Lista 4

MI406/ME861 - 1s2025

1. Uma matriz A, de dimensões $n \times n$, é dita **diagonal** se A pode ser escrita como

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

   Mostre que se A é uma matriz diagonal, então A^{-1} também é diagonal.

2. Seja

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ x_{\cdot 1} & x_{\cdot 2} & \cdots & x_{\cdot p} \\ | & | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1k} & \cdots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2k} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nk} & \cdots & x_{np} \end{bmatrix}$$

.

Mostre que, se as colunas de $\mathbf{X}$ forem **ortogonais** entre si, isto é, $x_{\cdot k} \cdot x_{\cdot l} = 0$ (produto interno entre as colunas é 0) para todo par $k \neq l$, então a matriz $\mathbf{X}^\top \mathbf{X}$ é diagonal.

3. No modelo de regressão linear múltipla $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\beta + \boldsymbol{\epsilon}$, sob $\boldsymbol{\epsilon}$ com distribuição normal multivariada, o que podemos dizer sobre a distribuição dos estimadores de mínimos quadrados $\hat{\beta}$ quando as colunas de $\mathbf{X}$ são ortogonais entre si?

4. Para um modelo de regressão linear com intercepto mais p covariáveis, o R^2-ajustado, denotado R_a^2 é definido como:

$$R_a^2 = 1 - \frac{(1 - R^2)(n-1)}{n-p-1}.$$

   a. Seja r o valor do R^2 para o ajuste de um determinado modelo de regressão linear com p covariáveis. Ao adicionar uma nova variável ao modelo, o novo valor de R^2 foi de $r^+ > r$. Determine, em função de n e p, quanto deve ser o aumento no R^2, $r^+ - r$, para que o R^2-ajustado também aumente.

   b. Interprete o resultado do item anterior.