Sistema de Equações Algébricas Lineares

Motivação: **Eliminação de Gauss**

Trataremos de equações algébricas lineares simultâneas que podem ser representadas no caso geral por:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{31}x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n$$

Onde: os a's são coeficientes constantes, os b's são constantes e n representa o número de equações .

A técnica abordada será a **Eliminação de Gauss**, pois envolve combinar equações para eliminar variáveis.

Sistema de Equações Algébricas Lineares

Motivação: **Eliminação de Gauss**

Apesar de ser um dos métodos mais antigos para resolver equações simultâneas, mantém-se como um dos algoritmos mais importantes em uso hoje em dia e é a base da resolução de equações lineares em muitos pacotes de software populares.

RESOLUÇÃO DE UM PEQUENO NÚMERO DE EQUAÇÕES.

Antes de descrever os métodos computacionais, serão descritos vários métodos que são apropriados para resolver um conjunto pequeno de equações simultâneas ($n \leq 3$) e que não exigem um computador:

- O método gráfico;
- A regra de Cramer;
- Eliminação de variáveis.

Sistema de Equações Algébricas Lineares

Método Gráfico

Uma solução gráfica para duas equações pode ser obtida esboçando-se gráficos em coordenadas cartesianas, com um eixo correspondente a x_1 e a x_2 . Como estamos lidando com sistemas lineares, cada equação é uma reta. Isto é ilustrado nas equações abaixo, na forma geral:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

Pode-se isolar x_2 nas duas equações.

$$x_2 = -\left(\frac{a_{11}}{a_{12}}\right)x_1 + \frac{b_1}{a_{12}}$$

$$x_2 = -\left(\frac{a_{21}}{a_{22}}\right)x_1 + \frac{b_2}{a_{22}}$$

Sistema de Equações Algébricas Lineares

Método Gráfico

Assim, as equações agora estão na forma de equações de retas: isto é, x_2 = (inclinação)x_1 + intersecção com o eixo.

Estas retas podem ser traçadas em coordenadas cartesianas com x_2 como a ordenada e x_1 como a abscissa. Os valores de x_1 e x_2 na interseção representam a solução.

Use o método gráfico para resolver o sistema:

$$3x_1 + 2x_2 = 18$$
$$-x_1 + 2x_2 = 2$$

Isolando x_2 nas duas equações:

$$x_2 = -\left(\frac{3}{2}\right)x_1 + 9$$

$$x_2 = \left(\frac{1}{2}\right)x_1 + 1$$

Sistema de Equações Algébricas Lineares

Método Gráfico

A solução é a interseção das duas retas em x = 4 e x = 3. Esses resultados podem ser verificados substituindo esses valores nas equações originais:

$$3(4) + 2(3) = 18$$

$$-(4) + 2(3) = 2$$

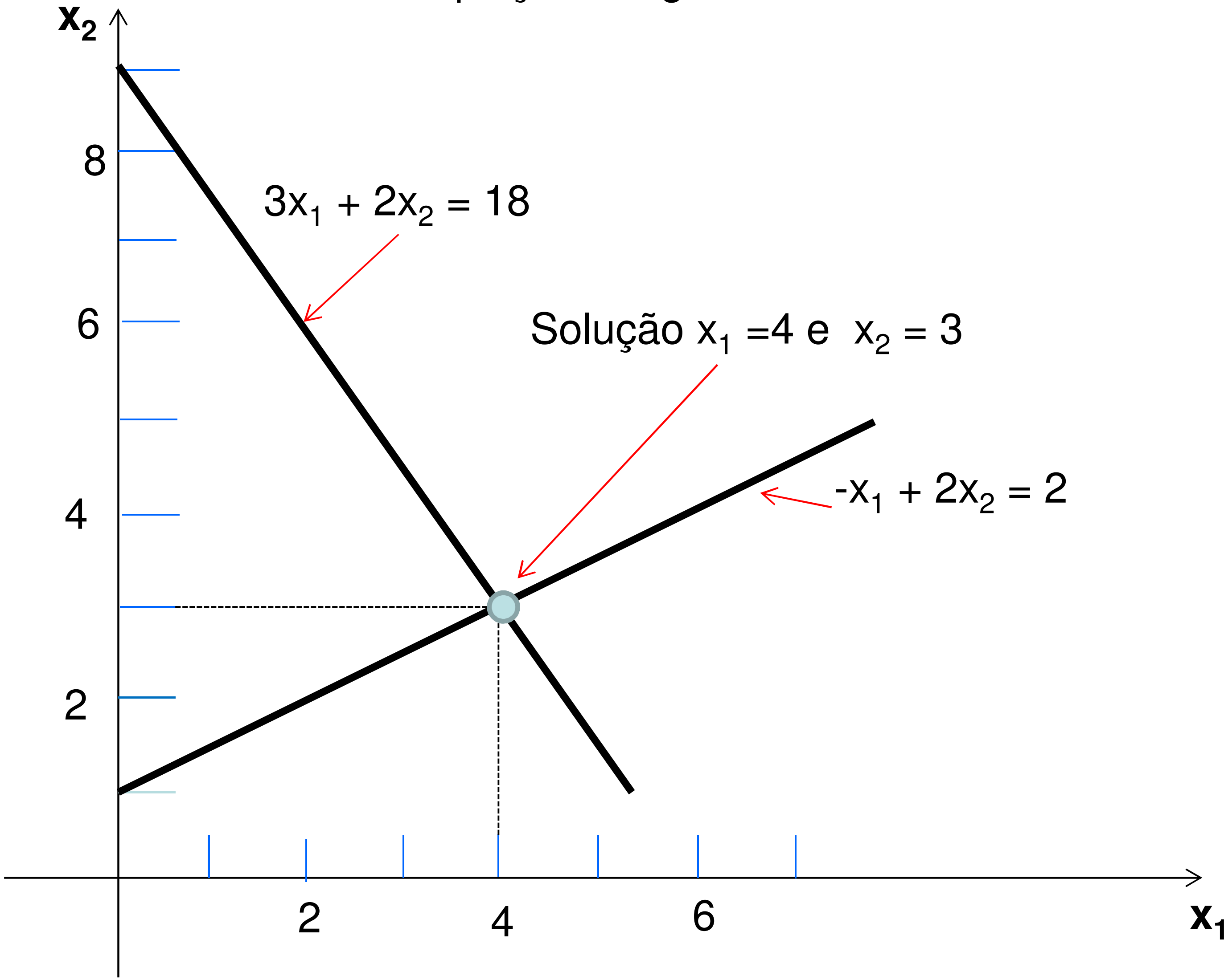


Figura (1)

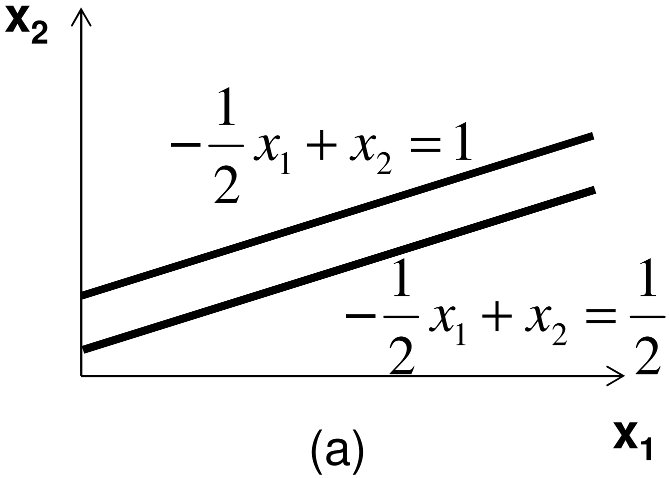
Sistema de Equações Algébricas Lineares

Método Gráfico

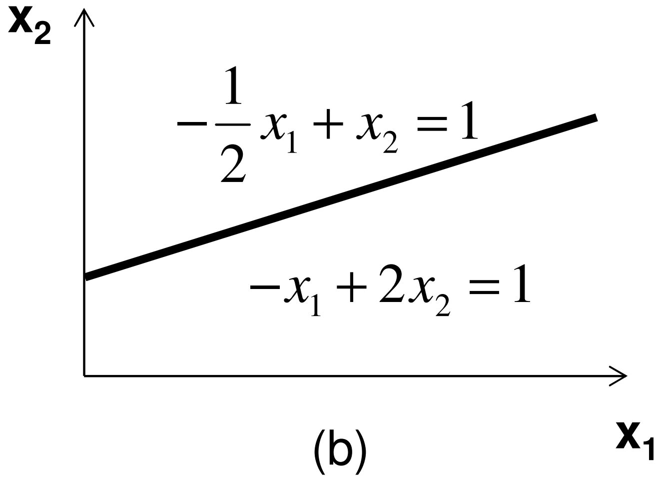
Para três equações simultâneas, cada equação será representada por um plano em um um sistema de coordenadas tridimensional. O ponto no qual os planos se interceptam irá representar a solução. Para mais de três equações, os métodos gráficos não funcionam e, consequentemente, têm pouco valor prático para resolver equações simultâneas. Entretanto são úteis para visualizar propriedades das soluções.

As figuras a seguir descrevem três casos que podem ser problemáticos quando se resolve um conjunto de equações lineares.

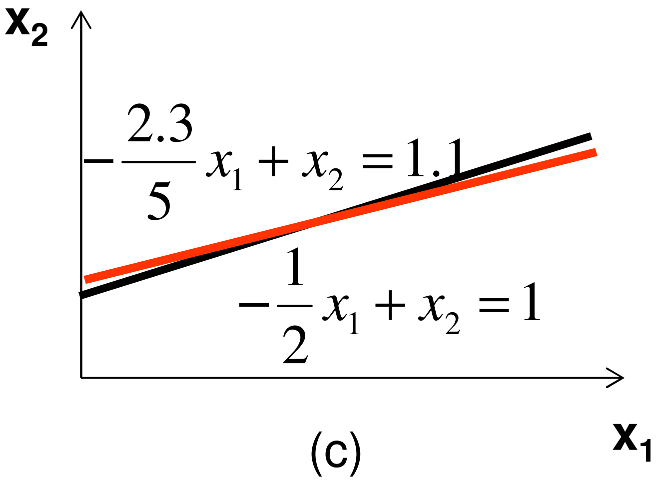
Método Gráfico



(a)



(b)



(c)

Sistema de Equações Algébricas Lineares

Método Gráfico

• O caso (a) mostra o caso em que duas equações representam retas paralelas. Neste caso, não há solução, pois as retas não se cruzam.

• O caso (b) mostra a situação em que duas retas são coincidentes. Neste caso há um número infinito de soluções.

(a) e (b) representam sistemas singulares.

- O **caso (c)** representa **sistemas que estão muito próximo de serem singulares** e podem causar problemas. Esses sistemas são chamados de mal condicionados.

  Graficamente isso corresponde ao fato que é difícil identificar o ponto exato no qual as retas se interceptam.

  Os sistemas mal condicionados também causarão problemas quando forem encontrados durante soluções numéricas de equações lineares, porque ***são extremamente sensíveis a erros de arredondamento.***

Sistema de Equações Algébricas Lineares

Determinantes e a Regra de Cramer

A regra de Cramer é outra técnica de solução que é bem mais adequada a um pequeno número de equações.

Determinates – pode ser ilustrado para um conjunto de 3 equações:

$$[A]\{X\}=\{B\}$$

Onde [A] é a matriz de coeficientes:

$$[A]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Sistema de Equações Algébricas Lineares

O determinante D desse *sistema é formado a partir dos coeficientes da equação*, como em:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Apesar de o *determinante D e a matriz de coeficientes [A]* serem compostos dos mesmos elementos, *são conceitos matemáticos completamente diferentes*. Por essa razão, são distinguidos visualmente usando-se colchetes para delimitar a matriz e linhas retas para o delimitar o determinante. Em contraste com a matriz, ***o determinante*** é um único número.

Por exemplo, o valor do determinante de segunda ordem:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Sistema de Equações Algébricas Lineares

É calculado por :

$$D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Para o caso de terceira ordem, o valor numérico do determinante pode ser calculado por:

$$D = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \qquad (2)$$

Onde os determinantes dois por dois são chamados de **menores**

Calcule os valores dos determinantes dos sistemas dados nas figuras anteriores.

Sistema de Equações Algébricas Lineares

Solução: Para a figura (1):

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3(2) - 2(-1) = 8$$

Para a figura (a):

$$D = \begin{vmatrix} -(1/2) & 1 \\ -(1/2) & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}(1) - 1(-\frac{1}{2}) = 0$$

Para a figura (b):

$$D = \begin{vmatrix} -(1/2) & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}(2) - 1(-1) = 0$$

Para a figura (c):

$$D = \begin{vmatrix} -(1/2) & 1 \\ -(2,3/5) & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}(1) - 1(-\frac{2,3}{5}) = 0,04$$

Sistema de Equações Algébricas Lineares

Nos resultados anteriores, verifica-se que os ***sistemas singulares têm determinantes nulos***. Além disso, os resultados sugerem que o *sistema que é quase singular caso (c), tem um determinante próximo a zero*.

Regra de Cramer: Essa regra estabelece que cada incógnita em um sistema de equações algébricas lineares pode ser expressa como uma fração de dois determinantes, com denominador D e com o numerador obtido a partir de D trocando-se a coluna de coeficientes da incógnita em questão pelas constantes b_1 , b_2 ,..., b_n . Por exemplo, x_1 é cálculada por:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{D}$$

Sistema de Equações Algébricas Lineares

Use a regra de Cramer para resolver.

$$0,3x_1 + 0,52x_2 + x_3 = -0,01$$

$$0,5x_1 + x_2 + 1,9x_3 = 0,67$$

$$0,1x_1 + 0,3x_2 + 0,5x_3 = -0,44$$

O determinante D pode ser escrito como:

$$D = \begin{vmatrix} 0,3 & 0,52 & 1 \\ 0,5 & 1 & 1,9 \\ 0,1 & 0,3 & 0,5 \end{vmatrix}$$

Sistema de Equações Algébricas Lineares

Os determinantes menores são:

$$A_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1,9 \\ 0,3 & 0,5 \end{vmatrix} = 1(0,5) - 1,9(0,3) = -0,07$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} 0,5 & 1,9 \\ 0,1 & 0,5 \end{vmatrix} = 0,5(0,5) - 1,9(0,1) = 0,06$$

$$A_3 = \begin{vmatrix} 0,5 & 1 \\ 0,1 & 0,3 \end{vmatrix} = 0,5(0,3) - 1(0,1) = 0,05$$

Esses podem ser usados para calcular o determiante, como em (2):

$$D = 0,3(-0.07) - 0,52(0,06) + 1(0,05) = -0,0022$$

Sistema de Equações Algébricas Lineares

Aplicando a regra de Cramer, a solução é:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -0,01 & 0,52 & 1 \\ 0,67 & 1 & 1,9 \\ -0,44 & 0,3 & 0,5 \end{vmatrix}}{-0,0022} = \frac{0,03278}{-0,0022} = -14,9$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 0,3 & -0,01 & 1 \\ 0,5 & 0,67 & 1,9 \\ 0,1 & -0,44 & 0,5 \end{vmatrix}}{-0,0022} = \frac{0,0649}{-0,0022} = -29,5$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 0,3 & 0,52 & -0,01 \\ 0,5 & 1 & 0,67 \\ 0,1 & 0,3 & -0,44 \end{vmatrix}}{-0,0022} = \frac{-0,04356}{-0,0022} = 19,8$$

Sistema de Equações Algébricas Lineares

Acima de 3 equações, a regra de Cramer torna-se impraticável, pois à medida que o número de equações cresce, os determinantes demoram mais para ser calculados (inclusive por computadores).

Consequentemente, precisamos de melhores alternativa.

Algumas dessas alternativas são baseadas na última técnica de solução não computacional – A eliminação de variáveis.

Sistema de Equações Algébricas Lineares

A eliminação de variáveis

A eliminação de variáveis pela combinação de equações é uma abordagem algébrica que pode ser ilustrada para um conjunto de duas equações:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \quad (2.1)$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \quad (2.2)$$

- A estratégia básica é multiplicar as equações por constantes de modo que uma das variáveis seja eliminada quando as duas equações são combinadas.

- O resultado é uma única equação que pode ser resolvida determinando a variável restante.

- Então, esse valor pode ser substituído em qualquer uma das equações originais para calcular a outra variável.

Sistema de Equações Algébricas Lineares

A equação (2.1) pode ser multiplicada por a_{21} e a equação (2.2) por a_{11} para fornecer:

$$a_{11}a_{21}x_1 + a_{12}a_{21}x_2 = b_1 a_{21} \qquad (2.3)$$

$$a_{21}a_{11}x_1 + a_{22}a_{11}x_2 = b_2 a_{11} \qquad (2.4)$$

Subtrair (2.3) de (2.4) irá, portanto, eliminar o termo x da equação, dando:

$$a_{22}a_{11}x_2 - a_{12}a_{21}x_2 = b_2 a_{11} - b_1 a_{21}$$

Que pode ser resolvida por:

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \qquad (2.5)$$

A equação (2.5) pode ser ser substituída em (2.2), a qual é resolvida por:

Sistema de Equações Algébricas Lineares

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \qquad (2.6)$$

Observe que as equações (2.5) e (2.6) seguem diretamente da regra de Cramer, a qual afirma:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

Sistema de Equações Algébricas Lineares

Use a eliminação de variáveis para resolver:

$$3x_1 + 2x_2 = 18$$
$$-x_1 + 2x_2 = 2$$

Usando (2.5) e (2.6)

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} = \frac{2(18) - 2(2)}{3(2) - 2(-1)} = 4$$
$$x_2 = \frac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} = \frac{3(2) - (-1)18}{3(2) - 2(-1)} = 3$$

Este sistema pode ser estendido a sistemas com mais de 2 ou 3 equações. Porém, os númerosos cálculos necessários para sistemas maiores tornam o método extremamente tedioso de ser feito à mão.

Porém , a técnica pode ser formalizada e rapidamente programada para o computador.

Sistema de Equações Algébricas Lineares

Eliminação de Gauss Ingênua

A eliminação de variáveis foi usada para resolver um par de equações simultâneas. O processo consistiu de dois passos:

• Manipular as equações para eliminar uma das variáveis. O resultado desse passo de *eliminação* foi que obteve uma equação com uma variável.

• Consequentemente, essa equação pode ser resolvida diretamente e o resultado *substituído regressivamente* em uma das equações originais para determinar a variável remanescente.

• Esse sistema pode ser estendido a conjuntos maiores de equações com um algoritmo para eliminar variáveis e substituir regressivamente.

• A eliminação de Gauss é o mais básico desses esquemas.

Sistema de Equações Algébricas Lineares

Duas fases da Eliminação de Gauss: eliminação progressiva e substituição regressiva:

$$\begin{rcases} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \vdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \vdots & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \vdots & b_3 \end{bmatrix} \\ \Downarrow \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \vdots & b_1 \\ & a'_{22} & a'_{23} & \vdots & b'_2 \\ & & a''_{33} & \vdots & b''_3 \end{bmatrix} \end{rcases} \text{Eliminação Progressiva}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{rcases} x_3 = b''_3 / a''_{33} \\ x_2 = (b'_2 - a'_{23}x_3) / a'_{22} \\ x_1 = (b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3) / a_{11} \end{rcases} \text{Substituição Regressiva}$$

Sistema de Equações Algébricas Lineares

Eliminação de Gauss Ingênua

Então trabalharemos com técnicas sistemáticas de eliminação progressiva e substituição regressiva.

O método a seguir é chamado de eliminação de Gauss ingênua por que não evita o problema de divisão por zero.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \qquad (2.7a)$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{31}x_n = b_2 \qquad (2.7b)$$

$$\vdots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \qquad (2.7c)$$

Sistema de Equações Algébricas Lineares

Eliminação progressiva de variáveis:

- Do mesmo modo anterior, no caso da solução de 2 equações, a técnica para **n equações** consiste em duas fases: a eliminação de variáveis e a solução por substituição regressiva.

- A primeira fase é projetada para reduzir o conjunto de **equações a um sistema triangular superior.**

- O passo inicial será eliminar a primeira variável , $\mathbf{x_1}$, da segunda até a n-ésima equação.

- Para fazer isso multiplique a Eq. (2.7a) por a_{21} / a_{11} para obter:

Sistema de Equações Algébricas Lineares

$$a_{21}x_1 + \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12}x_2 + \cdots + \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{1n}x_n = b_1 \qquad (2.8)$$

Agora, essa equação é subtraída de (2.7b) para se obter:

$$\left(a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12}\right)x_2 + \cdots + \left(a_{2n} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{11}\right)x_n = b_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}}b_1$$

ou

$$a_{22}^{'}x_2 + \cdots + a_{2n}^{'}x_n = b_2^{'}$$

Onde as linhas indicam os elementos que foram modificados de seu valor original.

O processo é repetido para as equações seguintes. Por exemplo:

Sistema de Equações Algébricas Lineares

Multiplique a Eq. (2.7a) por a_{31} / a_{11} e o resultado é subtraído da terceira equação. Repetindo o processo para as equações restantes obtém-se o seguinte sistema modificado:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \qquad (2.9a)$$

$$a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2 \qquad (2.9b)$$

$$a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 + \cdots + a'_{3n}x_n = b'_3 \qquad (2.9c)$$

.

.

.

$$a'_{n2}x_2 + a'_{n3}x_3 + \cdots + a'_{nn}x_n = b'_n \qquad (2.9d)$$

Sistema de Equações Algébricas Lineares

Nos passos anteriores, (2.9a) é chamada de equação pivô e a_{11} é chamado de coeficiente ou elemento pivô.

• Observe que o processo de multiplicar a primeira linha por a_{21} / a_{11} é equivalente a dividi-la por a_{11} e multiplicá-la por a_{21} . Essa operação de divisão, é chamada de normalização.

• É importante esta distinção porque um elemento pivô nulo pode interferir na normalização, pois provoca uma divisão por zero.

Agora vamos repetir o processo para eliminar a segunda variável das equações (2.9c). Para isso multiplicamos (2.9b) por a'_{32} / a'_{22} e subtraia o resultado de (2.9c). É feito uma eliminação semelhante nas equações restantes para obter:

Sistema de Equações Algébricas Lineares

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2$$

$$a''_{33}x_3 + \cdots + a''_{3n}x_n = b''_3$$

.

.

.

$$a''_{n3}x_3 + \cdots + a''_{nn}x_n = b''_n$$

Onde as linhas duplas indicam que os elementos que foram modificados duas vezes.

O processo pode continuar usando as equações pivô remanescentes. O processo se encerra ao usar (n-1)-ésima equação para eliminar o termo x da n-ésima equação.

Sistema de Equações Algébricas Lineares

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \qquad (2.10a)$$

$$a_{22}^{'}x_2 + a_{23}^{'}x_3 + \cdots + a_{2n}^{'}x_n = b_2^{'} \qquad (2.10b)$$

$$a_{33}^{''}x_3 + \cdots + a_{3n}^{''}x_n = b_3^{''} \qquad (2.10c)$$

.

.

.

$$a_{nn}^{(n-1)}x_n = b_n^{(n-1)} \qquad (2.10d)$$

Sistema de Equações Algébricas Lineares

Substituição-regressiva

A equação (2.10d) pode agora ser resolvida para determinar x_n :

$$x_n = \frac{b_n^{n-1}}{a_{nn}^{n-1}} \qquad (2.11)$$

Esse resultado pode ser substituído na (n-1)-ésima equação para determinar x_{n-1} . C processo é repetido para determinar os x's remanescentes, de acordo com a seguinte fórmula:

$$x_i = \frac{b_i^{(i-1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(i-1)} x_j}{a_{ii}^{(i-1)}} \; para\ i = n-1, n-2, \ldots, 1 \qquad (2.12)$$

Sistema de Equações Algébricas Lineares

(a)

```
DOFOR  k=1, n-1
  DOFOR  i=k+1,n
    fator = a_{i,k} / a_{k,k}
    DOFOR  j = K+1 até n
      a_{i,j} = a_{i,j} – fator*b_k
    END DO
    b_i = b_i, – fator*b_k
  END DO
END DO
```

(b)

```
x_n = b_n / a_{n,n}
DOFOR  i=n-1,1,-1
  soma= b_i
  DOFOR  j=i+1,n
  soma=soma - a_{i,j} *x_j
  END DO
  x_i = b_i / a_{i,I}
END DO
```

(a) Eliminação progressiva - (b) substituição regressiva

(a) O laço exterior move-se para baixo na matriz de uma linha pivô para a próxima.
O laço do meio move-se para baixo da linha pivô, para cada uma das linhas subsequentes onde a eliminação é efetuada.
O laço interior progride ao longo das colunas para eliminar ou modificar os elementos de uma linha particular.

No pseudo código, observe a semelhança com a multiplicação de matrizes.

É utilizada uma variável , soma, para acumular as somas de (2.12). Isso resulta em uma execução um pouco mais rápida do que se as somas fossem acumuladas em b_i .

Mais importante, permite um aperfeiçoamento eficiente se a variável, soma, for declada em dupla precisão.

Sistema de Equações Algébricas Lineares

Número de flops para a eliminação de Gauss.

n	Eliminação	Substituição regressiva	Total Flops	Percentagem devido a Eliminação
10	705	100	805	87,58%
100	671550	10000	681550	98,53%
1000	$6{,}67 \times 10^8$	1×10^6	$6{,}68 \times 10^8$	99,85%

Sistema de Equações Algébricas Lineares

Use a eliminação de Gauss para resolver

$$3x_1 - 0,1x_2 - 0,2x_3 = 7,85 \qquad (E1)$$
$$0,1x_1 + 7x_2 - 0,3x_3 = -19,3 \qquad (E2)$$
$$0,3x_1 - 0,2x_2 + 10x_3 = 71,4 \qquad (E3)$$

Use seis algarismos para os cálculos

Solução: A primeira parte do processo é a eliminação progressiva. Multiplique (E1) por (0,1/3) e subtraia o resultado de (E2) para obter:

$$7,00333x_2 - 0,293333x_3 = -19,5617$$

Então multiplique (E1) por (0,3)/3 e subtraia de (E3) para eliminar x_1 . Depois dessas operações, o conjunto de equações torna-se:

Sistema de Equações Algébricas Lineares

$$\begin{aligned} 3x_1 \quad -0,1x_2 \quad -0,2x_3 &= 7,85 \qquad (E4) \\ 7,0033x_2 \quad -0,29333x_3 &= -19,5617 \qquad (E5) \\ -0,190000x_2 \quad +10,0200x_3 &= 70,6150 \qquad (E6) \end{aligned}$$

Para a completa eliminação progressiva , x2 deve ser removida de (E6). Para isso multiplicamos (E5) por (-0,190000)/7,0033 e subtraímos o resultado de (E6). Isso elimina x_2 da terceira equação e reduz o sistema para um sistema triangular superior.

$$\begin{aligned} 3x_1 - \quad 0,1x_2 - \quad 0,2x_3 &= 7,85 \qquad (E7) \\ 7,0033x_2 - 0,29333x_3 &= -19,5617 \qquad (E8) \\ 10,0120x_3 &= 70,0843 \qquad (E9) \end{aligned}$$

Sistema de Equações Algébricas Lineares

Agora é possível resolver por substituição regressiva. Primeiro, (E9) pode ser resolvida para determinar:

$$x_3 = \frac{70,0843}{10,0120} = 7,000$$

Obtenha x_2 e x_1 .

Sistema de Equações Algébricas Lineares

Exercícios

1 – Para o conjunto de equações

$$
\begin{aligned}
2x_2 \qquad\qquad &+ 5x_3 = 9 \\
2x_1 \quad + x_2 \quad &+ x_3 = 9 \\
3x_1 \quad + x_2 &= 10
\end{aligned}
$$

(a) Calcule o Determinante

(b) Use a regra de Cramer para determinar os x´s.

(c) Substitua os resultados nas equações originais para verificá-los.

Sistema de Equações Algébricas Lineares

Exercícios

2 – Dada as equações:

$$
\begin{aligned}
10x_1 \quad &+ 2x_2 \quad - x_3 = 27 \\
-3x_1 \quad &- 6x_2 \quad + 2x_3 = -61,5 \\
x_1 \quad &+ x_2 \quad + 5x_3 = -21,5
\end{aligned}
$$

(a) Resolva por eliminação ingênua de Gauss.

(b) Substitua seus resultados nas equações originais para verificar as respostas.