Lista 7

MI406/ME861 - 1s2025

1. Seja $\hat{\beta}$ o estimador de mínimos quadrados de um modelo de regressão linear $\hat{\beta} = (X^\top X)^{-1} X^\top y$. Mostre que:

$$(y - X\beta)^\top (y - X\beta) = (y - X\hat{\beta})^\top (y - X\hat{\beta}) + (\beta - \hat{\beta})^\top (X^\top X)(\beta - \hat{\beta})$$

Dica: Some e subtraia $X\hat{\beta}$ nos termos da forma quadrática inicial.

2. Considere o modelo de regressão linear:

$$y|\beta, \sigma^2 \sim N(X\beta, \sigma^2 I_n),$$

com $y \in \mathbb{R}^n$, $X \in \mathbb{R}^{n\times p}$, de posto completo, e parâmetros $\beta \in \mathbb{R}^p$, $\sigma^2 > 0$.

- (a) Usando a identidade do item 1, mostre que a verossimilhança pode ser escrita como:

$$p(y \mid \beta, \sigma^2) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (y - X\hat{\beta})^\top (y - X\hat{\beta}) \right\} \cdot \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (\beta - \hat{\beta})^\top X^\top X (\beta - \hat{\beta}) \right\}.$$

- (b) Interprete o primeiro fator como função de σ^2, mas independente de β, e o segundo como (parte de) uma densidade normal em β com variância proporcional a σ^2. Comente a utilidade dessa decomposição para a construção da distribuição a posteriori.

3. Considere o modelo de regressão linear:

$$y|\beta, \sigma^2 \sim N(X\beta, \sigma^2 I_n),$$

com $X \in \mathbb{R}^{n\times p}$ conhecido. Suponha as prioris independentes:

$$\beta \sim \mathcal{N}(\mu_0, \Sigma_0),$$
$$\sigma^2 \sim IG(a, b).$$

- (a) Encontre a distribuição a posteriori $\pi(\beta, \sigma^2|y)$ a menos de uma constante de normalização.
- (b) Encontre a distribuição condicional a posteriori $\pi(\beta|y, \sigma^2)$.
- (c) Encontre a distribuição condicional a posteriori $\pi(\sigma^2|y, \beta)$.

4. Considere o modelo de regressão linear:

$$y|\beta \sim N(X\beta, \sigma^2 I_n),$$

com $\sigma^2 > 0$ **conhecido**.

Suponha que a priori sobre β seja:

$$\beta \sim N(0, \tau^2 (X^\top X)^{-1}),$$

onde $\tau^2 > 0$ é uma constante conhecida.

- (a) Mostre que a distribuição a posteriori de $\beta|y$ é normal com:

$$\beta \mid y \sim \mathcal{N}\left(\frac{\tau^2}{\tau^2 + \sigma^2} \hat{\beta}, \frac{\sigma^2 \tau^2}{\tau^2 + \sigma^2} (X^\top X)^{-1} \right),$$

onde $\hat{\beta} = (X^\top X)^{-1} X^\top y$ é o estimador de mínimos quadrados.

- (b) Interprete a média a posteriori como um "encolhimento" de $\hat{\beta}$ em direção à origem. Qual o papel de τ^2 nesse encolhimento?
- (c) O que acontece com a distribuição a posteriori de β nos casos extremos:
  - $\tau^2 \to \infty$?
  - $\tau^2 \to 0$?
- (d) Interprete os resultados dos itens anteriores em termos do peso relativo da priori em relação à verossimilhança.