Universidade Católica do Salvador
Escola de Tecnologias/ Engenharias e Arquitetura
Curso: Bacharelado em Engenharias 2024.1
Cálculo I Professora: Odete Amanda

1. Limite e continuidade de uma função

Considerando uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com domínio $D(f)$ e $x_0 \in D(f)$, definimos:

1.1 Vizinhança de x_0

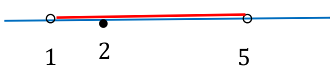
Qualquer intervalo aberto que contém x_0. Indica-se: $V(x_0)$.

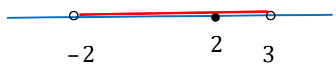
Exemplo 1

Para $x_0 = 2$, uma vizinhança é $V(2) = (1, 5)$;

Outra vizinhança é $V(2) = (-2, 3)$.

Graficamente:





1.1.1 Vizinhança reduzida de x_0 ou Vizinhança perfurada de x_0

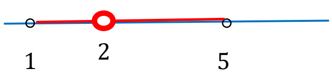
Qualquer vizinhança menos x_0.

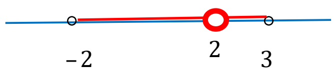
Indica-se: $V_{red}(x_0) = V(x_0) \setminus \{x_0\}$.

Exemplo 2

Para $x_0 = 2$: $V_{red}(2) = (1, 5) - \{2\}$ ou $V_{red}(2) = (-2, 3) - \{2\}$.

Graficamente:





1.1.2 Vizinhança simétrica de x_0, de raio $r \in \mathbb{R}$

Qualquer intervalo que tem x_0 como elemento central.

Indica-se: $V_r(x_0) = (x_0 - r, x_0 + r)$.

Exemplo 3

Para $x_0 = 2$ e $r = 1$: $V_1(2) = (1, 3)$ Para $x_0 = 2$ e $r = 3$: $V_3(2) = (-1, 5)$

1.1.3 Vizinhança lateral de x_0

Qualquer intervalo aberto que tenha x_0 numa de suas extremidades:

$(a, x_0) \to$ vizinhança lateral à esquerda

$(x_0, b) \to$ vizinhança lateral à direita

Caso particular: **Vizinhança de $\pm\infty$**

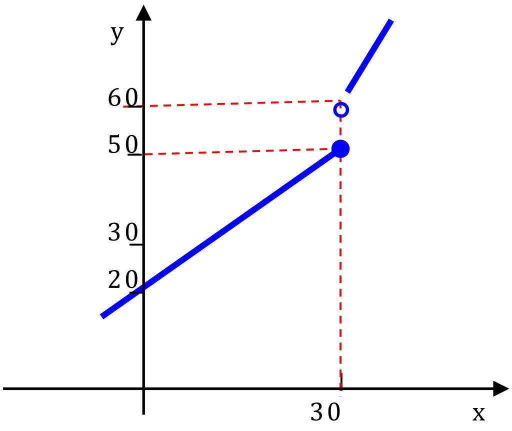
Qualquer intervalo aberto que tenha $+\infty$ como extremo superior ou $-\infty$ como extremo inferior.

$V(-\infty) = (-\infty, M)$

$V(+\infty) = (M, +\infty)$, onde M é um número real arbitrariamente grande ou pequeno.

Vamos estudar o conceito de limite através de diversos exemplos.

1.2 Noção intuitiva: Limites laterais



Situação 1

Considere a função $f(x) = \begin{cases} x + 20; x \leq 30 \\ 2x\,; x > 30 \end{cases}$, representada pelo gráfico ao lado.

Podemos verificar que:

D(f) = f(0) =

Im(f) = f(30) =

Observando o gráfico, responda:

O quê acontece com as imagens y = f(x) quando ...

(I) ... x tende a 30(se aproxima de 30) pela direita?

(II) ... x tende a 30 (se aproxima de 30) pela esquerda?

1.2.1 Nota:

Os números 60 e 50, neste caso, são chamados, respectivamente, de <u>limites laterais</u>, <u>à direita e à esquerda</u>, de 30.

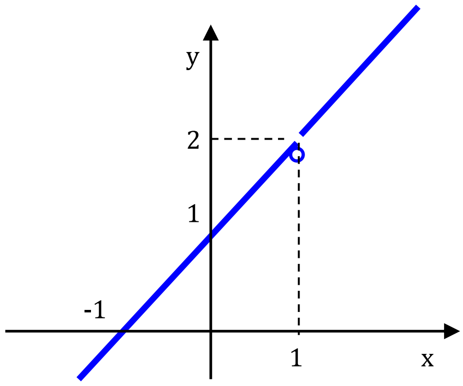
<u>Indicamos:</u>

$$\lim_{x \to 30^+} f(x) = 60 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 30^-} f(x) = 50$$

<u>Leitura:</u> limite de f(x), quando x tende a 30, pela direita é 60.
limite de f(x), quando x tende a 30, pela esquerda é 50.

Situação 2

Considere a função $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$, representada pelo gráfico ao lado.



Observe o gráfico com atenção e determine:

f(0) = D(f) =

f(1) = Im(f) =

zero da função:

Agora responda:

O quê acontece com as imagens y = f(x) quando...

(I)... x tende a 1 pela direita? (II) ... x tende a 1 pela esquerda?

....

Simbolicamente escrevemos: ....

Nota:

Você deve ter notado que $1 \notin D(f)$, mas, mesmo assim, podemos saber qual o comportamento da função na sua vizinhança.

1.3 Existência do limite

Consideremos uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com domínio $D(f)$ e $x_0 \in \mathbb{R}$. Diz-se que existe o limite de $f(x)$ quando x tenda a x_0 quando os limites laterais de $f(x)$ quando x tenda a x_0 são iguais.

Notação:

$$\textbf{Se} \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x), \textbf{ então } \text{existe} \lim_{x \to x_0} f(x)$$

(I) Agora, volte à situação 1 e responda:

A) Existe $\lim\limits_{x \to 30} f(x)$? ( ) Não ( ) Sim

Por quê?

B) Existe $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$? ( ) Não ( ) Sim

Por quê?

(II) Agora, volte à situação 2 e responda:

C) Existe $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$? ( ) Não ( ) Sim

Por quê? Então: $\lim\limits_{x \to -1} f(x) =$

D) Existe $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$? ( ) Não ( ) Sim

Por quê? Então: $\lim\limits_{x \to 0} f(x) =$

E) Existe $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$? ( ) Não ( ) Sim

Por quê? Então: $\lim\limits_{x \to 1} f(x) =$

Não há obrigatoriedade de x_0 pertencer ao domínio de $f(x)$ para que exista $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$!

Só conseguimos determinar o limite visualizando o gráfico? **Não.**

Existem alguns teoremas e algumas regras práticas que nos permitem determinar o limite de uma função num determinado ponto, sem conhecermos o seu gráfico.

1.3.1 Definição formal de limites

Seja f uma função definida num intervalo aberto, contendo x_0; exceto possivelmente no próprio x_0 e L um número real.

Diz-se que L é o limite da função f quando x tende para x_0 se, e somente se, $f(x)$ fica mais perto de L quando x se aproxima de x_0.

Indicamos: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$.

Simbolicamente:

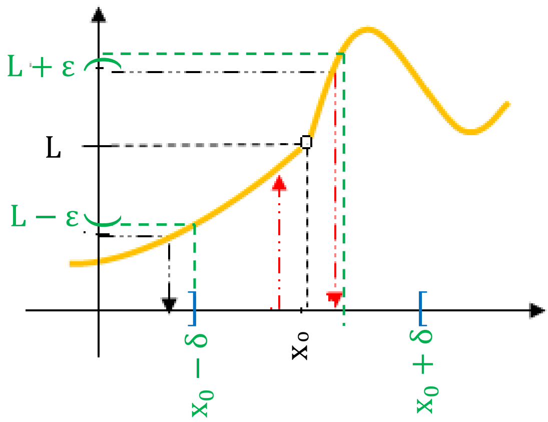
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \leftrightarrow [\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0; 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon],$$

ou, equivalentemente:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \leftrightarrow [\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; \forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta) \Rightarrow f(x) \in (L - \varepsilon; L + \varepsilon)].$$

Essa definição pode ser assim explicada:

Dado um $\varepsilon > 0$, se desejamos $f(x)$ próximo de L, devemos encontrar um valor $\delta = f(\varepsilon) > 0$ bem pequeno capaz de fazer com que x fique bem próximo de x_0.



1.3.2 Limites laterais

Limite lateral à direita

Seja f uma função definida em um intervalo aberto ($\mathbf{x_0}$, c).

Diz-se que f(x) tende à direita para L quando x tende para $\mathbf{x_0}$ se, e somente se, f(x) fica mais perto de L quando x se aproxima de $\mathbf{x_0}$.

Ou seja, L é o limite à direita da função f quando x tende para $\mathbf{x_0}$ se para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$, tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $\mathbf{x_0} < x < \mathbf{x_0} + \delta$.

Indicamos:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$$

Limite lateral à esquerda

Seja f uma função definida em um intervalo aberto (d, $\mathbf{x_0}$).

Diz-se que f(x) tende à esquerda para L quando x tende para $\mathbf{x_0}$ se, e somente se, f(x) fica mais perto de L quando x se aproxima de $\mathbf{x_0}$.

Ou seja, L é o limite à esquerda da função f quando x tende para $\mathbf{x_0}$ se para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$, tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $\mathbf{x_0} - \delta < x < \mathbf{x_0}$.

Indicamos:

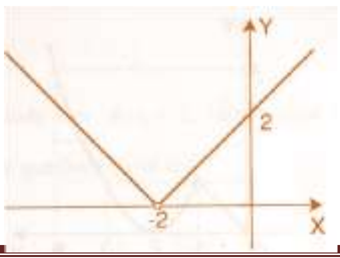
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$$

1.3.3 Teorema

O limite $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe e é igual a L se, e somente se, ambos os limites laterais $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ e $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ existem e tem o mesmo valor comum L.

Exemplos 4

1. Considere as funções definidas pelos gráficos dados e, intuitivamente, encontre, se existir:

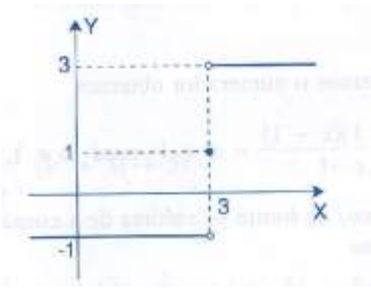


a) $\lim_{x \to -2^-} f(x) =$

b) $\lim_{x \to -2^+} f(x) =$

c) $\lim_{x \to -2} f(x) =$

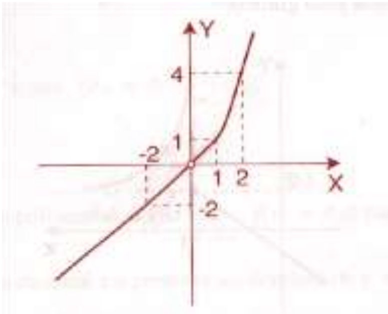
d) $\lim_{x \to +\infty} f(x) =$



e) $\lim\limits_{x\to 3^-} g(x) =$ g) $\lim\limits_{x\to 3} g(x) =$

f) $\lim\limits_{x\to 3^+} g(x) =$ h) $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x) =$

2. Seja f(x) a função definida pelo gráfico ao lado. Intuitivamente, encontre, se existir:

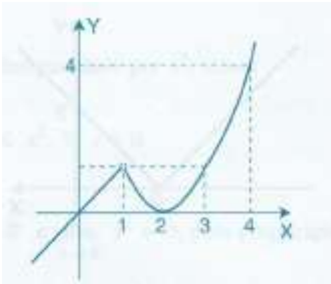


a) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) =$ d) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) =$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) =$ e) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) =$

c) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) =$ f) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) =$

3. Seja f(x) a função definida pelo gráfico ao lado. Intuitivamente, encontre, se existir:

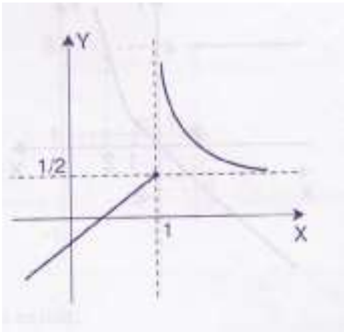


a) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) =$

b) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) =$ d) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) =$

c) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) =$ e) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) =$

4. Seja f(x) a função definida pelo gráfico ao lado. Intuitivamente, encontre, se existir:



a) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) =$

b) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) =$ d) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) =$

c) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) =$ e) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) =$

1.3.4 Teorema (Unicidade do limite)

Se f(x) é uma função definida numa vizinhança de x_0 e existe um limite de f(x) quando x tende a x_0, então este limite é único.

1.4 Propriedades operatórias

Muitas funções podem ser obtidas como somas, diferenças, produtos, quocientes e potências de funções simples. Introduziremos propriedades que podem ser usadas para simplificar as funções mais elaboradas.

Sejam f e g duas funções numéricas reais, K uma constante, A e B números reais e $x_0 \in \mathbb{R}$.

Se $f(x) = K$ onde K é constante, então $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} K = K$.

Se $f(x) = x$, então $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$.

Além disso, para $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = B$, tem-se

L1. $\lim_{x \to x_0} K \cdot f(x) = K \cdot \lim_{x \to x_0} f(x) = K \cdot A.$

L2. $\lim_{x \to x_0} [\, g(x) \pm f(x)] = \lim_{x \to x_0} g(x) \pm \lim_{x \to x_0} f(x) = B \pm A$

L3. $\lim_{x \to x_0} [\, g(x) \cdot f(x)] = \lim_{x \to x_0} g(x) \cdot \lim_{x \to x_0} f(x) = B \cdot A$

L4. $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)} = \frac{A}{B}$, desde que $\lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0.$

L5. $\lim_{x \to x_0} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \to x_0} f(x)\right]^n = A^n.$

L6. $\lim_{x \to x_0} e^{f(x)} = e^{\left[\lim_{x \to x_0} f(x)\right]} = e^A$

L7. $\lim_{x \to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to x_0} f(x)} = \sqrt[n]{A}$

L8. $\lim_{x \to x_0} (f \circ g)(x) = \lim_{u \to u_0} f(u)$, desde que $g(x)$ seja contínua e $g(x_0) = u_0$

Exemplos 5

Calcule os seguintes limites

A) $\lim_{x \to 2} \left(3x^2 - 5x + 2\right)$

B) $\lim_{x \to 2} \frac{3x+2}{x^2 - 6x + 5}$

C) $\lim_{x \to -1} \frac{3x^2 - 5x + 4}{2x+1}$

D) $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{2x^2 - x + 1}}{3x - 2}$

E) $\lim_{x \to 2} \left(\frac{x^2 - 2x - 5}{-x^2 + 3x + 4}\right)^3$

F) $\lim_{x \to -2} \sqrt[3]{\frac{x^3 + 2x^2 - 3x + 2}{x^2 + 4x + 3}}$

Em algumas situações caímos em situações não tão confortáveis!

$\lim_{x \to 0} \frac{-|x|}{x} =$ $\qquad$ $\lim_{x \to 1} \left(\frac{x^2 - 1}{x - 1}\right) =$

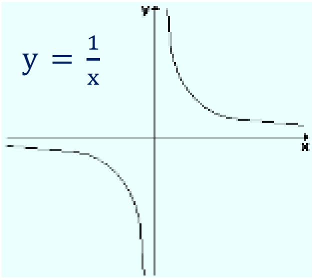
Situações como essas serão tratadas com mais detalhes logo a seguir!

1.4.1 Observação

Podemos ter $\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = B$ sem que exista $\lim_{x \to x_0} f(x)$ e/ou $\lim_{x \to x_0} g(x)$.

Exemplo 6

Para as funções $f(x) = \frac{1}{x}$ e $g(x) = -\frac{1}{x}$ não existe limite na vizinhança de zero, mas existe limite da função $h(x) = f(x) + g(x)$.



Veja:

$\nexists \lim_{x \to 0} f(x)$ pois, quando $x \to 0^+$ temos $f(x) \to +\infty$; $x \to 0^-$ temos $f(x) \to -\infty$

e $\nexists \lim_{x \to 0} g(x)$, quando $x \to 0^+$ temos $f(x) \to -\infty$; $x \to 0^-$ temos $f(x) \to +\infty$

Mas

$$\lim_{x \to 0} h(x) = \lim_{x \to 0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to 0} \left[\frac{1}{x} + \left(-\frac{1}{x} \right) \right] = \lim_{x \to 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x} \right] = \lim_{x \to 0} 0 = 0 .$$

1.5 Continuidade de funções

A ideia de função contínua pode ser uma compreensão do que entendemos como algo que é contínuo, sem interrupção; em outras palavras, como sendo aquela cujo gráfico não apresenta quebra ou ruptura.

Uma função pode ser contínua em alguns pontos do seu domínio, mas pode não ser contínua no todo.

Vejamos:

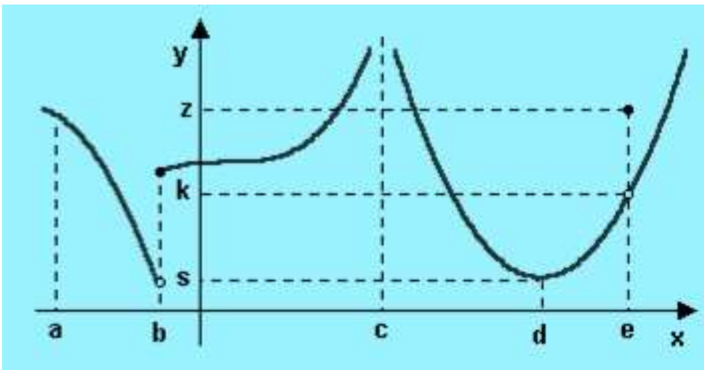
1.5.1 Definição.

Seja f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Diz-se que a função f é contínua em $x_0 \in \mathbb{R}$ se, e somente se:

(i) $\exists\ f(x_0)$ (ii) $\exists \lim_{x \to x_0} f(x)$ (iii) $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Veja que a primeira condição obriga que x_0 seja pertencente ao domínio da função!

Exemplo 7



Analisando a continuidade da função h(x) nos pontos indicados no eixo dos x.

(i) h(x) é continua em d, pois h(d) = s e $\lim_{x \to d} h(x) = s$ já que $\lim_{x \to d^-} h(x) = \lim_{x \to d^+} h(x) = s$.

(ii) h(x) não é continua em c, pois, apesar de $\exists \lim_{x \to c} h(x) = +\infty$, não existe h(c).

(iii) h(x) não é continua em e, pois, apesar de $\exists \lim_{x \to e} h(x) = k$, $\lim_{x \to e} h(x) \neq z = h(e)$.

(iv) h(x) não é continua em b, pois, apesar de $\exists\ h(b) = r$, onde r é tal que $k < r < z$, $\nexists \lim_{x \to b} h(x)$, já que $\lim_{x \to b^-} h(x) = s$ e $\lim_{x \to b^+} h(x) = r$.

(v) h(x) é continua em a!!

1.5.2 Observação.

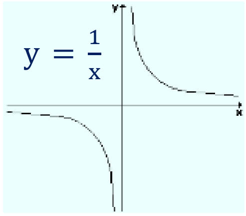
Os pontos em que determinada função não é contínua, por qualquer das exigências não cumpridas, são denominados pontos de descontinuidade.

1.5.3 Definição.

Seja f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Diz-se que a função f é contínua se, e somente se f é contínua em todos os pontos do seu domínio.

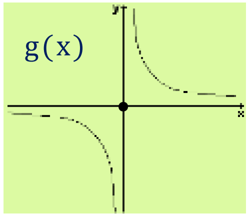
Exemplos 8

(i) A função $f(x) = \frac{1}{x}$ é contínua, pois é contínua em todos os pontos do seu domínio.
Lembre que $D(f) = \mathbb{R}^*$!!



(ii) A função $g(x) = \begin{cases} 0\ ;\text{se } x = 0 \\ \frac{1}{x}\ ;\text{se } x \neq 0 \end{cases}$ não é contínua, pois não é contínua no zero (justifique!) que é ponto do seu domínio.

Veja que $D(f) = \mathbb{R}$!!



1.5.4 Exemplos de funções contínuas em seu domínio

$f(x) = \text{sen } x$	$f(x) = \text{cotg } x$
$f(x) = \cos x$	$f(x) = \ln \lvert x \rvert$
$f(x) = \text{tg } x$	$f(x) = e^x$
$f(x) = b$	$f(x) = ax^2 + bx + c$
$f(x) = ax + b$	$f(x) = p(x)$ (qq função polinomial)

Sendo contínuas, para elas é verdade que:

$$\lim_{x \to x_0} b = b \qquad \lim_{x \to x_0} (ax^2 + bx + c) = ax_0^2 + bx_0 + c$$

$$\lim_{x \to x_0} (ax + b) = ax_0 + b \qquad \lim_{x \to x_0} p(x) = p(x_0)$$

$$\lim_{x \to x_0} sen(x) = sen(x_0) \qquad \lim_{x \to x_0} cotg(x) = cotg(x_0)$$

$$\lim_{x \to x_0} \cos(x) = \cos(x_0) \qquad \lim_{x \to x_0} \ln|x| = \ln|x_0|$$

$$\lim_{x \to x_0} tg(x) = tg(x_0) \qquad \lim_{x \to x_0} e^x = e^{x_0}$$

1.5.5 Propriedades operatórias das funções contínuas

Se $f(x)$ e $g(x)$ são funções contínuas em x_0, então, também são contínuas em x_0, as seguintes funções:

(i) $f(x) + g(x)$

(ii) $f(x) - g(x)$

(iii) $f(x) \cdot g(x)$

(iv) $\frac{f(x)}{g(x)}$, se $g(x_0) \neq 0$

(v) $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, se $f(x)$ é contínua em $g(x_0)$

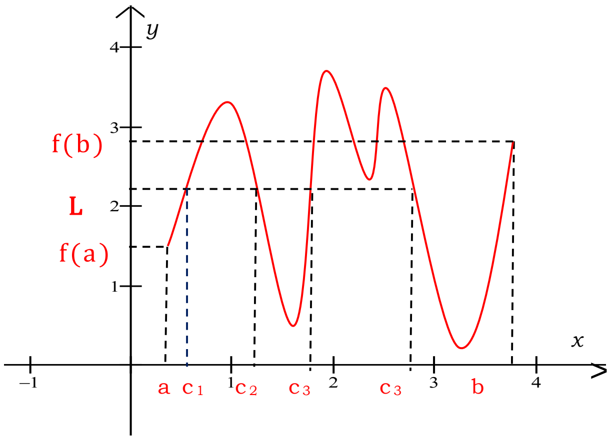
O fato geométrico de uma função contínua ser representada por uma curva sem interrupção pode assim ser descrito:

Se uma função f é contínua num intervalo fechado $I = [a, b]$, então $f(x)$ assume qualquer valor L compreendido entre $f(a)$ e $f(b)$ para algum c conveniente entre a e b.

A propriedade que acabamos de descrever é conhecida como

1.5.6 Teorema do valor Intermediário

Seja f uma função contínua num intervalo fechado $I = [a, b]$. Então, dado qualquer número L entre f(a) e f(b), existe pelo menos um número c entre a e b tal que $f(c) = L$.

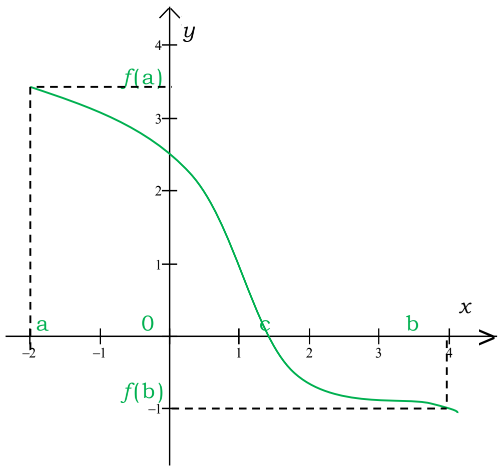


Uma consequência desse teorema é o seguinte...

1.5.7 Corolário

Seja f uma função contínua num intervalo [a, b], onde f(a) e f(b) possuem sinais contrários.

Então, existe pelo menos um número c entre a e b tal que $f(c) = 0$.



1.6 Cálculo de limites indeterminados

Lembre que em dois dos exemplos de cálculo de limite da aula passada caímos numa situação que não sabíamos sair:

$$\lim_{x \to 0} \frac{-|x|}{x} \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 1} \left(\frac{x^2 - 1}{x - 1} \right).$$

Nos dois casos, ao fazer as substituições indicadas, encontramos a expressão $\frac{0}{0}$ que é símbolo de uma <u>indeterminação</u>.

Ou seja: nada se pode afirmar sobre o limite do quociente $\frac{f}{g}$!

Dependendo das funções f e g ele pode assumir qualquer valor real ou não existir.

Limites como esses são chamados indeterminados.

Vamos ver como eliminar essas indeterminações.

1.6.1 Eliminando indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$ em funções racionais.

Para calcular $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, inicialmente calculamos o valor numérico da função, substituindo x por x_0.

Encontrando a expressão $\frac{0}{0}$, de acordo com o resultado destacado a seguir, é suficiente fatorarmos numerador e denominador da função para eliminar a indeterminação.

Dado um polinômio p(x), se p(a) = 0, para a ∈ ℝ, então (x – a) divide p(x).

(Teorema de D'Alembert)

Exemplo 9

Calcular $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{x^2-1}{x-1}\right)$.

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{x^2 - 1}{x - 1}\right) = \frac{0}{0}$$

O fator que provoca essa indeterminação é (x – 1). Logo, pelo Teorema de D'Alembert, devemos fatorar numerador e denominador da função para determinarmos o limite.

Vejamos:

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{x^2 - 1}{x - 1}\right) = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (x + 1) = 1 + 1 = 2$$

Exemplo 10

Calcular $\lim\limits_{x \to 2} \left(\frac{x^2-4}{x^2-2x}\right)$.

$$\lim_{x \to 2} \left(\frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x}\right) = \frac{2^2 - 4}{2^2 - 2 \cdot 2} = \frac{0}{0}$$

Para sair dessa indeterminação devemos eliminar o fator que provoca essa indeterminação, (x – 2), fatorando numerador e denominador.

Vejamos:

$$\lim_{x \to 2} \left(\frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x}\right) = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x(x-2)} = \lim_{x \to 2} \frac{(x+2)}{x} = \frac{2+2}{2} = 2$$

1.6.2 Eliminando indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$ em funções irracionais.

Já sabemos que nas situações em que um limite do tipo $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, onde f(x) e g(x) são funções polinomiais, caímos numa indeterminação $\frac{0}{0}$ é necessário fatorar numerador e denominador para eliminar essa indeterminação.

Veremos que nas situações onde f(x) e/ou g(x) são funções irracionais, podemos utilizar dois caminhos distintos para eliminar a indeterminação.

1º caminho: Racionalização de termos

Vale a pena lembrar:

Para racionalizar o termo de uma fração, devemos multiplicar numerador e denominador pelo mesmo elemento que racionaliza o denominador, chamado fator conjugado.

- $\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$
- $\frac{8}{\sqrt[3]{2}} = \frac{8}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{8\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{8\sqrt[3]{4}}{2} = 4\sqrt[3]{4}$
- $\frac{2}{\sqrt{2}-\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{2}-\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}} = \frac{2(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{(\sqrt{2})^2-(\sqrt{6})^2} = \frac{2(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{2-6} = \frac{-(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{2}$

Exemplo 11

Calcular $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

Cálculo de apoio: $\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \frac{(\sqrt{x})^2-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{\sqrt{x}+1}$

Logo,

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

Exemplo 12

Calcular $\lim\limits_{x \to 2} \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{5}}{x^3-8}$

Cálculo de apoio:

$$\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{5}}{x^3-8} = \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{5}}{x^3-8} \cdot \frac{\sqrt{x+3}+\sqrt{5}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{x+3})^2-(\sqrt{5})^2}{(x^3-8)(\sqrt{x+3}+\sqrt{5})} = \frac{x+3-5}{(x-2)(x^2+2x+4)(\sqrt{x+3}+\sqrt{5})}$$

$$= \frac{x-2}{(x-2)(x^2+2x+4)(\sqrt{x+3}+\sqrt{5})} = \frac{1}{(x^2+2x+4)(\sqrt{x+3}+\sqrt{5})}$$

Logo,

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{5}}{x^3-8} = \lim_{x \to 2} \frac{1}{(x^2+2x+4)(\sqrt{x+3}+\sqrt{5})} = \frac{1}{(2^2+2\cdot 2+4)(\sqrt{2+3}+\sqrt{5})} = \frac{1}{12\cdot 2\sqrt{5}} = \frac{1}{24\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{120}$$

2º caminho: Mudança de variável

Aplicamos a mudança de variável para eliminar indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ fazendo uso da seguinte propriedade dos limites:

$$\lim_{x \to x_0} (f \circ g)(x) = \lim_{u \to u_0} f(u), \text{ desde que } g(x) \text{ seja contínua e } g(x_0) = u_0.$$

Esse recurso, em geral, nos leva a um limite, que mesmo indeterminado, tem menor dificuldade para fazer a eliminação. Veja:

Exemplo 13

Calcular $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

Cálculo de apoio:

Fazendo mudança $\sqrt{x} = u$, temos que $(\sqrt{x})^2 = u^2$; ou seja: $x = u^2$.

Assim, se $x \to 1 \Rightarrow u^2 \to 1^2 \Rightarrow u \to 1$.

Logo,

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{u \to 1} \frac{u - 1}{u^2 - 1} \overset{\nearrow \frac{0}{0}}{=} \lim_{u \to 1} \frac{u - 1}{(u - 1)(u + 1)} = \lim_{u \to 1} \frac{1}{u + 1} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$$

Aqui vale a pena lembrar algumas fatorações que surgem quando fazemos racionalização dos termos e, principalmente, quando utilizamos a mudança de variável:

Quando $n \in \mathbb{N}^*$, $x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \ldots + xy^{n-2} + y^{n-1})$

Quando n é um natural ímpar,

$$x^n + y^n = (x - y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + \ldots - xy^{n-2} + y^{n-1})$$

Exemplo 14

Calcular $\lim\limits_{x \to a \neq 0} \frac{\sqrt[5]{x} - \sqrt[5]{a}}{x - a}$

Fazendo mudança $\sqrt[5]{x} = u$, temos que $(\sqrt[5]{x})^5 = u^5$; ou seja: $x = u^5$.

Para eliminar $\sqrt[5]{a}$ procedemos de forma análoga:

$\sqrt[5]{a} = b$, temos que $(\sqrt[5]{a})^5 = b^5$; ou seja: $a = b^5$

Assim, se $x \to a \Rightarrow u^5 \to b^5 \Rightarrow u \to b$.

Logo,

$$\lim_{x \to a \neq 0} \frac{\sqrt[5]{x} - \sqrt[5]{a}}{x - a} = \lim_{u \to b \neq 0} \frac{u - b}{u^5 - b^5} \overset{\nearrow \frac{0}{0}}{=} \lim_{u \to b \neq 0} \frac{u - b}{(u - b)(u^4 + u^3b + u^2b^2 + ub^3 + b^4)} =$$

$$\lim_{u \to b \neq 0} \frac{1}{(u^4 + u^3b + u^2b^2 + ub^3 + b^4)} = \frac{1}{5b^4} = \frac{1}{5(\sqrt[5]{a})^4} = \frac{1}{5\sqrt[5]{a^4}}$$

Exemplo 15

Calcular $\lim\limits_{x \to 64} \frac{\sqrt{x} - 8}{\sqrt[3]{x} - 4}$

Veja que aqui temos duas raízes a eliminar: $\sqrt{x}$ e $\sqrt[3]{x}$.

Neste caso, procuramos um índice que possa simplificar as duas raízes, que é, exatamente, o mmc(2, 3) = 6.

Fazemos, então, as seguintes substituições:

$\sqrt[6]{x} = u$, temos que $(\sqrt[6]{x})^6 = u^6$; ou seja: $x = u^6$.

Assim, se $x \to 64$, temos que $y^6 \to 64 \Rightarrow y \to 2$.

Além disso, $x = u^6 \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{u^6} \Rightarrow \sqrt{x} = u^3$ e $x = u^6 \Rightarrow \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{u^6} \Rightarrow \sqrt[3]{x} = u^2$

Logo,

$$\lim_{x \to 64} \frac{\sqrt{x} - 8}{\sqrt[3]{x} - 4} = \lim_{u \to 2} \frac{u^3 - 8}{u^2 - 4} \overset{\nearrow \frac{0}{0}}{=} \lim_{u \to 2} \frac{(u - 2)(u^2 + 2u + 4)}{(u - 2)(u + 2)} = \lim_{u \to 2} \frac{(u^2 + 2u + 4)}{(u + 2)} = \frac{12}{4} = 3$$

Sugestão de Exercício: 8

1.7 Cálculo de limites envolvendo o infinito

1.7.1 Limites infinitos

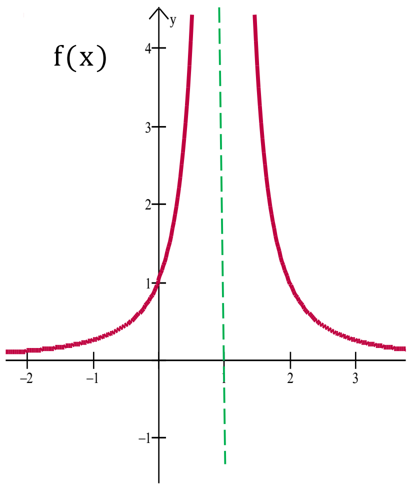
(quando o resultado é $+\infty$ ou $-\infty$)

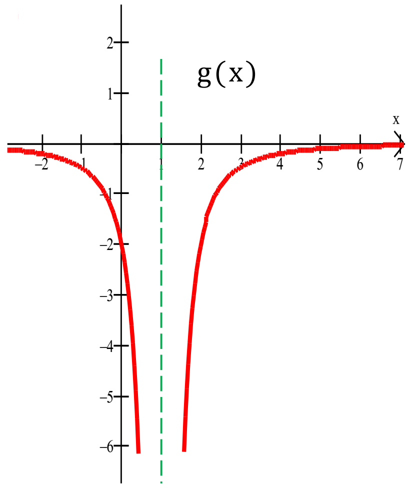
Considerando as funções $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}$, $g(x)=\dfrac{-1}{(x-1)^2}$, $h(x)=\dfrac{x}{(x-1)^2}$, responda:

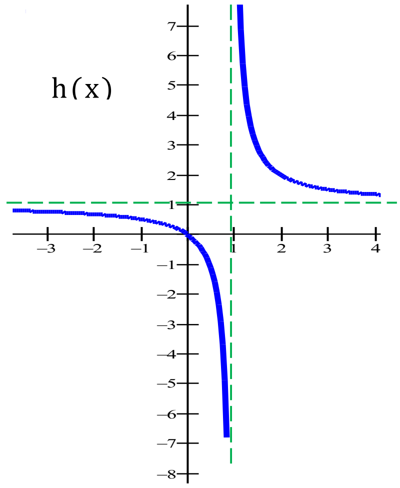
Quanto vale ...

a) ... $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{(x-1)^2}$? b) ... $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-2}{(x-1)^2}$? c) ... $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{x-1}$?

Complicado responder, não é? Mas, conhecendo o gráfico fica muito mais fácil!







Assim: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{(x-1)^2}=$ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-2}{(x-1)^2}=$ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{x-1}=$

1.7.1.1 Definição (intuitiva)

Seja f(x) definida numa vizinhança reduzida de a ("intervalo" I – {a}). Dizemos que:

- $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ se existe vizinhança de a tal que f(x) → + ∞.

Analogamente: $\forall$ M > 0, $\exists$ δ > 0 tal que $\forall$ x ∈ (x – δ, x + δ) ⇒ f(x) > M.

- $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ se existe vizinhança de a tal que f(x) → – ∞.

Analogamente: $\forall$ M > 0, $\exists$ δ > 0 tal que $\forall$ x ∈ (x – δ, x + δ) ⇒ f(x) < –M.

De modo geral, o limite de uma função é mais infinito (ou simplesmente infinito) quando os valores de f(x) vão ficando cada vez maiores superando qualquer valor fixado; da mesma forma, dizemos que o limite de uma função é menos infinito quando os valores de f(x) vão ficando cada vez menores, de modo a se situarem abaixo de qualquer valor fixado.

1.7.1.2 Indeterminação do tipo $\frac{k}{0}$, com k ≠ 0.

Vimos acima que em algumas situações, ao calcular $\lim_{x \to a} h(x)$, quando $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ e h(x) não está definida para a, isto é, não existe h(a), caímos numa indeterminação do tipo $\frac{k}{0}$, com k ≠ 0.

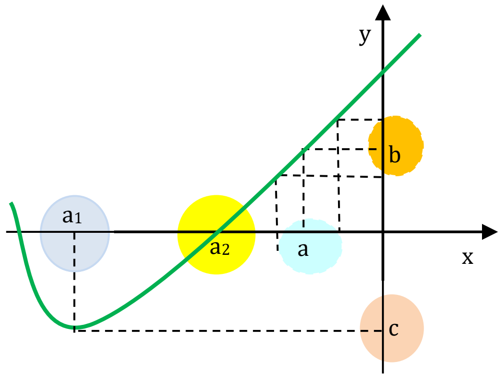
Para resolver a situação delicada, usamos o gráfico da função.

Mas, como concluir, sem o gráfico, quando $\lim_{x \to a} h(x) = \frac{k}{0}$, e k ≠ 0, se $\lim_{x \to a} h(x) = +\infty$ ou se $\lim_{x \to a} h(x) = -\infty$?

Neste caso, $\lim_{x \to a} h(x)$ depende dos limites laterais de h(x) quando x → a e do sinal de $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, conforme dizem os teoremas a seguir.

Teorema da Conservação do Sinal

Se $\lim_{x \to a} f(x)$ = b ≠ 0, então existe uma vizinhança V de a, V(a), tal que f(x) conserva o sinal de b em V(a) \ {a}.



Veja a ilustração:

- $\lim_{x \to a} f(x)$ = b > 0

Em V(a) \ {a}, f(x) tem sinal positivo!

- $\lim_{x \to a_1} f(x) =$ c < 0

Em V(a_1) \ {a_1}, f(x) tem sinal negativo!

- $\lim_{x \to a_2} f(x) =$ 0

Em V(a_2) \ {a_2}, f(x) tem sinal ora positivo ora negativo!

Teorema

Sejam f(x) e g(x) funções reais tais que $\lim_{x \to a} f(x)$ = k ≠ 0 e $\lim_{x \to a} g(x) = 0$, então:

(i) $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ se $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ em V(a)\ {a}, ou seja, quando x → a.

(ii) $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$ se $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$ em V(a) \ {a}, ou seja, quando x → a.

(iii) $\nexists \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ se $\frac{f(x)}{g(x)}$ muda de sinal em V(a) \ {a}, ou seja, quando x → a.

Na prática, fazemos o estudo do sinal de quociente na vizinhança de a!

Exemplo 16

Calcular $\lim_{x \to 1} \frac{3x-2}{x-1}$

Veja que $\lim_{x \to 1} \frac{3x-2}{x-1} \nearrow \frac{1}{0}$

Assim, estudando o sinal de $\frac{3x-2}{x-1}$ numa vizinhança de 1, temos que

quando $x \to 1^- \Rightarrow f(x) \to -\infty$ e

quando $x \to 1^+ \Rightarrow f(x) \to +\infty$.

Logo, $\nexists \lim\limits_{x\to 1} \frac{3x-2}{x-1}$.

		2/3		1	
$3x-2$	$-$		$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$		$+$
	$+$		$-$		$+$
	$-\infty$		↲ ↳		$+\infty$

Exemplo 17

Calcular $\lim\limits_{x\to -3} \left(\frac{2x-3}{x+3}\right)^2$

Veja que $\lim\limits_{x\to -3} \left(\frac{2x-3}{x+3}\right)^2$ $\frac{9}{0}$

Assim, estudando o sinal de $\left(\frac{2x-3}{x+3}\right)^2$ numa vizinhança de -3, temos que

quando $x \to -3^- \Rightarrow f(x) \to +\infty$

quando $x \to -3^+ \Rightarrow f(x) \to +\infty$.

Logo, $\lim\limits_{x\to -3} \left(\frac{2x-3}{x+3}\right)^2 = +\infty$.

	-3	3/2	
$2x-3$	$-$	$-$	$+$
$x+3$	$-$	$+$	$+$
N/D	$+$	$-$	$+$
$(N/D)^2$	$+$	$+$	$+$
	$+\infty$ ↲	↳ $+\infty$	

1.7.1.3 Propriedades (operatórias) dos limites infinitos.

Então, algumas propriedades, cuja demonstração não vamos realizar, são válidas para as funções cujo limite vale $\pm\infty$.

P1) Se $f(x)$, $h(x)$ e $g(x)$, são funções tais que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to a} h(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b \neq 0$, temos que:

$$\lim_{x\to a} (f\cdot g)(x) = \begin{cases} +\infty \ ; \text{ se } b > 0 \\ -\infty \ ; \text{ se } b < 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to a} (h\cdot g)(x) = \begin{cases} +\infty \ ; \text{ se } b < 0 \\ -\infty \ ; \text{ se } b > 0 \end{cases}$$

P2) Se $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ e $r(x)$ são funções tais que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to a} h(x) = \lim\limits_{x\to a} r(x) = -\infty$, temos que:

- $\lim\limits_{x\to a} (f+g)(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to a} (h+r)(x) = -\infty$
- Nada se pode afirmar sobre $\lim\limits_{x\to a} (f-g)(x)$, $\lim\limits_{x\to a} (h-r)(x)$ e $\lim\limits_{x\to a} (f+h)(x)$.
- $\lim\limits_{x\to a} (f\cdot g)(x) = \lim\limits_{x\to a} (h\cdot r)(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to a} (f\cdot r)(x) = -\infty$
- Nada se pode afirmar sobre $\lim\limits_{x\to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$, $\lim\limits_{x\to a} \left(\frac{h}{r}\right)(x)$ e $\lim\limits_{x\to a} \left(\frac{f}{h}\right)(x)$.

Exemplos 18

1. Considere as funções $f(x) = \frac{1}{x^4}$, $g(x) = \frac{1}{x^2}$ e $h(x) = \frac{1}{x^2}$ tais que $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} g(x) = +\infty$.

Temos que

$\frac{1}{0}$

$$\lim_{x\to 0} (f-g)(x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-x^2}{x^4}\right) = +\infty$$

Após estudo do sinal...

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^4}}\right) = \lim_{x\to 0} x^2 = 0$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{f}{h}\right)(x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{1}{x^4}}{-\frac{1}{x^2}}\right) = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{h}{g}\right)(x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}}\right) = \lim_{x\to 0}(-1) = -1$$

2. Considere $f(x) = \frac{1}{x-1}$ e $g(x) = \frac{3}{x^3-1}$ tais que $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} g(x) = +\infty$.

Temos que

$$\lim_{x\to 1^+}(f-g)(x) = \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x^3-1}\right) = \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x^2+2x+1-3}{x^3-1}\right) = \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x^2+2x+1-3}{x^3-1}\right)$$

$\frac{1}{0}$

$$= \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x^2+2x-2}{x^3-1}\right) = \lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2+2x+1)} = \lim_{x\to 1^+}\frac{(x+2)}{(x^2+2x+1)} = \frac{3}{3} = 1$$

P3) Se f(x) e g(x), são funções tais que $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ e $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, temos que:

- $\lim_{x\to a}\left(\frac{1}{f}\right)(x) = 0$ e $\lim_{x\to a}\left|\frac{1}{g(x)}\right| = +\infty$
- Nada se pode afirmar sobre $\lim_{x\to a}(f\cdot g)(x)$.

Exemplos 19

1. Considere $f(x) = \frac{1}{x^2}$ e $g(x) = x^4$ tais que $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$.

Temos que $\lim_{x\to 0}(f\cdot g)(x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}\cdot x^4\right) = \lim_{x\to 0} x^2 = 0$

2. Considere $f(x) = \frac{1}{x^4}$ e $g(x) = x^2$ tais que $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$.

Temos que $\lim_{x\to 0}(f\cdot g)(x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^4}\cdot x^2\right) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2} = +\infty$

1.7.2 Limites no infinito

(quando x tende ao infinito).

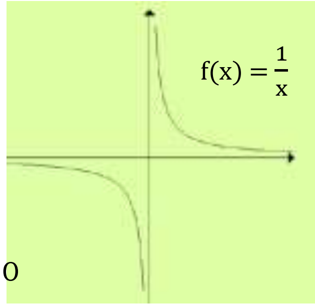
Inicialmente, vamos analisar alguns exemplos gráficos.

Exemplo 20

Considere a função $f(x) = \frac{1}{x}$ representada pelo gráfico a seguir:

O que ocorre com as imagens y = f(x) do gráfico quando x $\to -\infty$? E quando x $\to +\infty$?

Resposta: ....



Neste caso, dizemos que o limite de f(x) quando $x \to \pm\infty$ é 0 e representamos por $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

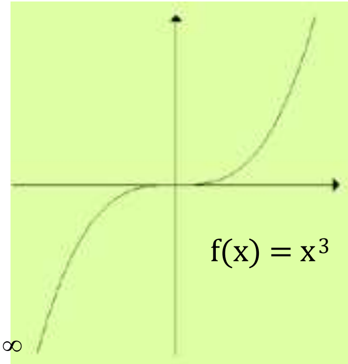
Exemplo 21

Considere a função $f(x) = x^3$ representada pelo gráfico ao lado:

O que ocorre com as imagens y = f(x) do gráfico quando x $\to +\infty$? E quando x $\to -\infty$?

Resposta: ....

Neste caso, dizemos que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

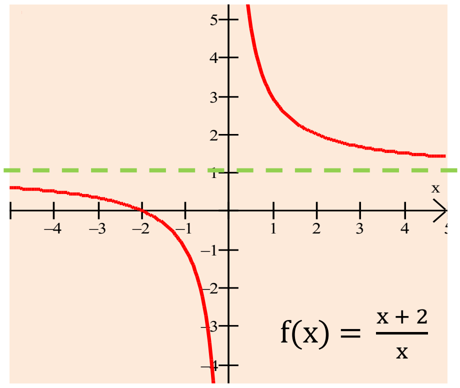


Exemplo 22

Considere a função $f(x) = \frac{x+2}{x}$ representada pelo gráfico ao lado:

O que ocorre com as imagens y = f(x) do gráfico quando x $\to +\infty$? E quando x $\to -\infty$?

Resposta: ....



> Pelo que vimos nos exemplos 20 a 22, o limite de uma dada função quando x $\to +\infty$ ou x $\to +\infty$ tanto pode ser ou $+\infty$ ou $-\infty$; podendo ser também qualquer outro número real qualquer, inclusive o zero!

Neste caso, dizemos que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$.

1.7.2.1 Definição

- Seja f(x) uma função definida em (a, $+\infty$), ou seja, definida numa vizinhança de $+\infty$.
  Dizemos que
  $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$ se existe A > 0, tal que f(x) $\to$ L sempre que x > A.

- Seja f(x) uma função definida em ($-\infty$, b), ou seja, definida numa vizinhança de $-\infty$.
  Dizemos que
  $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$ se existe A < 0, tal que f(x) $\to$ L sempre que x < A.

Simbolicamente:

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L \leftrightarrow [\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, A > 0 : \forall\, x > A \Rightarrow f(x) \in (L - \varepsilon,\ L + \varepsilon)]$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L \leftrightarrow [\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, A < 0 : \forall\, x < A \Rightarrow f(x) \in (L - \varepsilon,\ L + \varepsilon)]$

1.7.2.2 Propriedades (operatórias) dos limites no infinito.

1. Se $f(x) = c \in \mathbb{R}$, então $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} c = c$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} c = c$.
2. Se n é um número inteiro par positivo, então $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^n) = \lim\limits_{x \to -\infty} (x^n) = +\infty$.
3. Se n é um número inteiro ímpar positivo, então $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^n) = -\infty$.
4. Se n é um número inteiro positivo, então $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x^n}\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{x^n}\right) = 0$.
5. Se $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$, com $a_n \neq 0$,
   então $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} a_n x^n = a_n \cdot \lim\limits_{x \to \pm\infty} x^n$.
6. Se $f(x) = a_n x^n + \dots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$ e $g(x) = b_m x^m + \dots + a_2 x^2 + b_1 x^1 + b_0$, com $a_n, b_m \neq 0$, então
   $$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} = \frac{a_n}{b_m} \cdot \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^n}{x^m} = \frac{a_n}{b_m} \cdot \lim_{x \to \pm\infty} x^{n-m}.$$

Exemplos 23

(i) $\lim\limits_{x \to -\infty} (2x^3 + 4x^2 - 5x + 3) = \lim\limits_{x \to -\infty} 2x^3 \left(1 + \overset{\nearrow 0}{\frac{2}{x}} - \overset{\nearrow 0}{\frac{5}{2x^2}} + \overset{\nearrow 0}{\frac{3}{2x^3}}\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} 2x^3 = -\infty$

(ii) $\lim\limits_{x \to -\infty} (4x^6 - 5x^4 + 3x) = \lim\limits_{x \to -\infty} 4x^6 \left(1 - \frac{5}{4x^2} + \frac{3}{4x^5}\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} 4x^6 = +\infty$

(iii) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{4x^3 + 4x^2 - 5x + 9}{2x^2 - 8x - 17}\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{4x^3}{2x^2}\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} (2x) = -\infty$

1.7.2.3 Regra dos sinais nas operações com o infinito

$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$	$(-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$
$(-\infty) + (-\infty) = -\infty$	$(+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$
$(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$	$(-\infty) : (+\infty) = -\infty$
$(-\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$	$(+\infty) : (-\infty) = -\infty$
$(+\infty) : (+\infty) = +\infty$	$(+\infty) - (+\infty) =$ indeterminação
$(-\infty) : (-\infty) = -\infty$	$(-\infty) - (-\infty) =$ indeterminação

Para um $k \in \mathbb{R}_+$, temos:

$k + (+\infty) = +\infty + k = +\infty$	$k - (+\infty) = k - \infty = -\infty$	$k \cdot (+\infty) = +\infty \cdot k = +\infty$
$k + (-\infty) = -\infty + k = -\infty$	$k - (-\infty) = k + \infty = +\infty$	$k \cdot (-\infty) = -\infty \cdot k = -\infty$
$k : (+\infty) = k : (-\infty) = 0$	se $k \neq 0$: $(+\infty) : k = +\infty$, $(-\infty) : k = -\infty$	

Para um $k \in \mathbb{R}_{-}$, temos:

$$k + (+\infty) = +\infty + k = +\infty \quad k - (+\infty) = k - \infty = -\infty \quad k \cdot (+\infty) = +\infty \cdot k = -\infty$$

$$k + (-\infty) = -\infty + k = -\infty \quad k - (-\infty) = k + \infty = +\infty \quad k \cdot (-\infty) = -\infty \cdot k = +\infty$$

$$k : (+\infty) = k : (-\infty) = 0 \qquad \text{se } k \neq 0\text{:} \quad (+\infty) : k = -\infty, \ (-\infty) : k = +\infty$$

Sugestão de Exercício: 9

1.8 Limite das funções trigonométricas

As funções trigonométricas são contínuas em todo o seu domínio.

Assim, se f(x) é uma função trigonométrica e $a \in D(f)$, então $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

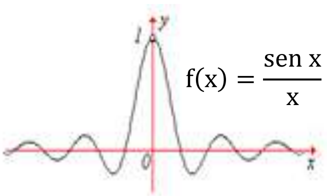
Exemplos 24

1. $\lim\limits_{x \to \frac{3\pi}{2}} (\text{sen } x) = \text{sen } \frac{3\pi}{2} = -1$

2. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} (\sec x + \text{cossec } x) = \sec \frac{\pi}{6} + \text{cossec } \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{6}} + \frac{1}{\text{sen}\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{2}{1} = \frac{2+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

1.8.1 Limite trigonométrico fundamental

O limite trigonométrico fundamental é $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{\text{sen } x}{x}\right) = 1$.



$f(x) = \frac{\text{sen } x}{x}$

Na verdade este limite vale para todo $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Este limite pode ser demonstrado (o que não faremos) pelo importantíssimo teorema a seguir.

1.8.2 Teorema do Confronto

Sejam f, g e h funções reais que satisfazem $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ para todo x pertencente a um intervalo I que contenha c, não sendo necessário a desigualdade ser válida em c.

Se $\lim\limits_{x \to c} g(x) = L = \lim\limits_{x \to c} h(x)$, então $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$.

Observação

Para provar o limite trigonométrico fundamental usando o Teorema do Confronto é suficiente lembrar, da trigonometria que para todo x tal que

- $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, é verdade que $\text{tg}x < x < \text{sen}x$

- $0 < x < \frac{\pi}{2}$, é verdade que $\operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x$

Com manipulações algébricas, se consegue mostrar que $\cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1$.

Este fato nos leva a $\lim_{x \to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right) = 1$.

Uma consequência importante desse limite fundamental é o seguinte resultado: $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} f(x)}{f(x)} = 1$, sempre que $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.

Exemplos 25

1. $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(5x)}{5x} = 1$, pois $\lim_{x \to 0} 5x = 0$.

Usando mudança de variável:

$5x = u \to x = \frac{u}{5}$ e se $x \to 0$, $u \to 0$. Assim, $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(5x)}{5x} = \lim_{u \to 0} \frac{\operatorname{sen} u}{u} = 1$.

2. $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{x} \cdot \frac{2}{2} = \lim_{x \to 0} \left[2 \cdot \frac{\operatorname{sen}(2x)}{2x}\right] = 2 \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{2x} = 2 \cdot 1 = 2$

Usando mudança de variável:

$2x = u \to x = \frac{u}{2}$ e se $x \to 0$, $u \to 0$.

Assim, $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{x} = \lim_{u \to 0} \frac{\operatorname{sen} u}{\frac{u}{2}} == 2 \cdot \lim_{u \to 0} \frac{\operatorname{sen} u}{u} = 2 \cdot 1 = 2$ 1.

3. $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2(1 + \cos x)} =$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{(1 + \cos x)} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{(1 + \cos x)} = 1^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Este fato nos leva a $\lim_{x \to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right) = 1$.

Uma consequência importante desse limite fundamental é o seguinte resultado: $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} f(x)}{f(x)} = 1$, sempre que $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.

1.9 Limite da função exponencial

A função exponencial é contínua em todo o seu domínio.
Assim, se $f(x)$ é uma função exponencial e $a \in D(f)$, então $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Para $a > 1$, temos:

$\lim_{x \to b} a^x = a^b$ $\qquad \lim_{x \to 0} a^x = 1$ $\qquad \lim_{x \to -\infty} a^x = 0$ $\qquad \lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$

Para $0 < a < 1$, temos:

$\lim_{x \to b} a^x = a^b$ $\qquad \lim_{x \to 0} a^x = 1$ $\qquad \lim_{x \to +\infty} a^x = 0$ $\qquad \lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty$

São formas indeterminadas: 0^0; $(\pm\infty)^0$; $(\pm\infty)^{\pm\infty}$; $0^{-\infty}$.

Exemplos 26

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1 \qquad \lim_{x\to -\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^{-\infty} = +\infty \qquad \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^{+\infty} = -\infty$$

$$\lim_{x\to -1} e^x = e^{-1} = \frac{1}{e} \qquad \lim_{x\to \frac{1}{2}} e^x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e} \qquad \lim_{x\to -\infty} e^x = e^{-\infty} = 0 \qquad \lim_{x\to +\infty} e^x = e^{+\infty} = +\infty$$

1.9.1 Observação

Das propriedades dos limites e das funções exponenciais, temos o seguinte resultado:

(I) Se $a \in \mathbb{R}$ é tal que $0 < a \neq 1$ e

$$\lim_{x\to b} f(x) = c, \text{então } \lim_{x\to b} a^{f(x)} = a^c.$$

(II) Se $a \in \mathbb{R}$ é tal que $0 < a \neq 1$ e

$$\lim_{x\to a} f(x) = b > 0 \text{ e } \lim_{x\to a} g(x) = c, \text{então } \lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = b^c.$$

Na prática, fazemos:

$$\lim_{x\to b} a^{f(x)} = a^{\left(\lim_{x\to b} f(x)\right)} \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a} f(x)^{\left(\lim_{x\to a} g(x)\right)}$$

Exemplo 27

$$\lim_{x\to 1} 5^{\frac{x^2-1}{x-1}} = 5^{\left(\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}\right)} = 5^2.$$

Verifique que $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = 2$!!

1.9.2 Limite exponencial fundamental

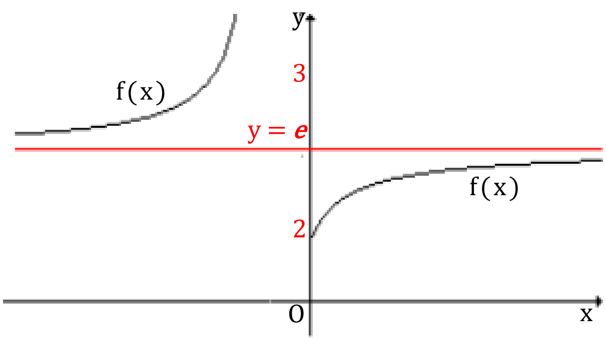
Considere a função $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ cujo gráfico é o que se vê abaixo.

Observe que:

(i) f(x) é crescente em todo o seu domínio;

(ii) $2 \leq f(x) < 3$;

(iii) $\exists \lim_{x\to \pm\infty} f(x)$



Veja que quando x cresce ou decresce infinitamente, a função assume valores cada vez mais próximos de e; ou seja:

$\lim_{x\to \pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$; que é o limite fundamental exponencial.

Em outras palavras: o gráfico admite uma assíntota horizontal em $y = e$.

Como consequências desse limite fundamental, temos:

(i) para $a > 0$, $\lim_{x\to \pm\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a$

Além disso,

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e \quad \to \quad \lim_{x\to -\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x = \frac{1}{e} \quad \to \quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

(ii) para $0 < a \neq 1$,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x-1}{x}\right)=\ln(a) \rightarrow \quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

Exemplos 28

1. $\lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{5x} = \left[\lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^5 = e^5$

2. $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{2}{x}} = \left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]^2 = e^2$

3. $\lim_{x\to -\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x} = e^3$

4. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{4x}\right) = \frac{1}{4}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x}\right) = \frac{1}{4}\cdot 1 = \frac{1}{4}$

1.10 Limite da função logarítmica

A função logarítmica é contínua em todo o seu domínio.
Assim, se $f(x)$ é uma função logarítmica e $a \in D(f)$, então $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Para $a > 1$, temos:

$\lim_{x\to b}(\log_a x) = \log_a b \qquad \lim_{x\to 0^+}(\log_a x) = -\infty \qquad \lim_{x\to +\infty}(\log_a x) = +\infty$

Para $0 < a < 1$, temos:

$\lim_{x\to b}(\log_a x) = \log_a b \qquad \lim_{x\to 0^+}(\log_a x) = +\infty \qquad \lim_{x\to +\infty}(\log_a x) = 0$

Para $0 < a \neq 1$, temos:

se $\lim_{x\to b} f(x) = 1$, então $\lim_{x\to b}[\log_a f(x)] = 0$

se $\lim_{x\to b} f(x) = c > 0$, então $\lim_{x\to b}[\log_a f(x)] = \log_a c$

Na prática fazemos:

$$\lim_{x\to b}[\log_a f(x)] = \log_a\left[\lim_{x\to b} f(x)\right] = \log_a c$$

Exemplos 29

1. $\lim_{x\to 8}\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right) = \log_{\frac{1}{2}} 8 = -3$

2. $\lim_{x\to +\infty}(\log_2 x) = +\infty$

3. $\lim_{x\to +\infty}\left(\log_{0,1} x\right) = -\infty$

4. $\lim_{x\to 2}(\log_3 x - 1) = \log_3\left[\lim_{x\to 2}(x-1)\right] = \log_3 1 = 0$

5. $\lim_{x\to -1}[\log_2(4x^2-7x+5)] = \log_2\left[\lim_{x\to -1}(4x^2-7x+5)\right] = \log_2 16 = 4$

6. $\lim_{x\to 0}\left[\log\left(\frac{x-x^3}{x^2+x}\right)\right] = \log\left[\lim_{x\to 0}\left(\frac{x-x^3}{x^2+x}\right)\right] = \log 1 = 0$

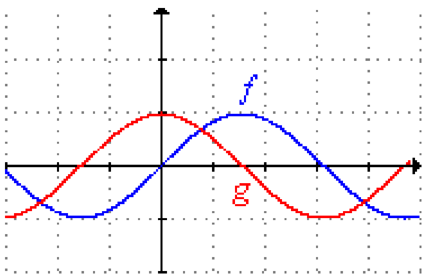
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x-x^3}{x^2+x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x(1-x^2)}{x(x+1)} = \lim_{x\to 0}\frac{(1-x^2)}{(x+1)} = 1$$

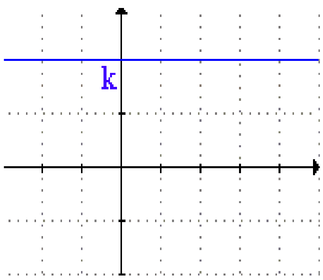
Em outras palavras, o conjunto imagem de f(x) está contido num intervalo de extremos reais.

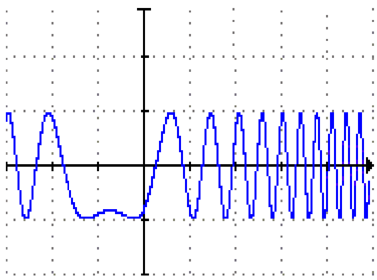
Exemplos 30

Algumas funções limitadas e seus gráficos.

$f(x) = sen(x)$ e $g(x) = cos(x)$ $\qquad$ $k(x) = k$ $\qquad$ $h(x) = sen(2x^2 + 3x - 1)$







Com relação ao limite de funções limitadas, temos o seguinte resultado:

$$\text{Se } \lim_{x\to a} f(x) = 0 \text{ ou } \lim_{x\to \pm\infty} f(x) = 0 \text{ e } g(x) \text{ é uma função limitada,}$$

$$\text{então } \lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = 0 \text{ ou } \lim_{x\to \pm\infty} f(x)\cdot g(x) = 0$$

Exemplos 31

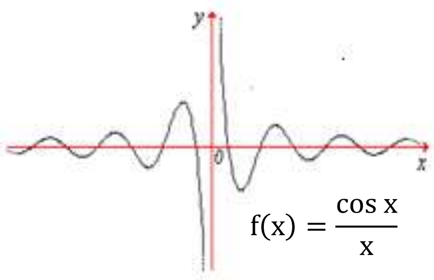
1. $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{sen\, x}{x}\right) = \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot sen\, x\right)$

   Como $f(x) = sen\ x$ é função limitada e $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{sen\, x}{x}\right) = 0.$

2. $\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{cos\, x}{x}\right) = \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot cos\, x\right)$

   Como $f(x) = cos\ x$ é função limitada

   e $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{cos\, x}{x}\right) = 0$



$f(x) = \frac{cos\, x}{x}$

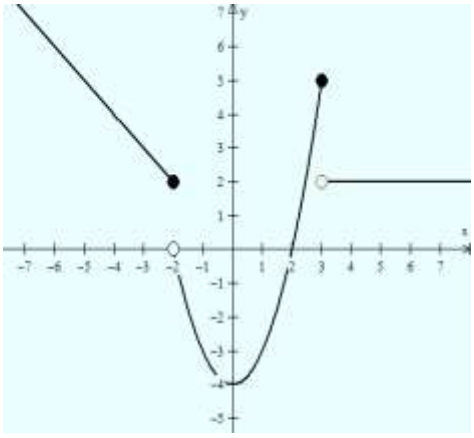
3. $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)\cdot cos\, x = 0$, pois

   $f(x) = cos\ x$ é função limitada e $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right) = \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x}{x^2}\right) = \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$

Sugestão de Exercícios: 10 a 13

Exercícios

1. Com relação à função f, cujo gráfico é dado ao lado, pode-se afirmar que:



   - A) Existe limite em x= -2?
     B) Justifique sua resposta.
   - A) A função é contínua para x = 3?
     B) justifique sua resposta.

2. Calcule os seguintes limites.

   A) $\lim\limits_{x \to 1}\left(4x^2 - 7x + 5\right)$

   B) $\lim\limits_{x \to -1}\left(x^3 + 2x^2 + 3\right)$

   C) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 + 2x - 3}{4x - 3}$

   D) $\lim\limits_{x \to 4}\left(\dfrac{x^3 - 3x^2 - 2x - 5}{2x^2 - 9x + 2}\right)^2$

   E) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{3x - 9}{5x^2 + 1} =$

   F) $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{t^3 + 2t - 6}{4t^2 + 3t + 2} =$

3. A) Sabendo que $\lim\limits_{x \to 2} (x + 3) = 5$, quanto vale $\lim\limits_{x \to 2} (x + 3)^3$?

   B) Sabendo que $\lim\limits_{x \to 19} (x - 3) = 16$, quanto vale $\lim\limits_{x \to 19} \sqrt[4]{x - 3}$?

4. Sabendo que $\lim\limits_{x \to 0} e^x = L$ e $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sen} x = M$ e com base nas propriedades operatórias dos limites, calcule:

   A) $\lim\limits_{x \to 0} (\operatorname{sen} x - e^x) =$

   B) $\lim\limits_{x \to 0} (\operatorname{sen} x \cdot e^x) =$

   C) $\lim\limits_{x \to 0} (\operatorname{sen} x + e^x) =$

   D) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{e^x}\right) =$

   E) $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt[3]{e^x} =$

   F) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} (\operatorname{sen} x)^2$

5. Considerando as funções $f(x) = 2^x$; $g(x) = 2x$ e $h(x) = \frac{1}{x}$, teste/verifique a continuidade de todas as operações que podem ser realizadas entre elas.

   A) $f(x) + g(x)$

   B) $f(x) - h(x)$

   C) $h(x) \cdot g(x)$

   D) $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

   E) $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

   F) $(h \circ g)(x) = h(g(x))$

   G) $(h \circ f)(x) = h(f(x))$

   H) $\dfrac{h(x)}{f(x)}$

   I) $\dfrac{f(x)}{h(x)}$

   J) $\dfrac{h(x)}{g(x)}$

   K) $\dfrac{g(x)}{h(x)}$

6. De acordo com as condições para uma função ser contínua, verifique se as funções abaixo são contínuas, determinando o menor domínio onde vale a continuidade.

A) $f(x) = \begin{cases} 0 \,;\, \text{se } x < 0 \\ 1 \,;\, \text{se } x \geq 0 \end{cases}$.

B) $h(x) = \begin{cases} 3x - 2 \,;\, \text{se } 0 < x \leq 5 \\ x^2 + x + 1 \,;\, \text{se } 5 < x < 7 \end{cases}$.

C) $t(x) = \begin{cases} 2^x \,;\, \text{se } x \leq 0 \\ 1 \,;\, \text{se } x > 0 \end{cases}$.

D) $v(x) = \begin{cases} \log x \,;\, \text{se } 0 < x \leq 10 \\ x \,;\, \text{se } x > 10 \end{cases}$.

E) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 \,;\, \text{se } -1 < x < 1 \\ 2x - 4 \,;\, \text{se } 1 \leq x < 2 \\ 5 - x^2 ;\, \text{se } 2 \leq x < 3 \end{cases}$.

F) $h(x) = \begin{cases} 5 \,;\, \text{se } x = 3 \\ \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} \,;\, \text{se } x \neq 3 \end{cases}$.

7. Para que valores de a, b $\in \mathbb{R}$, tem-se f(x) contínua em $\mathbb{R}$ quando

$$f(x) = \begin{cases} -2\operatorname{sen} x \,;\; \text{se } x \leq -\frac{\pi}{2} \\ a\operatorname{sen} x + b \,;\, \text{se } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \cos x \,;\; \text{se } x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}.$$

8. Determine os seguintes limites. Se necessário, use o método da substituição ou da racionalização de numerador e/ou denominador:

A) $\lim\limits_{x \to -2} \frac{4 - x^2}{2 + x}$

B) $\lim\limits_{x \to 3/2} \frac{4x^2 - 9}{2x - 3}$

C) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$

D) $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^3 + 8}{x^2 - 4}$

E) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$

F) $\lim\limits_{x \to a} \left(\frac{x^2 - a^2}{3x^2 - 2ax - a^2}\right)$

G) $\lim\limits_{x \to a} \left(\frac{x^3 - a^3}{x^2 - a^2}\right)$

H) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}}{3x}$

I) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{1 - x^2}{x + \sqrt{2 + x}}$

J) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{\sqrt{x + a} - \sqrt{a}}{x}\right)$

K) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{x}{\sqrt{4 + x} - \sqrt{4 - x}}\right)$

L) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{\sqrt{1 + 2x} - 3}{\sqrt{x} - 2}\right)$

M) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{\sqrt[n]{x + 1} - 1}{x}\right)$

N) $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt[3]{\frac{x^2 + 4}{x - 1}}$

O) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{\sqrt{x + 1} - 1}{x}\right)$

P) $\lim\limits_{x \to 3} \left(\frac{\sqrt{x + 1} - 2}{x - 3}\right)$

Q) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{\sqrt{3x - 2} - 2}{\sqrt{4x + 1} - 3}$

R) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x - 2}{\sqrt[3]{3x - 5} - 1}$

S) $\lim\limits_{x \to 4} \frac{\sqrt{1 + 2}x - 3}{\sqrt{x} - 2}$

T) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{x}{\sqrt{x + 4} - \sqrt{4 - x}}\right)$

9) Calcule os seguintes limites envolvendo o infinito:

A) $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x^3 + 4x^2 - 5x + 3)$

B) $\lim\limits_{x \to +\infty} (-3x^3 + 2x^2 - 5x + 13)$

C) $\lim_{x \to -\infty} (-3x^3 + 2x^2 - 5x + 13)$

D) $\lim_{x \to -\infty} (5x^3 - 5x^2 - 3x + 2)$

E) $\lim_{x \to 2} \left(\frac{5-2x}{x-2}\right)$

F) $\lim_{x \to 11} \left(\frac{x^2 + 21}{x - 11}\right)$

G) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{x^2 - 4}{x^2}\right)$

H) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{3 + 2x}{x^4}\right)$

I) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{2x + 1}{x}\right)$

J) $\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{3x + 9}{5x - 1}\right)$

K) $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3x + 9}{5x - 1}\right)$

L) $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{5x^2 - 4x + 3}{3x - 17}\right)$

M) $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{4x - 1}{5x^2 + 5x - 2}\right)$

10. Usando o teorema do confronto, determine o que se pede:

A) (Resolvido) $\lim_{x \to 1} f(x)$ sabendo que para todo $x \in \mathbb{R}$, a função $f(x)$ é tal que $x^3 - 3 \leq 2f(x) \leq 2x - 4$.

Resolução

$x^3 - 3 \leq 2f(x) \leq 2x - 4 \to \frac{x^3 - 3}{2} \leq f(x) \leq \frac{2x - 4}{2} \to \frac{x^3 - 3}{2} \leq f(x) \leq x - 2$

Assim, pelo teorema do confronto,

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 3}{2} \leq \lim_{x \to 1} f(x) \leq \lim_{x \to 1} x - 2$$

$-1 \leq \lim_{x \to 1} f(x) \leq -1$. Portanto, $\lim_{x \to 1} f(x) = -1$.

B) Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaz, para todo $x \neq 2$, a seguinte propriedade: $1 + 4x - x^2 \leq 2f(x) \leq x^2 - 4x + 9$.

Determine $\lim_{x \to 2} f(x)$.

11. Calcule os seguintes limites trigonométricos, usando, se necessário, o limite fundamental.

A) $\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\operatorname{sen} x} + \frac{1}{\cos x}\right)$

B) $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x)$

C) $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{3x}$

D) $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{\operatorname{sen}(4x)}$

E) $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg}(x)}{x}$

F) $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg}(3x)}{x}$

G) $\lim_{x \to a} \frac{\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(a)}{x - a}$

H) $\lim_{x \to a} \frac{x - \operatorname{sen}(2x)}{x + \operatorname{sen}(3x)}$

12. Calcule os seguintes limites exponenciais, usando, se necessário, o limite fundamental.

a) $\lim_{x \to -3} \pi^x =$ b) $\lim_{x \to 2} \pi^x =$ c) $\lim_{x \to -\infty} \pi^x =$ d) $\lim_{x \to 0} \pi^x =$ e) $\lim_{x \to \infty} \pi^x =$

f) $\lim_{x \to -1} e^x =$ g) $\lim_{x \to \infty} e^x =$ h) $\lim_{x \to 1/2} e^x =$ i) $\lim_{x \to -\infty} e^x =$

j) $\lim_{x \to -\infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^{4x}$

k) $\lim_{x \to 0} (1 + 2x)^{\frac{1}{x}}$

l) $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{x}$

m) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{3^x - 1}{x}\right)$

n) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{e^x - 2^x}{x}\right)$

o) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{a^x - b^x}{x}\right)$

p) $\lim_{x \to +\infty} e^x \cdot \operatorname{sen} x$

q) $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3\cos(x) + 2^x}{2^x}\right) =$

r) $\lim_{x \to 1} 2^{\frac{1}{x+2}}$

s) $\lim_{x \to -1} 3^{1-x^2} =$

t) $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x+2}{x-3}\right)^{x+2}$

13. Calcule os seguintes limites logarítmicos

a) $\lim_{x \to 1} \left(\log_{1/5} x\right) =$

b) $\lim_{x \to +\infty} \left(\log_{1/5} x\right) =$

c) $\lim_{x \to -\infty} \left(\log_{1/5} x\right) =$

d) $\lim_{x \to 0^+} \left(\log_{1/5} x\right) =$

e) $\lim_{x \to 27} \left(\log_3 x\right) =$

f) $\lim_{x \to -\infty} \left(\log_3 x\right) =$

g) $\lim_{x \to 0^+} \left(\log_3 x\right) =$

h) $\lim_{x \to \infty} \left(\log_3 x\right) =$

i) $\lim_{x \to -2} \left(\log_5 \frac{4 - x^2}{x + 2}\right) =$

j) $\lim_{x \to 3} \left[\log\left(\frac{6x+3}{4x+3}\right)\right] =$

k) $\lim_{x \to -1} \left[\log_3 \left(\frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 5x + 4}\right)\right]$

l) $\lim_{x \to -2} \left[\log\left(\frac{3 - \sqrt{1 - 4x}}{\sqrt{x + 6} - 2}\right)\right]$