INTERPOLAÇÃO

Interpolação

Motivação: Em certos momentos é necessário estimar valores intermediários **entre dados precisos.**

Lembremos que a fórmula geral para um polinômio de de grau n é:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \qquad (1)$$

Para n+1 pontos dados, existe um e somente um polinômio **de n que passa por todos os pontos.**

Exemplos:

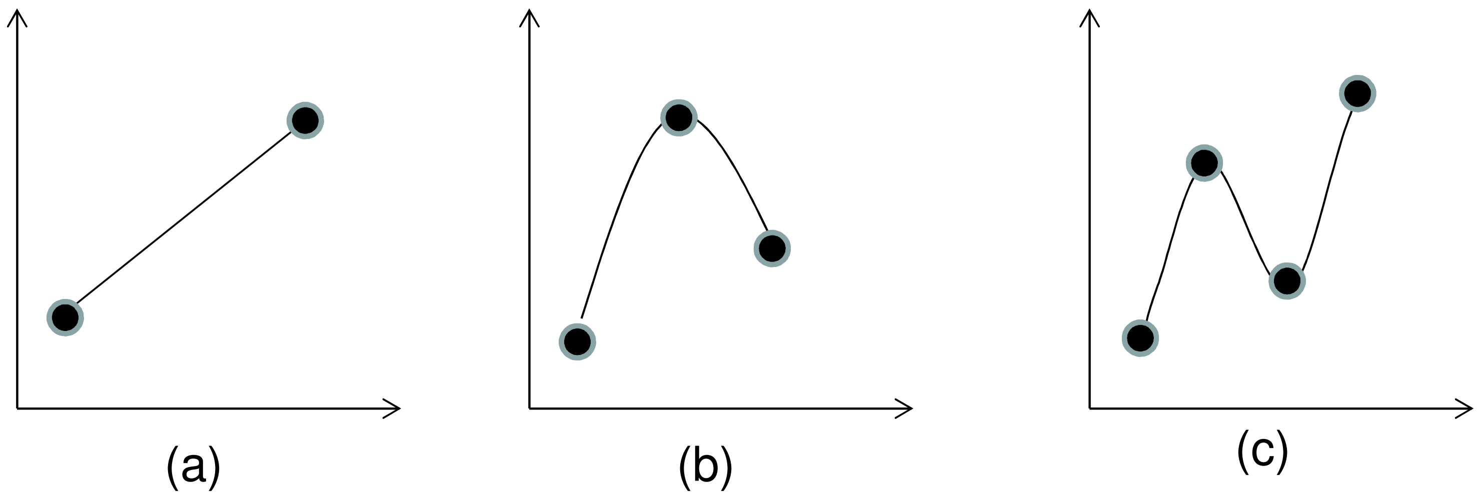
- Existe uma única reta que liga dois pontos (polinômio de primeiro grau).

- Existe uma única parábola ligando um conjunto de três pontos (pontos)

A ***Interpolação Polinomial*** **consiste em determinar o único polinômio de grau n que passa pelos n+1 pontos dados.**

- **Esse polinômio fornece uma fórmula para calcular os valores intermediários**.

INTERPOLAÇÃO



(a) De primeiro grau (linear) ligando dois pontos;

(b) **De segundo grau (quadrático) ligando três pontos;**

(c) **De terceiro grau (cúbico) ligando quatro pontos**.

INTERPOLAÇÃO

Interpolação

Embora existista um só polinômio de grau n que passa por n+1 pontos, há diversas fórmulas matemáticas nas quais esse polinômio pode ser expresso.

Trataremos de duas alternativas que são adequadas para implementação computacional:

- **Polinômios de Newton;**
- **Polinômios de Lagrange.**

INTERPOLAÇÃO

Polinômios Interpoladores por Diferenças Divididas de Newton

O polinômio interpolador por diferenças divididas de Newton está entre as fórmulas mais populares e úteis.

Veremos a interpretação gráfica:

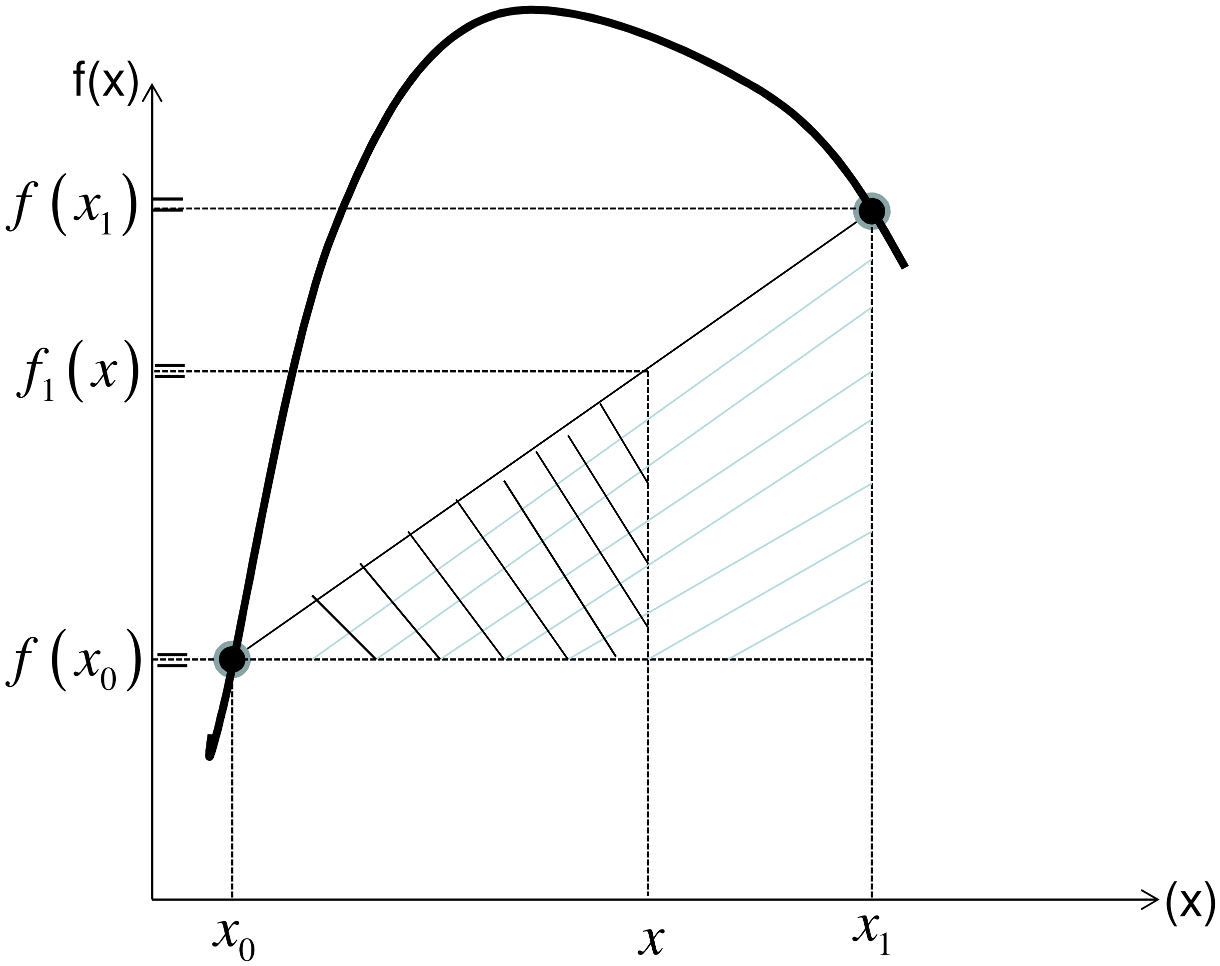
1 – Interpolação Linear

A forma mais simples de interpolação é ligar dois pontos de dados com uma reta. A técnica chamada de interpolação linear, descrita na figura seguinte. Usando semelhança de triângulos.

$$\frac{f_1(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \qquad (2)$$

A equacao (2) pode ser reorganizada para fornecer:

INTERPOLAÇÃO



Descrição gráfica de uma interpolação linear. As áreas hachuradas indicam triângulos semelhantes usados para deduzir a fórmula de interpolação linear.

INTERPOLAÇÃO

$$f_1(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) \qquad (3)$$

Que é a fórmula da interpolação linear:

A notação $f_1(x)$ indica que esse é um polinômio interpolador de primeiro grau.

O termo:

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Além de representar a inclinação da reta ligando os pontos, é uma aproximação por diferenças divididas da primeira derivada.

- **Em geral, quanto menor o intervalo entre os pontos dados , melhor a aproximação.**

- **Conforme o intervalo diminui, uma função contínua será mais bem aproximada por uma reta.**

INTERPOLAÇÃO

Faça uma estimativa do logaritmo natural de 2 usando uma interpolação linear.

Primeiro, faça o cálculo interpolando entre ln 1=0 e ln 6 = 1,791759.

Então, repita o procedimento, mas use o intervalo menor de ln 1 =0 a ln 4=(1,386294).

Observe que o valor verdadeiro de ln 2 é 0,6931472.

Solução: Usamos a equação (3):

$$f_1(2) = 0 + \frac{1,791759 - 0}{6 - 1}(2 - 1) = 0,3583519$$

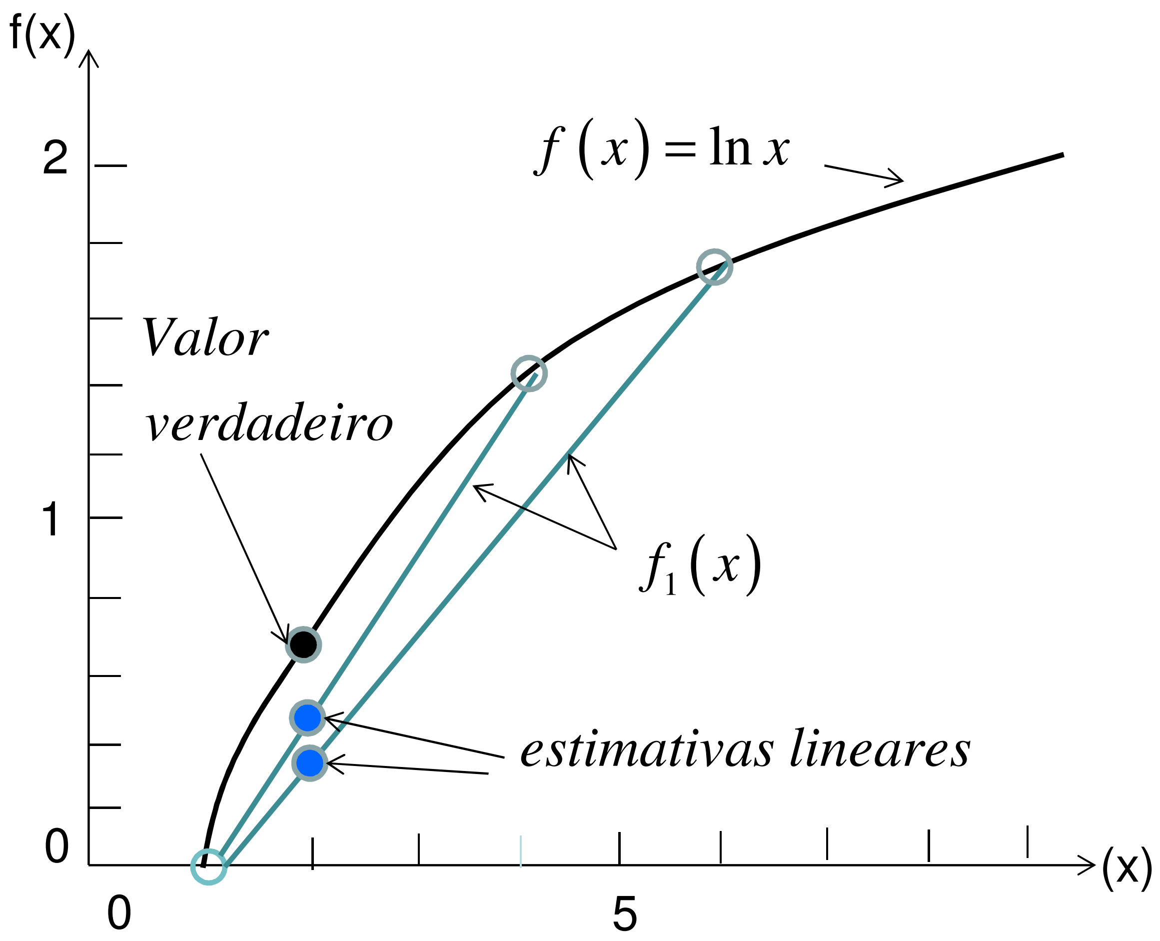
O que representa um erro de 48,3%. O uso do intervalo menor de $\mathbf{x_0 = 1}$ **a** $\mathbf{x_1 = 4}$ fornece:

$$f_1(2) = 0 + \frac{1,386294 - 0}{4 - 1}(2 - 1) = 0,4620981$$

Logo, **o uso do intervalo menor reduz o erro relativo percentual** para 33%.

Ambas interpolações são mostradas na figura seguinte.

INTERPOLAÇÃO



INTERPOLAÇÃO

2 – Interpolação Quadrática

O erro do exemplo anterior resultou de se aproximar por uma curva reta. Consequentemente **uma estratégia para melhorar a estimativa é introduzir alguma curvatura na curva** ligando os pontos.

Se estiverem disponíveis três pontos, **isso pode ser conseguido com um polinômio de segundo grau** (quadrático).

Uma fórmula conveniente para este proposito é:

$$f_2(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) \quad (4)$$

A equação (4) é equivalente a ao polinômio geral representado na equação (1). Para verificar isto basta multiplicar os termos de (4)

$$f_2(x) = b_0 + b_1 x - b_1 x_0 + b_2 x^2 + b_2 x_0 x_1 - b_2 x x_0 - b_2 x x_1$$

INTERPOLAÇÃO

2 – Interpolação Quadrática

Ou, **agrupando os termos**:

$$f_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

Onde:

$$a_0 = b_0 - b_1 x_0 + b_2 x_0 x_1$$

$$a_1 = b_1 - b_2 x_0 + b_2 x_1$$

$$a_2 = b_2$$

Logo, **as equações (1) e (4) são formulações alternativas equivalentes do único polinômio de segundo grau ligando os três pontos.**

Um procedimento simples pode ser usado para determinar os valores dos coeficientes. Para b_0 , **a Equação (4) com x = x_0** pode ser usada para calcular

$$b_0 = f(x_0) \qquad (5)$$

2 – Interpolação Quadrática

A equação (5) pode ser substituída na equação (4), a qual pode ser calculada em $x = x_1$ para:

$$b_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \qquad (6)$$

Finalmente, **as equações (5) e (6) podem ser substituídas na equação (4)**, **a qual pode ser calculada em $x = x_2$** e resolvida (após algumas manipulações algébricas) por:

$$b_2 = \frac{\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0} \qquad (7)$$

INTERPOLAÇÃO

2 – Interpolação Quadrática

Assim como no caso da interpolação linear, **b_1 ainda representa a inclinação da reta ligando os pontos x_0 e x_1**. Logo os dois primeiros termos de (4) **são equivalentes à interpolação linear x_0 a x_1**.

O último termo , **$b_2 (x - x_0)(x - x_1)$** introduz a curvatura de segundo grau.

A equação (4) manifesta uma estrutura que é muito parecida com a expansão em série de Taylor.

INTERPOLAÇÃO

Ajuste um polinômio de segundo grau aos três pontos usados no exemplo anterior.

$$x_0 = 1 \qquad f(x_0) = 0$$

$$x_1 = 4 \qquad f(x_1) = 1,386294$$

$$x_2 = 6 \qquad f(x_2) = 1,791759$$

Use o polinômio para calcular ln 2.

Solução: Aplicando (5), obtém-se.

$$b_0 = f(x_0) \rightarrow b_0 = 0$$

A equação (6) fornece:

$$b_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{1,386294 - 0}{4 - 1} = 0,4620981$$

INTERPOLAÇÃO

e a Equação (7) dá:

$$b_2 = \frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0} = \frac{\frac{1,791759 - 1,386294}{6 - 4} - 0,4620981}{6 - 1} = -0,0518731$$

Substituindo esses valores na Equação (4), obtém-se a fórmula quadrática:

$$f_2(x) = 0 + 0,4620981(x-1) - 0,0518731(x-1)(x-4)$$

A qual pode ser calculada em x=2

$$f_2(2) = 0,5658444$$

Que representa um **erro relativo de 18,4%. Logo, a curvatura introduzida pela fórmula quadrática melhora a interpolação quando comparada com o resultado obtido usando-se retas.**

INTERPOLAÇÃO

Forma Geral dos Polinômios Interpoladores de Newton

A análise anterior pode ser generalizada para ajustar um polinômio de grau **n a n+1 pontos dados. O polinômio de grau n é:**

$$f_n(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + \cdots + b_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n) \quad (8)$$

Como foi feito anteriormente com as interpolações linear e quadrática, **os pontos dados podem ser usados para calcular os coeficientes b_0 , b_1 , ..., b_n** . Para um polinômio de grau n, n+1 pontos são necessários: $(x_0 , f(x_0))$, $(x_1 , f(x_1))$, ..., $(x_n , f(x_n))$.

Usamos esses pontos dados e as seguintes equações para calcular os coeficientes:

$$b_0 = f(x_0) \quad (9)$$

$$b_1 = f[x_1, x_0] \quad (10)$$

$$b_2 = f[x_2, x_1, x_0] \quad (11)$$

$$\vdots$$

$$b_n = f[x_n, x_{n-1}, \cdots, x_1, x_0] \quad (12)$$

INTERPOLAÇÃO

Forma Geral dos Polinômios Interpoladores de Newton

Onde a função com colchetes corresponde a diferenças divididas finitas . Por exemplo, a primeira diferença dividida finita é representada por:

$$f[x_i, x_j] = \frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j} \qquad (13)$$

A segunda diferença dividida finita que representa a diferença das duas primeiras diferenças divididas, é expressa em geral por:

$$f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_i, x_j] - f[x_j, x_k]}{x_i - x_k} \qquad (14)$$

Analogamente, ***a n-ésima diferença dividida finita*** é:

$$f[x_n, x_{n-1}, \cdots, x_1, x_0] = \frac{f[x_n, x_{n-1}, \cdots, x_1] - f[x_{n-1}, x_{n-2}, \cdots, x_0]}{x_n - x_0} \qquad (15)$$

INTERPOLAÇÃO

Forma Geral dos Polinômios Interpoladores de Newton

Tais diferenças podem ser usadas para calcular os coeficientes nas Equações (9) a (12), os quais podem ser substituídos na equação (8) para fornecer o seguinte polinômio interpolador:

$$f_n(x) = b_0 + (x - x_0) f[x_1, x_0] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_2, x_1, x_0]$$
$$+ \cdots + (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n) f[x_n, x_{n-1}, \cdots, x_0] \qquad (16)$$

Que é denominado Polinômio Interpolador por Diferenças Divididas de Newton.

.

Observação: **Oberve que as equações de (13) a (15) são recursivas**. **As diferenças de ordem mais alta são calculadas tomando-se diferenças das diferenças de ordem mais baixa**. **Isso pode ser explorado para implementar um método computacional eficiente.**

INTERPOLAÇÃO

No exemplo anteiror, dados x_0 = 1 , x_1 = 4 e x_2 = 6 foram usados para fazer a estimativa de ln 2 com uma parábola. Agora, adicionando **um quarto ponto [x_3 =5, f(x_3)=1,609438].** Faça uma estimativa de ln 2 com um *polinômio interpolador de Newton* de terceiro grau.

Solução: O polinômio de terceiro grau, a equação (8) com n=3 é:

$$f_3(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) + b_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

As primeiras diferenças divididas para o problema são, equação (13)

$$f[x_1, x_0] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{1,386294 - 0}{4 - 1} = 0,4620981$$

$$f[x_2, x_1] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{1,791759 - 1,386294}{6 - 4} = 0,2027326$$

$$f[x_3, x_2] = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = \frac{1,609438 - 1,791759}{5 - 6} = 0,1823216$$

INTERPOLAÇÃO

As segundas diferenças divididas da equação são , Equação (14).

$$f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f\left[x_i, x_j\right] - f\left[x_j, x_k\right]}{x_i - x_k}$$

$$f[x_2, x_1, x_0] = \frac{0,2027326 - 0,4620981}{6 - 1} = -0,05187311$$

$$f[x_3, x_2, x_1] = \frac{0,1823216 - 0,2027326}{5 - 4} = -0,02041100$$

A terceira diferença dividida é tirada da Equação (15) com n=3.

$$f[x_3, x_2, x_1, x_0] = \frac{f[x_3, x_2, x_1] - f[x_2, x_1, x_0]}{x_3 - x_0}$$

$$f[x_3, x_2, x_1, x_0] = \frac{-0,20041100 - (-0,05187311)}{5 - 1} = 0,007865529$$

INTERPOLAÇÃO

Os resultados para $f[x_1 , x_0]$, $f[x_2 ,x_1 , x_0]$ e **$f[x_3 , x_2 ,x_1 , x_0]$ representam os coeficientes b_1 , b_2** e **b_3** , respectivamente da equação (8). **Junto com $b_0 = f(x_0)=0,0$**.

$$f_3(x) = 0 + 0,4620981(x-1) - 0,05187311(x-1)(x-4)$$
$$+0,007865529(x-1)(x-4)(x-6)$$

A equação acima usada para calcular $f_3(2)=0,6287686$, que representa um erro relativo de 9,3%.

INTERPOLAÇÃO

1 – Faça uma estimative do logaritmo (base 10) usando interpolação linear.

a) Interpole entre log 8 = 0,9030900 e log 12 = 1,0791812;
b) Interpole entre log 9 = 0,9542425 e log 11 = 1,0413927.

Para cada interpolação, calcule o erro relative percentual baseado no valor verdadeiro.

2 – Ajuste um polinômio interpolador de Newton de Segundo grau para fazer uma estimative de log 10 do exercício 1 em x = 8, 9 e 11. Calcule o erro relativo percentual verdadeiro.

3 – Ajuste um polinômio interpolador de Newton de terceiro grau usando os dados do exercício 1.

4 – Repita os exercícios de 1 a 3 usando polinômios de Lagrange.