“Computação Gráfica e Processamento de Imagens”

- *Transformações geométricas (2D)*

Prof. Julio Arakaki

2018

1. Transformação Composta (utilização de coordenadas homogêneas)

- 2 translações sucessivas (t_{x1}, t_{y1}) e (t_{x2}, t_{y2})

P' = T(t_{x1}, t_{y1}).T(t_{x2}, t_{y2}).P

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_{x1} \\ 0 & 1 & t_{y1} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_{x2} \\ 0 & 1 & t_{y2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & (t_{x1} + t_{x2}) \\ 0 & 1 & (t_{y1} + t_{y2}) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$ => P' = T(t_{x1}+t_{x2}, t_{y1}+t_{y2}).P

- 2 rotações sucessivas

P' = R(θ_1).R(θ_2).P

P' = R(θ_1+θ_2).P => $$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & -sen(\theta_1 + \theta_2) & 0 \\ sen(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

- 2 escalas sucessivas

P' = S(S_{x1}, S_{y1}).S(S_{x2}, S_{y2}).P

P' = S(S_{x1}.S_{x2}, S_{y1}.S_{y2}).P => $$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{x1}.S_{x2} & 0 & 0 \\ 0 & S_{y1}.S_{y2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

- 1 translação e uma rotação

P' = T(t_x, t_y).R(θ).P => $$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\theta & 0 \\ sen\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

⇨ $$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\theta & t_x \\ sen\theta & \cos\theta & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

1.1. Rotação em relação a um ponto qualquer (xq, yq).

Normalmente, um pacote gráfico possui somente função de rotação em relação à origem. Para realizar a rotação em relação a um ponto qualquer, pode-se utilizar composição de transformações. Neste caso, a seguinte seqüência:

1. Transladar o objeto tal que o ponto fixo coincida com a origem.

2. Rotacionar o objeto em relação à origem.

3. Transladar o objeto tal que o ponto fixo retorne à posição original.

translação $\Rightarrow$ rotação $\Rightarrow$ translação

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & xq \\ 0 & 1 & yq \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\theta & 0 \\ sen\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & -xq \\ 0 & 1 & -yq \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\theta & xq.(1-\cos\theta) + yq.sen\theta \\ sen\theta & \cos\theta & yq.(1-\cos\theta) - xq.sen\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

1.2. Escala em relação a um ponto qualquer (xq, yq).

Deve-se fazer a seguinte seqüência de transformações:

1. Translação do objeto, tal que o ponto fixo coincida com a origem.

2. Escala do objeto em relação à origem

3. Translação inversa à 1, tal que o ponto fixo retorne à posição original.

translação $\Rightarrow$ escala $\Rightarrow$ translação

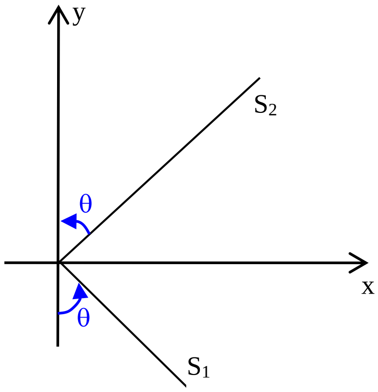
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & xq \\ 0 & 1 & yq \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & -xq \\ 0 & 1 & -yq \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_x & 0 & xq.(1-S_x) \\ 0 & S_y & yq.(1-S_y) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

1.3. Escala em direções variadas

A transformação de escala (Sx, Sy) é aplicado em relação aos eixos x e y respectivamente.

É possível, porém realizar esta transformação de escala de tal forma que as direções sejam diferentes dos eixos x e y:



Para este caso, pode-se utilizar a seguinte sequência de transformações:

1. rotacionar de forma que as direções S_1 e S_2 coincidam com os eixos x e y, respectivamente.
2. aplicar a escala (S_1 e S_2).
3. rotacionar em sentido oposto, de forma que a orientação retorne a posição original.

rotação => escala => rotação

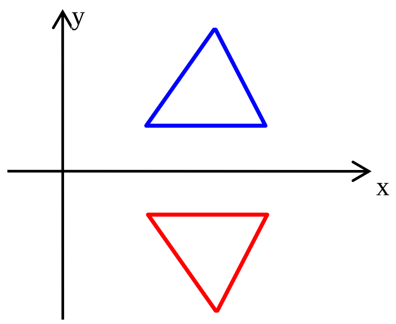
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\theta & 0 \\ sen\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} S_1 & 0 & 0 \\ 0 & S_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -sen(-\theta) & 0 \\ sen(-\theta) & \cos(-\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1\cos^2\theta + S_2 sen^2\theta & (S_1 - S_2) sen\theta\cos\theta & 0 \\ (S_1 - S_2) sen\theta\cos\theta & S_1 sen^2\theta + S_2\cos^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. Outras transformações

Reflexão: produz uma imagem refletida.

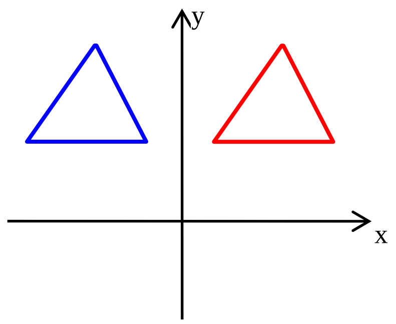
- sobre a reta y=0 (eixo x)



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

x' = x, y'= -y

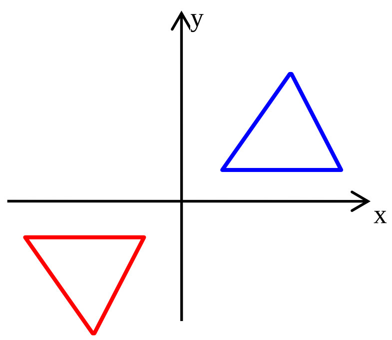
- sobre a reta x=0 (eixo y)



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

x' = -x, y'= y

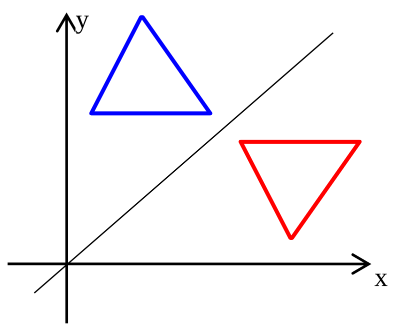
- sobre o eixo x e y



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

x' = -x, y'= -y

- sobre a reta y=x



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

x' = y, y'= x