Estimação em modelos lineares generalizados geoestatísticos por máxima verossimilhança baseada na aproximação de Laplace

Caio Gomes Alves

Orientador: Prof. Dr. Paulo Justiniano Ribeiro Júnior

Sumário I

Section 1

Geoestatística

Geoestatística

Geoestatística refere-se ao conjunto de métodos e modelos utilizados para analisar dados que seguem a seguinte estrutura:

- Vetor de observações: $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^\top$;
- Vetor de posições: $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^\top$;
- As observações foram coletadas em uma região A do espaço, mas poderiam ter sido medidas em qualquer ponto arbitrário de A.

Cada observação y_i é dada como uma realização parcial de um processo espacial contínuo não observado, denotado $S(x)$, nos pontos amostrais x_i.

Modelagem Geoestatística

Usualmente, considera-se que esse processo seja estocástico, com distribuição Normal, condicional em $S(x)$.

O objetivo principal da modelagem geoestatística é recuperar $S(x)$, para ser possível fazer predição (em pontos não amostrados) e estimação (médias, medianas, tendências espaciais) (Cressie 1993).

Os modelos geoestatísticos podem ser classificados como modelos de efeitos aleatórios, com alguma estrutura de dependência espacial entre eles (Isaaks e Srivastava 1989).

Modelos Lineares Generalizados Geoestatísticos

Em muitos casos, a distribuição das observações de um processo geoestatístico não possuem respostas gaussianas, como contagens e proporções.

Quando isso ocorre, usamos o seguinte modelo hierárquico para denotar os modelos lineares generalizados geoestatísticos:

$$\begin{aligned} [Y(x)|S(x)] &\sim f(.;\mu(x),\psi) \\ g(\mu(x)) &= D\beta + S(x) \\ S(x) &= \sigma U(x;\phi) + \tau Z \end{aligned} \tag{1}$$

Modelos Lineares Generalizados Geoestatísticos

Os efeitos aleatórios espacialmente correlacionados são dados por $\sigma U(x;\phi)$, onde σ^2 (*sill*) denota a variância dos efeitos aleatórios e $U(x;\phi)$ é a variância unitária de um Campo Gaussiano Aleatório, com função de correlação $\rho(u,\phi)$.

Os efeitos aleatórios não correlacionados são dados por $\tau Z \sim N(0,\tau^2 I)$, onde τ^2 (*nugget*) representa as variações não espaciais e de micro escala no modelo.

Um dos principais objetivos da Geoestatística é estimar o vetor $\theta = (\beta, \sigma^2, \tau^2, \phi, \psi)$. Em *Model-based Geostatistics* (Diggle e Ribeiro Jr. 2007) é proposta uma abordagem baseada na maximização da log-verossimilhança dos modelos.

Verossimilhança marginal

A aplicação de métodos baseados em verossimilhança a modelos geoestatísticos para dados não-gaussianos é complicada e possui dificuldades computacionais, que surgem devido à alta dimensionalidade do vetor de efeitos aleatórios $S(x) = \{S(x_1), S(x_2), \dots, S(x_n)\}$.

A maximização da verossimilhança marginal do modelo é obtida integrando os efeitos aleatórios da distribuição conjunta, definida na Equação 1, como segue:

$$L_p(\theta; y(x)) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y(x)|S(x)) f(S(x)) dS(x) \tag{2}$$

Verossimilhança Marginal

Exceto nos casos em que a distribuição de $f(y(x)|S(x))$ seja gaussiana, essa verossimilhança marginal é analiticamente intratável, por se tratar do produto de duas distribuições diferentes.

Como os valores do vetor $S(x)$ são correlacionados, a integral da Equação 2 possui tantas dimensões quanto observações na amostra coletada. Assim, métodos de integração numérica convencionais (Gauss-Hermite, quadratura gaussiana) não são computacionalmente viáveis.

Métodos Bayesianos

Outros métodos para aproximar a Equação 2 foram propostos, e os mais prevalentes são os baseados em integração de Monte Carlo (Geyer e Thompson (1992), Geyer (1994) e Zhang (2002)).

Ole F. Christensen (2004) descreve uma metodologia baseada em aproximações por algoritmo MCMC para simular da distribuição condicional de $S(x)$. Apesar de bem desenvolvidos, esses métodos são computacionalmente intensivos, lentos na estimação e precisam ter a convergência monitorada.

Aproximação de Laplace

Em *Practical likelihood analysis for spatial generalized linear mixed models* (Bonat e Ribeiro Jr (2016)) é proposta uma abordagem baseada na aproximação de Laplace (Tierney e Kadane (1986)), normalmente utilizada para análise de dados longitudinais.

O método é utilizado para aproximar integrais da seguinte forma:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(\varrho(u)\, du\right) \approx (2\pi)^{n/2} \left|-\varrho''(\hat{u})\right|^{-1/2} \exp\left(\varrho(\hat{u})\right) \qquad (3)$$

Em que $\varrho(u)$ é uma função unimodal e limitada de uma variável u n-dimensional.

Aproximação de Laplace

Assumindo que a distribuição $f(y(x)|S(x))$ seja da família exponencial, podendo ser escrita da seguinte forma:

$$f(y(x)|S(x);\beta) = \exp\{y(x)^\top(D\beta + S(x)) - 1^\top b(D\beta + S(x)) + 1^\top c(y(x))\} \tag{4}$$

E considerando a distribuição Normal Multivariada, definida como:

$$f(S(x);\Sigma) = (2\pi)^{-n/2}|\Sigma|^{-1/2}\exp\left\{-\frac{1}{2}S(x)^\top\Sigma^{-1}S(x)\right\} \tag{5}$$

Podemos ver que a Equação 3 é o produto das Equação 4 e Equação 5.

Aproximação de Laplace

Assim, temos que a aproximação de Laplace para a log-verossimilhança do modelo é dada por:

$$\begin{aligned} l(\theta; y(x)) =& \frac{n}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2}\log\left|\mathrm{diag}\left\{b''(D\beta + \hat{s}(\theta))\right\} + \Sigma^{-1}\right| + \\ & y(x)^\top(D\beta + \hat{s}(\theta)) - 1^\top b(D\beta + \hat{s}(\theta)) + \\ & 1^\top c(y(x)) - \frac{n}{2}\log(2\pi) - \\ & \frac{1}{2}\log|\Sigma| - \frac{1}{2}\hat{s}(\theta)^\top\Sigma^{-1}\hat{s}(\theta) \end{aligned} \tag{6}$$

Otimização

A otimização da Equação 6 é realizada com o modelo parametrizado como $\theta = (\beta, \log(\sigma^2), \log(\phi), \log(\tau^2), \log(\psi))$, e sendo $\hat{\theta}$ o estimador de máxima verossimilhança de θ, o mesmo tem distribuição assintótica dada por:

$$\hat{\theta} \sim N\left(\theta, I_O^{-1}(\hat{\theta})\right) \tag{7}$$

Com $I_O^{-1}(\hat{\theta})$ denotando a matriz de informação observada de θ.

Section 2

Implementação Computacional

Implementação Inicial

Junto ao artigo *Practical likelihood analysis for spatial generalized linear mixed models*, os autores disponibilizaram o código em R utilizado para ajuste de modelos lineares generalizados geoestatísticos por meio da aproximação de Laplace.

O objetivo deste trabalho é a otimização do código proposto, e posterior análise de duas bases de dados reais e um estudo de simulação, utilizando as funções criadas.

Maximização

Para montar a matriz de covariância espacial Σ dos dados (Equação 1), foi criada a função `monta.sigma`, que utiliza a função `geoR::varcov.spatial` (Ribeiro Jr et al. (2024)).

Para a maximização da Equação 3 foi implementada a função `newton.raphson`, que se utiliza das funções auxiliares `Q.b`, `Q.b.grad` e `Q.b.hess`, que representam $\varrho(S(x))$, $\varrho'(S(x))$ e $\varrho''(S(x))$, respectivamente.

Avaliação da Log-Verossimilhança

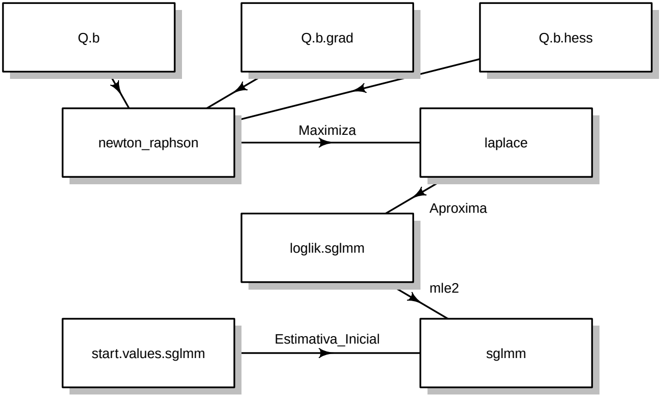
A avaliação da log-verossimilhança do modelo é feita usando a função `loglik.sglmm`, que retorna o negativo da matriz de informação observada e as estimativas dos parâmetros.

Por dentro, a função `loglik.sglmm` chama a função `laplace`, que retorna a aproximação a partir dos parâmetros informados. Para que a aproximação seja eficiente, é necessário que a estimativa inicial seja suficientemente boa, por isso foi implementada a função `start.values.sglmm` para estimar θ inicial, a partir de uma heurística fornecida pelos autores.

Otimização da Log-Verossimilhança

A etapa de otimização é feita pela função `bbmle::lme2` (Bolker e R Development Core Team (2023)), que faz a otimização numérica da função `loglik.sglmm`, utilizando as funções denotadas anteriormente. Tudo isso é feito dentro da função `sglmm`, que retorna uma lista com os valores de $\widehat{\theta}$, os valores preditos para os efeitos aleatórios de cada ponto amostral, e o modelo maximizado (um objeto `mle2`).

Diagrama


Q.b
Q.b.grad
Q.b.hess
newton_raphson
Maximiza
laplace
Aproxima
loglik.sglmm
mle2
start.values.sglmm
Estimativa_Inicial
sglmm

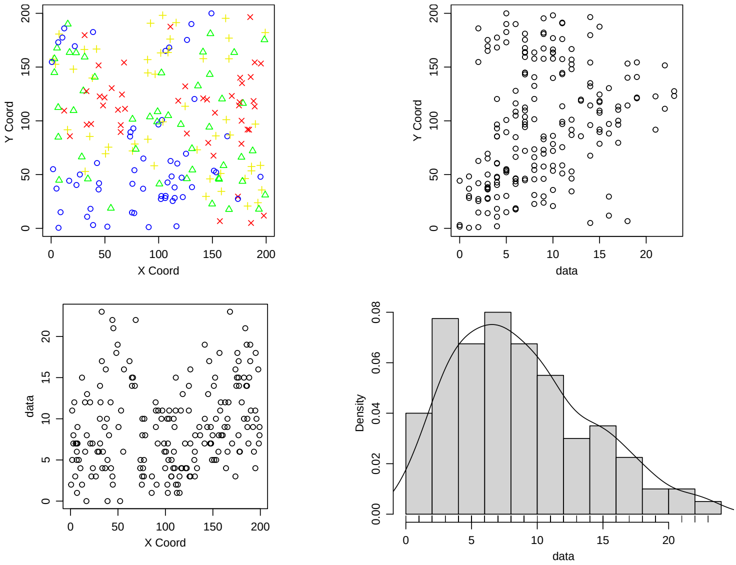
Exemplo de Ajuste

Considere o objeto `sim_df`, que foi simulado de um processo geoestatístico de Poisson, com `x1` e `x2` sendo as coordenadas dos pontos amostrais, e `y` sendo a variável de contagem. As primeiras dez linhas de `sim_df` são:

```
head(sim_df, 5)
```

```
         x1        x2  y
1  75.73466  72.02277 10
2 199.10033  31.01889  8
3  85.55225  36.85684  1
4  10.43933 177.45267  4
5  73.45251  85.40662  4
```

Exemplo de Ajuste



Exemplo de Ajuste

As estimativas iniciais para os parâmetros são obtidas pela função `start.values.sglmm`, conforme segue:

```
# Valores iniciais para theta:
(inicial_simul <- start.values.sglmm(
    y ~ 1,
    family="poisson",
    data = sim_df,
    coords = sim_df[, 1:2],
    nugget = T,
    offset = rep(1, dim(sim_df)[1])
))
```

```
'log Lik.' -694.9307 (df=1)

(Intercept)    logsigma      logphi      logtau
  2.1815468  -0.9605237   3.2769167  -3.2631087
```

Exemplo de Ajuste

O modelo então é ajustado pela função `sglmm`, que retorna na posição 9 o modelo estimado:

```
# Ajuste do modelo:
fit_sglmm <- sglmm(
    y ~ 1, cov.model = "matern", kappa = 2,
    inits = inicial_simul, data = sim_df,
    coords = sim_df[, 1:2], nugget = T,
    family = "poisson"
)

# Estimativas pontuais dos parâmetros:
coef(fit_sglmm[[9]])
```

```
(Intercept)   logsigma2      logphi     logtau2
  1.9146920  -0.9796929   3.5930527  -2.9794818
```

Section 3

Aplicação a Dados Reais

Base de Dados Weed

A base de dados `Weed`, disponibilizada no pacote `geoCount`, consiste na contagem de ervas daninhas em uma plantação da fazenda Bjertorp, no sudoeste da Suécia. Os dados possuem as coordenadas (`x1` para L-O e `x2` para N-S), a contagem exata de ervas daninhas naquele ponto amostral, e a estimativa da contagem, obtida por meio de um software de detecção de imagens.

Base de Dados Weed

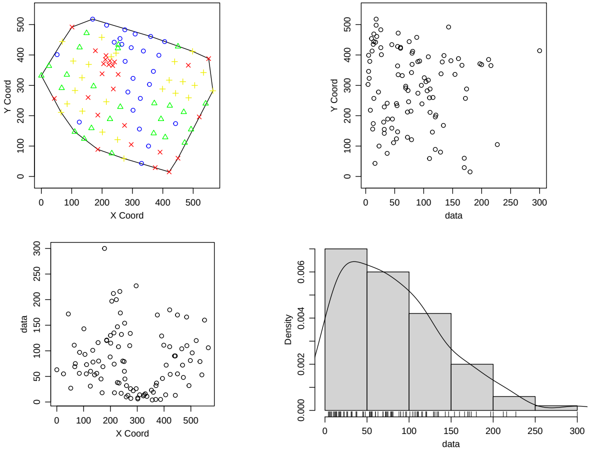


Figura 1: Gráfico da base Weed

Ajuste Inicial

Foi realizado o ajuste utilizando a função `sglmm`, considerando a distribuição de Poisson para a resposta, com diferentes funções de covariância espacial, para verificar qual melhor ajusta os dados.

Tabela

Modelo	$\hat{\beta}_0$	$\log(\widehat{\sigma^2})$	$\log(\hat{\phi})$	$\log(\widehat{\tau^2})$	logLik
Exponencial $+ \tau^2$	4.0687	-0.0859	4.2546	-8.4476	-518.6567
Matèrn$(\kappa = 1) + \tau^2$	4.0415	-0.1347	3.6391	-3.5915	-518.1001
Matèrn$(\kappa = 1.5) + \tau^2$	4.0336	-0.1838	3.3540	-2.8767	-518.2936
Matèrn$(\kappa = 2) + \tau^2$	4.0297	-0.2172	3.1676	-2.5945	-518.5377
Esférico $+ \tau^2$	4.1464	0.8799	5.9958	-2.9536	-521.6954
Exponencial	4.0686	-0.0856	4.2548	-	-518.6550
Matèrn$(\kappa = 1)$	4.0375	-0.1082	3.5835	-	-518.2112
Matèrn$(\kappa = 1.5)$	4.0258	-0.1281	3.2410	-	-518.8948
Matèrn$(\kappa = 2)$	4.0204	-0.1421	3.0185	-	-519.6152
Esférico	4.0260	0.1513	5.1439	-	-518.4223

Tabela 1: Estimativas dos parâmetros

Anova

```r
anova(fit_weed_1[[9]],
      fit_weed_1_2[[9]])
```

```
Likelihood Ratio Tests
Model 1: fit_weed_1[[9]], [loglik.sglmm]: (Intercept)+logs
          logtau2
Model 2: fit_weed_1_2[[9]], [loglik.sglmm]: (Intercept)+log
  Tot Df Deviance  Chisq Df Pr(>Chisq)
1      4   1036.2
2      3   1036.4 0.2221  1     0.6374
```

Perfis de Verossimilhança

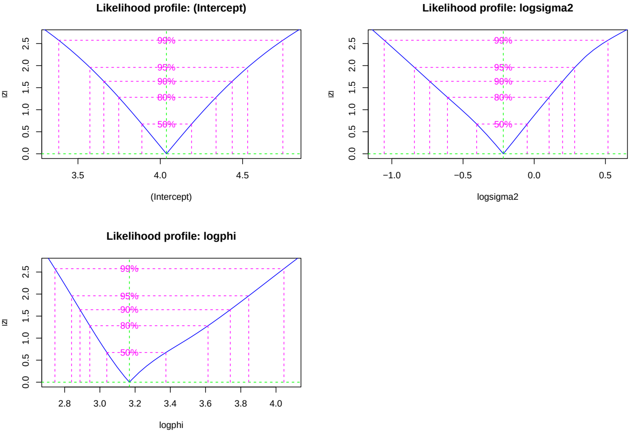


Figura 2: Perfis de Verossimilhança

Ajuste Incorporando Coordenadas

Apesar de não apresentar indícios de tendência espacial para as coordenadas, podemos incluí-las no modelo, para verificar se os efeitos estimados são significativos. De forma similar ao caso anterior, vários modelos foram ajustados, considerando diferentes funções de covariância espacial.

Tabela

Modelo	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\log(\hat{\sigma^2})$	$\log(\hat{\phi})$	$\log(\hat{\tau^2})$	logLik
$\kappa = 1 + \tau^2$	4.6360	-0.0003	-0.0018	-0.1897	3.5880	-3.7022	-517.3814
$\kappa = 1.5 + \tau^2$	4.6358	-0.0004	-0.0018	-0.2342	3.3081	-2.9736	-517.5264
$\kappa = 2 + \tau^2$	4.6378	-0.0004	-0.0017	-0.2614	3.1184	-2.7337	-517.7336
Exponencial $+ \tau^2$	4.6271	-0.0001	-0.0019	-0.1494	4.1786	-7.272	-517.9993
Esférico $+ \tau^2$	4.5737	-0.0002	-0.0017	-0.1960	5.1375	-2.2709	-517.4351
$\kappa = 1$	4.6343	-0.0004	-0.0018	-0.1632	3.5392	-	-517.4677
$\kappa = 1.5$	4.6467	-0.0005	-0.0018	-0.1807	3.2052	-	-518.0529
$\kappa = 2$	4.6430	-0.0005	-0.0017	-0.1926	2.9874	-	-518.6964
Exponencial	4.6265	-0.0001	-0.0019	-0.1489	4.1792	-	-517.9937
Esférico	4.5521	-0.0002	-0.0017	0.1382	5.1413	-	-517.9959

Tabela 2: Estimativas dos parâmetros

Perfis de Verossimilhança

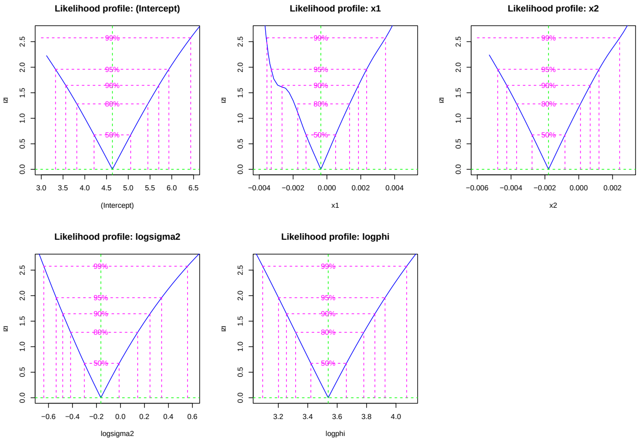


Figura 3: Perfis de Verossimilhança

Predição Espacial

Com os valores estimados pelos parâmetros, podemos realizar a predição dos valores estimados pelo modelo (considerando o com função de covariância Matèrn, $\kappa = 1$ e $\tau^2 = 0$) em pontos não amostrados.

A abordagem utilizada para a krigagem será utilizando as funções `geoR::krige.control`, `output.control` e `krige.conv`, e pode ser vista com mais detalhes em (Diggle e Ribeiro Jr. 2007).

Predição Espacial

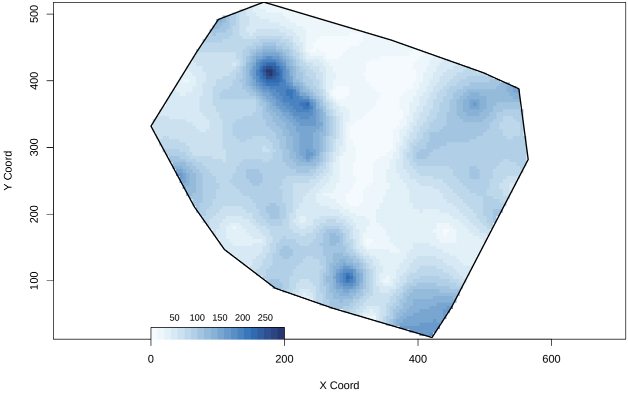


Figura 4: Predição para os dados Weed

Base de Dados SPT

A base de dados `SPT` foi disponibilizada pelo aluno de mestrado em Geotecnia pela UFPR, Lucas Michael Luzzi, e consiste na sondagem SPT em pontos amostrais do Aeroporto Internacional Afonso Pena. Os valores da variável resposta são a quantidade de marteladas necessárias para compactar o solo em uma certa quantidade.

A base possui 15 camadas amostrais, com profundidades crescentes. 2 delas foram escolhidas para ajustar os modelos e compará-los.

Base de Dados SPT

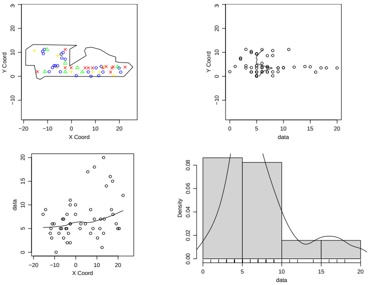


Figura 5: Profundidade 4 metros

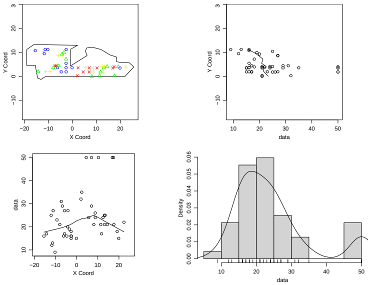


Figura 6: Profundidade 13 metros

Boxplot

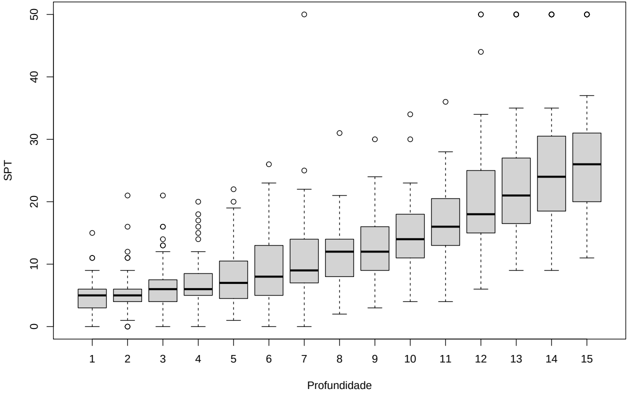


Figura 7: Boxplot de SPT pela profundidade

Ajustes Profundidade 4 Metros

Modelo	$\hat{\beta}_0$	$\log(\hat{\sigma^2})$	$\log(\hat{\phi})$	logLik
Exponencial	1.8655	-1.6576	-1.4194	-139.9930
Matèrn$(\kappa = 1)$	1.8654	-1.6574	-1.7209	-139.9898
Matèrn$(\kappa = 1.5)$	1.8653	-1.6574	-1.8687	-139.9872
Matèrn$(\kappa = 2)$	1.8656	-1.6574	-3.2607	-140.0011
Esférico	1.8639	-1.6562	-0.0246	-139.9393

Tabela 3: Estimativas para profundidade 4 metros

Ajustes Profundidade 13 Metros

Modelo	(Intercept)	logsigma2	logphi	LogLik
Exponencial	3.0828	-2.1232	0.7264	-165.1396
Matèrn$(\kappa = 1)$	3.0868	-2.1145	0.2089	-164.8328
Matèrn$(\kappa = 1.5)$	3.0902	-2.1128	-0.0747	-164.7751
Matèrn$(\kappa = 2)$	3.0925	-2.1126	-0.2666	-164.7747
Esférico	3.0884	-2.0803	1.6073	-165.2236

Tabela 4: Estimativas para profundidade 13 metros

Perfis de Verossimilhança

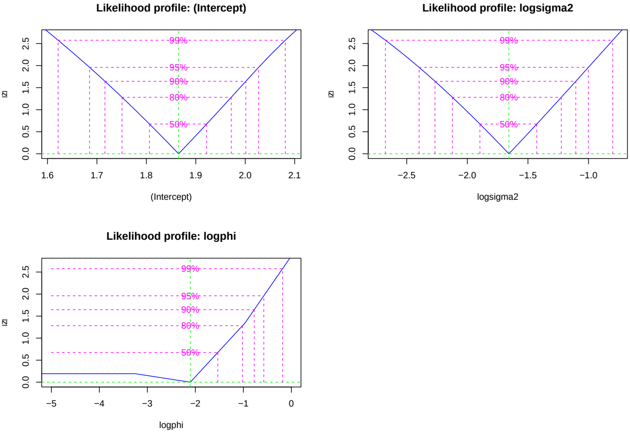


Figura 8: Perfis de Verossimilhança para Z = 4

Perfis de Verossimilhança

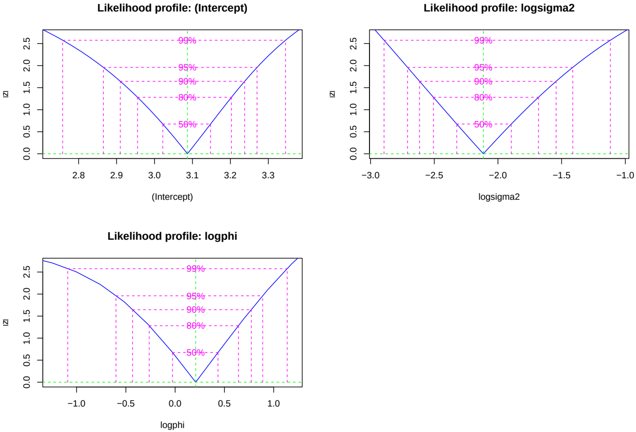


Figura 9: Perfis de Verossimilhança para Z = 13

Predição Espacial

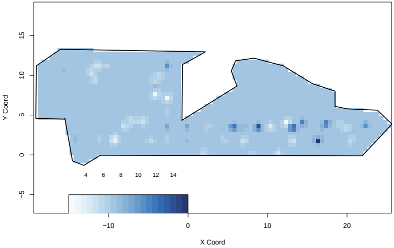


Figura 10: Profundidade 4 metros

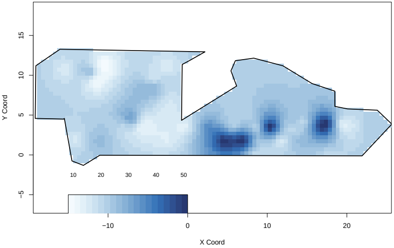


Figura 11: Profundidade 13 metros

Section 4

Estudo de Simulação

Estudo de Simulação

Por fim, será realizado um estudo de simulação, para verificar propriedades para os estimadores obtidos pela função `sglmm`. Foi criada a função `simulation_function`, que segue o seguinte esquema: uma *seed* para reprodução é definida, gera-se uma amostra de tamanho n usando a função `geoR::grf`, utilizando os parâmetros $\theta = (\beta_0 = 2, \sigma^2 = 0.5, \phi = 30, \tau^2 = 0.05)$, com função de covariância espacial exponencial, em posições de uma malha irregular de 200×200.

As amostras y_i (geradas de um campo aleatório gaussiano não condicional) são usados para simular valores de uma Poisson, com $\lambda_i = y_i$.

Diferentes Tamanhos Amostrais

Para explorar o comportamento do estimador para diferentes tamanhos amostrais, foram geradas 100 repetições de amostras com $n = 50, 100, 200$ valores.

A partir dos valores simulados, podemos ver como se comportam a média e o erro quadrático médio dos estimadores, bem como sua variância e seu viés.

Diferentes Tamanhos Amostrais

	(Intercept)	logsigma2	logphi	logtau2
$n = 50$	2.0445	-1.1534	3.5340	-6.2878
$n = 100$	2.0750	-1.0385	3.9488	-4.7257
$n = 200$	1.9696	-0.9616	3.9306	-4.0778

Figura 12: Média dos estimadores

	(Intercept)	logsigma2	logphi	logtau2
$n = 50$	0.1808	0.4694	1.4915	19.9334
$n = 100$	0.1449	0.4418	0.6122	11.2527
$n = 200$	0.1093	0.2861	0.4882	5.8837

Figura 13: Erro Quadrático Médio dos estimadores

Diferentes Tamanhos Amostrais

	(Intercept)	logsigma2	logphi	logtau2
$n = 50$	0.1806	0.2602	0.8866	9.1874
$n = 100$	0.1406	0.3258	0.4810	8.3434
$n = 200$	0.1095	0.2162	0.3419	4.7605

Figura 14: Variância dos estimadores

	(Intercept)	logsigma2	logphi	logtau2
$n = 50$	0.0002	0.2092	0.6049	10.7460
$n = 100$	0.0042	0.1160	0.1311	2.9093
$n = 200$	-0.0002	0.0699	0.1463	1.1232

Figura 15: Viés dos estimadores

Especificação Incorreta da Função de Covariância Espacial

Foram comparados os resultados anteriores com os estimadores gerados utilizando as funções de covariância espacial Matèrn (com $\kappa = 1, 2$) e Esférica. Em todos os casos, o tamanho da amostra é de $n = 100$, e os parâmetros usados para geração são os especificados anteriormente.

Especificação Incorreta da Função de Covariância Espacial

	(Intercept)	logsigma2	logphi	logtau2
Exponencial	2.0750	-1.0385	3.9488	-4.7257
Esférica	2.0726	-1.1012	4.6881	-3.6271
Matèrn,$\kappa = 1$	2.0760	-1.1247	3.4352	-3.2753
Matèrn,$\kappa = 2$	2.0752	-1.1973	2.9698	-2.8384

Figura 16: Média dos estimadores

	(Intercept)	logsigma2	logphi	logtau2
Exponencial	0.1449	0.4418	0.6122	11.2527
Esférica	0.1482	0.4951	0.4586	4.7508
Matèrn,$\kappa = 1$	0.1457	0.5300	1.1587	3.8064
Matèrn,$\kappa = 2$	0.1447	0.5801	2.1222	2.1448

Figura 17: Erro Quadrático Médio dos estimadores

Especificação Incorreta da Função de Covariância Espacial

	(Intercept)	logsigma2	logphi	logtau2
Exponencial	0.1406	0.3258	0.4810	8.3434
Esférica	0.1444	0.3319	0.3245	4.3961
Matèrn,$\kappa = 1$	0.1413	0.3472	0.3842	3.7659
Matèrn,$\kappa = 2$	0.1405	0.3292	0.3091	2.1415

Figura 18: Variância dos estimadores

	(Intercept)	logsigma2	logphi	logtau2
Exponencial	0.0042	0.1160	0.1311	2.9093
Esférica	0.0038	0.1632	0.1341	0.3547
Matèrn,$\kappa = 1$	0.0044	0.1828	0.7745	0.0405
Matèrn,$\kappa = 2$	0.0042	0.2509	1.8132	0.0034

Figura 19: Viés dos estimadores

Diferentes Regiões Amostrais

Por fim, foi verificado o comportamento dos estimadores quando aumentamos e diminuímos a região da qual a amostra é coletada. Foram simulados em uma malha menor (50 x 50, com dados mais "densos") e uma maior (500 x 500, com dados mais "esparsos"), para conferir o comportamento dos estimadores.

Diferentes Regiões Amostrais

	(Intercept)	logsigma2	logphi	logtau2
50×50	2.0931	-1.7802	2.7482	-4.6425
100×100	2.0750	-1.0385	3.9488	-4.7257
200×200	2.0381	-0.9060	4.1668	-4.8777

Figura 20: Média dos estimadores

	(Intercept)	logsigma2	logphi	logtau2
50×50	0.3645	1.6704	3.7563	8.3343
100×100	0.1449	0.4418	0.6122	11.2527
200×200	0.0522	0.2557	0.4888	12.5154

Figura 21: Erro Quadrático Médio dos estimadores

Diferentes Regiões Amostrais

	(Intercept)	logsigma2	logphi	logtau2
50×50	0.3594	0.4936	1.3068	5.6792
100×100	0.1406	0.3258	0.4810	8.3434
200×200	0.0512	0.2125	0.4708	9.0643

Figura 22: Variância dos estimadores

	(Intercept)	logsigma2	logphi	logtau2
50×50	0.0051	1.1768	2.4495	2.6551
100×100	0.0042	0.1160	0.1311	2.9093
200×200	0.0009	0.0432	0.0180	3.4511

Figura 23: Viés dos estimadores

Section 5

Considerações Finais

Considerações Finais

Como visto, os estimadores obtidos por meio da aproximação de Laplace possuem propriedades estatísticas ótimas, como o não-viés assintótico e ser erro quadrático médio consistente, além de vantagens computacionais sobre os ajustes baseados no paradigma bayesiano.

Ainda que seja computacionalmente intensivo, o ajuste é obtido por uma maximização de alta dimensionalidade, que pode ser resolvida por diversas heurísticas além das apresentadas neste trabalho.

Considerações Finais

O ajuste às bases de dados reais foi satisfatória, sendo possível comparar os diferentes modelos ajustados de maneira direta, por meio do valor retornado pela log-verossimilhança, e pelo teste de razão de verossimilhança para considerar a inclusão de variáveis no modelo.

Section 6

Referências

Referências I

Banerjee, Sudipto, Bradley P. Carlin, e Alan E. Gelfand. 2004. *Hierarchical modeling and analysis for spatial data*. Monographs on statistics e applied probability 101. Boca Raton, Fla: Chapman & Hall/CRC.

Bates, Douglas, Martin Mächler, Ben Bolker, e Steve Walker. 2015. «Fitting Linear Mixed-Effects Models Using lme4». *Journal of Statistical Software* 67 (1): 1–48. https://doi.org/10.18637/jss.v067.i01.

Bolker, Ben, e R Development Core Team. 2023. *bbmle: Tools for General Maximum Likelihood Estimation*. https://CRAN.R-project.org/package=bbmle.

Bonat, Wagner Hugo, e Paulo Justiniano Ribeiro Jr. 2016. «Practical likelihood analysis for spatial generalized linear mixed models». *Environmetrics* 27 (2): 83–89. https://doi.org/10.1002/env.2375.

Referências II

Breslow, N. E., e D. G. Clayton. 1993. «Approximate Inference in Generalized Linear Mixed Models». *Journal of the American Statistical Association* 88 (421): 9–25. https://doi.org/10.1080/01621459.1993.10594284.

Casella, George, e Roger L. Berger. 2011. *Inferência estatística*. São Paulo: Cengage Learning.

Christensen, O. F., e P. J. Ribeiro Jr. 2002. «geoRglm - a package for generalised linear spatial models». *R-NEWS* 2 (2): 26–28.

Christensen, Ole F. 2004. «Monte Carlo Maximum Likelihood in Model-Based Geostatistics». *Journal of Computational and Graphical Statistics* 13 (3): 702–18. https://doi.org/10.1198/106186004X2525.

Corporation, Microsoft, e Steve Weston. 2022. *doParallel: Foreach Parallel Adaptor for the 'parallel' Package*. https://CRAN.R-project.org/package=doParallel.

Referências III

Cressie, Noel A. C. 1993. *Statistics for Spatial Data*. 1.ª ed. Wiley Series em Probability e Statistics. Wiley. https://doi.org/10.1002/9781119115151.

Diggle, Peter J., e Paulo J. Ribeiro Jr. 2007. *Model-based Geostatistics*. Springer series em statistics. Guildford Boulder: Springer London NetLibrary, Inc. [distributor].

Geyer, Charles J. 1994. «On the Convergence of Monte Carlo Maximum Likelihood Calculations». *Journal of the Royal Statistical Society Series B: Statistical Methodology* 56 (1): 261–74. https://doi.org/10.1111/j.2517-6161.1994.tb01976.x.

Geyer, Charles J., e Elizabeth A. Thompson. 1992. «Constrained Monte Carlo Maximum Likelihood for Dependent Data». *Journal of the Royal Statistical Society Series B: Statistical Methodology* 54 (3): 657–83. https://doi.org/10.1111/j.2517-6161.1992.tb01443.x.

Referências IV

Guillot, Gilles, Niklas Lorén, e Mats Rudemo. 2009. «Spatial Prediction of Weed Intensities From Exact Count Data and Image-Based Estimates». *Journal of the Royal Statistical Society Series C: Applied Statistics* 58 (4): 525–42. https://doi.org/10.1111/j.1467-9876.2009.00664.x.

Isaaks, Edward H., e R. Mohan Srivastava. 1989. *Applied geostatistics*. New York: Oxford University Press.

Jing, Liang, e Victor) De Oliveira. 2015. «geoCount: An R Package for the Analysis of Geostatistical Count Data». *Journal of Statistical Software* 63 (11): 1–33. http://www.jstatsoft.org/v63/i11/.

Lee, Y., e J. A. Nelder. 1996. «Hierarchical Generalized Linear Models». *Journal of the Royal Statistical Society Series B: Statistical Methodology* 58 (4): 619–56. https://doi.org/10.1111/j.2517-6161.1996.tb02105.x.

Referências V

McCulloch, Charles E. 1997. «Maximum Likelihood Algorithms for Generalized Linear Mixed Models». *Journal of the American Statistical Association* 92 (437): 162–70. https://doi.org/10.1080/01621459.1997.10473613.

Pinheiro, José C., e Douglas M. Bates. 1995. «Approximations to the Log-Likelihood Function in the Nonlinear Mixed-Effects Model». *Journal of Computational and Graphical Statistics* 4 (1): 12–35.

R Core Team. 2024. *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. Vienna, Austria: R Foundation for Statistical Computing. https://www.R-project.org/.

Ribeiro Jr, Paulo Justiniano, Peter Diggle, Ole Christensen, Martin Schlather, Roger Bivand, e Brian Ripley. 2024. *geoR: Analysis of Geostatistical Data*. https://CRAN.R-project.org/package=geoR.

Referências VI

Tierney, Luke, e Joseph B. Kadane. 1986. «Accurate Approximations for Posterior Moments and Marginal Densities». *Journal of the American Statistical Association* 81 (393): 82–86. https://doi.org/10.1080/01621459.1986.10478240.

Venables, W. N., e B. D. Ripley. 2002. *Modern Applied Statistics with S*. Fourth. New York: Springer. https://www.stats.ox.ac.uk/pub/MASS4/.

Zhang, Hao. 2002. «On Estimation and Prediction for Spatial Generalized Linear Mixed Models». *Biometrics* 58 (1): 129–36. https://doi.org/10.1111/j.0006-341X.2002.00129.x.