Solução de Eq. de 2ª ordem $\ddot{y} = f(t, y, \dot{y})$

$$\begin{cases} \dot{y} = g(t, y, z) = z \\ \dot{z} = f(t, y, z) \end{cases} \xrightarrow{\text{Euler}} \begin{cases} y_{i+1} = y_i + h z_i \\ z_{i+1} = z_i + h\, f(t_i, y_i, z_i) \end{cases}$$

RK4 2ª ordem (EDO)

$$\begin{cases} k_{1y} = h\, g(t_i, y_i, z_i) = h z_i \\ k_{1z} = h\, f(t_i, y_i, z_i) \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_{2y} = h\, g(t_i + h/2,\ y_i + k_{1y}/2,\ z_i + k_{1z}/2) = h(z_i + k_{1z}/2) \\ k_{2z} = h\, f(t_i + h/2,\ y_i + k_{1y}/2,\ z_i + k_{1z}/2) = \end{cases}$$

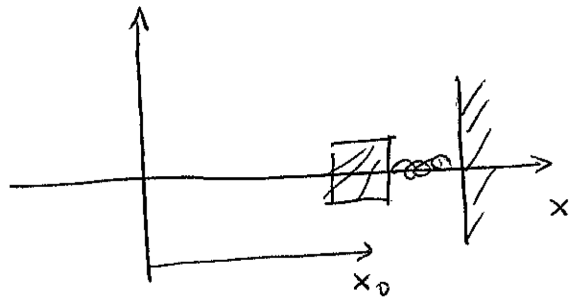
$$\begin{cases} k_{3y} = h\, g(t_i + h/2,\ y_i + k_{2y}/2,\ z_i + k_{2z}/2) = h(z_n + k_{2z}/2) \\ k_{3z} = h\, f(t_i + h/2,\ y_i + k_{2y}/2,\ z_i + k_{2z}/2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_{4y} = h\, g(t_i + h,\ y_i + k_{3y},\ z_i + k_{3z}) = h(z_i + k_{3z}) \\ k_{4z} = h\, f(t_i + h,\ y_i + k_{3y},\ z_i + k_{3z}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + (k_{1y} + 2k_{2y} + 2k_{3y} + k_{4y})/6 \\ z_{i+1} = z_i + (k_{1z} + 2k_{2z} + 2k_{3z} + k_{4z})/6 \end{cases}$$

O que é espaço de fase

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$



Por simplicidade

$m = 1$

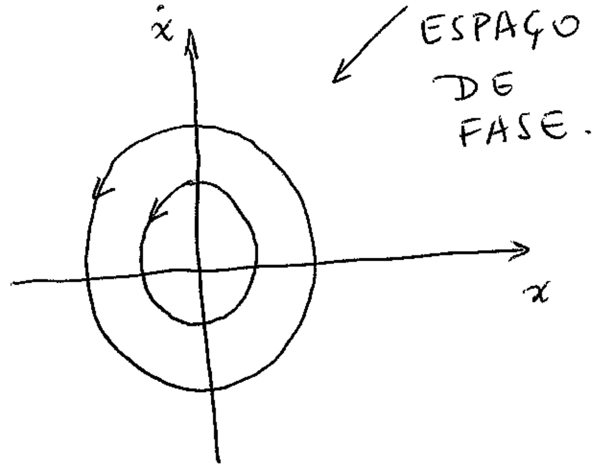
$k = 1$ $\qquad \omega_0 = 1$

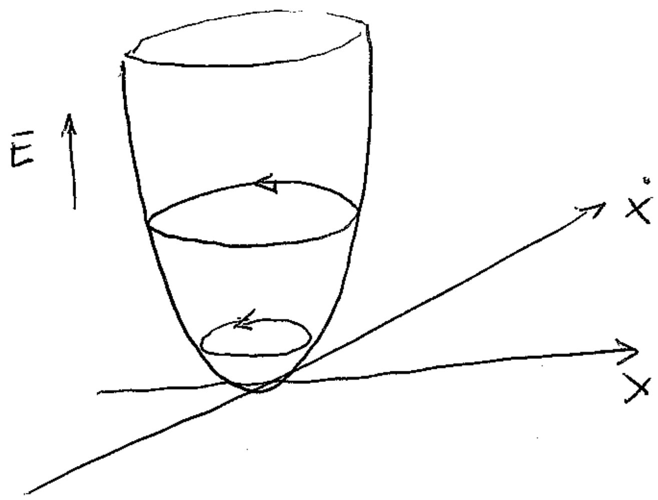
$$x = \cos(\omega_0 t + \varphi)$$
$$\dot{x} = -\sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$E = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\dot{x}^2 = \frac{1}{2}x_0^2$$

$$x^2 + \dot{x}^2 = x_0^2$$

↳ eq. círculo

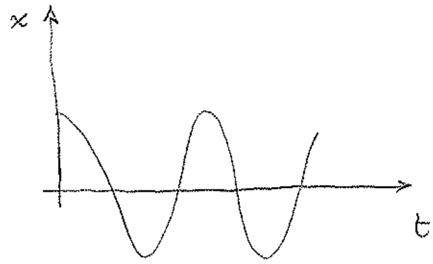




OSCILADOR HARMÔNICO, ESPAÇO DE FASE E MAPA DE POINCARÉ

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

ou $$\ddot{x} + \alpha x = 0 \quad , \quad \alpha = \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

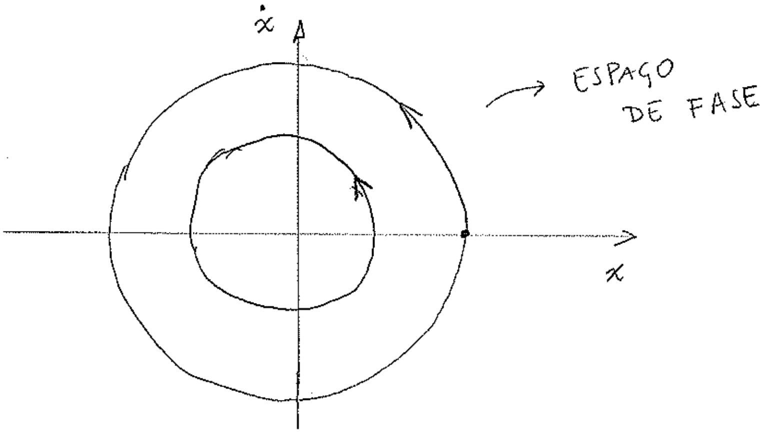


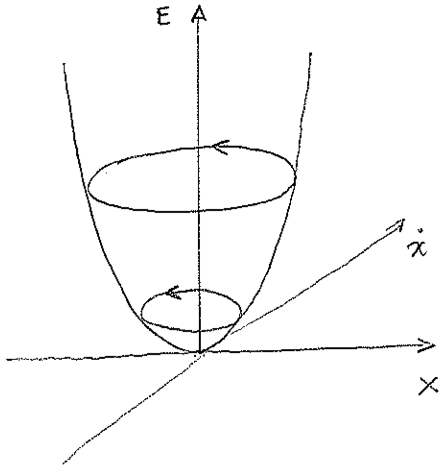
Solução $$x = x_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

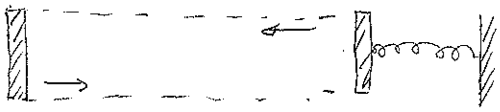
$$\dot{x} = -\omega_0 x_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

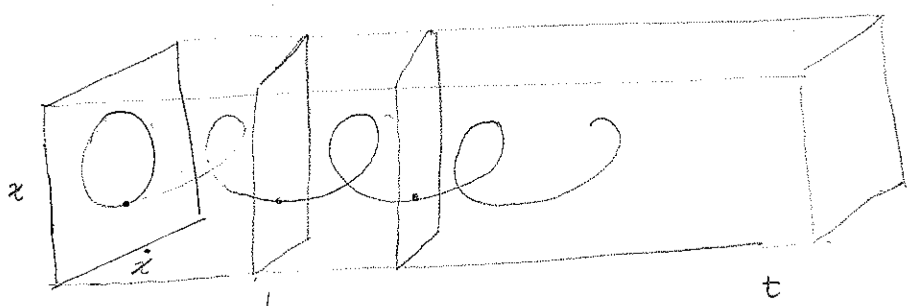
Por simplicidade, $x_0 = 1$, $\omega_0 = 1$, $m = 1$

$$E = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\alpha x^2$$



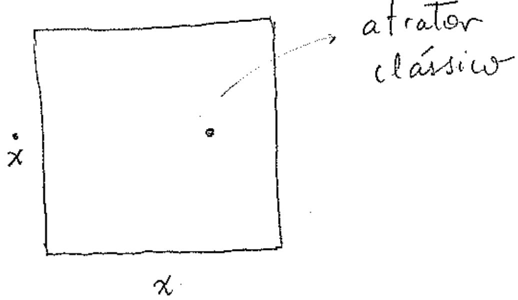






seções de Poincaré correspondem a cortes em t. P/ um O.H., se os cortes forem feitos com período $\frac{2\pi}{\omega_0}$ teremos

MAPA DE POINCARÉ



OSCILADOR DE DUFFING

GEORG Duffing – FORCED VIBRATION WITH VARIABLE NATURAL FREQUENCY – 1918
Engenheiro Elétrico

Caso mais geral na forma

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \alpha x + \beta x^3 = F\cos(\omega t + \varphi) \quad , \quad \underset{\text{elástica}}{\text{Força}} = -\alpha x - \beta x^3$$

$$E(t) = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \underbrace{\frac{1}{2}\alpha x^2 + \frac{1}{4}\beta x^4}_{U}$$

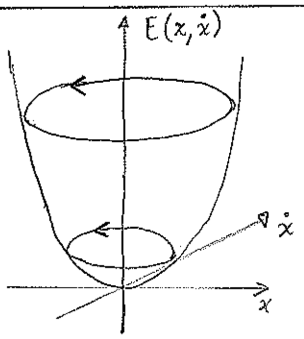
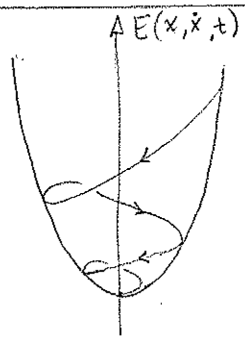
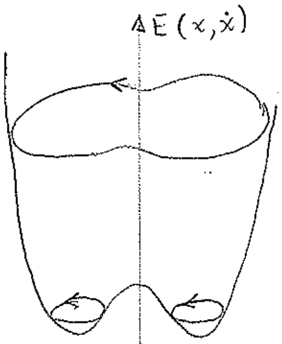
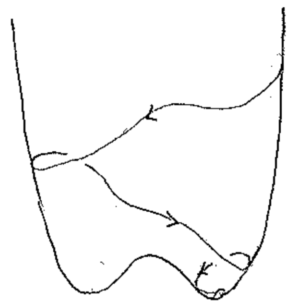
$$-\frac{\partial U}{\partial x} = -\alpha x - \beta x^3$$

$$U = \frac{\alpha x^2}{2} + \frac{\beta x^4}{4}$$

$F = 0$

$\gamma = 0$ energia conservada $\quad \frac{dE(t)}{dt} = 0$

$\gamma > 0$ dissipação $\quad \frac{dE(t)}{dt} = -2\gamma\dot{x}^2 \leqslant 0$

$\beta > 0$	sem amortecimento $\gamma = 0$	com amortecimento $\gamma > 0$
$\alpha > 0$		
$\alpha < 0$		

Vamos analisar o caso $\alpha < 0$. Por simplicidade vamos escolher $\alpha = -1$ e $\beta = 1$. Nesse caso $U(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{x^4}{4}$ = .

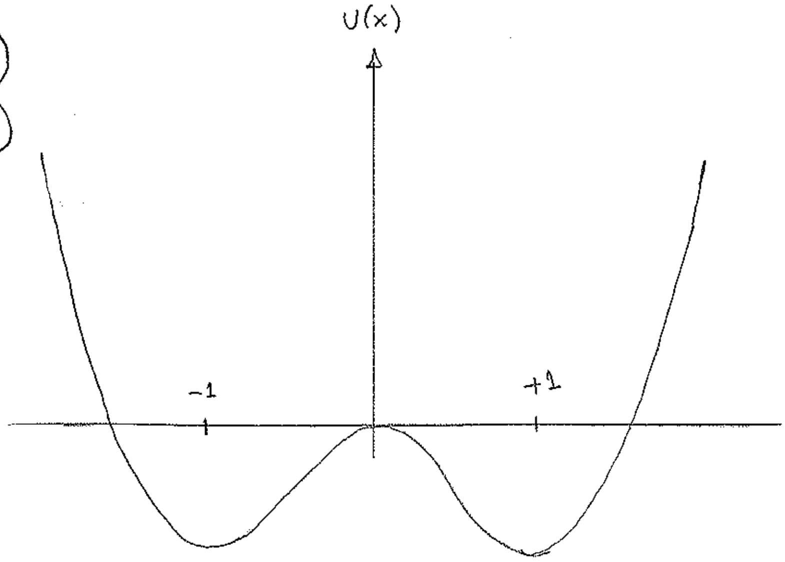
$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0 \Rightarrow -\frac{2x^2}{2} + \frac{4x^4}{4} = 0$$

$$x^2(x^2-1) = 0 \Rightarrow \boxed{x = \pm 1}$$

ou $x = 0$

$F = 0$

$\gamma = 0$



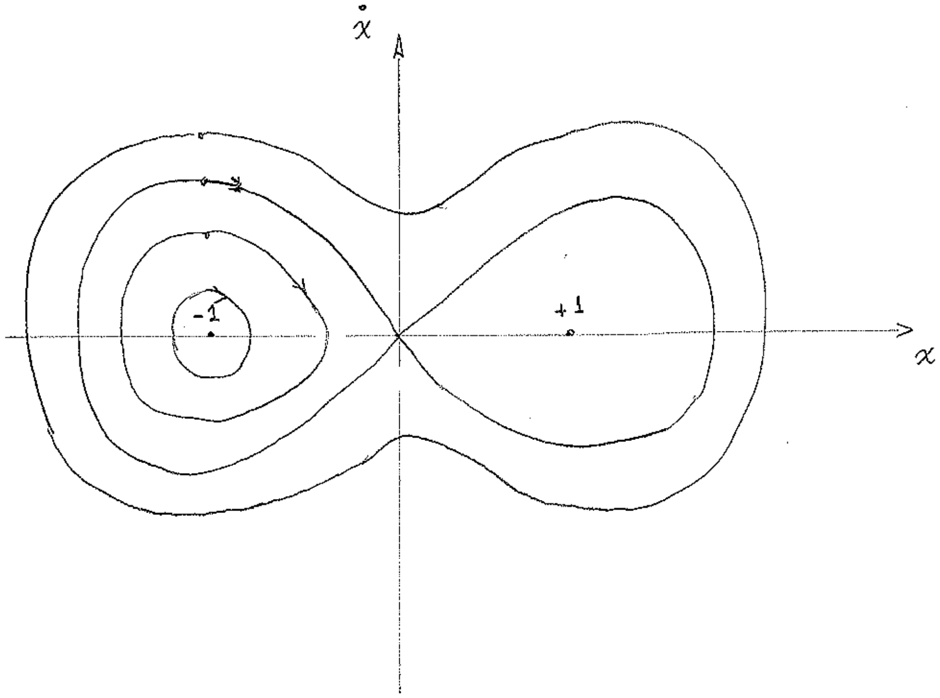
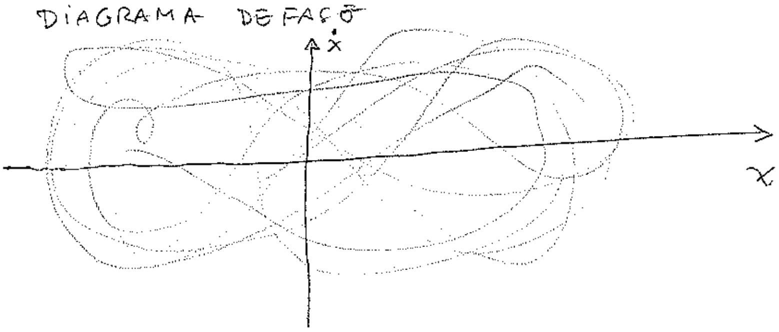


DIAGRAMA DE FASE

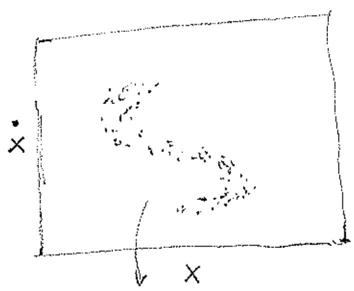
$F \neq 0$

$\gamma \neq 0$



$\longrightarrow$ MAPA DE POINCARÉ

construído c/
CORTES NO TEMPO
c/ PERÍODO $\frac{2\pi}{\omega}$



FRACTAL

Atrator: Um conjunto de pontos ou subespaço no espaço de fase que permanece quando o transitório (ou transiente) desaparece.

Ex: pontos de equilíbrio ou pontos fixos, ciclos limites, superfície toroidal → atrator dinâmicos clássicos

FRACTAL – Uma propriedade geométrica de um set de pontos no espaço n dimensional tendo a qualidade da auto-similaridade (SELF SIMILARITY) em diferentes escalas de comprimento e tendo dimensão fractal < n.

ATRATOR ESTRANHO → FRACTAL na seção de Poincaré
("STRANGE ATTRACTOR")

↳ NOTA: existem sistemas com atratores estranhos não caóticos (Moon p.80)