Sistema de Equações Algébricas Lineares

GAUSS-JORDAN

O método de Gauss-Jordan é uma variação da eliminação de Gauss.

• A maior diferença é que, quando uma variável é eliminada no método de GAUSS-JORDAN , ela é eliminada de todas as outras equações, não só das posteriores.

• **Todas as linhas são normalizadas pela divisão pelo seu elemento pivô**. **Então, o passo de eliminação resulta na matriz identidade e não na matriz triangular.**

• Consequentemente não é necessário usar a substituição regressiva para obter o resultado.

Sistema de Equações Algébricas Lineares

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \vdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \vdots & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \vdots & b_3 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & b_1^{(n)} \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & b_2^{(n)} \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & b_3^{(n)} \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad &= b_1^{(n)} \\ x_2 \qquad &= b_2^{(n)} \\ x_3 &= b_3^{(n)} \end{aligned}$$

GAUSS-JORDAN

O sobrescrito (n) significa que o elemento direito do lado direito da equação foi modificano n vezes.

Para esse caso, n=3.

Sistema de Equações Algébricas Lineares

Método GAUSS-JORDAN

Use a técnica de Gauss-Jordan para resolver o sistema.

$$
\begin{aligned}
3x_1 \quad & -0,1x_2 & -0,2x_3 &= 7,85 \\
0,1x_1 \quad & \quad 7,x_2 & -0,3x_3 &= -19,3 \\
0,3x_1 \quad & -0,2x_2 & +10x_3 &= 71,4
\end{aligned}
$$

Sistema de Equações Algébricas Lineares

Solução: Primeiro, expresse os coeficientes e as contantes do lado direito da equação como uma matriz aumentada

$$\begin{bmatrix} 3 & -0,1 & -0,2 & 7,85 \\ 0,1 & 7 & -0,3 & -19,3 \\ 0,3 & -0,2 & 10 & 71,4 \end{bmatrix}$$

Normalize a primeira linha dividindo-a, pelo elemento pivô 3, para obter.

$$\begin{bmatrix} 1 & -0,0333333 & -0,066667 & 2,61667 \\ 0,1 & 7 & -0,3 & -19,3 \\ 0,3 & -0,2 & 10 & 71,4 \end{bmatrix}$$

Sistema de Equações Algébricas Lineares

O termo x_1 pode ser eliminado da segunda linha subtraindo 0,1 vezes a primeira linha da segunda. De maneira semelhante, subtraindo 0,3 vez a primeira linha da terceira linha iremos eliminar o termo x da terceira linha

$$\begin{bmatrix} 1 & -0,0333333 & -0,066667 & 2,61667 \\ 0 & 7,00333 & -0,293333 & -19,5617 \\ 0 & -0,190000 & 10,02 & 70,6150 \end{bmatrix}$$

Normalize a segunda linha dividindo-a, pelo elemento 7,003333, para obter.

$$\begin{bmatrix} 1 & -0,0333333 & -0,066667 & 2,61667 \\ 0 & 1 & -0,0418848 & -2,79320 \\ 0 & -0,190000 & 10,02 & 70,6150 \end{bmatrix}$$

Sistema de Equações Algébricas Lineares

A redução do termo $\mathbf{x_2}$ **da primeira** e **terceira linhas** resulta em:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -0{,}0680629 & 2{,}52356 \\ 0 & 1 & -0{,}0418848 & -2{,}79320 \\ 0 & 0 & 10{,}0120 & 70{,}0843 \end{bmatrix}$$

A terceira linha é então normalizada dividindo-se por 10,0120.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -0{,}0680629 & 2{,}52356 \\ 0 & 1 & -0{,}0418848 & -2{,}79320 \\ 0 & 0 & 1 & 7{,}0000 \end{bmatrix}$$

Sistema de Equações Algébricas Lineares

Finalmente, **o termo x_3 pode ser reduzido** da **primeira e segunda** equações resultando:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2,50 \\ 0 & 0 & 1 & 7,0000 \end{bmatrix}$$

Assim, a matriz dos coeficientes foi transformada na matriz identidade e a solução é obtida no vetor do lado direito.

- **Não é necessário a substituição regressiva para obter a solução.**

- **A estratégia de pivotamento pode ser usada para evitar a divisão por zero e reduzir erros de arredodamento**.

- **O método de Gauss-Jordan envolve aproximadamente 50% a mais operações do que a eliminação de Gauss**.

Sistema de Equações Algébricas Lineares

DECOMPOSIÇÃO LU

São métodos de eliminação.

- **O interesse principal da decomposição LU é que o passo de eliminação que consome muito tempo, pode ser formulado de modo que envolva apenas operações na matriz dos coeficientes, [A]**.

- **Vamos nos concentrar em mostrar como o método de Eliminação de Gauss pode ser implementado como uma decomposição LU.**

- **Um motivo para introduzir a decomposição LU é que ela fornece uma** maneira eficiente de calcular a matriz inversa, **a qual tem um grande número de aplicações valiosas na prática da engenharia.**

Sistema de Equações Algébricas Lineares

DECOMPOSIÇÃO LU

A eliminação de Gauss é projetada para resolver sistemas de equações algébricas lineares,

$$[A]\{X\} = \{B\} \qquad (1)$$

A eliminação de Gauss envolve dois passos: **eliminação progressiva e substituição regressiva**.

Métodos de decomposição LU **separam a eliminação da matriz [A]**, que consome tempo, **das manipulações do lado direito {B}.**

Assim, uma vez que [A] tenha sido decomposta, **vetores múltiplos à direita podem ser calculados de maneira eficiente.**

Sistema de Equações Algébricas Lineares

DECOMPOSIÇÃO LU

Visão geral da Decomposição LU

Assim como na Eliminação de Gauss, **a decomposição LU requer o pivotamento para se evitar divisões por zero.**

Entretanto, para simplificar a descrição a seguir, a questão do pivotamento será adiada até a que a abordagem principal seja elaborada.

A explicação seguinte é limitada a 3 equações simultâneas.

Os resultados podem ser estendidos para um sistema de n dimensões.

A equação (1) pode ser reorganizada como:

$$[A]\{X\}-\{B\}=0 \qquad (2)$$

Sistema de Equações Algébricas Lineares

DECOMPOSIÇÃO LU

Suponha que a Equação (2) possa ser escrita como um sistema triangular superior:

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix} \qquad (3)$$

Perceba que isso é similar aos cálculos do primeiro passo da Eliminação de Gauss. Ou seja, a eliminação é usada para reduzir o sistema a uma forma triangular superior. A equação (3) também pode ser escrita em notação matricial e reorganizada para dar:

$$[U]\{X\} - \{D\} = 0 \qquad (4)$$

Sistema de Equações Algébricas Lineares

DECOMPOSIÇÃO LU

Agora **suponha que exista uma matriz triangular inferior com 1's na diagonal**;

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \qquad (5)$$

Que tenha a propriedade de que, quando o primeiro membro da Equação (4) for multiplicado à esquerda por ela, **o resultado seja o primeiro membro da Equação (2)**.

Isto é,

$$[L]\left\{[U]\{X\}-\{D\}\right\} = [A]\{X\}-\{B\} \qquad (6)$$

DECOMPOSIÇÃO LU

Se a equação for válida para todo {X}, segue das regras da multiplicação de matrizes que:

$$[L][U]=[A] \qquad (7)$$

e

$$[L]\{D\}=\{B\} \qquad (8)$$

Sistema de Equações Algébricas Lineares

DECOMPOSIÇÃO LU

Uma estratégia de dois passos para obter soluções pode basear-se nas equações (4), (7) e (8).

1. **Passo de decomposição LU**. [A] é fatorada ou “decomposta” em matrizes triangulares inferior [L] e superior [U].

2. **Passo de substituição**. [L] e [U] são usadas para determinar a solução {X} para um lado direito {B}. Esse passo consiste em duas etapas. Primeiro, a equação (8) é usada para gerar um vetor intermediário {D} por substituição progressiva. A seguir, o resultado é substituído em (4), **que pode ser resolvida por substituição regressiva, determinando-se {X}**.

Sistema de Equações Algébricas Lineares

DECOMPOSIÇÃO LU

$$(a)\,Decomposição\begin{cases} [A]\{X\} = \{B\} \\ [U] \quad [L] \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} &\underbrace{[L]\quad[D] = \{B\}}_{[D]} \Big\}\ (b)\,\mathrm{Pr}\,ogressiva \\ &\underbrace{[U]\quad\{X\} = \{D\}}_{\{X\}} \Big\}\ (c)\,\mathrm{Re}\,gressiva \end{aligned}\right\}\ Substituição$$

Sistema de Equações Algébricas Lineares

A Eliminação de Gauss pode ser usada para decompor [A] em [L] e [U]. Isso pode ser visto facilmente para [U], que é um produto direto da eliminação progressiva.

Lembremos que o passo de eliminação progressiva tem por objetivo reduzir a matriz original dos coeficientes [A] para a forma

$$[U] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} \\ 0 & 0 & a''_{33} \end{bmatrix} \qquad (9)$$

Que está na forma triangular superior procurada.

Embora possa não ser tão aparente, a matriz [L] também é produzida durante esta etapa

Sistema de Equações Algébricas Lineares

Isso pode ser prontamente ilustrado para um sistema de três equações.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix}$$

A primeira etapa da eliminação de Gauss é multiplicar a linha 1 pelo fator:

$$f_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}}$$

E subtrair o resultado da segunda linha para eliminar $\mathbf{a_{21}}$. **Analogamente, a linha 1 é multiplicada por**

$$f_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}}$$

E o resultado da terceira linha para eliminar $\mathbf{a_{31}}$.

Sistema de Equações Algébricas Lineares

O passo final é multiplicar a segunda linha modificada por:

$$f_{32} = \frac{a_{32}^{'}}{a_{22}^{'}}$$

E subtrair o resultado da terceira linha para eliminar $\mathbf{a_{32}'}$.

Agora suponha que foram efetuadas todas essas manipulações na matriz [A]. Claramente, se não se quer modificar a equação, também deve-se fazer o mesmo com o lado direito {B}. Mas não há nenhuma razão que obrigue a efetuar essas operações simultâneamente. Assim, **pode-se salvar os f ‘s e manipular {B} depois**.

Onde serão armazenados os fatores f_{21} , f_{31} e f_{32} ?

Lembremos, a idéia era criar zeros em a_{21} , a_{31} e a_{32} . Assim, é possível armazenar f_{21} em a_{21} , f_{31} em a_{31} e f_{32} em a_{32} . Depois da eliminação, a matriz [A] poderia, portanto, ser escrita como:

Sistema de Equações Algébricas Lineares

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ f_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ f_{31} & f_{32} & a''_{33} \end{bmatrix} \qquad (10)$$

Essa matriz, de fato, representa um armazenamento eficiente da decomposição LU de [A]

$$[A] \rightarrow [L][U] \qquad (11)$$

Onde:

Sistema de Equações Algébricas Lineares

$$[U] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} \\ 0 & 0 & a''_{33} \end{bmatrix}$$

e

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ f_{21} & 1 & 0 \\ f_{31} & f_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

O exemplo a seguir confirma que [A]=[L][U].

Sistema de Equações Algébricas Lineares

Obtenha a decomposição LU baseada na eliminação de Gauss efetuada para o caso ingênuo.

Solucão: **No exemplo de eliminação de Gauss ingênua foi resolvido o seguinte sistema com a matriz:**

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -0,1 & -0,2 \\ 0,1 & 7 & -0,3 \\ 0,3 & -0,2 & +10 \end{bmatrix}$$

Após a eliminação progressiva, foi obtida a seguinte matriz triangular superior:

$$U = \begin{bmatrix} 3 & -0,1 & -0,2 \\ 0 & 7,0033 & -0,293333 \\ 0 & 0 & 10,0120 \end{bmatrix}$$

Sistema de Equações Algébricas Lineares

Os fatores empregados para obter a matriz triangular superior podem ser reunidos em uma matriz triangular inferior. Os ***elementos a_{21} e a_{31} foram eliminados usando-se os fatores***

$$f_{21} = \frac{0,1}{3} = 0,0333333 \quad e \quad f_{31} = \frac{0,3}{3} = 0,1000000$$

e o elemento ***a_{32}' foi eliminado usando-se o fator***:

$$f_{32} = \frac{-0,19}{7,00333} = -0,0271300$$

Assim a matriz triangular inferior é:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0,0333333 & 1 & 0 \\ 0,1000000 & -0,0271300 & 1 \end{bmatrix}$$

Sistema de Equações Algébricas Lineares

Consequentemente, a decomposição LU é:

$$[A]=[L][U]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0,0333333 & 1 & 0 \\ 0,1000000 & -0,0271300 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -0,1 & -0,2 \\ 0 & 7,0033 & -0,293333 \\ 0 & 0 & 10,0120 \end{bmatrix}$$

Esse resultado pode ser verificado efetuando-se a multiplicação [L][U] para obter

$$[L][U]=\begin{bmatrix} 3 & -0,1 & -0,2 \\ 0,0999999 & 7 & -0,3 \\ 0,3 & -0,2 & 9,99999 \end{bmatrix}$$

Cujas pequenas discrepâncias se devem a erros de arrendondamento.

A seguir tem-se um pseudo código para uma sub-rotina que implemente a fase de decomposição.

Sistema de Equações Algébricas Lineares

```
SUB Decomp (a,n)
    DOFOR k = 1, n-1
        DOFOR i= k+1,n
            fator = a_{i,k} / k_{k,k}
            a_{i,k} = fator
            DOFOR j = k+1,n
                a_{i,j} = a_{i,j} - fator* a_{k,j}
            ENDO
        ENDO
    ENDO
END Decomp
```

Sistema de Equações Algébricas Lineares

Depois que a matriz é decomposta, pode-se produzir uma solução para um valor particular do vetor {B} à direita, o que é feito em duas etapas.

1. ***Primeiro uma substituição progressiva é executada, resolvendo-se (8) para {D}.***

   É importante reconhecer que isso simplesmente significa efetuar as manipulações da eliminação em {B}. Assim, ao final desse passo, o lado direito estará no mesmo estado em que estaria em que estaria se tivesse sido efetuada a eliminação progressiva em [A] e {B} simultaneamente.

A substituição progressiva pode ser representado de modo conciso por:

$$d_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} d_j \quad para \quad i = 2, 3, \ldots, n \quad (12)$$

Sistema de Equações Algébricas Lineares

2. O segundo passo, consiste em efetuar a substituição regressiva, como na Equação (4). **Similar a Eliminação de Gauss convencional**.

$$x_n = \frac{d_n}{a_{nn}} \qquad (13)$$

$$x_i = \frac{d_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j} x_j}{a_{ii}} \quad para \quad i = n-1, n-2, \ldots, 1 \qquad (14)$$

Sistema de Equações Algébricas Lineares

Os passos de substituição

Complete o problema anterior, determinando a solução final por substituição progressiva e regressiva.

Solução: O objetivo da substituição progressiva é impor as manipulações da eliminação, que foram aplicadas anteriormente a [A], no vetor do lado direito, {B}.

Lembre-se que o sistema resolvido anteriormente é:

$$\begin{bmatrix} 3 & -0,1 & -0,2 \\ 0,1 & 7 & -0,3 \\ 0,3 & -0,2 & +10 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 7,85 \\ -19,3 \\ 71,4 \end{Bmatrix}$$

Sistema de Equações Algébricas Lineares

E que a fase da Eliminação progressiva da Eliminação de Gauss convencional resultou em:

$$\begin{bmatrix} 3 & -0,1 & -0,2 \\ 0 & 7,00333 & -0,293333 \\ 0 & 0 & 10,0120 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 7,85 \\ -19,5617 \\ 70,0843 \end{Bmatrix} \qquad (1.1)$$

A fase da substituição progressiva é implementada aplicando-se a equação (8), [L]{D}={B}, ao problema.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0,0333333 & 1 & 0 \\ 0,1000000 & -0,0271300 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 7,85 \\ -19,3 \\ 71,4 \end{Bmatrix}$$

Sistema de Equações Algébricas Lineares

Ou multiplicando o lado esquerdo,

$$\begin{aligned} d_1 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad &= 7,85 \\ 0,0333333d_1 \qquad + d_2 \qquad\qquad &= -19,3 \\ 0,100000\ d_1 \quad - 0,02713d_2 \quad + d_3 &= 71,4 \end{aligned}$$

Pode-se determinar d_1 a partir da primeira equação.

d_1 = 7,85

O que pode ser substituído na segunda equação para determinar

$$d_2 = -19,3 - 0,0333333(7,85) = -19,5617$$

Ambos, d_1 e d_2 , podem então ser substituídos na terceira equação para dar

$$d_3 = 71,4 - 0,1(7,85) \quad + 0,02713(-19,5617) = 70,0843$$

Sistema de Equações Algébricas Lineares

Assim,

$$\{D\} = \begin{Bmatrix} 7,85 \\ -19,5617 \\ 70,0843 \end{Bmatrix}$$

Que é idêntico ao lado direito de (1.1).

Esse resultado pode ser substituído em (4), [U]{X}=[D], para dar:

$$\begin{bmatrix} 3 & -0,1 & -0,2 \\ 0 & 7,00333 & -0,293333 \\ 0 & 0 & 10,0120 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 7,85 \\ -19,5617 \\ 70,0843 \end{Bmatrix}$$

Sistema de Equações Algébricas Lineares

Que pode ser resolvida por substituição regressiva para determinar a solução final

$$\{X\} = \begin{Bmatrix} 3 \\ -2,5 \\ 7,00003 \end{Bmatrix}$$

A seguir tem-se um pseudo código para uma sub-rotina que implementa as duas fases da substituição

Sistema de Equações Algébricas Lineares

```
SUB Substituicao (a,n)
    // Substiuicao progressiva
  DOFOR  i= 2, n
      soma= b_i
      DOFOR   j= 1,i-1
          soma=soma -  a_i,j  * b_j
      ENDDO
      b_i  = soma
  ENDDO
        // Substiuicao regressiva
  x_n = b_n / a_n
  DOFOR  i= n-1, 1, -1
      soma= 0
      DOFOR   j= i+1,n
          soma=soma -+ a_i,j  *  x_j
      ENDDO
      x_i  =(b_i - soma)/ a_i,i
  ENDDO
END Substituicao
```

Sistema de Equações Algébricas Lineares

Algoritmo de Decomposição LU

Características:

- ***Os fatores gerados durante a fase de eliminação são armazenados na parte de baixo da matriz. Isto pode ser feito porque eles são transformados em zeros de qualquer forma e não são necessários para a solução final. O armazenamento economiza espaço.***

- ***Esse algoritmo mantém as informações do pivotamento usando um vetor de ordem o. Isso acelera bastante o algoritmo porque apenas o vetor de ordem (ao contrário de toda a linha), é pivotado.***

- ***As equações não sofrem mudança de escala, mas valores dos elementos em uma nova escala são usados para determinar quando o pivotamento dever implementado.***

- ***O termo diagonal é monitorado durante a fase de pivotamento para se detectar ocorrências próximas de zero para sinalizar sistemas singulares. Se ele devolver um valor er = -1, uma matriz singular foi detectada e os cálculos devem parar.***

O usuário escolhe um pequeno valor para um parâmetro tol com a finalidade de dectar ocorrências próximas a zero.