Sistema de Rossler Tópicos de matemática computacional

Kaique M. M. de Oliveira Caio U. Martins

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO Departamento de Computação e Matemática



Professor: Luciano Aparecido Magrini

24 de Fevereiro de 2024

Sumário

- Introdução
- Pesquisa histórica
 - Contextualização da Teoria do Caos
 - A história de Otto Rossler
- Sistema de Rossler
 - Abordagem Analítica
- 4 Análise numérico-computacional
- Referências

Introdução

O que está por vir?

- Trazer uma abordagem histórica da Teoria do Caos
- Explicar quem foi Otto Rossler
- Apresentar um estudo matemático-computacional do Sistema de Rossler

Objetivo

 Nosso objetivo do seminário é explicar um pouco sobre a história de Otto Rossler contextualizada nos acontecimentos na teoria de Sistemas Dinâmicos como foco na Teoria do Caos.

O contexto

Teoria do Caos

- A teoria do caos é uma teoria matemática, que permite a descrição de fenômenos relacionados a sistemas dinâmicos.
- Um sistema dinâmico é um sistema que muda com o tempo devido a uma causa e um efeito.
- Um evento caótico é um evento que por fins práticos é impossível de se prever o seu desenvolvimento conforme o tempo aumenta.

Newton e a causalidade

 Uma das primeiras concepções sobre os sistemas dinâmicos é o princípio da causalidade, que é a propriedade de um evento futuro ser unicamente determinado pelas propriedades do presente.

Determinismo

Laplace e o determinismo

- O conceito de determinismo se transformou na discussão presente no livro "Le système de la nature"de 1770, na qual o filosofo d'Holbach faz uma afirmação sobre a viabilidade de calcular os efeitos de uma determinada causa de modo universal.
- Mas, é Laplace que clarificou o conceito do que é determinismo universal, que diz que o universo é unicamente determinado pelas leis da física. "O universo no bater do relógio".

Sistemas dinâmicos

Dinâmica estátistica

- Poincaré e o espaço de fase
 - Representação de um espaço abstrato, no qual se aplica certas leis físicas com uma certa série de parâmetros.
- Kolmogorov e o sistemas dinâmicos
 - Modelos lineares e modelos não lineares.
 - A soma das causas pode não necessariamente ser a soma dos efeitos.

Lorenz e o efeito borboleta

- "Predictability: does the flap of a butterfly's wing in Brazil set off a tornado in Texas?"
- Pequenas variações no estado inicial podem induzir magnitudes de ordens muito maiores do estado final.



O que Otto Rossler tem haver com isso?

Breve Biografia

- Otto Rossler nasceu na Alemanhã e foi um bioquímico conhecido pela equação teórica do Sistema de Rossler.
 Escreveu mais de 300 artigos científicos e estudou medicina na Universidade de Tuebingen.
- Possui uma grande fase da sua vida investigando a resoluções de equações diferenciais da bioquímica, usando computadores eletrônicos e digitais da época.
- No começo de 1970, Otto Rossler fez seus primeiros contatos com Art Winfree, que trocavam cartas sobre sistemas dinâmicos.

O que Otto Rossler tem haver com isso?

Breve Biografia

- Em 1975, nas trocas de carta entre Otto e Winfree, Art desafiou Rossler a encontrar uma reação bioquímica que reproduzia o atrator de Lorenz e enviou um conjunto de 10 papers de seus arquivos para ele.
- Nesse conjunto um dos papers era o de Lorenz, no qual Otto ficou bastante impressionado.
- Muito influenciado, Otto falhou em encontrar a tal reação, mas encontrou um atrator mais simples, no qual deu origem a seu primeiro paper sobre o sistema de Rossler.

O sistema de Rossler

O Definição

O sistema de Rossler é definido pelo seguinte sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= -y - z \\ \frac{dy}{dt} &= x + ay \\ \frac{dz}{dt} &= b + z(x - c) \end{cases}$$
 (1)

onde $a, b, c \in \mathbb{R}$

Pontos de equilíbrio

Note que o sistema de Rossler é uma equação diferencial autônoma. Podemos encontrar os seus de equilíbrio fazendo f(x)=0.

O sistema de Rossler

O Definição

O sistema de Rossler é definido pelo seguinte sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= -y - z \\ \frac{dy}{dt} &= x + ay \\ \frac{dz}{dt} &= b + z(x - c) \end{cases}$$
 (1)

onde $a, b, c \in \mathbb{R}$

Pontos de equilíbrio

Note que o sistema de Rossler é uma equação diferencial autônoma. Podemos encontrar os seus de equilíbrio fazendo f(x) = 0.

Pontos de equilíbrio

Resolvendo a equação, obtemos que o sistema de Rossler apresenta dois pontos de equilíbrio

$$(x_{\pm}, y_{\pm}, z_{\pm}) = \left(\frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4ab}}{2}, -\left(\frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a}\right), \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a}\right) \quad (2)$$

O jacobiano

Podemos calcular o Jacobiano do sistema para investigar os pontos de equilíbrio

$$J = \begin{pmatrix} -\frac{\partial f_1}{\partial x} & -\frac{\partial f_1}{\partial y} & -\frac{\partial f_1}{\partial z} \\ -\frac{\partial f_2}{\partial x} & -\frac{\partial f_2}{\partial y} & -\frac{\partial f_2}{\partial z} \\ -\frac{\partial f_3}{\partial x} & -\frac{\partial f_3}{\partial y} & -\frac{\partial f_3}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ z & 0 & x - c \end{pmatrix}$$
(3)

Pontos de equilíbrio

Resolvendo a equação, obtemos que o sistema de Rossler apresenta dois pontos de equilíbrio

$$(x_{\pm}, y_{\pm}, z_{\pm}) = \left(\frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4ab}}{2}, -\left(\frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a}\right), \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a}\right) \quad (2)$$

O jacobiano

Podemos calcular o Jacobiano do sistema para investigar os pontos de equilíbrio

$$J = \begin{pmatrix} -\frac{\partial f_1}{\partial x} & -\frac{\partial f_1}{\partial y} & -\frac{\partial f_1}{\partial z} \\ -\frac{\partial f_2}{\partial x} & -\frac{\partial f_2}{\partial y} & -\frac{\partial f_2}{\partial z} \\ -\frac{\partial f_3}{\partial x} & -\frac{\partial f_3}{\partial y} & -\frac{\partial f_3}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ z & 0 & x - c \end{pmatrix}$$
(3)

Autovalores de J

Podemos encontrar os autovalores da matriz J resolvendo a seguinte cúbica.

$$-\lambda^{3} + \lambda^{2}(a + x - c) + \lambda(ac - ax - 1 - z) + x - c + az = 0$$
 (4)

Ao aplicarmos os pontos de equilíbrio 2 a equação 4, podemos obter alguns resultados analíticos utilizando do seguinte teorema

Teorema

Um ponto de equilíbrio x* da equação diferencial x' = f(x) é estável se todos os autovalores de J*, o Jacobiano avaliado em x* tiverem partes reais negativas. Um ponto de equilíbrio é instável se pelo menos um dos seus autovalores tiver parte real positiva.

Autovalores de J

Podemos encontrar os autovalores da matriz J resolvendo a seguinte cúbica.

$$-\lambda^{3} + \lambda^{2}(a + x - c) + \lambda(ac - ax - 1 - z) + x - c + az = 0$$
 (4)

Ao aplicarmos os pontos de equilíbrio 2 a equação 4, podemos obter alguns resultados analíticos utilizando do seguinte teorema

Teorema

Um ponto de equilíbrio x* da equação diferencial x'=f(x) é estável se todos os autovalores de J*, o Jacobiano avaliado em x*, tiverem partes reais negativas. Um ponto de equilíbrio é instável se pelo menos um dos seus autovalores tiver parte real positiva.

Aplicações do teorema

Um ponto de equilíbrio é estável se para toda condição inicial suficientemente perta do equilíbrio, as trajetórias da solução permanecem arbitrariamente pertas do ponto de equilíbrio. Um ponto de equilíbrio instável é o contrário, as trajetórias são repelidas.

Abordagem computaciona

Utilizaremos uma abordagem mais experimental e computacional para analizarmos os impactos dos dos diferentes valores de a,b,c e das diferentes contições iniciais.

Aplicações do teorema

Um ponto de equilíbrio é estável se para toda condição inicial suficientemente perta do equilíbrio, as trajetórias da solução permanecem arbitrariamente pertas do ponto de equilíbrio. Um ponto de equilíbrio instável é o contrário, as trajetórias são repelidas.

Abordagem computacional

Utilizaremos uma abordagem mais experimental e computacional para analizarmos os impactos dos dos diferentes valores de a,b,c e das diferentes contições iniciais.

Valores base para c

Para a, b = 0.1 teremos que

- c = 4, órbita com período 1
- c = 6, órbita com período 2
- c = 8.5, órbita com período 2
- c = 9, órbita caótica
- c = 12, órbita com período 3
- c =18, órbita caótica

Valores base para a

Para b = 0.1 e c = 4 teremos que

- a = 0.05, 0.1 órbitaa com período 1
- a = 0.15, órbita com período 2
- a = 0.2, órbita com período 4
- a = 025, órbita com período 2
- a = 0.28, órbita com período 4
- a = 0.3, órbita caótica
- a = 0.33, órbita com período 3
- a = 0.35, órbita com caótica

Valores base para b

Para a = 0.1 e c = 4 teremos que

- b = 0.01, órbita com período 2
- $b \in [0.04, 1]$ órbita com período 1

Valores base para b

Para a = 0.1 e c = 7.3 teremos que

- b = 0.04, órbita com período 4
- b = 0.1, 0.15, 0.25, 0.3 órbita com período 2
- $b \in [0.04, 1]$ órbita com período 1

Valores base para b

Para a = 0.1 e c = 4 teremos que

- b = 0.01, órbita com período 2
- $b \in [0.04, 1]$ órbita com período 1

Valores base para b

Para a = 0.1 e c = 7.3 teremos que

- b = 0.04, órbita com período 4
- b = 0.1, 0.15, 0.25, 0.3 órbita com período 2
- $b \in [0.04, 1]$ órbita com período 1

Referências



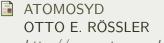
A history of chaos theory. *PMC PubMed Central*, 2007.

STROGATZ, Steven H.

Nonlinear dynamics and chaos with student solutions manual: With applications to physics, biology, chemistry, and engineering.

CRC press, 2018.

Referências



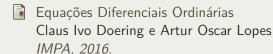
http://www.atomosyd.net/spip.php?article6, 2008.

INFLUENCES ON OTTO E. ROSSLER'S EARLIEST PAPER ON CHAOS

C. LETELLIER and V. MESSAGER International Journal of Bifurcation and Chaos Vol. 20, No.

11, 2010.

Referências



ISBN: 978-85-244-0425-2, 6ª edição.

Differential Equations: A Dynamical Systems Approach to Theory and Practice
Marcelo Viana, José M. Espinar
Graduate Studies in Mathematics, 2021.