3a. Lista de Exercícios - não é p/ entregar

1) Calcule $\int_0^1 e^{-x}dx$ por trapézios para $h = 0.5, 0.25, 0.125, 0.0625$ e aplique sucessivamente o método de Romberg para obtençao do valor mais acurado para a integral.

2) Calcule $\int_0^\pi \sin x dx$ por trapézios para $h = \pi/2$, $\pi/4$, $\pi/8$, $\pi/32$ e aplique sucessivamente o método de Romberg para obtenção do valor mais acurado para a integral.

3) Se $S(h)$ é uma aproximação para uma integral definida I que é determinada pela regra de Simpson, mostre que $S_1(h) \equiv [16S(h) - S(2h)]/15$ difere de I por termos da $\mathcal{O}(h^6)$.

4) Calcule $\int_0^\infty e^{-x} \sin x dx$ e $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} \cos(x^2)dx$ usando 3 pontos com Quadratura de Gauss.

Dados: Para n=2, (3 pontos) os polinômios de Laguerre $\mathcal{L}_3$ têm as seguintes raízes e pesos correspondentes:

$--$raízes x_i $--$	$--$ pesos w_i $--$
0.4157745567	0.7110930099
2.2942803602	0.2785177335
6.2899450829	0.01038925650

Dados: Para n=2, (3 pontos) os polinômios de Hermite $\mathcal{H}_3$ têm as seguintes raízes e pesos correpondentes:

$--$raízes x_i $--$	$--$ pesos w_i $--$
0	$2\sqrt{\pi}/3$
$\pm\sqrt{6}/2$	$\sqrt{\pi}/6$

5) Use os métodos de Euler e de Runge-Kutta Clássico para encontrar soluções aproximadas para (i) $y' = ty^2$ e (ii) $y' = \sqrt{t}$ com condição inicial $y(0) = 1$, tomando $h = 0.1$ até $y(0.5)$. Use o maior número de decimais disponíveis.

6) Escreva um programa em C (ou C++, FORTRAN) que evolua pelo método de Euler o sistema de equações de Lorenz (∼1960)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y-x)\\ \dot{y} &= x(\rho-z)-y\\ \dot{z} &= xy-\beta z\end{aligned}$$

com $\sigma = 10$, $\beta = 8/3$, $\rho = 28$ (caso caótico). Repita usando Runge-Kutta Clássico.

7) Escreva uma EDO de 3a. ordem $y''' = f(t, y, y', y'')$ como um sistema de três EDO's de 1a. ordem acopladas.

8) Seja a eq. $y' = \lambda y$, onde λ é uma constante e h é o passo da evolução.

i) Mostre que o método do trapézio é sempre estável para todo semi-plano esquerdo $\Re(\lambda h) < 0$,

ii) Mostre que a estabilidade do Runge-Kutta Simples é dada por $|1 + \lambda h + (\lambda h)^2/2| \leq 1$ (se λ é real, $-2 \leq \lambda h \leq 0$) e para o Runge-Kutta Clássico $|1 + \lambda h + (\lambda h)^2/2 + (\lambda h)^3/6 + (\lambda h)^4/24| \leq 1$ (se λ é real, $-2.79 \leq \lambda h \leq 0$)

9) Faça um estudo de convergência para a fórmula de diferenciação centrada ("centered difference") para $f(x) = x^3$ no ponto $x = 1$ com $h = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, ...$ Use a calculadora ou precisão simples. Construa o gráfico de $\log_{10}|\text{erro}| \times -\log_{10} h$.

10) Escreva a equação do calor sob forma de diferenças finitas usando os métodos explícito e semi-implícito (Crank-Nicolson).

11) Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Faça duas iterações usando o método de Potência ("Power Method") e obtenha uma aproximação para o maior autovalor.

Dúvidas c/ Monitores