Exemplo: Encontre a solução aproximada de $y' = ty^2$, $y(0)=1$ usando o método de RK simples

Solução RK simples é dado por

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left[f(t_i,y_i) + f(t_i+h,\, y_i + hf(t_i+h))\right]$$

ou $y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}[k_1+k_2]$, $k_1 = hf(t_i, y_i)$; $t_i = ih$

$k_2 = hf(t_i+h, y_i+k_1)$; $y_i = y(t_i)$

no instante $t=0$ $\quad y_0 = y(0) = 1$

$t=0.1$ $\quad k_1 = hf(t_0,y_0) = 0$

$$k_2 = hf(0.1, y_0+k_1) = 0.1^2 = 0.01$$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{2}[k_1+k_2] = 1 + \frac{1}{2}0.01 = 1.005$$

$t=0.2$ $\quad k_1 = hf(t_1,y_1) = 0.1 f(0.1, 1.005) = 0.01010025$

$$k_2 = hf(t_1+h, y_1+k_1) = 0.1 f(0.2, 1.005+0.01010025) = 0.02060857$$

$$y_2 = y_1 + \frac{1}{2}[k_1+k_2] = 1.02035441$$

$t=0.3$ $\quad k_1 = hf(t_2,y_2) = 0.1 f(0.2, 1.02035441) = 0.0208224625$

$$k_2 = hf(t_2+h, y_2+k_1) = 0.1 f(0.3, y_2+k_1) = 0.0325214785$$

$$y_3 = y_2 + \frac{1}{2}[k_1+k_2] = 1.04702638$$

e semelhantemente

$t=0.4$, $\quad y_4 = 1.08679464$

$t=0.5$, $\quad y_5 = 1.14256824$

Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias

Seja o sistema

$$y' = f(t, y, z)$$
$$z' = g(t, y, z) \qquad \text{com condições iniciais} \quad y(t_0) = y_0, \; z(t_0) = z_0$$

Aplicando o método de Euler

$$\begin{cases} y(t_1) \approx y_1 = y_0 + h\, f(t_0, y_0, z_0) \\ z(t_1) \approx z_1 = z_0 + h\, g(t_0, y_0, z_0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cancel{y(t_2) \approx y_2 = y_1 + h\, f(t_0, y_0, z_0)} \\ z(t_2) \approx z_2 = z_1 + h\, g(t_0, y_0, z_0) \end{cases}$$

Exercício: Escreva um programa em C (ou C++, FORTRAN) que evolua o sistema de equações de Lorenz (~1960)

$$\dot{x} = \sigma (y - x)$$
$$\dot{y} = x(\rho - z) - y$$
$$\dot{z} = xy - \beta z \qquad ; \quad \sigma = 10, \; \beta = \frac{8}{3}, \; \rho = 28 \quad \text{(chaos)}$$

EDO de ordem maior que 1

Suponha que temos a equação

$$y'' = f(t, y, y') \quad , \text{ com } \quad y(t_0) = y_0$$
$$y'(t_0) = z_0$$

Vamos definir

$$z \equiv y'$$

e substituindo temos duas equações

$$z' = f(t, y, z)$$

$$y' = z$$

Exemplo: Seja o oscilador harmônico

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \,, \quad \omega = 1 \,, \quad x(0) = 1, \; x'(0) = 0$$

evolua até $t = 0.2$ c/ método de Euler

$$x'' = -\omega^2 x$$

vamos definir $z = x'$

$$\begin{cases} z' = -\omega^2 x \\ x' = z \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} z_{i+1} = z_i + h(-\omega^2)x_i \\ x_{i+1} = x_i + h z_i \end{cases} \quad , \quad \begin{matrix} x_0 = 1 \\ z_0 = 0 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} z_1 = z_0 + 0.1(-1)x_0 = 0 + 0.1(-1)1 = -0.1 \\ x_1 = x_0 + 0.1 \cdot z_0 = 1 + 0.1 \times 0 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_2 = z_1 + 0.1(-1)x_1 = -0.1 + 0.1(-1)1 = -0.2 \\ x_2 = x_1 + 0.1\, z_1 = 1 + 0.1(-0.1) = 0.99 \end{cases}$$