Lista 1

MI406/ME861 - 1s2025

Considere o modelo de Regressão Linear Simples

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \epsilon_i, \text{ para } i = 1, \ldots, n,$$

com $\epsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ e $\epsilon_i \perp \epsilon_j$ para $i \neq j$ e sejam $\hat{\beta}_0$ e $\hat{\beta}_1$ os estimadores de Mínimos Quadrados de β_0 e β_1, bem como $\hat{Y}_i$ o valor predito da reta de regressão no ponto x_i.

---

1. Sejam $\hat{\epsilon}_i = (Y_i - \hat{Y}_i)$. Mostre que:

- (a) $\sum_{i=1}^n \hat{\epsilon}_i = 0$.
- (b) $\sum_{i=1}^n \hat{\epsilon}_i x_i = 0$.

2. Mostre que:

$$\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2 + \sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2$$

3. Encontre $\mathbb{E}(\hat{\beta}_0)$.
4. Encontre $\text{Var}(\hat{\beta}_1)$.
5. Mostre que a reta de regressão obtida pelo método de mínimos quadrados passa pelo ponto $(\bar{x}, \bar{Y})$.
6. Mostre que os estimadores de máxima verossimilhança e mínimos quadrados para β_0 e β_1 são equivalentes.
7. Encontre o estimador de máxima verossimilhança para σ^2.
8. Considere uma nova observação (x_{n+1}, Y_{n+1}), com $x_{n+1} = \bar{x}$. Sejam $\hat{\beta}_0^{n+1}$ e $\hat{\beta}_1^{n+1}$ os estimadores de mínimos quadrados obtidos utilizando todas as $n+1$ amostras. Mostre que

$$\hat{\beta}_1^{n+1} = \hat{\beta}_1.$$

Interprete esse resultado e esboce um gráfico que represente essa propriedade.