Lista 6

MI406/ME861 - 1s2025

1. Considere o problema de Regressão Linear com erros auto-regressivos da seguinte forma:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\beta + \epsilon,$$

onde $\epsilon \sim N(0, \sigma^2 V)$, e

$$V = \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \cdots & \rho^{n-1} \\ \rho & 1 & \rho & \cdots & \rho^{n-2} \\ \rho^2 & \rho & 1 & \cdots & \rho^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho^{n-1} & \rho^{n-2} & \rho^{n-3} & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Simule um conjunto de dados com 2 covariáveis + intercepto desse modelo. Escolha os valores dos coeficientes da forma que achar apropriado, porém utilize $\sigma^2 = 1$ e $\rho = 0.75$.
- (b) Encontre a inversa da matriz V. O que você pode observar nesse caso? Teste para outros valores de ρ.
- (c) Com o conjunto de dados simulado e considerando ρ conhecido, encontre os estimadores de Mínimos Quadrados Generalizados.
- (d) Com o mesmo conjunto de dados, encontre os estimadores de Mínimos Quadrados Ordinários e compare com o item anterior.
- (e) Considerando os coeficientes β e σ^2 conhecidos, estime ρ por máxima-verossimilhança. Dica: $\epsilon = \mathbf{Y} - \mathbf{X}\beta$ pode ser obtido nesse caso, e a verossimilhança é a densidade da normal multivariada apropriada do vetor ϵ.

2. Considere o modelo de Regressão Linear Simples $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \epsilon_i$, onde $\epsilon_i \perp \epsilon_j$ para $i \neq j$, mas $Var(\epsilon_i) = \frac{\sigma^2}{x_i^2}$.

- (a) Descreva a matriz de covariâncias do vetor aleatório formado pelos erros ϵ na forma $\sigma^2 V$.
- (b) Calcule V^{-1}.
- (c) Encontre as expressões para os estimadores de Mínimos Quadrados Generalizados de β_0 e β_1.
- (d) Generalize o resultado anterior (expressão dos estimadores) para o caso onde $Var(\epsilon_i) = \sigma^2 g(x_i)$, onde g é uma função estritamente positiva.

3. Considere o problema de Regressão Linear:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\beta + \epsilon,$$

com $\epsilon \sim N(0, \sigma^2 V)$, com uma matriz V conhecida. Encontre o estimador de máxima verossimilhança do vetor de coeficientes β.

4. Considere o modelo de regressão linear $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\beta + \epsilon$, com $\epsilon \sim N(0, I_n)$ e a função objetivo

$$L(\beta; \mathbf{Y}, \mathbf{X}) = (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\beta)^\top (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\beta) + \lambda \beta^T \beta.$$

- (a) Encontre $\hat{\beta}^r_\lambda = \arg\min_\beta L(\beta; \mathbf{Y}, \mathbf{X})$.
- (b) Calcule o viés de $\hat{\beta}^r_\lambda$, isto é, $\mathbb{E}\left(\hat{\beta}^r_\lambda - \beta\right)$.
- (c) Calcule $Var(\hat{\beta}^r_\lambda)$.

- (d) Escolha uma matriz $\mathbf{X}$ com pelo menos 2 colunas. Calcule, numericamente, o viés e a variância de $\hat{\beta}^r_\lambda$ para um determinado valor de λ.
- (e) Refaça o item anterior para diferentes valores de λ, ilustrando a relação entre viés e variância para diferentes valores de λ.