Sistema de Rossler

Tópicos de matemática computacional

Kaique M. M. de Oliveira
Caio U. Martins

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Departamento de Computação e Matemática

Professor: Luciano Aparecido Magrini

24 de Fevereiro de 2024

Sumário

1. Introdução
2. Pesquisa histórica
   - Contextualização da Teoria do Caos
   - A história de Otto Rossler
3. Sistema de Rossler
   - Abordagem Analítica
4. Análise numérico-computacional
5. Referências

Introdução

O que está por vir?

- Trazer uma abordagem histórica da Teoria do Caos
- Explicar quem foi Otto Rossler
- Apresentar um estudo matemático-computacional do Sistema de Rossler

Objetivo

- Nosso objetivo do seminário é explicar um pouco sobre a história de Otto Rossler contextualizada nos acontecimentos na teoria de Sistemas Dinâmicos como foco na Teoria do Caos.

O contexto

Teoria do Caos

- A teoria do caos é uma teoria matemática, que permite a descrição de fenômenos relacionados a sistemas dinâmicos.
- Um sistema dinâmico é um sistema que muda com o tempo devido a uma causa e um efeito.
- Um evento caótico é um evento que por fins práticos é impossível de se prever o seu desenvolvimento conforme o tempo aumenta.

Newton e a causalidade

- Uma das primeiras concepções sobre os sistemas dinâmicos é o princípio da causalidade, que é a propriedade de um evento futuro ser unicamente determinado pelas propriedades do presente.

Determinismo

Laplace e o determinismo

- O conceito de determinismo se transformou na discussão presente no livro "Le système de la nature"de 1770, na qual o filosofo d'Holbach faz uma afirmação sobre a viabilidade de calcular os efeitos de uma determinada causa de modo universal.
- Mas, é Laplace que clarificou o conceito do que é determinismo universal, que diz que o universo é unicamente determinado pelas leis da física. "O universo no bater do relógio".

Sistemas dinâmicos

Dinâmica estátistica

- Poincaré e o espaço de fase
  - Representação de um espaço abstrato, no qual se aplica certas leis físicas com uma certa série de parâmetros.
- Kolmogorov e o sistemas dinâmicos
  - Modelos lineares e modelos não lineares.
  - A soma das causas pode não necessariamente ser a soma dos efeitos.

Lorenz e o efeito borboleta

- *"Predictability: does the flap of a butterfly's wing in Brazil set off a tornado in Texas?"*
- Pequenas variações no estado inicial podem induzir magnitudes de ordens muito maiores do estado final.

O que Otto Rossler tem haver com isso?

Breve Biografia

- Otto Rossler nasceu na Alemanhã e foi um bioquímico conhecido pela equação teórica do Sistema de Rossler. Escreveu mais de 300 artigos científicos e estudou medicina na Universidade de Tuebingen.
- Possui uma grande fase da sua vida investigando a resoluções de equações diferenciais da bioquímica, usando computadores eletrônicos e digitais da época.
- No começo de 1970, Otto Rossler fez seus primeiros contatos com Art Winfree, que trocavam cartas sobre sistemas dinâmicos.

O que Otto Rossler tem haver com isso?

Breve Biografia

- Em 1975, nas trocas de carta entre Otto e Winfree, Art desafiou Rossler a encontrar uma reação bioquímica que reproduzia o atrator de Lorenz e enviou um conjunto de 10 papers de seus arquivos para ele.
- Nesse conjunto um dos papers era o de Lorenz, no qual Otto ficou bastante impressionado.
- Muito influenciado, Otto falhou em encontrar a tal reação, mas encontrou um atrator mais simples, no qual deu origem a seu primeiro paper sobre o sistema de Rossler.

O sistema de Rossler

Definição

O sistema de Rossler é definido pelo seguinte sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} & = -y - z \\ \frac{dy}{dt} & = x + ay \\ \frac{dz}{dt} & = b + z(x - c) \end{cases} \tag{1}$$

onde $a, b, c \in \mathbb{R}$

Pontos de equilíbrio

Note que o sistema de Rossler é uma equação diferencial autônoma. Podemos encontrar os seus de equilíbrio fazendo $f(x) = 0$.

O sistema de Rossler

O Definição

O sistema de Rossler é definido pelo seguinte sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} & = -y - z \\ \frac{dy}{dt} & = x + ay \\ \frac{dz}{dt} & = b + z(x - c) \end{cases} \tag{1}$$

onde $a, b, c \in \mathbb{R}$

Pontos de equilíbrio

Note que o sistema de Rossler é uma equação diferencial autônoma. Podemos encontrar os seus de equilíbrio fazendo $f(x) = 0$.

Pontos de equilíbrio

Resolvendo a equação, obtemos que o sistema de Rossler apresenta dois pontos de equilíbrio

$$(x_\pm, y_\pm, z_\pm) = \left(\frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4ab}}{2}, -\left(\frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a}\right), \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a}\right) \tag{2}$$

O jacobiano

Podemos calcular o Jacobiano do sistema para investigar os pontos de equilíbrio

$$J = \begin{pmatrix} -\frac{\partial f_1}{\partial x} & -\frac{\partial f_1}{\partial y} & -\frac{\partial f_1}{\partial z} \\ -\frac{\partial f_2}{\partial x} & -\frac{\partial f_2}{\partial y} & -\frac{\partial f_2}{\partial z} \\ -\frac{\partial f_3}{\partial x} & -\frac{\partial f_3}{\partial y} & -\frac{\partial f_3}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ z & 0 & x - c \end{pmatrix} \tag{3}$$

Pontos de equilíbrio

Resolvendo a equação, obtemos que o sistema de Rossler apresenta dois pontos de equilíbrio

$$(x_{\pm}, y_{\pm}, z_{\pm}) = \left(\frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4ab}}{2}, -\left(\frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a}\right), \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a}\right) \tag{2}$$

O jacobiano

Podemos calcular o Jacobiano do sistema para investigar os pontos de equilíbrio

$$J = \begin{pmatrix} -\frac{\partial f_1}{\partial x} & -\frac{\partial f_1}{\partial y} & -\frac{\partial f_1}{\partial z} \\ -\frac{\partial f_2}{\partial x} & -\frac{\partial f_2}{\partial y} & -\frac{\partial f_2}{\partial z} \\ -\frac{\partial f_3}{\partial x} & -\frac{\partial f_3}{\partial y} & -\frac{\partial f_3}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ z & 0 & x - c \end{pmatrix} \tag{3}$$

Autovalores de J

Podemos encontrar os autovalores da matriz J resolvendo a seguinte cúbica.

$$-\lambda^3 + \lambda^2(a + x - c) + \lambda(ac - ax - 1 - z) + x - c + az = 0 \quad (4)$$

Ao aplicarmos os pontos de equilíbrio 2 a equação 4, podemos obter alguns resultados analíticos utilizando do seguinte teorema

Teorema

Um ponto de equilíbrio $x*$ da equação diferencial $x' = f(x)$ é estável se todos os autovalores de $J*$, o Jacobiano avaliado em $x*$, tiverem partes reais negativas. Um ponto de equilíbrio é instável se pelo menos um dos seus autovalores tiver parte real positiva.

Autovalores de J

Podemos encontrar os autovalores da matriz J resolvendo a seguinte cúbica.

$$-\lambda^3 + \lambda^2(a + x - c) + \lambda(ac - ax - 1 - z) + x - c + az = 0 \quad (4)$$

Ao aplicarmos os pontos de equilíbrio 2 a equação 4, podemos obter alguns resultados analíticos utilizando do seguinte teorema

Teorema

Um ponto de equilíbrio $x*$ da equação diferencial $x' = f(x)$ é estável se todos os autovalores de $J*$, o Jacobiano avaliado em $x*$, tiverem partes reais negativas. Um ponto de equilíbrio é instável se pelo menos um dos seus autovalores tiver parte real positiva.

Aplicações do teorema

Um ponto de equilíbrio é estável se para toda condição inicial suficientemente perta do equilíbrio, as trajetórias da solução permanecem arbitrariamente pertas do ponto de equilíbrio. Um ponto de equilíbrio instável é o contrário, as trajetórias são repelidas.

Abordagem computacional

Utilizaremos uma abordagem mais experimental e computacional para analizarmos os impactos dos dos diferentes valores de a, b, c e das diferentes contições iniciais.

Aplicações do teorema

Um ponto de equilíbrio é estável se para toda condição inicial suficientemente perta do equilíbrio, as trajetórias da solução permanecem arbitrariamente pertas do ponto de equilíbrio. Um ponto de equilíbrio instável é o contrário, as trajetórias são repelidas.

Abordagem computacional

Utilizaremos uma abordagem mais experimental e computacional para analizarmos os impactos dos dos diferentes valores de a, b, c e das diferentes contições iniciais.

Valores base para c

Para $a, b = 0.1$ teremos que

- c $=$ 4, órbita com período 1
- c $=$ 6, órbita com período 2
- c $=$ 8.5, órbita com período 2
- c $=$ 9, órbita caótica
- c $=$ 12, órbita com período 3
- c $=$18, órbita caótica

Valores base para a

Para $b = 0.1$ e $c = 4$ teremos que

- a $= 0.05, 0.1$ órbitaa com período 1
- a $= 0.15$, órbita com período 2
- a $= 0.2$, órbita com período 4
- a $= 025$, órbita com período 2
- a $= 0.28$, órbita com período 4
- a $= 0.3$, órbita caótica
- a $= 0.33$, órbita com período 3
- a $= 0.35$, órbita com caótica

Valores base para b

Para $a = 0.1$ e $c = 4$ teremos que

- b $= 0.01$, órbita com período 2
- $b \in [0.04, 1]$ órbita com período 1

Valores base para b

Para $a = 0.1$ e $c = 7.3$ teremos que

- b $= 0.04$, órbita com período 4
- b $= 0.1$, 0.15, 0.25, 0.3 órbita com período 2
- $b \in [0.04, 1]$ órbita com período 1

Valores base para b

Para $a = 0.1$ e $c = 4$ teremos que

- b = 0.01, órbita com período 2
- $b \in [0.04, 1]$ órbita com período 1

Valores base para b

Para $a = 0.1$ e $c = 7.3$ teremos que

- b = 0.04, órbita com período 4
- b = 0.1, 0.15, 0.25, 0.3 órbita com período 2
- $b \in [0.04, 1]$ órbita com período 1

Referências

Oestreicher C.,
A history of chaos theory.
PMC PubMed Central, 2007.

STROGATZ, Steven H.
Nonlinear dynamics and chaos with student solutions manual: With applications to physics, biology, chemistry, and engineering.
CRC press, 2018.

Referências

ATOMOSYD
OTTO E. RÖSSLER
http://www.atomosyd.net/spip.php?article6, 2008.

INFLUENCES ON OTTO E. ROSSLER'S EARLIEST PAPER ON CHAOS
C. LETELLIER and V. MESSAGER
International Journal of Bifurcation and Chaos Vol. 20, No. 11, 2010.

Referências

Equações Diferenciais Ordinárias
Claus Ivo Doering e Artur Oscar Lopes
IMPA, 2016.
ISBN: 978-85-244-0425-2, 6ª edição.

Differential Equations: A Dynamical Systems Approach to Theory and Practice
Marcelo Viana, José M. Espinar
Graduate Studies in Mathematics, 2021.