

Lista de Exercícios II – Métodos Numéricos para EDO's e Sistemas de EDO's

Exercício 1.

(ET) Demonstre o Teorema de Existência e Unicidade de Soluções para EDO's. Apresente, antes da demonstração, todos os conceitos de Análise importantes para que a demonstração seja compreendida.

Exercício 2.

(EC) Resolva computacionalmente as equações diferenciais dadas abaixo utilizando o método de Euler no intervalo $[0, 15]$ usando (a) $h = 10^{-1}$; (b) $h = 10^{-2}$ e (c) $h = 10^{-4}$.

- a) $y' - y = 2te^{2t}$ com $y(0) = 1$
- b) $y' = 4 + 2y - t$ com $y(0) = 2$

Exercício 3.

(ET) (a) Para cada PVI dado encontre valores aproximados da solução em $t = 0, 1$, $t = 0, 2$, $t = 0, 3$ e $t = 0, 4$ usando o método de Euler com $h = 0, 1$.

(b) Para cada PVI dado encontre valores aproximados da solução em $t = 0, 1$, $t = 0, 2$, $t = 0, 3$ e $t = 0, 4$ usando o método de Euler com $h = 0, 05$.

(c) Encontre a solução exata para cada PVI dado e faça uma análise do erro cometido ao estimar a solução encontrada nos itens (a) e (b).

- a) $y' = 3 + t - y$ com $y(0) = 1$
- b) $y' = 2y - 1$ com $y(0) = 1$
- c) $y' = 3 \cos t - 2y$ com $y(0) = 0$

Exercício 4.

(EC) Encontre a solução dos PVI's da questão anterior utilizando o Python e considerando os passos $h = 0, 001$ e $h = 10^{-8}$. Qual é o erro cometido neste caso?

Exercício 5.

(ET) Pesquise sobre a estimativa do erro cometido ao se usar o método de Euler. Traga os principais resultados em detalhes e ilustre-os escolhendo um exemplo apropriado.

Exercício 6.

(EC) Utilize o método de Euler para obter a solução numérica para cada um dos PVI's dados a seguir:

- a) $y' = te^{3t} - 2y$ no intervalo $0 \leq t \leq 1$ com a condição inicial $y(0) = 0$ e passo de integração $h = 10^{-4}$.
- b) $y' = 1 + (t - y)^2$ no intervalo $2 \leq t \leq 3$ com a condição inicial $y(2) = 1$ e passo de integração $h = 10^{-4}$.
- c) $y' = 1 + \frac{y}{t}$ no intervalo $1 \leq t \leq 2$ com a condição inicial $y(1) = 2$ e passo de integração $h = 10^{-4}$.
- d) $y' = \cos 2t + \sin 3t$ no intervalo $0 \leq t \leq 1$ com a condição inicial $y(0) = 1$ e passo de integração $h = 10^{-4}$.

Exercício 7.

(EC) As soluções exatas dos PVI's dados no exercício 6 são dadas abaixo. Compute o erro cometido ao se obter a solução numérica via método de Euler considerando que o erro E é definido pela expressão

$$E = \sum_{t=x_i}^{x_f} |S_{\text{exata}}(t) - S_{\text{aproximada}}(t)|^2,$$

em que x_i e x_f representam os pontos inicial e final do intervalo para o qual se obteve a solução numérica.

- a) $y(t) = \frac{1}{5}te^{3t} - \frac{1}{25}e^{3t} + \frac{1}{25}e^{-2t}$
- b) $t(t) = t + \frac{1}{1-t}$.
- c) $y(t) = t \ln t + 2t$.
- d) $y(t) = \frac{1}{2} \sin 2t - \frac{1}{3} \cos 3t + \frac{4}{3}$.

Exercício 8.

(EC) Resolva novamente o Exercício 6 usando agora o Método Runge-Kutta de 4a. Ordem e salve cada resultado em um arquivo texto (envie junto com essa questão os arquivos textos gerados).

Exercício 9.

(EC) Repita o exercício 7 computando o erro cometido ao se obter a solução numérica dos PVI's via método Runge-Kutta de 4a. Ordem.

Exercício 10.

(EC) Compare os erros calculados nas questões 7 e 9 calculados em relação aos métodos de Euler e Runge-Kutta de 4a. Ordem. Faça uma análise do desempenho de cada método em relação aos erros observados.

Exercício 11.

(ET) Pesquise sobre o método de Euler modificado (ou de Heun ou ainda Runge Kutta de 2a. ordem) e apresente uma justificativa geométrica (como as feitas em aula) para o método. Apresente as equações e como o método funciona. Ilustre com um exemplo.

Exercício 12.

(EC) Implemente em Python o método de Heun (use uma função) pesquisado na questão 11. Resolva novamente os PVI's do exercício 6 usando a função implementada e faça a estimativa do erro cometido usando a definição de erro dada na questão 7.

Exercício 13.

(EC/ET) (Adaptado de Burden, p.330) Na teoria da propagação de doenças contagiosas uma equação diferencial relativamente elementar pode ser usada para estimar o número de indivíduos infectados na população a qualquer instante desde que sejam feitas hipóteses simplificadas apropriadas. Em particular, vamos supor que todos os indivíduos em uma população fixa tenham uma probabilidade igual de serem infectados e que, uma vez infectados, permaneçam nesse estado. Suponha que $x(t)$ denote o número de indivíduos suscetíveis no instante t e $y(t)$ denote o número de infectados. É razoável supor que a taxa na qual o número de infectados varia seja proporcional ao produto de $x(t)$ e $y(t)$ já que a taxa depende tanto do número de infectados quanto do número de suscetíveis no instante t . Se a população for grande o suficiente para supor que $x(t)$ e $y(t)$ variem continuamente então o problema pode ser expresso como

$$y'(t) = kx(t)y(t),$$

em que k é uma constante e $x(t) + y(t) = m$, a população total. Esta equação pode ser reescrita envolvendo apenas $y(t)$ como

$$y'(t) = k(m - y(t))y(t) \quad (I)$$

- a) Supondo $m = 100.000$, $y(0) = 1000$ e $k = 2 \cdot 10^{-6}$ e que o tempo seja medido em dias, encontre uma aproximação para o número de indivíduos infectados ao final de 30 dias. Utilize o método RK4 escolhendo um passo de integração que seja apropriado.

- b) A equação diferencial (I) é chamada de **Equação de Bernoulli** e pode ser resolvida analiticamente. Encontre a solução exata para a equação do item (a) e compare o valor exato de $y(30)$ com a aproximação determinada via método numérico.

Exercício 14.

(EC) Adapte o código do Runge-Kutta de 4a. Ordem para resolver um sistema de equações diferenciais com quatro equações e resolva o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x' = 0,375x + y + 0,4 \cdot (z + 1,7) \\ y' = -x \\ z' = (0,001)^{-1} \cdot (w - z^3 + 3z^2 - x - 0,15) \\ w' = (0,002)^{-1} \cdot (1 - 5z^2 - w). \end{cases}$$

Este sistema, chamado de modelo “Hindmarsh-Rose”, é usado para modelar a atividade neuronal (a simulação dos disparos de neurônios (sinapses) podem ser vistos na variável w). Para resolvê-lo considere a condição inicial $(0,2, 0,2, 0,2, 1,66)$.

- a) Integre o sistema no intervalo $[0, 50]$.
b) Salve as quatro variáveis em um arquivo texto e envie junto com seu código computacional.
c) Faça um gráfico simples (salve-o e envie-o junto com a questão) onde esteja plotada a variável w .

Observação: Use passo de integração $h = 5 \cdot 10^{-5}$. Usei esse valor em minha tese de doutorado e funcionou bem. Veja minha tese na página 109 caso deseje mais informações.

Exercício 15.

(ET/EC) Considere o oscilador de Van de Pol sem forçante que é definido pela equação diferencial de segunda ordem

$$x'' + \mu \cdot (x^2 - 1) \cdot x' + x = 0.$$

- a) Reescreva esta equação como um sistema dois por dois.
b) Chamamos de **descarte do transiente** a um descarte dos resultados obtidos via integração numérica para algum intervalo inicial do tempo considerado. Resolva a equação de Van der Pol numericamente no intervalo $[0, 100]$ para $\mu = 0,02$ e faça o descarte do transiente no intervalo $[0, 25[$ (ou seja, deixe no resultado da integração numérica apenas o correspondente ao intervalo $[25, 100]$).
c) Salve o resultado da integração numérica em um arquivo texto e o envie junto com o código computacional.