# LISTA DE EXERCÍCIOS 2 – DISCIPLINA DE ANÁLISE DE DADOS

*Sandro Dias Pinto Vitenti*

*Esses exercícios se referem às aulas sobre região de confiança e teste das verossimilhanças. Uma descrição dos métodos se encontra no livro Statistics, A Guide to the Use of Statistical Methods in the Physical Sciences - R.J. Barlow. Os exercícios devem ser feitos com programação em qualquer linguagem desejada.*

---

Considere a verossimilhança de super novas

$$\mathrm{L}\left(\mathrm{D}|\theta\right) = e^{-\frac{1}{2}\sum_i \frac{\left(\mu(z_i|\theta)-\mu_i^{obs}\right)^2}{\sigma_i^2}}, \tag{1}$$

onde $\mu$ é a distância modular, $z_i$ é o redshift da $i$-ésima supernova, e $\sigma$ é o desvio padrão. Para calcular os parâmetros da verossimilhança acima, precisaremos das seguintes relações descritas abaixo.

A distância comóvel dada por

$$d_c(z) = \frac{c}{\mathrm{H}_0}\int_0^z \frac{dz'}{\mathrm{E}(z')}, \tag{2}$$

tal que sua versão sem dimensão é

$$\mathrm{D}_c(z) = \frac{\mathrm{H}_0}{c} d_c(z). \tag{3}$$

Além disso, $\mathrm{E}(z)$ é a função de Hubble normalizada

$$\mathrm{E}^2(z) \equiv \frac{\mathrm{H}^2(z)}{\mathrm{H}_0^2} = \Omega_{\Lambda 0} + \Omega_{k0}(1+z)^2 + \Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_{r0}(1+z)^4. \tag{4}$$

A distância comóvel temporal $\mathrm{D}_t$ dada por

$$\mathrm{D}_t(z) = \frac{\sinh\left[\sqrt{\Omega_{k0}}\mathrm{D}_c(z)\right]}{\sqrt{\Omega_{k0}}}, \tag{5}$$

onde $\Omega_{k0}$ é o valor da densidade de curvatura hoje. Usando a definição acima, temos que a distância de luminosidade e a distância modular são dadas por

$$D_L = (1+z)D_t(z) \tag{6}$$

e

$$\mu(z) = 5\log_{10} D_L + 25 + 5\log_{10}\left[\frac{\frac{c}{H_0}}{1\mathrm{Mpc}}\right], \tag{7}$$

onde Mpc é megaparsec.

1. Considere a verossimilhança de super novas

$$L(D|\boldsymbol{\theta}) = e^{-\frac{1}{2}\sum_i \frac{(\mu(z_i|\boldsymbol{\theta})-\mu_i^{obs})^2}{\sigma_i^2}}. \tag{8}$$

Os dados observados se encontram no arquivo NumCosmo/data/nc_snia_diag_legacy.obj.
a) Dado que

$$\boldsymbol{\theta} = (H_0, \Omega_{k0}, \Omega_{m0}, \Omega_{r0}, \Omega_{\Lambda 0}), \tag{9}$$

calcule o best fit da verossimilhança para $\Omega_{k0} = \Omega_{r0} = 0$. Calcule a matriz fisher dos parâmetros e usando o teste das razões das verossimilhanças, calcule as regiões de confiança para $1\sigma$, $2\sigma$ e $3\sigma$. As regiões de confiança devem ser feitas apenas com 2 parâmetros por vez.

b) Repita o exercício acima com todos os parâmetros livres.

c) Use a NumCosmo para calcular a região de confiança de $2\sigma$ usando o teste da razão das verossimilhanças. Tome como base os arquivos NumCosmo/examples/example_fit_snia.py e NumCosmo/examples/example_rg_snia_bao.py

d) Usando o teste da razão das verossimilhanças, discuta o quão favorável é a hipótese de que $\Omega_k = \Omega_r = 0$ com a situação em que se ajusta todos os parâmetros.

Sugestões: Minizar $-2\ln L$ ao invés de maximizar L para encontrar o best fit. Utilizar os seguintes módulos para minimização: NlOpt, SciPy Optimize com Nelder Mead ou usar Non-linear Least Squares do mesmo módulo.