INTERPOLAÇÃO

Erros nos Polinômios Interpoladores de Newton

Motivação: A equação (16) no arquivo anterior de Interpolação é parecida com a expansão de Taylor no sentido que os termos são adicionados sequencialmente para capturar o comportamento de ordem superior da função subjacente.

O erro de truncamento para a série de Taylor podia ser, no caso geral, expresso por:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x_{i+1} - x_i)^{n+1} \qquad (1)$$

Onde ξ é algum ponto no intervalo x_i e x_{i+1} . Para um polinômio interpolador de grau n, uma relação análoga para o erro é:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n) \qquad (2)$$

INTERPOLAÇÃO

Onde ξ é algum ponto no intervalo contendo a variável e os dados .

Para essa formula ser útil. A função em questão dever ser conhecida e (n+1) vezes diferenciável.

Em geral, esse não é o caso.

Felizmente, está disponível uma formulação alternativa que não requer conhecimento anterior da função.

Em vez disso, ela usa diferenças divididas finitas para aproximar (n+1)-ésima derivada.

INTERPOLAÇÃO

$$R_n = f[x, x_n, x_{n-1}, \cdots, x_0](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n) \qquad (3)$$

Onde, $f[x, x_n, x_{n-1}, \ldots, x_0]$ é a (n+1)-ésima diferença dividida finita.

Como a equação (3) contém a incógnita $f(x)$, ela não determina o erro.

Entretanto, se estiver disponível um ponto adicional $f(x_{n+1})$, a equação (3) pode ser usada para estimar o erro, como em:

$$R_n \cong f[x_{n+1}, x_n, x_{n-1}, \cdots, x_0](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n) \qquad (4)$$

INTERPOLAÇÃO

Use a equação (4) para fazer uma estimativa do erro para o polinômio interpolador de segundo grau do arquivo 1. Utilize o ponto adicional $f(x_3)=f(5)=1{,}609438$ para obter os resultados.

Solução: Lembre-se que naquele exemplo, o polinômio interpolador de segundo grau fornecia uma estimativa de $f(2) = 0{,}565844$, **a qual representa um erro de $0{,}6931472 - 0{,}565844 = 0{,}1273028$.**

Se não soubéssemos o valor verdadeiro, que é o caso mais comum, a equação (4), junto com o valor adicional em x_3 , poderia ter sido usada para fazer uma estimativa do erro, como em:

$$R_2 = f[x_3, x_2, x_1, x_0](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

$$ou$$

$$R_2 = 0{,}007865529(x-1)(x-4)(x-6)$$

INTERPOLAÇÃO

Onde o valor da diferença dividida finita de terceira ordem é como calculado anteriormente no último exemplo do arquivo 1 de Interpolação. Essa relação pode ser calculada em x=2 por:

$$R_2 = 0,007865529(2-1)(2-4)(2-6) = 0,0629242$$

Que é da mesma ordem de grandeza que o erro verdadeiro.

INTERPOLAÇÃO

Polinômios Interpoladores de Lagrange

Motivação: O polinômio interpolador de Lagrange é simplesmente uma reformulação do polinômio de Newton que evita o cálculo de diferenças divididas.

Ele pode ser representado por:

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) f(x_i) \qquad (5)$$

Onde :

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

INTERPOLAÇÃO

Polinômios Interpoladores de Lagrange

Por exemplo, a versão linear (n=1) seria:

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \qquad (6)$$

Onde :

$$f_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1) \qquad (7)$$

INTERPOLAÇÃO

Polinômios Interpoladores de Lagrange

e a versão de segundo grau seria:

$$f_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f(x_2) \tag{8}$$

O raciocínio por trás da formulação de Lagrange pode ser entendido diretamente percebendo-se que cada termo L_i (x) será 1 em x = x_i e 0 em todos os outros pontos da amostra .

Logo, cada produto L_i (x)f(x_i) assume o valor f(x_i) no ponto x_i da amostra.

Consequentemente, a somatória de todos os produtos indicados na Equação (5) é **o único polinômio de grau n que passa exatamente por todos os n+1 pontos dados**.

INTERPOLAÇÃO

Use um polinômio interpolador de Lagrange de primeiro e de segundo graus para calcular ln 2 com base nos dados fornecidos:

$$x_0 = 1 \qquad f(x_0) = 0$$

$$x_1 = 4 \qquad f(x_1) = 1{,}386294$$

$$x_2 = 6 \qquad f(x_2) = 1{,}791759$$

Solução: O polinômio de primeiro grau (7) pode ser usado para se obter a estimative em x=2.

$$f_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1)$$

$$f_1(2) = \frac{2-4}{1-4} 0 + \frac{2-1}{4-1} 1{,}386294 = 0{,}4620981$$

INTERPOLAÇÃO

De modo semelhante, o polinômio de segundo grau é desenvolvido de acordo com a equação (8).

$$f_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f(x_1)$$
$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f(x_2)$$

$$f_2(x) = \frac{(2-4)(2-6)}{(1-4)(1-6)} 0 + \frac{(2-1)(2-6)}{(4-1)(4-6)} 1,386294$$
$$+ \frac{(2-1)(2-4)}{(6-1)(6-4)} 1,791760 = 0,5658444$$

Como esperado, **ambos os resultados coincidem com os obtidos anteriormente usando-se o polinômio interpolador de Newton**.

INTERPOLAÇÃO

1 – Faça uma estimative do logaritmo (base 10) usando interpolação linear.

a) Interpole entre log 8 = 0,9030900 e log 12 = 1,0791812;
b) Interpole entre log 9 = 0,9542425 e log 11 = 1,0413927.

Para cada interpolação, calcule o erro relative percentual baseado no valor verdadeiro.

2 – Ajuste um polinômio interpolador de Newton de Segundo grau para fazer uma estimative de log 10 do exercício 1 em x = 8, 9 e 11. Calcule o erro relativo percentual verdadeiro.

3 – Ajuste um polinômio interpolador de Newton de terceiro grau usando os dados do exercício 1.

4 – Repita os exercícios de 1 a 3 usando polinômios de Lagrange.