Sistema de Equações Algébricas Lineares

Motivação: **Armadilhas da Eliminação de Gauss**

Divisão por zero

A principal razão para que a técnica seja chamada de "ingênua" é que tanto durante a fase de eliminação quanto durante a de substituição é possível ocorrer uma divisão por zero.

$$\begin{aligned} 2x_2 + 3x_3 &= 8 \\ 4x_1 + 6x_2 + 7x_3 &= -3 \\ 2x_1 + x_2 + 6x_3 &= 5 \end{aligned}$$

A normalização da primeira linha iria envolver a divisão por $a_{11} = 0$. Também podem surgir problemas quando um coeficiente está muito próximo de zero. **A técnica de pivotamento foi desenvolvida para evitar parcialmente estes problemas.**

Sistema de Equações Algébricas Lineares

Motivação: Armadilhas da Eliminação de Gauss

Erros de Arredondamento

O problema de erros de arredondamento torna-se importante quando se resolve um número grande de equações, por causa do fato de que cada resultado depende de resultados anteriores.

• Um erro nas etapas iniciais tende a se propagar – causará erros nas etapas seguintes.

• **Uma regra empírica é que os erros de arredondamento podem ser importantes quando se lida com sistemas de 100 ou mais equações**.

• Substituir as respostas no sistema original para verificar se erros susbtanciais ocorreram.

• As ordens de grandeza dos próprios coeficientes podem influenciar no fato de tal verificação de erros garantir ou não um resultado confiável.

Sistema de Equações Algébricas Lineares

Motivação: **Armadilhas da Eliminação de Gauss**

Sistemas Mal condicionados

Sistemas bem condicionados → são aqueles que uma pequena mundança em um ou mais coeficientes resulta em uma pequena mudança similar nas *soluções*.

Sistemas mal condicionados → são aqueles para os quais pequenas mudanças nos coeficientes resultam em grandes mudanças nas soluções.

Outra interpretação → uma ampla gama de respostas pode satisfazer aproximadamente as soluções.

Erros de arrendondamento podem induzir pequenas mudanças nos coeficientes. Essas mundanças conduzem a grandes erros nas soluções de sistemas mal condicionados.

Sistema de Equações Algébricas Lineares

Motivação: **Armadilhas da Eliminação de Gauss**

Sistemas Mal Condicionados

Resolva o seguinte sistema:

$$x_1 + 2x_2 = 10 \qquad (1)$$

$$1.1x_1 + 2x_2 = 10,4 \qquad (2)$$

Em seguida, resolva com o coeficiente x_1 na segunda equação levemente modificado para 1,05.

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} = \frac{2(10) - 2(10,4)}{1(2) - 2(1,1)} = 4$$

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} = \frac{1(10,4) - 1,1(10)}{1(2) - 2(1,1)} = 3$$

Sistema de Equações Algébricas Lineares

Motivação: **Armadilhas da Eliminação de Gauss**

Sistemas Mal Condicionados

Entretanto, com a pequena variação do coeficiente $\mathbf{a_{21}}$ de 1,1 para 1,05, o resultado muda de forma dramática para:

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} = \frac{2(10) - 2(10,4)}{1(2) - 2(1,05)} = 8$$

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} = \frac{1(10,4) - 1,1(10)}{1(2) - 2(1,05)} = 1$$

Observe que a razão principal para as discrepâncias entre os dois resultados é que o denominador representa a diferença de dois números quase iguais.

- Pode-se sugerir que a substituição dos resultados nas equações originais deveria alertá-lo para o problema.

Sistema de Equações Algébricas Lineares

Motivação: **Armadilhas da Eliminação de Gauss**

Sistemas Mal Condicionados

Infelizmente, em geral esse não é o caso para sistemas mal condicionados. A substituição dos valores errados $x_1 = 8$ e $x_2 = 1$ nas equações (1) e (2) leva a:

$$8 + 2(1) = 10 \qquad (1)$$

$$1.1(8) + 2(1) \cong 10,4 \qquad (2)$$

Assim, embora $x_1 = 8$ e $x_2 = 1$ não sejam a solução verdadeira, a verificação do erro é suficiente próxima para possivelmente levá-lo a concluir, de maneira errônea, que essa solução é adequada.

Sistema de Equações Algébricas Lineares

Motivação: **Armadilhas da Eliminação de Gauss**

Sistemas Mal Condicionados

Lembrando que $a_{11}\ a_{22} - a_{12}\ a_{21}$ é o determinante do sistema de duas equações, chega-se a conclusão geral de que um sistema mal condicionado é aquele com determinante próximo a zero.

• Se o determinante for exatamente zero, as duas inclinações serão idênticas, o que implica que o sistema não tem solução ou tem infinita soluções. Como mostrado no caso gráfico Slide 2.

É difícil especificar quão perto de zero o determinante deve estar para indicar mal condicionamento.

• É complicado pelo fato de que o determinante pode ser alterado pela multiplicação de uma ou mais das equações por um escalar, sem mudar a solução.

• **Consequentemente, o** ***determinante é um valor relativo que é influenciado pela ordem da grandeza dos coeficientes*****.**

Sistema de Equações Algébricas Lineares

Motivação: **Armadilhas da Eliminação de Gauss**

Efeito de escala no Determinante.

Calcule o determinate dos seguintes sistemas:

(a)

$$3x_1 + 2x_2 = 18 \qquad (3)$$

$$-x_1 + 2x_2 = 2 \qquad (4)$$

(b)

$$x_1 + 2x_2 = 10 \qquad (5)$$

$$1.1x_1 + 2x_2 = 10,4 \qquad (6)$$

(c) Repita o caso (b), com as equações multiplicadas por 10.

Sistema de Equações Algébricas Lineares

Motivação: **Armadilhas da Eliminação de Gauss**

(a) O determinante das equações (3) e (4), que são bem condicionadas, é:

$$D = 3(2) - 2(-1) = 8$$

(b) O determinante das equações (5) e (3), que são mal condicionados, é:

$$D = 1(2) - 2(1,1) = -0,2$$

(c) Os resultados (a) e (b) parecem levar à conclusão de que sistemas mal condicionados têm determinantes próximos a zero.

Porém, suponha que o sistema mal condicionado em (b) seja multiplicado 10 dando:

$$10x_1 + 20x_2 = 100$$

$$11x_1 + 20x_2 = 104$$

A multiplicação de uma equação por uma constante não tem efeito na solução. Além disso, ele é ainda mal condicionado. Isso pode ser verificado pelo fato de que a multiplicação por uma constante não tem efeito na solução gráfica. **Porém, o determinante é afetado de maneira dramática:**

Sistema de Equações Algébricas Lineares

$$D = 10(20) - 20(11) = -20$$

Não apenas aumentou duas ordem de grandeza, como agora é mais que o dobro do determinante do sistema bem condicionado (a).

O valor dos coeficientes introduz uma efeito de escala que complica a relação entre condicionamento do sistema e o tamanho do determinante.

Uma forma de evitar parcialmente esssa dificuldade é mudar a escala das equações de modo que o elemento máximo em qualquer linha seja 1.

Sistema de Equações Algébricas Lineares

Mudando a Escala

Faça uma mudança de escala nos sistemas de equações do exemplo anterior para um valor máximo 1 e calcule novamente seus determinantes.

(a) Para o sistema bem condicionado, a mudança de escala resulta em:

$$x_1 + 0.667x_2 = 6$$

$$-0,5x_1 + \quad x_2 = 1$$

E o determinante é:

$$D = 1(1) - 0,667(-0,5) = 1,333$$

(b) Para o sistema mal condicionado, a mudança de escala resulta em:

$$0,5x_1 + \quad x_2 = 5$$

$$0,55x_1 + \quad x_2 = 5,2$$

e o determinante é:

$$D = 0,5(1) - 1(0,55) = -0,05$$

Sistema de Equações Algébricas Lineares

Mudando a Escala

(c) No último caso, mudar a escala muda o sistema para a mesma forma obtida em (b) e o determinante é novamente -0,05.

Assim, o efeito da escala foi removido.

Anteriormente foi sugerido que o determinante é difícil de calcular para mais de 3 equações simultâneas. Pode parecer que não fornece um meio prático de avaliar o condicionamento do sistema.

Porém, existe um algoritmo simples que vem da Eliminação de Gauss que pode ser usado para calcular os determinantes.

Sistema de Equações Algébricas Lineares

Cálculo de Determinates Usando a Eliminação de Gauss

Afirmamos anteriormente que:

- O cálculo de determinantes em expansão por determinantes menores era pouco prático para conjunto grande de equações.

- A regra de Cramer seria aplicável somente para sistemas pequenos

Entretanto,

- O determinante tem utilidade na validação do condicionamento do sistema;

- Portanto, é interessante ter um método prático para calculá-lo.

- O método de Gauss fornece uma forma simples de fazer isso.

Sistema de Equações Algébricas Lineares

Cálculo de Determinates Usando a Eliminação de Gauss

O método se baseia no fato de que o determinante de uma matriz triangular pode ser calculado siimplesmente como o produto dos elementos diagonal:

$$D = a_{11}a_{22}a_{33}\ldots a_{nn} \qquad (7)$$

A validade dessa afirmação pode ser ilustrada por um sistema 3x3:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix}$$

Onde o determinante pode ser calculado por:

$$D = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} 0 & a_{23} \\ 0 & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} 0 & a_{22} \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$D = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}(0) + a_{13}(0) = a_{11}a_{22}a_{33}$$

Sistema de Equações Algébricas Lineares

Cálculo de Determinates Usando a Eliminação de Gauss

Lembremos que:

• O passo de eliminação progressiva na eliminação de Gauss resulta em um sistema triangular superior.

• O determinante pode ser calculado ao fim desse processo por:

$$D = a_{11} a'_{22} a''_{33} \ldots a_{nn}^{(n-1)} \qquad (8)$$

Onde os sobrescritos significam o número de vezes que os elementos foram modificados pelo processo de eliminação.

• Assim ao aplicar o método de Eliminação de Gauss, obtemos uma estimativa simples do determinante.

Sistema de Equações Algébricas Lineares

Técnicas para melhorar soluções

- Uso de mais algarismos significativos

Uma solução simples para o mal condicionamento é usar mais algaritmos significativos nos cálculos.

• Manipular palavras de tamanho maior, reduz bastante o problema.

• Entretanto, ocorre um uso elevado de memória e recursos computacionais associado ao uso de precisão estendida.

Sistema de Equações Algébricas Lineares

Técnicas para melhorar soluções

- Pivotamento

• Problemas óbvios ocorrem quando um elemento pivô é zero, pois o passo de normalização leva uma divisão por zero.

• Problemas também podem surgir quando o elemento pivô é muito próximo a zero, porque, se a ordem de grandeza é pequena comparada com a dos outros elementos, então podem ocorrer erros de arredondamento.

• Assim antes que cada linha seja normalizada, é **vantajoso determinar o maior coeficiente disponível na coluna abaixo do elemento pivô.**

• As linhas podem ser trocadas de modo que o maior coeficiente seja o elemento pivô.

• Isto é chamado de pivotamento parcial.

• Se procurarmos o maior elemento também nas colunas, o processo é chamado de pivotamento completo. Usado raramente, pois trocar colunas muda a ordem dos X s e, consequentemente acrescenta uma complexidade significativa e injustificada ao programa de computador.

Sistema de Equações Algébricas Lineares

-Pivotamento

- Use a Eliminação de Gauss para resolver:

$$0,0003x_1 + 3x_2 = 2,0001$$
$$1x_1 + \ 1x_2 = 1$$

Observe que dessa forma o primeiro elemento pivô, a_{11} = 0,0003, é muito próximo a zero. Então, repita os cálculos, mas use pivotamento parcial, trocando a ordem das equações.
As soluções exatas são: x_1 = 1/3 e x_2 = 2/3

Solução: Multiplicando a primeira equação por (1/(0,0003), obtém-se:

$$x_1 + 10.000x_2 = 6667$$

O que pode ser eliminado da segunda equação:

$$-9999x_2 = -6666$$

Sistema de Equações Algébricas Lineares

-Pivotamento

O qual pode ser resolvida por:

$$x_2 = \frac{2}{3}$$

Esse resultado pode ser substituído na primeira equação para calcular x_1 :

$$x_1 = \frac{2,0001 - 3(2/3)}{0,0003} \qquad (9)$$

Entretanto, por causa do cancelamento na subtração, o resultado é muito sensível ao número de algarismos significativos nos cálculos:

Sistema de Equações Algébricas Lineares

Algarimos Significativos	X_2	x_1	Valor absoluto do erro relativo percentual para x_1
3	0,667	-3,33	1099
4	0,6667	0,0000	100
5	0,66667	0,30000	10
6	0,666667	0,330000	1
7	0,6666667	0,3330000	0,1

Observe como a solução para x_1 é altamente dependente de algarismos significativos. Isso porque, na Eq. (9) estamos subtraindo dois números quase iguais.

Se as equações forem resolvidas na ordem inversa, a linha com elemento pivô maior é normalizada. As equações são:

Sistema de Equações Algébricas Lineares

$$1,0000x_1 + \ 1,0000x_2 = 1,0000$$
$$0,0003x_1 + 3,0000x_2 = 2,0001$$

A eliminação e a substituição resultam em x_2 = (2/3). Para números diferentes de algarismos significativos, x pode ser calculado da primeira equação, como em:

$$x_1 = \frac{1-(2/3)}{1} \qquad (10)$$

Esse caso é muito menos sensível ao número de algarismos significativos nos cálculos:

Sistema de Equações Algébricas Lineares

Algarimos Significativos	X_2	x_1	Valor absoluto do erro relativo percentual para x_1
3	0,667	0,333	0,1
4	0,6667	0,3333	0,01
5	0,66667	0,333333	0,001
6	0,666667	0,3333333	0,0001
7	0,6666667	0,33333333	0,00001

Sistema de Equações Algébricas Lineares

Algarimos Significativos	X_2	x_1	Valor absoluto do erro relativo percentual para x_1
3	0,667	0,333	0,1
4	0,6667	0,3333	0,01
5	0,66667	0,333333	0,001
6	0,666667	0,3333333	0,0001
7	0,6666667	0,33333333	0,00001

Sistema de Equações Algébricas Lineares

- **Mudando a escala**

Anteriormente, foi proposto que a mudança de escala é valiosa na padronização do tamanho do determinante.

• Também tem utilidade na minimização de erros de arredondamento naqueles casos nos quais algumas equações do sistema têm coeficientes muito maiores que as outras.

• Estas situações são frequentemente encontradas na prática de engenharia quando unidades muito diferentes são usadas na dedução de equações simultâneas.

• Ex. , problemas de circuitos elétricos, as voltagens indeterminadas podem ser expressas em unidades variando de microvolts a kilovolts

• Desde que cada equação seja consistente, o sistema será tecnicamente correto e solúvel.

• Entretanto, o uso de unidades que difiram muito pode levar a coeficientes de ordens de grandeza muito diferentes.

• Isso pode ter um impacto nos erros arredondamento, já que afeta o pivotamento.

Sistema de Equações Algébricas Lineares

Efeito da Mudança de Escala no Pivotamento e nos Erros de Arredondamento

(a) Resolva o seguinte conjunto de equações usando a Eliminação de Gauss e a estratégia de Pivotamento:

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 100.000x_2 &= 100.000 \\
x_1 + \qquad\quad x_2 &= 2
\end{aligned}
$$

(b) Repita a solução depois de mudar a escala das equações de modo que o maior coeficiente em cada linha seja 1.

(c) Use os coeficientes normalizados para determinar se o pivotamento é necessário. Entretanto, resolva de fato as equações com os valores originais dos coeficientes. Em todos os casos, trabalhe apenas com 3 algarismos significativos. Observe que as respostas corretas são x_1 = 1,00002 e x_2 = 0,99998 com três algarismos significativos, x_1 = x_2 = 1,00.

Sistema de Equações Algébricas Lineares

Solução:
(a) Sem mudar a escala, aplica-se a eliminação progressiva e obtém-se:

$$2x_1 + 100.000x_2 = 100.000$$
$$-50.000x_2 = -50.000$$

O que pode ser resolvido por substituição regressiva, resultando:

$$x_2 = 1$$
$$x_1 = 0$$

Apesar de x_2 estar correto, x_1 está 100% errado, por causa dos erros de arrendondamento.

(b) Mudando a escala das equações originais, obtém-se:

$$0,00002x_1 + x_2 = 1$$
$$x_1 + x_2 = 2$$

Sistema de Equações Algébricas Lineares

Portanto, as linhas devem ser pivotadas para pôr o maior valor na diagonal.

$$x_1 + x_2 = 2$$
$$0,00002x_1 + x_2 = 1$$

A eliminação dá:

$$x_1 + x_2 = 2$$
$$x_2 = 1,00$$

O que pode ser resolvido por

$$x_1 = x_2 = 1$$

Assim, a mudança de escala conduziu à resposta correta.

Sistema de Equações Algébricas Lineares

(c) Os coeficientes depois da mudança de escala indicam que o pivotamento é necessário. Então, pivotamos, mas mantemos os coeficietes originais otendo:

$$\begin{aligned} x_1 + \qquad\quad x_2 &= 2 \\ 2x_1 + 100.00x_2 &= 100.000 \end{aligned}$$

A eliminação dá:

$$\begin{aligned} x_1 + \qquad\quad x_2 &= 2 \\ 100.000x_2 &= 1,00 \end{aligned}$$

O que pode ser resolvido dando a resposta correta: $x_1 = x_2 = 1$. Assim, a mudança de escala foi útil para determinar quando o pivotamento é necessário, mas não foi necessária uma mudança de escala nas próprias equações para se chegar a uma resposta correta.

Sistema de Equações Algébricas Lineares

Como no exemplo anterior, a mudança de escala tem utilidade na minimização de erros de arredondamento. No entanto, deve ser observado que a própria mudança de escala leva a erros de arredondamento. Por exemplo, dada a equação:

$$2x_1 + 300.000x_2 = 1$$

e usando três algarismos significativos, a mudança de escala leva a:

$$0{,}00000667x_1 + x_2 = 0{,}000333$$

Assim, a mudança de escala introduz um erro de arredondamento no primeiro coeficiente e na constante.

Recomenda-se que a mudança de escala seja usada para calcular os valores dos coeficientes na nova escala simplesmente como um critério para pivotamento, mas os coeficientes originais são mantidos nos cálculos da eliminação e substituição propriamente ditos.

Sistema de Equações Algébricas Lineares

Exercícios

2 – Use a eliminação de Gauss para resolver:

$$
\begin{aligned}
8x_1 \quad + 2x_2 \quad - 2x_3 &= -2 \\
10x_1 \quad + 2x_2 \quad + 4x_3 &= +4 \\
12x_1 \quad + 2x_2 \quad + 2x_3 &= +6
\end{aligned}
$$

Utilize o pivotamento parcial e verifique suas respostas substituindo-as nas equações originais.