Estabilidade

Seja a eq. $y' = \lambda y$, $y(0) = 1$, onde λ é uma constante real. Mostre que se for aplicado o método de Euler então a solução de diferenças converge para a solução da equação diferencial à medida que o passo h tende a zero.

<u>Solução</u> Da equação acima, o método de Euler produz

$$y_{i+1} = y_i + h\lambda y_i = (1+h\lambda)\, y_i$$

que é uma relação estável somente se $|1+h\lambda| \leq 1$.

A solução geral pode ser expressa na forma

$$y_i = y_0 (1+h\lambda)^i \quad , \quad \text{com } y_0 = y(0) = 1$$

Para um valor fixo $t = t_i = ih$ a solução da equação diferencial é $y(t) = e^{\lambda t}$ para o qual a eq. correspondente é

$$\frac{i}{t\lambda} = n \rightarrow y(t) = \lim_{i\to\infty} \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{\lambda t} = e^{\lambda t}$$

$$y_i = \left(1 + \frac{t}{i}\lambda\right)^i$$

que converge para $y(t) = e^{\lambda t}$ quando $i \to \infty$. $(\equiv h \to 0)$

Note que se $\lambda < 0$ então a solução da equação diferencial tende a zero. Nesse caso, se h fosse escolhido tal que $1 + h\lambda < -1$ a equação cresceria cada vez mais com termos sucessivos alternando sinais e a solução de diferenças não terá nenhuma semelhança com a equação diferencial. Este fenômeno é chamado de instabilidade parcial.

Neste exemplo é necessário selecionar o tamanho do passo de tal forma que $1+h\lambda > -1$ $\left(h < \frac{2}{|\lambda|}\right)$ de forma a garantir que $y_i \to 0$ quando $i \to \infty$.
Se $\lambda > 0$ a relação de recorrência é estável.

<u>Exemplo</u> determine a região de estabilidade p/

$y' = -30y$, $y(0) = 1$, solução $y = e^{-30t}$

$$1 + h\lambda > -1$$

$$1 + h(-30) > -1$$

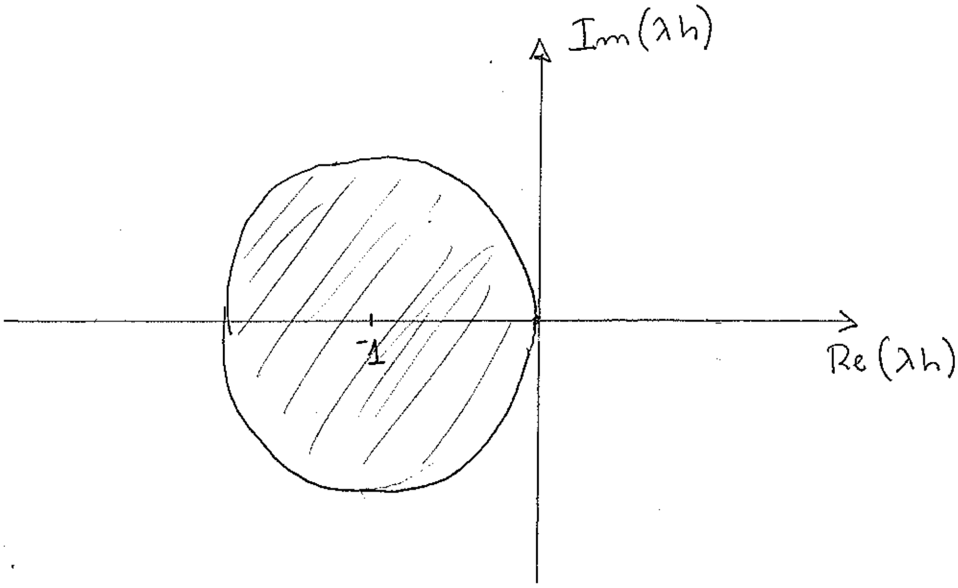
$$-30h > -2$$

$$h < \frac{2}{30} \approx 0.0666\ldots$$

t	$h = 0.1$ $1+\lambda h = -2.0$	$h = 0.01$ $1+\lambda h = 0.70$	$h = 0.001$ $1+\lambda h = 0.97$
0.0	1.000000	1.000000	1.000000
0.1	-2.000000	0.028248	0.047553
0.2	4.000000	0.000798	0.002612
⋮	⋮	⋮	⋮
0.5	-32.000000	0.1798×10^{-7}	0.2431×10^{-6}
1.0	1024.000000	0.3234×10^{-15}	0.5912×10^{-13}

A relação $1 + h\lambda > -1$ pode ser generalizada para λ complexo ($Re(\lambda) < 0$) na forma

$|1 + h\lambda| \leq 1$ que pode ser representado graficamente



Exercícios: i) Mostre que o método do trapézio é sempre estável p/ todo plano esquerdo $Re(\lambda h) < 0$.

ii) Mostre que a estabilidade do RK simples é dada por

$|1 + \lambda h + (\lambda h)^2/2| \leq 1$ (se λ é real, $-2 \leq \lambda h \leq 0$)

e para RK Clássico: $\left|1 + \lambda h + \frac{(\lambda h)^2}{2} + \frac{(\lambda h)^3}{6} + \frac{(\lambda h)^4}{24}\right| \leq 1$ (se λ real $-2{,}79 < \lambda h \leq 0$.

Método de passo único $\rightarrow$ Euler, Trapézio $y_{n+1} = \alpha y_n + h\left[\beta_0 f_{i+1} + \beta_1 f_1\right]$

Métodos de RK

$f_i \equiv f(t_i, y_i)$

<u>Métodos de Muitos passos ("Multi-steps")</u>

- Calcula-se y_{i+1} a partir de

y_i, y_{i-1}, y_{i-2} e $f_{i+1}, f_i, f_{i-1}, f_{i-2} \ldots$

- Fórmula geral de métodos de m passos linear

$$y_{i+1} = \alpha_1 y_i + \alpha_2 y_{i-1} + \alpha_3 y_{i-3} + \ldots + h\left[\beta_0 f_{i+1} + \beta_1 f_1 + \beta_2 f_{i-1} + \ldots\right]$$

ou

$$y_{i+1} = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j y_{i+1-j} + h \sum_{j=0}^{m} \beta_j f_{i+1-j}$$

Se $\beta_0 = 0 \rightarrow$ método explícito

$\beta_0 \neq 0 \rightarrow$ método implícito

A escolha dos parâmetros α e β depende de argumentos de estabilidade (cf. Quinney). Também podem ser determinados a partir de expansões fazendo um paralelo com fórmulas de Newton-Cotes abertas e fechadas

<u>Exemplos:</u> Explícito (Adams-Bashfort) global

$m=1 \quad y_{i+1} = y_i + h f_i \quad$ Euler $\quad O(h)$

$m=2 \quad y_{i+1} = y_i + h\left[3 f_i - f_{i-1}\right]/2 \quad O(h^2)$

$m=3 \quad y_{i+1} = y_i + h\left[23 f - 16 f_{i-1} + 5 f_{i-2}\right]/12 \quad O(h^3)$

Implícito (Adams-Moulton)

global

$m=1 \quad y_{i+1} = y_i + h\,[f_{i+1}+f_i]/2$ (trapézio) $\quad \mathcal{O}(h^2)$

$m=2 \quad y_{i+1} = y_i + h\,[5f_{i+1} + 8f_i - f_{i-1}]/12 \quad \mathcal{O}(h^3)$

$m=3 \quad y_{i+1} = y_i + h\,[9f_{i+1} + 19f_i - 5f_{i-1} + f_{i-2}] \quad \mathcal{O}(h^4)$

Métodos Predictor - Corrector

São métodos de muitos passos que usam um método explícito (predictor) para uma estimativa de y_{i+1} que será usado num método implícito (corrector) como chute inicial no método iterativo.

Exemplos

Predictor | **Corrector**

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[3f_i - f_{i-1}]$$

$$y_{i+1} = y_i + h\,[f_{i+1} + f_i]/2 \quad \text{(I)} \quad \mathcal{O}(h^2)$$

$$y_{i+1} = y_{i-3} + \frac{4}{3}[2f_i - f_{i-1} + 2f_{i-2}]$$

$$y_{i+1} = y_{i-1} + h\,[f_{i+1} + 4f_i + f_{i-1}]/3$$

(Milne-Simpson) $\mathcal{O}(h^3)$

$$y_{i+1} = y_i + h[55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3}]/24$$

$$y_{i+1} = y_i + h\,\frac{[9f_{i+1} + 19f_i - 5f_{i-1} + f_{i-2}]}{24}$$

(Adams) $\mathcal{O}(h^4)$

Exemplo Encontre a solução de $y' = y^2$ sujeito a $y(0)=1$ usando o método de predictor-corrector dado pela eq. (I). solução exata $y(t) = \frac{1}{1-t}$

Solução: O predictor do par é um método de dois passos e portanto necessitamos de um valor inicial adicional. Usando RK Clássico, fazendo $h=0.1$ encontramos $y(0.1) \approx y_1 = 1.1111111$

Para encontrar $y(0.2) \approx y_2$ usamos o predictor

$$y_2 = y_1 + \frac{0.1}{2}\left[3y_1^2 - y_0^2\right] = 1.1111111 + 0.05\left(3 \times 1.1111111^2 - 1^2\right)$$
$$= 1.2462962 \equiv y_2^P$$

e corrigimos o valor

$$y_2^{(k+1)} = y_1 + 0.05\left[\left(y_2^{(k)}\right)^2 + y_1^2\right], \quad y_2^{(0)} = y_2^P = 1.2462962$$

que produzirá a sequência

$$y_2^{(1)} = 1.2505022$$
$$^{(2)} = 1.2510272$$
$$= 1.2510929$$
$$= 1.2511011\,9$$
$$= 1.25110222$$
$$= 1.25110234$$
$$= 1.25110236$$
$$= 1.25110236$$

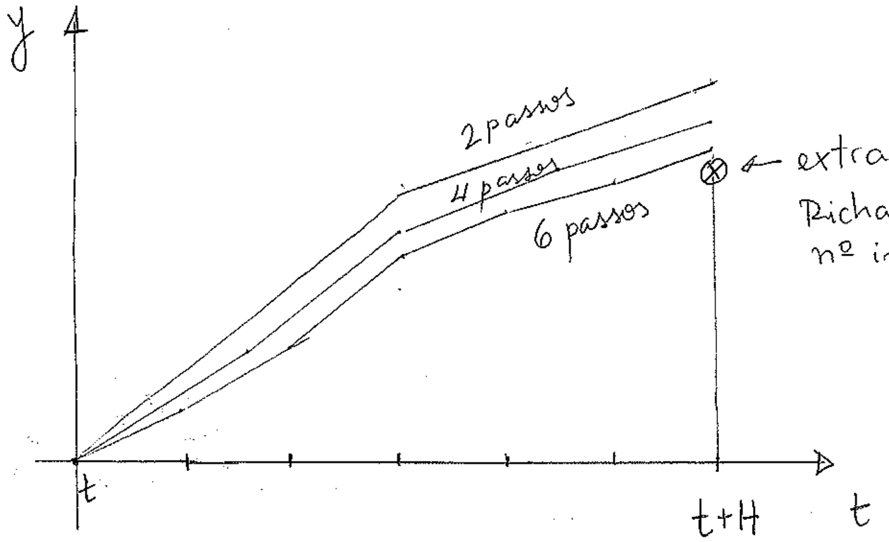
Nota: Em geral diminuindo o tamanho do passo são necessárias menos iterações no corrector. Para h suficientemente pequeno apenas uma aplicação do corrector é necessária. Uma discussão quantitativa detalhada pode ser encontrada em Quinney.

∴ Métodos de 1 passo
Métodos de RK
∴ Métodos de Muitos passos (P.C.)

Método de Extrapolação

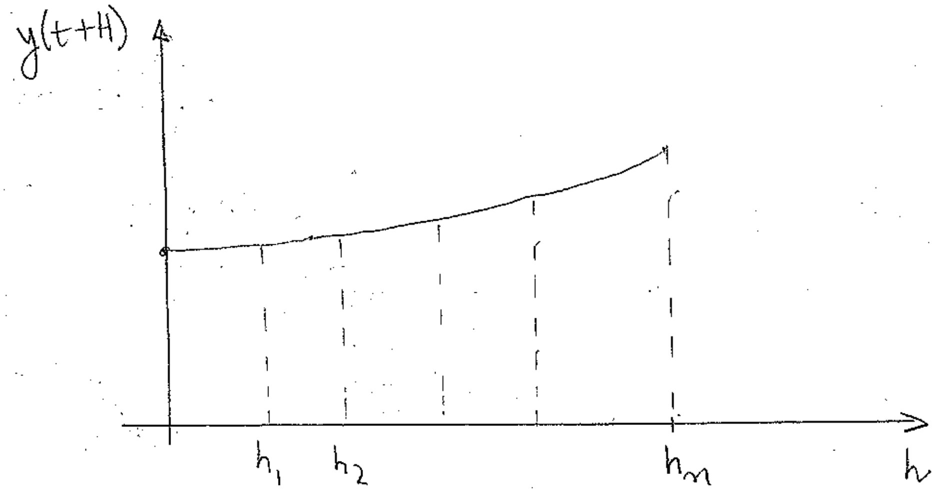
Dados $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$

Calcula-se $y(H)$ para vários passos usando um método numérico



$H = nh$
↓
nº de passos

Pode-se então construir o gráfico:



$h_n = \dfrac{H}{n}$

A partir dos pontos deste gráfico pode-se extrapolar o valor $y(t+H)$ no limite qdo $h = 0$, usando spline Lagrange ou mínimos quadrados.

Uma questão é como deve ser escolhida a sequência de subdivisões e qual o método para extrapolação. Burlish e Stoer propuseram extrapolação com o uso de funções racionais. Veja mais detalhes no Numerical Recipes.

Escolha do Método

Não se pode dizer qual o método "melhor" para resolver uma equação diferencial. A resposta a essa questão depende

- do problema em questão
- da precisão desejada
- da simplicidade da implementação
- das facilidades de software e hardware

Métodos Adaptativos

— São usados em problemas onde há períodos de rápida evolução seguidos por evoluções lentas, ou vice-versa.
e.g. explosão de uma supernova, big-bang

— Podem tornar a evolução ordens de magnitude mais eficiente.

— São métodos que ajustam o passo de acordo com uma estimativa do erro cometido.
Métodos tipo Predictor-Corrector não são muito indicados pois dependem de ter os mesmos tamanho de passos anteriores. Métodos de RK se adequam bem a este esquema.

Uma maneira simples de estimar o erro é calcular $y(t+h)$ e $y(t+2\frac{h}{2})$, onde no segundo evolui-se pois dois passos de tamanho $\frac{h}{2}$.
Uma estimativa do erro será dada por

$$\Delta = y(t+h) - y\left(t+2\frac{h}{2}\right)$$

No caso do uso do RK clássico, em vez de calcularmos $y(t+2\frac{h}{2})$ podemos calcular

$$k_5 = h f\left(t+\frac{3h}{4}, (5k_1+7k_2+13k_3-k_4)/32\right)$$

então o termo $2h(-k_1+3k_2+3k_3+3k_4-8k_5)/3$ fornecerá uma aproximação p/ o erro local de truncamento. Alternativamente podemos usar RK-Merson ou Runge-Kutta-Fehlberg.

Vamos supor que desejamos manter o erro sempre menor que um valor Δ_0 fixado.

Se usarmos um método de 4ª ordem, então

passo $h \rightarrow$ produz erro local $\Delta \propto h^5$

novo passo $h \rightarrow$ deverá produzir erro local $\Delta_0 \propto h_{novo}^5$

$$\frac{h_{NOVO}^5}{h^5} = \frac{\Delta_0}{\Delta} \longrightarrow h_{novo} = h \left(\frac{\Delta_0}{\Delta}\right)^{1/5}$$

Assim se o passo provocar um erro $\Delta > \Delta_0$ o passo será reduzido e repete-se o procedimento de calculo de Δ c/ o novo passo até que $\Delta \leq \Delta_0$

Se $\Delta < \Delta_0$ o passo será incrementado.

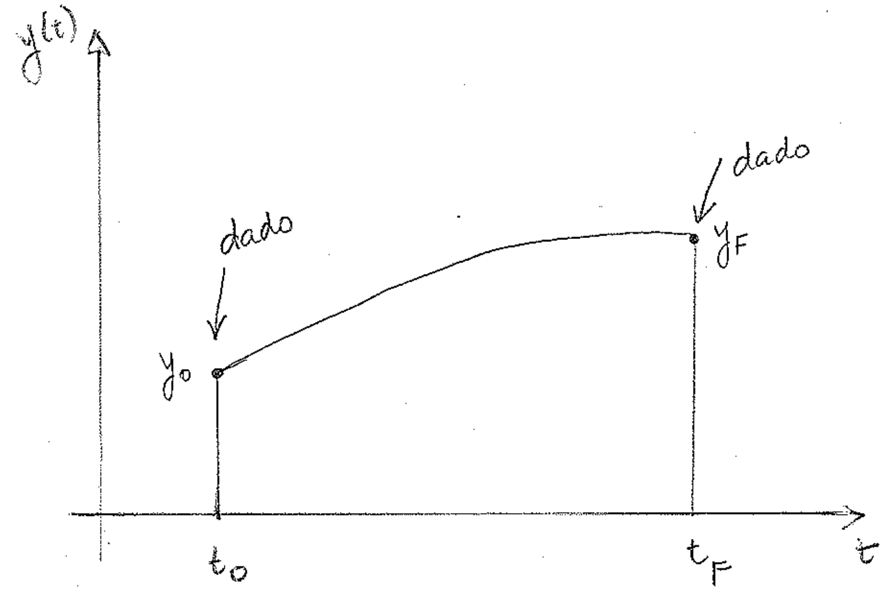
Pode-se fazer Δ_0 dependente de y de forma que o erro relativo seja levado em conta p/ efeito de decisão de aumento ou redução de passos. Mais detalhes com implementações veja em Numerical Recipes.

<u>Nota</u>: Métodos Adaptativos só devem ser empregados quando realmente necessário!

PROBLEMAS DE CONDIÇÕES DE CONTORNO "BOUNDARY VALUE PROBLEMS"

Temos estudado casos onde eram dadas as condições iniciais, i.e., problema de valor inicial.

No caso de equações de 2ª ordem $y'' = f(t, y, y')$ são necessárias duas condições iniciais $y(t_0)$ e $y'(t_0)$ para realizar a evolução. Frequentemente encontramos problemas que em vez de $y'(t_0)$ é fornecido $y(t_F) = y_F$ i.e., o valor final de y após certo tempo é fixado.



O problema é proposto como: encontrar $y(t)$ que satisfaça $y'' = f(t, y, y')$ tal que $y(t_0) = y_0$
$y(t_F) = y_F$

"TWO POINT BOUNDARY VALUE PROBLEM"

Uma solução para o problema é o chamado método de chutes ("shooting method") que descreveremos a seguir

Método de chute "SHOOTING METHOD"

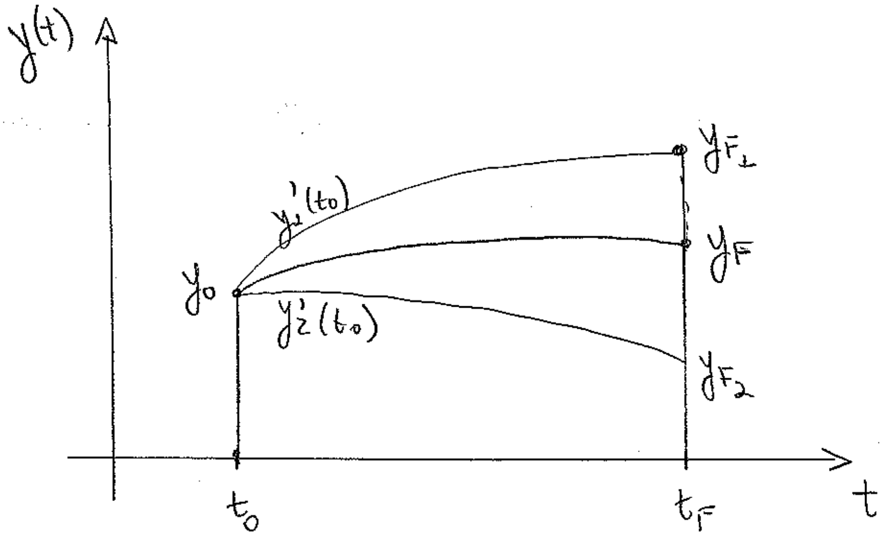
Devemos encontrar $y'(t_0)$ de tal forma que $y(t_F) =$

Ou seja devemos resolver a equação

$$\mathcal{F}(y'(t_0)) = E(y'(t_0)) - y_F = 0 \qquad \text{(I)}$$

onde $E(y'(t_0)) = y(t_F)$ corresponde à evolução de $y(t_0)$ até encontrar $y(t_F)$ por um método numerico (e.g. RK).

Podemos chutar dois valores iniciais $y_1'(t_0)$ e $y_2'(t_0)$ obtendo após evolução y_{F_1} e y_{F_2}.



$y_1'(t_0)$ e $y_2'(t_0)$ podem então dar início ao método de secantes para a solução da eq. I, $\mathcal{F}(y'(t_0)) = 0$, obtendo-se

$$y'_{k+1} = y'_k - \frac{\mathcal{F}(y'_k)(y'_k - y'_{k-1})}{\mathcal{F}(y'_k) - \mathcal{F}(y'_{k-1})}$$

ou

$$\boxed{y'_{k+1} = y'_k - \frac{(y_{F_k} - y_F)(y'_k - y'_{k-1})}{y_{F_k} - y_{F_{k-1}}}}$$ onde aqui $y' \equiv y'(t_0)$

Assim com algumas evoluções até t_F podemos determinar $y'(t_0)$ tal que $y(t_F) = y_F$, e o problema de valor de contorno foi transformado em um problema de valor inicial.

Alternativamente existem problemas de eq. de 2ª ordem nos quais é dado $y'(t_0)$ e $y(t_F)$ devendo ser determinado $y(t_0)$. A solução é análoga.

Condições de contorno onde é dado o valor da função são chamadas de condições de contorno de Dirichlet. Se for dado o valor da derivada da função então ela é chamada de c.c. de ~~Hen~~ Neumann.

Diferenciação Numérica "Numerical Differentiation"

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

Expandindo $f(x+h)$ em série de Taylor

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + O(h^2)$$

$$f(x+h) - f(x) = hf'(x) + O(h^2)$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) + O(h)$$

ou

$$\boxed{f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + O(h)}$$

"FORWARD DIFFERENCE"

analogamente podemos obter

$$\boxed{f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + O(h)}$$

"BACKWARD DIFFERENCE"

combinando as expansões $f(x+h)$ e $f(x-h)$ temos

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \dots$$

$$\ominus \quad f(x-h) = f(x) - f'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \dots$$

$$f(x+h) - f(x-h) = 2hf'(x) + O(h^3)$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + O(h^2)}$$

"CENTERED DIFFERENCE"

Usando essa sistemática pode-se obter fórmulas com mais pontos

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \dots$$

$$f(x+2h) = f(x) + 2hf'(x) + \frac{(2h)^2}{2!}f''(x) + \frac{(2h)^3}{3!}f'''(x) + \dots$$

Multiplicando a 1ª eq. por 4 e subtraindo a segunda

$$4f(x+h) - f(x+2h) = 3f(x) + 2hf'(x) + O(h^3)$$

$$\frac{-3f(x) + 4f(x+h) - f(x+2h)}{2h} = f'(x) + O(h^2)$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{-3f(x) + 4f(x+h) - f(x+2h)}{2h} + O(h^2)}$$

"FORWARD" 2nd order

Desta forma ~~podemos~~ com mais pontos obter aproximações de ordem superior para "FORWARD", "BACKWARD" E "CENTERED" "DIFFERENCE".

Ver tabelas em Abramowitz & Stegun (1964)

<u>Derivada $f''(x)$</u>

$$+\left\downarrow\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + O(h^4) \\ f(x-h) &= f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{3!}f'''(x) + O(h^4) \end{aligned}\right.$$

$$f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + h^2 f''(x) + O(h^4)$$

$$\frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} = f''(x) + O(h^2)$$

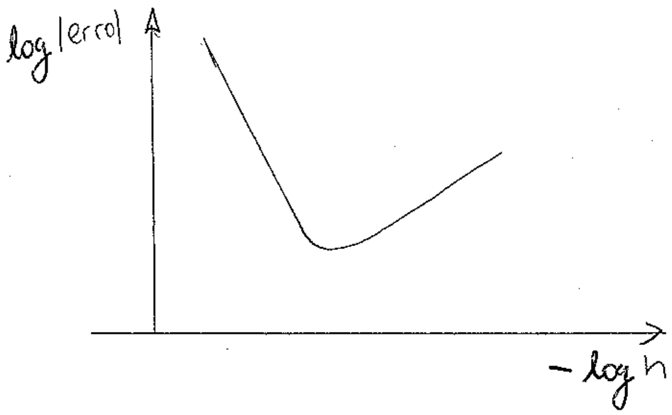
$$\boxed{f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + O(h^2)}$$

Exercício Faça um estudo de convergência para a formula de derivação para frente ("FORWARD DIFFERENCE") com $f(x) = x^3$ no ponto $x = 1$.

Solução PRECISÃO SIMPLES

$$|\text{erro}| = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \underbrace{f'(x)}_{3x^2}$$

h	$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$	$\lvert\text{erro}\rvert$
10^{-1}	3.31001	0.31
10^{-2}	3.0300097	$\sim 3 \times 10^{-2}$
10^{-3}	3.003121	$\sim 3 \times 10^{-3}$
10^{-4}	3.000498	$\sim 5 \times 10^{-4}$
10^{-5}	3.0040074	$\sim 4 \times 10^{-3}$
10^{-6}	2.861023	~ 0.1389
10^{-7}	3.576279	~ 0.5762
10^{-8}	0	3



Exercício: Refaça usando a relação de diferença centrada ("CENTERED DIFFERENCE").

Método de Diferenças Finitas "FINITE DIFFERENCE METHODS"

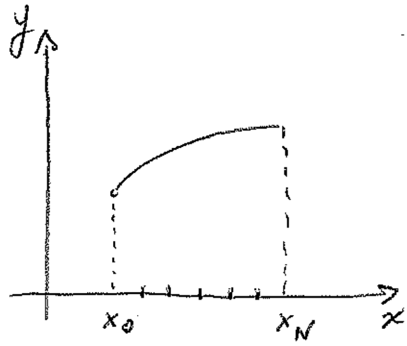
Vamos inicialmente considerar o problema de valor de contorno na forma

$$y'' = \underbrace{p(x)\,y' + q(x)\,y + r(x)}_{f(x,y,y')} \qquad \begin{array}{l} y(x_0) = y_0 = \alpha \\ y(x_N) = y_N = \beta \end{array}$$

Nesse caso, usando as aproximações da diferenciação

temos

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} - p_i\,\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} - q_i\,y_i = r_i$$



onde $p_i \equiv p(x_i)$, $q_i \equiv q(x_i)$ e $r_i \equiv r(x_i)$, $x_i = x_0 + ih$

que pode ser escrito na forma

$$a_i\,y_{i-1} + b_i\,y_i + c_i\,y_{i+1} = h^2 r_i \quad , \quad i = 1, 2, \ldots N-1$$

$N-1$ equações

onde

$$a_i = 1 + \frac{h}{2}p_i \quad , \quad b_i = -2 - h^2 q_i \quad , \quad c_i = 1 - \frac{h}{2}p_i$$

As $N-1$ equações podem ser escritas na forma matricial

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & \cdot & & & \\ & & \cdot & & \\ & & a_{N-2} & b_{N-2} & c_{N-2} \\ & & & a_{N-1} & b_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{N-2} \\ y_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h^2 r_1 - a_1\alpha \\ h^2 r_2 \\ \vdots \\ h^3 r_{N-2} \\ h^2 r_{N-1} - c_{N-1}\beta \end{bmatrix}$$

O sistema está na forma $AY = d$, onde A é uma matriz tridiagonal que pode ser resolvida pela decomposição LU.

Ex: Seja o problema linear

$$y'' = \underbrace{-\frac{2}{x}}_{p} y' + \underbrace{\frac{2}{x^2}}_{q} y + \underbrace{\frac{\operatorname{sen}(\ln(x))}{x^2}}_{r} \qquad 1 \leq x \leq 2, \quad \begin{matrix} y(1) = 1 \\ y(2) = 2 \end{matrix}$$

Solução

Colocando na forma matricial obteremos

i	x_i	y_i
0	1.	1.00000000
1	1.1	1.09260052
2	1.2	1.18704313
3	1.3	1.28333687
4	1.4	1.38140205
5	1.5	1.48112026
6	1.6	1.58235990
7	1.7	1.68498902
8	1.8	1.78888175
9	1.9	1.89392110
10	2.0	2.00000000

Vamos agora analisar o caso mais geral de sistemas não lineares na forma

$$y'' = f(x, y, y') \quad \text{sujeito a} \quad \begin{array}{l} y(x_0) = \alpha \\ y(x_N) = \beta \end{array} \qquad x_i = x_0 + ih$$

escrevendo na forma de diferenças

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} = f\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}\right), \quad i = 1, N-1$$

ou na forma matricial

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \bigcirc & \\ & 1 & -2 & & & \\ & \bigcirc & & \ddots & -2 & 1 \\ & & & & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{N-2} \\ y_{N-1} \end{bmatrix} = h^2 \begin{bmatrix} f\left(x_1, y_1, \frac{y_2 - y_0}{2h}\right) - \alpha \\ f\left(x_2, y_2, \frac{y_3 - y_1}{2h}\right) \\ \vdots \\ f\left(x_{N-2}, y_{N-2}, y_{N-1} - y_{N-3}\right) \\ f\left(x_{N-1}, y_{N-1}, \frac{y_N - y_{N-2}}{2h}\right) - \beta \end{bmatrix}$$

Para solução do sistema de equações pode-se usar um método iterativo que converge para h suficientemente pequeno (cf. Quinney) mas a convergência é lenta.

Podemos reescrever o problema na forma

$$F(Y) = AY - h^2 f(x, Y) = 0$$

e resolver usando o método de Newton

$$J\left[y^{(k+1)} - y^{(k)}\right] = -F\left(y^{(k)}\right)$$, onde k é o índice de iteração,

$$F(y) = \begin{bmatrix} F_1(y) \\ F_2(y) \\ \vdots \\ F_{N-1}(y) \end{bmatrix} ; \quad J = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_{N-1}} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial y_{N-1}} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial F_{N-1}}{\partial y_1} & \frac{\partial F_{N-1}}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_{N-1}}{\partial y_{N-1}} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial y_j} = \begin{cases} 1 + \frac{h}{2}\frac{\partial f}{\partial y'}, & j = i-1 \\ -2 - h^2 \frac{\partial f}{\partial y}, & j = i \\ 1 - \frac{h}{2}\frac{\partial f}{\partial y'}, & j = i+1 \\ 0, & \text{outros casos} \end{cases}$$

$$a_i^{(k)} = 1 + \frac{h}{2}\frac{\partial f}{\partial y'}\left(x_i, y_i^{(k)}, \frac{y_{i+1}^{(k)} - y_{i-1}}{2h}\right)$$

$$b_i^{(k)} = -2 - h^2 \frac{\partial f}{\partial y}\left(x_i, y_i^{(k)}, \frac{y_{i+1}^{(k)} - y_{i-1}^{(k)}}{2h}\right)$$

$$c_i^{(k)} = 1 - \frac{h}{2}\frac{\partial f}{\partial y'}\left(x_i, y_i^{(k)}, \frac{y_{i+1}^{k} - y_{i-1}^{(k)}}{2h}\right)$$

que fornece

$$J = F_y\left(y^{(k)}\right) = \begin{bmatrix} b_1^{(k)} & c_1^{(k)} & & & \\ a_2^{(k)} & b_2^{(k)} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & a_{N-2}^{(k)} & b_{N-2}^{(k)} & c_{N-2}^{(k)} \\ & & & a_{N-1}^{(k)} & b_{N-1}^{(k)} \end{bmatrix}$$

$$J\,\Delta y^{(k)} = -F\left(y^{(k)}\right)$$

Como a matriz J é tridiagonal o sistema pode ser resolvido por decomposição LU obtendo $\Delta y^{(k)}$ que fornece $y^{(k+1)} = y^{(k)} + \Delta y^{(k)}$ e assim por diante.

cf. BURDEN & FAIRES