INTERPOLAÇÃO

Interpolação por Splines

Motivação: Polinômios de grau n foram usados para interpolar n+1 pontos dados.
Ex: **para 8 pontos**, **pode-se determinar** exatamente um **polinômio de grau 7.**

• **Essa curva "capturaria" todas as oscilações** (**pelo menos até a sétima derivada**, inclusive) sugeridas por esses pontos.

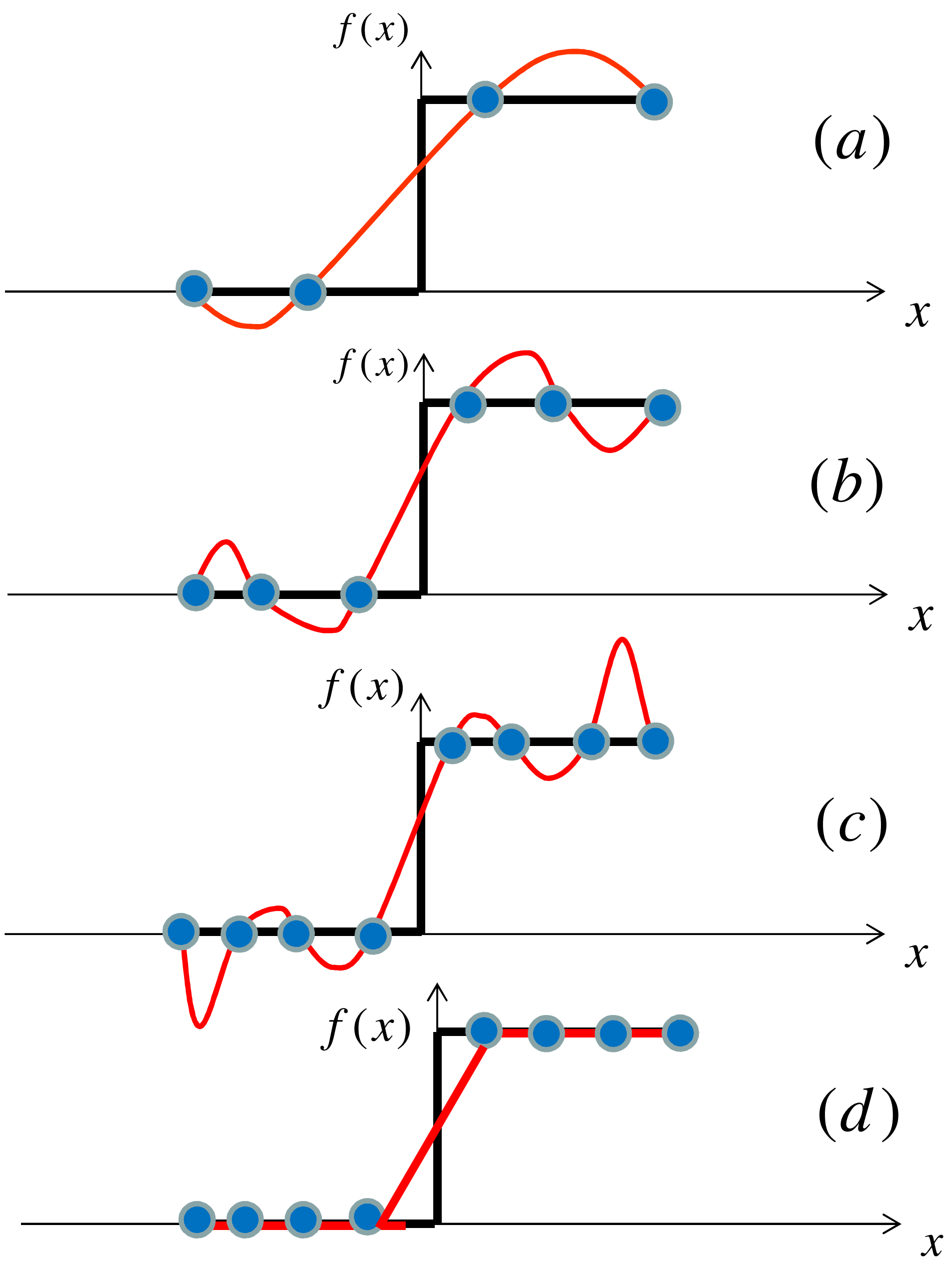
• **Entretanto**, **há casos em que essas funções podem levar a resultados errôneos por causa de erros** de **arredondamento** e de **erros na estimativa**.

• **Uma abordagem alternativa** é **aplicar polinômios de grau mais baixo** a **subconjuntos dos pontos dados**. **Tais polinômios conectadores são chamados funções splines**.

• Por exemplo, **curvas de terceiro grau usadas para conectar cada par de pontos dados** são chamadas de splines cúbicos.

• **A situação seguinte**, ilustra **um caso onde um spline funciona melhor do que um polinômio de grau mais alto.**
Tal situação ocorre onde ocorre uma mudança abrupta em algum ponto da região de interesse.

INTERPOLAÇÃO



A função a ser ajustada sofre uma mudança brusca em x=0. **As partes (a) a (c) indicam que a variação abrupta induz oscilações nos polinômios interpoladores**.

Em contraste, como é limitado a segmento de reta, **uma spline linear (d) fornece uma aproximação muito mais aceitável**.

Splines, **em geral**, **fornecem uma aproximação superior** do comportamento **de funções que têm variações locais abruptas**.

Curiosidade: O conceito de spline originou-se de uma técnica de desenho na qual era usada uma faixa fina e flexível (chamada spline) para desenhar uma curva lisa passando por um conjunto de pontos.

INTERPOLAÇÃO

Splines Lineares

A ligação mais simples entre dois pontos é uma reta. Os splines de primeiro grau para um grupo de pontos ordenados podem ser definidos como um conjunto de funções lineares.

$$f(x) = f(x_0) + m_0(x - x_0) \qquad x_0 \le x \le x_1$$

$$f(x) = f(x_1) + m_1(x - x_1) \qquad x_1 \le x \le x_2$$

$$\vdots$$

$$f(x) = f(x_{n-1}) + m_1(x - x_{n-1}) \qquad x_{n-1} \le x \le x_n$$

Onde $\mathbf{m_i}$ é a inclinação da reta ligando os pontos:

$$m_i = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_{i+1}} \qquad (9)$$

INTERPOLAÇÃO

Splines Lineares

Essas equações podem ser usadas para calcular as equações em qualquer ponto entre x_0 e x_n , primeiro localizando-se o intervalo no qual o ponto se encontra. A seguir, a equação apropriada é usada para determinar o valor da função dentro do intervalo.

O método é obviamente idêntico a interpolação linear.

Problema: Ajuste os dados da Tabela abaixo com uma spline de primeiro grau. Calcule a função em x=5.

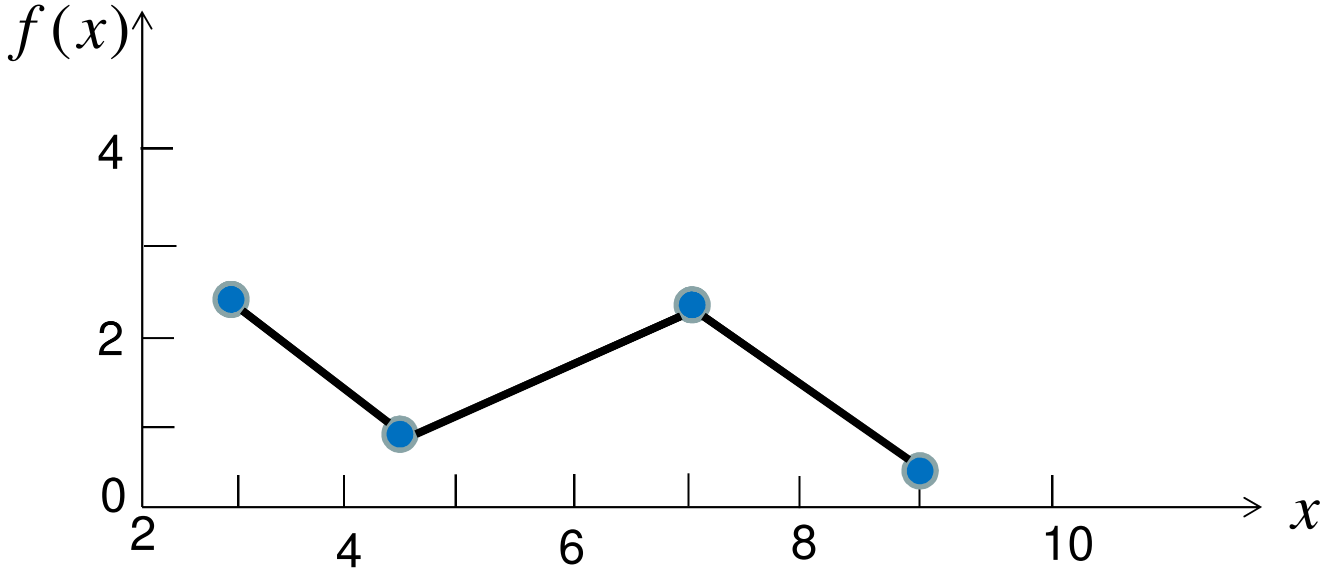
x	**f(x)**
3,0	2,5
4,5	1,0
7,0	2,5
9,0	0,5

INTERPOLAÇÃO

Solução: Os dados podem ser usados para determinar as inclinações entre os pontos. Por exemplo, **para o intervalo x=4,5** a **x=7,0** a **inclinação pode ser calculada usando-se**:

$$m_i = \frac{2,5-1}{7-4,5} = 0,60$$

As inclinações para os outros intervalos podem ser calculados e o spline de primeiro grau é traçado na figura abaixo: **O valor em x=5** é **1,3**.



INTERPOLAÇÃO

Splines Lineares

Verifica-se que a principal desvantagem dos splines de primeiro grau é que eles não são lisos (suaves, contínuas).

Essencialmente, nos pontos dados nos quais dois splines se encontram (nós), a inclinação varia abruptamente.

Em termos formais a primeira derivada da função é descontinua nestes pontos.

Essa deficiência é superada usando-se splines polinomiais de grau mais alto, que garatem que eles sejam lisos nos nós, igualando as derivadas em tais pontos.

INTERPOLAÇÃO

Splines Quadráticos

Para garantir que as m-ésimas, derivadas sejam contínuas nos nós, um spline de grau pelo menos m+1 deve ser usado. Polinômios de terceiro grau ou splines cúbicos que garantam continuidade das primeira e segunda derivadas são usados mais frequentemente na prática.

Embora derivadas de terceira ordem ou de ordem mais alta possam ser descontínuas *quando usando splines cúbicos, elas não podem ser detectadas visualmente* e, consequentemente, são ignoradas.

- **Splines quadráticos têm primeira derivada contínua nos nós.**

- **Embora os splines quadráticos não garantam segundas derivadas iguais nos nós, eles server bem para demonstrar o procedimento geral no desenvolvimento de splines** de grau mais alto.

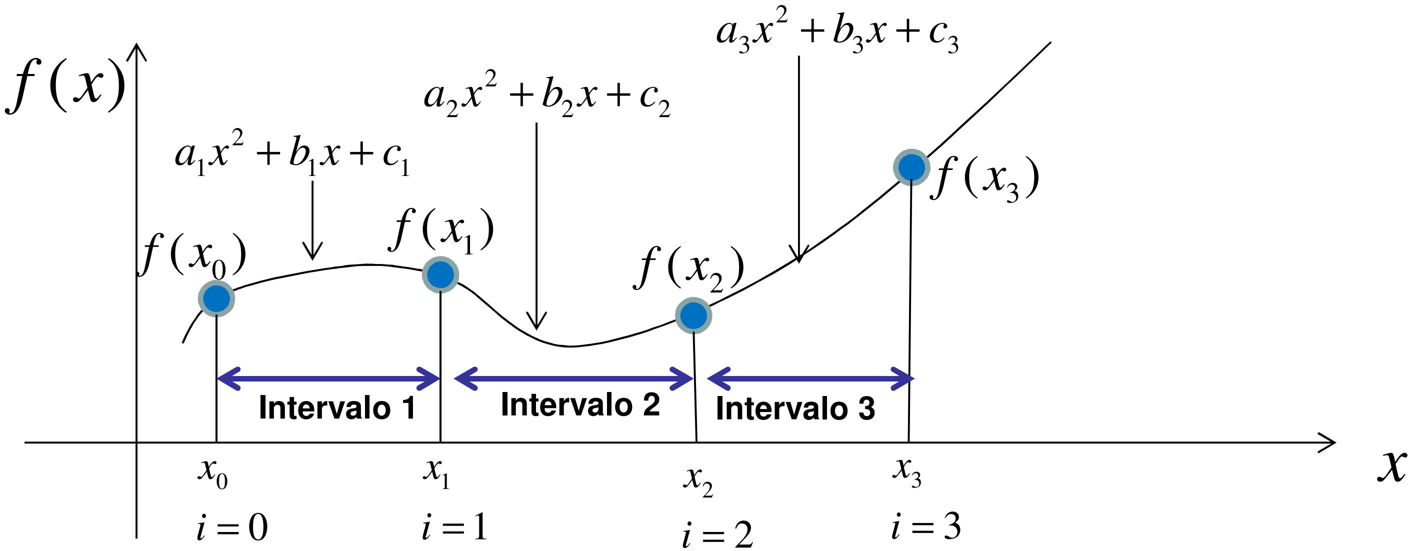
INTERPOLAÇÃO

Splines Quadráticos

O objetivo nos splines quadráticos é determinar um polinômio de segundo grau para cada intervalo entre os pontos dados.

Esse polinômio de segundo grau para cada intervalo pode ser representado de forma geral por:

$$f_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i \qquad (10)$$



INTERPOLAÇÃO

Splines Quadráticos

Para (n+1) pontos dados (**i=0, 1, 2, …, n**) **existem n intervalos** e, **consequentemente, 3n constantes indeterminadas** (**os a's, b's e c's**) **para calcular**.

Portanto 3n equações ou **condições são necessárias para calcular as incógnitas**. **São elas:**

1. **Os valores da função e dos polinômios nos nós adjacentes devem ser iguais nos nós anteriores**. **Essa condição pode ser apresentada por:**

$$a_{i-1}x_{i-1}^2 + b_{i-1}x_{i-1} + c_{i-1} = f(x_{i-i}) \qquad (11)$$

$$a_i x_{i-1}^2 + b_i x_{i-1} + c_i = f(x_{i-i}) \qquad (12)$$

Para **i=2 a n**. Como apenas os nós interiores foram usados as equações (11) e (12) fornecem (n-1) condições para um total de **(2n-2)** condições.

INTERPOLAÇÃO

Splines Quadráticos

2. **As primeiras e última funções devem passar pelos pontos extremos. Isso acrescenta duas equações adic**ionais:

$$a_1 x_0^2 + b_1 x_0 + c_1 = f(x_0) \qquad (13)$$

$$a_n x_n^2 + b_n x_n + c_n = f(x_n) \qquad (14)$$

Para um total de (**2n – 2 + 2**= **2n** condições).

3. **As primeiras derivadas nos nós interiores devem ser iguais. A primeira derivada da equação (10)** é:

$$f^{'}(x) = 2ax + b$$

INTERPOLAÇÃO

Portanto, a condição pode ser representada de modo geral por:

$$2a_{i-1}x_{i-1} + b_{i-1} = 2a_i x_i + b_i \qquad (15)$$

Para **i=2 a n**. Isso fornece outras **(n-1**) condições para um total de (2n+n-1= 3n-1). Como temos 3 incógnitas ainda falta uma condição.

A menos que se tenha alguma informação adicional relativa às funções ou suas derivadas, **é preciso fazer uma escolha arbitrária para ter sucesso no cálculo das constantes.**

Optou-se pela seguinte escolha.

4. **Suponha que a segunda derivada seja nula no primeiro ponto**. **Como a segunda derivada na equação (10) é 2a , essa condição pode ser expressa matematicamente como:**

$$a_1 = 0 \qquad (16)$$

Interpretação dessa condição: **os primeiros dois pontos serão ligados por uma reta**.

INTERPOLAÇÃO

Ajuste um spline quadrático aos mesmos dados usados no exemplo anterior dados pela tabela. **Use os resultados para fazer uma estimativa do valor em x=5**.

Solução: Nesse problema, há quatro pontos dados e n=3 intervalos. Portanto, 3(3)= 9 incógnitas devem ser determinadas.

As equações (11) e (12) fornecem:

2(3) – 2= 4 condições:

$$a_{i-1}x_{i-1}^2 + b_{i-1}x_{i-1} + c_{i-1} = f(x_{i-i}) \qquad (11)$$

$$a_i x_{i-1}^2 + b_i x_{i-1} + c_i = f(x_{i-i}) \qquad (12)$$

$$20,25a_1 + 4,5b_1 + c_1 = 1$$

$$20,25a_2 + 4,5b_2 + c_2 = 1$$

$$49a_2 + 7b_2 + c_2 = 2,5$$

$$49a_3 + 7b_3 + c_3 = 2,5$$

INTERPOLAÇÃO

Fazer com que a primeira e a última função passem pelos valores inicial e final acrescenta mais duas equações, (13) e (14):

$$a_1 x_0^2 + b_1 x_0 + c_1 = f(x_0) \qquad (13)$$

$$a_n x_n^2 + b_n x_n + c_n = f(x_n) \qquad (14)$$

$$9a_1 + 3b_1 + c_1 = 2,5 \qquad (13)$$

$$81a_3 + 9b_3 + c_3 = 0,5 \qquad (14)$$

A continuidade das equações cria mais 3-1= 2, equação 15,

$$2a_{i-1}x_{i-1} + b_{i-1} = 2a_i x_i + b_i \qquad (15)$$

$$9a_1 + b_1 = 9a_2 + b_2$$

$$14a_2 + b_2 = 14a_3 + b_3$$

INTERPOLAÇÃO

A equação (16) especifica que que $a_1 = 0$. Como essa equação especifica a_1 exatamente, **o problema se reduz a resolver oito equações simultâneas**. Tais condições podem ser expressas na forma matricial como:

$$
\begin{bmatrix}
4,5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 20,5 & 4,5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 49 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 49 & 7 & 1 \\
3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 81 & 9 & 1 \\
1 & 0 & -9 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 14 & 1 & 0 & -14 & -1 & 0
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} b_1 \\ c_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2,5 \\ 2,5 \\ 2,5 \\ 0,5 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}
$$

INTERPOLAÇÃO

Essas equações podem ser resolvidas usando-se as técnicas vista em Sistemas de equações lineares, que resulta em:

$$a_1 = 0 \qquad b_1 = -1 \qquad c_1 = 5,5$$

$$a_2 = 0,64 \qquad b_2 = -6,76 \qquad c_2 = 18,46$$

$$a_3 = -1,64 \qquad b_3 = 24,6 \qquad c_3 = -91,3$$

que pode, por sua vez, pode ser substituído nas equações quadráticas originais para determinar as seguintes relações para cada intervalo:

$$f_1(x) = -x + 5,5$$

$$f_2(x) = 0,64x^2 - 6,76x + 18,46$$

$$f_3(x) = -1,6x^2 + 24,6x - 91,3$$

INTERPOLAÇÃO

Quando se usa **f_2** , a previsão para **$x=5$** é, portanto

$$f_2(x) = 0,64(5)^2 - 6,76(5) + 18,46 = 0,66$$

INTERPOLAÇÃO

Exercício 1) cosidere os dados:

x	1,6	2	2,5	3,2	4	4,5
f(x)	2	8	14	15	8	2

Determine splines quadráticos para os primeiros cinco pontos dados e faça previsões de f(3,4) e f(2,2).