Notas de Aulas - MI401

Probabilidade

Caio Gomes Alves

03/2025

Conteúdos

1 Prefácio

Este "livro" consiste de notas de aulas da matéria MI401 - Probabilidade, do Programa de Mestrado em Estatística, do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC), da Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP.

Os seus conteúdos são baseados nas notas tomadas durante as aulas e o livro "Probabilidade: um curso em nível intermediário", do autor Barry R. James, 5ª edição.

2 Definições Básicas

2.1 Modelo Probabilístico

Suponha que é realizado um experimento “sob certas condições”, sendo Ω o conjunto de resultados possíveis do experimento (também chamado de resultados elementares). Chamamos Ω de **espaço amostral do experimento**, com a representação axiomática sendo dada por: $\Omega = \{\omega : \omega \in \Omega\}$.

Example 2.1. Considere o lançamento de um dado honesto. Nesse caso, temos que $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, em que cada $\{i\}$ é um evento elementar, sendo eles $\{1\}$,$\{2\}$,$\{3\}$,$\{4\}$,$\{5\}$ e $\{6\}$.

Temos então que eventos são coleções de pontos em Ω, por exemplo um evento $A = \{2, 4, 6\}$ (números pares no lançamento de um dado honesto). Assim, temos as seguintes suposições para eventos:

1. Todo resultado possível no experimento corresponde a um e somente um $\omega \in \Omega$;
2. Resultados diferentes correspondem a elementos diferentes em Ω.

Definition 2.1. Seja um espaço amostral Ω de um experimento. Todo subconjunto $A \subset \Omega$ é um evento. Ω é o evento certo e $\emptyset$ é o evento impossível. Além disso, $\omega \in \Omega \rightarrow \{\omega\}$ é um evento elementar.

Note-se que, dados A e B eventos, tais que $A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$, temos que:

- $A \cup B \rightarrow (\omega \in A$ e $\omega \notin B)$ ou $(\omega \notin A$ e $\omega \in B)$ ou $(\omega \in A$ e $\omega \in B)$;
- $A \cap B \rightarrow (\omega \in A \cup \omega \in B)$;
- $A^c \rightarrow (\omega \notin A)$;
- $A \subset B \rightarrow$ a ocorrência de A implica a ocorrência de B;
- $A \cap B = \emptyset \rightarrow$ os eventos A e B são mutuamente exclusivos.

No campo probabilístico, pensamos em atribuir probabilidades (leia-se chances) a eventos em Ω.

Definition 2.2 (Clássica)**.** A probabilidade de ocorrência de um evento A, denotada por $P(A)$ é dada por:

$$P(A) = \frac{\#(A)}{\#(\Omega)} = \frac{\text{n}^{\text{o}} \text{ de resultados favoráveis a } A}{\text{n}^{\text{o}} \text{ de resultados possíveis em } \Omega}$$

Onde # indica a cardinalidade de um conjunto (quantidade de elementos no conjunto).

Example 2.2. Seja $A = \{2, 4, 6\}$, os lançamentos pares em um dado honesto. Como $\Omega = \{1, \ldots, 6\}$, temos que:

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

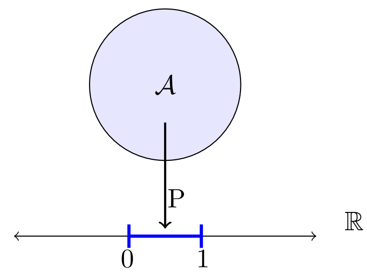
Note que o conjunto A pode ser descrito como a união dos eventos elementares, tais que $A = \{2\} \cup \{4\} \cup \{6\}$. Nesse caso, podemos ver que a probabilidade de A não muda, pois:

$$\begin{aligned} P(\{i\}) &= \frac{\#(\{i\})}{\#(\Omega)} = \frac{1}{6} \\ P(A) &= \frac{\#(\{2\}) + \#(\{4\}) + \#(\{6\})}{\#(\Omega)} = \frac{1+1+1}{6} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Definition 2.3. Um evento A ao qual atribuímos uma probabilidade é um evento aleatório.

2.2 Álgebras de Conjuntos

Considere o conjunto de eventos em uma família $\mathcal{A}$ (subconjuntos de Ω), de tal modo que $P : A \to [0, 1]$. Uma representação gráfica da relação P pode ser dada por:



Definition 2.4. Seja Ω um conjunto não-vazio. Seja $\mathcal{A}$ uma classe de subconjuntos de Ω, ela será chamada de **"Álgebra de subconjuntos de Ω"**, caso respeite os seguintes axiomas:

- Ax_1 : $\Omega \in \mathcal{A}$, e definimos $P(\Omega) = 1$;
- Ax_2 : Se $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$, e definimos $P(A^c) = 1 - P(A)$;
- Ax_3 : Se $A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$.

E por consequência desses axiomas, temos as seguintes extensões:

- Ax_4 : $\emptyset \in \mathcal{A}$;
- Ax_5 : Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n : A_i \in \mathcal{A} \forall i \Rightarrow \bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}$ e $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}$.

É fácil verificar a extensão de Ax_4 a partir de Ax_1 e Ax_2: Ax_1 define que $\Omega \in \mathcal{A}$, e por Ax_2 temos que $\Omega^c \in \mathcal{A}$, e por definição temos que $\Omega^c = \emptyset$, logo $\emptyset \in \mathcal{A}$. Também é interessante notar que, ainda por Ax_2, temos que $P(\emptyset) = 1 - P(\Omega)$, e por Ax_1 temos que $P(\Omega) = 1$, portanto $P(\emptyset) = 1 - 1 = 0$.

A extensão de Ax_5 é dada por indução e pelas Leis de De Morgan: Sejam $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$. Temos pelo axioma Ax_3, que $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}$, podendo assim definir o conjunto $B = A_1 \cup A_2$, sendo possível ver que $B \in \mathcal{A}$. Sejam ainda um conjunto $A_3 \in \mathcal{A}$, podemos ver que $B \cup A_3 \in \mathcal{A}$, e como $B = A_1 \cup A_2$, temos que $(A_1 \cup A_2) \cup A_3 \in \mathcal{A}$. Podemos proceder dessa forma para qualquer quantidade (enumerável) de conjuntos, de modo que $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}$. Pelas Leis de De Morgan, sabemos que:

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i^c \right)^c \tag{1}$$

E pela extenção indutiva em n do axioma Ax_2, temos que se $A_i^c \in \mathcal{A}, \forall i$, então $\bigcup_{i=1}^n A_i^c \in \mathcal{A}$. E como, se um conjunto pertence a $\mathcal{A}$ seu complementar deve pertencer também, e pelo resultado em (1), temos então que:

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i^c \right)^c = \left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i \right) \in \mathcal{A} \tag{2}$$

Assim provamos o axioma A_5 como extensão indutiva dos axiomas anteriores, indicando que tanto a união quanto a interseção dos A_i pertencem à $\mathcal{A}$. Podemos também mostrar que a álgebra $\mathcal{A}$ é fechada também para a operação de diferença entre conjuntos: $A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{A}, A - B = A \cap B^c \in \mathcal{A}$.

Proof. Considerando que os conjuntos A e \$B pertencem à $\mathcal{A}$, podemos utilizar o axioma Ax_2 para mostrar que $A^c \in \mathcal{A}$ e $B^c \in \mathcal{A}$. A partir disso, por meio do axioma Ax_5 temos que os seguintes conjuntos também pertencem à $\mathcal{A}$: $A \cup B, A \cup B^c, A^c \cup B, A^c \cup B^c, A \cap B, A \cap B^c, A^c \cap B, A^c \cap B^c$. E como temos que $A \cap B^c = A - B$, temos a prova de que $A - B \in \mathcal{A}$. Além disso, essa prova mostra que a diferença contrária $(B - A = A^c \cap B)$ também pertence à algebra $\mathcal{A}$. $\square$

Ainda considerando os conjuntos A e B, existem cinco maneiras como esses conjuntos podem "interagir", e podemos mostrar que em todos os casos a diferença $A - B \in \mathcal{A}$:

- $A \not\subset B$ e $A \not\supset B$ e $A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow A - B = A \cap B^c \in \mathcal{A}$;
- $A \not\subset B$ e $A \not\supset B$ e $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A - B = A \in \mathcal{A}$;
- $A \supset B \Rightarrow A - B = A \cap B^c \in \mathcal{A}$;
- $A \subset B \Rightarrow A - B = \emptyset \in \mathcal{A}$;
- $A = B \Rightarrow A - B = \emptyset \in \mathcal{A}$.

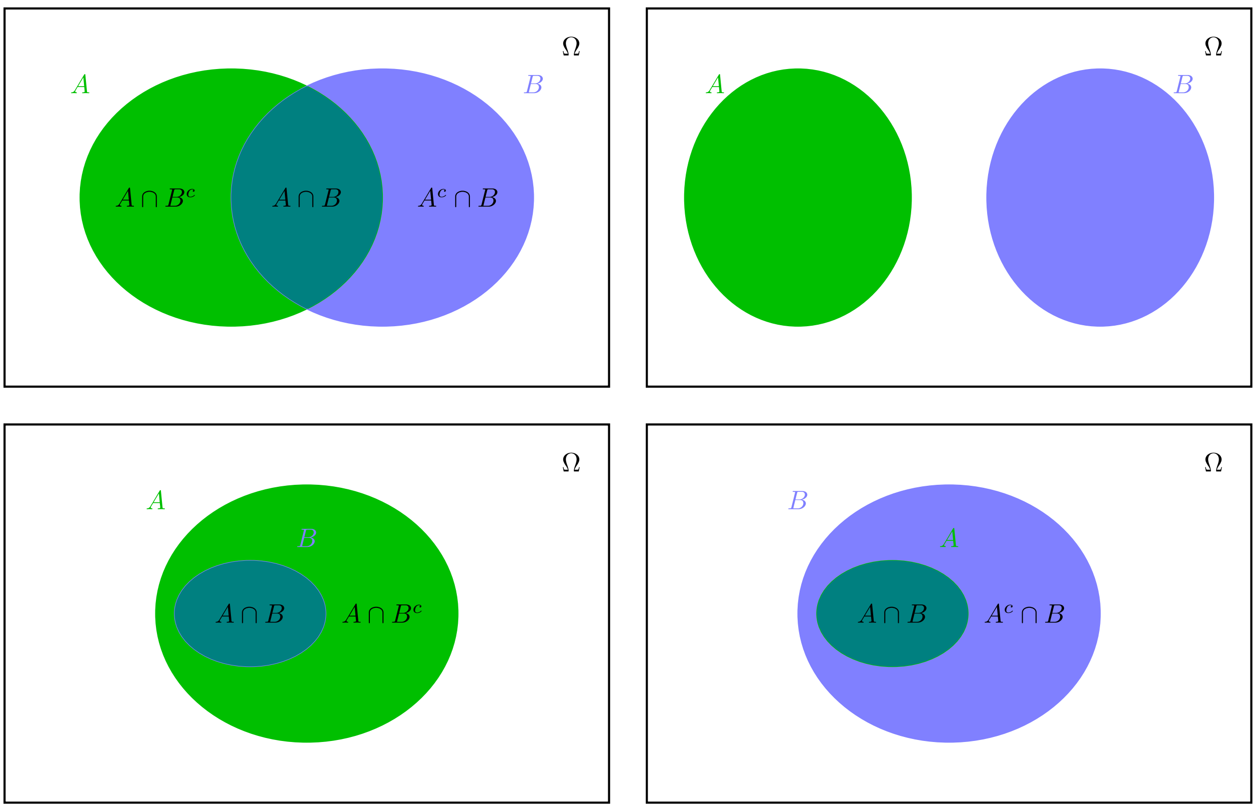


Figure 1: Diferentes relações entre A e B demonstradas por Diagramas de Venn. Note que em todos os casos, $A \cap B^c \in \mathcal{A}$ ou $A \cap B^c = \emptyset \in \mathcal{A}$ ou $A \cap B^c = A \in \mathcal{A}$

As representações por Diagramas de Venn apresentadas na figura 2.2 não é prova formal de que a álgebra $\mathcal{A}$ é fechada para a diferença, mas é um recurso visual que pode auxiliar no entendimento da relação entre os conjuntos.

Definition 2.5. Uma classe $\mathcal{A}$ de conjuntos/subconjuntos de $\Omega \neq \emptyset$, verificando os axiomas Ax_1, Ax_2 e Ax_3 é chamada de σ-álgebra de subconjuntos de Ω.

Note que uma σ-álgebra é sempre uma álgebra. Uma outra forma de construir σ-álgebras é partir de uma álgebra munida dos axiomas de Kolmogorov (Teorema de Carathéodory).

Proposition 2.1. *Seja $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra de subconjuntos de Ω, se $A_1, A_2, \ldots,$ é uma coleção em $\mathcal{A} \Rightarrow$ $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.*

Example 2.3. Seja $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ (o lançamento de um dado cúbico usual). A σ-álgebra usual é definida da seguinte forma e denotada por $\mathcal{P}(\Omega)$ (chamada de partes de Ω ou *powerset* de Ω):

$$\begin{aligned}\mathcal{A} = \{&\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\},\\ &\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{1,6\},\\ &\{2,3\}, \{2,4\}, \dots,\\ &\Omega\}\end{aligned}$$

Example 2.4. Definamos a σ-álgebra de Borel no intervalo $\Omega = [0,1]$. Uma possível definição seria:

$$\mathcal{A} = \text{ todos os subconjuntos de } [0,1] \text{ cujo cumprimento esteja bem definido}$$

Podemos, por exemplo, propor uma álgebra para o intervalo $[0,1]$ dada por:

$$\mathcal{A}_{\prime} = \{A \subset [0,1] : A \text{ é uma união finita de intervalos }\}$$

É possível encontrar um conjunto A tal que $A \notin \mathcal{A}$, por exemplo:

$$A = \left\{\left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) \cup \dots \cup \left(1 - \frac{1}{2^n}, 1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) \cup \dots\right\}$$

Podemos ver que, para qualquer n^* finito, $\lim_{n\to n^*}\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) \neq 1$, de modo que o conjunto A não cobrirá completamente o intervalo $[0,1]$. Dessa forma, a σ-álgebra de Borel no intervalo $[0,1]$ (denotada $\mathcal{B}_{[0,1]}$) é definida como:

$$\mathcal{B}_{[0,1]} = \{A : A \subset [0,1] \text{ e } A \text{ é boreliano}\}$$

Onde boreliano denota que A é união enumerável (finita ou infinita) de intervalos em $[0,1]$

2.3 Axiomas de Kolmogorov

Seja $P : \mathcal{A} \to [0,1]$, com:

- $Ax_1(K) : P(A) \geq 0, \forall A \in \mathcal{A}$;
- $Ax_2(K) : P(\Omega) = 1$;
- $Ax_3(K)$: Se $A_1, A_2, \dots, A_n : A_i \in \mathcal{A} \forall i$ e $A_i \cap A_j = \emptyset \forall i,j \in \{1,2,\dots,n\}, i \neq j \Rightarrow P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n P(A_k)$.

Definition 2.6. Seja Ω um conjunto não-vazio, $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra em Ω, com $P : \mathcal{A} \to [0,1]$, verificando os axiomas de Kolmogorov, então P é dita finitamente aditiva. Podemos assim, modificar o axioma $Ax_3(K)$ para:

- $Ax_3'(K)$: Se $A_1, A_2, \dots$ é uma sequência em $\mathcal{A}$ tal que $\forall i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$, tem-se que $P\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) = \sum_{n=1}^\infty P(A_n)$. (*propriedade da σ-aditividade*)

Definition 2.7. P definida em uma σ-álgebra $\mathcal{A}$, satisfazendo os axiomas de Kolmogorov $(Ax_1(K), Ax_2(K), Ax_3'(K))$ é uma medida de probabilidade em $\mathcal{A}$, constituída pela terna $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

2.4 Propriedades da medida de probabilidade

Proposition 2.2 (Continuidades)**.**

1. *Seja $\{A_i\}_{i=1}^\infty$ uma sequência (crescente) de eventos tais que $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots$, e seja $A = \bigcup_{i=1}^\infty A_i$, então $P(A) = \lim_{i\to\infty} P(A_i)$.*
2. *Seja $\{B_i\}_{i=1}^\infty$ uma sequência (decrescente) de eventos tais que $B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \supseteq \dots$, e seja $B = \bigcap_{i=1}^\infty B_i$, então $P(B) = \lim_{i\to\infty} P(B_i)$.*

Proof.

1. Note que, sendo $A_0 = \emptyset$, tem-se que $A = (A_1 - A_0) \cup (A_2 - A_1) \cup (A_3 - A_2) \cup \ldots$, ou seja, A é união disjunta de eventos $D_i = A_i - A_{i-1}$, de forma que $A_{i-1} \subseteq A_i \Rightarrow P(A_i) = P(A_{i-1}) + P(A_i - A_{i-1}) \Rightarrow P(A_i - A_{i-1}) = P(A_i) - P(A_{i-1})$. Logo, temos que:

$$\begin{aligned}
A = \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i \xRightarrow{Ax_3'(K)} P(A) &= \sum_{i=1}^{\infty} P(D_i) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i - A_{i-1}) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [P(A_i) - P(A_{i-1})] \\
&= \lim_{n\to\infty} [P(A_1) - P(A_0) + P(A_2) - P(A_1) + P(A_3) - P(A_2) + \ldots] \\
&= \lim_{n\to\infty} P(A_n)
\end{aligned}$$

2. Note que, por De Morgan, $B = \bigcap_{i=1}^{n} B_i = \left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i^c\right)^c$. Logo $P(\bigcap_{i=1}^{n} B_i) = 1 - P(\bigcup_{i=1}^{n} B_i^c)$. Seja $A = B_i^c$ de modo que:

$$\begin{aligned}
B_1^c &= \Omega - B_1 = A_1 \\
B_2^c &= (B_1 - B_2) \cup (\Omega - B_1) = A_2 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Assim $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots$, e com isso $P(\bigcap_{i=1}^{n} B_i) = 1 - P(\bigcup_{i=1}^{n} B_i^c) = 1 - P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)$. Por outro lado, tem-se que $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i^c \Rightarrow A^c = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i^c\right)^c = \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i = B$. Logo, temos que:

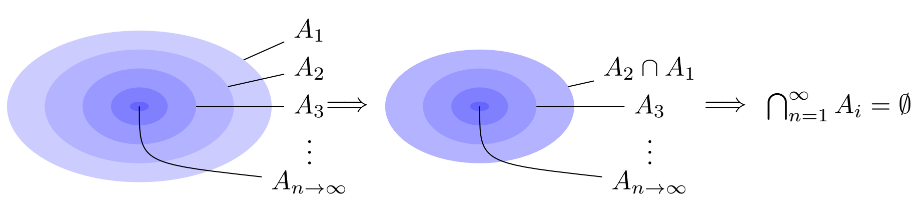
$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} B_i\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} (1 - P(A)) = P(A^c) = P(B)$$

□

Definition 2.8 (Continuidade no vazio)**.**

- $Ax_4(K)$: Se $\{A_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{A}$ e $A_n \supseteq A_{n+1} \forall n$ e $\bigcap_{n+1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$ então $P(A_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

A prova dessa definição é dada pela segunda parte da prova da proposição 2.2. A representação visual é dada pelo seguinte diagrama:



Proposition 2.3. *Dados os axiomas $Ax_1(K), Ax_2(K), Ax_3(K)$, o axioma 4 é equivalente ao axioma $Ax_3'(K)$, ou seja, uma probabilidade finitamente aditiva é uma medida de probabilidade se e somente se é contínua no vazio.*

A prova de que a σ-aditividade implica o axioma 4 é consequência da prova da proposição anterior, dado que $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$. Para demonstrar o contrário (que $Ax_1(K) + Ax_2(K) + Ax_3(K) + Ax_4(K) \to Ax_3'(K)$), tomemos uma sequência infinita de eventos $\{A_i\}_{i\geq 1}$ em $\mathcal{A} : A_i \cap A_j = \emptyset \ \forall i \neq j$. Devemos ver que $P(\bigcup_{n=1}^{\infty}) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$. Seja $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = (\bigcup_{n=1}^{k} A_n) \cup (\bigcup_{n=k+1}^{\infty} A_n)$. Tem-se que:

$$P(A) = P\left(\bigcup_{n=1}^{k} A_n\right) + P\left(\bigcup_{n=k+1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{k} P(A_n) + P\left(\bigcup_{n=k+1}^{\infty} A_n\right)$$

Seja $B_k = \bigcup_{n=k+1}^{\infty} A_n$. Note que $B_k \downarrow \emptyset$ quando $k \to \infty$ de modo que $P(B_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, logo:

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} P(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

Corollary 2.1. *Os seguintes sistemas são equivalentes:*

$$Ax_1(K), Ax_2(K), Ax_3'(K) \equiv Ax_1(K), Ax_2(K), Ax_3(K), Ax_4(K)$$

2.5 Propriedades de probabilidade

Seja P uma probabilidade em uma σ-álgebra $\mathcal{A}$. Suponhamos que todo A abaixo pertença à $\mathcal{A}$. Então as seguintes propriedades são consequências dos axiomas:

- **P1**: $P(A^c) = 1 - P(A)$;
- **P2**: $0 \leq P(A) \leq 1$;
- **P3**: $A_1 \subset A_2 \Rightarrow P(A_1) \leq P(A_2)$;
- **P4**: $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$;
- **P5**: $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$;

Com essas propriedades, podemos então definir um modelo probabilístico. Sejam:

- **a**) Um espaço amostral: $\Omega \neq \emptyset$;
- **b**) Uma σ-álgebra em Ω: $\mathcal{A}$;
- **c**) Uma medida de probabilidade em $\mathcal{A}$: P.

Definition 2.9. Um espaço de probabilidade é uma terna $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ seguindo **a**,**b** e **c**.

2.6 Probabilidade Condicional e Independência

Considere o seguinte experimento: um dado é lançado duas vezes e anota-se a dupla de resultados. Temos que:

$$\Omega = \{(i,j) : 1 \leq i \leq 6; 1 \leq j \leq 6; i, j, \in \mathbb{Z}\}$$

Sejam os seguintes eventos:

- $A =$ "*em cada lançamento o valor observado é* ≤ 2";
- $B =$ "*a soma dos resultados é igual a 4*".

$$A = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$$
$$B = \{(1,3), (3,1), (2,2)\}$$

Já que $\#\Omega = |\Omega| = 36$, e pela equiprobabilidade dos eventos (considerando que os dados são honestos), temos que:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{4}{36}$$
$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{3}{36}$$

Além disso, $(A \cap B) = \{(2,2)\}; P(A \cap B) = 1/36$. Suponha que A ocorre com $P(A) > 0$, e que B é o evento de interesse. Assumindo a potencial ocorrência de A, qual é a probabilidade de B ocorrer. Nesse caso $P(B|A) = 1/4$.

Definition 2.10 (Probabilidade condicional)**.** Sejam A e B eventos em $\mathcal{A}$, com $P(A) > 0$. A probabilidade condicional $P(B|A)$ é definida como:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \tag{3}$$

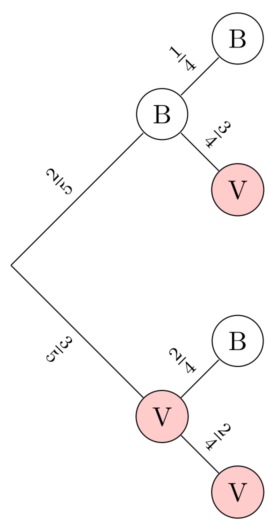
ou equivalentemente:

$$P(A \cap B) = P(B|A)P(A) \tag{4}$$

Example 2.5. Considere uma urna com 5 bolas, sendo 3 vermelhas e 2 brancas. O experimento consiste de 2 retiradas sucessivas de uma bola da urna (sem reposição). Considere os eventos $A_1 =$ *Cor da primeira bola* e $A_2 =$ *Cor da segunda bola*:

$$P(A_1 = B) = \frac{2}{5}\ ,\ P(A_1 = V) = \frac{3}{5}$$
$$P(A_2 = B|A_1 = B) = \frac{1}{4}\ ,\ P(A_2 = V|A_1 = B) = \frac{3}{4}$$
$$P(A_2 = B|A_1 = V) = \frac{2}{4}\ ,\ P(A_2 = V|A_1 = V) = \frac{2}{4}$$

Podemos visualizar esse experimento com os seguintes diagrama e tabela de probabilidades:



Resultados

A_1	A_2	$P(A_1)P(A_2|A_1)$
B	B	$2/5 \times 1/4 = 2/20$
B	V	$2/5 \times 3/4 = 6/20$
V	B	$3/5 \times 2/4 = 6/20$
V	V	$3/5 \times 2/4 = 6/20$

Definition 2.11 (Eventos independentes)**.**

- **a**) Os eventos A e B são independentes (denotados como $A \perp B$) se $P(A \cap B) = P(A)P(B)$;
- **b**) $\{A_i, i \in \mathbb{I}\}$ são independentes se $P\left(\bigcap_{i \in \mathcal{J}} A_i\right) = \prod_{i \in \mathcal{J}} P(A_i)$, $\forall$ subfamílias $\mathcal{J}$ de índices em $\mathbb{I}$.

Disso segue que, sendo A e B dois eventos, as seguintes propriedades são válidas:

1. Se $P(A) = 0 \Rightarrow P(A \cap B) = 0 \; \forall B$, ou seja, $A \perp B$;
2. Se $P(B) = 1 \Rightarrow P(A \cap B) = 0 \; \forall A$, ou seja, $A \perp B$;
3. A é independente dele mesmo se e somente se $P(A) = 0$ ou $P(A) = 1$;
4. $A \perp B \Rightarrow A \perp B^c, A^c \perp B, A^c \perp B^c$;
5. As seguintes proposições são equivalentes:
   - a) $(A \perp B) \Rightarrow P(B|A) = P(B)$ e $P(B|A^c) = P(B)$;
   - b) $P(B|A) = P(B) \Rightarrow A \perp B$;
   - c) $P(B|A^c) = P(B) \Rightarrow A \perp B$.

Theorem 2.1 (Teorema das Probabilidades Totais)**.**

1. *Dados A e B eventos em $\mathcal{F}$:*

$$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c)$$

2. *No geral, se $B_1, B_2, \ldots, B_n$ é uma partição de Ω, então:*

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i) \tag{5}$$

Demonstração: Note que $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$ e $(B \cap B^c) = \emptyset$ e $(B \cup B^c) = \Omega$. Além disso, $(A \cap B) \cap (A \cap B^c) = \emptyset$, logo $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$. Como, por definição, $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$ e $P(A|B^c) = P(A \cap B^c)/P(B^c)$, temos que:

$$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c)$$

Para o caso geral, temos que $\{B_i\}_{i=1}^n$, $(B_i \cap B_j) = \emptyset \; \forall i, j$ e $\bigcup_{i=1}^n B_i = \Omega$. Logo:

$$\begin{aligned} A &= (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \ldots \cup (A \cap B_n) \\ &\Downarrow \text{ Pela } \sigma\text{-aditividade} \\ P(A) &= \sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i) \end{aligned}$$

E como $P(A|B_i) = P(A \cap B_i) \; P(B_i)$:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)$$

2.7 Fórmula de Poincaré e Teorema de Bayes

Theorem 2.2 (Fórmula de Poincaré)**.** *Seja $\{A_i\}_{i \geq 1} \subseteq \mathcal{F}$. Então:*

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_n\right) = &\sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}) - \ldots \\ &+ (-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) \end{aligned} \tag{6}$$

A demonstração da fórmula (6) é dada no exercício 2.10.

Theorem 2.3 (Teorema de Bayes)**.** *Seja $\{B_i\}_{i=1}^n$ uma partição de Ω e A um evento em $\mathcal{F}$, temos que:*

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A|B_j)P(B_j)} \tag{7}$$

O denominador de (7) é derivado do teorema das probabilidades totais, visto que $\{B_i\}_{i=1}^n$ é uma partição de Ω.

Lemma 2.1. *Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eventos em $\mathcal{F}$, logo:*

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \ldots P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1})$$

Proof. Suponha a validade do lema anterior. Logo, seja $D = (\bigcap_{i=1}^{n} A_i)$:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap \ldots \cap A_n \cap A_{n+1}) &= P(D \cap A_{n+1}) \\ &= P(D)P(A_{n+1}|D) \\ &= P(A_1)P(A_2|A_1) \ldots P(A_n|A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1})P(A_{n+1}|A_1 \cap \ldots \cap A_n) \end{aligned}$$

$\square$

2.8 Exercícios

Exercise 2.1 (BJ1)**.** Sejam A, B e C eventos aleatórios. Identifique as seguintes equações e frases, casando cada equação expressa na notação de conjuntos com a correspondente frase na linguagem de eventos:

$A \cap B \cap C = A \cup B \cup C$	A e "B ou C" são incpmpatíveis.
$A \cap B \cap C = A$	Os eventos A,B e C são idênticos.
$A \cup B \cup C = A$	A ocorrência de A implica a de "B e C".
$(A \cup B \cup C) - (B \cup C) = A$	A ocorrência de A decorre de "B ou C".

Exercise 2.2 (BJ2)**.** A partir dos axiomas, prove a propriedade $P5$:

$$P\left(\bigcup_{n=i}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

Proof. Consideremos uma prova por indução para $n \to \infty$:
Para $n = 2$:

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_1^c \cap A_2)$$

Considerando que $(A_1^c \cap A_2) \subset A_2$ e o fato de que $(A_1) \cap (A_1^c \cap A_2) = \emptyset$, temos pela propriedade $P3$ que $P(A_1^c \cap A_2) \leq P(A_2)$, de modo que:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2) &= P(A_1) + P(A_1^c \cap A_2) \leq P(A_2) \\ &\leq P(A_1) + P(A_2) \\ &\leq \sum_{i=1}^{2} P(A_i) \end{aligned}$$

De modo semelhante, podemos fazer para n:

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=i}^{n} A_i\right) &= P(A_1) + P(A_1^c \cap A_2) + \dots \\ &\leq P(A_1) + P(A_2) + \dots \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \end{aligned}$$

Consideremos então uma sequência de eventos $A_i^*, \forall i \in \{n+1, n+2, \dots\}$, disjuntos de A_i. Denotemos ainda $A = (\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \cup \left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i\right)$. Pela aditividade infinita (ou ainda pela σ-aditividade), temos que:

$$P\left(\bigcup_{n=i}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i) + P\left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i\right)$$

Que por serem disjuntos, pelo axioma Ax_4 tem que $\left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i\right) \downarrow \emptyset$, de modo que $P\left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i\right) \to 0$. Logo, tem-se que:

$$P\left(\bigcup_{n=i}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

$\square$

Exercise 2.3 (BJ3)**.** Sejam $A_1, A_2, \dots$ eventos aleatórios. Mostre que:

a) $P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) \geq 1 - \sum_{k=1}^{n} P(A_k^c)$

Proof. Por De Morgan temos que $\bigcap_{k=1}^{n} A_k = \left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k^c\right)^c$, de modo que:

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) &= P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k^c\right)^c \\ &= 1 - P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k^c\right) \xRightarrow{\text{Por P4}} P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k^c\right) \leq \sum_{k=1}^{n} P\left(A_k^c\right) \\ &\geq 1 - \sum_{k=1}^{n} P\left(A_k^c\right) \end{aligned}$$

□

b) Se $P(A_k) \geq 1 - \epsilon$ para $k = 1, 2, \ldots, n$, então $P(\bigcap_{k=1}^{n} A_k) \geq 1 - n\epsilon$

Proof. É fácil ver que:

$$P(A_k) \geq 1 - \epsilon \Rightarrow P(A_k^c) \leq 1 - (1 - \epsilon) = \epsilon$$

E de modo semelhante ao que foi feito na questão anterior (utilizando De Morgan), temos que:

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k^c\right)^c &= 1 - P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k^c\right) \\ &\geq 1 - \sum_{k=1}^{n} P\left(A_k^c\right) \\ &\geq 1 - \sum_{k=1}^{n} \epsilon \\ &\geq 1 - n\epsilon \end{aligned}$$

□

c) $P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) \geq 1 - \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k^c)$

Proof. De maneira semelhante ao que foi visto na prova da letra **a**, temos que:

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) &= P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k^c\right)^c \\ &= 1 - P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k^c\right) \xRightarrow{\text{Por P5}} P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k^c\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} P\left(A_k^c\right) \\ &\geq 1 - \sum_{k=1}^{\infty} P\left(A_k^c\right) \end{aligned}$$

Para ver a demonstração da propriedade $P5$, vide exercício 2.2. □

Exercise 2.4 (BJ4)**.** Demonstre as seguintes propriedades:

a) Se $P(A_n) = 0$ para $n = 1, 2, \ldots$, então $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0$.

Proof. Utilizando a propriedade $P5$, temos que:

$$\begin{aligned}
P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} 0 \\
&\leq 0 \\
&\Big\downarrow \text{ Por } P2 \\
P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) &= 0
\end{aligned}$$

□

b) Se $P(A_n) = 1$ para $n = 1, 2, \ldots$, então $P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1$.

Proof. Levando em consideração que se $P(A_n) = 1 \Rightarrow P(A_n^c) = 0$ (pela propriedade $P1$), utilizando De Morgan e a prova da letra **c** do exercício 2.3, temos que:

$$\begin{aligned}
P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) &\geq 1 - \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n^c) \\
&\geq 1 - \sum_{n=1}^{\infty} 0 \\
&\geq 1 - 0 \\
&\geq 1 \\
&\Big\downarrow \text{ Por } P2 \\
P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) &= 1
\end{aligned}$$

□

Exercise 2.5 (BJ6)**.** Seja Ω um conjunto não-vazio.

a) Prove: se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são σ-álgebras de subconjuntos de Ω, então $(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$ também é uma σ-álgebra.

Proof. Para que $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ seja uma σ-álgebra, é necessário que cumpram-se os axiomas Ax_1, Ax_2 e Ax_3:

- Ax_1: Sabemos que $\Omega \in \mathcal{A}$ e $\Omega \in \mathcal{B}$, logo sabemos que $\Omega \in (\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$;
- Ax_2: Seja um evento $E \in (\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$, sabemos então que $E \in \mathcal{A}$ e $E \in \mathcal{B}$, logo $E^c \in \mathcal{A}$ e $E^c \in \mathcal{B}$, portanto $E^c \in (\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$;
- Ax_3: Sejam dois eventos, $E_1 \in (\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$ e $E_2 \in (\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$. Com isso, temos que $E_1, E_2 \in \mathcal{A}$ e $E_1, E_2 \in \mathcal{B}$, portanto $(E_1 \cup E_2) \in \mathcal{A}$ e $E_1 \cup E_2 \in \mathcal{B}$, logo $(E_1 \cup E_2) \in (\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$.

Como os três axiomas foram cumpridos, temos que $(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$ é uma σ-álgebra. □

b) Generalize o item (a): se $\mathcal{A}_i, i \in \mathcal{I}$, são σ-álgebras de partes de Ω, onde $\mathcal{I}$ é um conjunto não-vazio de índices, então $\bigcap_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{A}_i$ também é uma σ-álgebra.

Proof. Como anteriormente, temos que mostrar que $\bigcap_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{A}_i$ cumpre os axiomas Ax_1, Ax_2 e Ax_3:

- Ax_1: Sabemos que $\Omega \in \mathcal{A}_i, \ \forall i \in \mathcal{I}$, logo sabemos que $\Omega \in \bigcap_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{A}_i$;
- Ax_2: Seja um evento $E \in \bigcap_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{A}_i$, sabemos então que $E \in \mathcal{A}_i, \ \forall i \in \mathcal{I}$, logo $E^c \in \mathcal{A}_i, \ \forall i \in \mathcal{A}$, portanto $E^c \in \bigcap_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{A}_i$;
- Ax_3: Sejam dois eventos, $E_1 \in \bigcap_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{A}_i$ e $E_2 \in \bigcap_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{A}_i$. Com isso, temos que $E_1, E_2 \in \mathcal{A}_i, \ \forall i \in \mathcal{I}$, portanto $(E_1 \cup E_2) \in \mathcal{A}_i, \ \forall i \in \mathcal{I}$, logo $(E_1 \cup E_2) \in \bigcap_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{A}_i$.

Vemos portanto que, por cumprir os axiomas Ax_1, Ax_2 e Ax_3, $\bigcap_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{A}_i$ é também uma σ-álgebra. □

c) Seja $\mathbb{C}$ uma classe de subconjuntos de Ω. Mostre que existe *pelo menos uma* σ-álgebra que contém $\mathbb{C}$.

Proof. É fácil ver que a maior classe de subconjuntos de Ω é o conjunto das partes de Ω, denotado como $\mathcal{P}(\Omega)$ (definido no exemplo 2.3). Assim, temos que $\mathbb{C} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$, de modo que, pelo menos a σ-álgebra formada por $\mathcal{P}(\Omega)$ contém $\mathbb{C}$. □

d) Visando a plena utilização dos itens (b) e (c), como você definiria "a menor σ-álgebra contendo $\mathbb{C}$", onde $\mathcal{C}$ é uma classe de subconjuntos de Ω?

Proof. Considere que temos σ-álgebras de partes de Ω, $\mathcal{A}_i$ com $i \in \mathbb{I}$ (sendo $\mathbb{I}$ um conjunto não-vazio de índices), tais que $\mathbb{C} \in \mathcal{A}_i : \ \forall i \in \mathbb{I}$. Assim, sabemos que algum dos $\mathcal{A}_i$ é a menor σ-álgebra que contém $\mathbb{C}$, de modo que $\bigcap_{i\in\mathbb{I}} A_i$ será a menor σ-álgebra que contém $\mathbb{C}$. □

Exercise 2.6 (BJ9)**.** Uma caixa contém $2n$ sorvetes, n do sabor A e n do sabor B. De um grupo de $2n$ pessoas, $a < n$ preferem o sabor A, $b < n$ o sabor B e $2n - (a + b)$ não tem preferência. Demonstre: se os sorvetes são distribuídos ao acaso, a probabilidade de que a preferência de todas as pessoas seja respeitada é de $\binom{2n-a-b}{n-a}/\binom{2n}{n}$.

Proof. Sabendo que a ordem de entrega dos n sorvetes de cada sabor, para as $2n$ pessoas não importa, temos que a quantidade possível de entregas diferentes é:

$$|\Omega| = \binom{2n}{n}$$

Considere que o evento R indica o caso em que todos tiveram sua preferência respeitada. Podemos ver que:

$$P(R) = \frac{|R|}{|\Omega|} = \frac{|R|}{\binom{2n}{n}}$$

Para que R ocorra, é necessário que as a pessoas que preferem A recebam esse sabor, bem como as b pessoas que preferem B. Dessa forma, temos que distribuir os $2n - (a + b)$ sorvetes restantes para as pessoas que não tem preferência. Assim, primeiramente temos os $n - a$ sorvetes do sabor A que não foram alocados, de forma que:

$$\binom{2n-a-b}{n-a} = \frac{(2n-a-b)!}{(2n-a-b-n+a)!(n-a)!} = \frac{(2n-a-b)!}{(n-b)!(n-a)!} \tag{8}$$

E podemos mostrar que, caso fossemos alocar os $n - b$ sorvetes do sabor B para as $2n - (a + b)$ pessoas sem preferência, teríamos:

$$\binom{2n-a-b}{n-b} = \frac{(2n-a-b)!}{(2n-a-b-n+b)!(n-b)!} = \frac{(2n-a-b)!}{(n-a)!(n-b)!} \tag{9}$$

Como (8) e (8) são iguais, podemos ver que a alocação dos sorvetes restantes não depende de qual sabor já foi alocado. Assim, temos que $|R| = \binom{2n-a-b}{n-a} = \binom{2n-a-b}{n-b}$, portanto:

$$P(R) = \frac{|R|}{|\Omega|} = \frac{\binom{2n-a-b}{n-a}}{\binom{2n}{n}}$$

□

Exercise 2.7 (BJ10)**.** Suponhamos que dez cartas estejam numeradas de 1 até 10. Das dez cartas, retira-se uma de cada vez, ao acaso e sem reposição, até retirar-se o primeiro número par. Conta-se o número de retiradas necessárias. Exiba um bom modelo probabilístico para esse experimento.

Proof. Dada essa formulação, temos que 5 cartas são pares e 5 são ímpares. Assim, considere o evento $\{Y_k \ : 1 \leq k \leq 6; k \in \mathbb{Z}\}$ em que k indica que a k-ésima retirada contém a primeira carta par. Assim, por exemplo, Y_1 indica o evento em que a primeira carta retirada é par, Y_2 o evento em que a segunda carta retirada é par, e assim por diante.
O nosso espaço amostral é (visto que o número da carta não importa, apenas se é $P =$ "par" ou $I =$ "ímpar"):

$$\Omega = \{(P), (I, P), (I, I, P), (I, I, I, P), (I, I, I, I, P), (I, I, I, I, I, P)\}$$

É fácil ver que não é possível ter $\{Y_k : k \geq 7\}$, já que as cartas são retiradas sem reposição. Podemos facilmente calcular as probabilidades de cada evento em Ω, como segue:

$$\begin{aligned}
P(Y_1) &= \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \\
P(Y_2) &= \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{5}{18} \\
P(Y_3) &= \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{8} = \frac{5}{36} \\
P(Y_4) &= \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{5}{84} \\
P(Y_5) &= \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{252} \\
P(Y_6) &= \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{5} = \frac{1}{252}
\end{aligned}$$

Podemos ver que $\sum_{k=1}^{6} P(Y_k) = 1$, e além disso, podemos denotar as probabilidades a partir da seguinte função:

$$P(Y_k) = \frac{5}{11-k} \cdot \prod_{n=1}^{k-1} \frac{6-n}{11-n} \tag{10}$$

A segunda parcela da equação (10) é válida para $k \geq 2$, pois ela representa as $k-1$ cartas ímpares retiradas antes da primeira carta par, caso que só ocorre caso $k \geq 2$. □

Exercise 2.8 (BJ11)**.** Para cada um dos seguintes experimentos, descreva um espaço de probabilidade que sirva de modelo:

a) Seleciona-se um ponto, ao acaso, do quadrado unitário

$$\{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$$

Proof. Temos que:

$$\Omega = \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2\}$$

Pela continuidade no vazio, é necessário que a probabilidade de ocorrência de um determinado ponto ser igual a zero, de modo que uma medida de probabilidade possível é por meio de intervalos. Considerando que $x \sim U(0, 1)$ e $y \sim U(0, 1)$ (ou seja, x e y são uniformemente distribuídos), podemos encontrar a probabilidade de $(x, y) \in \mathbb{I}$, com $\mathbb{I}$ sendo um intervalo no cartesiano $[0, 1] \times [0, 1] \in \mathbb{R}^2$, por meio da distribuição de probabilidade conjunta de x e y. □

b) Retiram-se cartas sucessivamente de um baralho de 52 cartas, ao acaso e *com* reposição, até retirar-se o primeiro rei. Registra-se o número total de retiradas.

Proof. Considere que $\{Y : Y \in \{1, 2, \dots\}\}$ indica a quantidade de retiradas necessárias até o primeiro rei. O espaço amostral é dado diretamente: $\Omega = \{1, 2, 3, \dots\}$. Temos que, para cada retirada, a probabilidade da carta ser um rei é $4/52 = 1/13$ (considerando que temos 4 reis no baralho), e a probabilidade de não ser é de $48/52 = 12/13$. Assim, a probabilidade de que a primeira retirada seja um rei é de:

$$P(Y = 1) = \frac{1}{13}$$

Caso isso não ocorra, a probabilidade de que o primeiro rei ocorra na segunda retirada é de:

$$P(Y = 2) = \frac{12}{13} \cdot \frac{1}{13}$$

É possível verificar que, para todo $n \in \mathcal{N}$ a probabilidade de que o primeiro rei ocorra na retirada n é de:

$$P(Y = n) = \left(\frac{12}{13}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{13}\right)$$

Esse modelo de probabilidade é denotado modelo geométrico. □

c) Quinze bolas são retiradas, ao acaso e *com* reposição, de uma urna contendo 5 bolas vermelhas, 9 bolas pretas e uma bola branca. Observa-se o número que ocorre cada cor.

Proof. Sejam os eventos V, P e B o número de vezes que as retiradas foram de bolas vermelhas, pretas e brancas, respectivamente. É necessário (pela definição do modelo) que $V + P + B = 15$, mas consideremos o caso em que o número de retiradas seja n. Assim, para $n = 1$, o espaço amostral Ω é:

$$\Omega = \{(V), (P), (B)\}$$

E as probabilidades de cada evento são:

$$\begin{aligned} P(V = 1) &= \frac{5}{15} \\ P(P = 1) &= \frac{9}{15} \\ P(B = 1) &= \frac{1}{15} \end{aligned}$$

Para $n = 2$ bolas retiradas, temos que o espaço amostral é:

$$\begin{aligned} \Omega = \{&(V, V), (V, P), (V, B), \\ &(P, V), (P, P), (P, B), \\ &(B, V), (B, P), (B, B)\} \end{aligned}$$

E as probabilidades de cada evento são:

$$\begin{aligned} P(V, V) &= \frac{5}{15} \cdot \frac{5}{15}; P(V, P) = \frac{5}{15} \cdot \frac{9}{15}; P(V, B) = \frac{5}{15} \cdot \frac{1}{15}; \\ P(P, V) &= \frac{9}{15} \cdot \frac{5}{15}; P(P, P) = \frac{9}{15} \cdot \frac{9}{15}; P(P, B) = \frac{9}{15} \cdot \frac{1}{15}; \\ P(B, V) &= \frac{1}{15} \cdot \frac{5}{15}; P(B, P) = \frac{1}{15} \cdot \frac{9}{15}; P(B, B) = \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{15} \end{aligned}$$

Aqui é possível ver o padrão que surge para esse problema. Temos que os eventos V, P, B formam uma permutação (com repetição) da quantidade de bolas retiradas. A fórmula para a permutação com repetição de n elementos, em que cada um aparece $k_1, k_2, \ldots k_j$ vezes é dada por:

$$P_n^{k_1, k_2, \ldots, k_j} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \cdots \cdot k_j!}$$

Assim, podemos considerar que cada evento irá aparecer uma quantidade $V = v, P = p, B = b$ de vezes, com a seguinte probabilidade:

$$P(V = v, P = p, B = b) = \frac{15!}{v!p!b!} \cdot \left(\frac{5}{15}\right)^v \cdot \left(\frac{9}{15}\right)^p \cdot \left(\frac{1}{15}\right)^b \text{ ; com } v + p + b = 15$$

Caso seja necessário, podemos ainda generalizar para uma quantidade $n : 1 \leq n \leq 15$ de retiradas:

$$P(V = v, P = p, B = b) = \frac{n!}{v!p!b!} \cdot \left(\frac{5}{15}\right)^v \cdot \left(\frac{9}{15}\right)^p \cdot \left(\frac{1}{15}\right)^b \text{ ; com } v + p + b = n$$

Em que verifica-se facilmente que é válido para os casos em que $n = 1$ e $n = 2$ demonstrados anteriormente. □

d) O experimento (**c**) é realizado *sem* reposição.

Proof. Como temos 15 bolas que serão retiradas *sem* reposição, o único evento possível após as 15 serem retiradas é:

$$\Omega = \{(V = 5, P = 9, B = 1)\}$$

E a probabilidade de isso ocorrer é 1 (visto que é o único evento no espaço amostral). Caso consideremos uma quantidade de retiradas $n < 15$, temos que o modelo de probabilidade é diferente. Consideremos que $V + P + B = n$ e que a quantidade de vezes que cada cor aparece é v, p e b, respectivamente. Então, como a ordem com que as cores são retiradas não importa, a probabilidade de aparecer uma quantidade de bolas de cada cor é dada por:

$$P(V = v, P = p, B = b) = \frac{\binom{5}{v}\binom{9}{p}\binom{1}{b}}{\binom{15}{n}}, \quad v + p + b = n$$

Esse modelo de probabilidade é chamado de multinomial hipergeométrico, e é uma generalização do modelo hipergeométrico para mais de duas classes (como é o caso). □

Exercise 2.9 (BJ12)**.** Retiram-se 4 cartas, ao acaso, de um baralho de 52 cartas. Registra-se o número de reis na amostra. Exiba um bom modelo probabilístico para este experimento se:

a) As retiradas são feitas *sem* reposição.

Proof. Considerando que em um baralho usual tem 52 cartas, e que a ordem com que cada uma das 4 cartas retiradas da amostra não importa (apenas importa a quantidade de reis na amostra), a quantidade total de amostras possíveis é $\binom{52}{4}$.
Como temos 4 reis no baralho, isso implica que há 48 cartas que são "não-reis". Dessa forma, se na amostra forem coletados k reis, serão coletados também $4 - k$ "não-reis", com os k reis podendo aparecer de $\binom{4}{k}$ maneiras diferentes (não importa qual o rei foi registrado) e os $4 - k$ "não-reis" podem aparecer de $\binom{48}{4-k}$ maneiras diferentes.
Assim, seja K o evento registrar k reis na amostra, a probabilidade $P(K = k)$ é dada por:

$$P(K = k) = \frac{\binom{4}{k}\binom{48}{4-k}}{\binom{52}{4}} \tag{11}$$

Esse modelo é chamado de hipergeométrico, que vale quando sabemos a quantidades de sucessos totais na população, e queremos contar a quantidade de sucessos coletados em uma amostra finita da população (que também deve ser finita). □

b) As retiradas são feitas *com* reposição.

Proof. Se as retiradas são feitas com reposição, a probabilidade de registrar um rei em cada retirada é de $4/52$ e a probabilidade de registrar um "não-rei" é de $48/52$. Como a ordem das retiradas não importa, podemos ver que em uma amostra de tamanho 4, os k reis podem aparecer de $\binom{4}{k}$ maneiras diferentes. Além disso, podemos ver que, como irão aparecer k reis na amostra, consequentemente irão aparecer $4-k$ "não-reis".
Assim, seja K o evento registrar k reis na amostra, a probabilidade $P(K=k)$ é dada por:

$$P(K=k) = \binom{4}{k}\left(\frac{4}{52}\right)^{k}\left(\frac{48}{52}\right)^{4-k} \tag{12}$$

Esse modelo é chamado de binomial, e vale quando queremos encontrar a probabilidade de ocorrer k sucessos em uma amostra de tamanho n, dado que a probabilidade de cada sucesso é fixa. ☐

c) Determine em que caso, (a) ou (b), é mais provável obter 4 reis.

Proof. Substituindo os valores de k em (11) e (12) para 4, podemos calcular as probabilidades em cada caso. Assim:

$$P(K=k) = \frac{\binom{4}{4}\binom{48}{0}}{\binom{52}{4}} \approx 3.7\times 10^{-6}$$
$$P(K=k) = \binom{4}{4}\left(\frac{4}{52}\right)^{4}\left(\frac{48}{52}\right)^{0} \approx 3.5\times 10^{-5}$$

De modo que é possível ver que no caso com reposição a probabilidade de encontrar 4 reis é maior. ☐

Exercise 2.10 (BJ13)**.**

a) Sejam A, B e C eventos aleatórios em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Mostre que

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$$

e

$$P(A\cup B\cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A\cap B) - P(A\cap C) - P(B\cap C) + P(A\cap B\cap C)$$

Proof. Podemos escrever os eventos A e B como as seguintes uniões de eventos disjuntos:

$$A = (A\cap B)\cup(A\cap B^c)$$
$$B = (A\cap B)\cup(A^c\cap B)$$

Utilizando a propriedade da aditividade finita $(P3)$, temos que:

$$\begin{aligned} P(A) = P(A\cap B) + P(A\cap B^c) \Rightarrow P(A\cap B^c) = P(A) - P(A\cap B) \\ P(B) = P(A\cap B) + P(A^c\cap B) \Rightarrow P(A^c\cap B) = P(B) - P(A\cap B) \end{aligned} \tag{13}$$

Além disso, podemos escrever o evento $(A\cup B)$ como a seguinte união disjunta de eventos:

$$(A\cup B) = (A\cap B^c)\cup(A^c\cap B)\cup(A\cap B)$$

Por fim, utilizando os resultados de (13) e a aditividade finita, temos que:

$$
\begin{aligned}
P(A \cup B) &= P(A \cap B^c) + P(A^c \cap B) + P(A \cap B) \\
&= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) + P(A \cap B) \\
&= P(A) + P(B) - P(A \cap B)
\end{aligned}
$$

Para a segunda expressão, podemos levar em consideração que os conjuntos A, B e C podem ser escritos como uniões de eventos disjuntos da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
A &= (A \cap B^c \cap C^c) \cup (A \cap B \cap C^c) \cup (A \cap B^c \cap C) \cup (A \cap B \cap C) \\
B &= (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C) \\
C &= (A^c \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C) \cup (A \cap B^c \cap C) \cup (A \cap B \cap C)
\end{aligned}
$$

Nos utilizando novamente da aditividade finita, temos que:

$$
\begin{aligned}
P(A) &= P(A \cap B^c \cap C^c) + P(A \cap B \cap C^c) + P(A \cap B^c \cap C) + P(A \cap B \cap C) \\
P(B) &= P(A^c \cap B \cap C^c) + P(A \cap B \cap C^c) + P(A^c \cap B \cap C) + P(A \cap B \cap C) \\
P(C) &= P(A^c \cap B^c \cap C) + P(A^c \cap B \cap C) + P(A \cap B^c \cap C) + P(A \cap B \cap C)
\end{aligned}
$$

De maneira similar ao que fizemos na demonstração anterior, podemos isolar as probabilidades à direita, como por exemplo:

$$
P(A \cap B \cap C^c) = P(A) - P(A \cap B^c \cap C^c) - P(A \cap B^c \cap C) - P(A \cap B \cap C) \tag{14}
$$

Mas vale notar que, por serem eventos disjuntos:

$$
P(A \cap B^c \cap C^c) + P(A \cap B^c \cap C) = P(A - B) = P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)
$$

De modo que a equação (14) pode ser reescrita como:

$$
\begin{aligned}
P(A \cap B \cap C^c) &= P(A) - P(A) + P(A \cap B) - P(A \cap B \cap C) \\
&= P(A \cap B) - P(A \cap B \cap C)
\end{aligned}
$$

Assim, podemos denotar as seguintes probabilidades:

$$
\begin{aligned}
P(A \cap B \cap C^c) &= P(A \cap B) - P(A \cap B \cap C) \\
P(A \cap B^c \cap C) &= P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C) \\
P(A^c \cap B \cap C) &= P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C)
\end{aligned} \tag{15}
$$

Utilizando os resultados de (15), podemos isolar as outras probabilidades, tais como:

$$
\begin{aligned}
P(A \cap B^c \cap C^c) &= P(A) - P(A \cap B \cap C^c) - P(A \cap B^c \cap C) - P(A \cap B \cap C) \\
&= P(A) - P(A \cap B) + P(A \cap B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C) - P(A \cap B \cap C) \\
&= P(A) - P(A \cap B) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)
\end{aligned}
$$

De modo que podemos denotar as seguintes probabilidades:

$$
\begin{aligned}
P(A \cap B^c \cap C^c) &= P(A) - P(A \cap B) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C) \\
P(A^c \cap B \cap C^c) &= P(B) - P(A \cap B) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) \\
P(A^c \cap B^c \cap C) &= P(C) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)
\end{aligned} \tag{16}
$$

O evento $(A \cup B \cup C)$ pode ser escrito como a seguinte união de eventos disjuntos (de fácil verificação que são disjuntos dois a dois):

$$\begin{aligned}(A \cup B \cup C) =&(A \cap B \cap C^c) \cup (A \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C) \cup \\ &(A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C) \cup \\ &(A \cap B \cap C)\end{aligned} \tag{17}$$

Por fim, valendo-se da aditividade finita e substituindo em (17) os resultados obtidos em (15) e (16), temos que:

$$\begin{aligned}P(A \cup B \cup C) =&P(A \cap B \cap C^c) + P(A \cap B^c \cap C) + P(A^c \cap B \cap C) + P(A \cap B^c \cap C^c) + \\ &P(A^c \cap B \cap C^c) + P(A^c \cap B^c \cap C) + P(A \cap B \cap C) \\ =&P(A \cap B) - P(A \cap B \cap C) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C) + \\ &P(A) - P(A \cap B) - P(A \cap C) + P(B) - P(A \cap B) - P(B \cap C) + P(C) - P(A \cap C) - \\ &P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) \\ =&P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)\end{aligned}$$

□

b) Enuncie a generalização do item **(a)** para o caso da união de n eventos aleatórios.

Proof. Podemos ver que as demonstrações anteriores podem ser escritas como:

$$\begin{aligned}P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_n\right) =&\sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \sum_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}) - \dots \\ &+ (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k})\end{aligned} \tag{18}$$

Esse é chamado de princípio de inclusão-exclusão. □

c) Prove as seguintes *desigualdades de Bonferroni*:

$$(i)\ \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le n} P(A_i \cap A_j) \le P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_n\right) \le \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le n} P(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \le i < j < k \le n} P(A_i \cap A_j \cap A_k)$$

Proof. Podemos demonstrar a primeira desigualdade utilizando a equação (18):

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le n} P(A_i \cap A_j) \le& P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_n\right) \\ 0 \le& P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_n\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le n} P(A_i \cap A_j\right) \\ 0 \le& \sum_{1 \le i < j < k \le n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \sum_{1 \le i < j < k < l \le n} P(A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l) + \dots \\ &+ (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k})\end{aligned} \tag{19}$$

E como $(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_n}) \subseteq (A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_{n-1}}) \Rightarrow P((A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_n})) \leq P((A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_{n-1}}))$, temos que a expressão (19) é maior que 0. Para a segunda desigualdade, vamos nos valer do mesmo princípio:

$$
\begin{aligned}
P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_n\right) &\leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1\leq i<j\leq n} P(A_i \cap A_j) + \sum_{1\leq i<j<k\leq n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) \\
0 &\leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1\leq i<j\leq n} P(A_i \cap A_j) + \sum_{1\leq i<j<k\leq n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \left(P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_n\right)\right) \\
0 &\leq \sum_{1\leq i<j<k<l\leq n} P(A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l) - \ldots - (-1)^{k-1} \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k})
\end{aligned}
\tag{20}
$$

E da mesma forma que antes, é possível ver que a última expressão em (20) é maior que 0. □

(ii) Se k é ímpar, $k \leq n$, então:

$$
\begin{aligned}
P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_n) &- \sum_{1\leq i_1<i_2\leq n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \ldots \\
&+ (-1)^{k-1} \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k});
\end{aligned}
$$

se k é par, $k \leq n$, vale $\geq$ nesta última desigualdade.

Proof. Como $k \leq n$, podemos separar a desigualdade em dois casos:

1. $k = n$;
2. $k < n$;

No primeiro caso é fácil ver que a expressão se iguala à generalização para a união dada em (18). Para o segundo caso, temos que:

$$
\begin{aligned}
P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) =& \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1\leq i_1<i_2\leq n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \ldots \\
&+ \underbrace{(-1)^{k-1} \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_{k-1}<i_k} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k})}_{\text{Termo k}} + \underbrace{(-1)^{k} \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k<i_{k+1}} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_{k+1}})}_{\text{Termo k+1}} + \ldots
\end{aligned}
$$

Como k é ímpar, o termo k será positivo e o termo $k+1$ será negativo. Assim, se subtrairmos os $k+j,\ j \in \{1, \ldots, n-k\}$ termos de ambos os lados, teremos:

$$
\begin{aligned}
P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) - \left((-1)^{k} \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k<i_{k+1}} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_{k+1}}) + \ldots\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) &- \sum_{1\leq i_1<i_2\leq n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \ldots \\
&+ (-1)^{k-1} \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_{k-1}<i_k} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k})
\end{aligned}
$$

E podemos ver que:

$$
P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) - \left((-1)^{k} \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k<i_{k+1}} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_{k+1}}) + \ldots\right) \geq P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)
$$

De modo que:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_n) - \sum_{1\leq i_1<i_2\leq n} P(A_{i_1}\cap A_{i_2}) + \dots$$
$$+ (-1)^{k-1} \sum_{1\leq i_1<\dots<i_{k-1}<i_k} P(A_{i_1}\cap\dots\cap A_{i_k})$$

Se k for par, o termo k será negativo e o termo $k+1$ será positivo, de modo que a desigualdade anterior se inverte, ao fazer a subtração dos $k+j,\ j\in\{1,\dots,n-k\}$ termos na igualdade. $\square$

Exercise 2.11 (BJ15)**.** Suponha que n cartas numeradas de 1 até n sejam embaralhadas e retiradas uma por uma, sem reposição, até todas as cartas serem retiradas. Qual a probabilidade de que para pelo menos uma carta, o número da carta coincida com o número da retirada?

Proof. Seja A_i o evento em que o número da carta i coincidiu com o número da retirada. Podemos ver que, o caso em que para pelo menos uma delas coincida é equivalente a $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Dessa maneira, podemos ver que a probabilidade de isso ocorrer é:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_n) - \sum_{1\leq i_1<i_2\leq n} P(A_{i_1}\cap A_{i_2}) + \dots$$
$$+ (-1)^{k-1} \sum_{1\leq i_1<\dots<i_k\leq n} P(A_{i_1}\cap\dots\cap A_{i_k});$$

O primeiro termo pode ser demonstrado como sendo:

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_n) = P(A_1)+P(A_2)+\dots+P(A_n) = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n} = 1$$

Para o termo de intercessão dois a dois, temos que a probabilidade de que o número na primeira carta ser igual a o número da retirada é de $1/n$, e o da segunda carta o ser é de $1/(n-1)$, e como temos $\binom{n}{2}$ combinações diferentes de retiradas, temos que a probabilidade do segundo termo é:

$$\sum_{1\leq i_1<i_2\leq n} P(A_{i_1}\cap A_{i_2}) = P(A_1\cap A_2)+P(A_1\cap A_3)+\dots+P(A_{n-1}\cap A_n)$$
$$= \frac{\binom{n}{2}}{n\cdot(n-1)} = \frac{n!}{(n-2)!2!}\cdot\frac{1}{n\cdot(n-1)} = \frac{n!}{n!2!} = \frac{1}{2!}$$

Assim, podemos ver que para qualquer termo teremos:

$$\sum_{1\leq i_1<\dots<i_k\leq n} P(A_{i_1}\cap\dots\cap A_{i_k}) = \frac{1}{k!}$$

De modo que a probabilidade da união dos eventos se resume à série:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\dots+(-1)^{k-1}\frac{1}{k!}$$

$\square$

Exercise 2.12 (BJ16)**.** Seja $(\Omega,\mathcal{A},P)$ um espaço de probabilidade e suponha que todos os conjuntos abaixo pertençam a $\mathcal{A}$. Prove:

a) Se os A_n são disjuntos e $P(B|A_n) \geq c$ para todo n, então $P(B|\bigcup_{n=1}^{k} A_n) \geq c$ (pode supor $P(A_n) > 0$ para todo n).

Proof. Sabemos que $A_i \cap A_j = \emptyset$, $\forall i, j$. Dito isso, podemos ver que a seguinte relação é válida:

$$P(B|A_n) = \frac{P(A_n \cap B)}{P(A_n)} \geq c$$

$$P(A_n \cap B) \geq cP(A_n) \tag{21}$$

Além disso, podemos desenvolver $P(B|\bigcup_{n=1}^{k} A_n)$ da seguinte forma:

$$P\left(B \,\Big|\, \bigcup_{n=1}^{k} A_n\right) = \frac{P\left(B \cap (A_1 \cup A_2 \cdots \cap A_k)\right)}{P\left(\bigcup_{n=1}^{k} A_n\right)}$$

$$= \frac{P\left((A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \cdots \cup (A_k \cap B)\right)}{\sum_{n=1}^{k} P(A_n)}$$

$$P\left(B \,\Big|\, \bigcup_{n=1}^{k} A_n\right) = \frac{\sum_{n=1}^{k} P(A_n \cap B)}{\sum_{n=1}^{k} P(A_n)} \tag{22}$$

O denominador de (22) é simplesmente o somatório das probabilidades dos A_n's pelo fato de que eles são disjuntos (definidos no enunciado da questão). Agora, considerando que a relação (21) é válida para todos os A_n's, vamos somar todas as probabilidades para os $n \in \{1, 2, \ldots, k\}$:

$$P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \cdots + P(A_k \cap B) \geq cP(A_1) + cP(A_2) + \cdots + cP(A_k)$$

$$\sum_{n=1}^{k} P(A_n \cap B) \geq \sum_{n=1}^{k} cP(A_n)$$

$$\sum_{n=1}^{k} P(A_n \cap B) \geq c \sum_{n=1}^{k} P(A_n)$$

$$\frac{\sum_{n=1}^{k} P(A_n \cap B)}{\sum_{n=1}^{k} P(A_n)} \geq c$$

$$P\left(B \,\Big|\, \bigcup_{n=1}^{k} A_n\right) \geq c$$

□

b) O item **(a)** com "=" no lugar de "≥".

Proof. Substituindo o sinal de $\geq$ em (22) por uma igualdade, a prova é igual ao já realizado no item anterior. □

c) Se $A_n \supset A_{n+1}$ e $P(A_{n+1}|A_n) \leq \frac{1}{2}$ para todo n, então $P(A_n) \to 0$ quando $n \to \infty$.

Proof. Consideremos o caso inicial, com A_1 e A_2. Disso tem-se que:

$$P(A_2|A_1) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)} \leq \frac{1}{2}$$

Como $A_1 \supset A_2$, $P(A_1 \cap A_2) = P(A_2)$. Logo:

$$\frac{P(A_2)}{P(A_1)} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow P(A_2) \leq \frac{1}{2}P(A_1)$$

Para o caso seguinte, com A_2 e A_3, temos que:

$$\begin{aligned} P(A_3|A_2) = \frac{P(A_2 \cap A_3)}{P(A_2)} &\leq \frac{1}{2} \\ \frac{P(A_3)}{P(A_2)} &\leq \frac{1}{2} \Rightarrow P(A_3) \leq \frac{1}{2}P(A_2) \end{aligned}$$

E como $P(A_2) \leq \frac{1}{2}P(A_1)$, temos que $P(A_3) \leq \frac{1}{4}P(A_1)$. Assim, já é possível identificar que, para qualquer n temos que:

$$\begin{aligned} P(A_n) &\leq \frac{1}{2^{n-1}}P(A_1) \\ \lim_{n\to\infty} P(A_n) &\leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n-1}}P(A_1) = 0 \end{aligned}$$

Assim, independentemente do valor de $P(A_1)$, o valor $P(A_n) \to 0$ conforme $n \to \infty$. □

d) Se os A_n são disjuntos e $P(B|A_n) = P(C|A_n)$ para todo n, então

$$P(B| \cup A_n) = P(C| \cup A_n)$$

Proof. Como os A_ns são disjuntos, temos que:

$$\begin{aligned} P(B|A_n) &= \frac{P(B \cap (\cup A_n))}{P(\cup A_n)} \\ &= \frac{P((A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \cdots \cup (A_n \cap B))}{\sum P(A_n)} \\ &= \frac{\sum P(A_n \cap B)}{\sum P(A_n)} \end{aligned}$$

Para C temos a mesma relação:

$$P(C|A_n) = \frac{\sum P(A_n \cap C)}{\sum P(A_n)}$$

E disso temos que:

$$P(B|A_n) = \frac{P(A_n \cap B)}{P(A_n)}$$

Como, por hipótese, temos que $P(B|A_n) = P(C|A_n) \Rightarrow P(A_n \cap B) = P(A_n \cap C)$, de modo que, como os A_ns são disjuntos, $\sum P(A_n \cap B) = \sum P(A_n \cap C)$, logo:

$$\frac{\sum P(A_n \cap B)}{\sum P(A_n)} = \frac{\sum P(A_n \cap C)}{\sum P(A_n)}$$

□

e) Se $A_1, A_2, \ldots$ são disjuntos e $\cup A_n = \Omega$, então:

$$P(B|C) = \sum_n P(A_n|C)P(B|A_n \cap C)$$

Proof. Pelo Teorema da Multiplicação, temos que $P(A_n \cap B \cap C)$ pode ser escrito como:

$$P(A_n \cap B \cap C) = P(B|A_n \cap C)P(A_n \cap C)P(C)$$

É importante notar que essa representação não é única, mas apenas conveniente para o problema em questão. Podemos então somar para todos os A_ns:

$$\sum P(A_n \cap B \cap C) = \sum P(B|A_n \cap C)P(A_n \cap C)P(C) = P(C)\sum P(B|A_n \cap C)P(A_n \cap C)$$

Como os A_ns formam uma partição de Ω, $\sum P(A_n \cap B \cap C) = P(B \cap C)$. Logo:

$$\begin{aligned} P(B|C) &= \frac{P(B \cap C)}{P(C)} \\ &= \frac{P(C)\sum P(B|A_n \cap C)P(A_n \cap C)}{P(C)} \\ &= \sum P(B|A_n \cap C)P(A_n \cap C) \end{aligned}$$

□

Exercise 2.13 (BJ17)**.** Suponha que a ocorrência ou não de chuva dependa das condições do tempo no dia imediatamente anterior. Admita-se que se chove hoje, choverá amanhã com probabilidade de 0,7 e que se não chove hoje choverá amanhã com probabilidade 0,4. Sabendo-se que choveu hoje, calcule a probabilidade de que choverá depois de amanhã.

Proof. Sejam os eventos C_n = "Choveu no dia de hoje", NC_n = "Não choveu no dia de hoje". De maneira similar, C_{n+1} indica que choverá amanhã, C_{n+2} que choverá depois de amanhã e assim por diante. Sabemos pelo enunciado as seguintes probabilidades:

$$\begin{aligned} P(C_{n+1}|C_n) = 0,7 \ , \ P(NC_{n+1}|C_n) = 0,3 \\ P(C_{n+1}|NC_n) = 0,4 \ , \ P(NC_{n+1}|NC_n) = 0,6 \end{aligned}$$

Além disso, como os eventos Chover e Não-Chover formam uma partição (são eventos complementares), pelo Teorema da Probabilidade Total temos que a probabilidade de chover depois de amanhã é dada por:

$$P(C_{n+2}) = P(C_{n+2}|C_{n+1})P(C_{n+1}) + P(C_{n+2}|NC_{n+1})P(NC_{n+1}) \tag{23}$$

É fácil perceber que $P(C_{n+2}|C_{n+1}) = P(C_{n+1}|C_n)$ e de maneira similar que $P(C_{n+2}|NC_{n+1}) = P(C_{n+1}|NC_n)$. Ainda assim, é necessário encontrar as probabilidades $P(C_{n+1})$ e $P(NC_{n+1})$. Como sabemos que choveu hoje, $P(C_n) = 1$ e $P(NC_n) = 0$, de modo que:

$$\begin{aligned} P(C_{n+1}) &= P(C_{n+1}|C_n)P(C_n) + P(C_{n+1}|NC_n)P(NC_n) \\ &= 0,7 \times 1 + 0,4 \times 0 = 0,7 \\ P(NC_{n+1}) &= P(NC_{n+1}|C_n)P(C_n) + P(NC_{n+1}|NC_n)P(NC_n) \\ &= 0,3 \times 1 + 0,6 \times 0 = 0,3 \end{aligned}$$

Substituindo esses valores em (23), temos:

$$
\begin{aligned}
P(C_{n+2}) &= P(C_{n+1}|C_n) \times 0,7 + P(C_{n+1}|NC_n) \times 0,3 \\
&= 0,7 \times 0,7 + 0,4 \times 0,3 = 0,49 + 0,12 = 0,61
\end{aligned}
$$

□

Exercise 2.14 (BJ18)**.** Certo experimento consiste em lançar um dado equilibrado duas vezes, independentemente. Dado que os dois números sejam diferentes, qual a probabilidade condicional de:

a) Pelo menos um dos números ser 6?

Proof. Sejam A_1 e A_2 os lançamentos do primeiro e do segundo dado, respectivamente. Sabemos que $P(A_1 = A_2) = 0$. Disso temos que:

$$
\begin{aligned}
P((A_1 = 6) \cup (A_2 = 6)) &= P(A_1 = 6) + P(A_2 = 6) - P((A_1 = 6) \cap (A_2 = 6)) \\
&= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - 0 \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

□

b) A soma dos números ser 8?

Proof. Considere o evento $S = x, x \in \{2, 3, \dots, 12\}$ o resultado da soma dos lançamentos A_1 e A_2. Utilizando o Teorema da Probabilidade Total, podemos decompor a probabilidade da soma ser igual a 8 da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
P(S = 8) &= P(S = 8|A_1 = 1)P(A_1 = 1) + P(S = 8|A_1 = 2)P(A_1 = 2) + \cdots + P(S = 8|A_1 = 6)P(A_1 = 6) \\
&= 0 \times \frac{1}{6} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{6} + 0 \times \frac{1}{6} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{6} \\
&= \frac{1}{30} + \frac{1}{30} + \frac{1}{30} + \frac{1}{30} \\
&= \frac{4}{30}
\end{aligned}
$$

□

Exercise 2.15 (BJ19)**.** Em teste de múltipla escolha, a probabilidade do aluno saber a resposta é p. Havendo m escolhas, se ele sabe a resposta ele responde corretamente com probabilidade 1; se não sabe, ele responde corretamente com probabilidade $\frac{1}{m}$. Qual a probabilidade de que ele soubesse a resposta dado que a pergunta foi respondida corretamente? Calcule o limite dessa probabilidade quando (i) $m \to \infty$ com p fixo e (ii) $p \to 0$ com m fixo.

Proof. Sejam: $P(S) = p$ a probabilidade de saber a resposta, $P(A|S) = 1$ a probabilidade de acertar, dado que sabia a resposta, $P(A|NS) = \frac{1}{m}$ a probabilidade de acertar, dado que não sabia a resposta e $P(NA|NS) = \frac{m-1}{m}$ a probabilidade de não acertar, dado que não sabe a resposta. Sabemos que os eventos S e NS são complementares, assim como A e NA. Queremos encontrar $P(S|A)$, que é dada por:

$$
\begin{aligned}
P(S|A) &= \frac{P(S \cap A)}{P(A)} \\
&= \frac{P(A|S)P(S)}{P(A|S)P(S) + P(A|NS)P(NS)} \\
&= \frac{1 \times p}{1 \times p + \frac{1}{m} \times (1 - p)} \\
&= \frac{p}{\frac{mp+1-p}{m}}
\end{aligned}
$$

De modo que, simplificando a última expressão:

$$P(S|A) = \frac{mp}{p(m-1)+1} \tag{24}$$

Agora, calculando os limites temos:

- (i)
$$\lim_{p \to 0} \frac{mp}{p(m-1)+1} = \frac{0}{1} = 0$$

- (ii)

$$\lim_{m \to \infty} \frac{mp}{p(m-1)+1} \xRightarrow{\text{L'Hôpital}} \frac{\frac{\partial}{\partial m} mp}{\frac{\partial}{\partial m} p(m-1)+1} = \frac{p}{p} = 1$$

□

Exercise 2.16 (BJ20)**.** Durante o mês de novembro a probabilidade de chuva é de 0,3. O Fluminense ganha um jogo em um dia de chuva com a probabilidade de 0,4; em um dia sem chuva com a probabilidade 0,6. Se ganhou um jogo em novembro, qual é a probabilidade de que choveu neste dia?

Proof. Sejam os seguintes eventos: $P(C) = 0,3$ é a probabilidade de chover em novembro, $P(NC) = 0,7$ é a probabilidade de não chover em novembro, $P(V|C) = 0,4$ é a probabilidade de vitória, dado que choveu no dia, $P(D|C) = 0,6$ é a probabilidade de derrota, dado que choveu no dia, $P(V|NC) = 0,6$ é a probabilidade de vitória, dado que não choveu no dia e $P(D|NC) = 0,4$ é a probabilidade de derrota, dado que não choveu no dia. Pelo Teorema da Probabilidade Total, temos que:

$$\begin{aligned} P(V) &= P(V|C)P(C) + P(V|NC)P(NC) \\ &= 0,4 \times 0,3 + 0,6 \times 0,7 \\ &= 0,54 \end{aligned}$$

Além disso, temos que o evento $P(C \cap V) = P(V|C)P(C)$, logo:

$$P(C \cap V) = P(V|C)P(C) = 0,4 \times 0,3 = 0,12$$

Assim, temos que a probabilidade de ter chovido, dado que o Fluminense ganhou o jogo em novembro é de:

$$P(C|V) = \frac{P(C \cap V)}{P(V)} = \frac{0,12}{0,54} = \frac{2}{9}$$

□

3 Variáveis Aleatórias

3.1 Variáveis aleatórias e funções de distribuição

Example 3.1. Considere um experimento em que uma moeda é lançada duas vezes. Seja X = total de caras nos dois lançamentos. Denotemos o evento cara como H e coroa como T. Logo:

Espaço Amostral (Ω)	X
HT	1
TH	1
HH	2
TT	0

Logo, $X : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$. Vale também que, $\forall x$ valor na imagem de X, $X^{-1}(x) \in \mathcal{F}$. Por exemplo:

$$x = 1 \Rightarrow X^{-1}(1) = \{HT, TH\}$$
$$x = 2 \Rightarrow X^{-1}(2) = \{HH\}$$
$$x = 0 \Rightarrow X^{-1}(0) = \{TT\}$$

Definition 3.1 (Variável aleatória)**.** Seja $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço de probabilidades. Uma função $X : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ é variável aleatória se $[x \in I] \in \mathcal{F},\ I \in \mathbb{R}$ (ou, equivalentemente, se $\{\omega : X(\omega) \in I\} \in \mathcal{F};\ X^{-1}(I) \in \mathcal{F}$).

Definition 3.2 (Distribuição Acumulada)**.** Considere um espaço de probabilidades $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ e $X : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ uma variável aleatória, defina $F(r) = P(X \leq r) = P(\{\omega : X(\omega) \leq r\})$.

Example 3.2. Seja X = número de caras em dois lançamentos de moeda (honesta). Temos que as probabilidades de X são dadas por:

$$P(X = 0) = P(\{TT\}) = \frac{1}{4}$$
$$P(X = 1) = P(\{TH, HT\}) = \frac{2}{4}$$
$$P(X = 2) = P(\{HH\}) = \frac{1}{4}$$

Para encontrarmos a função de distribuição acumulada, podemos particinar o espaço e “acumular” as probabilidades. Para $r < 0$:

$$F(r) = P([X \leq r]) = P(\emptyset) = 0$$

Para $r \in [0, 1)$:

$$F(r) = P([X \leq r]) = P(X \leq 0) = \frac{1}{4}$$

Para $r \in [1, 2)$:

$$F(r) = P([X \leq r]) = P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{3}{4}$$

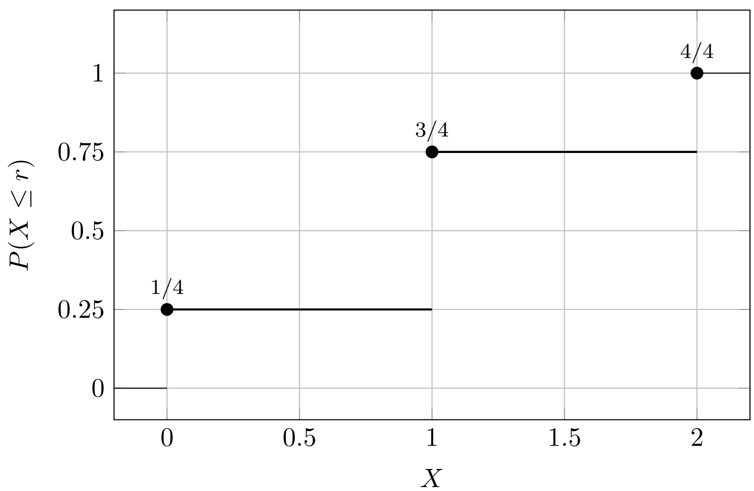
Para $r \geq 2$:

$$F(r) = P([X \leq r]) = P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 1$$

Logo, F é dada por:

$$F(r) = \begin{cases} 0, & r < 0 \\ \frac{1}{4}, & r \in [0, 1) \\ \frac{3}{4}, & r \in [1, 2) \\ 1, & r \geq 2 \end{cases}$$

Distribuição de probabilidades acumulada



Theorem 3.1 (Propriedades da distribuição acumulada)**.** *Seja X uma variável aleatória definida em $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, então a f.d.a. de X (F_X ou F) verifica:*

a) *F é monótona não decrescente;*
b) *F é contínua à direita;*
c) $\lim_{t\to-\infty} F(t) = 0$ *e* $\lim_{t\to\infty} F(t) = 1$.

Proof.

a) Dados $a, b \in \mathbb{R} : a \leq b$; $[X \leq a] \subseteq [X \leq b] \Rightarrow P([X \leq a]) \leq P([X \leq b]) \Rightarrow F(a) \leq F(b)$.

b) Se $X_n \downarrow x$, quando $n \to \infty$, temos que $\{[X \leq x_n]\}_{n\geq 1}$ é tal que $\bigcap_{n\geq 1}[X \leq x_n] = [X \leq x]$. Isso significa que $[X \leq x]$ acontece se e somente se $[X \leq x_n]$ $\forall n$. Além disso, $[X \leq x_n] \downarrow [X \leq x]$ quando $n \to \infty$, logo, pela continuidade da função de probabilidade $P([X \leq x_n]) \downarrow P([X \leq x]), n \to \infty$.

c) Considere agora que $x_n \downarrow -\infty \Rightarrow [X \leq x_n] \downarrow \emptyset,\ n \to \infty \Rightarrow F(x_n) = P([X \leq x_n]) \downarrow P(\emptyset) = 0,\ n \to \infty$. Se $x_n \uparrow \infty \Rightarrow [X \leq x_n] \uparrow \Omega,\ n \to \infty \Rightarrow F(x_n) = P([X \leq x_n]) \uparrow P(\Omega) = 1,\ n \to \infty$.

□

Theorem 3.2. *Se F é a f.d.a. da variável aleatória X, então:*

a) *Existem e são finitos os limites laterais* $\lim_{t\to r^-} F(t), \lim_{t\to r^+} F(t), \forall r \in \mathbb{R}$ *e* $\lim_{t\to r^-} F(t) \leq \lim_{t\to r^+} F(t)$*;*

b) $\lim_{t\to r^+} F(t) = F(r), \forall r \in \mathbb{R}$*;*

c) *F é descontínua em $r, r \in \mathbb{R}$ se e somente se* $\lim_{t\to r^-} F(t) < F(r)$*, com um salto de tamanho* $F(r) - \lim_{t\to r^-} F(t)$*;*

d) $\forall r \in \mathbb{R}, P(X = r) = F(r) - \lim_{t\to r^-} F(t)$*;*

e) *Existem no máximo um total enumerável de descontinuidades em F.*

Proof.

a) F é monótona e limitada ($0 \leq F \leq 1$). Logo, os limites laterais existem e são limitados.

b) Como F é monótona não-decrescente, $\forall x, y : x \leq y \Rightarrow F(x) \leq F(y)$. Logo $\lim_{t \to r^-} F(t) \leq \lim_{t \to r^+} F(t)$.

c) Como F é monótona não-decrescente, uma descontinuidade só ocorre se e somente se $\lim_{t \to r^-} F(t) < \lim_{t \to r^+} F(t) = F(r)$.

d) Seja $r \in \mathbb{R}$. $[X \leq r] = \bigcap_{n=1}^{\infty}(r - \frac{1}{n} < x \leq r)$, logo:

$$\begin{aligned}
P([X = r]) &= P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(r - \frac{1}{n} < x \leq r\right)\right) \\
&\Downarrow \text{(Teorema da continuidade)} \\
&= \lim_{n \to \infty} P\left(\left(r - \frac{1}{n} < x \leq r\right)\right) \\
&= \lim_{n \to \infty}\left(F(r) - F\left(r - \frac{1}{n}\right)\right) \\
&= F(r) - \lim_{n \to \infty} F\left(r - \frac{1}{n}\right) \\
P([X = r]) &= F(r) - \lim_{t \to r^-} F(t)
\end{aligned}$$

e) Seja $\mathcal{D}$ o conjunto de pontos de descontinuidades de F, e seja $\lim_{t \to x^-} F(t) = F(x^-)$. Logo:

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} : F(x) - F(x^-) > 0\}$$

Seja $\mathcal{D}_n$ o conjunto de pontos para os quais a amplitude do salto é maior ou igual a $\frac{1}{n}$. Logo:

$$\mathcal{D}_n = \left\{x \in \mathbb{R} : F(x) - F(x^-) \geq \frac{1}{n}\right\} \Rightarrow \#D = |D| \leq n$$

Se $x \in \mathcal{D} \Rightarrow \exists n_0 > 1 : F(x) - F(x^-) \geq \frac{1}{n_0} \Rightarrow x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}_n$. Se $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}_n \Rightarrow \exists n_1 : x \in \mathcal{D}_n \Rightarrow x \in \mathcal{D}$. $\mathcal{D}$ portanto é a união enumerável de conjuntos finitos, logo é enumerável.

□

3.2 Natureza das variáveis aleatórias

a) X é uma variável aleatória discreta se os valores que ela toma pertencem a um conjunto enumerável, logo $X : \Omega \to \{x_1, x_2, \ldots\}$ (ou seja, $X(\omega) \in \{x_1, x_2, \ldots\}, \forall \omega \in \Omega$) e $P : \{x_1, x_2, \ldots\} \to [0, 1]$ é dado por $P(x_i) = P\{\omega : \omega \in \Omega \text{ e } X(\omega) = x_i\} \forall i \geq 1$.

b) X é uma variável aleatória absolutamente contínua se $\exists f$ (uma função) tal que $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ e $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ (onde f é chamada de densidade de X).

Sob **(a)** temos que $[X \leq x] = \bigcup_{i:x_i \leq x}[X = x_i]$. Logo $F_x(x) = \sum_{i:x_i \leq x} P(x_i)$.
Sob **(b)** estamos afirmando que F_X é a integral de f (ou seja, f é a sua derivada) para todo x exceto em um conjunto de medida de Lebesgue nula, ou seja, se seu comprimento for zero ($\int_a^a f(t)dt = 0$). Ainda sob **(b)**, se f é uma função de densidade podemos definir $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ e F verifica:

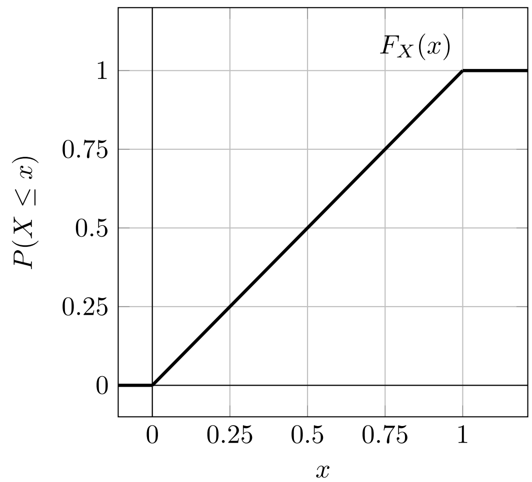
1. $x \leq y \Rightarrow F(x) \leq F(y)$;
2. Se $x_n \downarrow x \Rightarrow F(x_n) \downarrow F(x)$;
3. Se $x_n \downarrow -\infty \Rightarrow F(x_n) \downarrow 0$ e se $x_n \uparrow \infty \Rightarrow F(x_n) \uparrow 1$.

Dada uma variável aleatória com distribuição F_X, X tem densidade se:

(i) F_X é contínua;
(ii) F_X é derivável por partes (ou derivável no interior de um número finito ou enumerável de intervalos fechados cuja união é igual a $\mathbb{R}$), ou derivável para todo x exceto um número finito (enumerável) de pontos.

Example 3.3.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & x \in [0,1] \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

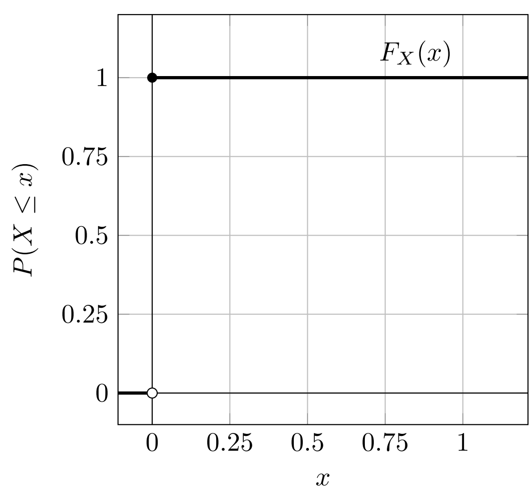


Notas:

- F_X é contínua;
- $\{0,1\}$ são pontos sem derivada;
- Podemos definir os seguintes intervalos em que F_X é derivável: $(-\infty, 0), (0,1), (1, \infty)$;
- $F'_X(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0,1) = f_X(x) \\ 0, & c.c. \end{cases}$;
- $f(0)$ e $f(1)$ podem ser definidos como zero ou um, já que tais definições não alteram $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$.

Em contrapartida, considere:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$



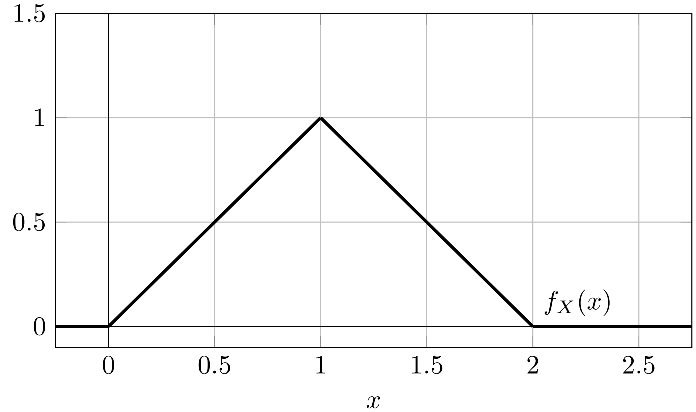
Notas:

- F_X não é contínua;

- $P(X = 0) = \lim_{x \to 0^+} F_X(x) - \lim_{x \to 0^-} F_X(x) = 1$.

Example 3.4. Considere a densidade triangular:

$$f_X(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 2 - x, & \text{se } 1 \leq x < 2 \\ 0 & c.c. \end{cases}$$



Por definição, $f(x) \geq 0 \ \forall x$. Para verificarmos que a probabilidade total é igual a um, podemos realizar a seguinte integração por partes:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{x} f_X(x)\mathrm{d}x &= \int_0^2 f_X(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 x\mathrm{d}x + \int_1^2 (2-x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + 2x\Big|_1^2 - \frac{x^2}{2}\Big|_1^2 \\
&= 1
\end{aligned}$$

O que demonstra que $f_X(x)$ é densidade de probabilidade.