CAP. IV - Interpolação de funções

① Introdução

- Suponhamos o conjunto de pontos com duas coordenadas x e y, conhecidos por um processo qualquer

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1) \ldots \quad (x_n, y_n)$$

$$x_0 < x_1 < x_2 \ldots\ldots < x_n$$

O problema de interpolação é achar para um determinado valor de $x \neq x_0, x_1, \ldots, x_n$ um valor razoável para y.

Isto é obtido determinando-se uma função $y = f(x)$ a partir das coordenadas conhecidas

- Se o conjunto de coordenadas obtidas tem uma alta precisão, é razoável exigir que

$$y_i = f(x_i) \quad , \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

Caso contrário não é justificável esta exigência e podemos ter $y_i \neq f(x_i)$ que poderá até corrigir valores obtidos imprecisamente.

② Funções utilizadas para interpolação

— São inúmeros os tipos de funções utilizadas para interpolação e devemos ter um certo critério para escolher uma delas, levando em consideração o seu grau de suavidade no intervalo considerado e a sua simplicidade.

— Forma geral para $f(x)$

$$f(x) = a_0 f_0(x) + a_1 f_1(x) + \dots + a_n f_n(x)$$

de modo geral, $f_i(x)$ representa uma classe de funções. $i = 0, 1, \dots, n$

a) Monômios : $f_i(x) = x^i$

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

$$f(x) = P_n(x) \longrightarrow \text{polinômio de grau } n$$

b) Funções de Fourier : $f_i(x) = a_i \cos ix + b_i \operatorname{sen} ix$

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \dots + a_n \cos nx +$$
$$+ b_1 \operatorname{sen} x + b_2 \operatorname{sen} 2x + \dots + b_n \operatorname{sen} nx$$

$$f(x) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} (a_i \cos ix + b_i \operatorname{sen} ix)$$

c) Exponenciais : $f_i(x) = e^{b_i x}$

$$f(x) = a_0 e^{b_0 x} + a_1 e^{b_1 x} + \dots + a_n e^{b_n x} = \sum_{i=0}^{n} a_i e^{b_i x}$$

Existem outras classes porém menos usadas.

A classe mais usada é a dos Monômios ou Polinômios e citamos as seguintes vantagens:

a) Sua teoria é simples e bem desenvolvida

b) São fáceis de ser calculados

c) As somas, produtos e diferenças são polinômios

d) Se $P_n(x)$ é um polinômio, $P_n(x+a)$ e $P_n(ax)$ também são.

e) As outras classes de funções podem ser aproximadas por polinômios

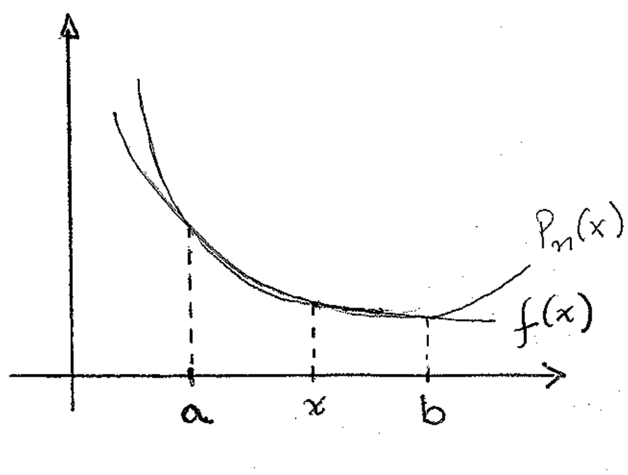
f) Teorema de aproximação de Weierstrass:

"Se $f(x)$ é contínua em $[a, b]$ então para $\forall$ $\epsilon > 0$, existe um $P_n(x)$ de grau n, $n = g(\epsilon)$ tal que

$$|f(x) - P_n(x)| < \epsilon \text{ "}$$

$$a \leq x \leq b$$

Interpretação gráfica



③ Interpolação polinomial

Polinômio : $P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$

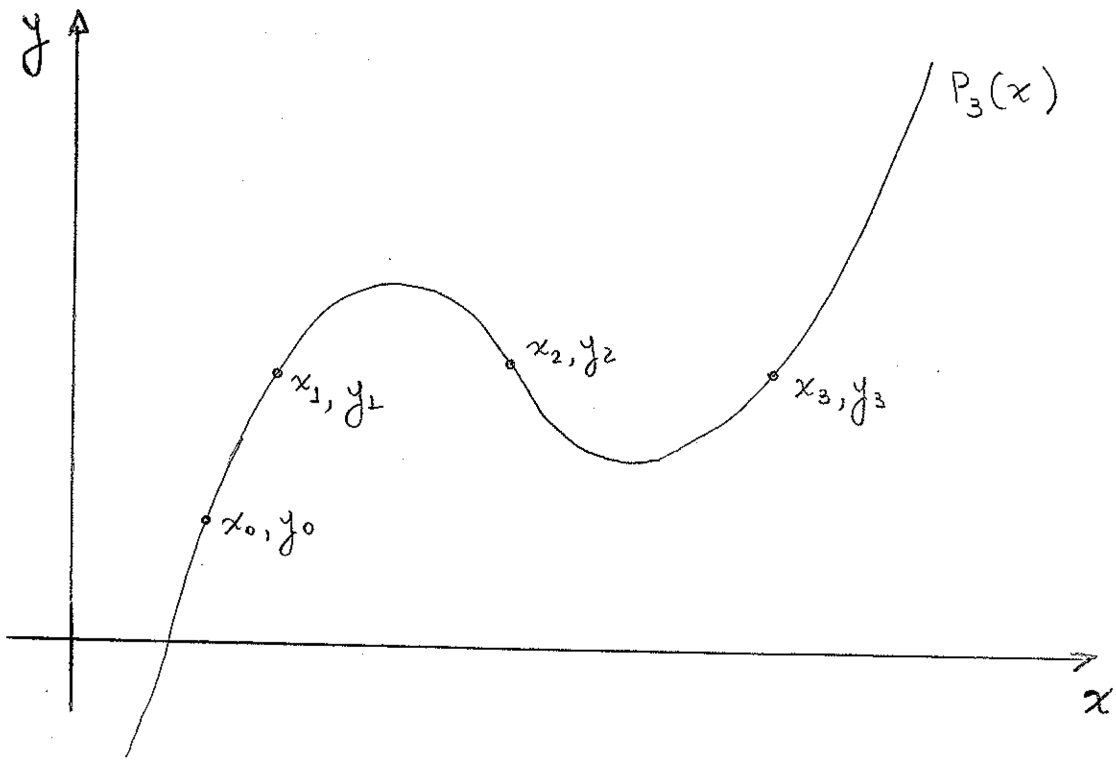
Incógnitas : $a_0, a_1, a_2 \dots, a_n$

a) Polinômio Interpolante

Utilizado quando os dados são bastante precisos

$P_n(x_i) = y_i \quad , \quad i = 0, 1 \dots, n$

Teorema : existe um e só um polinômio de grau n ou menos que assume valores específicos para n+1 valores de x.



Nada garante uma boa aproximação para $x \neq x_i$

$i = 0, 1, \dots, n$

b) Polinômio dos Mínimos Quadrados

— Quando os y_i não são precisos, não se deve exigir que $P_n(x_i) = y_i$

— Para simplificação, se $m+1$ é o nº de pontos, calculamos um $P_n(x)$ tal que $m >> n$

Critério dos mínimos quadrados

A soma dos quadrados das diferenças entre y_i e $P_n(x_i)$ deve ser mínima.

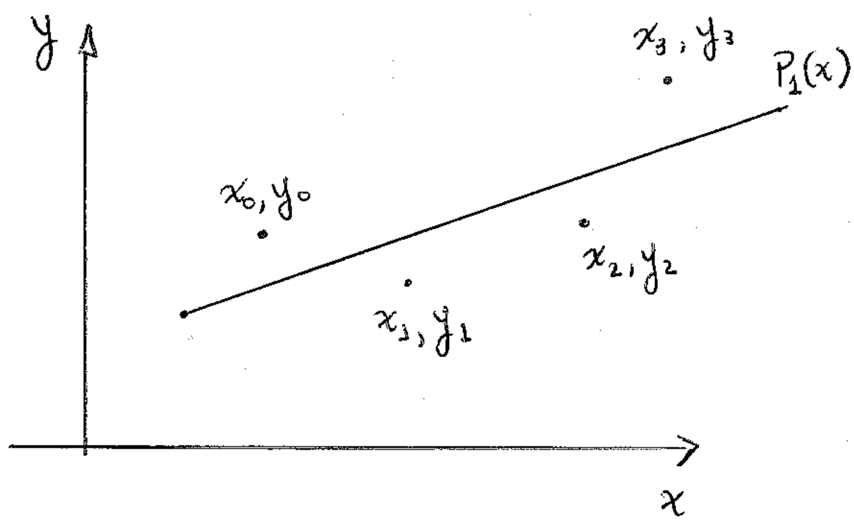
Estabelece-se um valor para $\underline{n}$, sendo $(m+1)$ pontos tal que

$$E = \sum_{i=0}^{m} \left[P_n(x_i) - y_i \right]^2 \text{ é mínimo}$$

Se $m = n$, $E = 0$

Exemplo: $n = 1$

$m = 3$



4) Cálculo de Polinômios

Seja $P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$

onde são conhecidos $a_0, a_1, \dots a_n$ e dado x

calcular $P_n(x)$.

Um programa em FORTRAN seria:

```
P=0
DO i=0,n
    P= P + a(i) * x**i
ENDDO
```

programa em C:

```
P=0;
for (i=0; i<=n; i++)
    P= P+ a[i] * pow(x,i);
```

Teríamos $\frac{n(n+1)}{2}$ multiplicações e n adições (P.F.)

A regra de Horner trasforma $P_n(x)$ em

$$P_n(x) = a_0 + x\left(a_1 + x\left(a_2 + \dots + x\left(a_{n-1} + x a_n\right)\dots\right)\right)$$

EM FORTRAN:

```
P= a(n)
DO i=n-1, 0, -1
    P= P* x + a(i)
ENDDO
```

Em C:

```
P= a[n]
for (i= n-1; i>=0, i--)
    P= P* x + a[i];
```

(5) Polinômio interpolante

a) Sistema de equações p/ os coeficientes

$$a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_n x_0^n = f(x_0)$$

$$a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_n x_1^n = f(x_1)$$

$$\vdots$$

$$a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \ldots + a_n x_n^n = f(x_n)$$

onde $a_0, a_1, a_2 \ldots, a_n$ são incognitas

A maneira de se determinar as incógnitas pode ser resolver por Gauss o sistema abaixo

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^n \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Mas a existência de x e x^n numa mesma linha tende a tornar o sistema desbalanceado.
Exemplo: se $x_i = 0.1$ e $n = 10 \Rightarrow x_i^{10} = 10^{-10}$.
Existem outros métodos de se determinar o polinômio interpolante de modo mais simples que a resolução do sistema.

b) Polinômio de Lagrange

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x)\, f(x_i) \quad \text{onde} \quad L_i(x) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

$$P_n(x) = L_0(x) f(x_0) + L_1(x) f(x_1) + L_2(x) f(x_2) + \dots + L_n(x) f(x_n)$$

$$P_n(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)} f(x_0)$$

$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)} f(x_1)$$

$$\vdots$$

$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)} f(x_i)$$

$$\vdots$$

$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1})} f(x_n) \quad ; \quad f(x_i) = y_i$$

Note que $L_k(x_i) = \delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases}$

Para verificar que este é o polinômio interpolante basta substituir x_i

$$P(x_i) = L_0(x_i)\, y_0 + \dots + l_{i-1}(x_i)\, y_{i-1} + L_i(x_i)\, y_i + L_{i+1}(x_i)\, y_{i+1} + \dots + L_n(x_i)\, y_n$$

$$= 0\, y_0 + \dots + 0\, y_{i-1} + \underline{\underline{1 \cdot y_i}} + 0\, y_{i+1} + \dots + 0 \cdot y_n$$

Exemplo: Calcule o polinômio interpolante para os pontos $(-1,-11)$; $(1,3)$; $(2,7)$; $(3,17)$

$(x_0 \; y_0)$ $\quad (x_1, y_1)$ $\quad (x_2, y_2)$ $\quad (x_3, y_3)$

$$P_3(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(-1-1)(-1-2)(-1-3)}(-11)$$

$$+ \frac{(x+1)\quad(x-2)(x-3)}{(1+1)\quad(1-2)(1-3)}\,3$$

$$+ \frac{(x+1)(x-1)\quad(x-3)}{(2+1)(2-1)\quad(2-3)}\,7$$

$$+ \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{(3+1)(3-1)(3-2)}\,17$$

$$P_3(x) = \frac{11}{24}(x^3-6x^2+11x-6) + \frac{18}{24}(x^3-4x^2+x+6)$$
$$- \frac{56}{24}(x^3-3x^2-x+3) + \frac{51}{24}(x^3-2x^2-x+2)$$

$$P_3(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 1$$

Observações

— O polinômio é o mesmo que aquele calculado por um sistema de equações pois ele é único

— Na prática as fórmulas de Lagrange não são usadas para determinar os coeficientes do polinômio interpolante, devido à complexidade dos cálculos e do algoritmo necessário.

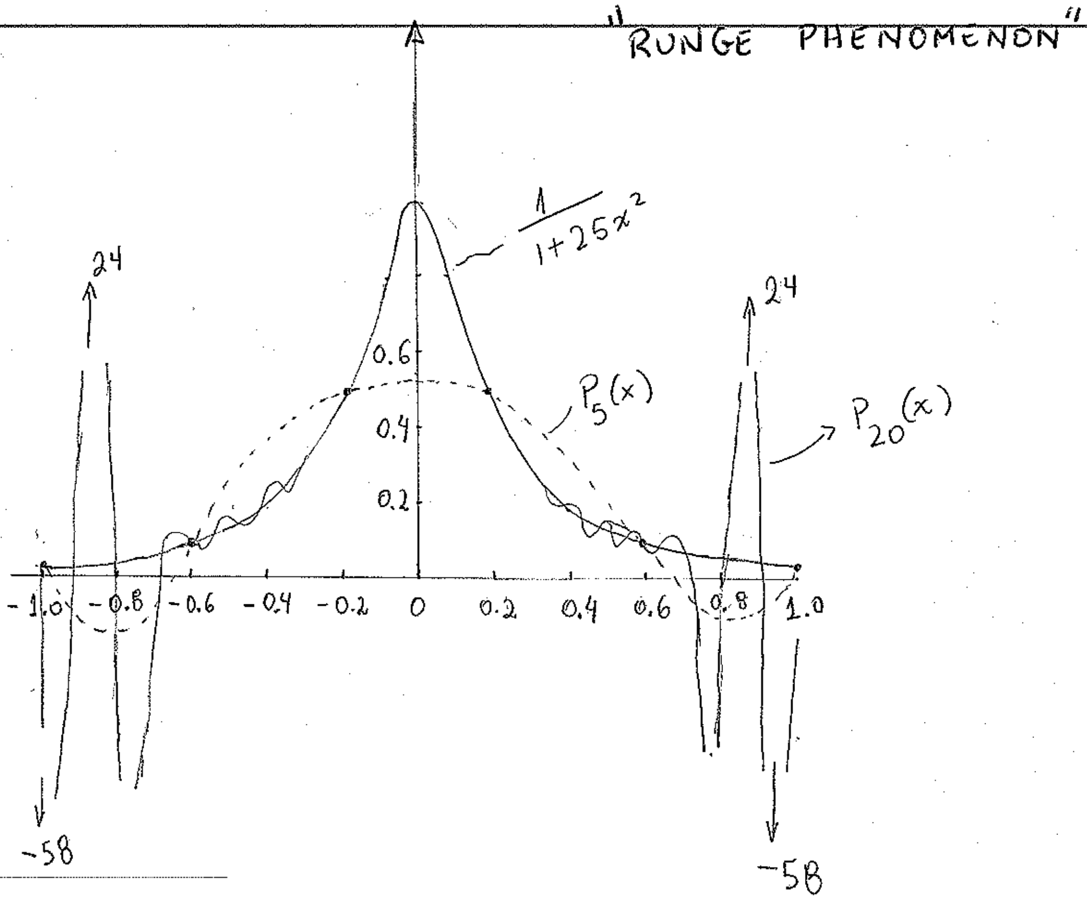
— Estas fórmulas são usadas diretamente para interpolar $y = P_n(x)$.

— Com dois "loops", um para cálculo de Π e outro para o cálculo de Σ, obtém-se o valor de $y = P_n(x)$ interpolado.

c) Falhas do polinômio Interpolante

— Consideremos como função geradora dos pontos base a Função de RUNGE $y = \dfrac{1}{1+25x^2}$

— Vamos construir o gráfico da função de Runge e dos polinômios interpolantes $P_5(x)$ e $P_{20}(x)$ no intervalo $[-1, 1]$



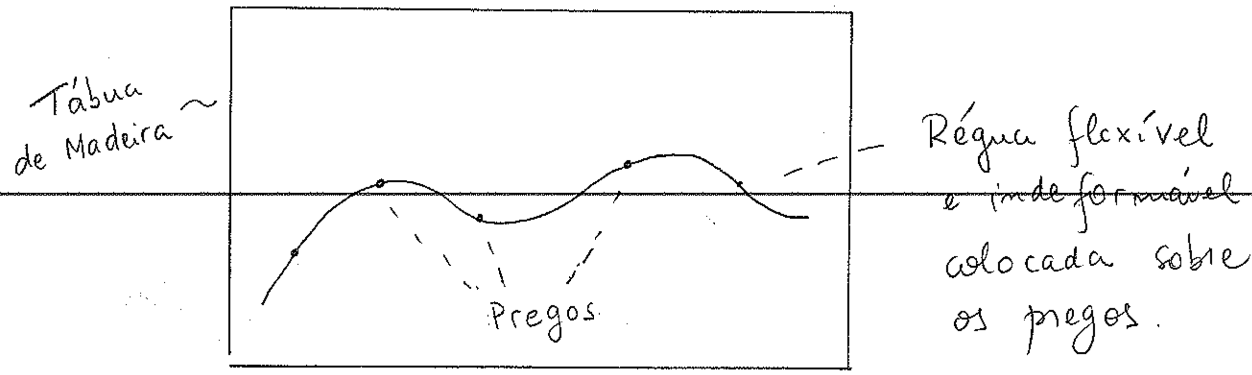
— Divergência é maior qto maior for o grau do polinômio. Curva não suave (picos e vales)

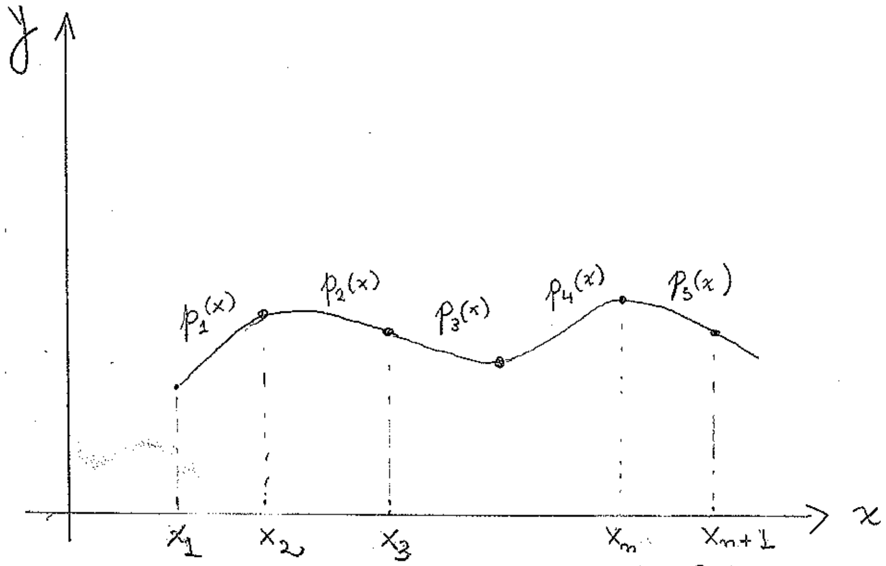
— Solução: garantir a suavidade da curva, estabelecendo condições para as derivadas da função interpolante.

⑥ Interpolação por Spline

— Criado com a finalidade de garantir a suavidade da função interpolante

— SPLINE: método para desenhistas traçarem curvas suaves.





$p_i(x) \rightarrow$ polinômios do 3º grau

— Um polinômio de 3º grau para cada par de pontos base consecutivos

— Para $n+1$ pontos base $\rightarrow$ n polinômios

— Os polinômios do 3º grau são utilizados devido à uma teoria de deformações elásticas de barras flexíveis.

Sua forma se aproxima da forma de energia mínima armazenada.

— Para que a variação do raio de curvatura seja contínua nos pontos base, em cada ponto a 2ª derivada do polinômio anterior é igual à do polinômio posterior. O mesmo se dá com a 1ª derivada.

— Assim

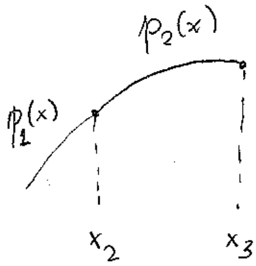
equações $n-1$ $\quad p_i''(x_i) = p_{i-1}''(x_i)$

$n-1$ $\quad p_i'(x_i) = p_{i-1}'(x_i)$

n $\quad p_i(x_i) = y_i$

n $\quad p_i(x_{i+1}) = y_{i+1}$

$4n-2$ equações



ex. $i=2$

Dedução das fórmulas de "SPLINE"

— Basicamente é necessário determinar 4 coeficientes para cada um dos n polinômios de 3º grau.

São necessárias $4n$ equações

— Os valores dos polinômios e suas derivadas nos $n+1$ pontos fornecem $4n-2$ equações pois não podemos calular $p_1'(x_1)$ e $p_1''(x_1)$

— Para contornar esse problema, assumiremos que no início e no final da régua usada em SPLINE a inclinação é constante. Logo a 1ª derivada é constante e a 2ª derivada é nula

$$p_1''(x_1) = 0 \quad e \quad p_n''(x_{n+1}) = 0$$

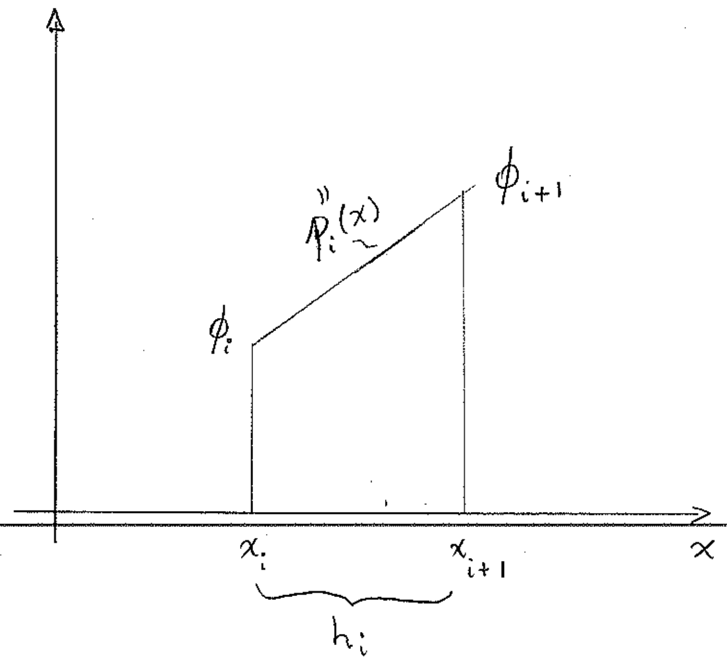
e temos $4n$ equações.

— Para facilitar a notação vamos definir

$$h_i = x_{i+1} - x_i$$

$$\phi_i = p_{i-1}''(x_i) = p_i''(x_i)$$

— Sabemos que cada $p_i''(x)$ é um segmento de reta:



$$p_i''(x) = \phi_i + \frac{(\phi_{i+1} - \phi_i)(x - x_i)}{h_i} = \frac{\phi_i (x_{i+1} - x_i)}{h_i} + \frac{(\phi_{i+1} - \phi_i)(x - x_i)}{h_i}$$

Rearranjando:

$$p_i''(x) = \frac{(x_{i+1} - x)}{h_i}\phi_i + \frac{(x - x_i)}{h_i}\phi_{i+1}$$

Integrando $p_i''(x)$ duas vezes e impondo as condições

$p_i(x_i) = y_i$ e $p_i(x_{i+1}) = y_{i+1}$ teremos

$$p_i'(x) = -\frac{1}{2}\frac{(x_{i+1} - x)^2}{h_i}\phi_i + \frac{1}{2}\frac{(x - x_i)^2}{h_i}\phi_{i+1} + C_1$$

$$p_i(x) = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)\frac{(x_{i+1} - x)^3}{h_i}\phi_i + \frac{1}{2}\,\frac{1}{3}\,\frac{(x - x_i)^3}{h_i}\phi_{i+1} + \underbrace{C_1 x + C_2}_{C_1'(x_{i+1} - x) + C_2'(x - x_i)}$$

$$p_i(x_i) = y_i \quad , \quad p_i(x_{i+1}) = y_{i+1}$$

$$y_i = \frac{1}{6}\frac{(x_{i+1}-x_i)^3}{h_i}\phi_i + C_1'(x_{i+1}-x_i) \rightarrow C_1' = \frac{y_i}{h_i} - \frac{h_i\phi_i}{6}$$

$$y_{i+1} = \frac{1}{6}\frac{(x_{i+1}-x_i)^3}{h_i}\phi_{i+1} + C_2'(x_{i+1}-x_i) \longrightarrow C_2' = \frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{h_i\phi_{i+1}}{6}$$

$$\Rightarrow p_i(x) = \frac{\phi_i}{6h_i}(x_{i+1}-x)^3 + \frac{\phi_{i+1}}{6h_i}(x-x_i)^3 +$$

$$+\left(\frac{y_i}{h_i} - \frac{h_i\phi_i}{6}\right)(x_{i+1}-x) + \left(\frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{h_i\phi_{i+1}}{6}\right)(x-x_i)$$

$\phi_1 \dots \phi_n$ incógnitas

Derivando $p_i(x)$ e usando a condição

$p_i'(x_i) = p_{i-1}'(x_i)$ temos

$$p_i'(x_i) = \frac{\phi_i}{6h_i}(-3)(x_{i+1}-x_i)^2 + \left(\frac{y_i}{h_i} - \frac{h_i\phi_i}{6}\right)(-1) + \left(\frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{h_i\phi_{i+1}}{6}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}h_i\phi_i - \left(\frac{y_i}{h_i} - \frac{h_i\phi_i}{6}\right) + \frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{h_i\phi_{i+1}}{6}$$

$$p_{i-1}(x) = \frac{\phi_{i-1}}{6h_{i-1}}(x_i-x)^3 + \frac{\phi_i}{6h_{i-1}}(x-x_{i-1})^3 + \left(\frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} - \frac{h_{i-1}\phi_{i-1}}{6}\right)(x_i-x)$$

$$+ \left(\frac{y_i}{h_{i-1}} - \frac{h_{i-1}\phi_i}{6}\right)(x-x_{i-1})$$

$$p_{i-1}'(x_i) = \frac{1}{2}h_i\phi_i + \left(\frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} - \frac{h_{i-1}\phi_{i-1}}{6}\right)(-1) + \left(\frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} - \frac{h_{i-1}\phi_i}{6}\right)$$

$$-\frac{1}{2}h_i\phi_i - \left(\frac{y_i}{h_i} - \frac{h_i\phi_i}{6}\right) + \frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{h_i\phi_{i+1}}{6}$$

$$= \frac{1}{2}h_{i-1}\phi_i - \left(\frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} - \frac{h_{i-1}\phi_{i-1}}{6}\right) + \left(\frac{y_i}{h_{i-1}} - \frac{h_{i-1}\phi_i}{6}\right)$$

$\times(-6)$

$$3h_i\phi_i - h_i\phi_i + 6\left(\frac{y_i - y_{i+1}}{h_i}\right) + h_i\phi_{i+1} = -3h_{i-1}\phi_i - h_{i-1}\phi_{i-1} - 6\left(\frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}\right) + h_{i-1}\phi_i$$

$$h_{i-1}\phi_{i-1} + 2(h_{i-1}+h_i)\phi_i + h_i\phi_{i+1} = 6\left(\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}}\right)$$

$n-1$ equações para $n+1$ incógnitas

mas $\phi_1 = 0$ e $\phi_{n+1} = 0$

— Obtemos o sistema com matriz TRIDIAGONAL

$$\begin{bmatrix} 2(h_1+h_2) & h_2 & & & & \\ h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 & & & \\ & h_3 & 2(h_3+h_4) & h_4 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} \\ & & & & h_{n-1} & 2(h_{n-1}+h_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \vdots \\ \phi_{n-1} \\ \phi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_2 - e_1 \\ e_3 - e_2 \\ \\ \vdots \\ e_{n-1} - e_{n-2} \\ e_n - e_{n-1} \end{bmatrix}$$

onde $e_i = 6\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i}\right)$

— O sistema tridiagonal pode ser resolvido usando uma rotina ou então numa implementação direta usando a decomposição LU como a seguir[†]:

$A\phi = d$

$\underbrace{LU\phi}_{z} = d$

$l_i = \dfrac{h_{i-1}}{\mu_{i-1}}$

$$\mu_2 = 2(h_1 + h_2)$$

$$\mu_i = 2(h_{i-1} + h_i) - \frac{h_{i-1}^2}{\mu_{i-1}} \qquad (i = 3, \dots, n)$$

$$z_2 = e_2 - e_1$$

$$z_i = (e_i - e_{i-1}) - \frac{h_{i-1}}{\mu_{i-1}} z_{i-1} \qquad (i=3,..,n)$$

$Lz = d$

forward substitution

— Os ϕ_i's são calculados da seguinte forma

$$\phi_n = \frac{z_n}{\mu_n}$$

$$\phi_i = (z_i - h_i \phi_{i+1})/\mu_i \qquad (i = n-1, \dots, 2)$$

$U\phi = z$

backward substitution

— Os polinômios são assim obtidos

$$p_i(x) = y_i + \alpha_i (x - x_i) + \beta_i (x - x_i)^2 + \gamma_i (x - x_i)^3$$

$$\alpha_i = p_i'(x_i) = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{\phi_{i+1} h_i}{6} - \frac{\phi_i h_i}{3}$$

$$\beta_i = \frac{p_i''(x_i)}{2} = \frac{\phi_i}{2}$$

$$\gamma_i = \frac{p_i'''(x_i)}{6} = \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{6h_i} \qquad \left(\frac{\text{inclinação da reta}}{6}\right)$$

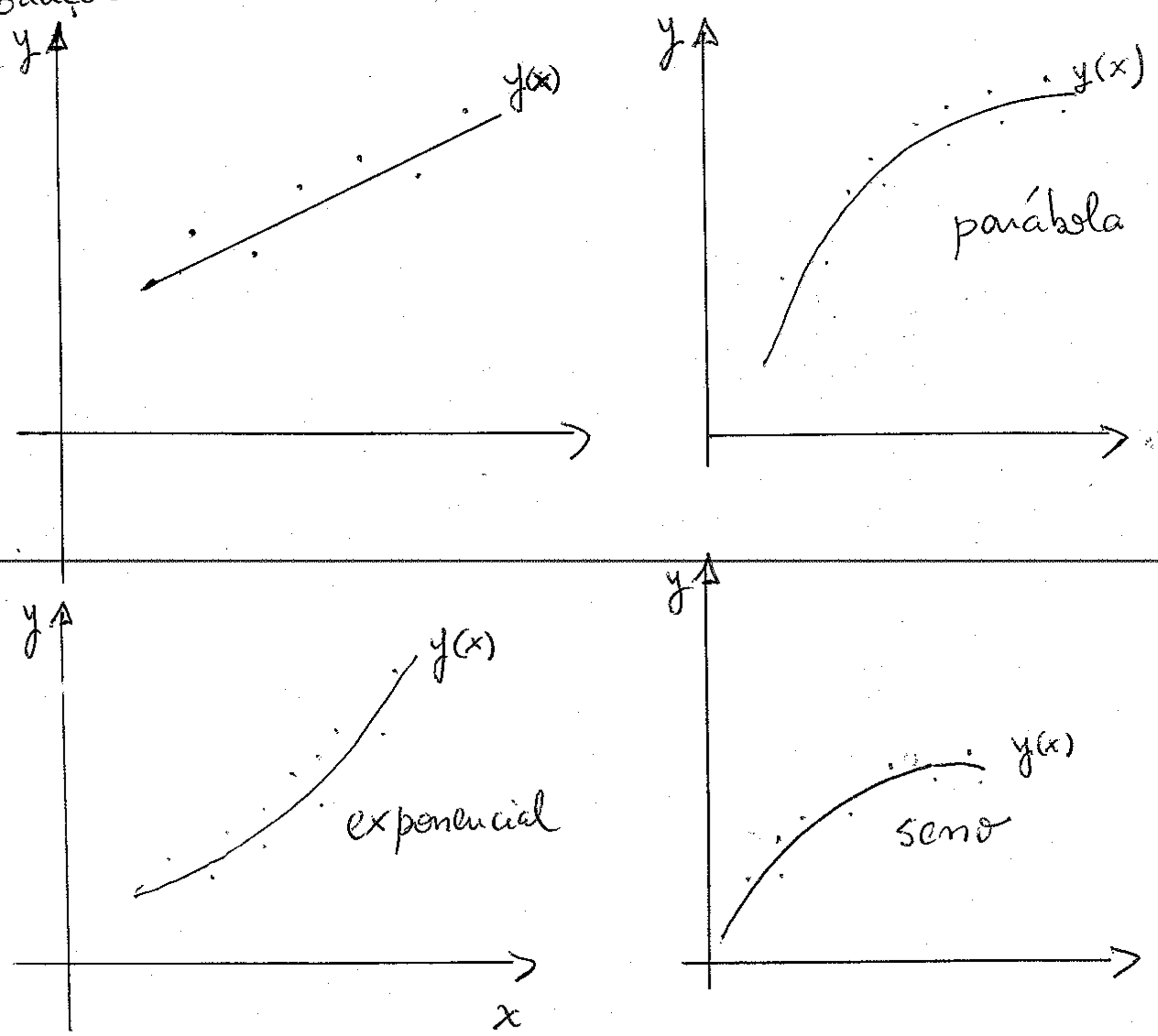
[†] ver pág 35b

CAP V Ajuste por mínimos quadrados

"VERDADE, MENTIRA, ESTATISTICA"

LEAST SQUARES

① Introdução



— $y(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \ldots + c_n f_n(x)$ onde $f_j(x)$ pode ser um monômero, exponencial ou função trigonométrica

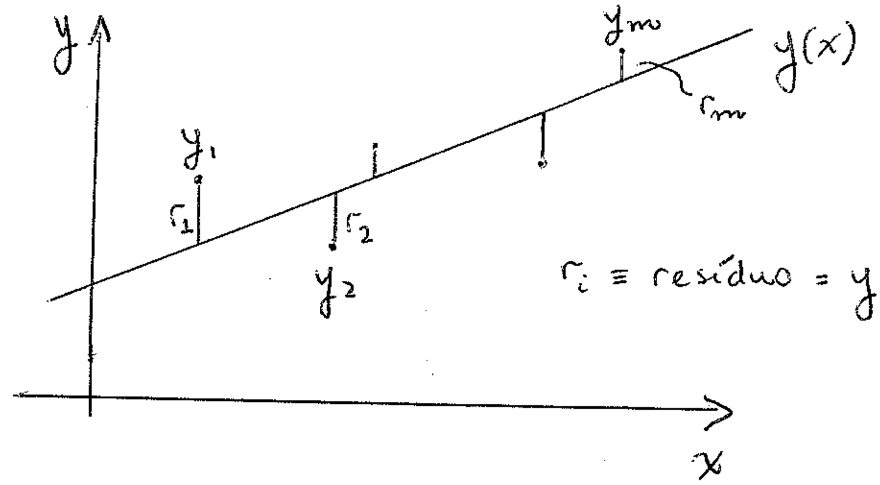
— Para os casos em que o nº de pontos é muito grande ou se eles possuírem incerteza teremos $m > n$, onde m é o nº de pontos. Os c_j são determinados pelo método de mínimos quadrados.

† Primeiro publicado por Legendre (1805). Gauss é dado o crédito de desenvolver a base aos 18 anos em 1795. publicado 1809.
— astronomia e geodesicas (navegação)

VER WIKIPEDIA

② CRITÉRIO DOS Mínimos quadrados (sem pesos)

Exemplo :



$r_i \equiv$ resíduo $= y(x) - y_i$

O critério dos mínimos quadrados calcula o mínimo valor para

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{m} r_i^2 = \sum_{i=1}^{m} (y(x_i) - y_i)^2$$

"Chi - square"
qui - quadrado

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{m} \left(c_1 f_1(x_i) + c_2 f_2(x_i) + \ldots + c_n f_n(x_i) - y_i\right)^2$$

— χ^2 será mínimo quando as n derivadas parciais $\frac{\partial \chi^2}{\partial c_1}, \frac{\partial \chi^2}{\partial c_2}, \ldots, \frac{\partial \chi^2}{\partial c_n}$ se anularem simultaneamente.

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial c_j} = 2 \sum_{i=1}^{m} \left[(y(x_i) - y_i) \frac{\partial y(x_i)}{\partial c_j} \right] = 0$$

Como $\frac{\partial y(x_i)}{\partial c_j} = f_j(x_i)$, $j = 1, \ldots, n$ temos

$$\sum_{i=1}^{m} \left[(c_1 f_1(x_i) + c_2 f_2(x_i) + \ldots + c_n f_n(x_i) - y_i) f_j(x_i) \right] = 0$$

Fazendo a multiplicação e separando os somatórios

$$c_1 \sum_{i=1}^{m} f_1(x_i) f_j(x_i) + c_2 \sum_{i=1}^{m} f_2(x_i) f_j(x_i) + \dots + c_n \sum_{i=1}^{m} f_n(x_i) f_j(x_i) = \sum_{i=1}^{m} f_j(x_i)\, y_i$$

Isto define um sistema de equações na forma

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{m} (f_1(x_i))^2 & \sum_{i=1}^{m} f_1(x_i) f_2(x_i) & \dots & \sum_{i=1}^{m} f_1(x_i) f_n(x_i) \\ \sum_{i=1}^{m} f_2(x_i) f_1(x_i) & \sum_{i=1}^{m} (f_2(x_i))^2 & \dots & \sum_{i=1}^{m} f_2(x_i) f_n(x_i) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{i=1}^{m} f_n(x_i) f_1(x_i) & \sum_{i=1}^{m} f_n(x_i) f_2(x_i) & \dots & \sum_{i=1}^{m} (f_n(x_i))^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum f_1(x_i) y_i \\ \sum f_2(x_i) y_i \\ \vdots \\ \sum f_n(x_i) y_i \end{bmatrix}$$

<u>Ajuste de uma reta</u>

$$y(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) \;, \quad \text{onde } f_1(x) = 1 \;, \; f_2(x) = x$$

O sistema será

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{m} 1 & \sum_{i=1}^{m} x_i \\ \sum_{i=1}^{m} x_i & \sum_{i=1}^{m} x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{m} y_i \\ \sum_{i=1}^{m} x_i y_i \end{bmatrix}$$

Exemplo: Seja o conjunto de pontos

x	10	20	30	40	50	60	70	80
y	2	5	6	7	10	13	14	15

i	x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2
1	10	2	20	100
2	20	5	100	400
3	30	6	180	900
4	40	7	280	1600
5	50	10	500	2500
6	60	13	780	3600
7	70	14	980	4900
8	80	15	1200	6400
Σ	360	72	4040	20400

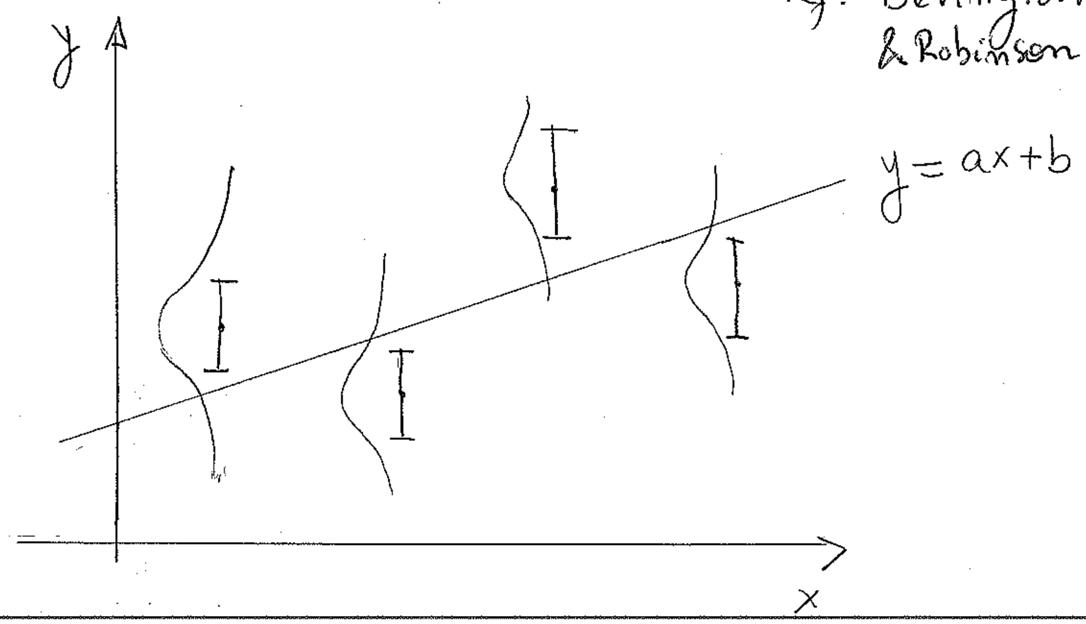
Obtemos o par de equações

$$\begin{bmatrix} 8 & 360 \\ 360 & 20400 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 72 \\ 4040 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{matrix} c_1 = 0.428 \\ c_2 = 0.190 \end{matrix}$$

$$y(x) = 0.428 + 0.190x$$

③ Método dos mínimos quadrados com pesos

ref. Bevington & Robinson



— Vamos assumir que a probabilidade de flutuação de cada uma das medidas obedeça uma distribuição gaussiana ("normal"). A justificativa para isso está no teorema do Limite Central

— O Teo do Limite central afirma (a grosso modo) que a densidade de probabilidade de uma variável assume forma gaussiana se a variável é ela mesma resultante de um grande nº de subvariáveis aditivas independentes. [Callen p.256]

A probabilidade P_i de fazer uma medida y_i com desvio padrão σ_i para observações sobre o valor verdadeiro $y_v(x_i)$ é dada por

$$P_i = \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{y_i - f_v(x_i)}{\sigma_i} \right]^2 \right\}$$

$$f_v(x_i) = a_v + b_v x$$