# Notas de Aulas
# MI401 Probabilidade

Caio Gomes Alves

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP

Maio 2025

# Conteúdos

# 1 Prefácio

Este "livro" consiste de notas de aulas da matéria MI401 - Probabilidade, do Programa de Mestrado em Estatística, do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC), da Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP.

Os seus conteúdos são baseados nas notas tomadas durante as aulas, do livro "Probabilidade e Variáveis Aleatórias", do autor Marcos Nascimento Magalhães, 3ª edição, e do livro "Probabilidade: um curso em nível intermediário", do autor Barry R. James, 5ª edição.

# 2 Definições Básicas

## 2.1 Modelo Probabilístico

Suponha que é realizado um experimento "sob certas condições", sendo $\Omega$ o conjunto de resultados possíveis do experimento (também chamado de resultados elementares). Chamamos $\Omega$ de **espaço amostral do experimento**, com a representação axiomática sendo dada por: $\Omega = \{\omega : \omega \in \Omega\}$.

**Example 2.1.** Considere o lançamento de um dado honesto. Nesse caso, temos que $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, em que cada $\{i\}$ é um evento elementar, sendo eles $\{1\}$,$\{2\}$,$\{3\}$,$\{4\}$,$\{5\}$ e $\{6\}$.

Temos então que eventos são coleções de pontos em $\Omega$, por exemplo um evento $A = \{2, 4, 6\}$ (números pares no lançamento de um dado honesto). Assim, temos as seguintes suposições para eventos:

1. Todo resultado possível no experimento corresponde a um e somente um $\omega \in \Omega$;
2. Resultados diferentes correspondem a elementos diferentes em $\Omega$.

**Definition 2.1.** Seja um espaço amostral $\Omega$ de um experimento. Todo subconjunto $A \subset \Omega$ é um evento. $\Omega$ é o evento certo e $\emptyset$ é o evento impossível. Além disso, $\omega \in \Omega \to \{\omega\}$ é um evento elementar.

Note-se que, dados $A$ e $B$ eventos, tais que $A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$, temos que:

- $A \cup B \to (\omega \in A$ e $\omega \notin B)$ ou $(\omega \notin A$ e $\omega \in B)$ ou $(\omega \in A$ e $\omega \in B)$;
- $A \cap B \to (\omega \in A \cup \omega \in B)$;
- $A^c \to (\omega \notin A)$;
- $A \subset B \to$ a ocorrência de $A$ implica a ocorrência de $B$;
- $A \cap B = \emptyset \to$ os eventos $A$ e $B$ são mutuamente exclusivos.

No campo probabilístico, pensamos em atribuir probabilidades (leia-se chances) a eventos em $\Omega$.

**Definition 2.2** (Clássica)**.** A probabilidade de ocorrência de um evento $A$, denotada por $P(A)$ é dada por:

$$P(A) = \frac{\#(A)}{\#(\Omega)} = \frac{\text{n}^{\text{o}} \text{ de resultados favoráveis a } A}{\text{n}^{\text{o}} \text{ de resultados possíveis em } \Omega}$$

Onde # indica a cardinalidade de um conjunto (quantidade de elementos no conjunto).

**Example 2.2.** Seja $A = \{2, 4, 6\}$, os lançamentos pares em um dado honesto. Como $\Omega = \{1, \ldots, 6\}$, temos que:

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

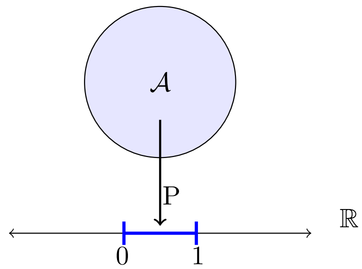
Note que o conjunto $A$ pode ser descrito como a união dos eventos elementares, tais que $A = \{2\} \cup \{4\} \cup \{6\}$. Nesse caso, podemos ver que a probabilidade de $A$ não muda, pois:

$$\begin{aligned} P(\{i\}) &= \frac{\#(\{i\})}{\#(\Omega)} = \frac{1}{6} \\ P(A) &= \frac{\#(\{2\}) + \#(\{4\}) + \#(\{6\})}{\#(\Omega)} = \frac{1+1+1}{6} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

**Definition 2.3.** Um evento $A$ ao qual atribuímos uma probabilidade é um evento aleatório.

## 2.2 Álgebras de Conjuntos

Considere o conjunto de eventos em uma família $\mathcal{A}$ (subconjuntos de $\Omega$), de tal modo que $P : A \to [0, 1]$. Uma representação gráfica da relação $P$ pode ser dada por:




**Definition 2.4.** Seja $\Omega$ um conjunto não-vazio. Seja $\mathcal{A}$ uma classe de subconjuntos de $\Omega$, ela será chamada de **"Álgebra de subconjuntos de $\Omega$"**, caso respeite os seguintes axiomas:

- $Ax_1$ : $\Omega \in \mathcal{A}$, e definimos $P(\Omega) = 1$;
- $Ax_2$ : Se $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$, e definimos $P(A^c) = 1 - P(A)$;
- $Ax_3$ : Se $A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$.

E por consequência desses axiomas, temos as seguintes extensões:

- $Ax_4$ : $\emptyset \in \mathcal{A}$;
- $Ax_5$ : Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n : A_i \in \mathcal{A} \forall i \Rightarrow \bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}$ e $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}$.

É fácil verificar a extensão de $Ax_4$ a partir de $Ax_1$ e $Ax_2$: $Ax_1$ define que $\Omega \in \mathcal{A}$, e por $Ax_2$ temos que $\Omega^c \in \mathcal{A}$, e por definição temos que $\Omega^c = \emptyset$, logo $\emptyset \in \mathcal{A}$. Também é interessante notar que, ainda por $Ax_2$, temos que $P(\emptyset) = 1 - P(\Omega)$, e por $Ax_1$ temos que $P(\Omega) = 1$, portanto $P(\emptyset) = 1 - 1 = 0$.

A extensão de $Ax_5$ é dada por indução e pelas Leis de De Morgan: Sejam $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$. Temos pelo axioma $Ax_3$, que $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}$, podendo assim definir o conjunto $B = A_1 \cup A_2$, sendo possível ver que $B \in \mathcal{A}$. Sejam ainda um conjunto $A_3 \in \mathcal{A}$, podemos ver que $B \cup A_3 \in \mathcal{A}$, e como $B = A_1 \cup A_2$, temos que $(A_1 \cup A_2) \cup A_3 \in \mathcal{A}$. Podemos proceder dessa forma para qualquer quantidade (enumerável) de conjuntos, de modo que $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}$. Pelas Leis de De Morgan, sabemos que:

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \left( \bigcup_{i=1}^{n} A_i^c \right)^c \tag{1}$$

E pela extenção indutiva em $n$ do axioma $Ax_2$, temos que se $A_i^c \in \mathcal{A}, \forall i$, então $\bigcup_{i=1}^n A_i^c \in \mathcal{A}$. E como, se um conjunto pertence a $\mathcal{A}$ seu complementar deve pertencer também, e pelo resultado em (1), temos então que:

$$\left( \bigcup_{i=1}^{n} A_i^c \right)^c = \left( \bigcap_{i=1}^{n} A_i \right) \in \mathcal{A} \tag{2}$$

Assim provamos o axioma $A_5$ como extensão indutiva dos axiomas anteriores, indicando que tanto a união quanto a interseção dos $A_i$ pertencem à $\mathcal{A}$. Podemos também mostrar que a álgebra $\mathcal{A}$ é fechada também para a operação de diferença entre conjuntos: $A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{A}, A - B = A \cap B^c \in \mathcal{A}$.

*Prova.* Considerando que os conjuntos $A$ e $B pertencem à $\mathcal{A}$, podemos utilizar o axioma $Ax_2$ para mostrar que $A^c \in \mathcal{A}$ e $B^c \in \mathcal{A}$. A partir disso, por meio do axioma $Ax_5$ temos que os seguintes conjuntos também pertencem à $\mathcal{A}$: $A \cup B, A \cup B^c, A^c \cup B, A^c \cup B^c, A \cap B, A \cap B^c, A^c \cap B, A^c \cap B^c$. E como temos que $A \cap B^c = A - B$, temos a prova de que $A - B \in \mathcal{A}$. Além disso, essa prova mostra que a diferença contrária $(B - A = A^c \cap B)$ também pertence à algebra $\mathcal{A}$. $\square$

Ainda considerando os conjuntos $A$ e $B$, existem cinco maneiras como esses conjuntos podem "interagir", e podemos mostrar que em todos os casos a diferença $A - B \in \mathcal{A}$:

- $A \not\subset B$ e $A \not\supset B$ e $A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow A - B = A \cap B^c \in \mathcal{A}$;
- $A \not\subset B$ e $A \not\supset B$ e $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A - B = A \in \mathcal{A}$;
- $A \supset B \Rightarrow A - B = A \cap B^c \in \mathcal{A}$;
- $A \subset B \Rightarrow A - B = \emptyset \in \mathcal{A}$;
- $A = B \Rightarrow A - B = \emptyset \in \mathcal{A}$.

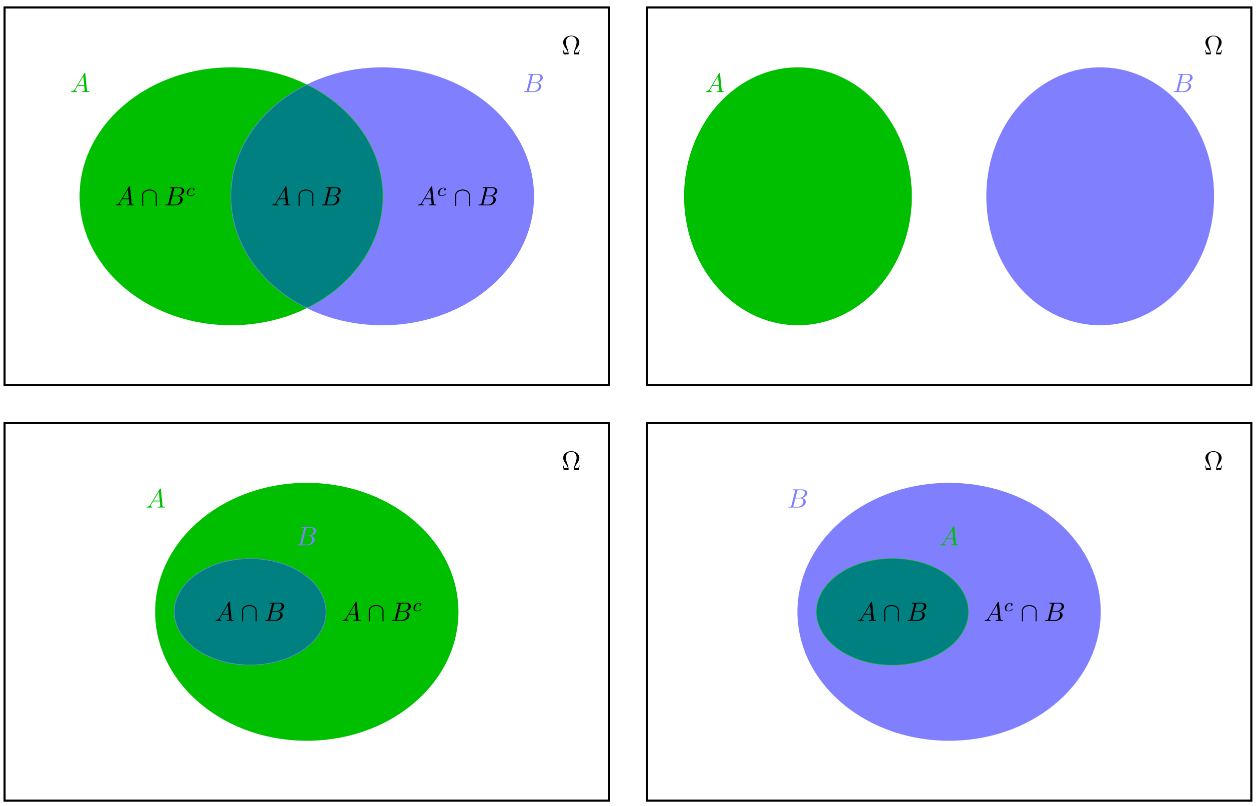



Figure 1: Diferentes relações entre $A$ e $B$ demonstradas por Diagramas de Venn. Note que em todos os casos, $A \cap B^c \in \mathcal{A}$ ou $A \cap B^c = \emptyset \in \mathcal{A}$ ou $A \cap B^c = A \in \mathcal{A}$

As representações por Diagramas de Venn apresentadas na figura 2.2 não é prova formal de que a álgebra $\mathcal{A}$ é fechada para a diferença, mas é um recurso visual que pode auxiliar no entendimento da relação entre os conjuntos.

**Definition 2.5.** Uma classe $\mathcal{A}$ de conjuntos/subconjuntos de $\Omega \neq \emptyset$, verificando os axiomas $Ax_1, Ax_2$ e $Ax_3$ é chamada de $\sigma$-álgebra de subconjuntos de $\Omega$.

Note que uma $\sigma$-álgebra é sempre uma álgebra. Uma outra forma de construir $\sigma$-álgebras é partir de uma álgebra munida dos axiomas de Kolmogorov (Teorema de Carathéodory).

**Proposition 2.1.** *Seja $\mathcal{A}$ uma $\sigma$-álgebra de subconjuntos de $\Omega$, se $A_1, A_2, \dots,$ é uma coleção em $\mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.*

**Example 2.3.** Seja $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ (o lançamento de um dado cúbico usual). A $\sigma$-álgebra usual é definida da seguinte forma e denotada por $\mathcal{P}(\Omega)$ (chamada de partes de $\Omega$ ou *powerset* de $\Omega$):

$$\begin{aligned}\mathcal{A} = \{&\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\},\\ &\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{1,6\},\\ &\{2,3\}, \{2,4\}, \dots,\\ &\Omega\}\end{aligned}$$

**Example 2.4.** Definamos a $\sigma$-álgebra de Borel no intervalo $\Omega = [0,1]$. Uma possível definição seria:

$$\mathcal{A} = \text{ todos os subconjuntos de } [0,1] \text{ cujo cumprimento esteja bem definido}$$

Podemos, por exemplo, propor uma álgebra para o intervalo $[0,1]$ dada por:

$$\mathcal{A}_{\prime} = \{A \subset [0,1] : A \text{ é uma união finita de intervalos }\}$$

É possível encontrar um conjunto $A$ tal que $A \notin \mathcal{A}$, por exemplo:

$$A = \left\{\left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) \cup \dots \cup \left(1 - \frac{1}{2^n}, 1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) \cup \dots\right\}$$

Podemos ver que, para qualquer $n^*$ finito, $\lim_{n \to n^*} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) \neq 1$, de modo que o conjunto $A$ não cobrirá completamente o intervalo $[0,1]$. Dessa forma, a $\sigma$-álgebra de Borel no intervalo $[0,1]$ (denotada $\mathcal{B}_{[0,1]}$) é definida como:

$$\mathcal{B}_{[0,1]} = \{A : A \subset [0,1] \text{ e } A \text{ é boreliano}\}$$

Onde boreliano denota que $A$ é união enumerável (finita ou infinita) de intervalos em $[0,1]$

## 2.3 Axiomas de Kolmogorov

Seja $P : \mathcal{A} \to [0,1]$, com:

- $Ax_1(K) : P(A) \geq 0, \forall A \in \mathcal{A}$;
- $Ax_2(K) : P(\Omega) = 1$;
- $Ax_3(K)$ : Se $A_1, A_2, \dots, A_n : A_i \in \mathcal{A} \forall i$ e $A_i \cap A_j = \emptyset \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}, i \neq j \Rightarrow P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n P(A_k)$.

**Definition 2.6.** Seja $\Omega$ um conjunto não-vazio, $\mathcal{A}$ uma $\sigma$-álgebra em $\Omega$, com $P : \mathcal{A} \to [0,1]$, verificando os axiomas de Kolmogorov, então $P$ é dita finitamente aditiva. Podemos assim, modificar o axioma $Ax_3(K)$ para:

- $Ax_3'(K)$ : Se $A_1, A_2, \dots$ é uma sequência em $\mathcal{A}$ tal que $\forall i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$, tem-se que $P\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) = \sum_{n=1}^\infty P(A_n)$. (*propriedade da $\sigma$-aditividade*)

**Definition 2.7.** $P$ definida em uma $\sigma$-álgebra $\mathcal{A}$, satisfazendo os axiomas de Kolmogorov $(Ax_1(K), Ax_2(K), Ax_3'(K))$ é uma medida de probabilidade em $\mathcal{A}$, constituída pela terna $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

## 2.4 Propriedades da medida de probabilidade

**Proposition 2.2** (Continuidades)**.**

1. *Seja $\{A_i\}_{i=1}^\infty$ uma sequência (crescente) de eventos tais que $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots$, e seja $A = \bigcup_{i=1}^\infty A_i$, então $P(A) = \lim_{i \to \infty} P(A_i)$.*
2. *Seja $\{B_i\}_{i=1}^\infty$ uma sequência (decrescente) de eventos tais que $B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \supseteq \dots$, e seja $B = \bigcap_{i=1}^\infty B_i$, então $P(B) = \lim_{i \to \infty} P(B_i)$.*

*Prova.*

1. Note que, sendo $A_0 = \emptyset$, tem-se que $A = (A_1 - A_0) \cup (A_2 - A_1) \cup (A_3 - A_2) \cup \ldots$, ou seja, $A$ é união disjunta de eventos $D_i = A_i - A_{i-1}$, de forma que $A_{i-1} \subseteq A_i \Rightarrow P(A_i) = P(A_{i-1}) + P(A_i - A_{i-1}) \Rightarrow P(A_i - A_{i-1}) = P(A_i) - P(A_{i-1})$. Logo, temos que:

$$
\begin{aligned}
A = \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i \xRightarrow{Ax_3'(K)} P(A) &= \sum_{i=1}^{\infty} P(D_i) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i - A_{i-1}) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [P(A_i) - P(A_{i-1})] \\
&= \lim_{n\to\infty} [P(A_1) - P(A_0) + P(A_2) - P(A_1) + P(A_3) - P(A_2) + \ldots] \\
&= \lim_{n\to\infty} P(A_n)
\end{aligned}
$$

2. Note que, por De Morgan, $B = \bigcap_{i=1}^{n} B_i = \left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i^c\right)^c$. Logo $P(\bigcap_{i=1}^{n} B_i) = 1 - P(\bigcup_{i=1}^{n} B_i^c)$. Seja $A = B_i^c$ de modo que:

$$
\begin{aligned}
B_1^c &= \Omega - B_1 = A_1 \\
B_2^c &= (B_1 - B_2) \cup (\Omega - B_1) = A_2 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Assim $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots$, e com isso $P(\bigcap_{i=1}^{n} B_i) = 1 - P(\bigcup_{i=1}^{n} B_i^c) = 1 - P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)$. Por outro lado, tem-se que $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i^c \Rightarrow A^c = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i^c\right)^c = \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i = B$. Logo, temos que:

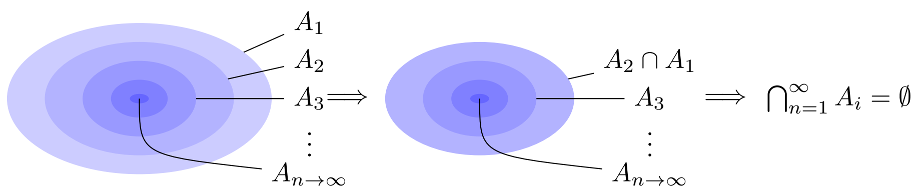
$$
P\left(\bigcap_{i=1}^{n} B_i\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} (1 - P(A)) = P(A^c) = P(B)
$$

$\square$

**Definition 2.8** (Continuidade no vazio)**.**

- $Ax_4(K)$ : Se $\{A_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{A}$ e $A_n \supseteq A_{n+1} \forall n$ e $\bigcap_{n+1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$ então $P(A_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

A prova dessa definição é dada pela segunda parte da prova da proposição 2.2. A representação visual é dada pelo seguinte diagrama:




**Proposition 2.3.** *Dados os axiomas $Ax_1(K), Ax_2(K), Ax_3(K)$, o axioma 4 é equivalente ao axioma $Ax_3'(K)$, ou seja, uma probabilidade finitamente aditiva é uma medida de probabilidade se e somente se é contínua no vazio.*

A prova de que a $\sigma$-aditividade implica o axioma 4 é consequência da prova da proposição anterior, dado que $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$. Para demonstrar o contrário (que $Ax_1(K) + Ax_2(K) + Ax_3(K) + Ax_4(K) \rightarrow Ax_3'(K)$), tomemos uma sequência infinita de eventos $\{A_i\}_{i \geq 1}$ em $\mathcal{A} : A_i \cap A_j = \emptyset \ \forall i \neq j$. Devemos ver que $P(\bigcup_{n=1}^{\infty}) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$. Seja $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = (\bigcup_{n=1}^{k} A_n) \cup (\bigcup_{n=k+1}^{\infty} A_n)$. Tem-se que:

$$P(A) = P\left(\bigcup_{n=1}^{k} A_n\right) + P\left(\bigcup_{n=k+1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{k} P(A_n) + P\left(\bigcup_{n=k+1}^{\infty} A_n\right)$$

Seja $B_k = \bigcup_{n=k+1}^{\infty} A_n$. Note que $B_k \downarrow \emptyset$ quando $k \rightarrow \infty$ de modo que $P(B_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$, logo:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{k} P(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

**Corollary 2.1.** *Os seguintes sistemas são equivalentes:*

$$Ax_1(K), Ax_2(K), Ax_3'(K) \equiv Ax_1(K), Ax_2(K), Ax_3(K), Ax_4(K)$$

## 2.5 Propriedades de probabilidade

Seja $P$ uma probabilidade em uma $\sigma$-álgebra $\mathcal{A}$. Suponhamos que todo $A$ abaixo pertença à $\mathcal{A}$. Então as seguintes propriedades são consequências dos axiomas:

- **P1**: $P(A^c) = 1 - P(A)$;
- **P2**: $0 \leq P(A) \leq 1$;
- **P3**: $A_1 \subset A_2 \Rightarrow P(A_1) \leq P(A_2)$;
- **P4**: $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$;
- **P5**: $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$;

Com essas propriedades, podemos então definir um modelo probabilístico. Sejam:

- **a**) Um espaço amostral: $\Omega \neq \emptyset$;
- **b**) Uma $\sigma$-álgebra em $\Omega$: $\mathcal{A}$;
- **c**) Uma medida de probabilidade em $\mathcal{A}$: $P$.

**Definition 2.9.** Um espaço de probabilidade é uma terna $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ seguindo **a**,**b** e **c**.

## 2.6 Probabilidade Condicional e Independência

Considere o seguinte experimento: um dado é lançado duas vezes e anota-se a dupla de resultados. Temos que:

$$\Omega = \{(i, j) : 1 \leq i \leq 6; 1 \leq j \leq 6; i, j, \in \mathbb{Z}\}$$

Sejam os seguintes eventos:

- $A =$ "*em cada lançamento o valor observado é* $\leq 2$";
- $B =$ "*a soma dos resultados é igual a 4*".

$$A = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$$
$$B = \{(1,3), (3,1), (2,2)\}$$

Já que $\#\Omega = |\Omega| = 36$, e pela equiprobabilidade dos eventos (considerando que os dados são honestos), temos que:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{4}{36}$$
$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{3}{36}$$

Além disso, $(A \cap B) = \{(2,2)\}; P(A \cap B) = 1/36$. Suponha que $A$ ocorre com $P(A) > 0$, e que $B$ é o evento de interesse. Assumindo a potencial ocorrência de $A$, qual é a probabilidade de $B$ ocorrer. Nesse caso $P(B|A) = 1/4$.

**Definition 2.10** (Probabilidade condicional)**.** Sejam $A$ e $B$ eventos em $\mathcal{A}$, com $P(A) > 0$. A probabilidade condicional $P(B|A)$ é definida como:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \tag{3}$$

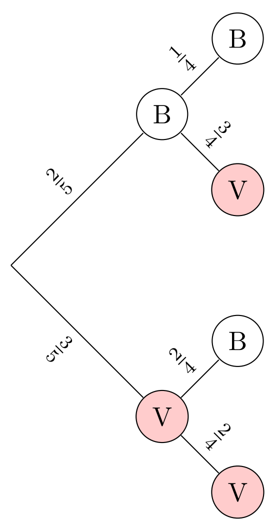
ou equivalentemente:

$$P(A \cap B) = P(B|A)P(A) \tag{4}$$

**Example 2.5.** Considere uma urna com 5 bolas, sendo 3 vermelhas e 2 brancas. O experimento consiste de 2 retiradas sucessivas de uma bola da urna (sem reposição). Considere os eventos $A_1 =$ *Cor da primeira bola* e $A_2 =$ *Cor da segunda bola*:

$$P(A_1 = B) = \frac{2}{5}\ ,\ P(A_1 = V) = \frac{3}{5}$$
$$P(A_2 = B|A_1 = B) = \frac{1}{4}\ ,\ P(A_2 = V|A_1 = B) = \frac{3}{4}$$
$$P(A_2 = B|A_1 = V) = \frac{2}{4}\ ,\ P(A_2 = V|A_1 = V) = \frac{2}{4}$$

Podemos visualizar esse experimento com os seguintes diagrama e tabela de probabilidades:




Resultados

| $A_1$ | $A_2$ | $P(A_1)P(A_2|A_1)$ |
|---|---|---|
| B | B | $2/5 \times 1/4 = 2/20$ |
| B | V | $2/5 \times 3/4 = 6/20$ |
| V | B | $3/5 \times 2/4 = 6/20$ |
| V | V | $3/5 \times 2/4 = 6/20$ |

**Definition 2.11** (Eventos independentes)**.**

- **a**) Os eventos $A$ e $B$ são independentes (denotados como $A \perp B$) se $P(A \cap B) = P(A)P(B)$;
- **b**) $\{A_i, i \in \mathbb{I}\}$ são independentes se $P\left(\bigcap_{i \in \mathcal{J}} A_i\right) = \prod_{i \in \mathcal{J}} P(A_i)$, $\forall$ subfamílias $\mathcal{J}$ de índices em $\mathbb{I}$.

Disso segue que, sendo $A$ e $B$ dois eventos, as seguintes propriedades são válidas:

1. Se $P(A) = 0 \Rightarrow P(A \cap B) = 0 \ \forall B$, ou seja, $A \perp B$;
2. Se $P(B) = 1 \Rightarrow P(A \cap B) = 0 \ \forall A$, ou seja, $A \perp B$;
3. $A$ é independente dele mesmo se e somente se $P(A) = 0$ ou $P(A) = 1$;
4. $A \perp B \Rightarrow A \perp B^c, A^c \perp B, A^c \perp B^c$;
5. As seguintes proposições são equivalentes:
   - a) $(A \perp B) \Rightarrow P(B|A) = P(B)$ e $P(B|A^c) = P(B)$;
   - b) $P(B|A) = P(B) \Rightarrow A \perp B$;
   - c) $P(B|A^c) = P(B) \Rightarrow A \perp B$.

**Theorem 2.1** (Teorema das Probabilidades Totais)**.**

1. *Dados $A$ e $B$ eventos em $\mathcal{F}$:*

$$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c)$$

2. *No geral, se $B_1, B_2, \ldots, B_n$ é uma partição de $\Omega$, então:*

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i) \tag{5}$$

**Demonstração**: Note que $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$ e $(B \cap B^c) = \emptyset$ e $(B \cup B^c) = \Omega$. Além disso, $(A \cap B) \cap (A \cap B^c) = \emptyset$, logo $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$. Como, por definição, $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$ e $P(A|B^c) = P(A \cap B^c)/P(B^c)$, temos que:

$$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c)$$

Para o caso geral, temos que $\{B_i\}_{i=1}^n$, $(B_i \cap B_j) = \emptyset \ \forall i, j$ e $\bigcup_{i=1}^n B_i = \Omega$. Logo:

$$\begin{aligned} A &= (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \ldots \cup (A \cap B_n) \\ &\Downarrow \text{ Pela } \sigma\text{-aditividade} \\ P(A) &= \sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i) \end{aligned}$$

E como $P(A|B_i) = P(A \cap B_i) \ P(B_i)$:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)$$

## 2.7 Fórmula de Poincaré e Teorema de Bayes

**Theorem 2.2** (Fórmula de Poincaré)**.** *Seja $\{A_i\}_{i \geq 1} \subseteq \mathcal{F}$. Então:*

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_n\right) = &\sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}) - \ldots \\ &+ (-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) \end{aligned} \tag{6}$$

A demonstração da fórmula (6) é dada no exercício 2.10.

**Theorem 2.3** (Teorema de Bayes)**.** *Seja $\{B_i\}_{i=1}^n$ uma partição de $\Omega$ e $A$ um evento em $\mathcal{F}$, temos que:*

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A|B_j)P(B_j)} \tag{7}$$

O denominador de (7) é derivado do teorema das probabilidades totais, visto que $\{B_i\}_{i=1}^n$ é uma partição de $\Omega$.

**Lemma 2.1.** *Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eventos em $\mathcal{F}$, logo:*

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)\ldots P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1})$$

*Prova.* Suponha a validade do lema anterior. Logo, seja $D = (\bigcap_{i=1}^{n} A_i)$:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap \ldots \cap A_n \cap A_{n+1}) &= P(D \cap A_{n+1}) \\ &= P(D)P(A_{n+1}|D) \\ &= P(A_1)P(A_2|A_1)\ldots P(A_n|A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1})P(A_{n+1}|A_1 \cap \ldots \cap A_n) \end{aligned}$$

□

## 2.8 Exercícios

**Exercise 2.1** (BJ 1.1)**.** Sejam $A, B$ e $C$ eventos aleatórios. Identifique as seguintes equações e frases, casando cada equação expressa na notação de conjuntos com a correspondente frase na linguagem de eventos:

| | |
|---|---|
| $A \cap B \cap C = A \cup B \cup C$ | A e "B ou C" são incompatíveis. |
| $A \cap B \cap C = A$ | Os eventos A,B e C são idênticos. |
| $A \cup B \cup C = A$ | A ocorrência de A implica a de "B e C". |
| $(A \cup B \cup C) - (B \cup C) = A$ | A ocorrência de A decorre de "B ou C". |

**Exercise 2.2** (BJ 1.2)**.** A partir dos axiomas, prove a propriedade $P5$:

$$P\left(\bigcup_{n=i}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

*Resposta.* Consideremos uma prova por indução para $n \to \infty$:
Para $n = 2$:

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_1^c \cap A_2)$$

Considerando que $(A_1^c \cap A_2) \subset A_2$ e o fato de que $(A_1) \cap (A_1^c \cap A_2) = \emptyset$, temos pela propriedade $P3$ que $P(A_1^c \cap A_2) \leq P(A_2)$, de modo que:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_1^c \cap A_2) \leq P(A_2) \\ \leq P(A_1) + P(A_2) \\ \leq \sum_{i=1}^{2} P(A_i) \end{aligned}$$

De modo semelhante, podemos fazer para $n$:

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=i}^{n} A_i\right) &= P(A_1) + P(A_1^c \cap A_2) + \ldots \\ &\leq P(A_1) + P(A_2) + \ldots \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \end{aligned}$$

Consideremos então uma sequência de eventos $A_i^*, \forall i \in \{n+1, n+2, \ldots\}$, disjuntos de $A_i$. Denotemos ainda $A = (\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \cup \left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i\right)$. Pela aditividade infinita (ou ainda pela $\sigma$-aditividade), temos que:

$$P\left(\bigcup_{n=i}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i) + P\left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i\right)$$

Que por serem disjuntos, pelo axioma $Ax_4$ tem que $\left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i\right) \downarrow \emptyset$, de modo que $P\left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i\right) \to 0$. Logo, tem-se que:

$$P\left(\bigcup_{n=i}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

□

**Exercise 2.3** (BJ 1.3)**.** Sejam $A_1, A_2, \ldots$ eventos aleatórios. Mostre que:

a) $P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) \geq 1 - \sum_{k=1}^{n} P(A_k^c)$

*Resposta.* Por De Morgan temos que $\bigcap_{k=1}^{n} A_k = \left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k^c\right)^c$, de modo que:

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) &= P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k^c\right)^c \\ &= 1 - P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k^c\right) \xRightarrow{\text{Por P4}} P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k^c\right) \leq \sum_{k=1}^{n} P\left(A_k^c\right) \\ &\geq 1 - \sum_{k=1}^{n} P\left(A_k^c\right) \end{aligned}$$

□

b) Se $P(A_k) \geq 1 - \epsilon$ para $k = 1, 2, \ldots, n$, então $P(\bigcap_{k=1}^{n} A_k) \geq 1 - n\epsilon$

*Resposta.* É fácil ver que:

$$P(A_k) \geq 1 - \epsilon \Rightarrow P(A_k^c) \leq 1 - (1 - \epsilon) = \epsilon$$

E de modo semelhante ao que foi feito na questão anterior (utilizando De Morgan), temos que:

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k^c\right)^c &= 1 - P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k^c\right) \\ &\geq 1 - \sum_{k=1}^{n} P\left(A_k^c\right) \\ &\geq 1 - \sum_{k=1}^{n} \epsilon \\ &\geq 1 - n\epsilon \end{aligned}$$

□

c) $P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) \geq 1 - \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k^c)$

*Resposta.* De maneira semelhante ao que foi visto na prova da letra **a**, temos que:

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) &= P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k^c\right)^c \\ &= 1 - P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k^c\right) \xRightarrow{\text{Por P5}} P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k^c\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} P\left(A_k^c\right) \\ &\geq 1 - \sum_{k=1}^{\infty} P\left(A_k^c\right) \end{aligned}$$

Para ver a demonstração da propriedade $P5$, vide exercício 2.2. □

**Exercise 2.4** (BJ 1.4)**.** Demonstre as seguintes propriedades:

a) Se $P(A_n) = 0$ para $n = 1, 2, \ldots$, então $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0$.

*Resposta.* Utilizando a propriedade $P5$, temos que:

$$
\begin{aligned}
P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} 0 \\
&\leq 0 \\
&\Big\downarrow \text{ Por } P2 \\
P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) &= 0
\end{aligned}
$$

□

b) Se $P(A_n) = 1$ para $n = 1, 2, \ldots$, então $P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1$.

*Resposta.* Levando em consideração que se $P(A_n) = 1 \Rightarrow P(A_n^c) = 0$ (pela propriedade $P1$), utilizando De Morgan e a prova da letra **c** do exercício 2.3, temos que:

$$
\begin{aligned}
P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) &\geq 1 - \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n^c) \\
&\geq 1 - \sum_{n=1}^{\infty} 0 \\
&\geq 1 - 0 \\
&\geq 1 \\
&\Big\downarrow \text{ Por } P2 \\
P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) &= 1
\end{aligned}
$$

□

**Exercise 2.5** (BJ 1.6)**.** Seja $\Omega$ um conjunto não-vazio.

a) Prove: se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são $\sigma$-álgebras de subconjuntos de $\Omega$, então $(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$ também é uma $\sigma$-álgebra.

*Resposta.* Para que $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ seja uma $\sigma$-álgebra, é necessário que cumpram-se os axiomas $Ax_1, Ax_2$ e $Ax_3$:

- $Ax_1$: Sabemos que $\Omega \in \mathcal{A}$ e $\Omega \in \mathcal{B}$, logo sabemos que $\Omega \in (\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$;
- $Ax_2$: Seja um evento $E \in (\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$, sabemos então que $E \in \mathcal{A}$ e $E \in \mathcal{B}$, logo $E^c \in \mathcal{A}$ e $E^c \in \mathcal{B}$, portanto $E^c \in (\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$;
- $Ax_3$: Sejam dois eventos, $E_1 \in (\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$ e $E_2 \in (\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$. Com isso, temos que $E_1, E_2 \in \mathcal{A}$ e $E_1, E_2 \in \mathcal{B}$, portanto $(E_1 \cup E_2) \in \mathcal{A}$ e $E_1 \cup E_2 \in \mathcal{B}$, logo $(E_1 \cup E_2) \in (\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$.

Como os três axiomas foram cumpridos, temos que $(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$ é uma $\sigma$-álgebra. □

b) Generalize o item (a): se $\mathcal{A}_i, i \in \mathcal{I}$, são $\sigma$-álgebras de partes de $\Omega$, onde $\mathcal{I}$ é um conjunto não-vazio de índices, então $\bigcap_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{A}_i$ também é uma $\sigma$-álgebra.

*Resposta.* Como anteriormente, temos que mostrar que $\bigcap_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{A}_i$ cumpre os axiomas $Ax_1, Ax_2$ e $Ax_3$:

- $Ax_1$: Sabemos que $\Omega \in \mathcal{A}_i,\ \forall i \in \mathcal{I}$, logo sabemos que $\Omega \in \bigcap_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{A}_i$;
- $Ax_2$: Seja um evento $E \in \bigcap_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{A}_i$, sabemos então que $E \in \mathcal{A}_i,\ \forall i \in \mathcal{I}$, logo $E^c \in \mathcal{A}_i,\ \forall i \in \mathcal{A}$, portanto $E^c \in \bigcap_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{A}_i$;
- $Ax_3$: Sejam dois eventos, $E_1 \in \bigcap_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{A}_i$ e $E_2 \in \bigcap_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{A}_i$. Com isso, temos que $E_1, E_2 \in \mathcal{A}_i,\ \forall i \in \mathcal{I}$, portanto $(E_1 \cup E_2) \in \mathcal{A}_i,\ \forall i \in \mathcal{I}$, logo $(E_1 \cup E_2) \in \bigcap_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{A}_i$.

Vemos portanto que, por cumprir os axiomas $Ax_1, Ax_2$ e $Ax_3$, $\bigcap_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{A}_i$ é também uma $\sigma$-álgebra. □

c) Seja $\mathbb{C}$ uma classe de subconjuntos de $\Omega$. Mostre que existe *pelo menos uma* $\sigma$-álgebra que contém $\mathbb{C}$.

*Resposta.* É fácil ver que a maior classe de subconjuntos de $\Omega$ é o conjunto das partes de $\Omega$, denotado como $\mathcal{P}(\Omega)$ (definido no exemplo 2.3). Assim, temos que $\mathbb{C} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$, de modo que, pelo menos a $\sigma$-álgebra formada por $\mathcal{P}(\Omega)$ contém $\mathbb{C}$. □

d) Visando a plena utilização dos itens (b) e (c), como você definiria "a menor $\sigma$-álgebra contendo $\mathbb{C}$", onde $\mathcal{C}$ é uma classe de subconjuntos de $\Omega$?

*Resposta.* Considere que temos $\sigma$-álgebras de partes de $\Omega$, $\mathcal{A}_i$ com $i \in \mathbb{I}$ (sendo $\mathbb{I}$ um conjunto não-vazio de índices), tais que $\mathbb{C} \in \mathcal{A}_i : \forall i \in \mathbb{I}$. Assim, sabemos que algum dos $\mathcal{A}_i$ é a menor $\sigma$-álgebra que contém $\mathbb{C}$, de modo que $\bigcap_{i\in\mathbb{I}} A_i$ será a menor $\sigma$-álgebra que contém $\mathbb{C}$. □

**Exercise 2.6** (BJ 1.9)**.** Uma caixa contém $2n$ sorvetes, $n$ do sabor $A$ e $n$ do sabor $B$. De um grupo de $2n$ pessoas, $a < n$ preferem o sabor $A$, $b < n$ o sabor $B$ e $2n - (a + b)$ não tem preferência. Demonstre: se os sorvetes são distribuídos ao acaso, a probabilidade de que a preferência de todas as pessoas seja respeitada é de $\binom{2n-a-b}{n-a}/\binom{2n}{n}$.

*Resposta.* Sabendo que a ordem de entrega dos $n$ sorvetes de cada sabor, para as $2n$ pessoas não importa, temos que a quantidade possível de entregas diferentes é:

$$|\Omega| = \binom{2n}{n}$$

Considere que o evento $R$ indica o caso em que todos tiveram sua preferência respeitada. Podemos ver que:

$$P(R) = \frac{|R|}{|\Omega|} = \frac{|R|}{\binom{2n}{n}}$$

Para que $R$ ocorra, é necessário que as $a$ pessoas que preferem $A$ recebam esse sabor, bem como as $b$ pessoas que preferem $B$. Dessa forma, temos que distribuir os $2n - (a + b)$ sorvetes restantes para as pessoas que não tem preferência. Assim, primeiramente temos os $n - a$ sorvetes do sabor $A$ que não foram alocados, de forma que:

$$\binom{2n-a-b}{n-a} = \frac{(2n-a-b)!}{(2n-a-b-n+a)!(n-a)!} = \frac{(2n-a-b)!}{(n-b)!(n-a)!} \tag{8}$$

E podemos mostrar que, caso fossemos alocar os $n - b$ sorvetes do sabor $B$ para as $2n - (a + b)$ pessoas sem preferência, teríamos:

$$\binom{2n-a-b}{n-b} = \frac{(2n-a-b)!}{(2n-a-b-n+b)!(n-b)!} = \frac{(2n-a-b)!}{(n-a)!(n-b)!} \tag{9}$$

Como (8) e (8) são iguais, podemos ver que a alocação dos sorvetes restantes não depende de qual sabor já foi alocado. Assim, temos que $|R| = \binom{2n-a-b}{n-a} = \binom{2n-a-b}{n-b}$, portanto:

$$P(R) = \frac{|R|}{|\Omega|} = \frac{\binom{2n-a-b}{n-a}}{\binom{2n}{n}}$$

□

**Exercise 2.7** (BJ 1.10)**.** Suponhamos que dez cartas estejam numeradas de 1 até 10. Das dez cartas, retira-se uma de cada vez, ao acaso e sem reposição, até retirar-se o primeiro número par. Conta-se o número de retiradas necessárias. Exiba um bom modelo probabilístico para esse experimento.

*Resposta.* Dada essa formulação, temos que 5 cartas são pares e 5 são ímpares. Assim, considere o evento $\{Y_k \ : 1 \leq k \leq 6; k \in \mathbb{Z}\}$ em que $k$ indica que a $k$-ésima retirada contém a primeira carta par. Assim, por exemplo, $Y_1$ indica o evento em que a primeira carta retirada é par, $Y_2$ o evento em que a segunda carta retirada é par, e assim por diante.
O nosso espaço amostral é (visto que o número da carta não importa, apenas se é $P =$ "par" ou $I =$ "ímpar"):

$$\Omega = \{(P), (I, P), (I, I, P), (I, I, I, P), (I, I, I, I, P), (I, I, I, I, I, P)\}$$

É fácil ver que não é possível ter $\{Y_k : k \geq 7\}$, já que as cartas são retiradas sem reposição. Podemos facilmente calcular as probabilidades de cada evento em $\Omega$, como segue:

$$\begin{aligned}
P(Y_1) &= \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \\
P(Y_2) &= \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{5}{18} \\
P(Y_3) &= \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{8} = \frac{5}{36} \\
P(Y_4) &= \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{5}{84} \\
P(Y_5) &= \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{252} \\
P(Y_6) &= \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{5} = \frac{1}{252}
\end{aligned}$$

Podemos ver que $\sum_{k=1}^{6} P(Y_k) = 1$, e além disso, podemos denotar as probabilidades a partir da seguinte função:

$$P(Y_k) = \frac{5}{11-k} \cdot \prod_{n=1}^{k-1} \frac{6-n}{11-n} \tag{10}$$

A segunda parcela da equação (10) é válida para $k \geq 2$, pois ela representa as $k-1$ cartas ímpares retiradas antes da primeira carta par, caso que só ocorre caso $k \geq 2$. □

**Exercise 2.8** (BJ 1.11)**.** Para cada um dos seguintes experimentos, descreva um espaço de probabilidade que sirva de modelo:

a) Seleciona-se um ponto, ao acaso, do quadrado unitário

$$\{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$$

*Resposta.* Temos que:

$$\Omega = \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2\}$$

Pela continuidade no vazio, é necessário que a probabilidade de ocorrência de um determinado ponto ser igual a zero, de modo que uma medida de probabilidade possível é por meio de intervalos. Considerando que $x \sim U(0, 1)$ e $y \sim U(0, 1)$ (ou seja, $x$ e $y$ são uniformemente distribuídos), podemos encontrar a probabilidade de $(x, y) \in \mathbb{I}$, com $\mathbb{I}$ sendo um intervalo no cartesiano $[0, 1] \times [0, 1] \in \mathbb{R}^2$, por meio da distribuição de probabilidade conjunta de $x$ e $y$. □

b) Retiram-se cartas sucessivamente de um baralho de 52 cartas, ao acaso e *com* reposição, até retirar-se o primeiro rei. Registra-se o número total de retiradas.

*Resposta.* Considere que $\{Y : Y \in \{1, 2, \dots\}\}$ indica a quantidade de retiradas necessárias até o primeiro rei. O espaço amostral é dado diretamente: $\Omega = \{1, 2, 3, \dots\}$. Temos que, para cada retirada, a probabilidade da carta ser um rei é $4/52 = 1/13$ (considerando que temos 4 reis no baralho), e a probabilidade de não ser é de $48/52 = 12/13$. Assim, a probabilidade de que a primeira retirada seja um rei é de:

$$P(Y = 1) = \frac{1}{13}$$

Caso isso não ocorra, a probabilidade de que o primeiro rei ocorra na segunda retirada é de:

$$P(Y = 2) = \frac{12}{13} \cdot \frac{1}{13}$$

É possível verificar que, para todo $n \in \mathcal{N}$ a probabilidade de que o primeiro rei ocorra na retirada $n$ é de:

$$P(Y = n) = \left(\frac{12}{13}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{13}\right)$$

Esse modelo de probabilidade é denotado modelo geométrico. □

c) Quinze bolas são retiradas, ao acaso e *com* reposição, de uma urna contendo 5 bolas vermelhas, 9 bolas pretas e uma bola branca. Observa-se o número que ocorre cada cor.

*Resposta.* Sejam os eventos $V, P$ e $B$ o número de vezes que as retiradas foram de bolas vermelhas, pretas e brancas, respectivamente. É necessário (pela definição do modelo) que $V + P + B = 15$, mas consideremos o caso em que o número de retiradas seja $n$. Assim, para $n = 1$, o espaço amostral $\Omega$ é:

$$\Omega = \{(V), (P), (B)\}$$

E as probabilidades de cada evento são:

$$\begin{aligned} P(V = 1) &= \frac{5}{15} \\ P(P = 1) &= \frac{9}{15} \\ P(B = 1) &= \frac{1}{15} \end{aligned}$$

Para $n = 2$ bolas retiradas, temos que o espaço amostral é:

$$\begin{aligned} \Omega = \{&(V, V), (V, P), (V, B), \\ &(P, V), (P, P), (P, B), \\ &(B, V), (B, P), (B, B)\} \end{aligned}$$

E as probabilidades de cada evento são:

$$\begin{aligned} P(V, V) &= \frac{5}{15} \cdot \frac{5}{15}; P(V, P) = \frac{5}{15} \cdot \frac{9}{15}; P(V, B) = \frac{5}{15} \cdot \frac{1}{15}; \\ P(P, V) &= \frac{9}{15} \cdot \frac{5}{15}; P(P, P) = \frac{9}{15} \cdot \frac{9}{15}; P(P, B) = \frac{9}{15} \cdot \frac{1}{15}; \\ P(B, V) &= \frac{1}{15} \cdot \frac{5}{15}; P(B, P) = \frac{1}{15} \cdot \frac{9}{15}; P(B, B) = \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{15} \end{aligned}$$

Aqui é possível ver o padrão que surge para esse problema. Temos que os eventos $V, P, B$ formam uma permutação (com repetição) da quantidade de bolas retiradas. A fórmula para a permutação com repetição de $n$ elementos, em que cada um aparece $k_1, k_2, \dots k_j$ vezes é dada por:

$$P_n^{k_1,k_2,\dots,k_j} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_j!}$$

Assim, podemos considerar que cada evento irá aparecer uma quantidade $V = v, P = p, B = b$ de vezes, com a seguinte probabilidade:

$$P(V = v, P = p, B = b) = \frac{15!}{v!p!b!} \cdot \left(\frac{5}{15}\right)^v \cdot \left(\frac{9}{15}\right)^p \cdot \left(\frac{1}{15}\right)^b \text{ ; com } v + p + b = 15$$

Caso seja necessário, podemos ainda generalizar para uma quantidade $n : 1 \leq n \leq 15$ de retiradas:

$$P(V = v, P = p, B = b) = \frac{n!}{v!p!b!} \cdot \left(\frac{5}{15}\right)^v \cdot \left(\frac{9}{15}\right)^p \cdot \left(\frac{1}{15}\right)^b \text{ ; com } v + p + b = n$$

Em que verifica-se facilmente que é válido para os casos em que $n = 1$ e $n = 2$ demonstrados anteriormente. □

d) O experimento (**c**) é realizado *sem* reposição.

*Resposta.* Como temos 15 bolas que serão retiradas *sem* reposição, o único evento possível após as 15 serem retiradas é:

$$\Omega = \{(V = 5, P = 9, B = 1)\}$$

E a probabilidade de isso ocorrer é 1 (visto que é o único evento no espaço amostral). Caso consideremos uma quantidade de retiradas $n < 15$, temos que o modelo de probabilidade é diferente. Consideremos que $V + P + B = n$ e que a quantidade de vezes que cada cor aparece é $v, p$ e $b$, respectivamente. Então, como a ordem com que as cores são retiradas não importa, a probabilidade de aparecer uma quantidade de bolas de cada cor é dada por:

$$P(V = v, P = p, B = b) = \frac{\binom{5}{v}\binom{9}{p}\binom{1}{b}}{\binom{15}{n}}, \quad v + p + b = n$$

Esse modelo de probabilidade é chamado de multinomial hipergeométrico, e é uma generalização do modelo hipergeométrico para mais de duas classes (como é o caso). □

**Exercise 2.9** (BJ 1.12)**.** Retiram-se 4 cartas, ao acaso, de um baralho de 52 cartas. Registra-se o número de reis na amostra. Exiba um bom modelo probabilístico para este experimento se:

a) As retiradas são feitas *sem* reposição.

*Resposta.* Considerando que em um baralho usual tem 52 cartas, e que a ordem com que cada uma das 4 cartas retiradas da amostra não importa (apenas importa a quantidade de reis na amostra), a quantidade total de amostras possíveis é $\binom{52}{4}$.
Como temos 4 reis no baralho, isso implica que há 48 cartas que são "não-reis". Dessa forma, se na amostra forem coletados $k$ reis, serão coletados também $4 - k$ "não-reis", com os $k$ reis podendo aparecer de $\binom{4}{k}$ maneiras diferentes (não importa qual o rei foi registrado) e os $4 - k$ "não-reis" podem aparecer de $\binom{48}{4-k}$ maneiras diferentes.
Assim, seja $K$ o evento registrar $k$ reis na amostra, a probabilidade $P(K = k)$ é dada por:

$$P(K = k) = \frac{\binom{4}{k}\binom{48}{4-k}}{\binom{52}{4}} \tag{11}$$

Esse modelo é chamado de hipergeométrico, que vale quando sabemos a quantidades de sucessos totais na população, e queremos contar a quantidade de sucessos coletados em uma amostra finita da população (que também deve ser finita). □

b) As retiradas são feitas *com* reposição.

*Resposta.* Se as retiradas são feitas com reposição, a probabilidade de registrar um rei em cada retirada é de $4/52$ e a probabilidade de registrar um "não-rei" é de $48/52$. Como a ordem das retiradas não importa, podemos ver que em uma amostra de tamanho 4, os $k$ reis podem aparecer de $\binom{4}{k}$ maneiras diferentes. Além disso, podemos ver que, como irão aparecer $k$ reis na amostra, consequentemente irão aparecer $4-k$ "não-reis".
Assim, seja $K$ o evento registrar $k$ reis na amostra, a probabilidade $P(K=k)$ é dada por:

$$P(K=k) = \binom{4}{k}\left(\frac{4}{52}\right)^k\left(\frac{48}{52}\right)^{4-k} \tag{12}$$

Esse modelo é chamado de binomial, e vale quando queremos encontrar a probabilidade de ocorrer $k$ sucessos em uma amostra de tamanho $n$, dado que a probabilidade de cada sucesso é fixa. □

c) Determine em que caso, (a) ou (b), é mais provável obter 4 reis.

*Resposta.* Substituindo os valores de $k$ em (11) e (12) para 4, podemos calcular as probabilidades em cada caso. Assim:

$$P(K=k) = \frac{\binom{4}{4}\binom{48}{0}}{\binom{52}{4}} \approx 3.7\times 10^{-6}$$
$$P(K=k) = \binom{4}{4}\left(\frac{4}{52}\right)^4\left(\frac{48}{52}\right)^0 \approx 3.5\times 10^{-5}$$

De modo que é possível ver que no caso com reposição a probabilidade de encontrar 4 reis é maior. □

**Exercise 2.10** (BJ 1.13)**.**

a) Sejam $A, B$ e $C$ eventos aleatórios em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Mostre que

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$$

e

$$P(A\cup B\cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A\cap B) - P(A\cap C) - P(B\cap C) + P(A\cap B\cap C)$$

*Resposta.* Podemos escrever os eventos $A$ e $B$ como as seguintes uniões de eventos disjuntos:

$$A = (A\cap B)\cup(A\cap B^c)$$
$$B = (A\cap B)\cup(A^c\cap B)$$

Utilizando a propriedade da aditividade finita $(P3)$, temos que:

$$\begin{aligned} P(A) = P(A\cap B) + P(A\cap B^c) \Rightarrow P(A\cap B^c) = P(A) - P(A\cap B) \\ P(B) = P(A\cap B) + P(A^c\cap B) \Rightarrow P(A^c\cap B) = P(B) - P(A\cap B) \end{aligned} \tag{13}$$

Além disso, podemos escrever o evento $(A\cup B)$ como a seguinte união disjunta de eventos:

$$(A\cup B) = (A\cap B^c)\cup(A^c\cap B)\cup(A\cap B)$$

Por fim, utilizando os resultados de (13) e a aditividade finita, temos que:

$$
\begin{aligned}
P(A \cup B) &= P(A \cap B^c) + P(A^c \cap B) + P(A \cap B) \\
&= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) + P(A \cap B) \\
&= P(A) + P(B) - P(A \cap B)
\end{aligned}
$$

Para a segunda expressão, podemos levar em consideração que os conjuntos $A, B$ e $C$ podem ser escritos como uniões de eventos disjuntos da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
A &= (A \cap B^c \cap C^c) \cup (A \cap B \cap C^c) \cup (A \cap B^c \cap C) \cup (A \cap B \cap C) \\
B &= (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C) \\
C &= (A^c \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C) \cup (A \cap B^c \cap C) \cup (A \cap B \cap C)
\end{aligned}
$$

Nos utilizando novamente da aditividade finita, temos que:

$$
\begin{aligned}
P(A) &= P(A \cap B^c \cap C^c) + P(A \cap B \cap C^c) + P(A \cap B^c \cap C) + P(A \cap B \cap C) \\
P(B) &= P(A^c \cap B \cap C^c) + P(A \cap B \cap C^c) + P(A^c \cap B \cap C) + P(A \cap B \cap C) \\
P(C) &= P(A^c \cap B^c \cap C) + P(A^c \cap B \cap C) + P(A \cap B^c \cap C) + P(A \cap B \cap C)
\end{aligned}
$$

De maneira similar ao que fizemos na demonstração anterior, podemos isolar as probabilidades à direita, como por exemplo:

$$
P(A \cap B \cap C^c) = P(A) - P(A \cap B^c \cap C^c) - P(A \cap B^c \cap C) - P(A \cap B \cap C) \tag{14}
$$

Mas vale notar que, por serem eventos disjuntos:

$$
P(A \cap B^c \cap C^c) + P(A \cap B^c \cap C) = P(A - B) = P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)
$$

De modo que a equação (14) pode ser reescrita como:

$$
\begin{aligned}
P(A \cap B \cap C^c) &= P(A) - P(A) + P(A \cap B) - P(A \cap B \cap C) \\
&= P(A \cap B) - P(A \cap B \cap C)
\end{aligned}
$$

Assim, podemos denotar as seguintes probabilidades:

$$
\begin{aligned}
P(A \cap B \cap C^c) &= P(A \cap B) - P(A \cap B \cap C) \\
P(A \cap B^c \cap C) &= P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C) \\
P(A^c \cap B \cap C) &= P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C)
\end{aligned} \tag{15}
$$

Utilizando os resultados de (15), podemos isolar as outras probabilidades, tais como:

$$
\begin{aligned}
P(A \cap B^c \cap C^c) &= P(A) - P(A \cap B \cap C^c) - P(A \cap B^c \cap C) - P(A \cap B \cap C) \\
&= P(A) - P(A \cap B) + P(A \cap B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C) - P(A \cap B \cap C) \\
&= P(A) - P(A \cap B) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)
\end{aligned}
$$

De modo que podemos denotar as seguintes probabilidades:

$$
\begin{aligned}
P(A \cap B^c \cap C^c) &= P(A) - P(A \cap B) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C) \\
P(A^c \cap B \cap C^c) &= P(B) - P(A \cap B) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) \\
P(A^c \cap B^c \cap C) &= P(C) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)
\end{aligned} \tag{16}
$$

O evento $(A \cup B \cup C)$ pode ser escrito como a seguinte união de eventos disjuntos (de fácil verificação que são disjuntos dois a dois):

$$\begin{aligned}(A \cup B \cup C) =&(A \cap B \cap C^c) \cup (A \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C) \cup \\ &(A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C) \cup \\ &(A \cap B \cap C)\end{aligned} \tag{17}$$

Por fim, valendo-se da aditividade finita e substituindo em (17) os resultados obtidos em (15) e (16), temos que:

$$\begin{aligned}P(A \cup B \cup C) =&P(A \cap B \cap C^c) + P(A \cap B^c \cap C) + P(A^c \cap B \cap C) + P(A \cap B^c \cap C^c) + \\ &P(A^c \cap B \cap C^c) + P(A^c \cap B^c \cap C) + P(A \cap B \cap C) \\ =&P(A \cap B) - P(A \cap B \cap C) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C) + \\ &P(A) - P(A \cap B) - P(A \cap C) + P(B) - P(A \cap B) - P(B \cap C) + P(C) - P(A \cap C) - \\ &P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) \\ =&P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)\end{aligned}$$

□

b) Enuncie a generalização do item **(a)** para o caso da união de $n$ eventos aleatórios.

*Resposta.* Podemos ver que as demonstrações anteriores podem ser escritas como:

$$\begin{aligned}P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_n\right) =&\sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \sum_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}) - \dots \\ &+ (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k})\end{aligned} \tag{18}$$

Esse é chamado de princípio de inclusão-exclusão. □

c) Prove as seguintes *desigualdades de Bonferroni*:

$$(i)\ \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le n} P(A_i \cap A_j) \le P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_n\right) \le \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le n} P(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \le i < j < k \le n} P(A_i \cap A_j \cap A_k)$$

*Resposta.* Podemos demonstrar a primeira desigualdade utilizando a equação (18):

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le n} P(A_i \cap A_j) \le&P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_n\right) \\ 0 \le&P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_n\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le n} P(A_i \cap A_j\right) \\ 0 \le&\sum_{1 \le i < j < k \le n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \sum_{1 \le i < j < k < l \le n} P(A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l) + \dots \\ &+ (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k})\end{aligned} \tag{19}$$

E como $(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_n}) \subseteq (A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_{n-1}}) \Rightarrow P((A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_n})) \leq P((A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_{n-1}}))$, temos que a expressão (19) é maior que 0. Para a segunda desigualdade, vamos nos valer do mesmo princípio:

$$
\begin{aligned}
P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_n\right) &\leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) \\
0 &\leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \left(P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_n\right)\right) \qquad (20) \\
0 &\leq \sum_{1 \leq i < j < k < l \leq n} P(A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l) - \ldots - (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k})
\end{aligned}
$$

E da mesma forma que antes, é possível ver que a última expressão em (20) é maior que 0. □

$(ii)$ Se $k$ é ímpar, $k \leq n$, então:

$$
\begin{aligned}
P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_n) &- \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \ldots \\
&+ (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k});
\end{aligned}
$$

se $k$ é par, $k \leq n$, vale $\geq$ nesta última desigualdade.

*Resposta.* Como $k \leq n$, podemos separar a desigualdade em dois casos:

1. $k = n$;
2. $k < n$;

No primeiro caso é fácil ver que a expressão se iguala à generalização para a união dada em (18). Para o segundo caso, temos que:

$$
\begin{aligned}
P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) =& \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \ldots \\
&+ \underbrace{(-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_{k-1} < i_k} P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k})}_{\text{Termo k}} + \underbrace{(-1)^{k} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k < i_{k+1}} P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_{k+1}})}_{\text{Termo k+1}} + \ldots
\end{aligned}
$$

Como $k$ é ímpar, o termo $k$ será positivo e o termo $k+1$ será negativo. Assim, se subtrairmos os $k+j,\ j \in \{1, \ldots, n-k\}$ termos de ambos os lados, teremos:

$$
\begin{aligned}
P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) - \left((-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k < i_{k+1}} P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_{k+1}}) + \ldots\right) =& \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \ldots \\
&+ (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_{k-1} < i_k} P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k})
\end{aligned}
$$

E podemos ver que:

$$
P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) - \left((-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k < i_{k+1}} P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_{k+1}}) + \ldots\right) \geq P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)
$$

De modo que:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_n) - \sum_{1\leq i_1<i_2\leq n} P(A_{i_1}\cap A_{i_2}) + \dots$$
$$+ (-1)^{k-1} \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_{k-1}<i_k} P(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k})$$

Se $k$ for par, o termo $k$ será negativo e o termo $k+1$ será positivo, de modo que a desigualdade anterior se inverte, ao fazer a subtração dos $k+j,\ j\in\{1,\dots,n-k\}$ termos na igualdade. □

**Exercise 2.11** (BJ 1.15)**.** Suponha que $n$ cartas numeradas de 1 até $n$ sejam embaralhadas e retiradas uma por uma, sem reposição, até todas as cartas serem retiradas. Qual a probabilidade de que para pelo menos uma carta, o número da carta coincida com o número da retirada?

*Resposta.* Seja $A_i$ o evento em que o número da carta $i$ coincidiu com o número da retirada. Podemos ver que, o caso em que para pelo menos uma delas coincida é equivalente a $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Dessa maneira, podemos ver que a probabilidade de isso ocorrer é:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_n) - \sum_{1\leq i_1<i_2\leq n} P(A_{i_1}\cap A_{i_2}) + \dots$$
$$+ (-1)^{k-1} \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n} P(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k});$$

O primeiro termo pode ser demonstrado como sendo:

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = 1$$

Para o termo de intercessão dois a dois, temos que a probabilidade de que o número na primeira carta ser igual a o número da retirada é de $1/n$, e o da segunda carta o ser é de $1/(n-1)$, e como temos $\binom{n}{2}$ combinações diferentes de retiradas, temos que a probabilidade do segundo termo é:

$$\sum_{1\leq i_1<i_2\leq n} P(A_{i_1}\cap A_{i_2}) = P(A_1\cap A_2) + P(A_1\cap A_3) + \cdots + P(A_{n-1}\cap A_n)$$
$$= \frac{\binom{n}{2}}{n\cdot(n-1)} = \frac{n!}{(n-2)!2!}\cdot\frac{1}{n\cdot(n-1)} = \frac{n!}{n!2!} = \frac{1}{2!}$$

Assim, podemos ver que para qualquer termo teremos:

$$\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n} P(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}) = \frac{1}{k!}$$

De modo que a probabilidade da união dos eventos se resume à série:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \cdots + (-1)^{k-1}\frac{1}{k!}$$

□

**Exercise 2.12** (BJ 1.16)**.** Seja $(\Omega,\mathcal{A},P)$ um espaço de probabilidade e suponha que todos os conjuntos abaixo pertençam a $\mathcal{A}$. Prove:

a) Se os $A_n$ são disjuntos e $P(B|A_n) \geq c$ para todo $n$, então $P(B|\bigcup_{n=1}^{k} A_n) \geq c$ (pode supor $P(A_n) > 0$ para todo $n$).

*Resposta.* Sabemos que $A_i \cap A_j = \emptyset$, $\forall i, j$. Dito isso, podemos ver que a seguinte relação é válida:

$$P(B|A_n) = \frac{P(A_n \cap B)}{P(A_n)} \geq c$$

$$P(A_n \cap B) \geq cP(A_n) \tag{21}$$

Além disso, podemos desenvolver $P(B|\bigcup_{n=1}^{k} A_n)$ da seguinte forma:

$$P\left(B \,\Big|\, \bigcup_{n=1}^{k} A_n\right) = \frac{P\left(B \cap (A_1 \cup A_2 \cdots \cap A_k)\right)}{P\left(\bigcup_{n=1}^{k} A_n\right)}$$

$$= \frac{P\left((A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \cdots \cup (A_k \cap B)\right)}{\sum_{n=1}^{k} P(A_n)}$$

$$P\left(B \,\Big|\, \bigcup_{n=1}^{k} A_n\right) = \frac{\sum_{n=1}^{k} P(A_n \cap B)}{\sum_{n=1}^{k} P(A_n)} \tag{22}$$

O denominador de (22) é simplesmente o somatório das probabilidades dos $A_n$'s pelo fato de que eles são disjuntos (definidos no enunciado da questão). Agora, considerando que a relação (21) é válida para todos os $A_n$'s, vamos somar todas as probabilidades para os $n \in \{1, 2, \ldots, k\}$:

$$P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \cdots + P(A_k \cap B) \geq cP(A_1) + cP(A_2) + \cdots + cP(A_k)$$

$$\sum_{n=1}^{k} P(A_n \cap B) \geq \sum_{n=1}^{k} cP(A_n)$$

$$\sum_{n=1}^{k} P(A_n \cap B) \geq c \sum_{n=1}^{k} P(A_n)$$

$$\frac{\sum_{n=1}^{k} P(A_n \cap B)}{\sum_{n=1}^{k} P(A_n)} \geq c$$

$$P\left(B \,\Big|\, \bigcup_{n=1}^{k} A_n\right) \geq c$$

□

b) O item **(a)** com "=" no lugar de "$\geq$".

*Resposta.* Substituindo o sinal de $\geq$ em (22) por uma igualdade, a prova é igual ao já realizado no item anterior. □

c) Se $A_n \supset A_{n+1}$ e $P(A_{n+1}|A_n) \leq \frac{1}{2}$ para todo $n$, então $P(A_n) \to 0$ quando $n \to \infty$.

*Resposta.* Consideremos o caso inicial, com $A_1$ e $A_2$. Disso tem-se que:

$$P(A_2|A_1) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)} \leq \frac{1}{2}$$

Como $A_1 \supset A_2$, $P(A_1 \cap A_2) = P(A_2)$. Logo:

$$\frac{P(A_2)}{P(A_1)} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow P(A_2) \leq \frac{1}{2}P(A_1)$$

Para o caso seguinte, com $A_2$ e $A_3$, temos que:

$$\begin{aligned} P(A_3|A_2) = \frac{P(A_2 \cap A_3)}{P(A_2)} &\leq \frac{1}{2} \\ \frac{P(A_3)}{P(A_2)} &\leq \frac{1}{2} \Rightarrow P(A_3) \leq \frac{1}{2}P(A_2) \end{aligned}$$

E como $P(A_2) \leq \frac{1}{2}P(A_1)$, temos que $P(A_3) \leq \frac{1}{4}P(A_1)$. Assim, já é possível identificar que, para qualquer $n$ temos que:

$$P(A_n) \leq \frac{1}{2^{n-1}}P(A_1)$$
$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n-1}}P(A_1) = 0$$

Assim, independentemente do valor de $P(A_1)$, o valor $P(A_n) \to 0$ conforme $n \to \infty$. □

d) Se os $A_n$ são disjuntos e $P(B|A_n) = P(C|A_n)$ para todo $n$, então

$$P(B| \cup A_n) = P(C| \cup A_n)$$

*Resposta.* Como os $A_n$s são disjuntos, temos que:

$$\begin{aligned} P(B|A_n) &= \frac{P(B \cap (\cup A_n))}{P(\cup A_n)} \\ &= \frac{P((A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \cdots \cup (A_n \cap B))}{\sum P(A_n)} \\ &= \frac{\sum P(A_n \cap B)}{\sum P(A_n)} \end{aligned}$$

Para $C$ temos a mesma relação:

$$P(C|A_n) = \frac{\sum P(A_n \cap C)}{\sum P(A_n)}$$

E disso temos que:

$$P(B|A_n) = \frac{P(A_n \cap B)}{P(A_n)}$$

Como, por hipótese, temos que $P(B|A_n) = P(C|A_n) \Rightarrow P(A_n \cap B) = P(A_n \cap C)$, de modo que, como os $A_n$s são disjuntos, $\sum P(A_n \cap B) = \sum P(A_n \cap C)$, logo:

$$\frac{\sum P(A_n \cap B)}{\sum P(A_n)} = \frac{\sum P(A_n \cap C)}{\sum P(A_n)}$$

□

e) Se $A_1, A_2, \ldots$ são disjuntos e $\cup A_n = \Omega$, então:

$$P(B|C) = \sum_n P(A_n|C)P(B|A_n \cap C)$$

*Resposta.* Pelo Teorema da Multiplicação, temos que $P(A_n \cap B \cap C)$ pode ser escrito como:

$$P(A_n \cap B \cap C) = P(B|A_n \cap C)P(A_n \cap C)P(C)$$

É importante notar que essa representação não é única, mas apenas conveniente para o problema em questão. Podemos então somar para todos os $A_n$s:

$$\sum P(A_n \cap B \cap C) = \sum P(B|A_n \cap C)P(A_n \cap C)P(C) = P(C)\sum P(B|A_n \cap C)P(A_n \cap C)$$

Como os $A_n$s formam uma partição de $\Omega$, $\sum P(A_n \cap B \cap C) = P(B \cap C)$. Logo:

$$\begin{aligned} P(B|C) &= \frac{P(B \cap C)}{P(C)} \\ &= \frac{P(C)\sum P(B|A_n \cap C)P(A_n \cap C)}{P(C)} \\ &= \sum P(B|A_n \cap C)P(A_n \cap C) \end{aligned}$$

□

**Exercise 2.13** (BJ 1.17)**.** Suponha que a ocorrência ou não de chuva dependa das condições do tempo no dia imediatamente anterior. Admita-se que se chove hoje, choverá amanhã com probabilidade de 0,7 e que se não chove hoje choverá amanhã com probabilidade 0,4. Sabendo-se que choveu hoje, calcule a probabilidade de que choverá depois de amanhã.

*Resposta.* Sejam os eventos $C_n$ = "Choveu no dia de hoje", $NC_n$ = "Não choveu no dia de hoje". De maneira similar, $C_{n+1}$ indica que choverá amanhã, $C_{n+2}$ que choverá depois de amanhã e assim por diante. Sabemos pelo enunciado as seguintes probabilidades:

$$\begin{aligned} P(C_{n+1}|C_n) = 0,7 \ , \ P(NC_{n+1}|C_n) = 0,3 \\ P(C_{n+1}|NC_n) = 0,4 \ , \ P(NC_{n+1}|NC_n) = 0,6 \end{aligned}$$

Além disso, como os eventos Chover e Não-Chover formam uma partição (são eventos complementares), pelo Teorema da Probabilidade Total temos que a probabilidade de chover depois de amanhã é dada por:

$$P(C_{n+2}) = P(C_{n+2}|C_{n+1})P(C_{n+1}) + P(C_{n+2}|NC_{n+1})P(NC_{n+1}) \tag{23}$$

É fácil perceber que $P(C_{n+2}|C_{n+1}) = P(C_{n+1}|C_n)$ e de maneira similar que $P(C_{n+2}|NC_{n+1}) = P(C_{n+1}|NC_n)$. Ainda assim, é necessário encontrar as probabilidades $P(C_{n+1})$ e $P(NC_{n+1})$. Como sabemos que choveu hoje, $P(C_n) = 1$ e $P(NC_n) = 0$, de modo que:

$$\begin{aligned} P(C_{n+1}) &= P(C_{n+1}|C_n)P(C_n) + P(C_{n+1}|NC_n)P(NC_n) \\ &= 0,7 \times 1 + 0,4 \times 0 = 0,7 \\ P(NC_{n+1}) &= P(NC_{n+1}|C_n)P(C_n) + P(NC_{n+1}|NC_n)P(NC_n) \\ &= 0,3 \times 1 + 0,6 \times 0 = 0,3 \end{aligned}$$

Substituindo esses valores em (23), temos:

$$
\begin{aligned}
P(C_{n+2}) &= P(C_{n+1}|C_n) \times 0,7 + P(C_{n+1}|NC_n) \times 0,3 \\
&= 0,7 \times 0,7 + 0,4 \times 0,3 = 0,49 + 0,12 = 0,61
\end{aligned}
$$

□

**Exercise 2.14** (BJ 1.18)**.** Certo experimento consiste em lançar um dado equilibrado duas vezes, independentemente. Dado que os dois números sejam diferentes, qual a probabilidade condicional de:

a) Pelo menos um dos números ser 6?

*Resposta.* Sejam $A_1$ e $A_2$ os lançamentos do primeiro e do segundo dado, respectivamente. Sabemos que $P(A_1 = A_2) = 0$. Disso temos que:

$$
\begin{aligned}
P((A_1 = 6) \cup (A_2 = 6)) &= P(A_1 = 6) + P(A_2 = 6) - P((A_1 = 6) \cap (A_2 = 6)) \\
&= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - 0 \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

□

b) A soma dos números ser 8?

*Resposta.* Considere o evento $S = x, x \in \{2, 3, \ldots, 12\}$ o resultado da soma dos lançamentos $A_1$ e $A_2$. Utilizando o Teorema da Probabilidade Total, podemos decompor a probabilidade da soma ser igual a 8 da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
P(S = 8) &= P(S = 8|A_1 = 1)P(A_1 = 1) + P(S = 8|A_1 = 2)P(A_1 = 2) + \cdots + P(S = 8|A_1 = 6)P(A_1 = 6) \\
&= 0 \times \frac{1}{6} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{6} + 0 \times \frac{1}{6} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{6} \\
&= \frac{1}{30} + \frac{1}{30} + \frac{1}{30} + \frac{1}{30} \\
&= \frac{4}{30}
\end{aligned}
$$

□

**Exercise 2.15** (BJ 1.19)**.** Em teste de múltipla escolha, a probabilidade do aluno saber a resposta é $p$. Havendo $m$ escolhas, se ele sabe a resposta ele responde corretamente com probabilidade 1; se não sabe, ele responde corretamente com probabilidade $\frac{1}{m}$. Qual a probabilidade de que ele soubesse a resposta dado que a pergunta foi respondida corretamente? Calcule o limite dessa probabilidade quando (i) $m \to \infty$ com $p$ fixo e (ii) $p \to 0$ com $m$ fixo.

*Resposta.* Sejam: $P(S) = p$ a probabilidade de saber a resposta, $P(A|S) = 1$ a probabilidade de acertar, dado que sabia a resposta, $P(A|NS) = \frac{1}{m}$ a probabilidade de acertar, dado que não sabia a resposta e $P(NA|NS) = \frac{m-1}{m}$ a probabilidade de não acertar, dado que não sabe a resposta. Sabemos que os eventos $S$ e $NS$ são complementares, assim como $A$ e $NA$. Queremos encontrar $P(S|A)$, que é dada por:

$$
\begin{aligned}
P(S|A) &= \frac{P(S \cap A)}{P(A)} \\
&= \frac{P(A|S)P(S)}{P(A|S)P(S) + P(A|NS)P(NS)} \\
&= \frac{1 \times p}{1 \times p + \frac{1}{m} \times (1 - p)} \\
&= \frac{p}{\frac{mp+1-p}{m}}
\end{aligned}
$$

De modo que, simplificando a última expressão:

$$P(S|A) = \frac{mp}{p(m-1)+1} \tag{24}$$

Agora, calculando os limites temos:

- (i)
$$\lim_{p\to 0} \frac{mp}{p(m-1)+1} = \frac{0}{1} = 0$$

- (ii)

$$\lim_{m\to\infty} \frac{mp}{p(m-1)+1} \xRightarrow{\text{L'Hôpital}} \frac{\frac{\partial}{\partial m}mp}{\frac{\partial}{\partial m}p(m-1)+1} = \frac{p}{p} = 1$$

□

**Exercise 2.16** (BJ 1.20)**.** Durante o mês de novembro a probabilidade de chuva é de 0,3. O Fluminense ganha um jogo em um dia de chuva com a probabilidade de 0,4; em um dia sem chuva com a probabilidade 0,6. Se ganhou um jogo em novembro, qual é a probabilidade de que choveu neste dia?

*Resposta.* Sejam os seguintes eventos: $P(C) = 0,3$ é a probabilidade de chover em novembro, $P(NC) = 0,7$ é a probabilidade de não chover em novembro, $P(V|C) = 0,4$ é a probabilidade de vitória, dado que choveu no dia, $P(D|C) = 0,6$ é a probabilidade de derrota, dado que choveu no dia, $P(V|NC) = 0,6$ é a probabilidade de vitória, dado que não choveu no dia e $P(D|NC) = 0,4$ é a probabilidade de derrota, dado que não choveu no dia. Pelo Teorema da Probabilidade Total, temos que:

$$\begin{aligned} P(V) &= P(V|C)P(C) + P(V|NC)P(NC) \\ &= 0,4 \times 0,3 + 0,6 \times 0,7 \\ &= 0,54 \end{aligned}$$

Além disso, temos que o evento $P(C \cap V) = P(V|C)P(C)$, logo:

$$P(C \cap V) = P(V|C)P(C) = 0,4 \times 0,3 = 0,12$$

Assim, temos que a probabilidade de ter chovido, dado que o Fluminense ganhou o jogo em novembro é de:

$$P(C|V) = \frac{P(C \cap V)}{P(V)} = \frac{0,12}{0,54} = \frac{2}{9}$$

□

# 3 Variáveis Aleatórias

## 3.1 Variáveis aleatórias e funções de distribuição

**Example 3.1.** Considere um experimento em que uma moeda é lançada duas vezes. Seja $X$ = total de caras nos dois lançamentos. Denotemos o evento cara como $H$ e coroa como $T$. Logo:

| Espaço Amostral ($\Omega$) | $X$ |
|---|---|
| HT | 1 |
| TH | 1 |
| HH | 2 |
| TT | 0 |

Logo, $X : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$. Vale também que, $\forall x$ valor na imagem de $X$, $X^{-1}(x) \in \mathcal{F}$. Por exemplo:

$$x = 1 \Rightarrow X^{-1}(1) = \{HT, TH\}$$
$$x = 2 \Rightarrow X^{-1}(2) = \{HH\}$$
$$x = 0 \Rightarrow X^{-1}(0) = \{TT\}$$

**Definition 3.1** (Variável aleatória)**.** Seja $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço de probabilidades. Uma função $X : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ é variável aleatória se $[x \in I] \in \mathcal{F},\ I \in \mathbb{R}$ (ou, equivalentemente, se $\{\omega : X(\omega) \in I\} \in \mathcal{F};\ X^{-1}(I) \in \mathcal{F}$).

**Definition 3.2** (Distribuição Acumulada)**.** Considere um espaço de probabilidades $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ e $X : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ uma variável aleatória, defina $F(r) = P(X \leq r) = P(\{\omega : X(\omega) \leq r\})$.

**Example 3.2.** Seja $X$ = número de caras em dois lançamentos de moeda (honesta). Temos que as probabilidades de $X$ são dadas por:

$$P(X = 0) = P(\{TT\}) = \frac{1}{4}$$
$$P(X = 1) = P(\{TH, HT\}) = \frac{2}{4}$$
$$P(X = 2) = P(\{HH\}) = \frac{1}{4}$$

Para encontrarmos a função de distribuição acumulada, podemos particinar o espaço e "acumular" as probabilidades. Para $r < 0$:

$$F(r) = P([X \leq r]) = P(\emptyset) = 0$$

Para $r \in [0, 1)$:

$$F(r) = P([X \leq r]) = P(X \leq 0) = \frac{1}{4}$$

Para $r \in [1, 2)$:

$$F(r) = P([X \leq r]) = P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{3}{4}$$

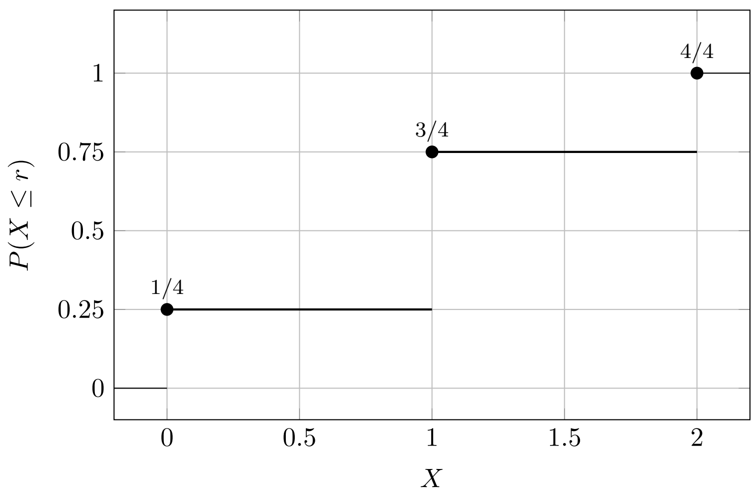
Para $r \geq 2$:

$$F(r) = P([X \leq r]) = P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 1$$

Logo, $F$ é dada por:

$$F(r) = \begin{cases} 0, & r < 0 \\ \frac{1}{4}, & r \in [0,1) \\ \frac{3}{4}, & r \in [1,2) \\ 1, & r \geq 2 \end{cases}$$

Distribuição de probabilidades acumulada




**Theorem 3.1** (Propriedades da distribuição acumulada)**.** *Seja $X$ uma variável aleatória definida em $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, então a f.d.a. de $X$ ($F_X$ ou $F$) verifica:*

*a)* *$F$ é monótona não decrescente;*
*b)* *$F$ é contínua à direita;*
*c)* $\lim_{t\to-\infty} F(t) = 0$ *e* $\lim_{t\to\infty} F(t) = 1$.

*Prova.*

a) Dados $a, b \in \mathbb{R} : a \leq b$; $[X \leq a] \subseteq [X \leq b] \Rightarrow P([X \leq a]) \leq P([X \leq b]) \Rightarrow F(a) \leq F(b)$.

b) Se $X_n \downarrow x$, quando $n \to \infty$, temos que $\{[X \leq x_n]\}_{n\geq 1}$ é tal que $\bigcap_{n\geq 1}[X \leq x_n] = [X \leq x]$. Isso significa que $[X \leq x]$ acontece se e somente se $[X \leq x_n]$ $\forall n$. Além disso, $[X \leq x_n] \downarrow [X \leq x]$ quando $n \to \infty$, logo, pela continuidade da função de probabilidade $P([X \leq x_n]) \downarrow P([X \leq x]), n \to \infty$.

c) Considere agora que $x_n \downarrow -\infty \Rightarrow [X \leq x_n] \downarrow \emptyset,\ n \to \infty \Rightarrow F(x_n) = P([X \leq x_n]) \downarrow P(\emptyset) = 0,\ n \to \infty$. Se $x_n \uparrow \infty \Rightarrow [X \leq x_n] \uparrow \Omega,\ n \to \infty \Rightarrow F(x_n) = P([X \leq x_n]) \uparrow P(\Omega) = 1,\ n \to \infty$.

□

**Theorem 3.2.** *Se $F$ é a f.d.a. da variável aleatória $X$, então:*

*a)* *Existem e são finitos os limites laterais* $\lim_{t\to r^-} F(t), \lim_{t\to r^+} F(t), \forall r \in \mathbb{R}$ *e* $\lim_{t\to r^-} F(t) \leq \lim_{t\to r^+} F(t)$*;*

*b)* $\lim_{t\to r^+} F(t) = F(r), \forall r \in \mathbb{R}$*;*

*c)* *$F$ é descontínua em $r, r \in \mathbb{R}$ se e somente se* $\lim_{t\to r^-} F(t) < F(r)$*, com um salto de tamanho* $F(r) - \lim_{t\to r^-} F(t)$*;*

*d)* $\forall r \in \mathbb{R}, P(X = r) = F(r) - \lim_{t\to r^-} F(t)$*;*

*e)* *Existem no máximo um total enumerável de descontinuidades em $F$.*

*Prova.*

a) $F$ é monótona e limitada ($0 \leq F \leq 1$). Logo, os limites laterais existem e são limitados.

b) Como $F$ é monótona não-decrescente, $\forall x, y : x \leq y \Rightarrow F(x) \leq F(y)$. Logo $\lim_{t\to r^-} F(t) \leq \lim_{t\to r^+} F(t)$.

c) Como $F$ é monótona não-decrescente, uma descontinuidade só ocorre se e somente se $\lim_{t\to r^-} F(t) < \lim_{t\to r^+} F(t) = F(r)$.

d) Seja $r \in \mathbb{R}$. $[X \leq r] = \bigcap_{n=1}^{\infty}(r - \frac{1}{n} < x \leq r)$, logo:

$$\begin{aligned}
P([X = r]) &= P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(r - \frac{1}{n} < x \leq r\right)\right) \\
&\Downarrow \text{(Teorema da continuidade)} \\
&= \lim_{n\to\infty} P\left(\left(r - \frac{1}{n} < x \leq r\right)\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(F(r) - F\left(r - \frac{1}{n}\right)\right) \\
&= F(r) - \lim_{n\to\infty} F\left(r - \frac{1}{n}\right) \\
P([X = r]) &= F(r) - \lim_{t\to r^-} F(t)
\end{aligned}$$

e) Seja $\mathcal{D}$ o conjunto de pontos de descontinuidades de $F$, e seja $\lim_{t\to x^-} F(t) = F(x^-)$. Logo:

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} : F(x) - F(x^-) > 0\}$$

Seja $\mathcal{D}_n$ o conjunto de pontos para os quais a amplitude do salto é maior ou igual a $\frac{1}{n}$. Logo:

$$\mathcal{D}_n = \left\{x \in \mathbb{R} : F(x) - F(x^-) \geq \frac{1}{n}\right\} \Rightarrow \#D = |D| \leq n$$

Se $x \in \mathcal{D} \Rightarrow \exists n_0 > 1 : F(x) - F(x^-) \geq \frac{1}{n_0} \Rightarrow x \in \bigcup_{n=1}^{\infty}\mathcal{D}_n$. Se $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty}\mathcal{D}_n \Rightarrow \exists n_1 : x \in \mathcal{D}_n \Rightarrow x \in \mathcal{D}$. $\mathcal{D}$ portanto é a união enumerável de conjuntos finitos, logo é enumerável.

□

## 3.2 Natureza das variáveis aleatórias

a) $X$ é uma variável aleatória discreta se os valores que ela toma pertencem a um conjunto enumerável, logo $X : \Omega \to \{x_1, x_2, \ldots\}$ (ou seja, $X(\omega) \in \{x_1, x_2, \ldots\}, \forall\omega \in \Omega$) e $P : \{x_1, x_2, \ldots\} \to [0, 1]$ é dado por $P(x_i) = P\{\omega : \omega \in \Omega \text{ e } X(\omega) = x_i\} \forall i \geq 1$.

b) $X$ é uma variável aleatória absolutamente contínua se $\exists f$ (uma função) tal que $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ e $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ (onde $f$ é chamada de densidade de $X$).

Sob **(a)** temos que $[X \leq x] = \bigcup_{i:x_i\leq x}[X = x_i]$. Logo $F_x(x) = \sum_{i:x_i\leq x} P(x_i)$.
Sob **(b)** estamos afirmando que $F_X$ é a integral de $f$ (ou seja, $f$ é a sua derivada) para todo $x$ exceto em um conjunto de medida de Lebesgue nula, ou seja, se seu comprimento for zero ($\int_a^a f(t)dt = 0$). Ainda sob **(b)**, se $f$ é uma função de densidade podemos definir $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ e $F$ verifica:

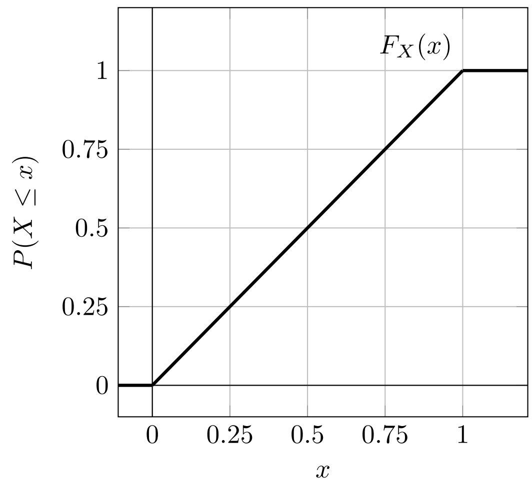
1. $x \leq y \Rightarrow F(x) \leq F(y)$;
2. Se $x_n \downarrow x \Rightarrow F(x_n) \downarrow F(x)$;
3. Se $x_n \downarrow -\infty \Rightarrow F(x_n) \downarrow 0$ e se $x_n \uparrow \infty \Rightarrow F(x_n) \uparrow 1$.

Dada uma variável aleatória com distribuição $F_X$, $X$ tem densidade se:

(i) $F_X$ é contínua;
(ii) $F_X$ é derivável por partes (ou derivável no interior de um número finito ou enumerável de intervalos fechados cuja união é igual a $\mathbb{R}$), ou derivável para todo $x$ exceto um número finito (enumerável) de pontos.

**Example 3.3.**

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & x \in [0,1] \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

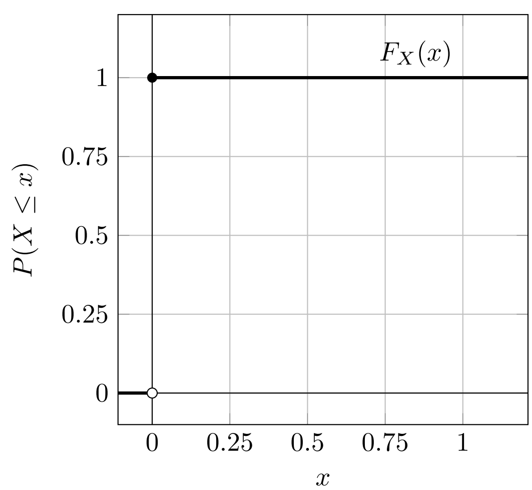



Notas:

- $F_X$ é contínua;
- $\{0,1\}$ são pontos sem derivada;
- Podemos definir os seguintes intervalos em que $F_X$ é derivável: $(-\infty,0),(0,1),(1,\infty)$;
- $F'_X(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0,1) = f_X(x) \\ 0, & c.c. \end{cases}$;
- $f(0)$ e $f(1)$ podem ser definidos como zero ou um, já que tais definições não alteram $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$.

Em contrapartida, considere:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$



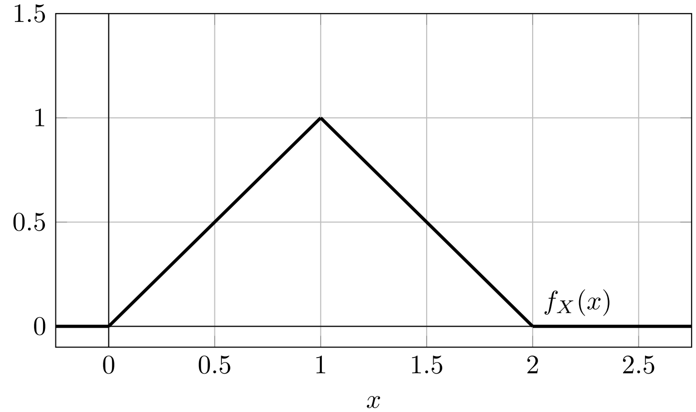

Notas:

- $F_X$ não é contínua;

- $P(X=0) = \lim_{x\to 0^+} F_X(x) - \lim_{x\to 0^-} F_X(x) = 1$.

**Example 3.4.** Considere a densidade triangular:

$$f_X(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 \le x < 1 \\ 2-x, & \text{se } 1 \le x < 2 \\ 0 & c.c. \end{cases}$$




Por definição, $f(x) \ge 0\ \forall x$. Para verificarmos que a probabilidade total é igual a um, podemos realizar a seguinte integração por partes:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{x} f_X(x)\mathrm{d}x &= \int_0^2 f_X(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 x\mathrm{d}x + \int_1^2 (2-x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + 2x\Big|_1^2 - \frac{x^2}{2}\Big|_1^2 \\ &= 1\end{aligned}$$

O que demonstra que $f_X(x)$ é densidade de probabilidade.

**Conjecture 3.1.** *Cada função de distribuição se corresponde com apenas uma distribuição? Não.*

*Prova.* Considere, por exemplo, que a variável aleatória $X \sim N(0,1)$. Logo, a sua função distribuição de probabilidade é dada por $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ e $\Phi(x)$ é sua acumulada. Vejamos que $X \sim N(0,1) \iff -X \sim N(0,1)$:
Seja $\omega$ um possível valor de $-X$, devemos calcular $P(-X \le \omega)$ e provar que $P(-X \le \omega) = \Phi(\omega)$:

$$P(-X \le \omega) = P(X \ge -\omega) = 1 - P(X \le \omega) = 1 - \Phi(-\omega) = 1 - (1 - \Phi(\omega)) = \Phi(\omega)$$

□

## 3.3 Variáveis aleatórias e $\sigma$-álgebra de Borel

Se $X$ é uma variável aleatória em $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, cada evento $[X \le x] \in \mathcal{A}\ \forall x \in \mathbb{R}$. Isto é, $[X \in \mathcal{B}]$, onde $[X \in \mathcal{B}] = [X \le x]$ é um evento e $P(X \in \mathcal{B})$ é bem definido. No entanto, a operacionalidade do sistema $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ pode ser estendido a todo boreliano (ou seja, a todos os elementos da $\sigma$-álgebra de Borel, que é a menor $\sigma$-álgebra contendo os intervalos cujos comprimentos estejam bem definidos).

**Proposition 3.1.** *Se $X$ é uma variável aleatória em $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, então o evento $[x \in \mathcal{B}] = \{\omega : \omega \in \Omega \text{ e } X(\omega) \in \mathcal{B}\}$ é um evento aleatório para todo $\mathcal{B}$ boreliano (ou seja, $[x \in B] \in \mathcal{A}\ \forall B \in \mathcal{B}$).*

Podemos ver que diferentes tipos de intervalos (leia-se borelianos) podem ser mostrados como pertencentes à $\sigma$-álgebra, de modo que variáveis aleatórias que operam sobre esses intervalos estarão bem definidas:

1. Se $B = (-\infty, b] \Rightarrow [X \in B] \in \mathcal{A}$ de acordo com a definição de variável aleatória;
2. Se $B = (a, \infty)$, podemos fazer $B = (-\infty, a]^c$. Como o evento $[X \leq a] \in \mathcal{A}$ por definição, sendo $\mathcal{A}$ uma $\sigma$-álgebra, deve ocorrer que $[X \leq a]^c = B \in \mathcal{A}$, ou seja, $B \in \mathcal{A}$;
3. Se $B = (a, b] \Rightarrow [X \in B] = [X \in (a, b]] = [X \leq b] - [X \leq a]$. Como $[X \leq b] \in \mathcal{A}$ e $[X \leq a] \in \mathcal{A}$, então $P(X \in B) = P(X \leq b) - P(x \leq a) = F_X(b) - F_X(a)$;
4. Se $B = (a, b) \Rightarrow B = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(a, b - \frac{1}{n}\right]$ Sabemos que os eventos $\left(a < X \leq b - \frac{1}{n}\right] \in \mathcal{A}$ e as suas uniões também pertencem à $\mathcal{A}$. Quanto à probabilidade, temos $P(X \in B) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(a < X \leq b - \frac{1}{n}\right]\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\left(a < X \leq b - \frac{1}{n}\right]\right) = \lim_{n\to\infty} F_X\left(b - \frac{1}{n}\right) - F_X(a) = F_X(b^-) - F_X(a)$;
5. Se $B = \bigcup_{i=1}^{n} B_i : B_i \in \mathcal{A}\ \forall i$, e sendo os $B_i$'s disjuntos, temos que $[X \in B] = \bigcup_{i=1}^{n} [X \in B_i] \Rightarrow P([X \in B]) = \sum_{i=1}^{n} P(X \in B_i)$.

Podemos assim reformular os axiomas de Kolmogorov:

- $Ax_1(K)$: $P_X(B) = P(X \in B) \geq 0$;
- $Ax_2(K)$: $P_X(\mathbb{R}) = P(X \in \mathbb{R}) = 1$;
- $Ax_3(K)$: Se $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{B}$, com $B_i \cap B_j = \emptyset\ \forall i \neq j \Rightarrow P_X(\bigcup B_n) = P(X \in \bigcup_n B_n) = P(\bigcup_n [X \in B_n]) = \sum_n P(X \in B_n)$.

**Definition 3.3.** A probabilidade $P_X$ definida na $\sigma$-álgebra de Borel por $P_X(B) = P(X \in B)$ é a distribuição de $X$.

**Proposition 3.2.**

*a) Se $X$ é uma variável aleatória discreta com valores em $\{x_1, x_2, \ldots\} \Rightarrow P_X(B) = \sum_{i:x_i \in B} P(x_i)$;*
*b) Se $X$ é absolutamente contínua com densidade $f \Rightarrow P_X(B) = \int_B f_X dx$.*

## 3.4 Variáveis contínuas

**Proposition 3.3.** *Se $X \sim f_X,\ y = bx + c,\ b > 0$ e $c \in \mathbb{R} \Rightarrow Y \sim f_Y$ onde $f_Y(y) = \frac{1}{b} f_X(\frac{y-c}{b}); y \in \mathbb{R}$, onde $c$ é dito um parâmetro de posição (muitas vezes de posição central) e $b$ um parâmetro de escala.*

### 3.4.1 Exemplos

**Example 3.5** (Distribuição Normal)**.**

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \Longrightarrow f_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Aqui, $\mu$ representa a média (posição central) da distribuição e $\sigma^2$ a sua variância.

**Example 3.6** (Distribuição Cauchy)**.**

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)} \Longrightarrow f_{b,M}(x) = \frac{1}{b} \frac{1}{\pi\left(1 + \left(\frac{x-M}{b}\right)^2\right)} = \frac{b}{\pi(b^2 + (x - M)^2)}$$

Neste caso, $M$ é a mediana da distribuição e $b$ representa a distância entre $M$ e o 1º quartil da distribuição.

**Example 3.7** (Distribuições Exponencial e Gamma)**.** Considere $g(x) = e^{-x} I_{0,\infty}(x)$. Sabemos que $g$ é uma distribuição de probabilidade pois:

$$\begin{cases} g(x) \geq 0\ \forall x \in (0, \infty) \\ \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1 \end{cases}$$

Vamos agora incluir no formato do tipo exponencial um componente polinomial. Dado $\alpha > 0$, defina $g(x) = x^{\alpha-1} e^{-x}$. Podemos ver que $g$ é integrável, de modo que:

$$\int_0^\infty g(x)dx = \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx = \Gamma(\alpha)$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-x} & x > 0 \\ 0 & c.c. \end{cases}$$

Defina agora $y = \frac{X}{\beta}$ onde $X \sim \text{Gamma}(\alpha, 1)$ e $\beta > 0$. A densidade de $Y$ pode ser encontrada por meio de:

$$P(Y \leq y) = P\left(\frac{X}{\beta} \leq y\right) = P(X \leq \beta y) \Rightarrow F_Y(y) = F_X(\beta y)$$

$$f_Y(y) = \beta f_X(\beta y) = \beta \frac{(\beta y)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}e^{-\beta y} = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}y^{\alpha-1}e^{-\beta y}$$

Nesse caso (conhecido como distribuição Gama) $\frac{1}{\beta}$ é um parâmetro de escala e $\alpha$ é um parâmetro de forma. Temos alguns casos especiais, como:

- Se $\alpha = 1\ : Y \sim \text{Exp}(\beta)$;
- Se $\alpha = \frac{n}{2}$, com $n$ inteiro e $\beta = \frac{1}{2}\ : Y \sim \chi^2(n)$

## 3.5 Variáveis aleatórias multidimensionais

**Definition 3.4.** A distribuição de probabilidades do vetor aleatório dado por $(x_1, \ldots, x_n)$ é uma tabela que associa a cada valor $(x_1, \ldots, x_n)$ sua probabilidade $P(x_1, \ldots, x_n) = P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n)$, onde $p$ é a distribuição conjunta.

**Example 3.8.** Considere o conjunto de 32 cartas para poker: 7,8,9,10,J,Q,K,A, dos 4 naipes. Duas cartas são retiradas aleatoriamente, sem reposição, e $X$ = número de ases que a pessoa recebe e $Y$ = número de cartas de copas que a pessoa recebe. Qual a probabilidade $P(X = 0, Y = 0)$?

$$P(X = 0, Y = 0) = \frac{\binom{21}{2}}{\binom{32}{2}} = \frac{210}{496}$$

**Definition 3.5.** A função de distribuição acumulada do par de variáve aleatórias $(X, Y)$ é dada por:

$$F(X, Y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \sum_{\{i: x_i \leq x\}} \sum_{\{j: y_j \leq y\}} P(X = x_i, Y = y_i)$$

Seja $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ tal que $X_i$ é variável aleatória definida em $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ $\forall i$. Então $F$, a acumulada de $\underline{X}$ verifica:

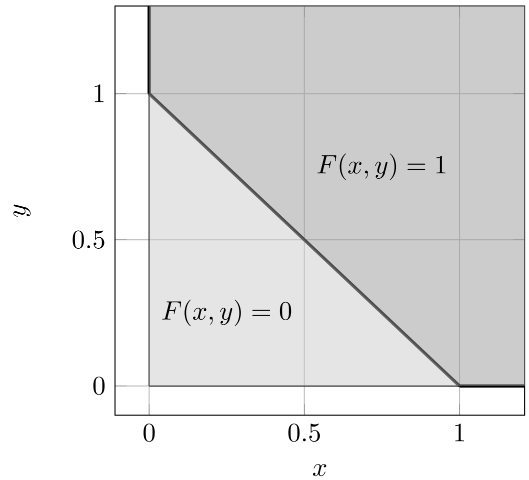
- $F_1$: $F$ é não decrescente em cada uma das coordenadas;
- $F_2$: $F$ é contínua à direita em cada uma das coordenadas;
- $F_3$: $\lim_{x_i \to -\infty} F(x_1, \ldots, x_n) = 0$ e $\lim_{x_i \to \infty \forall i} F(x_1, \ldots, x_n) = 1$.

As provas de $F_1$ e $F_2$ são de simples construção. Para $F_3$ temos:

*Prova.* Considere $i$ fixo e o evento $[X_1 \leq x_1, \ldots, X_{i-1} \leq x_{i-1}, X_i \leq -m, X_{i+1} \leq x_{i+1}, \ldots, X_n \leq x_n]$. Logo, $F(x_1, \ldots, x_{i-1}, -m, x_{i+1}, \ldots, x_n) \xrightarrow[m \to \infty]{} 0$.
Por outro lado, note que $[X_1 \leq x_1, \ldots, X_{i-1} \leq x_{i-1}, X_i \leq m, X_{i+1} \leq x_{i+1}, \ldots, X_n \leq x_n] \xrightarrow[m \to \infty]{} [X_1 \leq x_1, \ldots, X_{i-1} \leq x_{i-1}, X_{i+1} \leq x_{i+1}, \ldots, X_n \leq x_n]$ (que é o evento marginal sem o $X_i$). Já se $x_i \to \infty\ \forall i$ : $\bigcap_{i=1}^n [X_i \leq x_i] \uparrow \Omega \Rightarrow F(x_1, \ldots, x_n) = P\left(\bigcap_{i=1}^n [X_i \leq x_i]\right) \uparrow 1, x_i \to \infty\ \forall i$. □

$F_1, F_2$ e $F_3$ não são condições suficientes para que $F$ seja uma função de distribuição acumulada. Vejamos um exemplo que segue $F_1, F_2$ e $F_3$ e que não é função de distribuição acumulada:

Seja $F_0(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0, y \geq 0, x + y \geq 1 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$. Graficamente, temos:




É fácil ver que $F_0$ segue $F_1, F_2$ e $F_3$, mas vejamos que $F_0$ atribui probabilidade negativa a certos eventos, a ver $[0 \le X \le 1, 0 \le Y \le 1]$:

$$\begin{aligned}
F_0(0,0) &= P(X \le 0, Y \le 0) \\
F_0(1,1) &= P(X \le 1, Y \le 1) \\
F_0(1,1) - F_0(1,0) &= P(X \le 1, Y \le 1) - P(X \le 1, Y \le 0) = P(X \le 1, 0 \le Y \le 1) \\
F_0(0,1) - F_0(0,0) &= P(X \le 0, Y \le 1) - P(X \le 0, Y \le 0) = P(X \le 0, 0 \le Y \le 1) \\
F_0(1,1) - F_0(1,0) - F_0(0,1) - F_0(0,0) &= P(X \le 1, 0 \le Y \le 1) - P(X \le 0, 0 \le Y \le 1) \\
&= P(0 \le X \le 1, 0 \le Y \le 1) = -1
\end{aligned}$$

Defina $\Delta_{k,I}(g(x_1, \dots, x_k)) = g(x_1, \dots, x_{k-1}, b) - g(x_1, \dots, x_{k-1}, a)$ onde $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}; I = (a, b], a \le b$. Logo, se $I_1 = (a_1, b_1]$ e $I_2 = (a_2, b_2], F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Então:

$$\begin{aligned}
\Delta_{1,I_1}(\Delta_{2,I_2}(F(x,y))) &= \Delta_{1,I_1}(F(x, b_2) - F(x, a_2)) \\
&= F(b_1, b_2) + F(a_1, a_2) - F(a_1, b_2) - F(b_1, a_2) \ge 0 \\
&= P(a_1 < X \le b_1, a_2 < Y \le b_2) \ge 0
\end{aligned}$$

No geral:

- $F_4$: $\Delta_{1,I_1}\Delta_{2,I_2} \dots \Delta_{n,I_n}(F(x_1, \dots, x_n)) \ge 0 \; \forall I_k = (a_k, b_k]; a_k \le b_k, k = 1, \dots, n.$

**Definition 3.6.** Seja $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ seguindo $F_1, F_2, F_3$ e $F_4$, logo $F$ é uma função de distribuição acumulada n-dimensional (ou n-variada).

- **a)** Se o vetor aleatório $(X_1, \dots, X_n)$ toma valores em um conjunto discreto, o vetor é discreto;
- **b)** Se para o vetor aleatório $(X_1, \dots, X_n)$, $F$ é dada pela forma $F(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_n} \dots \int_{-\infty}^{x_1} f(t_1, \dots, t_n) dt_n \dots dt_1$,
  $\forall (x_1, \dots, x_n)$ onde $f(t_1, \dots, t_n) \ge 0 \; \forall (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ então $(X_1, \dots, X_n)$ é um vetor absolutamente contínuo com densidade $f$ (densidade conjunta).

**Definition 3.7.** A probabilidade definida em $\mathcal{B}^n$ (borelianos em $\mathbb{R}^n$) por $P(\underline{X} \in B)$ (com $B \in \mathcal{B}^n$) é chamada de distribuição conjunta de $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$, com notação: $P_{\underline{X}}(B) = P(\underline{X} \in B)$.

**Proposition 3.4.**

- ***a)*** *Se o vetor aleatório* $\underline{X}$ *é discreto,* $P_{\underline{X}}(B) = \sum_{\{i : x_i \in B\}} P(X_i = x_i) \; \forall B \in \mathcal{B}^n$*;*
- ***b)*** *Se* $\underline{X}$ *é absolutamente contínuo com densidade* $f$*,* $P_{\underline{X}}(B) = P(\underline{X} \in B) = \int \dots \int_B f(x_1, \dots, x_n) dx_n \dots dx_1$*.*

## 3.6 Independência

**Definition 3.8.** As variáveis aleatórias são (coletivamente) independentes se:

$$P(X_1 \in B_1, \dots, X_n \in B_n) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \in B_i),\ \forall B_i \in \mathcal{B}^n, \forall i = 1, \dots, n$$

Se $X_1, \dots, X_n$ são coletivamente independentes, então $X_{i1}, \dots, X_{ik}$ são coletivamente independentes $\forall k$.

### 3.6.1 Critérios ou consequências

**Proposition 3.5.**

- ***a)*** *Se $X_1, \dots, X_n$ são independentes, então $F_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(x_i), \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$;*
- ***b)*** *Se existem funções $F_1, \dots, F_n$ tais que $\lim_{n\to\infty} F_i(x) = 1, \forall i$ e $F_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} F_i(x_i), \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \Rightarrow X_1, \dots, X_n$ são independentes e $F_i = F_{X_i}, \forall i$.*

*Prova.*

- **a)** Se $X_1, \dots, X_n$ são coletivamente independentes e tomamos $[X_i \leq x_i] = (-\infty, x_i] = B_i$. Então:

$$\begin{aligned}
F_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n) &= P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) \\
&= P(X_1 \in B_1, \dots, X_n \in B_n) \\
&\overset{Ind}{=} \prod_{i=1}^{n} P(X_i \in B_i) \\
&= \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leq x_i) = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(x_i)\ \forall (x_1, \dots, x_n)
\end{aligned}$$

- **b)** Para cada $i$, $F_{X_i}(x_i) = P(X_i \leq x_i) = \lim_{m\to\infty} P(X_1 \leq m, \dots, X_{i-1} \leq m, X_i \leq x_i, X_{i+1} \leq m, \dots, X_n \leq m)$, de modo que:

$$\begin{aligned}
F_{X_i}(x_i) &= \lim_{m\to\infty} F_{X_1 \dots X_n}(m, \dots, m, x_i, m, \dots, m) \\
&\overset{Hip}{=} \lim_{m\to\infty} \left( \prod_{j=1}^{i-1} F_j(m) \times F_i(x_i) \times \prod_{j=i+1}^{n} F_j(m) \right) \\
&= F_i(x_i)
\end{aligned}$$

Logo, a marginal de $X_i$ é precisamente $F_i, \forall i$. Devemos ainda verificar que $P(X_1 \in B_1, \dots, X_n \in B_n) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \in B_i)\ \forall B_i \in \mathcal{B}^n$. Considere $B_i = (a_i, b_i], a_i \leq b_i, a_i, b_i \in \mathbb{R}$. Temos que:

$$\begin{aligned}
P(X_1 \in B_1, \dots, X_n \in B_n) &= P(a_1 < X_1 \leq b_1, \dots, a_n < X_n \leq b_n) \\
&= \Delta_{1,I_1} \dots \Delta_{n,I_n} \left( F_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n) \right) \\
&\overset{Ind}{=} \Delta_{1,I_1} \dots \Delta_{n,I_n} (F_{X_1}(x_1) \dots F_{X_n}(x_n)) \\
&= [F_{X_1}(b_1) - F_{X_1}(a_1)] \times \dots \times [F_{X_n}(b_n) - F_{X_n}(a_n)] \\
&= \prod_{i=1}^{n} P(a_i < X_i \leq b_i) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \in B_i)
\end{aligned}$$

$\square$

### 3.6.2 Caso contínuo

**Proposition 3.6.**

- ***a)*** *Se $X_1, \dots, X_n$ são independentes e possuem densidades $f_{X_1}, \dots, f_{X_n}$, respectivamente, então $f_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i)\ \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ é a densidade conjunta de $X_1, \dots, X_n$;*
- ***b)*** *Se $X_1, \dots, X_n$ tem densidade conjunta $f_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n) : f_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f_i(x_i)\ \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, onde $f_i(x) \geq 0\ \forall x : \int_{-\infty}^{\infty} f_i(x)dx = 1\ \forall i$, então $X_1, \dots, X_n$ são independentes e $f_i$ é a densidade marginal de $X_i\ \forall i$.*

*Prova.*

- **a)** Como consequência da proposição 3.5, temos que: $F_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n F_{X_i}(x_i), \forall (x_1, \dots, x_n)$. Logo, por definição temos:

$$\prod_{i=1}^n F_{X_i}(x_i) = \prod_{i=1}^n \int_{-\infty}^{x_i} f_{X_i}(t)dt = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f_{X_1}(t_1) \dots f_{X_n}(t_n) dt_n \dots dt_1$$

Assim, $f_{X_1}, \dots, f_{X_n}$ é a densidade conjunta.

- **b)** Considere:

$$\begin{aligned}
F_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n) &= \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f_{X_1 \dots X_n}(t_1, \dots, t_n) dt_n \dots dt_1 \\
&= \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f_1(t_1) \dots f_n(t_n) dt_n \dots dt_1 \\
&= \prod_{i=1}^n \int_{-\infty}^{x_i} f_i(t_i) dt_i
\end{aligned}$$

Defina $F_i(x) = \int_{-\infty}^{x_i} f_i(t)dt$. Sendo assim:

$$\prod_{i=1}^n \int_{-\infty}^{x_i} f_i(t_i)dt_i = \prod_{i=1}^n F_i(x_i)$$

Note que, pela hipótese nas $f_i$'s, as $F_i$'s são acumuladas em particular, e $F_i(x) \to 1, x \to \infty$, e pela proposição 3.5: $F_i(x) = F_{X_i}(x_i)$, logo $f_{X_i} = f_i$.

□

### 3.6.3 Propriedades

- **a)** Se $F(x, y)$ é a função de distribuição acumulada conjunta de $(X, Y)$, então $F_X(x) = \lim_{y \to \infty} F(x, y) = F(x, \infty)$ é a função de distribuição acumulada marginal de $X$;
- **b)** Se $f(x, y)$ é a função de densidade conjunta de $(X, Y)$, então $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy$ é a densidade marginal de $X$.

**Example 3.9.**

$$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)\right]\right\}$$

Sendo $\sigma_i > 0, i = 1, 2; -1 < \rho < 1; \mu_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2$. Logo, $(X, Y) \sim N_2\left(\binom{\mu_1}{\mu_2}, \begin{bmatrix} \sigma_1 & \rho \\ \rho & \sigma_2 \end{bmatrix}\right)$, onde, caso $\rho = 0, X$ e $Y$ são independentes.

## 3.7 Distribuições de funções de vetores

Seja $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$ um vetor aleatório em $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Seja $Y = g(X_1, \dots, X_n)$. Qual a distribuição de $Y$?

- **Nota 1**: Para que $Y$ seja variável aleatória cada $B \in \mathcal{B}$ é necessário que $g^{-1}(B)$ seja mensurável, ou seja:

$$g^{-1}(B) = \{x : g(x) \in B\}$$
$$\Downarrow$$
$$F_Y(y) = P(g(x) \leq y)$$

Generalizando, se $Y = g(X_1, \dots, X_n)$:

$$F_Y(y) = P(g(X_1, \dots, X_n) \leq y) = P((X_1, \dots, X_n) \in B_y) = P_{\underline{X}}(B_y)$$

Onde $B_y = \{(x_1, \dots, x_n) : g(x_1, \dots, x_n) \leq y\}$.

- **Nota 2**: Se $\underline{X}$ for discreto:

$$P_Y(y_j) = \sum_{\{i: g(x_i) = y_j\}} P_{\underline{X}}(x_i)$$

**Example 3.10.** Sejam $X \sim U(0,1)$ e $Y = -\ln(x)$. Temos que $\forall x$ valor de $X : x \in (-\infty, 0] \cup [1, \infty)$ o valor de $f_X(x) = 0$. Seja $x \in (0,1) \Leftrightarrow -\ln(x) \in (0, \infty)$, logo $\forall y$ valor de $Y : y \in (0, \infty)$. Calculemos $F_Y(y) = P(Y \leq y)$:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(-\ln(X) \leq y) \\ &= P(\ln(X) \geq -y) \\ &= P(X \geq e^{-y}) \\ &= 1 - P(X < e^{-y}) = 1 - e^{-y} \end{aligned}$$

Assim, temos que $Y \sim Exp(1)$.

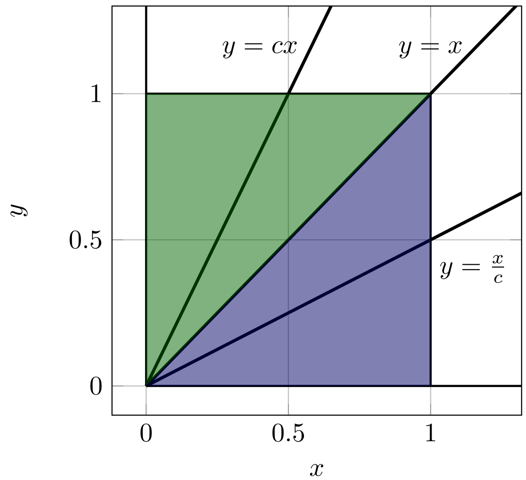
**Example 3.11.** Sejam $X \perp Y; X \sim U(0,1); Y \sim U(0,1); Z = \frac{X}{Y}$. Determinar a distribuição de $Z$:
Os valores que geram indefinição de $Z$ são: $X = Y = 0$ e $Y = 0, X > 0$, assim a boa definição de $Z$ é no espaço $[0 < X \leq 1, 0 < Y \leq 1]$. Vejamos se esse intervalo contém toda a massa de probabilidade:

$$P([0 < X \leq 1, 0 < Y \leq 1]) = P(0 < X \leq 1) \times P(0 < Y \leq 1) = 1 \times 1 = 1$$

Logo, basta avaliar o conjunto $[0 < X \leq 1, 0 < Y \leq 1] \Rightarrow [Z \in (0, \infty)]$. Assim, calculemos $F_Z(z)$:

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P\left(\frac{X}{Y} \leq z\right) \Rightarrow \left[\frac{X}{Y} \leq z\right] = [X \leq zY] = \left[\frac{X}{z} \leq Y\right]$$

Sabemos que $X$ e $Y$ pertencem ao intervalo $(0,1] \times (0,1]$, de modo que temos duas regiões genéricas para explorar: $z < 1$ e $z > 1$. De maneira gráfica, temos as seguintes regiões (considere $c > 1$):




Podemos ver que a região azul corresponde aos casos onde $z > 1$ e a região verde corresponde aos casos onde $z < 1$. Assim:

- $z < 1$:

$$F_Z(z) = \int_0^z \int_0^{\frac{x}{z}} dydx = \int_0^z y\Big|_0^{\frac{x}{z}} dx = \int_0^z \frac{x}{z}dx = \frac{1}{z} \times \frac{x^2}{2}\Big|_0^z = \frac{z^2}{2z} = \frac{z}{2}$$

- $z > 1$:

$$F_Z(z) = 1 - \frac{1}{2z}$$

De modo que a distribuição acumulada de $Z$ é dada por:

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & , z \in (-\infty, 0] \\ \frac{z}{2} & , z \in (0, 1) \\ 1 - \frac{1}{2z} & , z \in [1, \infty) \end{cases}$$

Assim, $F_Z(z) = P\left(\frac{X}{Y} \leq z\right) = P((X, Y) \in B_z)$, onde os conjuntos $B_z$ podem ter formatos diferentes dependendo de $z$. A densidade será dada pela derivada de $F_Z(z)$ com relação a $z$:

$$f_Z(z) = \begin{cases} 0 & , z \leq 0 \\ \frac{1}{2} & , z \in (0, 1) \\ \frac{1}{2z^2} & , z \geq 1 \end{cases}$$

### 3.7.1 Distribuição da Soma

**Proposition 3.7.**

- ***a)*** *Se $X$ e $Y$ tem densidade conjunta $f(x, y) \Rightarrow f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z - t, t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t, z - t)dt$;*
- ***b)*** *Se $X \perp Y$ e $f_X$ e $f_Y$ são suas marginais, então $f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-t)f_Y(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)f_Y(z-t)dt$.*

*Prova.* Seja $Z = X + Y \Rightarrow [Z \leq z] = [X + Y \leq z] = [(x, y) \in B_z]$. Considerando $B_z = \{(x, y) : x + y \leq z\} = \{(x, y) : x \leq z - y\}$, temos que:

$$F_Z(z) = \int\int_{B_z} f(x, y)dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{z-y} f(x, y)dxdy$$

Seja $y$ um valor fixo e defina $s = x + y, ds = dx$. Quando $x = z - y \Rightarrow s = z$, temos:

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{z} f(s - y, y)dsdy = \int_{-\infty}^{z} \int_{-\infty}^{\infty} f(s - y, y)dyds = \int_{-\infty}^{z} g(s)ds$$

E $g$ é a densidade de $X + Y$, ou seja, $g(s) = f_{X+Y}(s)$. □

### 3.7.2 Convolução

Se $f_1$ e $f_2$ são densidades de variáveis aleatórias, sua convolução $f_1 * f_2$ é:

$$f_1 * f_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x-t) f_2(t) dt$$

Assim, no caso da soma da proposição 3.7, podemos ver que:

$$f_{X+Y}(z) = f_X * f_Y(z)$$

### 3.7.3 Independência

**Proposition 3.8.** *Se $X_1, \ldots, X_n$ são variáveis aleatórias independentes, então funções de famílias disjuntas de $\{X_i\}_{i \geq 1}$ também são independentes.*

*Prova: Caso especial.* Considere $Y_i = g_i(X_i)$. É necessário provar que $F_{Y_1 \ldots Y_n}(y_1, \ldots, y_n) = \prod_{i=1}^{n} F_{Y_i}(y_i)$:

$$\begin{aligned}
F_{Y_1 \ldots Y_n}(y_1, \ldots, y_n) &= P(g_1(x_1) \leq y_1, \ldots, g_n(x_n) \leq y_n) \\
&= P\left(X_1 \in g_1^{-1}((-\infty, y_1]), \ldots, X_n \in g_n^{-1}((-\infty, y_n])\right) \\
&= \prod_{i=1}^{n} P\left(X_i \in g_i^{-1}((-\infty, y_i])\right) \\
&= \prod_{i=1}^{n} P\left(g_i(X_i) \in (-\infty, y_i]\right) = \prod_{i=1}^{n} F_{Y_i}(y_i)
\end{aligned}$$

□

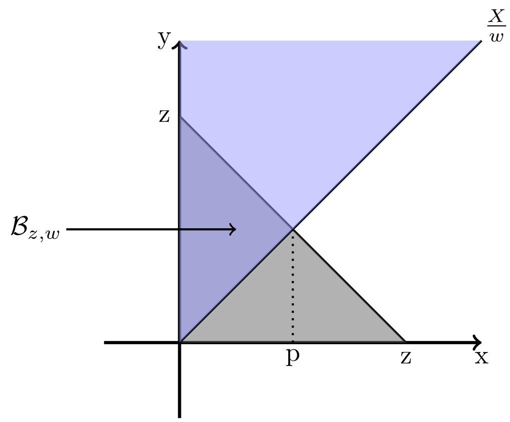
**Example 3.12.** Considere $X \perp Y$, $X \sim Exp(1)$ e $Y \sim Exp(1)$. Determine:

- a) A distribuição de $Z = X + Y$ e $W = \frac{X}{Y}$;
- b) Mostrar que $Z \perp W$.

**a)**
Como os valores de $X$ e $Y$ são sempre positivos, os valores de $Z$ e $W$ também o serão. Verifiquemos que $F_{ZW}(z, w) = F_Z(z) F_W(w)$:

$$\begin{aligned}
P[Z \leq z, W \leq w] &= F_{ZW}(z, w) \\
&= \left[X + Y \leq z, \frac{X}{Y} \leq w\right] \\
&= \left[Y \leq z - X, \frac{X}{w} \leq Y\right]
\end{aligned}$$

Vejamos que temos que considerar que $Y \leq z - X$ e que $\frac{X}{w} \leq Y$, ou seja, temos que avaliar as variáveis no seguinte boreliano:




Onde a região em azul claro são os valores onde $Y \geq \frac{X}{w}$, e a região cinza são os valores em que $Y \leq z - X$, o ponto $p$ é dado por:

$$\begin{aligned}\frac{X}{w} = z - X \Rightarrow z &= X\left(\frac{1}{w} + 1\right)\\ z &= X\left(\frac{w+1}{w}\right)\\ X &= \frac{zw}{w+1}\end{aligned}$$

Assim, estamos interessados em encontrar $P((X,Y) \in \mathcal{B}_{z,w})$, que será:

$$\begin{aligned}P((X,Y) \in \mathcal{B}_{z,w}) &= \int_0^p \int_{\frac{x}{w}}^{z-x} e^{-x}e^{-y}dydx\\ &= \int_0^{\frac{zw}{w+1}} e^{-x}\left[-e^{-y}\Big|_{\frac{x}{w}}^{z-x}\right]dx\\ &= \int_0^{\frac{zw}{w+1}} e^{-x}\left[e^{-\frac{x}{w}-e^{-z+x}}\right]dx\\ &= \int_0^{\frac{zw}{w+1}} e^{-x\left(\frac{1+w}{w}\right)} - e^{-z}dx\\ &= -\frac{w}{(1+w)}e^{-x\left(\frac{1+w}{w}\right)}\Bigg|_0^{\frac{zw}{w+1}} - e^{-z}x\Bigg|_0^{\frac{zw}{w+1}}\\ &= \frac{w}{1+w}\left(1 - e^{-z} - ze^{-z}\right)\end{aligned}$$

Assim, temos que a distribuição de $Z$ e $W$ será dada por:

$$F_{ZW}(z,w) = \begin{cases} 0 & , z \leq 0, w \leq 0\\ \frac{w}{1+w}\left(1 - e^{-z} - ze^{-z}\right) & , z > 0, w > 0\end{cases}$$

Que é uma distribuição de probabilidade, pois é absolutamente contínua (e por consequência, contínua à direita) e os seguintes limites são bem definidos:

$$\begin{aligned}\lim_{w\to 0} F_{ZW}(z,w) &= 0\\ \lim_{z\to 0} F_{ZW}(z,w) &= 0\\ \lim_{z\to\infty, w\to\infty} F_{ZW}(z,w) &= 1\end{aligned}$$

**b)**
Temos que as distribuições marginais de $Z$ e $W$ serão:

$$F_Z(z) = \lim_{w\to\infty} F_{ZW}(z,w) = 1 - e^{-z} - ze^{-z}$$
$$F_W(w) = \lim_{z\to\infty} F_{ZW}(z,w) = \frac{w}{1+w}$$

E como a distribuição conjunta é o produto das marginais, temos que $Z \perp W$. As densidades serão dadas pelas derivadas da distribuição acumulada conjunta, ou seja:

$$\begin{aligned} f_{ZW}(z,w) &= \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{w}{1+w}\left(1 - e^{-z} - ze^{-z}\right)\right) \\ &= \frac{1}{(1+w)^2} ze^{-z} I_{(0,\infty)}(z) I_{(0,\infty)}(w) \end{aligned}$$

## 3.8 Método do Jacobiano

Seja $g : G_0 \to G$, com $G, G_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ e ambos abertos. Então $g(x_1,\dots,x_n) = (g_1(x_1,\dots,x_n),\dots,g_n(x_1,\dots,x_n)) = (y_1,\dots,y_n)$, com $g$ sendo bijetiva, ou seja, para todo $y$ valor de $Y$, existe $\underline{x}$ valor de $X$ tal que $g(\underline{x}) = y$.
Logo $g$ admite inversa usual $g^{-1} = h$, com $h = (h_1,\dots,h_n)$:

$$\begin{aligned} x_1 &= h_1(y_1,\dots,y_n) \\ &\vdots \\ x_n &= h_n(y_1,\dots,y_n) \end{aligned}$$

Vamos supor que existem as derivadas parciais $\frac{\partial x_i}{\partial y_j}, \forall i, \forall j$, e que elas são contínuas em $G$. Desejamos computar: $\int \dots \int_C f_Y(y)dy$ ,em termos de $\int \dots \int_D f_X(x)dx$.

**Example 3.13.** Sejam $Y = (Y_1, Y_2) = \left(X_1 + X_2, \frac{X_1}{X_2}\right)$. Teremos então que: $y_1 = g_1(x_1,x_2) = x_1 + x_2$ e $y_2 = g_2(x_1,x_2) = \frac{x_1}{x_2}$. Temos assim os valores dos $y$'s em termos dos $x$'s, e desejamos encontrar o contrário:

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + x_2 \Rightarrow x_1 = y_1 - x_2 \\ y_2 &= \frac{y_1 - x_2}{x_2} \Rightarrow x_2 = \frac{y_1}{y_2+1} \Rightarrow x_1 = \frac{y_1y_2}{y_2+1} \end{aligned}$$

Agora que temos os valores de $X_1$ e $X_2$ em função de $Y_1$ e $Y_2$. Agora, podemos calcular as derivadas parciais de $x$ com relação a $y$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} &= y_2(y_2+1)^{-1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial y_2} &= y_1(y_2+1)^{-2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} &= (y_2+1)^{-1} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_2} &= -y_1(y_2+1)^{-2} \end{aligned}$$

Definimos agora o Jacobiano:

$$J(\underline{\mathrm{x}},\underline{\mathrm{y}}) = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_2}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1} & \frac{\partial x_n}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{bmatrix} \tag{25}$$

Dessa forma, o Jacobiano da transformação será:

$$\begin{aligned} J(\underline{\mathrm{x}},\underline{\mathrm{y}}) &= \det \begin{bmatrix} y_2(y_2+1)^{-1} & y_1(y_2+1)^{-2} \\ (y_2+1)^{-1} & -y_1(y_2+1)^{-2} \end{bmatrix} \\ &= [y_2(y_2+1)^{-1}].[-y_1(y_2+1)^{-2}] - [y_1(y_2+1)^{-2}].[(y_2+1)^{-1}] \\ &= -y_1(y_2+1)^{-2} \end{aligned}$$

Pelo teorema do Jacobiano, temos que:

$$\int \cdots \int_A f(x_1,\ldots,x_n)dx_1\ldots dx_n = \int \cdots \int_{g(A)} f(h_1(y_1,\ldots,y_n),\ldots,h_n(y_1,\ldots,y_n))|J(\underline{\mathrm{x}},\underline{\mathrm{y}})|dy_1\ldots dy_n$$

Se $f$ é integrável em $A$, com $A \subseteq G_0$ e $h = g^{-1}$. Assim, usando os valores do exemplo 3.12, temos que $X_1 \sim exp(1), X_2 \sim exp(1), X_1 \perp X_2$, com densidade conjunta dada por $f_{X_{1}X_{2}}(x_{1},x_{2}) = e^{-x_{1} + x_{2}}$, de modo que:

$$\begin{aligned} f(h_1(y_1,y_2),h_2(y_1,y_2))|J(\underline{\mathrm{x}},\underline{\mathrm{y}})| &= f\left(\frac{y_1y_2}{y_2+1}, \frac{y_1}{y_2+1}\right)\left| -y_1(y_2+1)^{-2}\right| \\ &= \exp\left(-\left[\frac{y_1y_2}{y_2+1} + \frac{y_1}{y_2+1}\right]\right) y_1(y_2+1)^{-2} \\ &= e^{-y_1}y_1(y_2+1)^{-2} \end{aligned}$$

Que é a mesma densidade conjunta encontrada para $Z$ e $W$ no exemplo 3.12.

### 3.8.1 Notas

1. Sendo $f$ a densidade de $X_1,\ldots,X_n$ e $P((X_1,\ldots,X_n) \in G_0) = 1$, se $Y_i = g_i(x_1,\ldots,x_n); i = 1,\ldots,n$, e $\mathcal{B} \subseteq G$, com $\mathcal{B}$ boreliano. Então:

$$\begin{aligned} P((Y_1,\ldots,Y_n) \in \mathcal{B}) &= P((X_1,\ldots,X_n) \in h(\mathcal{B})) \\ &= \int \cdots \int_{h(\mathcal{B})} f(x_1,\ldots,x_n)dx_1\ldots dx_n \\ &= \int \cdots \int_{\mathcal{B}} f(h_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,h_n(x_1,\ldots,x_n))\big|J(\underline{\mathrm{x}},\underline{\mathrm{y}})\big|dy_1\ldots dy_n \end{aligned}$$

2. $P((Y_1,\ldots,Y_n) \in G) = P((X_1,\ldots,X_n) \in h(G)) = P((X_1,\ldots,X_n) \in G_0) = 1$. De modo análogo:

$$\begin{aligned} P((Y_1,\ldots,Y_n) \in \mathcal{B}) &= P((Y_1,\ldots,Y_n) \in \mathcal{B} \cap G) \\ &= \int \cdots \int_{\mathcal{B}\cap G} f(h(y))\big|J(\underline{\mathrm{x}},\underline{\mathrm{y}})\big|dy_1\ldots dy_n \end{aligned}$$

**Theorem 3.3.** *Sob as condições impostas no início da seção, a densidade conjunta de $(Y_1,\ldots,Y_n)$ é dada por:*

$$f_{Y_1\ldots Y_n} = \begin{cases} f_X(h_1(y_1,\ldots,y_n),\ldots,h_n(y_1,\ldots,y_n))\big|J(\underline{x},\underline{y})\big| & ,y \in G \\ 0 & ,c.c. \end{cases}$$

### 3.8.2 Propriedades do Jacobiano

Podemos inverter a ordem das variáveis no Jacobiano, seguindo a seguinte propriedade:

$$J(\underline{\mathrm{x}}, \underline{\mathrm{y}}) = \left(J(\underline{\mathrm{y}}, \underline{\mathrm{x}})\right)^{-1}\Big|_{\underline{\mathrm{x}}=h(y)} \tag{26}$$

**Example 3.14.** Retornando ao problema apresentado no exemplo 3.12:

$$\begin{aligned}
y_1 &= x_1 + x_2 & y_2 &= x_1 x_2^{-1} \\
\frac{\partial y_1}{\partial x_1} &= 1 & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} &= 1 \\
\frac{\partial y_2}{\partial x_1} &= x_2^{-1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} &= -x_1(x_2)^{-2}
\end{aligned}$$

De modo que podemos agora encontrar o Jacobiano com relação aos valores das derivadas parciais dos $y$'s, e invertê-lo para encontrar o Jacobiano dos $x$'s:

$$\begin{aligned}
J(\underline{\mathrm{y}}, \underline{\mathrm{x}}) = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ x_2^{-1} & -x_1(x_2)^{-2} \end{bmatrix} &= (x_2)^{-2}(x_2 + x_1)(-1) \\
&= \left(\frac{y_2+1}{y_1}\right)^2 \left(\frac{y_1}{y_2+1} + \frac{y_1 y_2}{y_2+1}\right)(-1) \\
&= \frac{(y_2+1)^2}{(y_1)^2}\frac{y_1(y_2+1)}{y_2+1}(-1) \\
&= -\frac{(y_2+1)^2}{y_1} = -y_1^{-1}(y_2+1)^2 = \frac{1}{J(\underline{\mathrm{x}}, \underline{\mathrm{y}})}
\end{aligned}$$

Temos que, se $g : G_0 \to G$, com $G_0, G \subseteq \mathbb{R}^n$ abertos, se $g(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n)$, então $g$ é bijetiva e $h = g^{-1}$.

**Example 3.15.** Seja $X \sim U(0,1)$ e $Y = -ln(X)$. Temos que $G_0 = (0,1)$, e $g(x) = -ln(x)$, de modo que $G = (0, \infty)$. Então:

$$\begin{aligned}
g^{-1}(y) = h(y) = \exp(-y) &= e^{-y} \\
\frac{\partial}{\partial y}(g^{-1}(y)) = -e^{-y} &= J(x, y)
\end{aligned}$$

Assim, para encontrar $P(Y \leq y)$, teremos:

$$\begin{aligned}
P(Y \leq y) &= P(-\ln(X) \leq y) \\
&= P(\ln(X) \geq -y) \\
&= P(X \geq e^{-y}) \\
&= 1 - P(X \leq e^{-y}) \\
&= 1 - e^{-y} = F_Y(y) \Longrightarrow f_Y(y) = e^{-y}
\end{aligned}$$

Pelo Jacobiano, teremos:

$$f_Y(y) = f_X(h(y)).|J| = 1.e^{-y}$$

**Theorem 3.4.** *Sejam $G_1, G_2, \ldots, G_k$ disjuntos tais que $P\left(\underline{X} \in \bigcup_{i=1}^k G_i\right) = 1$, tal que $g\big|_{G_l}$ é 1:1 para todo $l = 1, \ldots, k$. Denotamos por $h^{(l)}$ a inversa de $g$ em $G_l$, e definimos assim o Jacobiano local $J_l(\underline{x}, \underline{y})$ como:*

$$f_Y(\underset{\sim}{y}) = \begin{cases} \sum_{l=1}^{k} f\left(h^{(l)}(y)\right) |J_l(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y})| & ; \underset{\sim}{y} \in G_l \\ 0 & c.c. \end{cases}$$

**Example 3.16.** Sejam $X \sim N(0,1)$ e $Y = X^2$. Sabemos que $y = x^2$ não é bijetiva, mas podemos considerar a seguinte partição em que essa função seja localmente bijetiva: $G_1 = (-\infty, 0)$ e $G_2 = (0, \infty)$. Então, em $G_1, h^{(1)}(y) = -\sqrt{y}$, e em $G_2, h^{(2)}(y) = \sqrt{y}$, de modo que os jacobianos locais serão:

$$J_1(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} h^{(1)}(y) = -\frac{1}{2\sqrt{y}}$$
$$J_2(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} h^{(2)}(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

Assim, a densidade de $Y$ será dada por:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= f_X\left(h^{(1)}(y)\right)\left|J_1(x,y)\right| + f_X\left(h^{(2)}(y)\right)\left|J_2(x,y)\right| \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}y\right)\frac{1}{2\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}y\right)\frac{1}{2\sqrt{y}} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}y} & , y > 0 \\ 0 & , c.c. \end{cases} \end{aligned}$$

Ou seja, $Y \sim Gama\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, ou $Y \sim \chi^2(1)$.

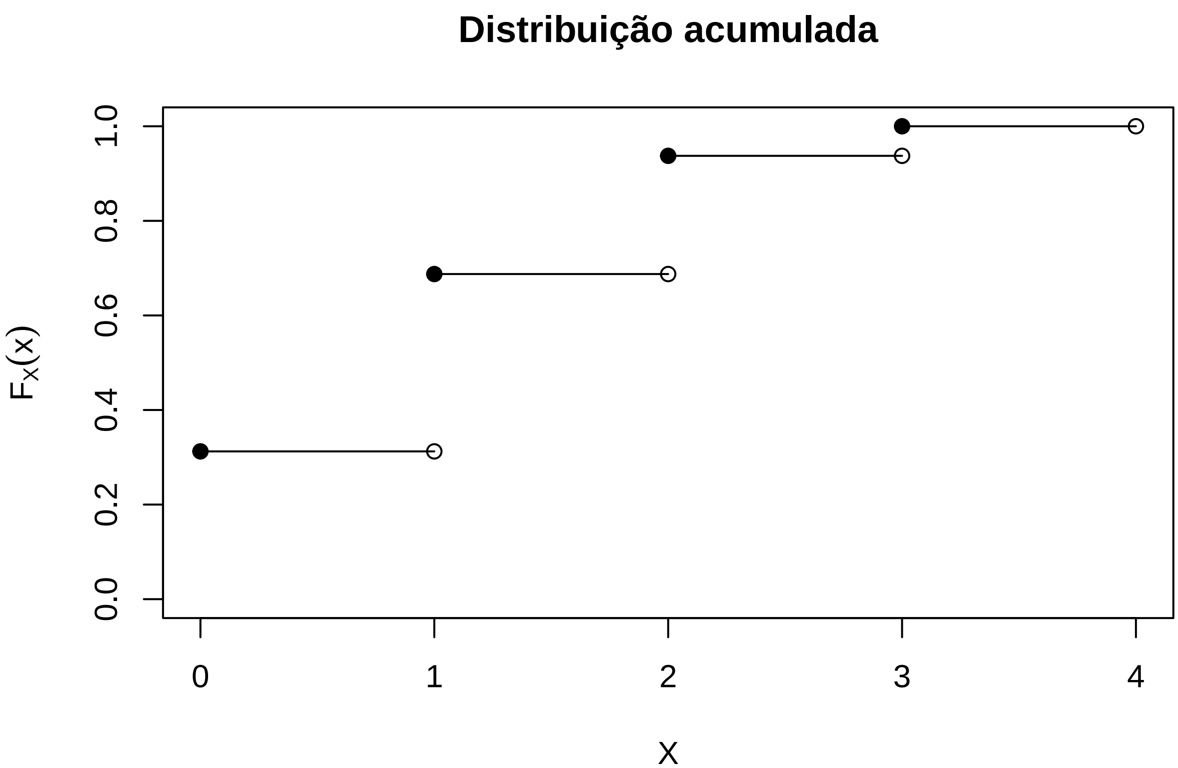
**Notas**:

- Se $X_1, \ldots, X_n$ são iid, com $X_i \sim N(0,1) \Rightarrow X_1^2 + \ldots + X_n^2 \sim \chi^2(n)$;
- Se $X \sim N(0,1), Y \sim \chi^2(n)$, com $X \perp Y \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{y/n}} \sim t(n)$;
- Sejam $X_1, \ldots, X_n$, iid, com $X_i \sim N(0,1)$, com $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}, s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$:
  1. $\frac{\bar{x}\sqrt{n}}{\sigma} \sim N(0,1)$;
  2. $\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$;
  3. $\frac{\bar{x}\sqrt{n}}{s} \sim t(n-1)$;
  4. $\bar{x} \perp s^2$.
- Se $X \sim \chi^2(k), Y \sim \chi^2(n), X \perp Y \Rightarrow \frac{X/k}{Y/n} \sim F(k,n)$;
- Se $T \sim t(n) \Rightarrow T^2 \sim F(1,n)$.

## 3.9 Exercícios

**Exercise 3.1** (BJ 2.1)**.** Seja $X$ o número de caras obtidas em 4 lançamentos de uma moeda honesta. Desenhe o gráfico da função de distribuição de $X$.

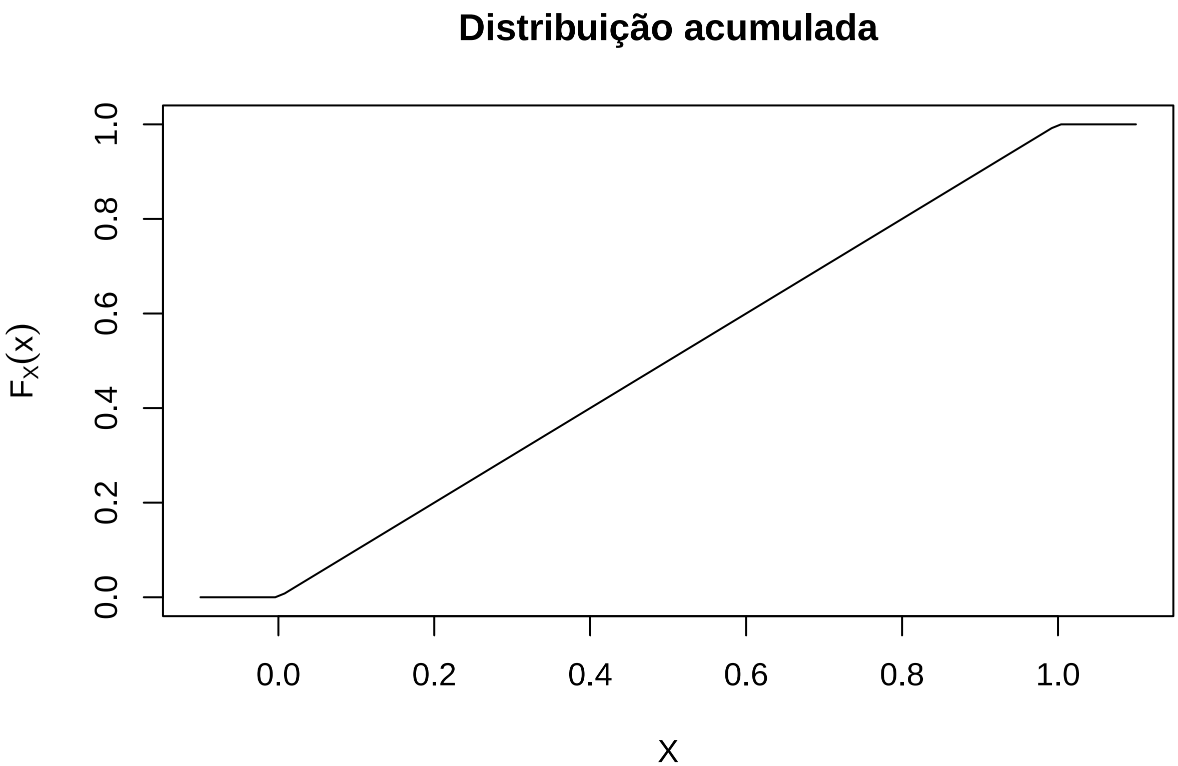
*Resposta.* Sabemos que $X \sim \text{Bin}(4, 0.5)$, então o gráfico da distribuição de $X$ será dada por:




□

**Exercise 3.2** (BJ 2.2)**.** Um ponto é selecionado, ao acaso, do quadrado unitário $[0, 1] \times [0, 1]$. Seja $X$ a primeira coordenada do ponto selecionado. Faça o gráfico da função de distribuição de $X$.

*Resposta.* Como o ponto é escolhido ao acaso, cada uma das coordenadas seguirá uma distribuição uniforme entre 0 e 1, de modo que $X \sim \text{U}(0, 1)$, e o gráfico da distribuição será dado por:




$\square$

**Exercise 3.3** (BJ 2.4)**.** Seja $X$ uma variável aleatória com distribuição de Poisson, com parâmetro $\lambda > 0$. Mostre que a função de distribuição de $X$ é

$$F(X) = \begin{cases} \frac{1}{n!}\int_\lambda^\infty e^{-t}t^n dt & ,\text{se } n \leq x < n+1, n = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & ,\text{se } x < 0 \end{cases}$$

*Resposta.* Sabemos que a função densidade de probabilidade de $X$ é dada por $f(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$. Suponha que, para $x = k$ a função de distribuição anterior é verdadeira. Assim, mostremos por indução que a mesma é válida para $x = k + 1$.

$$\begin{aligned} F(k+1) &= \frac{1}{(k+1)!}\int_\lambda^\infty e^{-t}t^{k+1}dt \Rightarrow \begin{bmatrix} u = t^{k+1}dt & dv = e^{-t} \\ du = (k+1)t^k & v = -e^{-t} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{(k+1)!}\left[-e^{-t}t^{k+1}\Big|_\lambda^\infty + \int_\lambda^\infty e^{-t}(k+1)t^k dt\right] \\ &= \frac{1}{(k+1)!}\left[e^{-\lambda}\lambda^{k+1} + (k+1)\int_\lambda^\infty e^{-t}t^k dt\right] \\ &= \frac{e^{-\lambda}\lambda^{k+1}}{(k+1)!} + \frac{1}{k!}\int_\lambda^\infty e^{-t}t^k dt = P(X = k+1) + F(k) \end{aligned}$$

Assim, $F(k+1) = F(k) + P(X = k+1)$, de modo que a função apresentada é sim a distribuição de $X$. $\square$

**Exercise 3.4** (BJ 2.5)**.** Suponha que a vida útil de um certo tipo de lâmpada tenha distribuição exponencial com parâmetro $\lambda$.
**a)** Seja $T$ o tempo de vida de uma lâmpada desse tipo. Mostre que:

$$P(T > t + s|T > t) = P(T > s),\ \forall s, t > 0$$

**b)** Suponha que $\lambda = 3$ quando a vida é expressa em dias. Uma lâmpada solitária é ligada em uma sala no instante $t = 0$. Um dia depois, você entra na sala e fica ali durante 8 horas, saindo no final desse período.

- *(i)* Qual a probabilidade de que você entre na sala quando já está escura?
- *(ii)* Qual a probabilidade de você entrar na sala com a lâmpada ainda acesa e sair da sala depois da lâmpada queimar?

*Resposta.* **a)**
Temos que $[T > t + s] \subset [T > t] \Rightarrow P(T > t + s, T > t) = P(T > t + s)$. Além disso, como $T \sim \text{Exp}(\lambda) \Rightarrow P(T > t) = 1 - P(T \leq t) = 1 - F_T(t) = 1 - (1 - e^{-\lambda t}) = e^{-\lambda t}$. Desse modo:

$$\begin{aligned} P(T > t + s|T > t) = \frac{P(T > t + s, T > t)}{P(T > t)} &= \frac{P(T > t + s)}{P(T > t)} \\ &= \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} \\ &= e^{-\lambda s} = 1 - F_T(s) = P(T > s) \end{aligned}$$

**b)**
*(i)* Caso depois de um dia a lâmpada já esteja apagada, então $T \leq 1$, de modo que:

$$P(T \leq 1) = 1 - e^{-3.1} = 1 - e^{-3}$$

*(ii)* Caso a lâmpada ainda esteja acesa depois de um dia, mas tenha queimado antes de 8 horas ($\frac{1}{3}$ de dia) dado que não tenha queimado no primeiro dia, queremos encontrar a probabilidade do seguinte evento: $P\left(T \leq 1 + \frac{1}{3}|T > 1\right) = 1 - P\left(T > 1 + \frac{1}{3}|T > 1\right)$, que utilizando o resultado obtido em **(a)**, temos que será:

$$\begin{aligned} P\left(T \leq 1 + \frac{1}{3}|T > 1\right) &= 1 - P\left(T > 1 + \frac{1}{3}|T > 1\right) \\ &= 1 - P\left(T > \frac{1}{3}\right) \\ &= 1 - e^{-3.\frac{1}{3}} = 1 - e^{-1} \end{aligned}$$

□

**Exercise 3.5** (BJ 2.6)**.** Seja $X$ uma variável aleatória com densidade:

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 & ,\text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & ,\text{c.c.} \end{cases}$$

**a)** Determine o valor da constante $c$.
**b)** Ache o valor $\alpha$ tal que $F_X(\alpha) = \frac{1}{4}$.

*Resposta.* **a)**
Temos que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \Rightarrow \int_{-1}^{1} cx^2 dx = 1$. Assim:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} cx^2 dx &= c \int_{-1}^{1} x^2 dx \\ &= c \left( \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^{1} \right) \\ &= c \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) = \frac{2c}{3} \Longrightarrow c = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

**b)**
Podemos calcular a distribuição de $X$ como segue:

$$\begin{aligned}
F_X(x) &= \frac{3}{2}\int_{-1}^{x} x^2 dx \\
&= \frac{3}{2}\left(\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{x}\right) \\
&= \frac{3}{2}\left(\frac{x^3+1}{3}\right) = \frac{x^3+1}{2}
\end{aligned}$$

Assim, podemos encontrar o valor $\alpha$ tal que $F_X(\alpha) = \frac{1}{4}$:

$$\begin{aligned}
\frac{x^3+1}{2} &= \frac{1}{4} \\
x^3 + 1 &= \frac{1}{2} \\
x &= \sqrt[3]{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

□

**Exercise 3.6** (BJ 2.7)**.** Uma variável aleatória $X$ tem função de distribuição:

$$F(X) = \begin{cases} 0 & \text{, se } x < 0 \\ x^3 & \text{, se } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{, se } x > 1 \end{cases}$$

Qual a densidade de $X$?

*Resposta.* Podemos encontrar a função densidade de probabilidade de $X$ a partir da derivação em partes da distribuição acumulada:

$$f_X(x) = \frac{\partial}{\partial x} F_X(x) = \frac{\partial}{\partial x}(x^3) = 3x^2$$

De modo que a densidade será:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{, se } x < 0 \\ 3x^2 & \text{, se } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{, se } x > 1 \end{cases}$$

□

**Exercise 3.7** (BJ 2.9)**.** Seja $X$ uma variável aleatória com densidade:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(1+x)^2} & \text{, se } x > 0 \\ 0 & \text{, c.c.} \end{cases}$$

Seja $Y = \max(X, c)$, onde $c$ é uma constante maior que 0.
**a)** Ache a função de distribuição de $Y$.
**b)** Decomponha $F_Y$ em partes discreta, absolutamente contínua e singular.

*Resposta.* **a)**
Como $Y = \max(X, c)$, separaremos em dois casos:
$\min(\mathbf{X}, \mathbf{c}) = \mathbf{X} \Rightarrow \mathbf{X} \leq \mathbf{c}$:

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) &= \int_0^c \frac{1}{(1+y)^2} dy \Rightarrow \begin{bmatrix} u = (1+y) & du = dy \\ a = 1 & b = c+1 \end{bmatrix} \\
&= \int_1^{c+1} u^{-2} du \\
&= -u^{-1}\Big|_1^{c+1} = -(c+1)^{-1} - (-1^{-1}) = 1 - \frac{1}{c+1} = \frac{c}{c+1}
\end{aligned}
$$

Como $c$ é uma constante, esse valor será a probabilidade pontual $P(\max(X,c) = c) = P(Y = c) = \frac{c}{c+1}$.
$\min(\mathbf{X}, \mathbf{c}) = \mathbf{c} \Rightarrow \mathbf{X} > \mathbf{c}$:

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) = P(Y = c) + P(c < Y \le y) &= \frac{c}{c+1} + \int_c^y \frac{1}{(1+y)^2} dy \Rightarrow \begin{bmatrix} u = (1+y) & du = dy \\ a = c+1 & b = y+1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{c}{c+1} + \left( \int_{c+1}^{y+1} u^{-2} du \right) \\
&= \frac{c}{c+1} + \left( -u^{-1}\Big|_{c+1}^{y+1} \right) \\
&= \frac{c}{c+1} + \frac{1}{c+1} - \frac{1}{y+1} \\
&= \frac{c+1}{c+1} - \frac{1}{y+1} = 1 - \frac{1}{y+1} = \frac{y}{y+1}
\end{aligned}
$$

Assim, a distribuição de $Y$ será:

$$
F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{, se } x \le 0 \\ \frac{c}{c+1} & \text{, se } 0 < x \le c \\ \frac{x}{x+1} & \text{, se } x > c \end{cases} \Rightarrow F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{, se } y < c \\ \frac{y}{y+1} & \text{, se } y \ge c \end{cases}
$$

**b)**
A parte discreta envolve o salto que ocorre em $Y = c$, de tamanho $\frac{c}{c+1}$. Os demais pontos são absolutamente contínuos. Assim, não temos partes singulares. □

**Exercise 3.8** (BJ 2.10)**.** Se $X$ é uma variável aleatória com distribuição exponencial de parâmetro $\lambda > 0$, qual a distribuição da variável aleatória $Y = \min(\lambda, X)$

*Resposta.* De maneira similar ao caso anterior, como $Y = \min(\lambda, X)$, separaremos $Y$ em dois casos:
$\min(\lambda, \mathbf{X}) = \mathbf{X} \Rightarrow \mathbf{X} \le \lambda$:

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) &= \int_0^y \lambda e^{-\lambda y} dy \\
&= \frac{\lambda}{\lambda} \left( -e^{-u}\Big|_0^{\lambda y} \right) = 1 - e^{-\lambda y}
\end{aligned}
$$

$\min(\lambda, \mathbf{X}) = \lambda \Rightarrow \lambda < \mathbf{X} < \infty$:

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) = P(Y \le \lambda) + P(Y > \lambda) &= 1 - e^{-\lambda\lambda} + \int_\lambda^\infty \lambda e^{-\lambda y} dy \\
&= 1 - e^{-\lambda^2} + \frac{\lambda}{\lambda} \left( -e^{-u}\Big|_{\lambda^2}^{\infty} \right) = 1 - e^{-\lambda^2} + e^{-\lambda^2} = 1
\end{aligned}
$$

De modo que a distribuição de $Y$ é dada por:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & ,\text{se } x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda y} & ,\text{se } 0 < x \leq \lambda \\ 1 & ,\text{se } x > \lambda \end{cases}$$

$\square$

**Exercise 3.9** (BJ 2.12)**.** Determine a densidade de $Y = (b - a)X + a$, onde $X \sim U[0, 1]$. Faça o gráfico da função de distribuição de $Y$.

*Resposta.* Sabemos que $f_X(x) = I_{[0,1]}$ e pela proposição 3.3 temos que quando $Y = bX + c$ então:

$$f_Y(y) = \frac{1}{b} f_X\left(\frac{y - c}{b}\right)$$

Dessa forma, considerando que $b = (b - a)$ e $c = (a)$, então:

$$f_Y(y) = \frac{1}{(b - a)} f_X\left(\frac{y - a}{b - a}\right) = \frac{1}{(b - a)} I_{[0,1]}$$

De modo que $Y \sim U(a, b)$. $\square$

**Exercise 3.10** (BJ 2.13)**.** Se $X$ tem densidade $f(x) = e^{-2|x|}, -\infty < x < \infty$, qual a densidade de $Y = |X|$?

*Resposta.* Como $F_Y(y) = P(Y \leq y)$, temos que:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) \\ &= P(|X| \leq y) \\ &= \int_{-y}^{y} e^{-2|x|} dx \end{aligned}$$

Como $f_X(x)$ é simétrica em torno de zero, temos que:

$$\begin{aligned} F_Y(y) = 2\int_0^y e^{-2|x|} dx &= 2\int_0^y e^{-2x} dx \\ &= \frac{2}{2}\int_0^{2y} e^{-u} du \\ &= -e^{-u}\Big|_0^{2y} \\ &= 1 - e^{-2y} \end{aligned}$$

Ou seja, $f_Y(y) = \frac{\partial}{\partial y} F_Y(y) = 2e^{-2y} \Rightarrow Y \sim \text{Exp}(2)$. $\square$

**Exercise 3.11** (BJ 2.14)**.** Cinco pontos são escolhidos, independentemente e ao acaso, do intervalo $[0, 1]$. Seja $X$ o número de pontos que pertencem ao intervalo $[0, c]$ onde $0 < c < 1$. Qual a distribuição de $X$?

*Resposta.* Consideremos inicialmente o caso em que um ponto é escolhido ao acaso do intervalo $[0, 1]$. Desse modo, por ser uniformemente distribuído no intervalo, a probabilidade de que o ponto pertença ao intervalo $[0, c]$ é o comprimento desse intervalo, de modo que:

$$P(X = 0) = (1 - c), P(X = 1) = c$$

Para dois pontos, temos que levar em consideração o caso em que $X = 1$, pois podem ocorrer duas formas diferentes de isso ocorrer: o primeiro ponto pertence ao intervalo e o segundo não, ou o segundo ponto pertence ao intervalo e o segundo não, de modo que:

$$P(X=0)=(1-c)^2, P(X=1)=2c(1-c), P(X=2)=c^2$$

É fácil perceber o padrão, de modo que $X \sim \text{Bin}(5, c)$. □

**Exercise 3.12** (BJ 2.15)**.** Determine a distribuição do tempo de espera até o segundo sucesso em uma sequência de ensaios de Bernoulli com probabilidade $p$ de sucesso.

*Resposta.* Considerando que, nesse caso, o tempo de espera é discreto, vamos levar em consideração que foram necessários $n$ ensaios até o segundo sucesso, que ocorreu com probabilidade $p$. Assim, ocorreu algum sucesso entre os $(n-1)$ ensaios anteriores, também com probabilidade $p$, enquanto que os $(n-2)$ ensaios restantes foram fracassos, cada um com probabilidade $(1-p)$.
Seja $X$ o número de ensaios necessários até o segundo sucesso. Como os ensaios são independentes, a probabilidade de que $X=2$ será:

$$P(X=2)=(n-1)p^2(1-p)^{n-2}$$

Que podemos identificar como sendo proveniente de uma distribuição binomial negativa, que de modo geral descreve a probabilidade de serem necessários $X$ ensaios de Bernoulli independentes com probabilidade de sucesso $p$ até se obter o $r$-ésimo sucesso, com a seguinte densidade:

$$X \sim \text{NegBin}(r,p) \Rightarrow f_X(x)=\binom{x-1}{r-1}p^r(1-p)^{x-r}$$

□

**Exercise 3.13** (BJ 2.17)**. a)**
Demonstre que a função

$$F(x,y)=\begin{cases} 1-e^{-x-y} & \text{, se } x \geq 0, y \geq 0 \\ 0 & \text{, c.c.} \end{cases}$$

não é função de distribuição de um vetor aleatório.
**b)**
Mostre que a seguinte função é função de distribuição de algum $(X, Y)$:

$$F(x,y)=\begin{cases} (1-e^{-x})(1-e^{-y}) & \text{, se } x \geq 0, y \geq 0 \\ 0 & \text{, c.c.} \end{cases}$$

*Resposta.* **a)**
Para que $F$ seja uma função de distribuição de probabilidade, é necessário que ela siga as propriedades enunciadas no início do capítulo, a ver:

- $F_1$: é não-decrescente em cada uma das coordenadas:

Seja $x_1 \leq x_2$. Teremos que:

$$\begin{aligned} F(x_1,y) &\overset{?}{\leq} F(x_2,y) \\ 1-e^{-y}e^{-x_1} &\overset{?}{\leq} 1-e^{-y}e^{-x_2} \\ -e^{-y}e^{-x_1} &\overset{?}{\leq} -e^{-y}e^{-x_2} \\ e^{-x_1} &\overset{?}{\geq} e^{-x_2} \end{aligned}$$

Como $x_1 \leq x_2 \Rightarrow e^{-x_1} \geq e^{-x_2}$, então a função é não decrescente em $X$. Para $Y$ se obtém de maneira análoga.

- $F_2$: é contínua à direita:

Como a função $F$ é absolutamente contínua no espaço amostral de $X$ e $Y$, ela será também contínua à direita.

- $F_3$: limites do espaço amostral:

$$\lim_{x\to 0} F(x,y) = 0 \quad \lim_{y\to 0} F(x,y) = 0 \quad \lim_{x\to\infty, y\to\infty} F(x,y) = 1$$

- $F_4 : \Delta_{1,I_1}\Delta_{2,I_2}\dots\Delta_{n,I_n}(F(x_1,\dots,x_n)) \geq 0 \; \forall I_k = (a_k, b_k]; a_k \leq b_k, k = 1,\dots,n.$

$$\begin{aligned}
P(a < X \leq b, c < Y \leq d) &= F(b,d) - F(a,d) - F(b,c) + F(a,c) \geq 0 \\
&= 1 - e^{-b-d} - 1 + e^{-a-d} - 1 + e^{-b-c} + 1 - e^{-a-c} \geq 0 \\
&= e^{-a-d} + e^{-b-c} - e^{-b-d} - e^{-a-c} \geq 0 \\
e^{-a-d} + e^{-b-c} &\geq e^{-b-d} + e^{-a-c}
\end{aligned}$$

E como $a < b$ e $c < d$, temos que $e^{-a-d} < e^{-b-d}$ e $e^{-b-c} < e^{-a-c}$, de modo que a última desigualdade é falsa. Assim, a avaliação dessa probabilidade será negativa, para qualquer conjunto de pontos $(a,b] \in X, (c,d] \in Y$, o que mostra que $F$ não é uma função distribuição de probabilidade.

**b)**

Semelhante ao caso anterior, vejamos se $F$ segue as propriedades $F_1$ a $F_4$:

- $F_1$: é não-decrescente em cada uma das coordenadas:

Como podemos separar essa distribuição em um produto de duas partes, uma que depende apenas de $x$ e outra que depende apenas de $y$, podemos analisar cada caso separadamente. Como $(1-e^{-x})$ é não-decrescente em $[0,\infty)$, ela será não-decrescente em $y$ também.

- $F_2$: é contínua à direita:

Como a função $F$ é absolutamente contínua no espaço amostral de $X$ e $Y$, ela será também contínua à direita.

- $F_3$: limites do espaço amostral:

$$\lim_{x\to 0} F(x,y) = 0 \quad \lim_{y\to 0} F(x,y) = 0 \quad \lim_{x\to\infty, y\to\infty} F(x,y) = 1$$

- $F_4 : \Delta_{1,I_1}\Delta_{2,I_2}\dots\Delta_{n,I_n}(F(x_1,\dots,x_n)) \geq 0 \; \forall I_k = (a_k, b_k]; a_k \leq b_k, k = 1,\dots,n.$

$$\begin{aligned}
P(a < X \leq b, c < Y \leq d) &= F(b,d) - F(a,d) - F(b,c) + F(a,c) \geq 0 \\
&= (1-e^{-b})(1-e^{-d}) - (1-e^{-a})(1-e^{-d}) - (1-e^{-b})(1-e^{-c}) + (1-e^{a})(1-e^{c}) \geq 0 \\
&= (1-e^{-b})(1-e^{-d} - 1 + e^{-c}) - (1-e^{-a})(1-e^{-d} - 1 + e^{-c}) \geq 0 \\
&= (1-e^{-b})(e^{-c} - e^{-d}) - (1-e^{-a})(e^{-c} - e^{-d}) \geq 0 \\
(1-e^{-b})(e^{-c} - e^{-d}) &\geq (1-e^{-a})(e^{-c} - e^{-d})
\end{aligned}$$

E como $a < b$, temos que $(1-e^{-a}) < (1-e^{-b})$, de modo que a última desigualdade é verdadeira. Assim, a avaliação dessa probabilidade será positiva, para qualquer conjunto de pontos $(a,b] \in X, (c,d] \in Y$, o que mostra que $F$ é uma função distribuição de probabilidade. $\square$

**Exercise 3.14** (BJ 2.18)**.** Uma urna contém três bolas numeradas 1, 2 e 3. Duas bolas são retiradas sucessivamente da urna, ao acaso e sem reposição. Seja $X$ o número da primeira bola tirada e $Y$ o número da segunda.
**a)** Descreva a distribuição conjunta de $X$ e $Y$.
**b)** Calcule $P(X < Y)$.

*Resposta.* **a)**
Temos que a tabela da distribuição conjunta de $X$ e $Y$ será:

| $X$ \ $Y$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1/6 | 1/6 |
| 2 | 1/6 | 0 | 1/6 |
| 3 | 1/6 | 1/6 | 0 |

Assim, podemos ver que a distribuição conjunta será:

$$f_{XY}(i,j) = P(X = i, Y = j) = \begin{cases} 0 & \text{, se } i = j,\ i,j = 1,2,3 \\ \frac{1}{6} & \text{, se } i \neq j \end{cases}$$

**b)**
Temos que $P(X < Y)$ será dado por:

$$P(X < Y) = P(X = 1, Y = 2) + P(X = 1, Y = 3) + P(X = 2, Y = 3) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

□

**Exercise 3.15** (BJ 2.19)**.** Dizemos que a distribuição conjunta de $X_1, \dots, X_n$ é invariante para permutações se toda permutação das $X_i$ tem a mesma distribuição, i.e., se $(X_{\pi_1}, \dots, X_{\pi_n}) \sim (X_1, \dots, X_n)$ para toda permutação $(\pi_1, \dots, \pi_n)$ do vetor $(1, \dots, n)$.
**a)** Mostre que se $(X, Y) \sim (Y, X)$ e $X$ e $Y$ possuem densidade conjunta $f(x, y)$, então $P(X < Y) = P(X > Y) = \frac{1}{2}$, com $P(X = Y) = 0$.
**b)** Generalize o item **(a)**, provando que se a distribuição conjunta de $X_1, \dots, X_n$ é invariante para permutações e $X_1, \dots, X_n$ possuem densidade conjunta $f(x_1, \dots, x_n)$, então:

$$P(X_1 < X_2 < \ldots < X_n) = P(X_{\pi_1} < X_{\pi_2} < \ldots < X_{\pi_n}) = \frac{1}{n!}$$

e $P(X_i = X_j$ para algum par $(i, j)$ tal que $i \neq j) = 0$

# 4 Esperança

## 4.1 Definição

**Definition 4.1.** Se $X$ é uma variável aleatória com distribuição $F$, a esperança de $X$ é definida por $E(X = \int_{-\infty}^{\infty} xdF(x)$, sempre que a integral estiver bem definida.

**Convenção**: Se $E(X) < \infty$, então $X$ é integrável.
**Nota**: $\int_{-\infty}^{\infty} xdF(x)$ é bem definida se $\int_{0}^{\infty} xdF(x)$ ou $\int_{-\infty}^{0} xdF(x)$ for finita, já que $\int_{-\infty}^{\infty} xdF(x) = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} xdF(x)}_{\mathbf{I} \leq 0} + \underbrace{\int_{0}^{\infty} xdF(x)}_{\mathbf{II} \geq 0}$. Assim, podemos separar em quatro casos:

1. Se **I** e **II** são finitos, então $X$ é integrável;
2. Se **I** é finito e $\mathbf{II} = +\infty$, então $E(X) = +\infty$;
3. Se **II** é finito e $\mathbf{I} = -\infty$, então $E(X) = -\infty$;
4. Se $\mathbf{I} = -\infty$ e $\mathbf{II} = +\infty$, então $E(X)$ é indefinida.

**Propriedade**: $E(|X|) = \int |x|dF(x)$. Logo, $X$ é integrável se e somente se $E(|X|) < \infty$.

**Example 4.1.** $X \sim U(0,1)$, $Y = \min\left(X, \frac{1}{2}\right)$:

$$P\left(Y = \frac{1}{2}\right) = P\left(X > \frac{1}{2}\right) = 1 - F_X\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = P_Y\left(Y = \frac{1}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} ydF(y) &= \int_{0}^{1/2} y.1dy + \frac{1}{2}P_Y\left(Y = \frac{1}{2}\right) \\ &= \left.\frac{y^2}{2}\right|_{0}^{1/2} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

**Proposition 4.1.** *$E(X) = \int_{0}^{\infty}(1 - F(x))dx - \int_{-\infty}^{0} F(x)dx$. Disso, temos que:*

- ***a)*** *$\int_{0}^{\infty} xdF(x) = \int_{0}^{\infty}(1 - F(x))dx$;*
- ***b)*** *$\int_{-\infty}^{0} xdF(x) = -\int_{-\infty}^{0} F(x)dx$;*

*Prova.* Vejamos **(a)**: considere que $d(xF(x)) = F(x)dx + xd(F(x)) \Rightarrow xd(F(x)) = d(xF(x)) - F(x)dx$. Seja um $b > 0$:

$$\begin{aligned} \int_{0}^{b} xdF(x) &= \int_{0}^{b} d(xF(x)) - \int_{0}^{b} F(x)dx \\ &= \left. xF(x)\right|_{0}^{b} - \int_{0}^{b} F(x)dx \\ &= bF(b) - \int_{0}^{b} F(x)dx \\ &= \int_{0}^{b} [F(b) - F(x)]dx \end{aligned}$$

Note que $\int_{0}^{b} xdF(x) \leq \int_{0}^{\infty}[1 - F(x)]dx$, $\forall b > 0$. Basta notar que $F(b) - F(x) \leq 1 - F(x)$ e que $\int_{0}^{b}[1 - F(x)]dx \leq \int_{0}^{\infty}[1 - F(x)]dx$. Logo:

$$\int_{0}^{\infty} xdF(x) = \lim_{b \to \infty} \int_{0}^{b} xdF(x) \leq \int_{0}^{\infty} [1 - F(x)]dx \Rightarrow \int_{0}^{\infty} xdF(x) \leq \int_{0}^{\infty} [1 - F(x)]dx$$

Considere $\lambda > 0$ e $b > 0$, tais que:

$$\int_0^b [F(b) - F(x)]dx \geq \int_0^\lambda [1 - F(x)]dx = \int_0^\lambda [F(b) - 1]dx + \int_0^\lambda [1 - F(x)]dx$$
$$= \lambda[F(b) - 1] + \int_0^\lambda [1 - F(x)]dx$$
$$\int_0^b [F(b) - F(x)]dx \geq \lambda[F(b) - 1] + \int_0^\lambda [1 - F(x)]dx$$

Logo, como $\int_0^\infty x dF(x) = \lim_{b\to\infty} \int_0^b [F(b) - F(x)]dx \geq \lim_{b\to\infty}\{\lambda[F(b) - 1] + \int_0^\lambda [1 - F(x)]dx\} = \int_0^\lambda [1 - F(x)]dx$. Assim:

$$\int_0^\infty x dF(x) \geq \lim_{\lambda\to\infty} \int_0^\lambda [1 - F(x)]dx = \int_0^\infty [1 - F(x)]dx$$

E como $\int_0^\infty x dF(x) \leq \int_0^\infty [1 - F(x)]dx$, temos que $\int_0^\infty x dF(x) = \int_0^\infty [1 - F(x)]dx$ □

**Corollary 4.1.** *Se $X$ é tal que $X(\omega) \geq 0\ \forall \omega \in \mathbb{R} \Rightarrow E(X) = \int_0^\infty [1 - F(x)]dx = \int_0^\infty P(X \geq x)dx$.*

**Example 4.2.** Seja $X \sim Exp(\lambda)$, qual a $E(X)$? Como o suporte de $X$ é $(0, \infty)$, aplica-se o corolário anterior, de modo que:

$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x} \Leftrightarrow P(X > x) = e^{-\lambda x}$$
$$E(X) = \int_0^\infty e^{-\lambda x}dx = -\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty = \frac{1}{\lambda}$$

**Nota**: Suponha $X$ discreta e $X(\omega) \geq 0\ \forall \omega$. Então:

$$E(X) = \sum_{n=0}^\infty P(X > n) = \sum_{n=0}^\infty P(X \geq n + 1)$$
$$= \sum_{n=1}^\infty P(X \geq n)$$

**Example 4.3.** Considere o lançamento de uma moeda até a 1ª cara. Suponha $p$ = probabilidade de cara e $(1-p)$ = probabilidade de coroa, e $X$ = número de lançamentos até a primeira cara. Tome o evento $[X \geq n]$, logo:

$$E(X) = \sum_{n=1}^\infty (1 - p)^{n-1} = \sum_{n=0}^\infty (1 - p)^n = \frac{1}{p}$$

**Nota**: Sendo $X$ uma variável aleatória, temos pelo corolário 4.1 que:

$$E(|X|) = \int_0^\infty P(|X| > x)dx$$
$$= \int_0^\infty \big[P(X > x) + P(X < -x)\big]dx$$
$$= \int_0^\infty P(X > x)dx + \int_0^\infty P(X < -x)dx$$
$$= \int_0^\infty (1 - F(x))dx + \int_0^\infty F((-x)^-)dx$$

Onde $F((-x)^-) = \lim_{u\uparrow -x} F(u)$, que caso $F$ seja contínua, coincide com $F(-x)$. Logo:

$$E(|X|) = \int_0^\infty (1 - F(x))dx + \int_0^\infty F(-x)dx$$

Já que $F$ pode ser descontínua em uma coleção enumerável de pontos. Agora, tomando a transformação de variável $y = -x \Leftrightarrow dy = -dx$:

$$\begin{aligned} E(|X|) &= \int_0^\infty (1 - F(x))dx + \int_{-\infty}^0 F(y)dy \\ &= \int_0^\infty (1 - F(x))dx + \int_{-\infty}^0 F(x)dx \end{aligned}$$

Utilizando os resultados **a** e **b** da proposição 4.1, temos que:

$$\begin{aligned} E(|X|) &= \int_0^\infty xdF(x) - \int_{-\infty}^0 xdF(x) \\ &= \int_0^\infty |x|dF(x) + \int_{-\infty}^0 |x|dF(x) \\ &= \int_{-\infty}^\infty |x|dF(x) \end{aligned}$$

Onde $F$ é a acumulada de $X$, ao invés de $|X|$. Assim, a integrabilidade de $X$ depende da finitude de $\int_0^\infty xdF(x)$ e $\int_{-\infty}^0 xdF(x)$, logo $X$ é integrável se $E(|X|) < \infty$.

## 4.2 Propriedades da esperança

- $\mathbf{E_1}$: Se $X = c$, com $c$ uma constante, $E(X) = c$;
- $\mathbf{E_2}$**(monotonia)**: Se $X$ e $Y$ são variáveis aleatórias, com $X \le Y \Rightarrow E(X) \le E(Y)$, caso ambas as esperanças estejam bem definidas;

*Prova.* Seja $z$ um valor fixo. Se $Y \le z \Rightarrow X \le z$, logo $[Y \le z] \subseteq [X \le z]$, assim:

$$\begin{aligned} P(Y \le z) &\le P(X \le z) \\ F_Y(z) \le F_X(z) &\Longleftrightarrow 1 - F_Y(z) \ge 1 - F_X(z) \end{aligned}$$

E pela proposição 4.1, temos que:

$$E(Y) = \int_0^\infty \big[1 - F_Y(z)\big]dz - \int_{-\infty}^0 F_Y(z)dz \ge \int_0^\infty \big[1 - F_X(z)\big]dz - \int_{-\infty}^0 F_X(z)dz = E(X)$$
$$E(Y) \ge E(X)$$

□

- $\mathbf{E_3}$**(linearidade)**:
  - **(i)** Se $E(X)$ é bem definida, $a, b \in \mathbb{R}$, então $E(aX + b) = aE(X) + b$;
  - **(ii)** $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$, caso o termo $aE(X) + bE(Y)$ esteja bem definido;
  - Note que se $E(X) = \infty \Rightarrow E(X - X) \ne E(X) - E(X)$.

*Prova.* Quando $a = 0; E(aX + b) = E(b) = b = 0E(X) + b$.
Quando $a > 0, b > 0; F_{aX+b}(x) = P(aX + b \le x) = P\left(X \le \frac{x-b}{a}\right) = F_X\left(\frac{x-b}{a}\right)$. Logo:

$$
\begin{aligned}
E(aX+b) &= \int_0^\infty \big[1 - F_{aX+b}(x)\big]dx - \int_{-\infty}^0 F_{aX+b}(x)dx \\
&= \int_0^\infty \left[1 - F_X\left(\frac{x-b}{a}\right)\right]dx - \int_{-\infty}^0 F_X\left(\frac{x-b}{a}\right)dx
\end{aligned}
$$

Tome $y = \frac{x-b}{a} \Rightarrow dy = \frac{1}{a}dx$. Então:

$$
\begin{aligned}
E(aX+b) &= \int_{-b/a}^\infty a\big[1 - F_X(y)\big]dy - \int_{-\infty}^{-b/a} aF_X(y)dy \\
&= a\left\{\int_{-b/a}^\infty \big[1 - F_X(y)\big]dy - \int_{-\infty}^{-b/a} F_X(y)dy\right\} \\
&= a\int_0^\infty \big[1 - F_X(y)\big]dy - a\int_{-\infty}^0 F_X(y)dy + a\int_{-b/a}^0 \big[1 - F_X(y)\big]dy + a\int_{-b/a}^0 F_X(y)dy \\
&= aE(X) + a\int_{-b/a}^0 dy \\
&= aE(X) + a\frac{b}{a} \\
&= aE(X) + b
\end{aligned}
$$

□

- **$\mathbf{E_4}$(Desigualdade de Jansen)**: Seja $\varphi$ uma função convexa, definida na reta, com $X$ integrável, então:

$$
E(\varphi(X)) \geq \varphi(E(X)) \tag{27}
$$

**Nota**: Caso $\varphi$ seja côncava:

$$
E(\varphi(X)) \leq \varphi(E(X))
$$

*Prova para convexa.* Tome $x_0$ e $\varphi(x_0)$. Então existe uma reta $L$ tal que $L$ passe por $\varphi(x_0)$ e $\varphi$ fica por cima de $L$. Logo temos a seguinte equação da reta:

$$
L(x) = \varphi(x_0) + \lambda(x - x_0)
$$

Onde $\lambda$ é alguma constante apropriada. Então para todo $x$ temos:

$$
\begin{gathered}
\varphi(x) \geq L(x) = \varphi(x_0) + \lambda(x - x_0) \\
\Downarrow \mathbf{E_2} \\
E(\varphi(x)) \geq E(L(x)) \overset{\mathbf{E_1,E_3}}{=} \varphi(x_0) + \lambda\left[E(x) - x_0\right]
\end{gathered}
$$

Que vale para $x_0 = E(x)$, de modo que $E(\varphi(x)) \geq \varphi(E(x)) + \lambda\left[E(x) - E(x)\right]$, então:

$$
E(\varphi(x)) \geq \varphi(E(x))
$$

A prova para funções côncavas segue a mesma metodologia, com a inversão da desigualdade. □

### 4.2.1 Critério de integrabilidade

Suponha que $X$ é uma variável aleatória dominada por $Y$ (ou seja, $X \leq Y$), sendo $Y$ uma variável aleatória integrável. $X$ é integrável? Temos que:

$$X \leq Y \Rightarrow E(X) \leq E(Y)$$

Se $X$ e $Y$ são tais que $Y \geq 0$ e $Y$ é integrável e $|X| \leq Y \Rightarrow 0 \leq |X| \leq Y$, e como consequência:

$$0 \leq E(X) \leq E(Y) < \infty \Longrightarrow X \text{ é integrável}$$

De maneira similar, seja $X$ uma variável aleatória qualquer. Então:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X| \geq n) \leq E(|X|) \leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P(|X| \geq n)$$

Assim, $X$ é integrável se e somente se $\sum_{n=1}^{\infty} P(|X| \geq n) < \infty$.

*Prova.* Seja $x \geq 0$. Tome $[x]$ como a parte inteira de $x$. Então $[|x|] = k$ se $k \leq |x| < k+1$. Então:

$$\begin{gathered} 0 \leq [|x|] \leq |x| \leq [|x|] + 1 \\ \Downarrow \ \mathbf{E_2}, \mathbf{E_3} \\ 0 \leq E([|x|]) \leq E(|x|) \leq E([|x|]) + 1 \end{gathered}$$

Pelo corolário 4.1, como $[|x|]$ é discreta e não-negativa, temos que:

$$\begin{aligned} E([|x|]) &= \sum_{n=1}^{\infty} P([|x|] \geq n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P(|x| \geq n) \leq E(|x|) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(|x| \geq n) + 1 \end{aligned}$$

□

### 4.2.2 Casos de interesse

**a) (Consistência absoluta)** $\varphi(X) = |X|$:

$$E(|X|) \geq |E(X)|$$

**b) (Consistência quadrática)** $\varphi(X) = X^2$:

$$E(X^2) \geq [E(X)]^2$$

**c) (Consistência absoluta de ordem p)** $\varphi(X) = |X|^p, p \geq 1$:

$$E(|X|^p) \geq |E(X)|^p$$

**Nota**: $\varphi$ só precisa ser convexa (ou côncava) em uma região de probabilidade 1. Por exemplo, se $X$ é uma variável aleatória, tal que $P(X > 0) = 1$, ou o suporte da distribuição de $X$ é $(0, \infty), \varphi(X) = \frac{1}{X}$ é convexa em $(0, \infty) \Rightarrow E\left(\frac{1}{X}\right) \geq \frac{1}{E(X)}$. De modo análogo, se $P(X > 0) = 1$ e $\varphi(X) = \ln(X), \varphi$ é côncava em $(0, \infty)$ logo $E(\ln(X)) \leq \ln(E(X))$.

## 4.3 Esperança de funções de variáveis aleatórias

Seja $X$ uma variável aleatória, $\varphi$ uma função mensurável e $Y = \varphi(X)$. Assim, $Y$ é uma variável aleatória, cuja esperança é $E(Y) = \int y dF_{\varphi(X)}(y) = \int_0^\infty [1 - F_{\varphi(X)}(y)]dy - \int_{-\infty}^0 F_{\varphi(X)}(y)dy$.

**Theorem 4.1.** *Se $X$ é uma variável aleatória e $\varphi$ uma função mensurável, com $Y = \varphi(X)$:*

$$E(Y) = E(\varphi(X)) = \int \varphi(x) dF_X(x)$$

*Prova para caso $\varphi(x) = x^k$.* Note que a prova já foi feita para $\varphi(x) = |x|$. Vejamos que a prova é válida para $\varphi(x) = x^k$, com $k = 1, 2, \ldots$, em 2 casos: $k$ par e $k$ ímpar:
**k par:**

$$\begin{aligned}
E(X^k) &= \int_0^\infty P\left(X^k > t\right) dt \\
&= \int_0^\infty P\left(X > \sqrt[k]{t}\right) dt + \int_0^\infty P\left(X < -\sqrt[k]{t}\right) dt \\
&= \int_0^\infty \left[1 - F_X\left(\sqrt[k]{t}\right)\right] dt + \int_0^\infty F_X\left(-\sqrt[k]{t}^{\,-}\right) dt
\end{aligned}$$

Apliquemos as seguintes mudanças de variáveis: $s = t^{\frac{1}{k}}, ds = \frac{1}{k} t^{\frac{1}{k}-1} dt, dt = \frac{(ds)ks^k}{s}, u = -s, du = -ds$:

$$\begin{aligned}
E(X^k) &= \int_0^\infty \left[1 - F_X(s)\right] ks^{k-1} ds + \int_0^\infty F_X(-s) ks^{k-1} ds \\
&= \int_0^\infty \left[1 - F_X(s)\right] ks^{k-1} ds - \int_{-\infty}^0 F_X(u) ku^{k-1} du \\
&= k\left\{\int_0^\infty [1 - F_X(s)] s^{k-1} ds - \int_{-\infty}^0 F_X(u) u^{k-1} du\right\}
\end{aligned}$$

Agora, mostremos que $E(X^k) = \int x^k dF_X(x)$:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^\infty x^k dF_X(x) &\overset{Def}{=} \int_0^\infty \left[1 - F_X(x)\right] d(x^k) - \int_{-\infty}^0 F_X(x) d(x^k) \\
&= k\left\{\int_0^\infty [1 - F_X(x)] x^{k-1} dx - \int_{-\infty}^0 F_X(x) x^{k-1} dx\right\} \\
&= E(X^k)
\end{aligned}$$

□

**Nota**: A propriedade é também válida para polinômios, visto que a esperança opera de maneira linear.

**Example 4.4.** Seja $X \sim Exp(\lambda)$, vimos que $E(X) = \frac{1}{\lambda}$:
Calcular $E(X^2)$:

$$\begin{aligned}
E(X^2) = 2\int_0^\infty x e^{-\lambda x} dx &= \frac{2}{\lambda} \int_0^\infty x \lambda e^{-\lambda x} dx \\
&= \frac{2}{\lambda} E(X) = \frac{2}{\lambda^2}
\end{aligned}$$

Calcular $E(X^3)$:

$$E(X^3) = 3\int_0^\infty x^2 e^{-\lambda x}dx = \frac{3}{\lambda}\int_0^\infty x^2 \lambda e^{-\lambda x}dx$$
$$= \frac{3}{\lambda}E(X^2) = \frac{3}{\lambda^3}$$

De modo que podemos observar o padrão emergente, e definir $E(X^k) = \frac{k!}{\lambda^k}$.

## 4.4 Momentos de uma variável aleatória

**a)** $E\left([X-b]^k\right)$: $k-$ésimo momento de $X$ em torno de $b$;
**b)** $E\left(X^k\right)$: $k-$ésimo momento em torno de 0;
**c)** Se em **(a)**, $b = E(X)$, o momento é central;
**d)** $t > 0, E\left(|X|^t\right)$: $t-$ésimo momento absoluto de $X$.

**Definition 4.2** (Variância de uma variável aleatória)**.**

$$\text{Var}(X) = E\left\{(X - E(X))^2\right\} \Longleftrightarrow \text{Var}(X) = E\left(X^2\right) - \left(E(X)\right)^2$$

**Proposition 4.2.** *Se $X$ é uma variável aleatória, $f(t) = [E(|X|^t)]^{\frac{1}{t}}$ é não-decrescente em $t, t > 0$.*

*Prova.* Devemos provar que, se $0 < s < t, f(s) \leq f(t)$ (ou $\{E(|X|^s)\}^{\frac{1}{s}} \leq \{E(|X|^t)\}^{\frac{1}{t}}$). Para tanto, consideremos dois casos: **a)** $E(|X|^s) < \infty$, **b)** $E(|X|^s) = \infty$:
**a)** Defina $\varphi(y) = |y|^{\frac{t}{s}}$ (caso $\frac{t}{s} > 1, \varphi$ será convexa). Pela Desigualdade de Jansen:

$$E(\varphi(Y)) \geq \varphi(E(Y))$$
$$E\left(|Y|^{\frac{t}{s}}\right) \geq |E(Y)|^{\frac{t}{s}}$$

Tome $Y = |X|^s$. Substituindo temos:

$$E\left((|X|^s)^{\frac{t}{s}}\right) \geq |E(|X|^s)|^{\frac{t}{s}}$$
$$E\left(|X|^t\right) \geq \{E(|X|^s)\}^{\frac{t}{s}}$$
$$\left\{E(|X|^t)\right\}^{\frac{1}{t}} \geq \{E(|X|^s)\}^{\frac{1}{s}}$$

**b)** Como $t > s > 0$, sabemos que $|X|^s \leq 1 + |X|^t$. Como $E(|X|^s) = \infty$, então:

$$\infty = E(|X|^s) \leq 1 + E(|X|^t) = \infty$$

□

**Corollary 4.2.** *Se $E(|X|^t) < \infty\ \forall t \in (0, \infty) \Rightarrow E(|X|^s) < \infty\ \forall s$, com $0 < s < t$.*

### 4.4.1 Propriedades

- $\mathbf{E_5}$: Se $X = c$, com $c$ uma constante, $\text{Var}(X) = 0$;
- $\mathbf{E_6}$: $\text{Var}(X + b) = \text{Var}(X), \text{Var}(aX + b) = a^2\text{Var}(X)$, com $a, b \in \mathbb{R}$;

*Prova.*

$$\text{Var}(aX+b) = E\left\{[aX + b - E(aX+b)]^2\right\}$$
$$= E\left\{[aX + b - aE(X) - b]^2\right\}$$
$$= E\left\{a^2\left[X - E(X)\right]^2\right\}$$
$$= a^2 E\left\{[X - E(X)]^2\right\} = a^2\text{Var}(X)$$

□

- $\mathbf{E_7}$**(Desigualdade de Tchebychev)**: Seja $X$ uma variável aleatória, com $X \geq 0$. Para todo $\lambda > 0$:

$$P(X \geq \lambda) \leq \frac{E(X)}{\lambda} \tag{28}$$

*Prova.* Seja $Y = I_{[X \geq \lambda]}\lambda = \begin{cases} \lambda & , X \geq \lambda \\ 0 & , c.c. \end{cases}$. Por definição, $0 \leq Y \leq X \Rightarrow E(Y) \leq E(X)$ e $E(Y) = \lambda P(X \geq \lambda)$, de modo que:

$$\lambda P(X \geq \lambda) \leq E(X) \Leftrightarrow P(X \geq \lambda) \leq \frac{E(X)}{\lambda}$$

□

### 4.4.2 Consequências

**a)** Para todo $\lambda > 0$:

$$P(|X - E(X)| \geq \lambda) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{\lambda^2}$$

**b) (Desigualdade de Markov)** Seja $X$ uma variável aleatória, para todo $t$:

$$P(|X| \geq \lambda) \leq \frac{E\left(|X|^t\right)}{\lambda^t} \tag{29}$$

**c)** Se $Z$ é uma variável aleatória, com $Z \geq 0$ e $E(Z) = 0$:

$$P(Z = 0) = 1 \quad \text{(i.e., } Z = 0 \text{ quase certamente)}$$

*Provas.* **a)** Se $Y = [X - E(X)]^2$, aplicamos $\mathbf{E_7}$ usando $\lambda^2 : P(Y \geq \lambda^2) \leq \frac{E(Y)}{\lambda^2}$. Note que $E(Y) = E([X - E(X)]^2) = \mathrm{Var}(X)$. Logo:

$$P\left(|X - E(X)| \geq \lambda\right) = P(|X - E(X)|^2 \geq \lambda^2) = P(Y \geq \lambda^2) \leq \frac{E(Y)}{\lambda^2} = \frac{\mathrm{Var}(X)}{\lambda^2}$$

**b)** Seja $Y = |X|^t$, aplicamos $\mathbf{E_7}$ a $Y$ e $\lambda^t : P(Y \geq \lambda^t) \leq \frac{E(Y)}{\lambda^t}$. Note que $E(Y) = E(|X|^t)$ e que $P(Y \geq \lambda^t) = P(|X|^t \geq \lambda^t) = P(|X| > \lambda)$. Logo:

$$P(|X| \geq \lambda) \leq \frac{E(|X|^t)}{\lambda^t}$$

**c)** $Z = 0$ quase certamente, usamos $\mathbf{E_7}$ na variável $Z$ e em $\lambda = \frac{1}{n}$, então:

$$P\left(Z \geq \frac{1}{n}\right) \leq E(Z).n \overset{Hip}{=} 0$$

Temos que $[Z > 0] = \bigcup_n \left[Z \geq \frac{1}{n}\right]$, de modo que:

$$P(Z > 0) = P\left(\bigcup_n \left[Z \geq \frac{1}{n}\right]\right) = \lim_{n \to \infty} P\left(Z \geq \frac{1}{n}\right) = 0 \Rightarrow P(Z = 0) = 1 - P(Z > 0) = 1$$

□

**Nota**: Se $X$ é uma variável tal que $\mathrm{Var}(X) = 0$, temos que $\mathrm{Var}(X) = 0 \Leftrightarrow E([X - E(X)]^2) = 0$, ou seja, se definirmos $Z = [X - E(X)]^2, Z \geq 0$ e $E(Z) = 0$. Logo, por **c)**, $P(Z = 0) = 1$, ou seja, $P([X - E(X)]^2 = 0) = 1 \Leftrightarrow P(X = E(X)) = 1$, ou seja, $X = E(X)$ quase certamente.

**Example 4.5.** Se $X$ e $Y$ são variáveis aleatórias tais que $E(|X|^t) < \infty$ e $E(|Y|^t) < \infty$, então $E(|X+Y|^t) < \infty$:
**(i)** A finitude de $E(|X|^t)$ leva à finitude de $E(|aX|^t)$;
**(ii)** Se $X$ e $Y$ forem integráveis (com $t = 1$), então $X + Y$ é integrável. Se $X$ e $Y$ tem variâncias finitas ($t = 2$), então $X + Y$ tem variância finita.

**Proposition 4.3.** *Seja $X$ uma variável aleatória integrável e $\mu = E(X) \Rightarrow \mu$ minimiza $E([X - c]^2)$, com $c \in \mathbb{R}$.*

*Prova.* Temos que $(X - c)^2 = (X - \mu + \mu - c)^2 = (X - \mu)^2 + 2(\mu - c)(X - \mu) + (\mu - c)^2$. Logo, pelas propriedades lineares do valor esperado:

$$\begin{aligned} E([X-c]^2) &= E([X-c]^2) + 2(\mu - c)E(X - \mu) + (\mu - c)^2 \\ &= \mathrm{Var}(X) + (\mu - c)^2 \end{aligned}$$

□

**Proposition 4.4.** *Seja $X$ uma variável aleatória e $m$ sua mediana. Assim, $m$ minimiza $E(|X - c|), c \in \mathbb{R}$. Ou seja:*

$$E(|x - m|) = \min_{c \in \mathbb{R}} E(|X - c|)$$

*Prova.* Considere a definição de mediana: $P(X \leq m) = P(X > m) = \frac{1}{2}$. Suponha que $X$ é integrável, logo $X - c$ também o será para todo $c$ constante real. Vamos ver que, com $m < c$ (o caso em que $m > c$ segue analogamente):

- $X \leq m \Rightarrow |X - c| - |X - m| = \lambda$, onde $\lambda = c - m$;
- $X > m \Rightarrow |X - c| - |X - m| \geq \lambda$.

Seja $c$ tal que $m < c$. Defina $\lambda = c - m > 0$. Então:

- Se $x \leq m \Rightarrow |x - c| = |x - m| + \lambda \Rightarrow |x - c| - |x - m| = \lambda$;
- Se $x > m$ e $x > c$ (os casos intermediários são decorrências), então $x > c \Rightarrow \lambda + |x - c| = |x - m| \Rightarrow |x - c| - |x - m| \geq -\lambda$.

Defina $Y = |X - c| - |X - m| = \begin{cases} \lambda & ,\text{se } X \leq m, \\ y & ,\text{se } X > m. \end{cases}$. Assim, temos que $y \geq -\lambda$, e que $Y = \begin{cases} \lambda & , P(X \leq m) \geq \frac{1}{2}, \\ y & , P(X > m) \leq \frac{1}{2} \end{cases}$. Logo, $Y \geq \lambda I_{[X \leq m]} - \lambda I_{[X > m]} \Rightarrow E(Y) \geq \lambda E(I_{[X \leq m]}) - \lambda E(I_{[X > m]}) = \lambda P(X \leq m) - \lambda P(X > m) \geq 0$.
Como $E(Y) \geq 0 \Rightarrow E(|X - c|) \geq E(|x - m|)\ \forall c$, com $m < c$. □

## 4.5 Esperanças e funções de vetores

**Theorem 4.2.** *Seja $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ um vetor aleatório e $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mensurável. Então:*

$$\begin{aligned} E(\varphi(\underline{X})) = \int y dF_{\varphi(\underline{X})}(y) &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\underline{x}) dF_{\underline{X}}(\underline{x}) \\ &= \int \cdots \int \varphi(x_1, \ldots, x_n) dF_{\underline{X}}(x_1, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

*Caso discreto: Seja $\underline{X}$ discreto, tomando valores $\underline{X}_i = (x_{i1}, \ldots, x_{in})$, com probabilidade $P(\underline{X}_i) = \sum_i P(x_i) = 1$. Então:*

$$E(\varphi(\underline{X})) = \sum_i \varphi(\underline{x}_i) P(\underline{x}_i)$$

*Caso contínuo: Seja $\underline{X}$ contínuo, com densidade $f(x_1, \ldots, x_n)$. Então:*

$$E(\varphi(\underline{X})) = \int \cdots \int f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n$$

**Example 4.6.** Lembrando a propriedade $E_3 : E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ desde que existam $E(X)$ e $E(Y)$. Seja $\varphi(x, y) = x + y$ e defina $\varphi_1(x, y) = x$ e $\varphi_2(x, y) = y$. Teremos pelo teorema que:

$$\begin{aligned} E(X+Y) = E(\varphi(x,y)) = \int\int (x+y) dF_{X,Y}(x,y) &= \int\int x dF_{X,Y}(x,y) + \int\int y dF_{X,Y}(x,y) \\ &= E(\varphi_1(x,y)) + E(\varphi_2(x,y)) \\ &= E(X) + E(Y) \end{aligned}$$

Se $\{X_i\}_{i=1}^n$ é conjuntamente independente, com densidades $f_1, \ldots, f_n$, sendo a densidade conjunta dada por $f = \prod_{i=1}^n f_i$, então:

$$\begin{aligned} E(\varphi(\underline{X})) &= \int \cdots \int \varphi(x_1, \ldots, x_n) f_1(x_1) \ldots f_n(x_n) dx_1 \ldots dx_n \\ &= \int \cdots \int \varphi(x_1, \ldots, x_n) dF_{X_1}(x_1) \ldots dF_{X_n}(x_n) \end{aligned}$$

**Proposition 4.5.** *Sejam $\{X_i\}_{i=1}^n$ conjuntamente independentes e integráveis. Então:*

$$E\left(\prod_{i=1}^n X_i\right) = \prod_{i=1}^n E(X_i)$$

*Prova (para $n = 2$).* Seja $\varphi(X, Y) = X.Y$:

$$\begin{aligned} E(X.Y) = E(\varphi(X,Y)) &= \int\int \varphi(x,y) dF_X(x) dF_Y(y) \\ &= \int [y.x dF_X(x)] dF_Y(y) \\ &= \int y E(X) dF_Y(y) \\ &= E(X) \int y dF_Y(y) = E(X)E(Y) \end{aligned}$$

□

**Definition 4.3.** A covariância entre $X$ e $Y$ será definida por:

$$\text{Cov}(X, Y) = E\Big[\big(X - E(X)\big)\big(Y - E(Y)\big)\Big]$$

Sempre que $X$ e $Y$ sejam integráveis. Assim:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X,Y) &= E\{XY - E(Y)X - E(X)Y + E(X)E(Y)\} \\ &= E(XY) - E(X)E(Y) - E(X)E(Y) + E(X)E(Y) \\ &= E(XY) - E(X)E(Y) \end{aligned}$$

Note que $X$ e $Y$ podem ter $Cov(X, Y) = 0$ e mesmo assim $X \not\perp Y$.

**Notas**:

- A existência da covariância entre variáveis integráveis depende da existência de $E(XY)$;
- $Cov(X,Y) = 0$ é interpretado como "$X$ e $Y$ são não-correlacionados";
- Há casos onde $Cov(X,Y) = 0$ implica independência, como na Normal Bivariada, por exemplo.

**Proposition 4.6.** *Sejam $X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias integráveis tais que* $\operatorname{Cov}(X_i, X_j) = 0 \; \forall i \neq j$*. Então*

$$\operatorname{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Var}(X_i)$$

*Prova.*

$$\begin{aligned}
\operatorname{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) &= E\left\{[X_1 + \ldots X_n] - E[X_1 + \ldots + X_n]^2\right\} \\
&= E\left\{\sum_{i=1}^{n}[X_i - E(X_i)]^2 + 2\sum_{i<j}(X_i - E(X_i))(X_j - E(X_j))\right\} \\
&= \sum_{i=1}^{n} E\left[(X_i - E(X_i))^2\right] + 2\sum_{i<j} E[(X_i - E(X_i))(X_j - E(X_j))] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Var}(X_i) + 2\sum_{i<j} \operatorname{Cov}(X_i, X_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Var}(X_i)
\end{aligned}$$

□

**Corollary 4.3.** *Sejam $X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes e integráveis. Então:*

$$\operatorname{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Var}(X_i)$$

**Definition 4.4.** Para $X$ e $Y$ variáveis aleatórias, o coeficiente de correlação de Pearson é definido por:

$$\rho_{X,Y} = \frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

Com $\sigma_X = \sqrt{\text{Var(X)}}$ e $\sigma_Y = \sqrt{\text{Var(Y)}}$, sempre que $\operatorname{Var}(X)$ e $\operatorname{Var}(Y)$ sejam finitas e maiores que 0.

**Proposition 4.7.** *Sob os supostos da definição 4.4:*

- ***a)*** $-1 \leq \rho_{X,Y} \leq 1$*;*
- ***b)*** $\rho_{X,Y} = 1 \Leftrightarrow P(Y = aX + b) = 1$*, para algum* $a > 0$ *e* $b \in \mathbb{R}$*;*
- ***c)*** $\rho_{X,Y} = -1 \Leftrightarrow P(Y = aX + b) = 1$*, para algum* $a < 0$ *e* $b \in \mathbb{R}$*.*

*Prova.* Note primeiramente que $\operatorname{Cov}(X,Y) = E\{(X - E(X))(Y - E(Y))\}$, logo:

$$\rho_{X,Y} = \frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = E\left\{\frac{(X - E(X))}{\sigma_X} \frac{(Y - E(Y))}{\sigma_Y}\right\}$$

Observe que $E\left(\frac{X - E(X)}{\sigma_X}\right) = 0$ e $\operatorname{Var}\left(\frac{X - E(X)}{\sigma_X}\right) = 1$, e analogamente para $Y$. Assim:

**a)**

$$\begin{aligned}
0 &\leq \left(\frac{(X-E(X))}{\sigma_X} - \frac{(Y-E(Y))}{\sigma_Y}\right)^2 \\
0 &\leq E\left\{\left(\frac{(X-E(X))}{\sigma_X} - \frac{(Y-E(Y))}{\sigma_Y}\right)^2\right\} \\
0 &\leq E\left(\left[\frac{X-E(X)}{\sigma_X}\right]^2\right) + E\left(\left[\frac{Y-E(Y)}{\sigma_Y}\right]^2\right) - \frac{2}{\sigma_X\sigma_Y}E((X-E(X))(Y-E(Y))) \\
0 &\leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{\sigma_X^2} + \frac{\mathrm{Var}(Y)}{\sigma_Y^2} - \frac{2\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y} \\
0 &\leq 2 - 2\rho_{X,Y} \\
\rho_{X,Y} &\leq 1
\end{aligned}$$

Tomando a diferença ao invés da soma, chegamos que $\rho_{X,Y} \geq -1$.

**b)**

Suponha $\rho_{X,Y} = 1 \Leftrightarrow E\left\{\left[\frac{X-E(X)}{\sigma_X} - \frac{Y-E(Y)}{\sigma_Y}\right]^2\right\} = 0$. Pela propriedade $E_7$, temos que:

$$P\left(\frac{X-E(X)}{\sigma_X} = \frac{Y-E(Y)}{\sigma_Y}\right) = 1$$

Ou seja, $Y \overset{q.c}{=} E(Y) + \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(X - E(X))$, então $a = \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} > 0, b = E(Y) - \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}E(X)$. □

**Nota**: Se $P(Y = aX + b) = 1$, sendo $a \neq 0$, pelo desenvolvimento da prova de **(a)**, temos que:

$$\begin{aligned}
\rho_{X,Y} &= E\left\{\left(\frac{X-E(X)}{\sigma_X}\right)\left(\frac{aX+b-aE(X)-b}{\sqrt{a^2\sigma_X^2}}\right)\right\} \\
&= \frac{a}{|a|}E\left\{\left[\frac{X-E(X)}{\sigma_X}\right]^2\right\} \\
&= \frac{a}{|a|} = \mathrm{sgn}(a) = \pm 1
\end{aligned}$$

## 4.6 Convergência

**Theorem 4.3** (Teorema da convergência monótona)**.** *Sejam $X_1, X_2, \ldots$ e $X$ variáveis aleatórias em $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Se $0 \leq X_n \underset{n\to\infty}{\uparrow} X$ (ou seja, $X_n(\omega) \geq 0, \forall\omega \in \Omega$ e $X_n(\omega) \underset{n\to\infty}{\uparrow} X(\omega), \forall\omega \in \Omega$). Então $E(X_n) \underset{n\to\infty}{\uparrow} E(X)$.*

*Prova.* Como $X_n \underset{n\to\infty}{\uparrow} X, X_n \geq 0$, por $E_2$ temos que $0 \leq E(X_n) \leq E(X)$. Devemos então provar que $\forall\epsilon > 0, \lim_{n\to\infty} E(X_n) \geq E(X) - \epsilon$ (ou seja, $\forall\epsilon > 0\ \exists\, n_0(\epsilon) : E(X_n) \geq E(X) - \epsilon, \forall n : n \geq n_0(\epsilon)$).
Defina $Y = \sum_{n=0}^{\infty} n\epsilon I_{B_n}$, onde $B_n = [x\epsilon < X \leq (n+1)\epsilon], n = 0, 1, \ldots$. Assim:

$$\begin{aligned}
n = 0 &: B_0 = [0 < X \leq \epsilon] \\
n = 1 &: B_1 = [\epsilon < X \leq 2\epsilon] \\
n = 2 &: B_2 = [2\epsilon < X \leq 3\epsilon] \\
&\vdots
\end{aligned}$$

$$Y = \begin{cases} n\epsilon & \text{, se } n\epsilon < X \leq (n+1)\epsilon \\ 0 & \text{, se } X = 0 \end{cases}$$

Temos então que mostrar que $X-\epsilon \leq Y \leq X$. Como $Y = n\epsilon < X$, o lado direito é dado diretamente. Para o lado esquerdo temos que:

$$X \leq (n+1)\epsilon = n\epsilon + \epsilon \Leftrightarrow X - \epsilon \leq n\epsilon = Y \Rightarrow E(X) - \epsilon \leq E(Y) \leq E(X)$$

Note que, se $E(Y) \leq \lim_{n\to\infty} E(X_n)$, então teremos provado o resultado. Seja $A_k = [X_k \geq Y]$, com $k$ grande o suficiente. Se $\omega$ é tal que $X_k(\omega) \geq Y(\omega) \Rightarrow X_{k+1}(\omega) \geq Y(\omega) \Rightarrow A_k \subseteq A_{k+1} \subseteq A_{k+2} \subseteq \dots$.
Formalmente, pelo limite $X_k \uparrow X$ se $k$ é suficientemente grande, $X_k(\omega) \geq Y(\omega)$. Assim, $\bigcup A_k = [Y \leq X] = \Omega$, e:

$$YI_k = \begin{cases} Y(\omega) & ,\text{se } \omega \in A_k \\ 0 & ,\text{se } \omega \notin A_k \end{cases} = \begin{cases} n\epsilon & ,\text{se } \omega \in B_n \cap A_k, n = 0, 1, \dots \\ 0 & ,\text{se } \omega \notin \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n \cap A_k \end{cases}$$

Logo, $0 \leq YI_k \leq X_k \Rightarrow 0 \leq E(YI_k) \leq E(X_k)$. Assim, $E(YI_k)$ será:

$$E(YI_k) = \sum_{n=0}^{\infty} n\epsilon P(B_n \cap A_k) \geq \sum_{n=0}^{m} n\epsilon P(B_n \cap A_k)$$

Logo, $\lim_{k\to\infty} E(X_k) \geq \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{m} n\epsilon P(B_n \cap A_k) = \sum_{n=0}^{m} n\epsilon P(B_n), \forall m$. Como $m$ é arbitrário, $\lim_{k\to\infty} E(X_k) \geq \sum_{n=0}^{m} n\epsilon P(B_n) = E(Y)$. □

**Theorem 4.4** (Teorema da convergência dominada)**.** *Sejam $Y, X_1, X_2, \dots, X$ variáveis aleatórias em $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, tais que $Y$ é integrável, $|X_n| \leq Y$ $\forall n$ e $X_n \to X$ (ou seja, dado $\omega : X_n(\omega) \xrightarrow[n\to\infty]{} X(\omega)$). Então $X$ e $X_n$ são integráveis e $E(X_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} E(X)$.*

*Prova.* Por hipótese, temos a integrabilidade de $X$ e $X_n$, tais que:

$$|X| = \lim_{n\to\infty} |X_n| \overset{\text{hip}}{\leq} Y$$

Assim, $X$ e $X_n$ são dominadas, então por $E_2$, $X$ e $X_n$ são integráveis. Defina $Y_n = \inf_{k\geq n} X_k$. Tomar o ínfimo provoca a sequência a se movimentar pela esquerda, de modo que:

$$X(\omega) \overset{\text{hip}}{=} \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = \lim_{n\to\infty} \inf X_n(\omega) = \lim_{n\to\infty} \left( \inf_{k\geq n} X_k(n) \right) = \lim_{n\to\infty} Y_n$$

E por definição de $Y_n : Y_n \uparrow X \Rightarrow (Y_n + Y) \underset{n\to\infty}{\uparrow} (X+Y)$. Aplicando o teorema da convergência monótona, temos que $|X_n| \leq Y$ $\forall n \Rightarrow -Y \leq X_n$, logo $\inf_{k\geq n} X_k \geq -Y \Rightarrow Y_n \geq -Y \Rightarrow Y_n + Y \geq 0$. Logo:

$$E(Y_n + Y) \underset{n\to\infty}{\uparrow} E(X+Y)$$

Defina $Z_n(\omega) = \sup_{k\geq n} X_k(\omega)$. Note que $Z_n(\omega) \underset{n\to\infty}{\downarrow} X(\omega)$, logo $(Y - Z_n) \underset{n\to\infty}{\uparrow} (Y - X)$. Note que $|X_n| \leq Y, \forall n \Rightarrow X_n \leq Y$, de modo que:

$$\sup_{k\geq n} X_k \leq Y \Rightarrow Z_n \leq Y \Rightarrow 0 \leq Y - Z_n$$

Agora que temos a positividade e a monotonia do crescimento, utilizamos o teorema da convergência monótona, de modo que:

$$E(Y - Z_n) \underset{n\to\infty}{\uparrow} E(Y - X) \Rightarrow E(Z_n) \underset{n\to\infty}{\downarrow} E(X)$$

Juntando as convergências de $Y_n$ e $Z_n$:

$$Y_n = \inf_{k\geq n} X_k \leq X_n \leq \sup_{k\geq n} X_k = Z_n \Longrightarrow E(Y_n) \leq E(X_n) \leq E(Z_n)$$

De modo que $E(X_n) \to E(X)$. □

### 4.6.1 Observações sobre o teorema da convergência dominada

1. Há casos nos quais $X_n \to X$, no entanto $E(X_n) \not\to E(X)$;

**Example 4.7.** $X \sim$ Cauchy $\to f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$. Sabemos que $E(X) = \infty$. Seja $X_n = I_{[-n \le x \le n]} = \begin{cases} X & , -n \le x \le n \\ 0 & , |x| > n \end{cases}$. Então:

**i)** $X_n \underset{n\to\infty}{\to} X$;

**ii)** Cada $X_n$ é limitado pois $|X_n| \le n$, ou seja, podemos computar $E(X_n)$;

**iii)** $E(X_n) = 0 \; \forall n$ fixo, pois $X_n$ é simétrica em torno de 0, de modo que $E(X_n) \not\to E(X) = \infty$.

2. Levemos em consideração que se $0 < s < t \Rightarrow |X|^s \le 1 + |X|^t$. Então, se $X$ é uma variável aleatória tal que $E(|X|^t) < \infty$ para $t > 0 \Rightarrow g(s) = E(|X|^s)$ é contínua para todo $s \in (0, t]$. Basta ver que se $s_n \to s \Rightarrow g(s_n) \to g(s)$. Note que $|X|^{s_n} \le |X|^t + 1 \Rightarrow E(|X|^{s_n}) \le E(|X|^t) + 1 < \infty$. Assim, pelo teorema da convergência dominada:

$$E(|X|^{s_n}) \to E(|X|^s)$$

3. **(Teorema de Arzelà)** Sejam $f, f_1, f_2, \ldots$, funções reais (borel-mensuráveis) definidas em $[a, b]$, com $a < b$ e integráveis a Riemann. Se $f_n \to f$ e se $|f_n| \le M \; \forall n$, então:

$$\int_a^b f_n(x)dx \to \int_a^b f(x)dx$$

*Prova.* Considere $Omega = [a, b]$ e $\mathcal{A} = \mathcal{B}_{[a,b]}$ (ou seja, a $\sigma-$álgebra dos borelianos em $[a, b]$). Defina $\forall \omega \in \Omega$:

$$X_n(\omega) = (b-a)f_n(\omega)$$
$$X(\omega) = (b-a)f(\omega)$$

Já que $f_n \to f$ por hipótese, então $X_n(\omega) \to X(\omega) \; \forall \omega \in \Omega$. Também $|f_n| \le M \Rightarrow (a-b)M \ge |X_n|$, logo $\{X_n\}$ é uma sequência de variáveis aleatórias integráveis, e sob o teorema da convergência dominada:

$$E(X_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} E(X)$$

□

4. **(Convergência de séries)** Se $a_{mn} \ge 0$ para $m, n = 1, 2, \ldots$ e $a_{mn} \underset{n\to\infty}{\uparrow} a_m \; \forall m$, então:

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_{mn} \uparrow \sum_{m=1}^{\infty} a_m$$

*Prova.* Podemos escrever $a_{mn} = X_n(m)p_m$ onde $X_n(m) = \frac{a_{mn}}{p_m}, p_m = p(m) \; \forall m, m = \{1, 2, \ldots\}$, sendo $p_m$ tal que $\sum_{m=1}^{\infty} p_m = 1$. Analogamente $a_m = X(m)p_m$, e sendo $p_m \ge 0 \; \forall m$, como $a_{mn} \ge 0$ e $p_m \ge 0 \Rightarrow X_n(m) \ge 0$. Já que $a_{mn} \underset{n\to\infty}{\uparrow} a_m \Rightarrow 0 \le X_n(m) \underset{n\to\infty}{\uparrow} X(m), \forall m$. Logo, pelo teorema da convergência monótona, $E(X_n) \underset{n\to\infty}{\uparrow} E(X)$, e assim:

$$E(X_n) = \sum_{m=1}^{\infty} X_n(m)p_m = \sum_{m=1}^{\infty} a_{mn}$$
$$E(X) = \sum_{m=1}^{\infty} X(m)p_m = \sum_{m=1}^{\infty} a_m$$

Ou seja, $\sum_{m=1}^{\infty} a_{mn} \underset{n\to\infty}{\uparrow} \sum_{m=1}^{\infty} a_m$. □

## 4.7 Exercícios

TODO