UNESP Campus Rio Claro - IGCE - Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática - PGMAT
Tópicos Especiais: Computação Científica Aplicada à Matemática (Verão 2024)
Prof. Dr. Luciano Magrini
magrini@ifsp.edu.br

Lista de Exercícios II – Métodos Numéricos para EDO's e Sistemas de EDO's

---

Exercício 1.
(ET) Demonstre o Teorema de Existência e Unicidade de Soluções para EDO's. Apresente, antes da demonstração, todos os conceitos de Análise importantes para que a demonstração seja compreendida.

Exercício 2.
(EC) Resolva computacionalmente as equações diferenciais dadas abaixo utilizando o método de Euler no intervalo $[0,15]$ usando (a) $h = 10^{-1}$; (b) $h = 10^{-2}$ e (c) $h = 10^{-4}$.

a) $y' - y = 2te^{2t}$ com $y(0) = 1$
b) $y' = 4 + 2y - t$ com $y(0) = 2$

Exercício 3.
(ET) (a) Para cada PVI dado encontre valores aproximados da solução em $t = 0,1$, $t = 0,2$, $t = 0,3$ e $t = 0,4$ usando o método de Euler com $h = 0,1$.

(b) Para cada PVI dado encontre valores aproximados da solução em $t = 0,1$, $t = 0,2$, $t = 0,3$ e $t = 0,4$ usando o método de Euler com $h = 0,05$.

(c) Encontre a solução exata para cada PVI dado e faça uma análise do erro cometido ao estimar a solução encontrada nos itens (a) e (b).

a) $y' = 3 + t - y$ com $y(0) = 1$
b) $y' = 2y - 1$ com $y(0) = 1$
c) $y' = 3\cos t - 2y$ com $y(0) = 0$

Exercício 4.
(EC) Encontre a solução dos PVI's da questão anterior utilizando o Python e considerando os passos $h = 0,001$ e $h = 10^{-8}$. Qual é o erro cometido neste caso?

Exercício 5.
(ET) Pesquise sobre a estimativa do erro cometido ao se usar o método de Euler. Traga os principais resultados em detalhes e ilustre-os escolhendo um exemplo apropriado.

Exercício 6.
(EC) Utilize o método de Euler para obter a solução numérica para cada um dos PVI's dados a seguir:

a) $y' = te^{3t} - 2y$ no intervalo $0 \leq t \leq 1$ com a condição inicial $y(0) = 0$ e passo de integração $h = 10^{-4}$.
b) $y' = 1 + (t-y)^2$ no intervalo $2 \leq t \leq 3$ com a condição inicial $y(2) = 1$ e passo de integração $h = 10^{-4}$.
c) $y' = 1 + \dfrac{y}{t}$ no intervalo $1 \leq t \leq 2$ com a condição inicial $y(1) = 2$ e passo de integração $h = 10^{-4}$.
d) $y' = \cos 2t + \text{sen} 3t$ no intervalo $0 \leq t \leq 1$ com a condição inicial $y(0) = 1$ e passo de integração $h = 10^{-4}$.

Exercício 7.
(EC) As soluções exatas dos PVI's dados no exercício 6 são dadas abaixo. Compute o erro cometido ao se obter a solução numérica via método de Euler considerando que o erro E é definido pela expressão

$$E = \sum_{t=x_i}^{x_f} |S_{exata}(t) - S_{aproximada}(t)|^2,$$

em que x_i e x_f representam os pontos inicial e final do intervalo para o qual se obteve a solução numérica.

a) $y(t) = \dfrac{1}{5}te^{3t} - \dfrac{1}{25}e^{3t} + \dfrac{1}{25}e^{-2t}$
b) $t(t) = t + \dfrac{1}{1-t}$.
c) $y(t) = t\,lnt + 2t$.
d) $y(t) = \dfrac{1}{2}\text{sen}2t - \dfrac{1}{3}\cos 3t + \dfrac{4}{3}$.

Exercício 8.
(EC) Resolva novamente o Exercício 6 usando agora o Método Runge-Kutta de 4a. Ordem e salve cada resultado em um arquivo texto (envie junto com essa questão os arquivos textos gerados).

Exercício 9.

(EC) Repita o exercício 7 computando o erro cometido ao se obter a solução numérica dos PVI's via método Runge-Kutta de 4a. Ordem.

Exercício 10.

(EC) Compare os erros calculados nas questões 7 e 9 calculados em relação aos métodos de Euler e Runge-Kutta de 4a. Ordem. Faça uma análise do desempenho de cada método em relação aos erros observados.

Exercício 11.

(ET) Pesquise sobre o método de Euler modificado (ou de Heun ou ainda Runge Kutta de 2a. ordem) e apresente uma justificativa geométrica (como as feitas em aula) para o método. Apresente as equações e como o método funciona. Ilustre com um exemplo.

Exercício 12.

(EC) Implemente em Python o método de Heun (use uma função) pesquisado na questão 11. Resolva novamente os PVI's do exercício 6 usando a função implementada e faça a estimativa do erro cometido usando a definição de erro dada na questão 7.

Exercício 13.

(EC/ET) (Adaptado de Burden, p.330) Na teoria da propagação de doenças contagiosas uma equação diferencial relativamente elementar pode ser usada para estimar o número de indivíduos infectados na população a qualquer instante desde que sejam feitas hipóteses simplificadoras apropriadas. Em particular, vamos supor que todos os indivíduos em uma população fixa tenham uma probabilidade igual de serem infectados e que, uma vez infectados, permaneçam nesse estado. Suponha que $x(t)$ denote o número de indivíduos suscetíveis no instante t e $y(t)$ denote o número de infectados. É razoável supor que a taxa na qual o número de infectados varia seja proporcional ao produto de $x(t)$ e $y(t)$ já que a taxa depende tanto do número de infectados quanto do número de suscetíveis no instante t. Se a população for grande o suficiente para supor que $x(t)$ e $y(t)$ variem continuamente então o problema pode ser expresso como

$$y'(t) = k\,x(t)y(t),$$

em que k é uma constante e $x(t) + y(t) = m$, a população total. Esta equação pode ser reescrita envolvendo apenas $y(t)$ como

$$y'(t) = k(m - y(t))y(t) \quad (I)$$

a) Supondo $m = 100.000$, $y(0) = 1000$ e $k = 2 \cdot 10^{-6}$ e que o tempo seja medido em dias, encontre uma aproximação para o número de indivíduos infectados ao final de 30 dias. Utilize o método RK4 escolhendo um passo de integração que seja apropriado.

b) A equação diferencial (I) é chamada de **Equação de Bernoulli** e pode ser resolvida analiticamente. Encontre a solução exata para a equação do item (a) e compare o valor exato de $y(30)$ com a aproximação determinada via método numérico.