UNESP Campus Rio Claro - IGCE - Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática - PGMAT
Tópicos Especiais: Computação Científica Aplicada à Matemática (Verão 2024)
Prof. Dr. Luciano Magrini
magrini@ifsp.edu.br

Lista de Exercícios I – Fundamentos de Matemática em Python

Exercício 1.
(ET) Encontre o traço e o determinante para cada uma das matrizes cuja ordem e termo geral são dados abaixo. Suponha, claro, que as matrizes são quadradas.

a) M é real de ordem 2 cujo termo geral é $a_{mn} = (m+2)^n$ para $1 \leq m, n \leq 2$.
b) M é real de ordem 3 cujo termo geral é $a_{mn} = 2n - 3m$ para $1 \leq m, n \leq 3$.
c) M é complexa de ordem 2 cujo termo geral é $a_{mn} = m + \imath \cdot n$ para $1 \leq m, n \leq 2$.

Exercício 2.
(EC) Escreva em Python (usando Numpy) as matrizes cuja ordem e termo geral são dados abaixo. Utilizando funções do Numpy determine o traço e o determinante de cada uma destas matrizes.

a) M é real de ordem 2 cujo termo geral é $a_{mn} = (m+2)^n$ para $1 \leq m, n \leq 2$.
b) M é real de ordem 3 cujo termo geral é $a_{mn} = 2n - 3m$ para $1 \leq m, n \leq 3$.
c) M é complexa de ordem 2 cujo termo geral é $a_{mn} = m + \imath \cdot n$ para $1 \leq m, n \leq 2$.

Exercício 3.
(ET) Seja A uma matriz real e quadrada de ordem 2. Prove que os autovalores de A são dados por

$$\lambda_{1,2} = \frac{Tr(A) \pm \sqrt{Tr(A)^2 - 4det(A)}}{2},$$

em que $Tr(A)$ indica o traço da matriz A e $det(A)$ indica o determinante da matriz A. Utilize o resultado demonstrado para encontrar diretamente os autovalores da matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercício 4.
(EC) Escreva uma função em Python que receba como entrada uma matriz M real quadrada de ordem 2 e devolva os dois autovetores desta matriz. Seu programa/função deve

a) "Ler" a matriz M e inicialmente calcular o traço e o determinante desta matriz.
b) A seguir, computar $\lambda_{1,2}$ como indicado no exercício 3.
c) Finalmente, imprimir na tela os valores dos autovalores encontrados.

Teste a função escrita computando os autovalores da matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, a mesma considerada no exercício 3. Compare os resultados.

Exercício 5.
(ET) Mostre que a soma dos infinitos termos de uma progressão geométrica de primeiro termo $a_1 = a$ e razão $0 < q < 1$ é igual a $S_\infty = \dfrac{a}{1-q}$. Utilize este resultado e calcule a soma dos infinitos termos da PG $10, 5, 5/2, ...$

Exercício 6.
(EC) Escreva um programa que calcule o erro cometido ao se tentar aproximar o resultado da soma dos infinitos termos da PG $10, 5, 5/2, ...$ pela soma dos primeiros n termos. Utilize seu código para computar o erro para

a) $n = 50$
b) $n = 250$
c) $n = 1000$

Exercício 7.
(EC) Reformule o código do exercício 6 para que ele determine o número n de termos a serem somados de modo que o erro cometido na aproximação da soma infinita de uma PG seja no máximo igual a E. Utilize este código para encontrar o número de termos que devem ser somados para que o erro E na aproximação da soma dos termos da PG $3, 3/4, 3/8, ...$ seja no máximo igual a

a) $E = 10^{-2}$
b) $E = 10^{-5}$
c) $E = 10^{-10}$

Sugestão: Seja a o primeiro termo, q a razão e S_n a soma dos n primeiros termos de uma PG de soma convergente. Para que o erro seja no máximo igual a E deve-se ter $S_\infty - S_n \geq E$. Dada essa relação, o código deve retornar o menor valor de n tal que a desigualdade se sustenta.