Sistema de Equações Algébricas Lineares

MATRIZES ESPECIAIS E GAUSS-SEIDEL

Motivação: Certas matrizes têm uma estrutura particular que pode ser explorada para desenvolver esquemas eficientes de solução:

- **Matrizes de banda (aqui será tratado o caso tridiagonal – Algoritmo de Thomas).**

Uma alternativa aos métodos de eliminação são os métodos iterativos de aproximação.

- **Método de Gauss-Sidel**

Sistema de Equações Algébricas Lineares

Sistemas Tridiagonais

Um sistema tridiagonal, isto é, que tenha largura de faixa 3 – pode ser expresso no caso geral por;

$$\begin{bmatrix} f_1 & g_1 & & & & & \\ e_2 & f_2 & g_2 & & & & \\ & e_3 & f_3 & g_3 & & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & e_{n-1} & f_{n-1} & g_{n-1} \\ & & & & & e_n & f_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{n-1} \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ r_{n-1} \\ r_n \end{Bmatrix} \qquad (1)$$

Sistema de Equações Algébricas Lineares

Sistemas Tridiagonais

A notação foi trocada de a's e b's para e's, f's g's e r's.

• Isso foi feito para evitar o armazenamento de grandes quantidades de zeros inúteis na matriz quadrada dos a's.

• Essa modificação tem o objetivo de economizar espaço (requer menos memória do computador) .

A seguir é mostrado um pseudo código para um método eficiente**, chamado de Algoritmo de Thomas,** para resolver (1) .

Sistema de Equações Algébricas Lineares

Sistemas Tridiagonais

Assim como na decomposição LU convencional, o algoritmo consiste em três passos: decomposição e substiuições progressiva e regressiva. Assim todas as vantagens da decomposição LU, são mantidas pela aplicação deste algoritmo.

a) Decomposição

DOFOR k = 2,n

$e_k = e_k / f_{k-1}$

$f_k = f_k - e_k \cdot g_{k-1}$

END DO

b) Substituição Progressiva

DOFOR k = 2,n

$r_k = r_k - e_k \cdot r_{k-1}$

END DO

c) Substituição Regressiva

$x_n = r_n / f_n$

DOFOR k = n-1,1,-1

$x_k = (r_k - g_k \cdot X_{k+1})/ f_k$

END DO

Sistema de Equações Algébricas Lineares

Solução Tridiagonal com o algoritmo de Thomas

Resolva o seguinte Sistema Tridiagonal com o algoritmo de Thomas.

$$\begin{bmatrix} 2,04 & -1 & & \\ -1 & 2,04 & -1 & \\ & -1 & 2,04 & -1 \\ & & -1 & 2,04 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 40,8 \\ 0,8 \\ 0,8 \\ 200,8 \end{Bmatrix}$$

Sistema de Equações Algébricas Lineares

Primeiro a decomposição é implementada por:

$$e_2 = -1/2{,}04 = -0{,}49$$

$$f_2 = 2{,}04 - (-0{,}49)(-1) = 1{,}550$$

$$e_3 = -1/1{,}550 = -0{,}645$$

$$f_3 = 2{,}04 - (-0{,}645)(-1) = 1{,}395$$

$$e_4 = -1/1{,}395 = -0{,}717$$

$$f_4 = 2{,}04 - (-0{,}717)(-1) = 1{,}323$$

Assim a matriz é transformada em:

$$\begin{bmatrix} 2{,}04 & -1 & & \\ -0{,}49 & 1{,}550 & -1 & \\ & -0{,}645 & 1{,}395 & -1 \\ & & -0{,}717 & 1{,}323 \end{bmatrix}$$

Sistema de Equações Algébricas Lineares

A decomposição LU é:

$$[A]=[L][U]=\begin{bmatrix}1 & & & \\ -0,49 & 1 & & \\ & -0,645 & 1 & \\ & & -0,717 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2,04 & -1 & & \\ & 1,550 & -1 & \\ & & 1,395 & -1 \\ & & & 1,323\end{bmatrix}$$

A Substituição progressiva é implementada por:

$$r_2 = 0,8-(-0,49)40,8 = 20,8$$

$$r_3 = 0,8-(-0,645)20,8 = 14,221$$

$$r_4 = 200,8-(-0,717)14,221 = 210,996$$

Sistema de Equações Algébricas Lineares

Portanto, o vetor do lado direito foi modificado para:

$$\begin{Bmatrix} 40,8 \\ 20,8 \\ 14,221 \\ 210,996 \end{Bmatrix}$$

O qual pode ser usado em combinação com a matriz [U] para se obter a substituiçã regressiva e obter a solução:

$$T_4 = 210,996/1,323 = 159,480$$

$$T_3 = [14,221-(-1)159,48]/1,395 = 124,538$$

$$T_2 = [20,800-(-1)124,538]/1,550 = 93,778$$

$$T_1 = [40,800-(-1)93,778]/2,040 = 65,970$$

Sistema de Equações Algébricas Lineares

GAUSS SEIDEL

Os métodos iterativos ou de aproximação fornecem uma alternativa aos métodos de substituição.

• Tais abordagens são similares ao métodos desenvolvidos para obter as raízes de uma única equação.

• **Aquelas abordagens consistiam em escolher um valor e então usar um método sistemático para obter uma estimativa refinada da raiz.**

• O método de Gauss-Seidel é o mais comumente usado.

Suponha que tenhamos um conjunto de n equações

$$[A]\{X\} = \{B\}$$

Sistema de Equações Algébricas Lineares

GAUSS SEIDEL

Para efeitos de praticidade vamos limitar a abordagem a um conjunto de 3x3 equações.

- Se os elementos da diagonal forem não nulos, é possível isolar x_1 na primeira equação, x_2 na segunda e x_3 na terceira para obter:

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3}{a_{11}} \qquad (2.1)$$

$$x_2 = \frac{b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3}{a_{22}} \qquad (3.1)$$

$$x_3 = \frac{b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2}{a_{33}} \qquad (4.1)$$

Sistema de Equações Algébricas Lineares

GAUSS SEIDEL

O processo incia-se com a escolha das aproximações para os x ‘s.

• Uma forma simples de obter aproximações iniciais é supor que elas são todas nulas.

• **Esses zeros podem ser substituídos na equação (2) para obter-se $x_1 = b_1 / a_{11}$.**

• Então, substitui-se esse novo valor de x_1 junto com a aproximação anterior nula para x_3 na equação (3) para calcular o novo valor para x_2 .

• **O processo é repetido para a equação (3) para se calcular uma nova estimativa para x_3.**

• Então, retorna-se para a primeira equação e o procedimento inteiro é repetido até que a solução convirja para valores próximos dos valores verdadeiros.

Sistema de Equações Algébricas Lineares

GAUSS SEIDEL

A convergência pode ser verificada usando-se o critério:

$$\left|\varepsilon_{a,i}\right| = \left|\frac{x_i^j - x_i^{j-1}}{x_i^j}\right| \times 100\% < \varepsilon_s \qquad (5)$$

Para todo i, onde j e j-1 representam a iteração atual e anterior.

Sistema de Equações Algébricas Lineares

Use o método de Gauss-Seidel para obter a solução do sistema:

$$
\begin{aligned}
3x_1 \quad - 0,1x_2 \quad - 0,2x_3 &= 7,85 \\
0,1x_1 \quad 7,x_2 \quad - 0,3x_3 &= -19,3 \\
0,3x_1 \quad - 0,2x_2 \quad + 10x_3 &= 71,4
\end{aligned}
$$

Lembre-se de que a solução verdadeira é $x_1 = 3$, $x_2 = -2,5$ e $x_3 = 7$

Solução: Isolar em cada uma das equações a variável da diagonal.

$$x_1 = \frac{7,85 + 0,1x_2 + 0,2x_3}{3} \qquad (2.1)$$

$$x_2 = \frac{-19,3 - 0,1x_1 + 0,3x_3}{7} \qquad (3.1)$$

$$x_3 = \frac{71,4 - 0,3x_1 + 0,2x_2}{10} \qquad (4.1)$$

Sistema de Equações Algébricas Lineares

GAUSS SEIDEL

Supondo-se que x_2 e x_3 são iguais a zero, a equação (2.1) resulta:

$$x_1 = \frac{7,85 + 0 + 0}{3} = 2,616667$$

Esse valor, junto com o valor suposto de x = 0, pode ser substituído em (3.1).

$$x_2 = \frac{-19,3 - 0,1(2,616667) + 0}{7} = -2,794524$$

A primeira iteração é completada substituindo-se os valores calculados de x_1 e x_2 na equação (4.1)

$$x_3 = \frac{71,4 - 0,3(2,616667) + 0,2(-2,794524)}{10} = 7,005610$$

Sistema de Equações Algébricas Lineares

GAUSS SEIDEL

Para a segunda iteração, o mesmo processo é repetido para calcular:

$$x_1 = \frac{7,85 + 0,1(-2,794524) + 0,2(7,005610)}{3} = 2,990557 \qquad |\varepsilon| = 0,31\%$$

$$x_2 = \frac{-19,3 - 0,1(2,990557) + 0,3(7,005610)}{7} = -2,499625 \qquad |\varepsilon| = 0,015\%$$

$$x_3 = \frac{71,4 - 0,3(2,990557) + 0,2(-2,499625)}{10} = 7,000291 \qquad |\varepsilon| = 0,0042\%$$

O método está, portanto, convergindo para a solução verdadeira.

Iterações adicionais podem ser aplicadas para melhorar as respostas.

Porém, a priori, em um problema real, a resposta verdadeira não é conhecida. A equação (5) fornece uma maneira de estimar o erro.

Sistema de Equações Algébricas Lineares

GAUSS SEIDEL

Por exemplo, para x_1 ,

$$\left|\varepsilon_{a,1}\right| = \left|\frac{2,990557 - 2,616667}{2,990557}\right| 100\% = 12,5\%$$

Por exemplo, para x_2 e x_3, as estimativas dos erros são, respectivamente.

$$\left|\varepsilon_{a,2}\right| = 11,8\%$$

$$\left|\varepsilon_{a,3}\right| = 0,076\%$$

A equação (5) garante que o resultado é conhecido dentro da tolerância especificada por ε_s.

Sistema de Equações Algébricas Lineares

Aprimoramento da Convergência Usando Relaxamento

O ***relaxamento***, representa uma pequena modificação no método Gauss-Seidel e foi criado para melhorar a convergência.

Após cada novo valor de x ser calculado usando-se (2), (3) e (4), esse valor é modificado por uma média ponderada dos resultados da iteração anterior e da atual :

$$x_i^{novo} = \lambda x_i^{novo} + (1-\lambda) x_i^{velho} \qquad (6)$$

Onde λ é um fator de peso para o qual deve ser escolhido um valor entre 0 e 2.

Se $\lambda = 1, (1-\lambda)$ é igual a 0, e o resultado é uma média ponderada do resultado atual e do anterior. Esse tipo de operação é chamado *sub-relaxamento* e é tipicamente usado para que um sistema que não converge passe a convergir, ou para acelerar a convergência amortecendo as oscilações.

Sistema de Equações Algébricas Lineares

Aprimoramento da Convergência Usando Relaxamento

Para valores de λ entre 1 e 2, peso extra é colocado no valor atual. Nesse caso, existe uma suposição implícita de que o novo valor está movendo-se na direção correta, mas a uma taxa muito lenta. Assim, o peso extra λ se presta a melhorar a estimativa aproximando-a do valor verdadeiro.

Esse tipo de modificação, chamado sobre-relaxamento, visa acelerar a convergência de um sistema já convergente. Esta abordagem também é chamada de SOR (*Sobre-Relaxamento Simultâneo ou Sucessivo*).

Exercício

1 – Use o método de Gauss-Seidel (a) sem relaxamento (b) com relaxamentc (Lambda=1,2) para resolver o seguinte sistema com tolerância de erro de 5%. Se necessário reorganize as equações para garantir a convergência.

$$
\begin{aligned}
2x_1 \quad -6x_2 \quad - x_3 &= -38 \\
-3x_1 \quad - x_2 \quad +7x_3 &= -34 \\
-8x_1 \quad + x_2 \quad -2x_3 &= -20
\end{aligned}
$$