"Quem tem autovalores tem tudo"
K. ZIEGLER

CAP IX AUTOVALORES E AUTOVETORES

A matriz $N \times N$

$A\vec{v} = \lambda \vec{v}$, $\vec{v}$ é autovetor $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots \vec{v}_N\}$
λ é autovalor $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_N\}$

e vamos assumir que $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geqslant \dots \geqslant |\lambda_n|$

$\downarrow$
autovalor dominante

POWER METHOD

O Método: Iniciamos com um vetor $\vec{b}_0$ arbitrário e definimos a relação de recorrência

$$\vec{b}_{k+1} = \frac{A\vec{b}_k}{|A\vec{b}_k|} \quad e \quad \mu_k = b_k^T A\, b_k$$

Após sucessivas iterações $b_k \to \vec{v}_1$ e $\mu_k \to \lambda_1$.

Para entender o funcionamento do método de POWER, vamos expandir $\vec{b}_0$ em termos dos autovalores normalizados

$$\vec{b}_0 = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \vec{v}_i$$

Multiplicando A^k em ambos os membros

$$A^k \vec{b}_0 = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i A^k \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \lambda_i^k \vec{v}_i$$

$$= \lambda_1^k \left[\alpha_1 \vec{v}_1 + \sum_{i=2}^{N} \alpha_i \left(\lambda_i / \lambda_1 \right)^k \vec{v}_i \right] \xrightarrow{k \to \infty} \lambda_1^k \alpha_1 \vec{v}_1$$

Mas definindo

$$b_k = \frac{A^k \vec{b}_0}{|A^k \vec{b}_0|} \xrightarrow{k\to\infty} \frac{\lambda_1^k \alpha_1 \vec{v}_1}{|\lambda_1^k \alpha_1 \vec{v}_1|} = \vec{v}_1$$

$$\therefore \quad \mu_k = b_k^T A \vec{b}_k$$

- O valor inicial deve ter componente não nula na direção do vetor associado

<u>Exemplo</u> $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, cujo autovalor dominante é 4 e autovetor $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Vamos iniciar com $\vec{b}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\vec{b}_{k+1} = \frac{A\vec{b}_k}{|A\vec{b}_k|}$$

$$A\vec{b}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b}_1 = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mu_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1 \;\; 2)\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{5}(1 \;\; 2)\begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{19}{5} = 3.8$$

k	b_k^T		μ_k
0	1.	0.	1.
1	0.44721359	0.89442719	3.8
2	0.75925660	0.65079137	3.89411...
3	0.69310871	0.72083306	4.01767...
4	0.71054762	0.70364911	3.99500...
⋮			
20	0.70710678	0.70710678	3.99999...

— A convergência é linear com $\left|\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right|^k$ e pode ser acelerada com outros métodos.

— Além do "POWER METHOD" existem vários outros métodos para obtenção de autovalores e autovetores. Uma boa referência é BURDEN & FAIRES

— Existem "pacotes" gratuitos para algebra linear como o LAPACK. A "NAG LIBRARY" incorpora as rotinas do LAPACK e tem tutoriais com exemplos de utilização do LAPACK