Lista 01 - Linguagens Formais e Autômatos

Caio Nery, Gustavo de Oliveira, Linsmar Vital, Luca Argolo e Thiago Vieira

Questão 01 (Prova por contradição):

Sabendo que R é uma relação sobre o conjunto A , tal relação será de equivalência se ela é

- Reflexiva: se para todo $x \in A: \ < x, x > \in R (xRx)$
- Simétrica: se para quaisquer elementos $x, y \in A: \ < x, y > \in R \Rightarrow < y, x > \in R \ (xRy \ então \ yRx)$
- Transitiva: se para quaisquer elementos $x, y, z \in A: \ < x, y >, < y, z > \in R \Rightarrow < x, z > \in R \ (xRy \ e \ yRx \ então \ x = y)$

Então, seja A um conjunto e $R \subseteq AxA$, uma relação de equivalência, e $[x] \neq [y]$. Por ser uma relação de equivalência, se $\forall x, y \in A, \ < x, y > \ \rightarrow \ < y, x >$ (por simetria). Não obstante, se $\forall x, y, z \ \in A, \ < x, y > \ \wedge \ < y, \ z > \ \rightarrow \ < x, \ z >$ (por transitividade). Porém, $[x] \ \neq \ [y]$ é o mesmo que dizer $< x, y > \ \wedge \ < y, z > \ \rightarrow \ < x, z > \ não \ existe \ para \ algum \ x, y, z$, o que contradiz a definição de equivalência.

Questão 02

Temos que mostrar que para quaisquer w_1 , w_2 e w_3 .
$(w_1 \, . \, w_2) \, . \, w_3 = w_1 \, . \, (w_2 \, . \, w_3)$
Sendo uma concatenação de palavras e sabendo que uma palavra é uma sequência finita de elementos e que quando concatenamos duas palavras, o tamanho da palavra resultante é a soma do tamanho das duas palavras iniciais, então tomamos:

$$w_1 = a_1 a_2 \ldots a_{n_1} \, ,$$
$$w_2 = b_1 b_2 \ldots b_{n_2} \, ,$$
$$w_3 = c_1 c_2 \ldots c_{n_3}$$

$$w_1 \, . \, w_2 = d_1 \ldots d_{n_1 + n_2} \qquad \text{t.q} \qquad d_i = \{ \begin{array}{l} a_i \, , \, se \ i \ \leq \ n_1 \\ b_{n_1 - i} \, , \, se \ i \ > \ n_1 \end{array}$$

$$w_1 \, . \, w_2 = a_1 \ldots a_n b_1 \ldots b_{n_2}$$

$$(w_1 \, . \, w_2) \, . \, w_3 = l_1 \ldots l_{n_1 + n_2 + n_3} = a_1 \ldots a_{n_1} b_1 \ldots b_{n_2} c_1 \ldots c_{n_3}$$
t.q $l_i = \{ \ a_1$, se i $\leq n_1$

b_{n_1-i} , se n_1 < i $\leq$ n_2

c_{n_2-i} , se 1 $>$ n_2

$w_2 . w_3 = t_1 ... t_{n_2+n_3}$ t.q $t_i = \{b_i$, se i $\leq n_2$

c_{n_2-i} , se 1 $> n_2$

w_1 . (w_2 . w_3) = $f_1 \ldots f_{n_1+n_2+n_3}$ = $a_1 \ldots a_{n_1} b_1 \ldots b_{n_2} c_1 \ldots c_{n_3}$

t.q l_i ={ a_1 , se i $\leq n_1$

b_{n_1-i} , se n_1 < i $\leq$ n_2

c_{n_2-i} , se 1 $>$ n_2

Como o resultado de ambas concatenações, resultam na mesma palavra, logo mostramos que a associatividade se aplica.

Questão 3

Sabendo que uma linguagem sobre Σ é um conjunto qualquer sobre esse alfabeto e sejam w_i , tal que $i \in N$, palavras sobre o mesmo alfabeto e pertencentes a linguagem L .

Considerando que $\lambda \in L$, logo λ que é um elemento nulo, vai ser um elemento de L $L = \{\lambda, w_1, w_2, ...\}$.

Como o fecho de kleene de L é a linguagem $L^* = \bigcup_{i \, \varepsilon \, N} L^i$, ou seja, a união de todas as potências de L , temos que

$L^* = L^0 \cup L^1 \cup L^2 ...$

$L^* = \{\lambda\} \cup \{\lambda, w_1, w_2, ...\} \cup \{\lambda, w_1, w_2, ...\} \cup ...$

$L^* = \{\lambda, w_1, w_2, ...\}$

Sabendo que a potência de L , $L^0 = \{\lambda\}$ e que pela propriedade de elemento nulo, a concatenação de λ só resultará em λ, se $\lambda . \lambda = \lambda$. Logo ao analisarmos L^+ , encontramos que

$L^+ = L . L^*$

$L^+ = \{\lambda, w_1, w_2, ...\} . (L^0 \cup L^1 \cup L^2 ...)$

$L^+ = \{\lambda, w_1, w_2, ...\} \,.\, \{\lambda\} \cup \{\lambda, w_1, w_2, ...\} \cup \{\lambda, w_1, w_2, ...\} \cup ...$
$L^+ = \{\lambda, w_1, w_2, ...\} \,.\, \{\lambda, w_1, w_2, ...\}$
$L^+ = \{\lambda, w_1, w_2, ...\}$

Desta forma, um dos elementos de L^+ será λ, pois ocorrerá a concatenação do λ existente em L e do λ existente em L^*. E como L^* , por definição, é a união de todas as potências de L tendendo ao infinito, podemos afirmar que os elementos resultantes de $L \,.\, L^*$ já existem em L^* , dessa forma concluimos que $L^+ = L^*$.

Entretanto se $\lambda \notin L$, a linguagem L será um conjunto de elementos diferentes de λ.
$L = \{w_1, w_2, ...\}$
Dessa forma, temos que:
$L^+ = L \,.\, L^*$
$L^+ = L \,.(L^0 \cup L^1 \cup L^2 ...)$
$L^+ = \{w_1, w_2, ...\} \,.\, \{\lambda\} \cup \{w_1, w_2, ...\} \cup \{w_1w_1, w_1w_2, ...\} \cup ...$

Sabendo que λ é um elemento neutro, então para qualquer palavra w_i, temos que $w.\lambda = \lambda.w =$ w , logo
$L^+ = \{w_1, w_2, ...\} \,.\{\lambda, w_1, w_2, ..., w_1w_1, w_1w_2, ...\}$
$L^+ = \{w_1, w_1w_1,$
$w_1w_2, ..., w_1w_1w_1, w_1w_1w_2, ..., w_2, w_2w_1, w_2w_2, ..., w_2w_1w_1, w_2w_1w_2, ...\}$

Dessa forma, podemos constatar que λ não pertence a L^+ e sabendo que
$L^* = L^0 \cup L^1 \cup L^2 \cup ...$
$L^* = \{\lambda\} \cup \{w_1, w_2, ...\} \cup \{w_1w_1, w_1w_2, ...\} \cup ...$
$L^* = \{ \lambda, w_1, w_2, ..., w_1w_1, w_1w_2, ..., w_1w_1w_1, w_1w_1w_2, ...\}$

Podemos concluir que,
$L^* \setminus \{\lambda\} = \{w_1, w_2, ..., w_1w_1, w_1w_2, ..., w_1w_1w_1, w_1w_1w_2, ...\}$

Que são os mesmos elementos presentes em L^+. De outra forma, podemos dizer que
$L^* = L^+ \cup \{\lambda\}$
E como o nosso L^* não possui λ como elemento, logo
$L^* \setminus \{\lambda\} = L^+$

Assim, se $\lambda \in L$, $L^+ = L^*$ e que se $\lambda \notin L$, então $L^+ = L^* \setminus \{\lambda\}$.

Questão 4

L1: Seja uma linguagem $L = \{a, b\}$ sobre o alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$, iremos adaptar então o fecho de Kleene, que é a união de todas a potências de uma linguagem, para que apenas unamos as potências de L onde $L^{3\times i}$ da seguinte forma

$$w = \bigcup_{i\varepsilon N} L^{3\times i}$$

Prova:
Quando $L = \{a, b\}$:
Pela definição da operação de potenciação, a qual define como potência de uma linguagem L a linguagem

$$L^i = \{ \lambda, \quad se\ i = 0$$
$$L^{i-1}.L,\ se\ i > 0$$

E definimos nossa linguagem L contendo apenas palavras com cardinalidade um, podemos dizer que o expoente é igual a cardinalidade de todas as palavras no conjunto. i.e.:
$L = \{a, b\}$,
$L^2 = \{aa, ab, ba, bb\}$,
$L^3 = \{aaa, aab, aba, abb, baa, bab, bba, bbb\}$
…

Provando que todas as palavras contidas no fecho w tem cardinalidade mod 3 = 0.

Para provar que todas as palavras de cardinalidade três estão contidas no fecho:

(Por contradição)
Seja $p1 \in \Sigma^*$ de cardinalidade $mod\ 3 = 0,\ e\ não\ existente\ em\ w$. Pela maneira que nós definimos L, é preciso que uma palavra de cardinalidade três esteja em uma potência de três de L. i.e:
$p1\ \varepsilon\ L^{mod\ 3 = 0}$. Porém, o enunciado da prova nos diz que uma palavra assim não pode existir, logo, um absurdo.

L2: Para podermos descrever a linguagem L_2 usando operações sobre linguagens, iremos considerar que existem duas linguagens $A_1, A_2 \subseteq \Sigma^*$, onde $A_1 = \{aaa\}$ e $A_2 = \{bbb\}$. Além disso, sabendo que o w' pode ser qualquer palavra no conjunto de palavras do alfabeto $w' \in \Sigma^*$, sabendo que $\Sigma = \{a, b\}$, podemos afirmar então que w' pode ser o fecho de

Kleene de uma linguagem $A_3 = \{a, b\}$, já que o fecho é a união de todas as potências da linguagem A_3, temos que

$$A_3^* = \bigcup_{i \,\varepsilon\, N} A_3^i$$
$$A_3^* = A_3^0 \cup A_3^1 \cup A_3^2 \cup ...$$
$$A_3^* = \{\lambda\} \cup \{a, b\} \cup \{aa, ab, ba, bb\} \cup ...$$

Dessa forma, podemos concluir que podemos usar concatenação e o fecho de Kleene para descrever L_2 da seguinte forma

$$w = A_1 \,.\, A_3^* \,.\, A_2$$
$$w = \{aaa\} .\, w' .\{bbb\}$$

L3: Para conseguirmos descrever a linguagem L_3 usando operações sobre linguagens, precisamos delimitar que as palavras presentes na linguagem não possuem a subpalavra "bba" e controlar os casos que "a" aparece, de forma que ele só apareça em quantidades pares.

Podemos então considerar que a linguagem L_3 é formada pela potência de uma linguagem que possui 2 elementos que serão a base para descrever $L_3,\ L = \{aa,\ aba\}$.

Dessa forma, sabendo que sendo $L \subseteq \Sigma^*$ uma linguagem sobre o alfabeto Σ e $i \in N$, podemos definir a potência da seguinte forma:

$$L^i = \{ \begin{array}{l} \lambda,\ se\ i = 0 \\ L^{i-1}.\, L,\ se\ i > 0 \end{array}$$

Logo, se aplicarmos algumas potências:

$$L^0 = \{\lambda\}$$
$$L^1 = \{aa,\ aba\}$$
$$L^2 = \{aaaa,\ aaaba,\ abaaa,\ abaaba\}$$
...

Portanto, se usarmos o Fecho de Kleene de L, ficamos com a linguagem $L^* = \bigcup_{i \,\varepsilon\, N} L^i$, que é a união de todas as potências de L. Podemos perceber que não existem palavras com uma quantidade par de "a" e nem palavras com a subpalavra "bba".

$$L^* = L^0 \cup L^1 \cup L^2 \cup ...$$
$$L^* = \{\lambda\} \cup \{aa,\ aba\} \cup \{aaaa,\ aaaba,\ abaaa,\ abaaba\} \cup ...$$
$$L^* = \{\lambda,\ aa,\ aba\ ,\ aaaa,\ aaaba,\ abaaa,\ abaaba,\ ...\}$$

Desta maneira, podemos descrever $L3$ como uma potência da linguagem $L = \{aa,\ aba\}$.