CAP VIII Equações Diferenciais Parciais

Introdução

As equações diferenciais parciais são aquelas que possuem derivadas em relação à mais de uma variável. Ex: Equação da onda $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$

Estudaremos equações diferenciais parciais lineares de 2ª ordem na forma

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} + fu + r = 0$$

ou numa notação mais compacta

$$a u_{xx} + b u_{xy} + c u_{yy} + d u_x + e u_y + f u + r = 0$$

onde os subscritos denotam derivadas.

Esta eq. possui paralelo algébrico na forma

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + cy + f = 0$$

Usando os conceitos da geometria analítica, a eq. algébrica descreverá uma curva que depende de

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \begin{cases} 2 \text{ raízes iguais} \rightarrow \text{parábola} \\ 2 \text{ raízes reais} \rightarrow \text{hipérbole} \\ 2 \text{ raízes complexas} \rightarrow \text{elipse} \end{cases}$$

De forma análoga, nas eq. diferenciais parciais de 2ª ordem teremos equações parabólicas, hiperbólicas e elípticas.

exemplos

i) eq. do calor $u_t = \sigma u_{xx}$ é parabólica

ii) eq. da onda $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ é hiperbólica

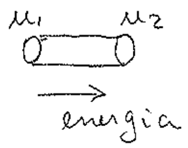
iii) eq. de Laplace $u_{xx} + u_{yy} = 0$ é elíptica

(1) Equações Parabólicas

Vamos iniciar com uma derivação simples da eq. do calor. Seja $u(x,y,z,t)$ a temperatura num num dado instante t num ponto x, y, z dentro de uma região homogenea limitada por uma superfície S.

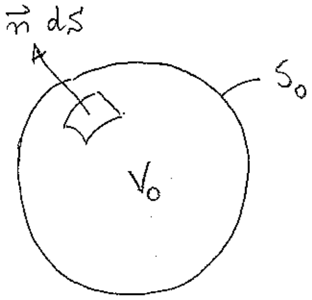
Energia por unidade de volume $= c_* u$ onde c = calor especifio na região

Energia flui na direção $-\vec{\nabla} u$ com magnitude $K|\vec{\nabla} u|$ onde K é a condutibilidade térmica do material.

1D 

$u_1 > u_2$

Fluxo de energia com magnitude $K \frac{\partial u}{\partial x}$

3D 

V_0 é uma região limitada pela superfície

$\vec{n}$ é a normal à superfície S_0

Pela lei da conservação da energia

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{V_0} c u \, dx\,dy\,dz}_{\text{Variação da energia no volume } V_0 \text{ no tempo}} = \underbrace{\iint_{S_0} K \vec{\nabla} u \cdot \vec{n}\, dS}_{\text{Fluxo da energia através da superfície } S_0}$$

Aplicando o Teorema de Gauss (Teorema da Divergência) ao lado direito temos

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{V_0} cu \, dx\,dy\,dz = \iiint_{V_0} \vec{\nabla}\cdot(K\vec{\nabla}u)\, dx\,dy\,dz$$

ou $\displaystyle\iiint_{V_0} \left[c u_t - K\vec{\nabla}^2 u \right] dx\,dy\,dz = 0$

Contraindo o volume para p/ um ponto concluimos que o integrando deve ser zero e nesse caso

$$c u_t - K\nabla^2 u = 0 \quad , \quad \sigma \equiv \frac{K}{c}$$

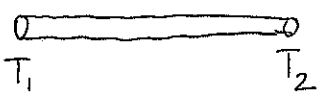
$\downarrow$ constante de Difusão

ou $\boxed{u_t = \sigma \vec{\nabla}^2 u}$

Eq. do Calor
ou Eq. de Difusão

Se o problema for independente de y e z então o problema se torna $u_t = \sigma u_{xx}$.

Exemplo: barra

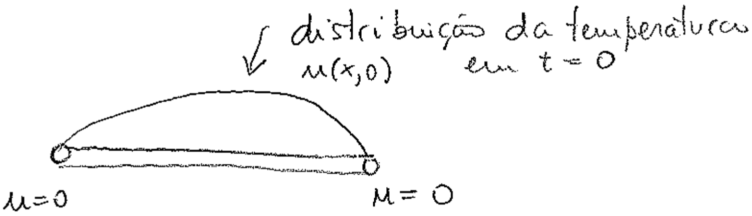


Vamos examinar a solução desta eq. na região

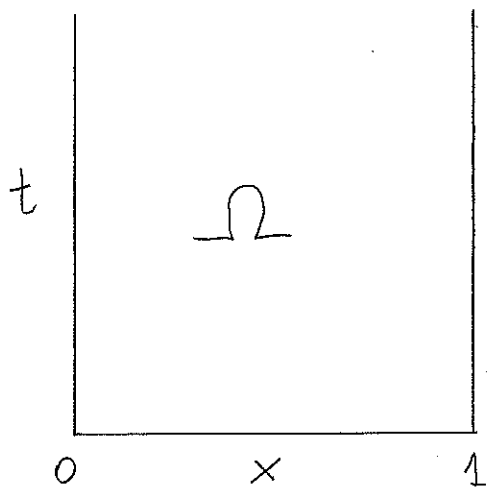
$\Omega = \{ 0 \leq x \leq 1 \}$ sujeito às condições

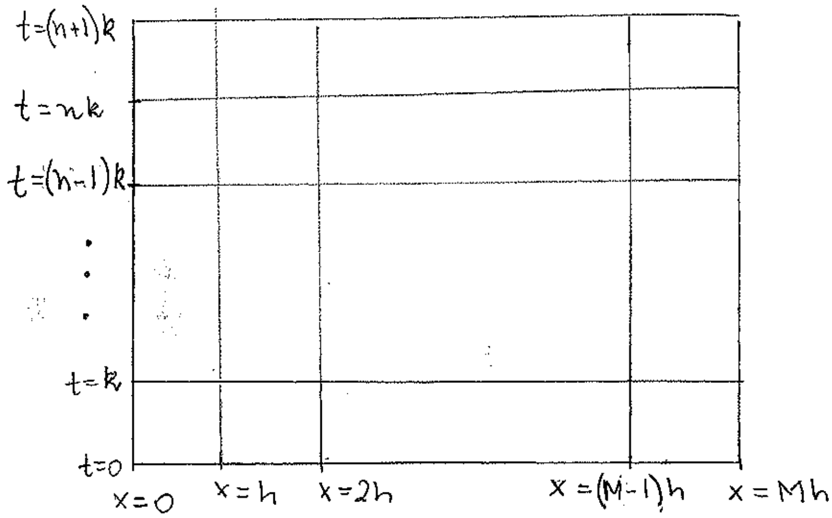
$u(x,0) = \phi(x) \, , \quad 0 \leq x \leq 1$ (condição inicial)
distribuição inicial de temperatura na barra

$$\left.\begin{array}{l} u(0,t) = 0 \\ u(1,t) = 0 \end{array}\right\} \text{condições de contorno nas extremidades}$$



A região Ω e sua discretização podem ser representados como





Vamos tomar U_m^n como uma aproximação para $u(mh, nk)$ em cada ponto da grade $\Omega_{h,k}\left\{(x,t):\ x = mh \quad 0<m<M,\ Mh=1 \quad t = nk\right\}$

com condição inicial $U_m^0 = \phi(mh)$

condições de contorno $\begin{cases} U_0^n = 0 \\ U_M^n = 0 \end{cases}$

Substituindo a equação diferencial $u_t = \sigma u_{xx}$ por uma equação de diferenças temos

$$\frac{u(x,t+k)-u(x,t)}{k} = \sigma\,\frac{u(x+h,t)-2u(x,t)+u(x-h,t)}{h^2} + E(x,t)$$

"local discretization error"

<u>Nota</u>: W.F. Ames chama $kE(x,t)$ "local truncation error"
Numerical Methods for Partial Differential Equations 3rd Edition 1992

<u>Exercício</u>: Expandindo cada termo em série de Taylor e assumindo que suficientes derivadas de u existem, mostre que o erro local de discretização é dado por

$$E(x,t) = (u_t - \sigma u_{xx}) + \frac{k}{2} u_{tt} - \frac{h^2}{12}\sigma u_{xxxx} + \text{termos de ordem superior}$$

ou, o erro de discretização local é $\mathcal{O}(k+h^2)$

A equação de diferenças pode ser escrita como

$$\frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{k} = \sigma \frac{U_{m+1}^n - 2U_m^n + U_{m-1}^n}{h^2}$$

ou

$$U_m^{n+1} = U_m^n + \frac{k\sigma}{h^2}\left[U_{m+1}^n - 2U_m^n + U_{m-1}^n\right], \quad m = 1, 2 \ldots M-1, \; n > 0$$

método explícito

que pode ser escrito na forma compacta

$$U_m^{n+1} = U_m^n + \frac{k\sigma}{h^2}\delta_x^2 U_m^n, \qquad \delta_x^2 U_m^n \equiv U_{m+1}^n - 2U_m^n + U_{m-1}^n$$

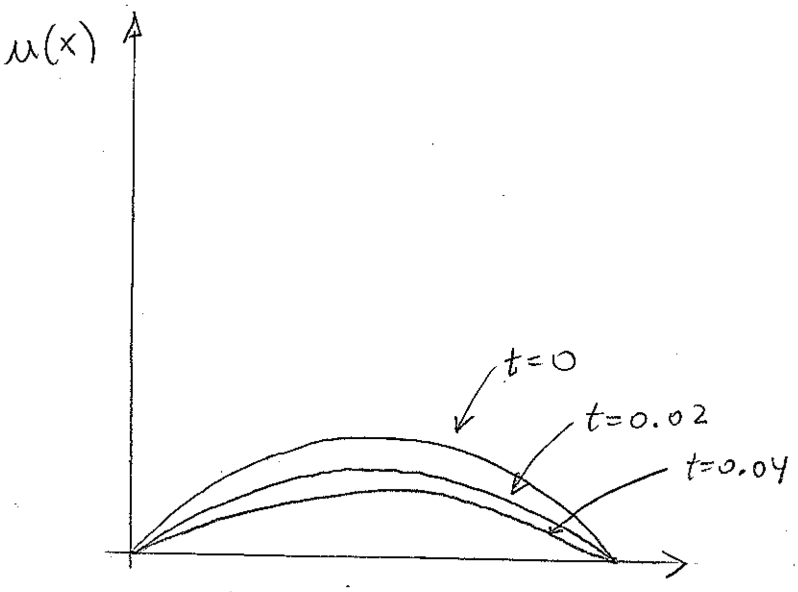
<u>Exemplo</u> Calcule $u_t = u_{xx}$ sujeito às condições de contorno $u(0,t) = u(1,t) = 0$ c/ condição inicial $u(x,0) = \sin(\pi x)$ usando $h = 0.1$ e $k = 0.005$

Solução analítica

$$u(x,t) = \exp(-\pi^2 t)\sin(\pi x)$$

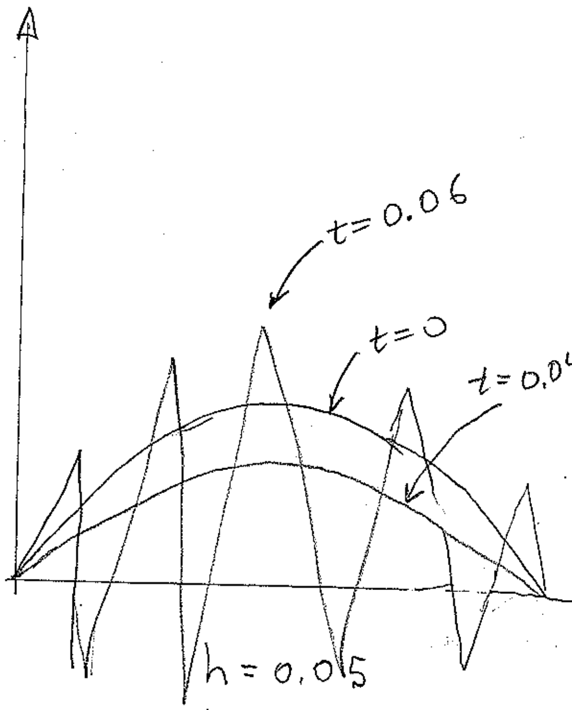
x	t = 0.02	t = 0.04
0	0.000000	0.000000
0.1	0.252818	0.206839
0.2	0480888	0.393432
0.3	0.661886	0.541512
0.4	0.778093	0.636586
0.5	0.818136	0.669346
0.6	0.778093	0.636586
0.7	0.661886	0.541512
0.8	0.480888	0.393432
0.9	0.252818	0.206839
1.0	0.000000	0.000000

graficamente



$h = 0.1$
$k = 0.005$

ESTÁVEL



$h = 0.05$
$k = 0.0025$

INSTÁVEL

Análise de estabilidade

A eq. $U_m^{n+1} = U_m^n + r\left(U_{m+1}^n - 2U_m^n + U_{m-1}^n\right)$, $U_0 = 0$, $U_M = 0$

pode ser escrita na forma matricial

$$\underbrace{\begin{bmatrix} U_1^{n+1} \\ U_2^{n+1} \\ \vdots \\ U_{M-1}^{n+1} \end{bmatrix}}_{U^{n+1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1-2r & r & & & \\ r & 1-2r & r & & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \\ & 0 & r & 1-2r & r \\ & & & r & 1-2r \end{bmatrix}}_{C} \underbrace{\begin{bmatrix} U_1^n \\ U_2^n \\ \vdots \\ U_{M-1}^n \end{bmatrix}}_{U^n}$$

ou $U^{n+1} = C\,U^n$.

Suponha que haja um erro ε^0 em U^0 então o erro em U^1 será $C(U^0+\varepsilon^0) - CU^0 = C\varepsilon^0$ que será $C^2\varepsilon^0$ em U^2 e $C^n\varepsilon^0$ em U^n. Para estudar a estabilidade vamos determinar os autovalores da matriz C. Ela esta na forma tridiagonal

$$\begin{bmatrix} b & c & & & & \\ a & b & c & & & \\ & a & b & c & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & a & b & c \\ & & & & a & b \end{bmatrix}_{N\times N}$$

cujos auto-valores são dados por $\lambda_j = b + 2\sqrt{ac}\cos\left(\frac{j\pi}{N+1}\right)$

$j = 1 \ldots N$

identificando temos $a = r$, $b = 1-2r$ e $c = r$, $N = M-1$.

e os autovalores serão $\lambda_j = 1-2r + 2\sqrt{r^2}\cos\left(\frac{j\pi}{M}\right)$

$= 1 - 2r\left(1 - \cos\left(\frac{j\pi}{M}\right)\right)$

O sistema ficará limitado se o maior autovalor em modulo satisfizer $|\lambda| \leq 1$. O maior autovalor em módulo será dado por $1 - 2r\left(1 - \cos\left(\frac{(M-1)\pi}{M}\right)\right)$ cujo módulo será ≤ 1 desde que $r = \frac{k\sigma}{h^2} \leq \frac{1}{2}$.

Método semi-implícito para a equação do Calor $u_t = \sigma u_{xx}$

Um método para obtenção da solução de

$$\frac{dy}{dt} = f \qquad \text{sujeito a } y(0) = \alpha \text{ é dado}$$

pela regra do trapézio

$$y^{n+1} = y^n + \frac{k}{2}\left[f^n + f^{n+1}\right] \quad , \quad \text{onde } y^n \approx y(nk)$$

onde os índices superescritos são temporais.

Se escrevermos a equação de calor como

$$\frac{du}{dt} = \sigma A u \quad , \quad \text{onde } A \text{ é operador } \frac{\partial^2}{\partial x^2} \text{ então}$$

a regra do trapézio fornece

$$U^{n+1} = U^n + \frac{k\sigma}{2}\left[AU^{n+1} + AU^n\right]$$

ou

$$U_m^{n+1} = U_m^n + \frac{r}{2}\left[\delta_x^2 U_m^{n+1} + \delta_x^2 U_m^n\right] \quad , \quad r \equiv \frac{k\sigma}{h^2}$$

$$U_m^{n+1} - \frac{1}{2} r\left[U_{m+1}^{n+1} - 2U_m^{n+1} + U_{m-1}^{n+1}\right] = U_m^n + \frac{r}{2}\left[U_{m+1}^n - 2U_m^n + U_{m-1}^n\right]$$

condições de contorno

$$U_0^{n+1} = 0$$

$$U_M^{n+1} = 0$$

teremos então um sistema de M-1 equações que podem ser colocados na forma matricial

$$\begin{bmatrix} 1+r & -r/2 & & & \\ -\frac{r}{2} & 1+r & -\frac{r}{2} & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & -\frac{r}{2} & 1+r & -\frac{r}{2} \\ & & & -\frac{r}{2} & 1+r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^{n+1} \\ U_2^{n+1} \\ \vdots \\ \\ U_{M-1}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-r & r/2 & & & \\ r/2 & 1-r & r/2 & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & \frac{r}{2} & 1-r & \frac{r}{2} \\ & & & \frac{r}{2} & 1-r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^{n} \\ U_2^{n} \\ \vdots \\ \\ U_{M-1}^{n} \end{bmatrix}$$

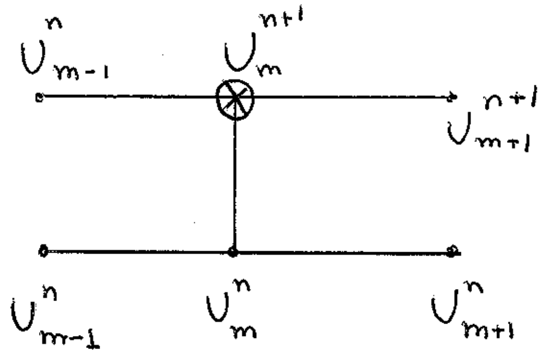
Que pode ser escrita como

$$C_1 U^{n+1} = C_2 U^n .$$

Como a matriz C_1 é tridiagonal, ela pode ser resolvida por decomposição LU, seguida de "FORWARD" E "BACKWARD" "SUBSTITUTION". A decomposição só necessita ser realizada uma só vez já que C_1 é a mesma em todos os tempos.

semi-implícito

pontos do futuro dependem do presente e do futuro.



Exercício: Resolva $u_t = u_{xx}$ com $u(x,0) = \sin \pi x$ $0 \leq x \leq 1$

c.c. $u(0,t) = u(1,t) = 0$, usando os mesmos parâmetros do exemplo explícito.

O método de CN é um caso particular de um método mais geral

$$U_m^{n+1} = U_m^n + r\left[\theta\,\delta_x^2 U_m^{n+1} + (1-\theta)\,\delta_x^2 U_m^n\right] \qquad m = 1, 2 \ldots M-1, \quad n > 0$$

$\theta = 0$ explícito

$\theta = \frac{1}{2}$ CN (semi-implícito)

$\theta = 1$ totalmente implícito

$$\frac{u(x, t+k) - u(x,t)}{k} = \sigma\left[\theta\,\frac{u(x+h, t+k) - 2u(x,t+k) + u(x-h,t+k)}{h^2}\right.$$

$$\left. + (1-\theta)\frac{u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)}{h^2}\right] + E(x,t)$$

Exercício: Mostre que

$$E(x,t) = \sigma\left[\sigma\left(\frac{1}{2} - \theta\right)k - \frac{h^2}{12}\right]u_{xxxx} + O(k^2 + h^4)$$

Para CN, $\theta = \frac{1}{2} \rightarrow E = O(h^2 + k^2)$

Se $\theta = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12\sigma k} \rightarrow E = O(k^2 + h^4)$

Estabilidade (Ver QUINNEY)

$0 \leq \theta < 1/2$, $\frac{\sigma k}{h^2} \leq \frac{1}{2 - 4\theta}$ estável

$\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$, sempre estável

caso particular $\theta = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12 k\sigma} \rightarrow \frac{1}{2-4\theta} = \frac{3k\sigma}{h^2} \rightarrow$ estável

Equações Elípticas

Equações elípticas podem aparecer na equação do calor em 2D

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sigma\,(u_{xx} + u_{yy})$$

Se existir uma solução estacionária $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ o que leva a $\boxed{u_{xx} + u_{yy} = 0}$ eq. de Laplace

- fluxo estacionário de calor ou eletricidade
- fluxo irrotacional de um fluido incompressível
- problemas de potencial na eletricidade e magnetismo

são equações de contorno que podem ser de Dirichlet ou de Neumann.

<u>Exemplo</u>: considere a eq. de Laplace no quadrado $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ com $u = 0$ nas bordas exceto na linha $0 \leq x \leq 1$, $y = 0$ onde $u(x,0) = \sin^2 \pi x$. É possível mostrar que a solução exata é

$$u(x,y) = -\frac{8}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\sinh[(2j-1)\pi(1-y)]}{(4j^2-1)(2j-3)\sinh[(2j-1)\pi]} \sin[(2j-1)\pi x]$$

(VER QUINNEY)

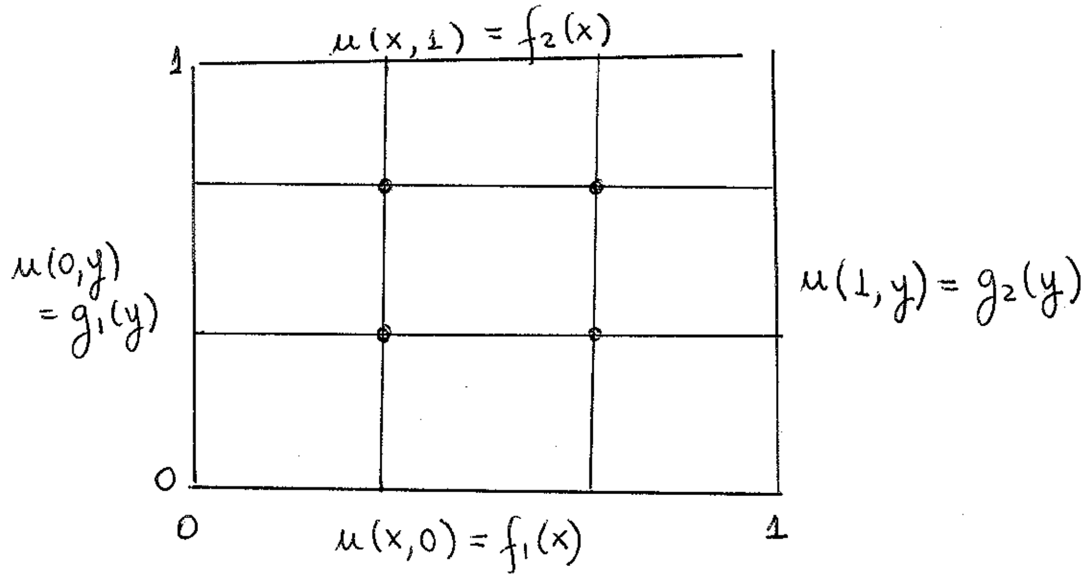
SOLUÇÃO NUMÉRICA PARA EQ. DE LAPLACE

Seja

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad \begin{matrix} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{matrix}$$

sujeito às condições de contorno

$$u(x,y) = \begin{cases} f_1(x), & y=0 \quad 0 \leq x \leq 1 \\ f_2(x), & y=1 \quad 0 \leq x \leq 1 \\ g_1(x), & x=0 \quad 0 \leq y \leq 1 \\ g_2(x), & x= \quad 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$$



Em cada ponto substituímos as derivadas por diferenças centrais

$$\frac{u(x+h,y) - 2u(x,y) + u(x-h,y)}{h^2} + \frac{u(x,y+h) - 2u(x,y) + u(x,y-h)}{h^2} + E = 0$$

$$4u(x,y) = u(x+h,y) + u(x-h,y) + u(x,y+h) + u(x,y-h)$$

$$u(x,y) = \frac{1}{4}\left[\qquad '' \qquad \right]$$

$$U_{ij}^{n+1} = \frac{1}{4}\left[U_{i+1,j}^{n} + U_{i-1,j}^{n} + U_{i,j+1}^{n} + U_{i,j-1}^{n} \right]$$

$n \to$ iteração
$i, j \to$ índices espaciais x, y

que corresponde ao método de JACOBI

Pode-se acelerar a convergência usando o método de Gauss-Seidel

De $i=1$ até $N-1$

{ De $j=1$ até $N-1$

$$\{ U_{ij} \leftarrow (U_{i+1,j} + U_{i-1,j} + U_{i,j-1} + U_{i,j+1})/4 \}$$

}

Ver também Numerical Recipes
Giordano - Comp. Physics

EQUAÇÕES HIPERBÓLICAS

$u_{tt} = c^2 u_{xx}$ eq. da onda

$$\frac{\delta_t^2 U_m^n}{k^2} = c^2 \frac{\delta_x^2 U_m^n}{h^2}$$

$$\frac{U_m^{n+1} - 2U_m^n + U_m^{n-1}}{k^2} = c^2 \frac{U_{m+1}^n - 2U_m^n + U_{m-1}^n}{h^2} + E$$

$$E = \mathcal{O}(k^2 + h^2)$$

estável se $0 < \frac{k^2 c^2}{h^2} \leqslant 1$

3 níveis

$$u(x,0) = \phi(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x)$$

Taylor

$$u(x,k) = u(x,0) + k\frac{\partial u}{\partial t} + k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$U_m^1 = U_m^0 + k\psi(mh) + \frac{k^2}{2} c^2 \phi_{xx}(mh)$$

Nota: A eq. $u_t \quad c u_x = 0$ também é hiperbólica e também pode ser discretizada para solução. Ver detalhes, implementações e análise em QUINNEY.