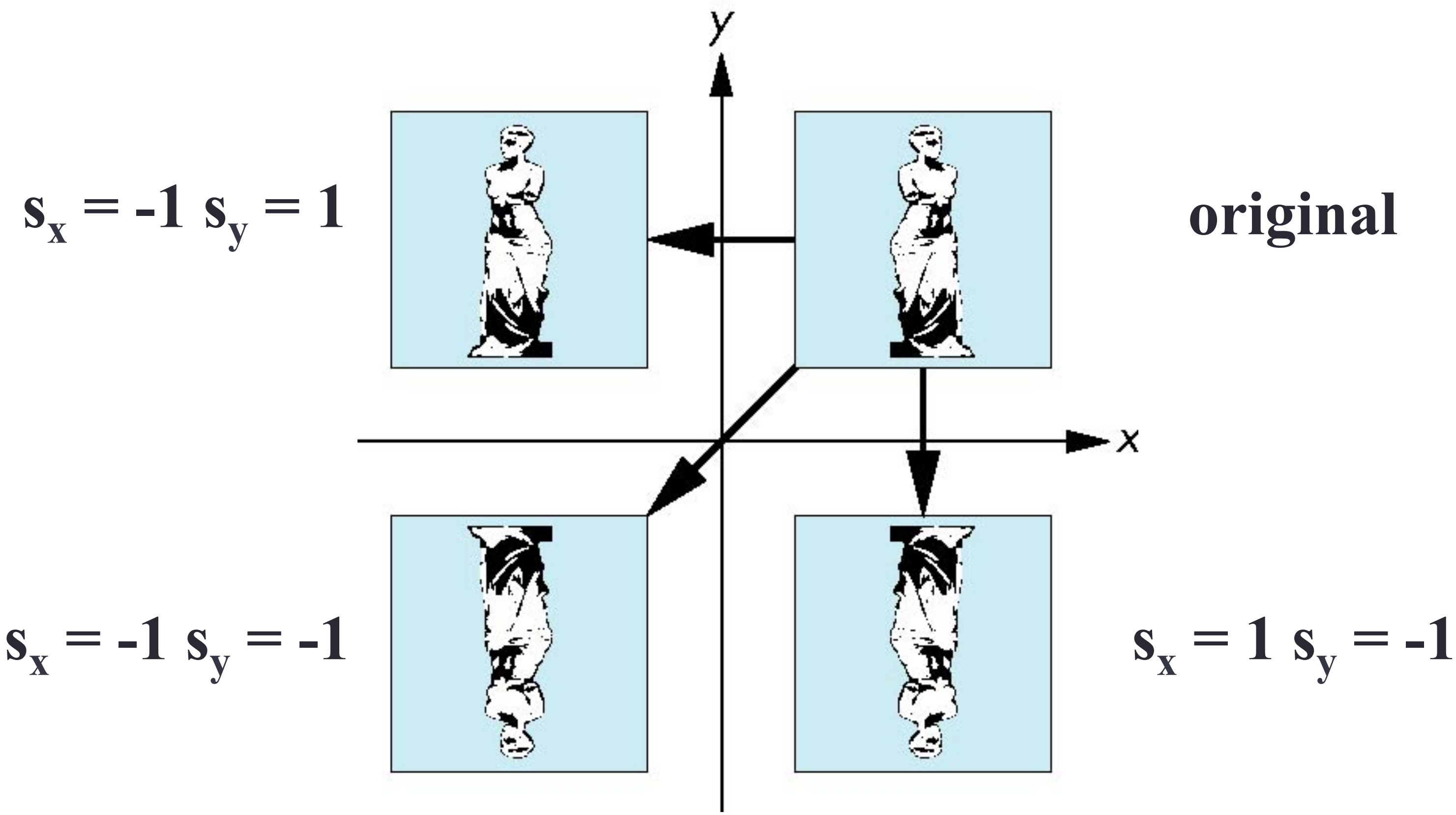
$p' = Sp$



$$\mathbf{S} = \mathbf{S}(s_x, s_y, s_z) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Reflexão

Correspondente a fatores negativos de escala



Transformações inversas

- Inversa da translação (T^{-1}):

$$\begin{pmatrix} q_x \\ q_y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -t_x \\ 0 & 1 & -t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Inversa da escala (S^{-1}):

$$\begin{pmatrix} q_x \\ q_y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/s_x & 0 & 0 \\ 0 & 1/s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tarefa

- Como a área/volume de uma figura é afetada por translações e escalas ?
- Um conjunto de translações comutam ?

Exemplo : $q = T_1 T_2 T_3 p = T_3 T_1 T_2 p = T_2 T_3 T_1 p$?