Ex 1: Encontre o traço e o determinante das matrizes abaixo

a) $M_1 \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $a_{m,n} = (m+2)^n$ para $1 \leq m, n \leq 2$

b) $M_2 \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, $a_{m,n} = 2n - 3m$ para $1 \leq m, n \leq 3$

c) $M_3 \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $a_{m,n} = m + n \cdot i$ para $1 \leq m, n \leq 2$

Sol: Expandindo as expressões, nós temos

(a) $M_1 = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1+2)^1 & (1+2)^2 \\ (2+2)^1 & (2+2)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 4 & 16 \end{bmatrix}$,

$\Rightarrow Tr(M_1) = 3 + 16 = 19$; $\det(M_1) = 3.16 - 4.9 = 12$

(b) $M_2 = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2.1 - 3.1) & (2.2 - 3.1) & (2.3 - 3.1) \\ (2.1 - 3.2) & (2.2 - 3.2) & (2.3 - 3.2) \\ (2.1 - 3.3) & (2.2 - 3.3) & (2.3 - 3.3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -4 & -2 & 0 \\ -7 & -5 & -3 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow Tr(M_2) = -6$; $\det(M_2) = (-1)(6) - (1)(12) + 3(6) = 0$

(c) $M_3 = \begin{bmatrix} 1+i & 1+2i \\ 2+i & 2+2i \end{bmatrix} \Rightarrow Tr(M_3) = 3 + 3i$

$$\begin{aligned} \det(M_3) &= (1+i)(2+2i) - (1+2i)(2+i) \\ &= (2-2) + 4i - [(2-2) + 5i] \\ &= -i \end{aligned}$$

Ex 3: Se $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, então seus autovalores são dados por

$$\lambda_{1,2} = \frac{tr(A) \pm \sqrt{Tr(A)^2 - 4\det(A)}}{2}$$

Sol: Seja $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ qualquer, suponha que v seja um autovetor de A e λ seja seu autovalor associado, então

$$Av = \lambda v \iff (A - \lambda I)v \iff \det(A - \lambda I) = 0$$

Como $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, pela formula de Leibniz p/ o determinante e a última igualdade acima nós temos

$$0 = \det(A - \lambda I) = \left| \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right|$$

$$= \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = (a - \lambda)(d - \lambda) - cb$$

$$= \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - cb)$$

Por Bhaskara nós obtemos que

$$\lambda_{1,2} = \frac{(a+d) \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad - cb)}}{2}$$

Como $Tr(A) = (a+d)$ e $\det(A) = (ad - cb)$, concluímos

$$\lambda_{1,2} = \frac{tr(A) \pm \sqrt{tr(A)^2 - 4\det(A)}}{2}$$

Ex 5: Se $a_n = a_1 . q^{(n-1)}$ com $a_1 = a$ e $0 < q < 1$, mostre que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a}{1-q}$. Encontre $\sum_{n=1}^{\infty} 10.(1/2)^n$.

Sol: Primeiro achar uma expressão para a soma finita da P.G. Note que, como toda soma finita de números reais é finita, então p/ todo $n \in \mathbb{N}$, existe $S_n \in \mathbb{R}$ t.q. $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_n$, ou seja

$$S_n = a_1 + a_1 q + \dots + a_1 q^{n-1}$$

Então $S_n . q \in \mathbb{R}$, cuja expressão é dada por

$$S_n . q = a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{n-1} + a_1 . q$$

Logo $S_n q - S_n \in \mathbb{R}$, de onde obtemos a soma telescópica.

$$S_n . q - S_n = (a_1 q - a_1) + (a_1 q^2 - a_1 q) + \dots + (a_1 q^n - a_1 q^{n-1})$$
$$= a_1 q^n - a_1,$$

Ou seja

$$S_n (q-1) = a_1 (q^n - 1) \Rightarrow S_n = \frac{a_1 (q^n - 1)}{q-1}.$$

Agora basta notar que p/ todo $0 < q < 1$, $\lim_{n \to \infty} q^n = 0$. Então

$$S_\infty = \lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \frac{a_1 (q^n - 1)}{q - 1} = \frac{a(\lim_{n \to \infty} q^n - 1)}{q-1} = \frac{a}{q-1}$$