3o. PROGRAMA - Integração Numérica

1)Construa um programa em **precisão simples** que calcule numericamente a integral $I = \int_0^1 (8 - 5x^4)dx$ usando o método de Simpson.

a)Faça uma tabela na forma

p	N	$---I_{num}---$	$---erro---$
1	2		
2	4		
.	.		
.	.		
.	.		
25	33554432		

onde $N = 2^p$ é o número de intervalos, $erro = |I_{num} - I|$ e I é o valor analítico da integral.

b) Faça um gráfico de $log_{10}(erro)$ em funçao de p, eliminando os pontos em que eventualmente $erro = 0$. Repita os cálculos em **dupla precisão** e coloque os resultados no mesmo gráfico. Indique nos gráficos os efeitos do erro de Truncamento no método de Simpson e erro de "Roundoff" da representação de ponto flutuante. Determine a partir do gráfico a ordem de grandeza do erro do método de empregado e "Roundoff" e compare com os teóricos $\mathcal{O}(h^4)$ e $\mathcal{O}(\sqrt{N})$, respectivamente. Explique o que está acontecendo à medida que se aumenta N.

2) O período de um pêndulo simples para ângulos pequenos ($\theta_0 < 10°$) é dado por $T_{Galileu} = 2\pi\sqrt{l/g}$. Para ângulos apreciáveis e desprezando a resistência do ar, a expressão para o período é

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \xi}} d\xi, \tag{1}$$

onde $k \equiv \sin(\theta_0/2)$ e θ_0 é o ângulo inicial em **radianos**. Com o método de Trapézios, calcule a integral acima e construa uma tabela com 20 valores de θ_0 e T, com θ_0 variando no intervalo $[0, \pi)$. Aumente bem o número de valores θ_0 e faça um gráfico de T em funçao de θ_0. Use o número de divisões que achar necessário, $l = 1$ m e $g = 9.80665$ m/s^2 .

3) Cálculo da área sob a curva $y = x^3$, $0 < x < 1$, usando o método de Monte-Carlo.

a) Construa primeiro uma rotina random(Z_i) que retorne números aleatórios uniformemente distribuídos por "linear congruential method" com $Z_{i+1} = (aZ_i + c) \mod m$, onde $a = 16807$, $c = 0$, $m = 2147483647$ e $U_i = Z_{i+1}/m$. U_i é o número entre 0 e 1 gerado. Use seu número USP como semente inicial Z_0. (em C declare os inteiros unsigned long long e em FORTRAN use integer*8)

b) Faça UMA tentativa jogando 100 pontos (x, y), $0 < x < 1$ e $0 < y < 1$ aleatoriamente e determine o valor da área sob a curva usando

$$I \sim \frac{\text{numero de pontos dentro}}{\text{numero total de pontos}} \tag{2}$$

c) Faça um estudo com diferentes números de tentativas $N_t = 2, 4, 8, 16..., 131072$. (cada tentativa joga 100 pontos aleatórios). Construa a seguinte tabela

N_t	$---I_m---$	$---\sigma---$	$---\sigma_m---$
2			
4			
.			
.			
.			
131072			

onde I_m é o valor médio da integral, σ é o desvio padrão e σ_m é o desvio padrão da média, dados pelas fórmulas:

$$I_m = \frac{1}{N_t}\sum_{i=1}^{N_t} I_i, \tag{3}$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{N_t - 1}\sum_{i=1}^{N_t}(I_i - I_m)^2, \tag{4}$$

e $\sigma_m = \sigma/\sqrt{N_t}$.
O valor da integral é dado por $I_m \pm \sigma_m$.

O QUE É PRARA ENTREGAR: item 1a) programa (só em precisão simples) e listagens impressos (p/ ambas precisões) , 1b) gráfico c/ curvas do erro precisão simples e dupla, indicando efeitos erro de truncamento do método empregado + ordem de grandeza, efeitos de "Roundoff" e Explicação.
2) programa +listagens + gráfico.
3) programa + tabela do item c

Referências

P.A. Stark, *Introduction to Numerical Methods*, Macmillan Company, 1970, p.210.
A. Ralston and P. Rabinowitz, *A first course in Numerical Analysis*, Dover, 1978, pp.9-11.
L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *Mechanics*, 3rd edition, Pergamon, 1976.
N. Giordano, *Computational Physics*, Prentice Hall, 1997.

Dúvidas c/ Professor na aula

Dúvidas c/ Monitor