Notas de Aula - Capítulo 3

Probabilidade

Caio Gomes Alves

27/04/2025

1 Esperança

1.1 Definição

Definition 1.1. Se X é uma variável aleatória com distribuição F, a esperança de X é definida por $E(X = \int_{-\infty}^{\infty} xdF(x)$, sempre que a integral estiver bem definida.

Convenção: Se $E(X) < \infty$, então X é integrável.

Nota: $\int_{-\infty}^{\infty} xdF(x)$ é bem definida se $\int_{0}^{\infty} xdF(x)$ ou $\int_{-\infty}^{0} xdF(x)$ for finita, já que $\int_{-\infty}^{\infty} xdF(x) = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} xdF(x)}_{\mathbf{I} \leq 0} + \underbrace{\int_{0}^{\infty} xdF(x)}_{\mathbf{II} \geq 0}$. Assim, podemos separar em quatro casos:

1. Se **I** e **II** são finitos, então X é integrável;
2. Se **I** é finito e $\mathbf{II} = +\infty$, então $E(X) = +\infty$;
3. Se **II** é finito e $\mathbf{I} = -\infty$, então $E(X) = -\infty$;
4. Se $\mathbf{I} = -\infty$ e $\mathbf{II} = +\infty$, então $E(X)$ é indefinida.

Propriedade: $E(|X|) = \int |x|dF(x)$. Logo, X é integrável se e somente se $E(|X|) < \infty$.

Example 1.1. $X \sim U(0,1),\ Y = \min\left(X, \frac{1}{2}\right)$:

$$P\left(Y = \frac{1}{2}\right) = P\left(X > \frac{1}{2}\right) = 1 - F_X\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = P_Y\left(Y = \frac{1}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} ydF(y) &= \int_{0}^{1/2} y.1dy + \frac{1}{2}P_Y\left(Y = \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{y^2}{2}\bigg|_0^{1/2} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

Proposition 1.1. *$E(X) = \int_0^{\infty}(1 - F(x))dx - \int_{-\infty}^{0} F(x)dx$. Disso, temos que:*

- ***a)*** *$\int_0^{\infty} xdF(x) = \int_0^{\infty}(1 - F(x))dx$;*
- ***b)*** *$\int_{-\infty}^{0} xdF(x) = -\int_{-\infty}^{0} F(x)dx$;*

Prova. Vejamos **(a)**: considere que $d(xF(x)) = F(x)dx + xd(F(x)) \Rightarrow xd(F(x)) = d(xF(x)) - F(x)dx$. Seja um $b > 0$:

$$\begin{aligned}\int_0^b xdF(x) &= \int_0^b d(xF(x)) - \int_0^b F(x)dx \\ &= xF(x)\Big|_0^b - \int_0^b F(x)dx \\ &= bF(b) - \int_0^b F(x)dx \\ &= \int_0^b [F(b) - F(x)]dx\end{aligned}$$

Note que $\int_0^b xdF(x) \leq \int_0^\infty [1 - F(x)]dx, \ \forall b > 0$. Basta notar que $F(b) - F(x) \leq 1 - F(x)$ e que $\int_0^b [1 - F(x)]dx \leq \int_0^\infty [1 - F(x)]dx$. Logo:

$$\int_0^\infty xdF(x) = \lim_{b\to\infty} \int_0^b xdF(x) \leq \int_0^\infty [1 - F(x)]dx \Rightarrow \int_0^\infty xdF(x) \leq \int_0^\infty [1 - F(x)]dx$$

Considere $\lambda > 0$ e $b > 0$, tais que:

$$\begin{aligned}\int_0^b [F(b) - F(x)]dx \geq \int_0^\lambda [1 - F(x)]dx &= \int_0^\lambda [F(b) - 1]dx + \int_0^\lambda [1 - F(x)]dx \\ &= \lambda[F(b) - 1] + \int_0^\lambda [1 - F(x)]dx \\ \int_0^b [F(b) - F(x)]dx &\geq \lambda[F(b) - 1] + \int_0^\lambda [1 - F(x)]dx\end{aligned}$$

Logo, como $\int_0^\infty xdF(x) = \lim_{b\to\infty} \int_0^b [F(b) - F(x)]dx \geq \lim_{b\to\infty}\{\lambda[F(b) - 1] + \int_0^\lambda [1 - F(x)]dx\} = \int_0^\lambda [1 - F(x)]dx$. Assim:

$$\int_0^\infty xdF(x) \geq \lim_{\lambda\to\infty} \int_0^\lambda [1 - F(x)]dx = \int_0^\infty [1 - F(x)]dx$$

E como $\int_0^\infty xdF(x) \leq \int_0^\infty [1 - F(x)]dx$, temos que $\int_0^\infty xdF(x) = \int_0^\infty [1 - F(x)]dx$ □

Corollary 1.1. *Se X é tal que $X(\omega) \geq 0 \ \forall \omega \in \mathbb{R} \Rightarrow E(X) = \int_0^\infty [1 - F(x)]dx = \int_0^\infty P(X \geq x)dx$.*

Example 1.2. Seja $X \sim Exp(\lambda)$, qual a $E(X)$? Como o suporte de X é $(0, \infty)$, aplica-se o corolário anterior, de modo que:

$$\begin{aligned}F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x} &\Leftrightarrow P(X > x) = e^{-\lambda x} \\ E(X) = \int_0^\infty e^{-\lambda x}dx &= -\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty = \frac{1}{\lambda}\end{aligned}$$

Nota: Suponha X discreta e $X(\omega) \geq 0 \ \forall \omega$. Então:

$$
\begin{aligned}
E(X) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X > n) &= \sum_{n=0}^{\infty} P(X \geq n+1) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} P(X \geq n)
\end{aligned}
$$

Example 1.3. Considere o lançamento de uma moeda até a 1ª cara. Suponha $p =$ probabilidade de cara e $(1-p) =$ probabilidade de coroa, e $X =$ número de lançamentos até a primeira cara. Tome o evento $[X \geq n]$, logo:

$$
E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} (1-p)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (1-p)^n = \frac{1}{p}
$$

Nota: Sendo X uma variável aleatória, temos pelo corolário 1.1 que:

$$
\begin{aligned}
E(|X|) &= \int_0^{\infty} P(|X| > x)dx \\
&= \int_0^{\infty} \big[P(X > x) + P(X < -x)\big]dx \\
&= \int_0^{\infty} P(X > x)dx + \int_0^{\infty} P(X < -x)dx \\
&= \int_0^{\infty} (1 - F(x))dx + \int_0^{\infty} F((-x)^-)dx
\end{aligned}
$$

Onde $F((-x)^-) = \lim_{u \uparrow -x} F(u)$, que caso F seja contínua, coincide com $F(-x)$. Logo:

$$
E(|X|) = \int_0^{\infty} (1 - F(x))dx + \int_0^{\infty} F(-x)dx
$$

Já que F pode ser descontínua em uma coleção enumerável de pontos. Agora, tomando a transformação de variável $y = -x \Leftrightarrow dy = -dx$:

$$
\begin{aligned}
E(|X|) &= \int_0^{\infty} (1 - F(x))dx + \int_{-\infty}^{0} F(y)dy \\
&= \int_0^{\infty} (1 - F(x))dx + \int_{-\infty}^{0} F(x)dx
\end{aligned}
$$

Utilizando os resultados **a** e **b** da proposição 1.1, temos que:

$$
\begin{aligned}
E(|X|) &= \int_0^{\infty} xdF(x) - \int_{-\infty}^{0} xdF(x) \\
&= \int_0^{\infty} |x|dF(x) + \int_{-\infty}^{0} |x|dF(x) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} |x|dF(x)
\end{aligned}
$$

Onde F é a acumulada de X, ao invés de $|X|$. Assim, a integrabilidade de X depende da finitude de $\int_0^{\infty} xdF(x)$ e $\int_{-\infty}^{0} xdF(x)$, logo X é integrável se $E(|X|) < \infty$.

1.2 Propriedades da esperança

- $\mathbf{E_1}$: Se $X = c$, com c uma constante, $E(X) = c$;
- $\mathbf{E_2}$**(monotonia)**: Se X e Y são variáveis aleatórias, com $X \leq Y \Rightarrow E(X) \leq E(Y)$, caso ambas as esperanças estejam bem definidas;

Prova. Seja z um valor fixo. Se $Y \leq z \Rightarrow X \leq z$, logo $[Y \leq z] \subseteq [X \leq z]$, assim:

$$
\begin{aligned}
P(Y \leq z) &\leq P(X \leq z) \\
F_Y(z) &\leq F_X(z) \Longleftrightarrow 1 - F_Y(z) \geq 1 - F_X(z)
\end{aligned}
$$

E pela proposição 1.1, temos que:

$$
E(Y) = \int_0^\infty \big[1 - F_Y(z)\big]dz - \int_{-\infty}^0 F_Y(z)dz \geq \int_0^\infty \big[1 - F_X(z)\big]dz - \int_{-\infty}^0 F_X(z)dz = E(X)
$$
$$
E(Y) \geq E(X)
$$

$\square$

- $\mathbf{E_3}$**(linearidade)**:
  - **(i)** Se $E(X)$ é bem definida, $a, b \in \mathbb{R}$, então $E(aX + b) = aE(X) + b$;
  - **(ii)** $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$, caso o termo $aE(X) + bE(Y)$ esteja bem definido;
  - Note que se $E(X) = \infty \Rightarrow E(X - X) \neq E(X) - E(X)$.

Prova. Quando $a = 0; E(aX + b) = E(b) = b = 0E(X) + b$.

Quando $a > 0, b > 0; F_{aX+b}(x) = P(aX + b \leq x) = P\left(X \leq \frac{x-b}{a}\right) = F_X\left(\frac{x-b}{a}\right)$. Logo:

$$
\begin{aligned}
E(aX + b) &= \int_0^\infty \big[1 - F_{aX+b}(x)\big]dx - \int_{-\infty}^0 F_{aX+b}(x)dx \\
&= \int_0^\infty \left[1 - F_X\left(\frac{x-b}{a}\right)\right]dx - \int_{-\infty}^0 F_X\left(\frac{x-b}{a}\right)dx
\end{aligned}
$$

Tome $y = \frac{x-b}{a} \Rightarrow dy = \frac{1}{a}dx$. Então:

$$
\begin{aligned}
E(aX + b) &= \int_{-b/a}^\infty a\big[1 - F_X(y)\big]dy - \int_{-\infty}^{-b/a} aF_X(y)dy \\
&= a\left\{\int_{-b/a}^\infty \big[1 - F_X(y)\big]dy - \int_{-\infty}^{-b/a} F_X(y)dy\right\} \\
&= a\int_0^\infty \big[1 - F_X(y)\big]dy - a\int_{-\infty}^0 F_X(y)dy + a\int_{-b/a}^0 \big[1 - F_X(y)\big]dy + a\int_{-b/a}^0 F_X(y)dy \\
&= aE(X) + a\int_{-b/a}^0 dy \\
&= aE(X) + a\frac{b}{a} \\
&= aE(X) + b
\end{aligned}
$$

$\square$

- $\mathbf{E_4}$**(Desigualdade de Jansen)**: Seja φ uma função convexa, definida na reta, com X integrável, então:

$$E(\varphi(X)) \geq \varphi(E(X)) \tag{1}$$

Nota: Caso φ seja côncava:

$$E(\varphi(X)) \leq \varphi(E(X))$$

Prova para convexa. Tome x_0 e $\varphi(x_0)$. Então existe uma reta L tal que L passe por $\varphi(x_0)$ e φ fica por cima de L. Logo temos a seguinte equação da reta:

$$L(x) = \varphi(x_0) + \lambda(x - x_0)$$

Onde λ é alguma constante apropriada. Então para todo x temos:

$$\begin{gathered} \varphi(x) \geq L(x) = \varphi(x_0) + \lambda(x - x_0) \\ \Downarrow \mathbf{E_2} \\ E(\varphi(x)) \geq E(L(x)) \overset{\mathbf{E_1},\mathbf{E_3}}{=} \varphi(x_0) + \lambda\left[E(x) - x_0\right] \end{gathered}$$

Que vale para $x_0 = E(x)$, de modo que $E(\varphi(x)) \geq \varphi(E(x)) + \lambda\left[E(x) - E(x)\right]$, então:

$$E(\varphi(x)) \geq \varphi(E(x))$$

A prova para funções côncavas segue a mesma metodologia, com a inversão da desigualdade. □

1.2.1 Critério de integrabilidade

Suponha que X é uma variável aleatória dominada por Y (ou seja, $X \leq Y$), sendo Y uma variável aleatória integrável. X é integrável? Temos que:

$$X \leq Y \Rightarrow E(X) \leq E(Y)$$

Se X e Y são tais que $Y \geq 0$ e Y é integrável e $|X| \leq Y \Rightarrow 0 \leq |X| \leq Y$, e como consequência:

$$0 \leq E(X) \leq E(Y) < \infty \Longrightarrow X \text{ é integrável}$$

De maneira similar, seja X uma variável aleatória qualquer. Então:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X| \geq n) \leq E(|X|) \leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P(|X| \geq n)$$

Assim, X é integrável se e somente se $\sum_{n=1}^{\infty} P(|X| \geq n) < \infty$.

Prova. Seja $x \geq 0$. Tome $[x]$ como a parte inteira de x. Então $[|x|] = k$ se $k \leq |x| < k+1$. Então:

$$\begin{gathered} 0 \leq [|x|] \leq |x| \leq [|x|] + 1 \\ \Downarrow \ \mathbf{E_2}, \mathbf{E_3} \\ 0 \leq E([|x|]) \leq E(|x|) \leq E([|x|]) + 1 \end{gathered}$$

Pelo corolário 1.1, como $[|x|]$ é discreta e não-negativa, temos que:

$$\begin{aligned} E([|x|]) &= \sum_{n=1}^{\infty} P([|x|] \geq n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P(|x| \geq n) \leq E(|x|) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(|x| \geq n) + 1 \end{aligned}$$

□

1.2.2 Casos de interesse

a) (Consistência absoluta) $\varphi(X) = |X|$:

$$E(|X|) \geq |E(X)|$$

b) (Consistência quadrática) $\varphi(X) = X^2$:

$$E(X^2) \geq [E(X)]^2$$

c) $\varphi(X) = |X|^p, p \geq 1$:

$$E(|X|^p) \geq |E(X)|^p$$

Nota: φ só precisa ser convexa (ou côncava) em uma região de probabilidade 1. Por exemplo, se X é uma variável aleatória, tal que $P(X > 0) = 1$, ou o suporte da distribuição de X é $(0, \infty), \varphi(X) = \frac{1}{X}$ é convexa em $(0, \infty) \Rightarrow E\left(\frac{1}{X}\right) \geq \frac{1}{E(X)}$. De modo análogo, se $P(X > 0) = 1$ e $\varphi(X) = \ln(X), \varphi$ é côncava em $(0, \infty)$ logo $E(\ln(X)) \leq \ln(E(X))$.

1.3 Esperança de funções de variáveis aleatórias

Seja X uma variável aleatória, φ uma função mensurável e $Y = \varphi(X)$. Assim, Y é uma variável aleatória, cuja esperança é $E(Y) = \int y dF_{\varphi(X)}(y) = \int_0^\infty [1 - F_{\varphi(X)}(y)]dy - \int_{-\infty}^0 F_{\varphi(X)}(y)dy$.

Theorem 1.1. *Se X é uma variável aleatória e φ uma função mensurável, com $Y = \varphi(X)$:*

$$E(Y) = E(\varphi(X)) = \int \varphi(x) dF_X(x)$$

Prova para caso $\varphi(x) = x^k$. Testse □