Sistema de Equações Algébricas Lineares

Motivação

Nas aulas anteriores foi determinado o valor de x que satisfaz a equação, f(x) = 0. Agora, será abordado o caso de determinar x_1 , x_2 ,..., x_n que satisfazem simultaneamente um conjunto de equações:

$$
\begin{aligned}
&f_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\
&f_2(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\
&\quad\quad . \\
&\quad\quad . \\
&\quad\quad . \\
&f_n(x_1, x_2, ..., x_n) = 0
\end{aligned}
$$

Sistema de Equações Algébricas Lineares

Motivação

Tais sistemas podem ser lineares ou não lineares. As equações algébricas lineares têm a forma geral.

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{31}x_n &= b_2 \\
&\ \ . \\
&\ \ . \\
&\ \ . \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}
$$

Onde os a’s são coeficientes constantes, os b’s são constantes e n representa o número de equações ,

Sistema de Equações Algébricas Lineares

Motivação

Para um número pequeno de equações $(n \leq 3)$, as equações lineares, podem ser resolvidas rapidamente por técnicas simples. Entretanto, para mais equações, as soluções se tornam trabalhosas e computadores tem que ser utilizados.

No passado este obstáculo limitou o alcance de problemas tratados em várias aplicações da engenharia.

- Muitas das equações fundamentais da engenharia são baseadas em leis de conservação.

- Algumas quantidades familiares que se submetem a tais leis são massa, energia e momento.

- Em termos matemáticos, esses princípios levam a equações de continuidade que relacionam o *comportamento do sistema* , represntado por seus *níveis ou respostas* das quantidades que estão sendo modeladas, *às propriedades ou às características do sistema* e aos *estímulos* externos ou *termos forçantes* agindo sobre o sistema.

Sistema de Equações Algébricas Lineares

Fundamentos matemáticos – Notação matricial

Uma matriz consiste em uma tabela retangular de elementos representados por um único símbolo. No exemplo abaixo [A] é a anotação abreviada para a matriz e a_{ij} designa um elemento individual da matriz.

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \cdots a_{2n} \\ & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \cdots a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$coluna\ 3\ linha\ 2$$

A matriz [A] tem n linhas por m colunas e dizemos que tem dimensão n po m (n x m). Ela é chamada de uma matriz n por m.

Sistema de Equações Algébricas Lineares

Fundamentos matemáticos – Notação matricial

Matrizes com número de linhas n=1, tais como:

$$[B] = [b_1 \ \ b_2 \ \ b_3 \cdots b_n]$$

São chamadas *vetores linha*. Por simplicidade o primeiro índice é omitido.

Matrizes com número de colunas m=1, tais como:

$$[C] = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

São chamadas *vetores coluna*. Neste caso o segundo índice é omitido.

Sistema de Equações Algébricas Lineares

Fundamentos matemáticos – Notação matricial

As matrizes em que m=n são chamadas *matrizes quadradas*. Ex, uma matriz 4x4.

$$[A]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

a_{11} ,

A diagonal consistindo nos elementos $\mathbf{a_{11}}$ **,** $\mathbf{a_{22}}$ **,** $\mathbf{a_{33}}$ **e** $\mathbf{a_{44}}$ é chamada de diagonal principal da matriz.

• As matrizes quadradas são particularmente importantes quando resolvemos conjuntos de de equações lineares simultâneas.

Sistema de Equações Algébricas Lineares

Fundamentos matemáticos – Notação matricial

- Nestes sistemas, o número de equações (correspondentes às linhas) e o número de incógnitas (correspondentes às colunas) devem ser iguais para que seja possível uma solução única.

- Consequentemente, são encontradas matrizes de coeficientes quadradas quando lidamos com tais sistemas.

Sistema de Equações Algébricas Lineares

Fundamentos matemáticos – Tipos especiais de matrizes quadradas

Matriz simétrica é aquela que $a_{ij} = a_{ji}$ para todos os i's e j's.

$$[A] = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 7 \\ 2 & 7 & 8 \end{bmatrix} matriz\ 3 \times 3\ simétrica$$

Matriz diagonal é uma matriz quadrada cujos elementos fora da diagonal principal são iguais a zero.

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & a_{33} & \\ & & & a_{11} \end{bmatrix}$$

Sistema de Equações Algébricas Lineares

Fundamentos matemáticos – Tipos especiais de matrizes quadradas

Matriz identidade é uma matriz diagonal na qual todos os valores são iguais a 1. Denotado pelo símbolo [I].

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz triangular superior é uma matriz em que todos os elementos abaixo da diagonal principal são zeros.

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ & & a_{33} & a_{34} \\ & & & a_{44} \end{bmatrix}$$

Sistema de Equações Algébricas Lineares

Fundamentos matemáticos – Tipos especiais de matrizes quadradas

Matriz triangular inferior é uma matriz em que todos os elementos acima da diagona principal são zeros.

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

Matriz de banda tem todos os elemntos iguais a zero, com a possível excessão de uma faixa centrada na diagonal principal:

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \\ & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ & & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

Essa matriz possui largura da banda 3 e tem um nome especial – **matriz tridiagonal**

Sistema de Equações Algébricas Lineares

Fundamentos matemáticos – Regras de operações matriciais

Duas matrizes **n** por **m** são iguais se, e somente se, todo elemento da primeira é igual a todo elemento da segunda, isto é, [A]=[B] se $a_{ij} = b_{ij}$ para todo i e j.

A adição de duas matrizes → é feita somando-se os termos correspondentes em cada matriz. Os elementos da matriz resultantes [C] são assim calculados.

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Para **i=1,2,…,n** e **j=1,2,…,m.**

A subtração de duas matrizes → é feita subtraindo-se os termos correspondentes em cada matriz.

$$d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$$

Para **i=1,2,…,n** e **j=1,2,…,m.**

Dessas definições segue que a adição e subtração podem ser efetuadas apenas entre matrizes com as mesmas dimensões.

Sistema de Equações Algébricas Lineares

Fundamentos matemáticos – Regras de operações matriciais

Ambas, adição e subtração são *comutativas*.

$$[A]+[B]=[B]+[A]$$

A adição e subtração são também *associativas*.

$$([A]+[B])+[C]=[A]+([B]+[C])$$

A *multiplicação* de uma matriz [A] por um escalar g é obtida multiplicando-se todo elemento de [A] por g, como em:

$$[D]=g[A]=\begin{bmatrix} ga_{11} & ga_{12}\cdots & ga_{1m} \\ ga_{21} & ga_{22}\cdots & ga_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ ga_{n1} & ga_{n2}\cdots & ga_{nm} \end{bmatrix}$$

Sistema de Equações Algébricas Lineares

Fundamentos matemáticos – Regras de operações matriciais

O produto de duas matrizes é representado por [C]=[A][B], onde os elementos de [C] são definidos por:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \qquad (1)$$

Onde n é o número de colunas de [A] e o número de linhas [B]. Isto é, o elemento c_{ij} é obtido somando-se o produto dos elementos individuais da i-ésima linha da primeira matriz, no caso [A], com a j-ésima coluna da segunda matriz, [B].

A equação (1), pode não ser facilmente visualizada, mas é bem apropriada para ser implementada em um computador.

De acordo com essa definição, a multiplicação de matrizes pode ser efetuada apenas quando a primeira matriz tem tantas colunas quanto o número de linhas da segunda matriz.

Então, se [A] é uma matriz n po m, [B] pode ser uma matriz m por l. Nesse caso, a matriz resultante [C] terá dimensão n por l. Não seria válido para $[B]_{lxm}$.

Sistema de Equações Algébricas Lineares

Fundamentos matemáticos – Regras de operações matriciais

$$[A]_{n\times m} \quad [B]_{m\times l} = [c]_{n\times l}$$

Dimensões internas
devem ser iguais

As dimensões externas
Definem a dimensão do resultado

Sistema de Equações Algébricas Lineares

Fundamentos matemáticos – Regras de operações matriciais

Se as dimensões das matrizes forem adequadas , a multiplicação de matrizes será associativa.

([A][B])[C]=[A]([B][C])

e distributiva.

[A]([B]+[C])=[A][B]+[A][C]

ou

([A]+[B])[C]=[A][C]+[B][C]

Porém , **em geral a multiplicação não é comutativa.**

$$[A][B] \neq [B][A]$$

A ordem de multiplicação é importante.

Sistema de Equações Algébricas Lineares

Fundamentos matemáticos – Regras de operações matriciais

Apesar da multiplicação ser possível , a divisão de matrizes não é uma operação definida. Porém, se a matriz for quadrada e não singular, existe uma outra matriz $[A]^{-1}$, chamada inversa de [A], tal que:

$$[A]\,[A]^{-1} = [A]^{-1}\,[A] = [I]$$

Assim a multiplicação de uma matriz pela sua inversa é o análogo da divisão, no sentido de que o número dividido por si mesmo é igual a 1. Isto é, a multiplicação de uma matriz pela sua inversa resulta na matriz identidade.

Sistema de Equações Algébricas Lineares

Fundamentos matemáticos – Regras de operações matriciais

Outras manipulações de matrizes que são úteis são a transposta e o traço de uma matriz.

Transposta→ envolve transformar suas linhas em colunas e suas colunas em linhas.

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

$$[A]^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix}$$

O elemento a_{ij} da transposta é igual ao elemento a_{ji} da matriz original.

Sistema de Equações Algébricas Lineares

Fundamentos matemáticos – Regras de operações matriciais

Outras manipulações de matrizes que são úteis são a transposta e o traço de uma matriz.

Traço de uma matriz→ é a soma dos elementos da diagonal principal. Ele é denotado por tr[A] e é calculado por:

$$tr[A] = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Outra manipulação útil é o aumento. A matriz aumentada pela adição de uma coluna (ou colunas) à matriz original. Suponha a seguinte matriz de coeficientes.

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Sistema de Equações Algébricas Lineares

Fundamentos matemáticos – Regras de operações matriciais

Podemos querer aumentar essa matriz com a matriz identidade. Para produzir uma matriz de dimensão 3 por 6:

$$[A] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Tal expressão tem utilidade quando é preciso efetuar um conjunto de operações idênticas em duas matrizes. Assim, pode-se efetuar as operações na matriz aumentada em de vez de fazê-lo nas matrizes individuais.

Sistema de Equações Algébricas Lineares

Fundamentos matemáticos – Representações de equações algébricas lineares na forma matricial.

Matrizes fornecem uma notação concisa para representar equações lineares simultâneas

$$[A]\{X\}=\{B\}$$

Onde [A] é matriz quadrada de n por n coeficientes .

$$[A]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\cdots a_{2n} \\ & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3}\cdots a_{nn} \end{bmatrix}$$

Onde {B} é o vetor coluna n x 1 de constantes.

$$\{B\}^T=\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix}$$

Sistema de Equações Algébricas Lineares

Fundamentos matemáticos – Representações de equações algébricas lineares na forma matricial.

Onde {X} é o vetor coluna n x 1 de constantes.

$$\{X\}^T = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n]$$

Para determinar {X}. Uma maneira de obter a solução usando álgebra de matrizes é multiplicar cada lado da equação pela inversa de [A] para obter.

$$[A]^{-1}[A]\{X\} = [A]^{-1}\{B\}$$

Como $[A]^{-1}$ [A] é igual a matriz-identidade, a equação se torna:

$$\{X\} = [A]^{-1}\{B\}$$

Então a equação foi resolvida e {X} determinado. A inversa desempenha um papel na álgebra de matrizes similar à divisão. Entretanto, este não é um método muito eficiente para resolver um sistema de equações.

Sistema de Equações Algébricas Lineares

Fundamentos matemáticos – Representações de equações algébricas lineares na forma matricial.

Em algumas vezes será útil aumentar [A] com {B}. Por exemplo se n=3, isso resulta:

$$[A] = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right]$$

Fazer esta manipulação é útil pois diversas técnicas para resolver sistemas lineares executam operações idênticas na linha dos coeficientes e na constante correspondente do lado direito da equação.

Sistema de Equações Algébricas Lineares

Fundamentos matemáticos – Regras de operações matriciais

Suponha que queremos multiplicar:

$$[Z]=[X][Y]=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 6 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$$

Sistema de Equações Algébricas Lineares

Fundamentos matemáticos – Regras de operações matriciais

$$\Uparrow$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} \leftarrow [Y]$$

$$[X] \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 6 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ ? \\ \\ \end{bmatrix} \leftarrow [Z]$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 6 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 \times 5 + 1 \times 7 = 22 & \\ & \\ & \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 6 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 22 & \\ 8 \times 5 + 6 \times 7 = 82 & \\ & \end{bmatrix}$$

Sistema de Equações Algébricas Lineares

Fundamentos matemáticos – Regras de operações matriciais

O cálculo continua dessa forma, seguindo o alinhamento das linhas e colunas

$$[Z]=\begin{bmatrix} 22 & 29 \\ 82 & 84 \\ 28 & 8 \end{bmatrix}$$

De acordo com essa definição, a multiplicação de matrizes pode ser efetuada apenas quando a primeira matriz tem tantas colunas quanto o número de linhas da segunda matriz resultante

Sistema de Equações Algébricas Lineares

Fundamentos matemáticos – SUBROTINA PARA MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZES

```
SUBROTINA  Mmult (a, b, c, m, n,l)

DO FOR I = 1, n
      DO FOR j = 1, l

             soma = 0
              DO FOR k = 1, m
                     soma = soma + a(i,k)*b(k,j)
               END DO
               c(i,j) = soma

       END DO
END DO
```