# Notas de Aula - Capítulo 3

Probabilidade

Caio Gomes Alves

23/04/2025

# 1 Esperança

## 1.1 Definição

**Definition 1.1.** Se $X$ é uma variável aleatória com distribuição $F$, a esperança de $X$ é definida por $E(X = \int_{-\infty}^{\infty} xdF(x)$, sempre que a integral estiver bem definida.

**Convenção**: Se $E(X) < \infty$, então $X$ é integrável.

**Nota**: $\int_{-\infty}^{\infty} xdF(x)$ é bem definida se $\int_{0}^{\infty} xdF(x)$ ou $\int_{-\infty}^{0} xdF(x)$ for finita, já que $\int_{-\infty}^{\infty} xdF(x) = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} xdF(x)}_{\mathbf{I} \leq 0} + \underbrace{\int_{0}^{\infty} xdF(x)}_{\mathbf{II} \geq 0}$. Assim, podemos separar em quatro casos:

1. Se **I** e **II** são finitos, então $X$ é integrável;
2. Se **I** é finito e $\mathbf{II} = +\infty$, então $E(X) = +\infty$;
3. Se **II** é finito e $\mathbf{I} = -\infty$, então $E(X) = -\infty$;
4. Se $\mathbf{I} = -\infty$ e $\mathbf{II} = +\infty$, então $E(X)$ é indefinida.

**Propriedade**: $E(|X|) = \int |x|dF(x)$. Logo, $X$ é integrável se e somente se $E(|X|) < \infty$.

**Example 1.1.** $X \sim U(0,1)$, $Y = \min\left(X, \frac{1}{2}\right)$:

$$P\left(Y = \frac{1}{2}\right) = P\left(X > \frac{1}{2}\right) = 1 - F_X\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = P_Y\left(Y = \frac{1}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} ydF(y) &= \int_{0}^{1/2} y.1dy + \frac{1}{2}P_Y\left(Y = \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{y^2}{2}\bigg|_0^{1/2} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

**Proposition 1.1.** *$E(X) = \int_0^{\infty}(1 - F(x))dx - \int_{-\infty}^{0} F(x)dx$. Disso, temos que:*

- ***a)*** *$\int_0^{\infty} xdF(x) = \int_0^{\infty}(1 - F(x))dx$;*
- ***b)*** *$\int_{-\infty}^{0} xdF(x) = -\int_{-\infty}^{0} F(x)dx$;*

*Prova.* Vejamos **(a)**: considere que $d(xF(x)) = F(x)dx + xd(F(x)) \Rightarrow xd(F(x)) = d(xF(x)) - F(x)dx$. Seja um $b > 0$:

$$X = x$$

$\square$