Notas de Aula - Capítulo 2

Probabilidade

Caio Gomes Alves

19/03/2025

1 Variáveis Aleatórias

1.1 Variáveis aleatórias e funções de distribuição

Example 1.1. Considere um experimento em que uma moeda é lançada duas vezes. Seja X = total de caras nos dois lançamentos. Denotemos o evento cara como H e coroa como T. Logo:

Espaço Amostral (Ω)	X
HT	1
TH	1
HH	2
TT	0

Logo, $X : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$. Vale também que, $\forall x$ valor na imagem de X, $X^{-1}(x) \in \mathcal{F}$. Por exemplo:

$$\begin{aligned}
x = 1 &\Rightarrow X^{-1}(1) = \{HT, TH\} \\
x = 2 &\Rightarrow X^{-1}(2) = \{HH\} \\
x = 0 &\Rightarrow X^{-1}(0) = \{TT\}
\end{aligned}$$

Definition 1.1 (Variável aleatória)**.** Seja $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço de probabilidades. Uma função $X : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ é variável aleatória se $[x \in I] \in \mathcal{F},\ I \in \mathbb{R}$ (ou, equivalentemente, se $\{\omega : X(\omega) \in I\} \in \mathcal{F};\ X^{-1}(I) \in \mathcal{F}$).

Definition 1.2 (Distribuição Acumulada)**.** Considere um espaço de probabilidades $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ e $X : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ uma variável aleatória, defina $F(r) = P(X \leq r) = P(\{\omega : X(\omega) \leq r\})$.

Example 1.2. Seja X = número de caras em dois lançamentos de moeda (honesta). Temos que as probabilidades de X são dadas por:

$$\begin{aligned}
P(X = 0) &= P(\{TT\}) = \frac{1}{4} \\
P(X = 1) &= P(\{TH, HT\}) = \frac{2}{4} \\
P(X = 2) &= P(\{HH\}) = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Para encontrarmos a função de distribuição acumulada, podemos particinar o espaço e "acumular" as probabilidades. Para $r < 0$:

$$F(r) = P([X \leq r]) = P(\emptyset) = 0$$

Para $r \in [0, 1)$:

$$F(r) = P([X \leq r]) = P(X \leq 0) = \frac{1}{4}$$

Para $r \in [1, 2)$:

$$F(r) = P([X \leq r]) = P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{3}{4}$$

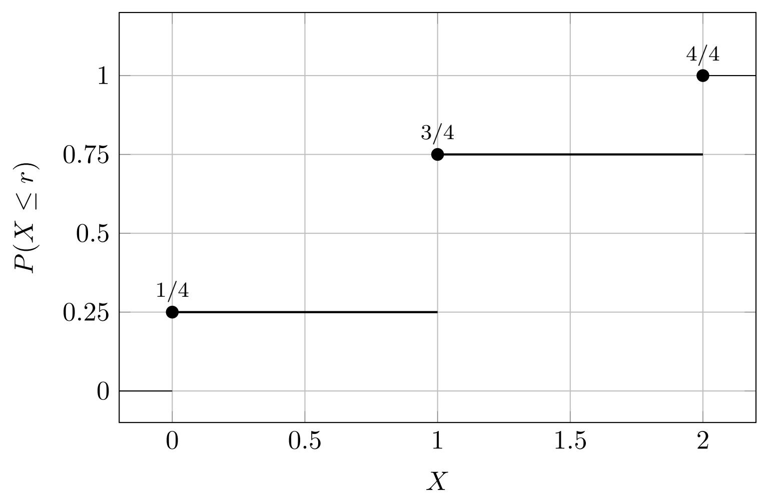
Para $r \geq 2$:

$$F(r) = P([X \leq r]) = P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 1$$

Logo, F é dada por:

$$F(r) = \begin{cases} 0, & r < 0 \\ \frac{1}{4}, & r \in [0, 1) \\ \frac{3}{4}, & r \in [1, 2) \\ 1, & r \geq 2 \end{cases}$$

Distribuição de probabilidades acumulada



Theorem 1.1 (Propriedades da distribuição acumulada)**.** *Seja X uma variável aleatória definida em $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, então a f.d.a. de X (F_X ou F) verifica:*

a) *F é monótona não decrescente;*
b) *F é contínua à direita;*
c) $\lim_{t \to -\infty} F(t) = 0$ *e* $\lim_{t \to \infty} F(t) = 1$.

Proof.

a) Dados $a, b \in \mathbb{R} : a \leq b$; $[X \leq a] \subseteq [X \leq b] \Rightarrow P([X \leq a]) \leq P([X \leq b]) \Rightarrow F(a) \leq F(b)$.

b) Se $X_n \downarrow x$, quando $n \to \infty$, temos que $\{[X \leq x_n]\}_{n \geq 1}$ é tal que $\bigcap_{n\geq 1}[X \leq x_n] = [X \leq x]$. Isso significa que $[X \leq x]$ acontece se e somente se $[X \leq x_n]$ $\forall n$. Além disso, $[X \leq x_n] \downarrow [X \leq x]$ quando $n \to \infty$, logo, pela continuidade da função de probabilidade $P([X \leq x_n]) \downarrow P([X \leq x]), n \to \infty$.

c) Considere agora que $x_n \downarrow -\infty \Rightarrow [X \leq x_n] \downarrow \emptyset,\ n \to \infty \Rightarrow F(x_n) = P([X \leq x_n]) \downarrow P(\emptyset) = 0,\ n \to \infty$. Se $x_n \uparrow \infty \Rightarrow [X \leq x_n] \uparrow \Omega,\ n \to \infty \Rightarrow F(x_n) = P([X \leq x_n]) \uparrow P(\Omega) = 1,\ n \to \infty$.

□

Theorem 1.2. *Se F é a f.d.a. da variável aleatória X, então:*

a) Existem e são finitos os limites laterais $\lim_{t\to r^-} F(t), \lim_{t\to r^+} F(t), \forall r \in \mathbb{R}$ e $\lim_{t\to r^-} F(t) \leq \lim_{t\to r^+} F(t)$;

b) $\lim_{t\to r^+} F(t) = F(r), \forall r \in \mathbb{R}$;

c) F é descontínua em $r, r \in \mathbb{R}$ se e somente se $\lim_{t\to r^-} F(t) < F(r)$, com um salto de tamanho $F(r) - \lim_{t\to r^-} F(t)$;

d) $\forall r \in \mathbb{R}, P(X = r) = F(r) - \lim_{t\to r^-} F(t)$;

e) Existem no máximo um total enumerável de descontinuidades em F.

Proof.

a) F é monótona e limitada $(0 \leq F \leq 1)$. Logo, os limites laterais existem e são limitados.

b) Como F é monótona não-decrescente, $\forall x, y : x \leq y \Rightarrow F(x) \leq F(y)$. Logo $\lim_{t\to r^-} F(t) \leq \lim_{t\to r^+} F(t)$.

c) Como F é monótona não-decrescente, uma descontinuidade só ocorre se e somente se $\lim_{t\to r^-} F(t) < \lim_{t\to r^+} F(t) = F(r)$.

d) Seja $r \in \mathbb{R}$. $[X \leq r] = \bigcap_{n=1}^{\infty}(r - \frac{1}{n} < x \leq r)$, logo:

$$
\begin{aligned}
P([X = r]) &= P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(r - \frac{1}{n} < x \leq r\right)\right) \\
&\Downarrow \text{(Teorema da continuidade)} \\
&= \lim_{n\to\infty} P\left(\left(r - \frac{1}{n} < x \leq r\right)\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(F(r) - F\left(r - \frac{1}{n}\right)\right) \\
&= F(r) - \lim_{n\to\infty} F\left(r - \frac{1}{n}\right) \\
P([X = r]) &= F(r) - \lim_{t\to r^-} F(t)
\end{aligned}
$$

e) Seja $\mathcal{D}$ o conjunto de pontos de descontinuidades de F, e seja $\lim_{t\to x^-} F(t) = F(x^-)$. Logo:

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} : F(x) - F(x^-) > 0\}$$

Seja $\mathcal{D}_n$ o conjunto de pontos para os quais a amplitude do salto é maior ou igual a $\frac{1}{n}$. Logo:

$$\mathcal{D}_n = \left\{x \in \mathbb{R} : F(x) - F(x^-) \geq \frac{1}{n}\right\} \Rightarrow \#D = |D| \leq n$$

Se $x \in \mathcal{D} \Rightarrow \exists n_0 > 1 : F(x) - F(x^-) \geq \frac{1}{n_0} \Rightarrow x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}_n$. Se $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}_n \Rightarrow \exists n_1 : x \in \mathcal{D}_n \Rightarrow x \in \mathcal{D}$. $\mathcal{D}$ portanto é a união enumerável de conjuntos finitos, logo é enumerável.

□

1.2 Natureza das variáveis aleatórias

a) X é uma variável aleatória discreta se os valores que ela toma pertencem a um conjunto enumerável, logo $X : \Omega \to \{x_1, x_2, \dots\}$ (ou seja, $X(\omega) \in \{x_1, x_2, \dots\}, \forall \omega \in \Omega$) e $P : \{x_1, x_2, \dots\} \to [0, 1]$ é dado por $P(x_i) = P\{\omega : \omega \in \Omega \text{ e } X(\omega) = x_i\} \forall i \geq 1$.

b) X é uma variável aleatória absolutamente contínua se $\exists f$ (uma função) tal que $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ e $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ (onde f é chamada de densidade de X).

Sob **(a)** temos que $[X \leq x] = \bigcup_{i:x_i \leq x} [X = x_i]$. Logo $F_x(x) = \sum_{i:x_i \leq x} P(x_i)$.

Sob **(b)** estamos afirmando que F_X é a integral de f (ou seja, f é a sua derivada) para todo x exceto em um conjunto de medida de Lebesgue nula, ou seja, se seu comprimento for zero ($\int_a^a f(t)dt = 0$). Ainda sob **(b)**, se f é uma função de densidade podemos definir $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ e F verifica:

1. $x \leq y \Rightarrow F(x) \leq F(y)$;
2. Se $x_n \downarrow x \Rightarrow F(x_n) \downarrow F(x)$;
3. Se $x_n \downarrow -\infty \Rightarrow F(x_n) \downarrow 0$ e se $x_n \uparrow \infty \Rightarrow F(x_n) \uparrow 1$.

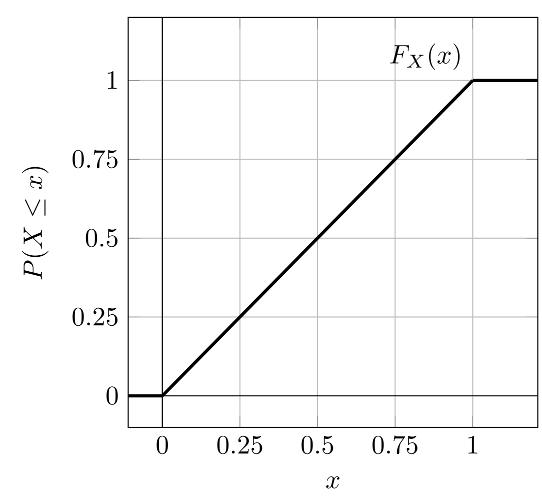
Dada uma variável aleatória com distribuição F_X, X tem densidade se:

(i) F_X é contínua;

(ii) F_X é derivável por partes (ou derivável no interior de um número finito ou enumerável de intervalos fechados cuja união é igual a $\mathbb{R}$), ou derivável para todo x exceto um número finito (enumerável) de pontos.

Example 1.3.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & x \in [0, 1] \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

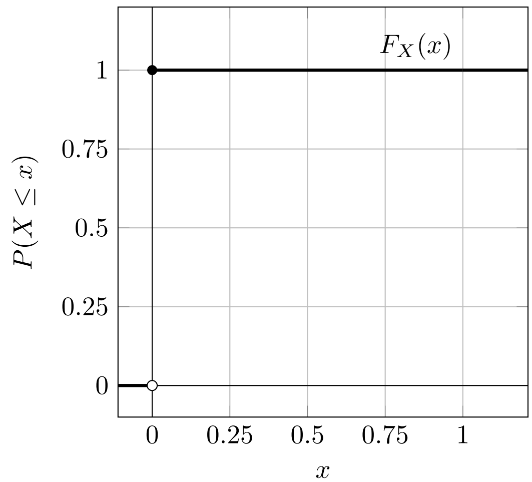


Notas:

- F_X é contínua;
- $\{0,1\}$ são pontos sem derivada;
- Podemos definir os seguintes intervalos em que F_X é derivável: $(-\infty, 0), (0, 1), (1, \infty)$;
- $F_X'(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0,1) = f_X(x) \\ 0, & c.c. \end{cases}$;
- $f(0)$ e $f(1)$ podem ser definidos como zero ou um, já que tais definições não alteram $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$.

Em contrapartida, considere:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

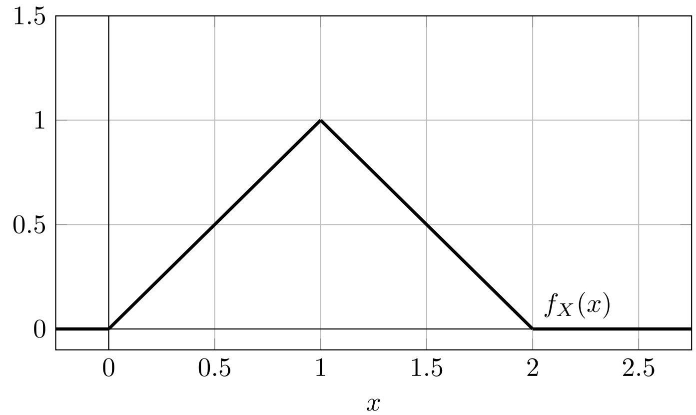


Notas:

- F_X não é contínua;
- $P(X = 0) = \lim_{x\to 0^+} F_X(x) - \lim_{x \to 0^-} F_X(x) = 1$.

Example 1.4. Considere a densidade triangular:

$$f_X(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 2 - x, & \text{se } 1 \leq x < 2 \\ 0 & c.c. \end{cases}$$



Por definição, $f(x) \geq 0 \; \forall x$. Para verificarmos que a probabilidade total é igual a um, podemos realizar a seguinte integração por partes:

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{x} f_X(x)\mathrm{d}x &= \int_0^2 f_X(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 x\mathrm{d}x + \int_1^2 (2-x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{x^2}{2}\bigg|_0^1 + 2x\bigg|_1^2 - \frac{x^2}{2}\bigg|_1^2 \\
&= 1
\end{aligned}
$$

O que demonstra que $f_X(x)$ é densidade de probabilidade.